UNIVERSITATEA „BABEŞ-BOLYAI” CLUJ-NAPOCA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Transformări integrale pentru anumite clase de funcţii univalente

TEZĂ DE DOCTORAT

Coordonator ştiinţific:
Prof. Univ. Dr. Valer Daniel Breaz

Doctorand:
Maria Oana Trif (căs. Pârva)

Cluj-Napoca

2025

Cuprins

Articole publicate

1) O. M. Pârva, D. Breaz, *Univalence properties of an integral operator*, Afrika Matematika, https://doi.org/10.1007/s13370-022-00975-0, Vol. 33, No. 37, (2022) - revistă ISI.

2) O. M. Pârva, D. Breaz, S. Owa, *Properties of the coefficients of an integral operator*, General Mathematics, Vol. 31, No. 1 (2023) - revistă ZMath.

3) O. M. Pârva, D. Breaz, *Univalence conditions for analytic functions on the exterior unit disk*, Journal of Advanced Mathematical Studies, Vol. 16, no. 2 (2023), pp. 125 -133 - revistă ZMath, ISC, EBSCO.

4) O. M. Pârva, D. Breaz, *Univalence conditions of an integral operator on the exterior unit disk*, Studia Universitatis Babeș-Bolyai Mathematica, Vol 69, No. 4 (2024), pp. 749 -758 - revistă ISI.

Index de notaţii

$\Re(\alpha)$ - partea reală a numărului complex α
$Im(\alpha)$ - partea imaginară a numărului complex α

Mulţimi:
$\mathbb{C}$ - planul complex
$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ - planul complex extins
$\mathbb{C}^*$ - mulţimea numerelor complexe nenule
$\mathbb{R}$ - mulţimea numerelor reale
$\mathbb{N}_1^*$ - mulţimea numerelor naturale nenule în afară de 1
C_r - imaginea cercului $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r, 0 < r < 1\}$, printr-o funcţie olomorfă f
U - interiorul discului unitate unde $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
U_R - discul de rază R
U^* - interiorul discului unitate perforat unde $U^* = U - \{0\}$
$\dot{U}(z_0; R) = U(z_0, R) - \{z_0\}$ - discul punctat de centru z_0 şi rază $R > 0$
$\mathbb{H}(U)$ - mulţimea funcţiilor olomorfe din discul unitate
$\mathbb{H}_u(U)$ - mulţimea funcţiilor univalente (olomorfe şi injective) din discul unitate
$E(q)$ - mulţime de excepţie, $E(q) = \{\zeta \in \partial U : \lim_{z \to \zeta} q(z) = \infty, q'(\zeta) \neq 0, \zeta \in \partial U \setminus E(q)\}$
$\overline{U}$ - discul unitate închis
$\overline{U}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r, r > 0\}$ - discul unitate închis de centru a şi rază r
Q - mulţimea funcţiilor care sunt olomorfe şi injective pe $\overline{U} \setminus E(q)$
W - exteriorul discului unitate, $W = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$
U^- - exteriorul discului unitate deschis, $U^- = \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| > 1\}$
W_R - exteriorul discului unitate de rază R, $W_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$
Pol simplu - pol singular izolat z_0 al unei funcţii $f \in \mathbb{H}(U)$ unde $\exists \lim_{x \to z_0} f(z) = \infty$ şi f se poate prelungi în z_0 definind $f(z_0) = \infty$

Clase şi subclase:
A - clasa funcţiilor analitice definite pe U, normate cu condiţiile: $f(0) = 0 = f'(0) - 1$ - pag. 12
S - subclasă a clasei A, ce conţine funcţii univalente din U^* - pag. 12
O - clasa funcţiilor analitice definite pe exteriorul discului unitate - pag. 12
Σ - subclasa lui O care conţine funcţiile univalente - pag. 12
O_1 - subclasă a lui O care conţine funcţiile meromorfe şi injective - pag. 12
O_j - subclasă a lui O - pag. 12
$\Psi_n[\Omega, q]$ - clasa funcţiilor admisibile - pag. 19
T - subclasă a clasei S - pag. 22

Operatori:

Teoreme, Corolarii, Leme:

Introducere

Analiza complexă, cunoscută şi sub numele de analiza funcţiilor de variabile complexe, are o istorie de-a lungul mai multor secole şi este strâns legată de dezvoltarea matematicii.

Conceptul de numere complexe a început să apară în secolul al XVI-lea, în special datorită lucrărilor lui G. Cardano, care a abordat soluţiile ecuaţiilor de gradul trei, unde a întâlnit radicali din numere negative.

Între secolele XVI şi XVII matematicieni precum R. Bombelli au început să accepte numerele imaginare (i, unde i^2 = -1) şi să le folosească în calcule. Definiţia numerelor complexe sub formă de perechi ordonate de numere reale a fost introdusă în anul 1836 de către W. Hamilton. După cum precizează acadamicianul S. Marcus "Numerele complexe au fost introduse nu dintr-o simplă dorinţă de a extinde conceptul de număr, ci pentru că matematica, mecanica şi fizica aveau nevoie de aceste numere."

În secolele XVIII şi XIX, analiza complexă a început să se contureze ca o parte esenţială a matematicii, cu contribuţii semnificative din partea lui L. Euler şi A. L. Cauchy.

Cauchy a formulat teorema fundamentală a analizei complexe care a stabilit legături între funcţiile analitice şi integralele lor.

Analiza complexă este una dintre disciplinele unde şcoala românească de matematică a adus importante contribuţii şi, totodată, ea este una din ramurile clasice ale matematicii cu largi aplicaţii în diferite domenii ale ştiinţei şi tehnicii. Două direcţii importante ale analizei complexe sunt teoria reprezentărilor conforme şi teoria geometrică a funcţiilor analitice.

Teoria funcțiilor de variabile complexe a evoluat în secolul al XIX-lea, cu dezvoltarea conceptelor precum funcţiile olomorfe şi teoria rezidurilor. Aceste noțiuni sunt esenţiale pentru evaluarea integralelor complexe şi pentru aplicarea analizei complexe în alte domenii cum ar fi fizica.

La începutul secolului al XX-lea matematicienii precum H. Poincaré și K. Weierstrass au extins teoriile analizei complexe, iar aplicațiile lor s-au extins în fizica teoretică, inginerie și chiar în teoria comunicațiilor.

Teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă s-a conturat ca ramură aparte a analizei complexe în secolul al XX-lea când au apărut lucrări importante în acest domeniu. Acestea sunt datorate următorilor matematicieni: P. Köebe [32] (1907), T. H. Gronwall [27] (1914), [28] (1916), J. W. Alexander [4] (1915), L. Bieberbach [8], [9] (1916).

În prezent există numeroase tratate și monografii dedicate studiului funcțiilor univalente, dintre care amintim pe cele ale lui P. Montel, Z. Nehari, L. V. Ahlfors, Ch. Pommerenke, A. W. Goodman, P. L. Duren, D. J. Hallenbeck, T. H. Mac Gregor, S. S. Miller, P. T. Mocanu.

Problema extinderii rezultatelor din teoria geometrică a funcțiilor de o variabilă complexă la mai multe variabile complexe a fost formulată prima dată de către H. Cartan în Apendixul la cartea lui P. Montel apărută în anul 1933. Extinderea proprietăților geometrice pentru aplicațiile biolomorfe a fost începută între anii 1960-1980 de către matematicienii japonezi I. Ono, T. Higuchi, K. Kikuchi și a fost reluată în ultimii douăzeci de ani de către J. A. Pfaltzgraff, T. J. Suridge, C. FitzGerald, S. Gong, I. Graham, G. Kohr, H. Hamada, P. Liczberski, P. Curt, T. Bulboacă, D. Breaz, M. Acu, Gr. St. Sălăgean, R. Szasz, L. I. Cotîrlă, D. Răducanu, B. Arpad, N. N. Pascu, etc.

În lucrarea [8] (1916), L. Bieberbach formulează celebra sa conjectură, care îi poartă numele, în care acesta a demonstrat estimarea exactă a coeficientului a_2 pentru funcţiile din clasa S, funcţii normate şi univalente în discul unitate U al planului complex, adică $|a_2| \leq 2$.

Conjectura lui Bieberbach, şi anume: dacă $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + ... \in S, z \in U$, atunci $|a_n| \leq n$, cu egalitate dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei lui Köebe, a fost demonstrată abia în 1984, de către Louis de Branges [11], timp în care au fost impulsionate cercetările în domeniul funcţiilor univalente, una din direcţii fiind obţinerea estimărilor exacte ale coeficienţilor pentru diferite subclase de funcţii univalente.

Totodată au apărut şi s-au dezvoltat noi metode de cercetare, cum ar fi: metoda parametrică a lui L. Lowner, metodele variaţionale iniţiate de M. Schiffer [70], G. M. Goluzin [25], K. Sakaguchi [69], metodele bazate pe inegalităţile lui H. Grunsky [29] şi G. M. Goluzin [26], metoda funcţiilor extremale a lui L. Brickman [18], [19] şi T. H. MacGregor [37] etc.

La dezvoltarea acestui domeniu al matematicii, un rol deosebit l-au avut şi matematicieni români.

G. Călugăreanu este creatorul şcolii româneşti de teoria funcţiilor univalente, care a obţinut primele condiţii necesare şi suficiente de univalenţă exprimate cu ajutorul coeficienţilor, iar P. T. Mocanu a introdus noţiunea de α-convexitate, a abordat problema injectivităţii pentru funcţii neanalitice şi a elaborat împreună cu S. S. Miller binecunoscuta metodă de studiu a unor clase de funcţii univalente, numită "metoda funcţiilor admisibile", "metoda subordonărilor diferenţiale", iar mai recent "teoria superordonărilor diferenţiale".

Teoria funcţiilor univalente este importantă mai ales datorită multiplelor sale aplicaţii pe de o parte în diferite ramuri ale ştiinţelor naturii, ca de exemplu fizica teoretică (în special mecanica fluidelor, electricitate, teoria căldurii) şi în tehnică, iar pe de altă parte la multe ramuri ale matematicii, de exemplu algebră, teoria analitică a numerelor, ecuaţii diferenţiale, etc.

Operatorii integrali au fost studiaţi începând cu secolul al XX-lea de către mai mulţi matematicieni, printre care amintim pe J. W. Alexander, R. Libera, S. Bernardi, S. S. Miller şi, mai recent, P. T. Mocanu, M. O. Reade, R. Singh, R. Sijuk, E. Deniz, M. Caglar, H. Orhan, G. Murugusundaramoorthy, L. I. Cotîrlă, A. K.

Wanas, etc.

Studiul operatorilor integrali a cunoscut o continuă dezvoltare, obţinâdu-se de-a lungul timpului, multe rezultate remarcabile.

În lucrarea "Teoria Geometrică a funcţiilor univalente" [45], autorii: T. Bulboacă, P. T. Mocanu şi Gr. Şt. Sălăgean, menţionează rezultate importante obţinute din clasa funcţiilor univalente din exteriorul discului unitate, precum: "Teorema ariei", "Teorema de delimitare a coeficienţilor funcţiilor din clasa Σ" şi definiţiile claselor de funcţii stelate, respectiv convexe în exteriorul discului unitate.

Acestea au reprezentat punctul de pornire al lucrării de faţă "Transformări integrale pentru anumite clase de funcţii univalente", în cadrul căreia două capitole cuprind în întregime rezultate proprii ale studiului proprietăţilor funcţiilor univalente pe interiorul discului unitate şi proprietăţi ale funcţiilor meromorfe definite pe exteriorul discului unitate.

În această lucrare s-au obţinut noi rezultate cu privire la unele subclase de funcţii analitice. Sunt studiate proprietăţi de univalenţă, stelaritate şi convexitate, atât pentru operatorii integrali cunoscuţi cât şi pentru noi operatori integrali.

Lucrarea cuprinde un index de notaţii, o introducere, trei capitole, concluzii şi o bibliografie.

Primul capitol intitulat *"Noţiuni şi rezultate preliminarii"* conţine 6 paragrafe în care sunt prezentate noţiuni de bază referitoare la funcţiile de o variabilă complexă şi la operatorii integrali, noţiuni care vor fi folosite apoi la demonstrarea rezultatelor din această lucrare.

Astfel, sunt definite noţiunile de: funcţie olomorfă, funcţie analitică, funcţie univalentă, precum şi Lema generală a lui Schwarz care are o deosebită însemnătate în demonstrarea rezultatelor principale. De asemenea, sunt descrise principalele noţiuni legate de: subordonări, metoda subordonărilor diferenţiale şi clasa funcţiilor admisibile.

În continuare sunt prezentate mai multe clase speciale de funcţii univalente din care menţionez: clasa funcţiilor stelate, clasa funcţiilor convexe, clasa funcţiilor stelate de un anumit ordin şi clasa funcţiilor convexe de un anumit ordin.

În ultimele două paragrafe al acestui capitol sunt prezentate câteva criterii de univalenţă şi operatori integrali cunoscuţi în literatura de specialitate, noţiuni care vor fi folosite în demonstrarea rezultatelor din capitolele următoare.

Capitolele doi şi trei sunt dedicate contribuţiilor aduse de către autoare în domeniul Teoriei geometrice a funcţiilor, unele rezultate fiind publicate, iar altele fiind trimise sau acceptate spre publicare.

Capitolul *"Proprietăţi ale unor operatori integrali univalenţi"* conţine în primul subcapitol studiul anumitor cazuri particulare ale operatorului integral $F_\beta(f,g)(z)$ obţinut în lucrarea "Properties of a New Integral Operator" de către R. Bucur, L. Andrei şi D. Breaz. Autoarea acestei teze îşi aduce propria contribuţie prin îmbunătăţirea condiţiilor de univalenţă şi de apartenenţă ale operatorului $F_\beta(f,g)(z)$ la clasa S.

În secţiunea 2.2 se discută despre condiţii de univalenţă ale operatorului integral $F_{n,\beta}(z)$.

Aplicând Criteriul lui N. N. Pascu şi Lema generală a lui Schwarz s-au găsit noi proprietăţi ale acestui operator care a fost introdus în lucrarea *Mapping properties of a new Integral Operator* de către P. Dicu, R. Bucur şi D. Breaz.

Sunt prezentate câteva condiţii de univalenţă ale unui nou operator integral $G_{\beta,\gamma}(f,g)(z)$ în secţiunea 2.3, a căror demonstraţii au fost realizate cu ajutorul Criteriului lui N. N. Pascu şi a Lemei lui Schwarz.

Un criteriu de univalenţă pentru operatorul $G_{n,\beta}(z)$ este dat în secţiunea 2.4, unde este definit ca o generalizare a n funcţii, a operatorului dat în secţiunea 2.2 din cadrul acestei lucrări.

Capitolul care urmează, intitulat *"Proprietăţi ale anumitor clase de funcţii meromorfe definite pe exteriorul discului unitate"*, cuprinde şapte secţiuni, în care sunt descrise proprietăţi şi condiţii de univalenţă ale unor funcţii meromorfe, respectiv operatori integrali definiţi pe exteriorul discului unitate. Autoarea a găsit condiţii suficiente de univalenţă, convexitate şi stelaritate, condiţii asupra coeficienţilor unor clase de funcţii univalente, meromorfe, definite pe exteriorul discului unitate şi pentru diverse subclase de funcţii analitice, aici fiind date şi exemple.

În secţiunea 3.1, se studiază proprietăţi ale unor funcţii din clasa funcţiilor meromorfe injective, stelate de ordin γ, $O_1^*(\gamma)$, şi funcţii din clasa funcţiilor meromorfe convexe de ordin γ, $O_k(\gamma)$. Condiţii de univalenţă ale unor operatori integrali formaţi din funcţii definite pe exteriorul discului unitate, sunt prezentate în secţiunile 3.2, 3.3, şi 3.6. Operatorii menţionaţi în secţiunile anterioare s-au format pornind de la operatorul $F_{\alpha_i,\beta}(z)$ introdus de N. Seenivasagan şi D. Breaz în lucrarea [71], iar rezultatele obţinute au fost publicate în jurnale precum Afrika Matematika [55], Journal of Advanced Mathematical Studies [57], Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica [58].

În secţiunea 3.5 s-au obţinut anumite valori ale coeficienţilor operatorului integral $E(z)$, care reprezintă un caz particular al operatorului $G_{\alpha_i,\beta}(z)$, demonstrând apartenenţa operatorului $E(z)$ la clasa funcţiilor meromorfe stelate de ordin 0, $O_1^*(0)$. Aceste rezultate sunt publicate în jurnalul General Mathematics [56].

Ultimul capitol intitulat *"Concluzii"* cuprinde o sinteză a rezultatelor obţinute în anii de studiu.

Lucrarea se încheie cu o bibliografie conţinând 77 de titluri dintre care nouă lucrări sunt semnate de autoare, patru dintre acestea fiind publicate, iar cinci trimise sau acceptate spre publicare în reviste de prestigiu din domeniul Teoriei geometrice a funcţiilor, din ţară sau străinătate, rezultate care au fost prezentate şi la conferinţe. Lucrarea "Univalence properties of an integral operator", a fost susţinută la manifestarea ştiinţifică: "13th Joint Conference on Mathematics and Informatics, ELTE, Hungary, 1-3 October, 2020.

În încheiere, doresc să-i mulţumesc d-lui Prof. Univ. Dr. Valer Daniel Breaz pentru îndrumare, susţinere şi sprijinul acordat pe tot parcursul elaborării şi redactării acestei teze.

De asemenea, doresc să mulţumesc colegilor cu care am colaborat în studiul şi dezvoltarea subiectului tratat.

Capitolul 1

Noţiuni şi rezultate preliminarii

În acest capitol sunt prezentate noţiuni şi rezultate de bază folosite în elaborarea şi demonstrarea rezultatelor găsite.

1.1 Definiţii şi notaţii

Considerăm $\mathbb{C}$ mulţimea numerelor complexe. Se notează interiorul discului unitate cu $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, cu $U^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\} = U - \{0\}$ - interiorul discului unitate perforat şi notăm cu $\dot{U}(z_0; R) = U(z_0, R) - \{z_0\}$ - discul punctat de centru z_0 şi rază $R > 0$.

Notăm cu $\mathbb{H}(U)$ - mulţimea funcţiilor olomorfe din discul unitate U, iar cu $\mathbb{H}_u(U)$ notăm mulţimea funcţiilor univalente (olomorfe şi injective) din discul unitate U.

Definiţia 1.1.1. *[45] Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă. O funcţie complexă $f : D \to \mathbb{C}$ se numeşte olomorfă pe D dacă f este derivabilă în fiecare punct z_0 din D.*

Mulţimea tuturor funcţiilor olomorfe pe D se notează $\mathbb{H}(D)$.

Definiţia 1.1.2. *[45] Fie $M \subset \mathbb{C}$ o mulţime oarecare. O funcţie $f : M \to \mathbb{C}$ se numeşte olomorfă pe mulţimea oarecare $M \subset \mathbb{C}$, dacă există o mulţime deschisă D care include pe M astfel încât f să fie olomorfă pe D.*

O funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ se numeşte funcţie întreagă.

Definiţia 1.1.3. *[30] Funcţia f fiind olomorfă pe mulţimea deschisă $G \subset \mathbb{C}$, un punct $a \in G$ se numeşte zero al lui f dacă $f(a) = 0$. Dacă există un $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ şi $f^{(n)}(a) \neq 0$, atunci a se numeşte un zero multiplu de ordinul n al funcţiei f. Dacă $n = 1$, a se numeşte un zero simplu.*

Definiţia 1.1.4. *[30] Fiind dată o funcţie olomorfă pe mulţimea deschisă $G \subset \mathbb{C}$, un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte punct singular izolat al funcţiei f dacă $z_0 \notin G$, dar există o vecinătate punctată a lui z_0 inlcusă în G, adică există un $R > 0$ astfel încât $\dot{U}(z_0; R) \subset G$.*

Definiţia 1.1.5. *[30] Un punct singular izolat z_0 al funcţiei $f \in \mathbb{H}(G)$ se numeşte pol dacă există $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$; el se numeşte punct singular esenţial izolat dacă f nu are limită în z_0.*

Dacă z_0 este un pol al funcţiei atunci f se poate prelungi în z_0 definind $f(z_0) = \infty$. În acest fel funcţia devine $\mathbb{C}_\infty$ continuă în punctul z_0 (adică continuă în topologia lui $\mathbb{C}_\infty$).

Teorema 1.1.1. *[30] Dacă z_0 este un punct singular izolat al funcţiei $f \in \mathbb{H}(G)$, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) z_0 este un pol.

b) z_0 este un punct regular şi anume un zero pentru $\frac{1}{f}$.

c) Există un $n \in \mathbb{N}^*$ unic astfel încât într-un disc punctat centrat în z_0 să aibă loc dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, a_{-n} \neq 0, \tag{1.1}$$

d) Există un $n \in \mathbb{N}^*$ unic şi o funcţie unică $g \in \mathbb{H}(G \cup \{z_0\})$ astfel încât $g(z_0) \neq 0$ şi

$$f(z) = (z-z_0)^{-n} g(z), \forall z \in G. \tag{1.2}$$

Fie A clasa funcţiilor analitice definite pe interiorul discului unitate, normate cu condiţiile: $f(0) = 0 = f'(0) - 1$.

Se notează cu $W = \{z \in \mathbb{C}_\infty, |1 < |z| < \infty\}$ exteriorul discului unitate.

Notăm cu O clasa funcţiilor analitice g definite pe exteriorul discului unitate.

Se notează cu Σ subclasa lui O care conţine funcţiile univalente din W.

Notăm cu O_1 subclasa lui O care conţine funcţiile $g : W \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ meromorfe, normate şi injective cu unicul pol (simplu) $z = \infty$ din W, care au dezvoltarea în serie Laurent de forma

$$g(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}, 1 < |z| < \infty, \tag{1.3}$$

cu $g(\infty) = \infty, g'(\infty) = 1$.

Subclasa lui O conţine funcţiile g de forma

$$g(z) = z + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}, j \in \mathbb{N}_1^* = \mathbb{N} - \{0, 1\}, \tag{1.4}$$

se notează cu O_j.

Fie S subclasa clasei A, ce conţine funcţii univalente pe discul unitate care îndeplinesc condiţiile: $f(0) = 0 = f'(0) - 1$.

Vom nota cu $S = \{f \in A | f \text{ univalentă în } U\}$.

Proprietatea 1.1.1. *[45] Orice funcţie $f \in A$ admite o dezvoltare în serie de puteri de forma*

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, z \in U. \tag{1.5}$$

Definiţia 1.1.6. *[45] O funcţie olomorfă şi injectivă pe un domeniu D din $\mathbb{C}$ se numeşte funcţie univalentă pe D.*

Se notează cu $\mathbb{H}_u(D)$ mulţimea funcţiilor univalente pe D.

Definiţia 1.1.7. *[45] Fie $f : D \to \mathbb{C}, z_0 \in D$. Spunem că funcţia f este analitică în punctul z_0 sau dezvoltabilă în serie Taylor în z_0 dacă există un disc,*

$U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset D$ astfel încât f să fie suma unei serii Taylor, adică:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, z \in U(z_0, r).$$

Spunem că f este analitică pe domeniul D dacă este analitică în fiecare punct din D.

Teorema 1.1.2. *[45] (Teorema analiticităţii funcţiilor olomorfe) O funcţie $f : D \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe D dacă şi numai dacă f este analitică pe D.*

Teorema 1.1.3. *[45] Dacă $f \in \mathbb{H}_u(D)$, atunci $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$.*

Reciproca acestei teoreme nu este în general valabilă, după cum se observă din exemplul dat de funcţia $z \mapsto e^z$, care nu este univalentă pe $\mathbb{C}$ deşi derivata sa nu se anulează în niciun punct din $\mathbb{C}$.

Remarcăm că pentru funcţiile reale derivabile, neanularea derivatei pe un interval este o condiţie suficientă de injectivitate dar nenecesară, după cum arată exemplul $x \mapsto x^3 (x \in \mathbb{R})$.

Această deosebire esenţială dintre cazul complex şi cel real se explică prin faptul că pentru funcţiile complexe nu are loc teorema de medie a lui Lagrange.

Teorema 1.1.4. *[45] Dacă funcţia f este olomorfă în U şi $|f(z)| < 1$ în U, atunci pentru orice $\xi \in U$ şi $z \in U$ au loc inegalităţile:*

$$\left| \frac{f(\xi) - f(z)}{1 - \overline{f(z)} f(\xi)} \right| \leq \left| \frac{\xi - z}{1 - \overline{z}\xi} \right|, \tag{1.6}$$

respectiv:

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}. \tag{1.7}$$

Au loc egalităţile în cazul în care funcţia:

$$f(z) = \frac{\varepsilon(z + t)}{1 + \overline{t}z},$$

unde $|\varepsilon| = 1$ şi $|t| < 1$.

Observaţia 1.1.1. *[45] Pentru $z = 0$ inegalităţile din Teorema 1.1.4 devin:*

$$\left| \frac{f(\xi) - f(0)}{1 - \overline{f(0)} f(\xi)} \right| \leq |\xi|, \tag{1.8}$$

respectiv

$$|f(\xi)| \leq \frac{|\xi| + |f(0)|}{1 + |f(0)| \cdot |\xi|}. \tag{1.9}$$

Considerând $f(0) = a$ *şi* $\xi = z$ *obţinem:*

$$|f(z)| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |a| \cdot |z|}, \forall z \in U. \tag{1.10}$$

Un rezultat esenţial din teoria funcţiilor univalente este Teorema ariei, obţinută de L. Bieberbach [9], [8] şi apoi de T. Gronwall [27].

Teorema 1.1.5. *[45] (Teorema ariei) Dacă* $g(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}$, *este o funcţie din clasa* O_1, *atunci aria:*

$$E(g) = \pi \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|^2\right) \geq 0, \tag{1.11}$$

unde $U^- = \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| > 1\}$ *şi* $E(g) = \mathbb{C} - g(U^-)$.
Prin urmare $\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|^2 \leq 1$, *aria se înţelege în sensul de măsură Lebesque bidimensională.*

Utilizând teorema ariei, se deduce următoarea delimitare a coeficienţilor funcţiilor din clasa Σ.

Corolar 1.1.1. *[45] (Teorema de delimitare a coeficienţilor funcţiilor din* Σ*) Dacă* $g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + ... \in \Sigma$, *atunci* $|b_1| \leq 1$, *iar egalitatea* $|b_1| = 1$ *are loc dacă şi numai dacă* $g(z) = z + b_0 + \frac{e^{i\tau}}{z}$, $z \in U^-, \tau \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.1.6. *[45] (Teorema lui Bieberbach relativ la coeficientul* a_2*) Dacă* $f \in S$, $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$, *atunci* $|a_2| \leq 2$.

Egalitatea $|a_2| = 2$ *are loc dacă şi numai dacă* f *este de forma*

$$K_\tau(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\tau} z)^2}, unde \tag{1.12}$$

K_τ *este funcţia lui Köebe.*

Lema 1.1.1. *[45]([49]) (Lema Generală a lui Schwarz) Fie* f *o funcţie olomorfă în discul:*

$$U_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\},$$

cu proprietatea că:

$$|f(z)| < M, \text{ pentru } M \text{ fixat}. \tag{1.13}$$

Dacă f *are în* $z = 0$ *un zerou de multiplicitate mai mare decât* m, *atunci:*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m} |z|^m, z \in U_R. \tag{1.14}$$

Egalitatea din relaţia 1.14 este adevărată pentru $z \neq 0$ *dacă:*

$$f(z) = e^{i\tau} \frac{M}{R^m} z^m, z \in U_R, \tag{1.15}$$

atunci τ *este o constantă.*

Lema 1.1.2. *(Lema lui Schwarz)([48], [49], [13]) Dacă f este o funcţie olomorfă pe discul unitate $U = U(0,1)$ care verifică condiţiile $f(0) = 0$ şi $|f(z)| < 1, \forall z \in U$, atunci:*

$$|f(z)| \leq |z|, \forall z \in U,$$

şi:

$$|f'(0)| \leq 1.$$

Dacă $|f(z_0)| = |z_0|$, $z_0 \in U$ sau $|f'(0)| = 1$, atunci $\exists c \in \mathbb{C}, |c| = 1$ astfel încât $f(z) = cz, \forall z \in U$.

Se ştie că între clasa S şi clasa Σ există următoarele relaţii:

Propoziţia 1.1.1. *[33]*

i) Fie $f \in S$ şi $g(\zeta) = \frac{1}{f(\frac{1}{\zeta})}$, atunci $g \in \Sigma$ şi $g(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in W$.

ii) Dacă $g \in \Sigma$ şi $g(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in W$, atunci $f \in S$, $f(z) = \frac{1}{g(\frac{1}{z})}$, $z \in U$.

1.2 Metoda subordonărilor diferenţiale

Metoda subordonărilor diferenţiale reprezintă o sinteză între analiza funcţională şi geometria complexă, fiind un instrument puternic pentru investigarea funcţiilor analitice. Această metodă are aplicaţii semnificative în studiul funcţiilor univalente, al cartografierilor conforme şi al teoriei geometrice a funcţiilor, ceea ce permite caracterizarea şi constrângerea funcţiilor analitice prin intermediul relaţiilor diferenţiale şi al conceptului de subordonare apărut iniţial în secolului XX.

În 1923, K. Loewner a introdus o ecuaţie diferenţială, ecuaţia Loewner pentru a studia funcţiile univalente. Aceasta a deschis calea pentru aplicarea metodelor diferenţiale în analiza subordonărilor.

Loewner a demonstrat că funcţiile univalente pot fi caracterizate ca soluţii ale unei ecuaţii diferenţiale dependente de un parametru real.

În a doua jumătate a secolului al XX-lea, metoda a fost extinsă şi formalizată de matematicieni precum J. D. Miller, W. T. Scott şi B. Pommerenke. Aceştia au combinat conceptul de subordonare cu ecuaţiile diferenţiale pentru a caracteriza clase largi de funcţii analitice şi univalente.

Metoda a devenit un instrument esenţial în studiul claselor de funcţii analitice, cum ar fi funcţiile stelate, convex-univalente şi alte clase asociate.

În teoria modernă, metoda este utilizată în geometria complexă, dinamica holomorfă şi analiza modelelor de fluxuri. Dezvoltarea sa istorică de la conceptele de subordonare şi ecuaţiile Loewner până la aplicaţiile moderne, a demonstrat versatilitatea acestei metode în înţelegerea şi clasificarea funcţiilor complexe.

Definiţia 1.2.1. *[45] Fie $f, g \in \mathbb{H}(U)$. Spunem că funcţia f este subordonată funcţiei g (sau g este superordonată funcţiei f) şi vom nota:*

$$f \prec g \text{ sau } f(z) \prec g(z),$$

dacă există o funcţie $w \in \mathbb{H}(U)$, *cu* $w(0) = 0$ *şi* $|w(z)| < 1$, $z \in U$, *astfel încât:*

$$f(z) = g[w(z)],\ z \in U.$$

Propoziţia 1.2.1. *[45]*
1) Dacă $f \prec g$, *atunci* $f(0) = g(0)$ *şi* $f(U) \subseteq g(U)$.

2) Dacă $f \prec g$, *atunci* $f(\overline{U_r}) \subseteq g(\overline{U_r})$, $r < 1$ *egalitatea având loc dacă şi numai dacă* $f(z) = g(\lambda z), |\lambda| = 1$.

3) Dacă $f \prec g$, *atunci* $\max\{|f(z)| : |z| \leq r\} \leq \max\{|g(z)| : |z| \leq r\}, r < 1$, *egalitatea având loc dacă şi numai dacă* $f(z) = g(\lambda z)$, $|\lambda| = 1$.

4) Dacă $f \prec g$, *atunci* $|f'(0)| \leq |g'(0)|$, *egalitatea având loc dacă şi numai dacă* $f(z) = g(\lambda z), |\lambda| = 1$.

În cazul în care funcţia g este univalentă, avem următoarea teoremă ce caracterizează relaţia de subordonare.

Teorema 1.2.1. *[45] [66] Fie* $f, g \in \mathbb{H}(U)$ *şi presupunem că* g *este univalentă în* U. *Atunci* $f \prec g$ *dacă şi numai dacă* $f(0) = g(0)$ *şi* $f(U) \subseteq g(U)$.

Corolar 1.2.1. *[35] [66] (Principiul subordonării al lui Lindelöf)*
Fie funcţiile $f, g \in \mathbb{H}(U)$ *astfel încât* g *este univalentă în* U *şi* $f(0) = g(0)$.

1) *Dacă* $f(U) \subseteq g(U)$, *atunci* $f(\overline{U_r}) \subseteq g(\overline{U_r})$, $0 < r < 1$.

2) *Egalitatea* $f(\overline{U_r}) = g(\overline{U_r})$, *pentru un* $r < 1$, *are loc dacă şi numai dacă* $f(U) = g(U)$, *sau* $f(z) = g(\lambda z)$, $|\lambda| = 1$.

Acest corolar este o consecinţă a teoremei anterioare şi a proprietăţilor de mai sus şi reprezintă o generalizare a Lemei lui Schwarz, având multiple aplicaţii în teoria geometrică a funcţiilor analitice.

Propoziţia 1.2.2. *[45]*
Fie $f, g \in \mathbb{H}_u(U)$. *Dacă* $f \prec g$ *avem:*

1) $|g^{-1}(w)| \leq |f^{-1}(w)|$, *pentru orice* $w \in f(U)$.
   Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $f(z) = g(\lambda z)$, $|\lambda| = 1$.

2) *Dacă în plus, există un* $z_0 \in U$ *cu* $|z_0| = r$ *astfel încât* $f(z_0) \in \partial g(U_r)$, *atunci* $f(U) = g(U)$, *sau* $f(z) = g(\lambda z)$, $|\lambda| = 1$.

În lucrările [43], [42], S.S. Miller şi P.T. Mocanu au inaugurat teoria subordonărilor diferenţiale, care a fost ulterior dezvoltată în multe alte lucrări.

Metoda *subordonărilor diferenţiale* (sau *metoda funcţiilor admisibile*) este una dintre cele mai noi metode folosite în teoria geometrică a funcţiilor analitice, având un mare merit atât în demonstrarea mult mai simplă a unor rezultate cunoscute deja, cât şi în obţinerea multor rezultate noi. Această metodă este o tehnică utilizată în analiza complexă și teoria funcțiilor analitice pentru a aproxima soluțiile unor probleme variate, bazându-se pe selecția unei clase de funcții analitice care satisfac anumite condiții impuse de problemă și pe utilizarea acestor funcții pentru a construi soluții aproximative.

Metoda funcțiilor admisibile are trei etape:

- *definirea unei clase de funcții* – se alege un ansamblu de funcții analitice care sunt compatibile cu restricțiile impuse de problemă (ex. condiții la frontieră, restricții de regularitate).

- *constrângeri* – funcțiile trebuie să respecte anumite condiții, cum ar fi: să fie analitice într-un domeniu dat și să îndeplinească cerințele specifice ale problemei.

- *optimizare* – se caută o funcție din această clasă care minimizează sau maximizează o anumită funcțională asociată problemei.

Urmează *metoda subordonărilor diferenţiale* prezentată în formă generală.

Fie $\Omega, \Delta \subset \mathbb{C}, p \in \mathbb{H}(U)$ cu $p(0) = a$, $a \in \mathbb{C}$, şi $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$. Se pune problema studierii unor implicaţii de forma:

$$\{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) : z \in U\} \subset \Omega \Rightarrow p(U) \subset \Delta. \tag{1.16}$$

Menţionăm faptul că funcţia ψ poate fi considerată şi cu valori în $\mathbb{C}_\infty$ şi anume $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}_\infty$, teoria prezentată în continuare fiind valabilă şi pentru o astfel de funcţie ψ.

În legătură cu implicaţia (1.16) se pot formula trei tipuri de probleme:

Problema 1) Fiind date mulţimile Ω şi Δ să se găsească condiţii asupra funcţiei ψ astfel încât implicaţia (1.16) să aibă loc. O astfel de funcţie ψ se numeşte funcţie admisibilă.

Problema 2) Fiind date funcţia ψ şi mulţimea Ω se caută mulţimea Δ astfel încât implicaţia (1.16) să aibă loc. În plus se caută "cea mai mică" mulţime Δ cu această proprietate.

Problema 3) Fiind date funcţia ψ şi mulţimea Δ se caută mulţimea Ω astfel încât să aibă loc relaţia (1.16). În plus se caută "cea mai mare" mulţime Ω cu această proprietate.

Dacă Ω şi Δ sunt domenii simplu conexe din $\mathbb{C}$, diferite de $\mathbb{C}$, atunci implicaţia (1.16) poate fi rescrisă în termeni de subordonări.

Se cunoaşte că dacă Ω şi Δ sunt domenii simplu conexe din $\mathbb{C}$, diferite de $\mathbb{C}$, şi $a \in \Delta$, atunci există transformările conforme:

$$q : U \to \Delta,\ q(U) = \Delta,\ q(0) = a,$$

şi:
$$h : U \to \Omega, h(U) = \Omega, h(0) = \psi(a, 0, 0; 0).$$
Dacă în plus, ψ este olomorfă în U, atunci (1.16) devine:

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec q(z). \tag{1.17}$$

Definiţia 1.2.2. *[45]*

1) Fie $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$, şi funcţia h univalentă în U. Dacă funcţia $p \in \mathbb{H}[a, n]$ verifică subordonarea diferenţială:

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z),\ z \in U, \tag{1.18}$$

atunci funcţia p se numeşte (a, n) soluţie a subordonării diferenţiale (1.18), sau, pe scurt, soluţie a subordonării diferenţiale (1.18).

2) Subordonarea (1.18) poartă denumirea de subordonare diferenţială de ordinul doi, iar funcţia q univalentă în U, se numeşte (a, n) dominantă a soluţiilor subordonării diferenţiale (1.18), sau mai simplu, dominantă a subordonării diferenţiale (1.18), dacă $p(z) \prec q(z)$ oricare ar fi funcţia p care satisface relaţia (1.18).

3) O dominantă $\tilde{q}$ astfel încât $\tilde{q}(z) \prec q(z)$ oricare ar fi dominanta q pentru (1.18) se numeşte cea mai bună (a, n) dominantă, sau pe scurt, cea mai bună dominantă a subordonării diferenţiale (1.18).

Observaţia 1.2.1. *[45]*

1) Cea mai bună dominantă este unică, abstracţie făcând de o rotaţie în U, căci $q_1 \prec q_2$ şi $q_2 \prec q_1 \Rightarrow q_1(z) = q_2(e^{i\theta}z), \theta \in \mathbb{R}$.

2) Fie Ω o mulţime din $\mathbb{C}$ şi presupunem că (1.18) este înlocuită cu relaţia:

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \in \Omega,\ z \in U.$$

Deşi aceasta este o "incluziune diferenţială" şi $\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ poate să nu fie analitică în U, ea se va numi tot subordonare diferenţială de ordinul doi.

În cazul în care Ω şi Δ din relaţia (1.16) sunt domenii simplu conexe diferite de $\mathbb{C}$, Problemele 1), 2), 3) pot fi reformulate astfel:

Problema 1') Fiind date funcţiile univalente h şi q, să se determine o clasă de funcţii admisibile $\Psi[h, q]$ astfel încât (1.17) să aibă loc.

Problema 2') Fiind dată subordonarea diferenţială (1.18), să se găsească o dominantă q a ei. În plus, să se găsească cea mai bună dominantă a ei.

Problema 3') Fiind dată ψ şi o dominantă q, să se determine cea mai largă clasă de funcţii univalente h astfel încât (1.17) să aibă loc.

În anul 1962 K. Sakaguchi a demonstrat în lucrarea [68], că dacă funcţia $p \in \mathbb{H}(U)$, $\Re(p(0)) > 0$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci:

$$\Re\left(p(z) + \alpha\frac{zp'(z)}{p(z)}\right) > 0,\ z \in U \Rightarrow \Re(p(z)) > 0,\ z \in U.$$

În continuare vom prezenta un exemplu care este menţionat în lucrarea [45] unde se justifică alegerea funcţiei ψ cu valori în $\mathbb{C}_\infty$.

Exemplul 1.2.1. *Notând* $\Omega = \Delta = \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > 0\}$ *şi considerând* $\psi(r,s,t;z) = r + \alpha\frac{s}{r}$, *implicaţia de mai sus devine:*

$$\left\{p(z) + \alpha\frac{zp'(z)}{p(z)} : z \in U\right\} \subset \Omega \Rightarrow p(U) \subset \Delta,$$

iar această implicaţie este de forma (1.16).

Se observă astfel că avem $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}_\infty$.

1.3 Teoreme fundamentale ale anumitor clase de funcţii admisibile

Teoremele fundamentale asociate clasei funcţiilor admisibile reprezintă un pilon al analizei complexe. Ele permit caracterizarea precisă a funcţiilor analitice şi oferă instrumente puternice pentru înţelegerea proprietăţilor geometrice şi analitice ale acestora.

Importanţa lor se extinde de la probleme teoretice fundamentale la aplicaţii practice, cum ar fi cartografierea conformă şi optimizarea funcţiilor complexe.

Definiţia 1.3.1. *[45] Vom nota cu Q mulţimea funcţiilor q care sunt olomorfe şi injective pe $\overline{U} \setminus E(q)$, unde:*

$$E(q) = \left\{\zeta \in \partial U : \lim_{z\to\zeta} q(z) = \infty\right\}, q'(\zeta) \neq 0, \zeta \in \partial U \setminus E(q). \tag{1.19}$$

Mulţimea $E(q)$ se numeşte mulţime de excepţie.

Observaţia 1.3.1. *[45] Dacă $q \in Q$, atunci domeniul $\Delta = q(U)$ este simplu conex şi frontiera lui este formată fie dintr-o curbă analitică închisă, fie dintr-o reuniune, posibil infinită, de curbe analitice simple disjuncte două câte două şi care tind la ∞ în ambele direcţii.*

Definiţia 1.3.2. *[42], [41], [45] Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$, fie funcţia $q \in Q, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Vom spune că $\Psi_n[\Omega, q]$ este clasa funcţiilor $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ care satisfac condiţia:*

$$\psi(r,s,t;z) \notin \Omega, \tag{1.20}$$

atunci când:

$$r = q(\zeta), s = m\zeta q'(\zeta), \Re\left[\frac{t}{s} + 1\right] \geq m\Re\left[\frac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)} + 1\right], \tag{1.21}$$

unde $z \in U$, $\zeta \in \partial U \setminus E(q), m \geq n$.

Mulţimea $\Psi_n[\Omega, q]$ se numeşte clasa funcţiilor admisibile, iar condiţia din relaţia (1.20) se numeşte condiţie de admisibilitate.

Observaţia 1.3.2. *[45] Fie* $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}_\infty$

1) *Dacă* $\Omega \subset \tilde{\Omega}$, *atunci* $\Psi_n[\tilde{\Omega}, q] \subset \Psi_n[\Omega, q]$.
2) $\Psi_n[\Omega, q] \subset \Psi_{n+1}[\Omega, q]$.
3) *În cazul particular* $\Psi : \mathbb{C}^2 \times U \to \mathbb{C}$, *condiţia de admisibilitate devine:*

$$(A')\ \psi(r, s; z) \notin \Omega,$$

atunci când:

$$r = q(\zeta), s = m\zeta q'(\zeta),$$

unde $z \in U$, $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$, $m \geq n$.

4) *În cazul particular* $\psi : \mathbb{C} \times U \to \mathbb{C}$, *condiţia de admisibilitate devine:*

$$(A'')\ \psi(r; z) \notin \Omega,$$

atunci când:

$$r = q(\zeta),$$

unde $z \in U, \zeta \in \partial U \setminus E(q)$.

5) *Vom nota* $\Psi_1[\Omega, q]$ *cu* $\Psi[\Omega, q]$.

Teorema 1.3.1. *[44], [45] Fie* $\psi \in \Psi_n[\Omega, q]$ *unde* $q(0) = a$. *Dacă funcţia* $p \in \mathbb{H}[a, n]$ *verifică condiţia:*

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \in \Omega,\ z \in U,$$

atunci $p(z) \prec q(z)$.

În cazul special când $\Omega \subset \mathbb{C}, \Omega \neq \mathbb{C}$ este un domeniu simplu conex, iar $h \in \mathbb{H}_u(U)$, $h(U) = \Omega$, notând $\Psi_n[h(U), q]$ cu $\Psi_n[h, q]$ obţinem:

Teorema 1.3.2. *[44], [45] Fie* $h \in \mathbb{H}_u(U)$, $\psi \in \Psi_n[h, q]$ *unde* $q(0) = a$. *Dacă funcţia* $p \in \mathbb{H}[a, n]$ *iar funcţia* $\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \in \mathbb{H}(U)$, *atunci*

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec q(z).$$

Teorema 1.3.1 se utilizează pentru a arăta că soluţiile unor ecuaţii diferenţiale de ordinul doi iau valori într-un anumit domeniu, după cum putem observa în următorul corolar:

Corolar 1.3.1. *[45] Fie funcţia* $\psi \in \Psi_n[\Omega, q]$ *cu* $q(0) = a$*. Dacă funcţia* $f \in \mathbb{H}(U)$ *verifică* $f(U) \subset \Omega$ *şi dacă ecuaţia diferenţială*

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) = f(z),$$

are o soluţie $p \in \mathbb{H}[a, n]$*, atunci* $p(z) \prec q(z)$*.*

Din Teorema 1.3.1 se obţine rezultatul care urmează

Teorema 1.3.3. *[45] Fie funcţia* $p \in \mathbb{H}[a, n], \Re(a) > 0$*.*

(i) Dacă $\psi \in \Psi_n\{\Omega, a\}$*, atunci:*

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \in \Omega,\ z \in U \Rightarrow \Re(p(z)) > 0,\ z \in U.$$

(ii) Dacă $\psi \in \Psi_n\{a\}$*, atunci:*

$$\Re(\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)) > 0,\ z \in U \Rightarrow \Re(p(z)) > 0,\ z \in U.$$

În continuare se consideră un caz particular al Teoremei 1.3.3.
Presupunem că funcţia ψ este definită astfel $\psi : \mathbb{C}^2 \times U \to \mathbb{C}_\infty$. Din Observaţia 1.3.2 avem condiţia de admisibilitate (A') şi considerând în plus că $\psi \in \Psi_n\{\Omega, 1\}$, obţinem din (A_0'') următoarea condiţie de admisibilitate:

$$(A_0''')\ \psi(\rho i, \sigma; z) \notin \Omega,$$

atunci când,

$$\rho, \sigma \in \mathbb{R},\ \sigma \leq -\frac{n}{2}(1 + \rho^2), z \in U, n \geq 1.$$

Din Teorema 1.3.3 (punctul (i)) se obţine rezultatul:

Teorema 1.3.4. *[45] Fie* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $\Omega \subset \mathbb{C}$*,* $p \in \mathbb{H}[1, n]$ *şi* $\psi : \mathbb{C}^2 \times U \to \mathbb{C}_\infty$*. Dacă este verificată condiţia de admisibilitate* (A_0''')*, atunci:*

$$\psi(p(z), zp'(z); z) \in \Omega,\ z \in U \Rightarrow \Re(p(z)) > 0,\ z \in U.$$

În continuare vom prezenta câteva aplicaţii imediate ale metodei funcţiilor admisibile.

Teorema 1.3.5. *[45] Fie* $p \in \mathbb{H}[a, n]$ *cu* $\Re(a) > 0$ *şi fie* $P : U \to \mathbb{C}$ *o funcţie cu* $\Re(P(z)) > 0,\ z \in U$*. Dacă:*

$$\Re[p(z) + P(z)zp'(z)] > 0,\ z \in U,$$

atunci $\Re(p(z)) > 0,\ z \in U$*.*

Următoarea teoremă este o generalizare a rezultatului precedent.

Teorema 1.3.6. *[45] Fie* h *o funcţie convexă în* U *şi fie funcţia* $P : U \to \mathbb{C}$ *cu* $\Re(P(z)) > 0,\ z \in U$*. Dacă* $p \in \mathbb{H}[h(0), 1]$*, atunci:*

$$p(z) + P(z)zp'(z) \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec h(z).$$

Lema 1.3.1. *[45] Fie* $p \in \mathbb{H}[a,n]$ *cu* $\Re(a) > 0$ *şi fie* $\alpha : U \to \mathbb{R}$*. Dacă:*

$$\Re\left[p(z) + \alpha(z)\frac{zp'(z)}{p(z)}\right] > 0,\ z \in U,$$

atunci $\Re(p(z)) > 0,\ z \in U$.

Lema 1.3.2. *[42] Presupunem că funcţia* $\Psi :\ \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *verifică condiţia:*

$$\Re\{\Psi(is,t)\} \leq 0, \quad s,t \in \mathbb{R}; t \leq \frac{1+s^2}{2}.$$

Dacă funcţia $p(z) = p(1) + \frac{p_1}{z} + ...$ *este analitică în* W *şi*

$$\Re\{\Psi(z^2 p(z) + 2, z^2\left(zp'(z) + 1\right))\} > 0, z \in W$$

atunci,

$$\Re(p(z)) > 0, z \in W.$$

1.4 Clase de funcţii

Se notează cu T subclasa funcţiilor univalente care satisfac condiţia:

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{(f(z))^2} - 1\right| < 1, z \in U;$$

T_2 este subclasa funcţiilor univalente din clasa T pentru care $f''(0) = 0$.

Fie $T_{2,\mu}$ subclasa funcţiilor univalente din clasa T_2 care satisfac condiţia:

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{(f(z))^2} - 1\right| \leq \mu, z \in U,$$

pentru $0 < \mu \leq 1$ şi avem că $T_{2,1} \equiv T_2$;

Pentru un număr real p cu $0 < p \leq 2$ se defineşte subclasa lui A, $S(p)$, care conţine toate funcţiile care îndeplinesc condiţia:

$$\left|\left(\frac{z}{f(z)}\right)''\right| \leq p, z \in U. \tag{1.22}$$

În lucrarea [73] S. Singh a demonstrat că dacă $f(z) \in S(p)$, atunci $f(z)$ îndeplineşte condiţia:

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{(f(z))^2} - 1\right| \leq p|z|^2, z \in U.$$

Notăm cu V subclasa de funcţii univalente a lui O pentru care

$$\left|\frac{g'(z)}{z^2} + 1\right| > 1, z \in W, g(z) \in V.$$

V_j subclasa lui V pentru care $g^{(k)}(\infty) = 0, k = 2, 3, ..., j$;

$V_{j,\mu}$ subclasa lui V_j ce conţine funcţiile de forma (1.3) care verifică relaţia:

$$\left|\frac{g'(z)}{z^2} + 1\right| > \mu, z \in W, \mu > 1. \tag{1.23}$$

Se notează $V_{j,1} \equiv V_j$.

Fie $p \in \mathbb{R}$, cu $1 < p \leq 2$ şi $\sum_j(p)$ este subclasa lui O care conţine toate funcţiile $g \in O_j$ pentru care

$$\left|\left(\frac{g(z)}{z}\right)''\right| > p, z \in W, \tag{1.24}$$

$$\left|\frac{g'(z)}{z^2} + 1\right| \geq \frac{p}{|z|^j}, j \in \mathbb{N}_1^*. \tag{1.25}$$

Se notează $\sum_2(p) \equiv \sum(p)$.

1.4.1 Clasa funcţiilor stelate

Clasa funcţiilor stelate este una dintre cele mai studiate subclase ale funcţiilor univalente. Ele reprezintă un punct de plecare pentru explorarea altor clase de funcţii analitice şi oferă o bază solidă pentru dezvoltarea teoriei coeficienţilor extremali, utilizată în teoria Bieberbach. Această clasă a fost studiată prima dată de Alexander în lucrarea [4].

La începutul secolului al XX-lea, prin lucrările lui L. Bieberbach şi P. Koebe, funcţiile stelate au fost identificate ca o subclasă importantă a funcţiilor univalente. Bieberbach a demonstrat conexiuni semnificative între proprietăţile funcțiilor stelate şi coeficienţii lor, punând bazele ipotezei Bieberbach, una dintre cele mai importante conjecturi din analiza complexă.

În a doua jumătate a secolului al XX-lea, matematicieni precum B. Pommerenke au extins teoria funcţiilor stelate, explorând conexiunile cu alte clase de funcţii analitice, cum ar fi cele convex-univalente şi spiraloidale. Cercetările lor au consolidat poziţia funcțiilor stelate în analiza complexă modernă, cu aplicaţii în geometria complexă şi analiza spaţiilor funcţionale.

Fie f o funcţie olomorfă în U, care verifică condiţiile $f(0) = 0$ şi $f(z) \neq 0$, pentru $z \neq 0$. Vom nota cu C_r imaginea cercului $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r, 0 < r < 1\}$, prin funcţia f.

Definiţia 1.4.1. *[45] Spunem că C_r este o curbă stelată în raport cu originea, sau mai simplu, stelată, dacă unghiul $\varphi = \varphi(r, \tau) = \arg f(re^{i\tau})$, pe care raza vectoare a punctului $f(z)$, $z = re^{i\tau}$, îl face cu axa reală pozitivă, este o funcţie crescătoare de τ, când τ creşte de la 0 la 2π, adică:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \arg f(z) > 0,\ z = re^{i\tau},\ \tau \in (0, 2\pi). \tag{1.26}$$

Vom spune că f este stelată pe cercul $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ dacă C_r este o curbă stelată.

Deoarece $f(z) \neq 0$, pentru $z \neq 0$ putem scrie:

$$\mathrm{Log} f(z) = \log|f(z)| + i \arg f(z), z = re^{i\tau}.$$

Derivând în raport cu τ şi ţinând seama că:

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial re^{i\tau}}{\partial \tau} = rie^{i\tau} = iz,$$

se obţine:

$$\frac{izf'(z)}{f(z)} = \frac{\partial}{\partial \tau} \log|f(z)| + i\frac{\partial}{\partial \tau} \arg f(z).$$

Din această egalitate se deduce că:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \arg f(z) = \mathrm{Re}\, \frac{zf'(z)}{f(z)},\ z = re^{i\tau}. \tag{1.27}$$

Deci condiţia (1.26) se poate scrie sub forma:

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, |z| = r, \tag{1.28}$$

care exprimă condiţia necesară şi suficientă pentru ca f să fie stelată pe cercul $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.

Deoarece funcţia $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ este armonică, rezultă că dacă această inegalitate este verificată pentru $|z| = r$, ea va fi verificată şi pentru $|z| \leq r$. De aici deducem că dacă f este stelată pe cercul $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ ea va fi stelată pe orice cerc $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r'\}$, unde $0 < r' < r$.

Definiţia 1.4.2. *[45] Se numeşte rază de stelaritate a funcţiei f, numărul $r^*(f)$ definit de:*

$$r^*(f) = sup\left\{r; \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, |z| \leq r\right\}. \tag{1.29}$$

Dacă $r^*(f) \geq 1$, vom spune că funcţia f este stelată în discul unitate U, sau pe scurt, stelată.

Observaţia 1.4.1. *[45]*

1) *Egalitatea $\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = 0$ pentru un punct $z \in U$ nu poate avea loc deoarece, în acest caz, funcţia f s-ar reduce la o constantă, ceea ce ar fi în contradicţie cu condiţiile impuse asupra funcţiei f.*

2) *Dacă f verifică $\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$, $|z| < 1$, atunci în mod necesar $f(z) \neq 0$, pentru $0 < |z| < 1$.*

3) *Din definiţie rezultă că f este stelată în U dacă şi numai dacă este stelată pe orice cerc $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r, 0 < r < 1\}$.*

4) Condiţia de stelaritate $\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, z \in U$*, nu asigură univalenţa funcţiei* f *în discul unitate, deci se pune problema găsirii unei condiţii suplimentare care să asigure univalenţa funcţiei.*

Dacă presupunem, în plus, condiţia $f'(0) \neq 0$*, atunci condiţia* $\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$*, implică univalenţa funcţiei* f*, precum şi faptul că* $f(U)$ *este un domeniu stelat în raport cu originea, adică segmentul care uneşte orice punct din* $f(U)$ *cu originea este conţinut în* $f(U)$*.*

Teorema 1.4.1. *[45] Fie* f *o funcţie olomorfă în* U *cu* $f(0) = 0$*. Atunci* f *este univalentă şi f(U) este un domeniu stelat în raport cu originea dacă şi numai dacă* $f'(0) \neq 0$ *şi*

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, \text{ pentru } \forall z \in U. \tag{1.30}$$

Vom nota cu S^* clasa funcţiilor olomorfe în U, cu $f(0) = 0, f'(0) = 1$ şi care sunt stelate în raport cu originea în U.

Deci: $S^* = \left\{f \in A, \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, z \in U\right\}$.

Observaţia 1.4.2. *[45] Folosind definiţia subordonării, clasa* S^* *se poate defini astfel:*
Dacă

$$f(z) = z + a_2z^2 + ..., \ z \in U, \tag{1.31}$$

atunci $f \in S^*$ *dacă şi numai dacă*

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}, \ z \in U. \tag{1.32}$$

Denumirea teoremelor de deformare relative la funcţiile univalente, provine din faptul că o transformare conformă poate fi vazută ca o "deformare" a unui domeniu într-un alt domeniu.

Deoarece funcţia lui Köebe $K_\tau(z) = \frac{z}{(1+e^{i\tau}z)^2}$, $\tau \in \mathbb{R}$ pentru o alegere convenabilă a lui τ, este stelată, rezultă că teorema de deformare relativă la clasa S este valabilă şi pentru clasa S^*.

Teorema 1.4.2. *[45] (Teorema de deformare) Dacă* $f \in S^*$*, atunci au loc delimitările exacte:*

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \tag{1.33}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, \tag{1.34}$$

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}, \tag{1.35}$$

unde $z \in U$*,* $|z| = r$*, iar funcţia extremală este funcţia lui Köebe* $f = K_\tau$*, pentru o alegere convenabilă a lui* τ*.*

Notăm:

$$M[a,b] = \left\{ \mu : [a,b] \to \mathbb{R}_+, \mu \text{ crescătoare pe } [a,b], \int\limits_a^b d\mu(t) = \mu(b) - \mu(a) = 1 \right\}. \tag{1.36}$$

Teorema 1.4.3. *[45] Funcţia $f(z) = z + a_2 z^2 + ...,\ z \in U$ aparţine clasei S^* dacă şi numai dacă există o funcţie $\mu \in M[0, 2\pi]$ astfel încât:*

$$f(z) = zexp\left\{ -2 \int\limits_0^{2\pi} \log(1 - ze^{-it}) d\mu(t) \right\},\ z \in U. \tag{1.37}$$

1.4.2 Clasa funcţiilor convexe

Funcţiile convexe au fost studiate prima dată de E. Study în lucrarea [75], apoi rezultate semnificative în Teoria geometrică a funcţiilor au fost obţinute de către K. Löwner [36], T. H. Gronwall [27] şi J. W. Alexander [4] în anul 1915.

Definiţia 1.4.3. *[45] Curba C_r se numeşte convexă dacă unghiul*

$$\psi(r,\tau) = \frac{\pi}{2} + \arg zf'(z),\ z = re^{i\tau},$$

făcut de tangenta la curba C_r în punctul $f(z)$ cu semiaxa reală pozitivă este o funcţie crescătoare de τ pe $[0, 2\pi]$.

Definiţia 1.4.4. *[45] Funcţia f se numeşte convexă pe cercul $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ dacă C_r este o curbă convexă.*

Se arată că f este convexă pe cercul $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ dacă şi numai dacă:

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0,\ |z| = r. \tag{1.38}$$

Din această definiţie deducem că dacă f este convexă pe cercul $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, atunci ea va fi convexă pe orice cerc $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r'\}$, unde $0 < r' < r$.

Definiţia 1.4.5. *[45] Prin raza de convexitate a funcţiei f înţelegem numărul:*

$$r^c(f) = \sup\left\{ r; \Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right) > 0, |z| \le r \right\}. \tag{1.39}$$

Observaţia 1.4.3. *[45] Dacă $r^c(f) \ge 1$, vom spune că funcţia f este convexă în discul unitate U sau, mai simplu, convexă.*

Aceasta înseamnă că f verifică condiţia:

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0,\ |z| < 1. \tag{1.40}$$

Observaţia 1.4.4. *[45] Relaţia (1.40) implică* $f'(z) \neq 0$, *pentru orice* $0 < |z| < 1$.

Observaţia 1.4.5. *[45] Condiţia:*

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0,\ z \in U,$$

nu asigură univalenţa funcţiei f în discul unitate după cum arată exemplul:

$$f(z) = z^2.$$

Vom prezenta în continuare o condiţie suficientă de univalenţă:

Teorema 1.4.4. *[45] O funcţie f olomorfă în U este univalentă şi $f(U)$ este un domeniu convex dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0,\ z \in U. \tag{1.41}$$

Definiţia 1.4.6. *[45] Spunem că S^c este clasa funcţiilor f olomorfe în U, cu proprietatea că $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ şi care sunt convexe în U.*

Vom nota

$$S^c = \left\{f \in A, \Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0,\ z \in U\right\}$$

şi $S^c \subset S$.

Legătura dintre clasele S^* şi S^c este dată de următoarea teoremă.

Teorema 1.4.5. *[45] (Teorema de dualitate a lui Alexander)*

Fie $f \in A$ şi $g(z) = zf'(z)$. Atunci $f \in S^c$ dacă şi numai dacă $g \in S^*$.

Operatorul integral $I_A : A \to A,\ f = I_A(g),\ g \in A$, unde:

$$f(z) = \int_0^z \frac{g(t)}{t} dt,\ z \in U,$$

se numeşte operatorul lui Alexander.

Cu ajutorul acestui operator putem reformula Teorema 3.7.3 astfel $S^c = I_A(S^*)$, iar I_A stabileşte o bijecţie între S^* şi S^c.

Între clasele S^* şi S^c se pot stabili şi alte relaţii, cum este cea din următoarea teoremă.

Teorema 1.4.6. *[38], [45], [74] (Teorema lui A. Marx şi E. Strohhäcker)*

Dacă $f \in A$, atunci au loc următoarele implicaţii:

$$\Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right) > 0,\ z \in U \Rightarrow \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \frac{1}{2},\ z \in U \Rightarrow \Re\left(\frac{f(z)}{z}\right) > \frac{1}{2},\ z \in U,$$

$$\Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right) > 0,\ z \in U \Rightarrow \Re\left(\sqrt{f'(z)}\right) > \frac{1}{2},\ z \in U \Rightarrow \Re\left(\frac{f(z)}{z}\right) > \frac{1}{2},\ z \in U.$$

Observaţia 1.4.6. *[45] Funcţia $f(z) = \frac{z}{1-z}$ arată că toate aceste implicaţii sunt exacte.*

Prin urmare, avem $S^c \subset S^*(1/2)$.
În ceea ce priveşte coeficienţii funcţiilor din clasa S^c are loc următoarea teoremă.

Teorema 1.4.7. *[45] Dacă $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + ...$ aparţine clasei S^c, atunci $|a_n| \leq n$, pentru orice $n \geq 2$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă funcţia f are forma:*

$$f(z) = \frac{z}{1 + e^{i\tau}z}, \tau \in \mathbb{R}, \ z \in U.$$

Are loc următoarea teoremă de deformare.

Teorema 1.4.8. *[45] Dacă $f \in S^c$ atunci au loc delimitările exacte:*

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}, \tag{1.42}$$

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}, z \in U, |z| = r < 1. \tag{1.43}$$

Egalităţile având loc pentru funcţia $f(z) = \frac{z}{1+e^{i\tau}z}, \tau \in \mathbb{R}, z \in U$, pentru o alegere convenabilă a lui τ.

Din relaţia (1.42) rezultă că S^c este compactă.

Observaţia 1.4.7. *[45] Aplicând $r \to 1$ în (1.42) se deduce constanta lui Köebe a clasei S^c, aceasta fiind 1/2.*

1.4.3 Clasa funcţiilor stelate şi clasa funcţiilor convexe de un anumit ordin

Dintre submulţimile clasei S^* amintim clasa funcţiilor stelate de ordin α, $0 \leq \alpha < 1$, notată cu $S^*(\alpha)$ şi cea a funcţiilor tare stelate de ordin α, $0 < \alpha \leq 1$, notată cu $S^*(\alpha)$.

Definiţia 1.4.7. *[45] Funcţia $f \in A$ se numeşte stelată de ordinul $\alpha, 0 \leq \alpha < 1$, dacă verifică inegalitatea:*

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha, \ z \in U. \tag{1.44}$$

Notăm cu $S^*(\alpha)$ clasa acestor funcţii.

Definiţia 1.4.8. *[45] Funcţia $f \in A$ se numeşte tare stelată de ordinul $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ dacă verifică inegalitatea:*

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \alpha\frac{\pi}{2}, \ z \in U. \tag{1.45}$$

Se observă că $S^*(0) = S^*$ şi $S^*(1) = S^*$.

Definiţia 1.4.9. *[45] Funcţia $f \in A$ este convexă de ordinul α, $0 \leq \alpha < 1$, dacă verifică inegalitatea:*

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha, z \in U. \tag{1.46}$$

Se notează cu $S^c(\alpha)$ clasa funcţiilor convexe de ordin $\alpha, 0 \leq \alpha < 1$, unde

$$S^c(\alpha) = \left\{f \in A : \Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha, z \in U\right\}. \tag{1.47}$$

Se observă că pentru $\alpha = 0$ avem $S^c(0) = S^c$.

Teorema 1.4.9. *[45] (Teorema de dualitate între clasele $S^*(\alpha)$ şi S^*)*
Fie α un număr real cu $0 \leq \alpha < 1$.
1) Avem incluziunile $S^*(\alpha) \subset S^*$, $S^c(\alpha) \subset S^c$.
2) Funcţia $f \in S^*(\alpha)$ dacă şi numai dacă funcţia $g \in S^*$, unde

$$g(z) = z\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

unde prin $\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ înţelegem ramura olomorfă pentru care $\left.\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right|_{z=0} = 1$.

Observaţia 1.4.8. *[45] Pentru $0 \leq \alpha < 1$ se verifică uşor că funcţia $f \in S^c(\alpha)$ dacă şi numai dacă funcţia $g(z) = zf'(z) \in S^*(\alpha)$ şi aplicând teorema de mai sus deducem următorul rezultat de dualitate între clasele $S^c(\alpha)$ şi S^*.*

Corolar 1.4.1. *[45] Dacă $0 \leq \alpha < 1$, atunci funcţia $f \in S^c(\alpha)$ dacă şi numai dacă funcţia $g \in S^*$, unde*

$$g(z) = z\,[f'(z)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, z \in U.$$

Teorema 1.4.10. *[45] (Teorema de deformare pentru clasa $S^c(\alpha)$)*
Dacă funcţia $f \in S^c(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$, şi $|z| = r < 1$, atunci au loc următoarele delimitări exacte

$$\frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^{2(1-\alpha)}},$$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha \neq \frac{1}{2}, & \frac{(1+r)^{2\alpha-1}-1}{2\alpha-1} \\ \\ \alpha = \frac{1}{2}, & log(1+r) \end{array}\right\} \leq |f(z)| \leq \left\{\begin{array}{ll} \frac{1-(1-r)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}, & \alpha \neq \frac{1}{2} \\ \\ -log(1-r), & \alpha = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Funcţia extremală este:

$$f_{\alpha(z)} = \begin{cases} \frac{1-(1-z)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}, & \alpha \neq \frac{1}{2} \\ -log(1-z), & \alpha = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Teorema 1.4.11. *[45] (Teorema de deformare pentru clasa $S^*(\alpha)$) Dacă funcţia $f \in S^*(\alpha)$, $0 \le \alpha < 1$ şi $|z| = r < 1$, atunci au loc următoarele delimitări exacte:*

$$\frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}.$$

Funcţia extremală este $f_\alpha(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}$.

1.4.4 Condiţii de stelaritate şi condiţii de convexitate pentru câteva clase de funcţii meromorfe

Acest paragraf cuprinde noţiuni din literatura de specialitate pe care le-am utilizat în obţinerea de noi rezultate de bază legate de funcţiile meromorfe.

În diferite probleme de analiză complexă este necesară extinderea mulţimii $\mathbb{C}$ a numerelor complexe prin adăugarea unui număr impropriu notat cu ∞, unde prin definiţie $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \infty \notin \mathbb{C}$.

Legătura numerelor din $\mathbb{C}$ cu elementul ∞ se stabileşte prin extinderea la acest element a operaţiilor cu numere complexe punând $a + \infty = \infty + a = \infty$ şi $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$ pentru $a \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$.

Prin convenţie specială, referitoare la operaţia de împărţire vom scrie $a/0 = \infty$ pentru $a \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$ şi $a/\infty = 0$ pentru $a \in \mathbb{C}$.

Nu se definesc $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0/0, \infty/\infty$.

Deci, în ce priveşte structura algebrică a lui $\mathbb{C}_\infty$, se pot extinde operaţiile algebrice din $\mathbb{C}$ fără a fi peste tot definite.

Convenţia $|\infty| = +\infty$ extinde modulul de la $\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}_\infty$.

Pentru a studia o funcţie f într-o vecinătate a punctului ∞ vom considera funcţia $g = f \circ k$ unde $k(z) = \frac{1}{z}$. Cum k transformă o vecinătate a lui 0 într-una a lui ∞, prin comportarea lui f la ∞ vom înţelege comportarea lui g în 0.

Definiţia 1.4.10. *[30] Fie $\tilde{G}$ o mulţime deschisă din $\mathbb{C}$, sau $\mathbb{C}_\infty$. Vom spune că f este o funcţie meromorfă pe $\tilde{G}$ dacă există o mulţime $E \subset \tilde{G}$ astfel încât $f \in H(\tilde{G} \setminus E)$, iar E este formată din puncte singulare eliminabile sau poli pentru funcţia f.*

Notând cu G mulţimea punctelor regulare şi cu B mulţimea polilor din $\tilde{G}$, avem $\tilde{G} = G \cup B$.

Observaţia 1.4.9. *[17] O funcţie meromorfă este funcţie analitică uniformă care în planul $\mathbb{C}$ nu are alte singularităţi decât polii.*

Funcţiile întregi, pe de o parte, şi funcţiile raţionale, pe de altă parte, sunt cazuri particulare de funcţii meromorfe.

Punctul ∞ pentru o funcţie meromorfă poate fi ordinar, pol sau esenţial, izolat sau punct de acumulare de poli.

Deoarece polii sunt puncte singulare izolate, rezultă că o funcţie meromorfă nu poate avea în $\mathbb{C}$ decât cel mult o infinitate numărabilă de poli care se vor acumula în mod necesar la infinit.

Observaţia 1.4.10. *[17] O funcţie meromorfă într-un domeniu este o ramură analitică uniformă corespunzătoare acestui domeniu, care admite ca singularităţi în acest domeniu numai poli. Aceştia pot fi şi un număr finit sau o infinitate numărabilă, dar în acest din urmă caz ei se acumulează în mod necesar pe frontiera domeniului.*

Vom nota cu $M(\tilde{G})$ mulţimea funcţiilor meromorfe pe $\tilde{G}$.

Dacă $f \in M(\tilde{G})$, atunci f se poate prelungi în orice punct $z_0 \in \tilde{G}$ prin $\tilde{f}(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$.

Funcţia $\tilde{f} : \tilde{G} \to \mathbb{C}_\infty$ este $\mathbb{C}_\infty$- continuă şi $\tilde{f} \in \mathbb{H}(G)$. Uneori se notează tot cu f funcţia astfel prelungită.

În continuare sunt prezentate câteva exemple.

Exemplul 1.4.1. *[30] Orice funcţie olomorfă pe $\tilde{G}$ este şi meromorfă, adică $\mathbb{H}(\tilde{G}) \subset M(\tilde{G})$.*

În acest caz $B = \emptyset$ şi $\tilde{G} = G$.

Exemplul 1.4.2. *[30] Orice funcţie raţională este meromorfă pe $\mathbb{C}_\infty$.*

Exemplul 1.4.3. *[30] Funcţia ctg este meromorfă pe $\mathbb{C}$, având polii $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;*

Punctul ∞ este punct de acumulare de poli, deci funcţia *ctg* nu poate fi meromorfă pe $\mathbb{C}_\infty$.

Exemplul 1.4.4. *[30] Funcţia $tg\frac{1}{z}$ este meromorfă pe $\mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$, deoarece ∞ este un punct regular, iar punctele $z_k = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ sunt poli, care se acumulează în origine.*

Studiul funcţiilor meromorfe şi univalente se poate face în paralel cu clasa S, considerând clasa Σ_u a funcţiilor φ meromorfe cu unicul pol (simplu) $z = \infty$ şi univalente în $U^- = \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| > 1\}$, care au dezvoltarea în seria Laurent de forma:

$$g(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + ... + \frac{\alpha_n}{z^n} + ..., |z| > 1. \tag{1.48}$$

Deci funcţiile $g \in \Sigma_u$ sunt normate cu condiţiile $g(\infty) = \infty, g'(\infty) = 1$.

Notând

$$E(g) = \mathbb{C} \setminus g(U^-)$$

acesta va fi un continuu din $\mathbb{C}$, adică o mulţime compactă şi conexă, care conţine mai mult de un punct.

Se notează cu Σ_0 subclasa funcţiilor $g \in \Sigma_u$ care nu se anulează în exteriorul discului unitate, adică

$$\Sigma_0 = \{g \in \Sigma_u : g(z) \neq 0, z \in U^-\},$$

şi astfel se deduce uşor următoarea proprietate.

Proprietatea 1.4.1. *[45] Între clasele S şi Σ_0 există o bijecţie, deci clasa Σ_0 este "mai largă" decât clasa S.*

Se observă că dacă $g \in \Sigma_u$ şi $c \in E(g)$, atunci funcţia:

$$f(z) = \frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right) - c} = z + (c - \alpha_0)z^2 + ..., z \in U, \tag{1.49}$$

are proprietatea că $f \in S$.

Definiţia 1.4.11. *[45] Spunem că funcţia g de forma (1.48) este o funcţie stelată în U^- dacă g este univalentă în U^- şi mulţimea E(g) este stelată în raport cu originea.*

Notăm cu Σ^* clasa funcţiilor stelate în exteriorul discului unitate, adică: Σ^*={$g \in \Sigma_0$: g este stelată în U^-}.

Transformarea T este o bijecţie, $T(S) = \Sigma_0$ şi $T^{-1}(\Sigma_0) = S$.

Se obţine că

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{zf'(z)}{f(z)}, z = \frac{1}{z}, z \in U^-,$$

de unde va rezulta că funcţia $g \in \Sigma^*$ dacă şi numai dacă $f \in S^*$.

Deducem că $g \in \Sigma^*$ dacă: $\Re\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > 0, z \in U^-$.

În concluzie, avem Σ^*={$g \in \Sigma_0 : \Re\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > 0, z \in U^-$}, şi $\Sigma^* = T(S^*)$.

Din Definiţia 1.4.11 rezultă că dacă funcţia g este stelată, atunci $E(g)$ este o mulţime stelată în raport cu originea, deci $0 \in E(g)$, adică $g \in \Sigma_0$ (mulţimea funcţiilor meromorfe normate, univalente care nu se anulează în U^-).

Definiţia 1.4.12. *[46] Spunem că o funcţie $f \in S$ este meromorfă stelată de ordin $\alpha, 0 \leq \alpha < 1$, şi aparţine clasei $S^*(\alpha)$, dacă verifică inegalitatea*

$$-\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha.$$

Definiţia 1.4.13. *[45] Fie funcţia $g(z) = \frac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + ... + \alpha_n z^n + ..., 0 < |z| < 1$, o funcţie meromorfă în U. Spunem că funcţia g este stelată în U dacă funcţia $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right), z \in U^-$, este stelată în U^-.*

Teorema 1.4.12. *[45] (Teorema de caracterizare analitică a stelarităţii funcţiilor meromorfe) Dacă $f(z) = \frac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + ..., 0 < |z| < 1$, o funcţie meromorfă în U cu $f(z) \neq 0$, $z \in U$, atunci f este stelată în U dacă şi numai dacă f este univalentă în U şi*

$$\Re\left(-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, z \in U.$$

Definiţia 1.4.14. *[45] Spunem că funcţia g de forma (1.48) este convexă în U^- dacă g este univalentă în U^- şi mulţimea $E(g)$ este convexă.*

Menţionăm că dacă g este convexă în U^-, atunci nu este în mod necesar stelată, deoarece g se poate anula în U^-, adică $0 \notin E(g)$.

Dacă $g \in \Sigma_0$ şi g este funcţie convexă, atunci evident este şi stelată în U^-.

Vom nota cu Σ^c clasa funcţiilor convexe în exteriorul discului unitate şi care nu se anulează în U^-, adică

$$\Sigma^c = \{g \in \Sigma_0 : g \text{ este convexă în } U^-\}.$$

Este evident că $\Sigma^c \subset \Sigma^*$.

Observaţia 1.4.11. *[45] Se ştie că funcţia $g \in \Sigma_0$ este convexă în exteriorul discului unitate dacă şi numai dacă ea verifică condiţia:*

$$\Re\left(\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1\right) > 0, z \in U^-.$$

Prin urmare, $\Sigma^c = \left\{g \in \Sigma_0 : \Re\left(\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1\right) > 0, z \in U^-\right\}$.

Definiţia 1.4.15. *[45] Fie funcţia meromorfă în U,*

$$f(z) = \frac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + ... + \alpha_n z^n + ..., 0 < |z| < 1,$$

Spunem că f este convexă în U dacă funcţia $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right), z \in U^-$ este convexă în U^-.

Teorema 1.4.13. *[45] (Teorema de caracterizare analitică a convexităţii funcţiilor meromorfe) Fie $f(z) = \frac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + ..., 0 < |z| < 1$, o funcţie meromorfă în U cu $f(z) \neq 0$, $z \in U$. Atunci f este convexă în U dacă şi numai dacă f este univalentă în U şi*

$$\Re\left\{-\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right)\right\} > 0,\ z \in \dot{U}.$$

Definiţia 1.4.16. *[46], [31] Spunem că o funcţie $f \in S$ este convexă, meromorfă de ordin $\alpha, 0 \leq \alpha < 1$, dacă f verifică inegalitatea:*

$$-\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha, z \in U.$$

Notăm cu $S_k(\alpha)$ clasa funcţiilor meromorfe, convexe de ordin $\alpha, 0 \leq \alpha < 1$,

$$S_k(\alpha) = \left\{f \in S : -\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha, z \in U\right\}. \tag{1.50}$$

1.5 Operatori integrali

Operatorii integrali au avut un rol esenţial în dezvoltarea analizei complexe, oferind un cadru puternic pentru rezolvarea problemelor legate de funcţiile analitice, transformările conforme şi ecuaţiile diferenţiale. Debutând cu lucrările lui Cauchy în secolul al XIX-lea, cei care au iniţiat studiul operatorilor integrali sunt: J. W. Alexander, R. Libera, S. Bernardi, S. D. Miller, P.T. Mocanu, R. Singh, M. O. Reade, etc.

Studiul operatorilor integrali este de actualitate, dovadă stau numeroasele lucrări din ultimii ani [12], [15], [16], [24], [77], etc. dar şi numeroasele citări ale lucrărilor deja existente.

Spunem că un operator integral este univalent, dacă transformă funcţiile univalente în funcţii univalente. Operatorul integral stelat / convex este acela care transformă funcţiile stelate în funcţii stelate/funcţiile convexe în funcţii convexe.

O problemă centrală în teoria funcţiilor de o variabilă complexă este studiul operatorilor integrali definiţi pe anumite subclase ale lui.

Primul operator integral a fost introdus în 1915 de către matematicianul J. W. Alexander în [4]. Operatorul integral Alexander I_A este definit în [4] astfel

$$I_A : A \to A, I_A(F) = f,$$

unde:

$$I_A(F) = f(z) = \int_0^z \frac{F(t)}{t} dt, \tag{1.51}$$

Pentru acest operator integral, Alexander a demonstrat că $I_A(S^*) \subset S^*$.

În 1965, R. J. Libera a definit în lucrarea [34], următorul operator integral:

$$L : A \to A, L_f(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t)dt, \tag{1.52}$$

numit operatorul Libera şi a demonstrat că $L_A(S^*) \subset S^*$.

S. D. Bernardi în [7] a introdus o generalizare a operatorului Libera,

$$I_a : A \to A, I_a(F) = f, a = 1, 2, 3, \ldots, \mathit{unde} :$$

$$f(z) = \frac{1+a}{z^a} \int_0^z F(t)t^{a-1}dt, \tag{1.53}$$

iar acesta a fost denumit operatorul integral Bernardi, demonstrând că $I_a(S^*) \subset S^*$.

Câţiva ani mai târziu, în 1963, W. M. Causey a introdus operatorul:

$$J_4(f)(z) = \int \left[\frac{f(t)}{t}\right]^\alpha dt. \tag{1.54}$$

Operatorul J_4 a fost studiat de S. S. Miller, P. T. Mocanu şi M. O. Reade, care au dat un an mai târziu o generalizare a operatorului în lucrarea [40].

Au fost studiate numeroase generalizări ale operatorilor precedenţi dintre care cea mai generală formă care utilizează o singură funcţie sub semnul integralei este dat de operatorul L_a.

Acest operator integral L_a este definit în [52] astfel $L_a : A \to A, L_a(F) = f$, unde

$$f(z) = \frac{1+a}{z^a} \int_0^z F(t)t^{a-1}dt, \tag{1.55}$$

$a \in \mathbb{C}, \Re(a) \geq 0$.

El a fost introdus în această formă generală unde $a \in \mathbb{C}, \Re(a) \geq 0$, de către N. N. Pascu în [52] şi a fost numit de D. Blezu în lucrarea [10] operatorul integral Libera-Pascu.

Operatorul integral $I_{c+\delta} : A \to A$, unde $0 < u \leq 1$, $1 \leq \delta < \infty$, $0 < c < \infty$, este definit în [2] astfel:

$$f(z) = I_{c+\delta}(F)(z) = (c+\delta) \int_0^1 t^{c+\delta-2} F(tz)dt\,. \tag{1.56}$$

Observaţia 1.5.1. *[22] Pentru $\delta = 1$ şi $c =$ 1, 2, ... din operatorul integral $I_{c+\delta}$, dat prin relaţia (1.56), obţinem operatorul integral Bernardi definit în relaţia (1.53).*

Observaţia 1.5.2. *[22] Fie $F(z) = z + \sum\limits_{j=2}^{\infty} a_j z^j$. Din relaţia (1.56) obţinem:*

$$f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{c+\delta}{c+j+\delta-1} a_j z^j.$$

Observăm că

$$0 < \frac{c+\delta}{c+j+\delta-1} < 1,$$

unde $0 < c < \infty,\ j \geq 2,\ 1 \leq \delta < \infty$.

Observaţia 1.5.3. *[22] Pentru $F \in T, f = I_{c+\delta}(F)$, avem $f \in T$, unde $I_{c+\delta}$ este operatorul integral definit prin relaţia (1.56).*

Definiţia 1.5.1. *[22] Fie $F \in A$, $F(z) = z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n + \ldots$, $b_j \geq 0, j \geq 2$ şi $a \in \mathbb{R}^*$. Definim operatorul integral $L : A \to A$ prin relaţia:*

$$f(z) = L(F)(z) = \frac{1+a}{z^a} \int_0^z F(t) \cdot t^{a-1} + t^{a+1} dt. \tag{1.57}$$

În lucrarea [23] P. Dicu introduce un nou operator integral:

$$I_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{e^{f_i(t)}}{g_i'(t)} \right]^{\alpha_i} dt, \tag{1.58}$$

unde parametrii $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha_i) > 0$ şi funcţiile $f_i, g_i \in A, i \in \{1, 2, ..., n\}$ sunt restricţionate (constrânse la restricţii potrivite).

Operatorul integral I_n generalizează operatorul integral:

$$I_1(z) = \int_0^z \left[\frac{e^{f(t)}}{g'(t)}\right]^\alpha dt. \tag{1.59}$$

Fie $F_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\beta}(z)$ operatorul integral studiat de N. Seenivasagan şi D. Breaz în lucrarea [71]:

$$F_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\beta}(z) = \left\{\beta \int_0^z t^{\beta-1} \prod_{i=1}^n \left[\frac{f_i(t)}{t}\right]^{\frac{1}{\alpha_i}} dt\right\}^{\frac{1}{\beta}}, \tag{1.60}$$

cu $f_i(t) \in T_2$, T_2 fiind o subclasă a lui T.

Dacă $\alpha_i = \alpha, \forall i = 1, 2, ...,$ atunci $F_{\alpha_i,\beta}(z)$ devine operatorul $F_{\alpha,\beta}(z)$ [14].

1.6 Criterii de univalenţă

Criteriile de univalenţă reprezintă o piatră de temelie în analiza complexă, oferind instrumente esenţiale pentru înţelegerea şi clasificarea funcţiilor analitice. Ele permit identificarea şi clasificarea funcţiilor injective (univalente) în regiuni specifice ale planului complex. Proprietatea de univalenţă este esenţială deoarece garantează că funcţiile analitice păstrează structura geometrică locală şi sunt fără ambiguităţi în reprezentările lor. Ele au evoluat de la teoremele clasice ale lui P. Koebe (în jurul anului 1907, au realizat un progres major prin formularea teoremei de univalenţă şi prin studiul funcţiilor univalente definite pe discul unitate) şi Bieberbach la metode moderne bazate pe geometrie şi analiza ecuaţiilor diferenţiale.

Primele criterii au fost dezvoltate pentru a analiza injectivitatea prin intermediul derivatelor şi al altor proprietăţi ale funcţiilor analitice. Printre cele mai cunoscute criterii de univalenţă se numără:

- criteriul lui Schwarz care stabileşte univalenţa funcţiilor analitice utilizând derivata Schwarziană,

- criteriul lui Nehari (1949) care leagă univalenţa de condiţiile asupra curburii imaginilor funcţiei analitice.

Studiul criteriilor de univalenţă a dus la descoperirea unor spaţii funcţionale speciale, cum ar fi spaţiul Hardy şi spaţiul Bergman. Funcţiile analitice univalente sunt utilizate pentru a realiza transformări conforme, care păstrează unghiurile şi structura locală a domeniului. Aceste transformări sunt fundamentale în geometria complexă şi în aplicaţii practice, cum ar fi modelarea reţelelor electrice şi a fluxurilor de fluide, iar în analiza contemporană, criteriile de univalenţă sunt aplicate în studiul dinamicii complexe, al fractalilor şi al teoriilor spectrale asociate operatorilor analitici.

În anul 1972, S. Ozaki şi M. Nunokawa în lucrarea [50] au demonstrat următorul rezultat:

Teorema 1.6.1. *([50]) Dacă $f \in T$ safisface următoarea condiţie:*

$$\left| \frac{z^2 \cdot f'(z)}{f^2(z)} - 1 \right| \leq 1, \forall z \in U,$$

atunci funcţia f este univalentă în U.

Următoarea teoremă demonstrează o condiţie de univalenţă dată de N. Pascu în lucrarea [52].

Teorema 1.6.2. *[52] Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ şi $\Re(\beta) \geq \Re(\alpha) \geq \frac{3}{|\alpha|}$. Dacă $f \in T_2$ satisface condiţia:*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1 \right| < 1, |f(z)| \leq 1; \forall z \in U,$$

atunci operatorul integral $H_{\alpha,\beta}(z)$ definit prin

$$H_{\alpha,\beta}(z) = \left[\beta \int_0^z t^{\beta-1} \left(\frac{f(t)}{t} \right)^{\frac{1}{\alpha}} dt \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

aparţine clasei S.

Referitor la clasa funcţiilor analitice, Becker în [5] a demonstrat în 1972, folosind metoda lanţurilor Löewner următorul criteriu de univalenţă.

Teorema 1.6.3. *[5] Dacă funcţia f este regulată în discul unitate U, cu proprietăţile:*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ...,$$

şi

$$(1 - |z|^2) \left| \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right| \leq 1, \forall z \in U,$$

atunci f este univalentă în U.

Un an mai târziu, Ahlfors în [3] şi J. Becker în [6] au realizat o generalizare a criteriului lui J. Becker, dată de următoarea teoremă.

Teorema 1.6.4. *[3] [6] Fie c un număr complex, $|c| \leq 1$, $c \neq -1$. Dacă $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ o funcţie regulată în U şi*

$$\left| c|z|^2 + (1 - |z|^2) \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right| \leq 1, \forall z \in U,$$

atunci funcţia f este regulată şi univalentă în U.

V. Pescar în [64] a găsit un nou criteriu de univalenţă (o generalizare a criteriului de univalenţă Ahlfors şi Becker dat în Teorema 1.6.4), dat de următoarea teoremă.

Teorema 1.6.5. *[64] Fie α şi c două numere complexe, $\Re(\alpha) > 0, |c| \leq 1$, $c \neq -1$. Dacă $f(z) = z + a_2z^2 + ...$ este o funcţie regulată în U şi*

$$\left| c|z|^{2\alpha} + (1 - |z|^{2\alpha}) \frac{zf''(z)}{\alpha f'(z)} \right| \leq 1, \forall z \in U,$$

atunci funcţia

$$F_\alpha(z) = \left[\alpha \int_0^z t^{\alpha-1} f'(t) dt \right]^{\frac{1}{\alpha}} = z + a_2z^2 + ...,$$

este regulată şi univalentă în U.

În [53] N. N. Pascu şi I. Radomir au obţinut următorul rezultat.

Teorema 1.6.6. *[53] Fie β şi c două numere complexe, $\Re(\beta) > 0, |c| \leq 1$, $c \neq -1$ şi $f(z) = z + a_2z^2 + ...$ o funcţie regulată în U. Dacă:*

$$\left| ce^{-2t\beta} + (1 - e^{-2t\beta}) \frac{e^{-t}zf''(e^{-t}z)}{\beta f'(e^{-t}z)} \right| \leq 1,$$

se păstrează pentru $z \in U$ şi $t \geq 0$, atunci funcţia

$$F_\beta(z) = \left[\beta \int_0^z t^{\beta-1} f'(t) dt \right]^{\frac{1}{\beta}} = z + a_2z^2 + ...$$

este regulată şi univalentă în U.

Teorema 1.6.7. *[51] Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ cu $\Re(\alpha) > 0$. Dacă f este o funcţie analitică în U cu proprietatea că*

$$\left| \frac{1 - e^{-2t\alpha}}{\alpha} \cdot \frac{e^{-t}zf''(e^{-t}z)}{f'(e^{-t}z)} \right| \leq 1, \forall z \in U, t \geq 0,$$

atunci funcţia

$$F_\alpha(z) = \left[\alpha \int_0^z u^{\alpha-1} f'(u) du \right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

este regulată şi univalentă în U.

În [52] [51] Pascu a demonstrat următoarea teoremă.

Teorema 1.6.8. *[52] [51] Fie $\beta \in \mathbb{C}$, $\Re(\beta) \geq \gamma > 0$. Dacă $f \in A$ satisface condiţia:*

$$\frac{1 - |z|^{2\gamma}}{\gamma} \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq 1, z \in U,$$

atunci operatorul integral

$$F_\beta(z) = \left[\beta \int_0^z t^{\beta-1} f'(t) dt \right]^{\frac{1}{\beta}} \in S.$$

Folosind Teorema 1.6.8 şi Teorema 1.6.2, D. Breaz şi N. Breaz în lucrarea [14] au obţinut următoarea teoremă.

Teorema 1.6.9. *[14] Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ şi $\Re(\beta) \geq \Re(\alpha) \geq \frac{3n}{|\alpha|}$, fie $f_i \in T_2$ cu:*

$$f_i(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty} a_k{}^i z^{\mathrm{k}}, z \in U, \forall i = 1, 2, ..., n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă $|f_i(z)| \leq 1, z \in U$, atunci operatorul integral

$$F_{\alpha,\beta}(z) = \left[\beta \int_0^z t^{\beta-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} dt\right]^{\frac{1}{\beta}},$$

aparţine clasei S.

Teorema 1.6.10. *([64]) Fie c şi β numere complexe cu $\Re(\beta) > 0, |c| \leq 1$, şi $c \neq -1$, fie $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ o funcţie regulată în U. Dacă:*

$$\left| c|z|^{2\beta} + (1 - |z|^{2\beta}) \frac{zf''(z)}{\beta f'(z)} \right| \leq 1, \forall z \in U,$$

atunci funcţia

$$F_\beta(z) = \left\{\beta \int_0^z t^{\beta-1} \cdot f'(t) dt\right\}^{\frac{1}{\beta}},$$

este regulată şi univalentă în U.

Teorema 1.6.11. *[52] Fie α un număr complex, $Re(\alpha) > 0, c$ un număr complex, $|c| \leq 1, c \neq 1$ şi $f \in A$. Dacă:*

$$\frac{1 - |z|^{2\mathrm{Re}\,(\alpha)}}{\mathrm{Re}\,(\alpha)} . \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1 - |c|, \forall z \in U, \tag{1.61}$$

atunci pentru orice număr complex $\beta, \Re(\beta) \geq \Re(\alpha)$, funcţia $F_\beta(z)$ definită de

$$F_\beta(z) = \left(\beta \int_0^z t^{\beta-1} f'(t) dt\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

este în clasa S.

Teorema 1.6.12. *[52] (Criteriul de univalenţă a lui N. N. Pascu) Fie $f \in A$ şi $\beta \in \mathbb{C}$. Dacă $\Re(\beta) > 0$ şi*

$$\frac{1 - |z|^{2\Re(\beta)}}{\Re(\beta)} . \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1, \forall z \in U,$$

atunci funcţia $F_\beta(z)$ definită de:

$$F_\beta(z) = \left(\beta \int_0^z t^{\beta-1} f'(t) dt\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

este în clasa S.

Pentru $c = 0$ în Teorema 1.6.11 se obţine criteriul de univalenţă obţinut de N. N. Pascu în lucrarea [52].

Teorema 1.6.13. *[51] Fie $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$ şi $f \in A$. Dacă f satisface:*

$$\frac{1-|z|^{2\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha)} \cdot \left|\frac{z \cdot f''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1, \forall z \in U,$$

atunci, pentru orice număr complex β cu $\Re(\beta) \geq \Re(\alpha)$, operatorul integral

$$F_\beta(z) = \left\{\beta \int_0^z t^{\beta-1} \cdot f'(t)dt\right\}^{\frac{1}{\beta}},$$

aparţine clasei S.

Egalitatea este adevărată dacă $f(z) = e^{i\tau} \cdot \frac{M}{R^m} \cdot z^m$, unde τ este constant.

În anul 2004, D. Răducanu, I. Radomir, M. E. Gageone şi N. R. Pascu în lucrarea [67] au demonstrat una dintre generalizările criteriului lui S. Ozaki şi M. Nunokawa.

Teorema 1.6.14. *[67] Dacă $f \in A$ şi $m > 0$ astfel încât:*

$$\left|\left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1\right) - \frac{m-1}{2}|z|^{m+1}\right| \leq \frac{m+1}{2}|z|^{m+1}, \forall z \in U,$$

atunci funcţia f este analitică şi univalentă în U.

În următoarea teoremă observăm condiţii suficiente pentru univalenţa operatorului I_n folosind criteriul de univalenţă al lui J. Becker.

Teorema 1.6.15. *[23] Fie funcţiile $f_i \in A$ şi $m_i > 0$ care satisfac:*

$$\left|\left(\frac{z^2 f_i'(z)}{[f_i(z)]^2} - 1\right) - \frac{m_i-1}{2}|z|^{m_i+1}\right| \leq \frac{m_i+1}{2}|z|^{m_i+1}, \forall z \in U, i \in \{1, 2, ..., n\}. \quad (1.62)$$

Presupunem, de asemenea, că M_i, N_i sunt numere reale pozitive şi funcţiile $g_i \in A$ sunt astfel încât:

$$|f_i(z)| < M_i, \left|\frac{g_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq N_i, \forall z \in U, i \in \{1, 2, ..., n\}. \quad (1.63)$$

Dacă:

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|[(m_i+1)M_i^2 + N_i] \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \forall \alpha_i \in \mathbb{C}, \Re(\alpha_i) > 0, i \in \{1, 2, ..., , n\}, \quad (1.64)$$

atunci operatorul integral I_n din relaţia (1.58) aparţine clasei S.

Pentru cazul particular $m_i = 1, M_i = M, N_i = 1$, obţinem următorul rezultat.

Corolar 1.6.1. *[23] Fie funcţiile $f_i, g_i \in A$ şi M un număr real pozitiv astfel încât inegalităţile:*

$$\left|\frac{z \cdot f_i^{'}(z)}{(f_i(z))^2} - 1\right| \leq |z|^2, |f_i(z)| < M, \left|\frac{g_i^{''}(z)}{g_i^{'}(z)}\right| \leq 1,$$

să fie satisfăcute pentru orice $z \in U, i \in \{1, .., n\}$.

Dacă

$$(2M^2 + 1)\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

unde $\alpha_i \in \mathbb{C}, \Re(\alpha_i) > 0, i \in \{1, 2, ..., , n\}$, atunci operatorul integral I_n aparţine clasei S.

În continuare, punând $n = 1$ în Teorema 1.6.15 se obţine următorul rezultat.

Corolar 1.6.2. *[23] Fie $m > 0$ şi funcţia $f \in A$ satisfăcând ipotezele din Teorema 1.6.14. Presupunem că $\alpha \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0, M, N$ sunt numere reale pozitive şi funcţia $g \in A$. Dacă*

$$|f(z)| < M, \left|\frac{g^{''}(z)}{g^{'}(z)}\right| \leq N,$$

pentru orice $z \in U$ şi

$$|\alpha|[(m + 1)M^2 + N] \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

atunci operatorul integral I_1 dat de relaţia (1.59) aparţine clasei S.

Capitolul 2

Proprietăţi ale unor operatori integrali univalenţi

Acest capitol, structurat în patru secţiuni, este dedicat studiului unor condiţii suficiente de univalenţă, convexitate şi stelaritate pentru funcţii analitice definite pe interiorul discului unitate. Obţinerea rezultatelor originale s-a bazat pe utilizarea criteriilor de univalenţă obţinute de J. Becker, N. N. Pascu, V. Pescar şi alţii, unele rezultate proprii fiind generalizări şi îmbunătăţiri ale celor din lucrarea [23].

În primul subcapitol autoarea acestei lucrări și-a adus propriile contribuții asupra condițiilor de aparteneţă a operatorului $F_\beta(f,g)(z)$ la clasa S. Condiţii de univalenţă ale operatorului integral $F_{n,\beta}(z)$ sunt prezentate în secţiunea 2.2 unde aplicând criteriul lui N. N. Pascu şi Lema generală a lui Schwarz am găsit noi proprietăţi ale acestui operator care a fost introdus de către P. Dicu, R. Bucur şi D. Breaz în lucrarea [23].

Secţiunea 2.3 cuprinde câteva condiţii de univalenţă ale unui nou operator integral $G_{\beta,\gamma}(f,g)(z)$, a căror demonstraţii au fost realizate cu ajutorul criteriului lui N. N. Pascu şi a lemei lui Schwarz, iar în secţiunea 2.4 este ilustrat un criteriu de univalenţă pentru operatorul $G_{n,\beta}(z)$ care este definit ca o generalizare a n funcţii, a operatorului dat în secţiunea 2.2 din cadrul acestei lucrări.

2.1 Condiţii de univalenţă pentru operatorul integral $F_\beta(f,g)(z)$

În acest subcapitol vom prezenta condiţii suficiente care asigură univalenţa operatorului integral $F_\beta(f,g)$, definit mai jos.

Pentru funcţiile $f,g \in A$ introducem operatorul integral $F_\beta(f,g)$ definit prin:

$$F_\beta(f,g)(z) = \left\{\beta \int_0^z t^{\beta-1} \frac{e^{f(t)}}{g'(t)} dt\right\}^{\frac{1}{\beta}}, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \in U. \tag{2.1}$$

Observaţia 2.1.1. *Operatorul $F_\beta(f,g)$ generalizează operatorul*

$$I_\alpha(f,g)(z) = \int_0^z \left(\frac{e^{f(t)}}{g'(t)}\right)^\alpha dt, \Re(\alpha) \leq 1,$$

care a fost introdus şi studiat în lucrarea [20].

În următoarea teoremă este prezentată o condiţie de univalenţă a operatorului integral $F_\beta(f,g)$ utilizând criteriul de univalenţă a lui N. N. Pascu [52].

Teorema 2.1.1. *[60] Fie funcţia $f \in A$ care satisface condiţia:*

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{(f(z))^2} - 1\right| < 1, z \in U. \tag{2.2}$$

Presupunem că M, N sunt numere reale pozitive şi funcţia $g \in A$ astfel încât:

$$|f(z)| < M, \left|\frac{g''(z)}{g'(z)}\right| \leq N, z \in U. \tag{2.3}$$

Dacă $\beta \in \mathbb{C}, \Re(\beta) = a > 0$ şi

$$c(2M^2 + N) \leq 1, \tag{2.4}$$

unde

$$c = \frac{2}{1+2a}\left(\frac{1}{2a+1}\right)^{\frac{1}{2a}},$$

atunci operatorul integral $F_\beta(f,g)$ definit prin relaţia (2.1) aparţine clasei S.

Pentru $N = 1$ obţinem următorul rezultat.

Corolar 2.1.1. *[60] Fie funcţia $f \in A$ care satisface condiţia:*

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{(f(z))^2} - 1\right| < 1, z \in U. \tag{2.5}$$

Presupunem că M este un număr real pozitiv şi funcţia $g \in A$ astfel încât:

$$|f(z)| < M, \left|\frac{g''(z)}{g'(z)}\right| \leq 1, z \in U. \tag{2.6}$$

Dacă $\beta \in \mathbb{C}, \Re(\beta) = a > 0$ şi

$$c(2M^2 + 1) \leq 1, \tag{2.7}$$

unde $c = \frac{2}{1+2a} \cdot \left(\frac{1}{2a+1}\right)^{\frac{1}{2a}}$, atunci operatorul integral $F_\beta(f,g)$ definit prin relaţia (2.1) aparţine clasei S.

Dacă în Corolarul 2.1.1 luăm $M = 1$ obţinem următorul rezultat.

Corolar 2.1.2. *[60] Presupunem că funcţiile $f, g \in A$ şi satisfac condiţiile*

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{(f(z))^2} - 1\right| < 1, |f(z)| < 1, \tag{2.8}$$

şi

$$\left|\frac{g''(z)}{g'(z)}\right| \leq 1, z \in U. \tag{2.9}$$

Dacă $\beta \in \mathbb{C}, \Re(\beta) = a > 0$ şi $c \leq \frac{1}{3}$, unde $c = \frac{2}{1+2a}\left(\frac{1}{2a+1}\right)^{\frac{1}{2a}}$, atunci operatorul $F_\beta(f,g)(z)$ definit prin relaţia (2.1) aparţine clasei S.

Observaţia 2.1.2. *[60] Pentru $\beta = 1$ în Corolarul 2.1.2 obţinem că operatorul*

$$I(f,g)(z) = \int_0^z \frac{e^{f(t)}}{g'(t)} dt,$$

aparţine clasei S şi constanta c este exactă.

Aceste rezultate sunt o îmbunătăţire a rezultatelor obţinute în lucrarea [20].

2.2 Condiţii de univalenţă pentru operatorul integral $F_{n,\beta}(z)$

În acest paragraf vom considera o generalizare a rezultatului din Teorema 2.1.1 luând operatorul integral ca depinzând de n funcţii aparţinând clasei A.

Pentru funcţiile $f_i, g_i \in A$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, introducem operatorul integral $F_{n,\beta}$ definit prin:

$$F_{n,\beta}(z) := \left\{\beta \int_0^z t^{\beta-1} \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{f_i(t)}}{g_i'(t)} dt\right\}^{\frac{1}{\beta}}, z \in U, \tag{2.10}$$

unde $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}, i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Observaţia 2.2.1. *[61] Operatorul $F_{n,\beta}$ generalizează operatorul $F_\beta(f,g)$ definit prin relaţia (2.1).*

Utilizând criteriul lui N. N. Pascu prezentăm următoarea teoremă care asigură condiţii suficiente pentru univalenţa operatorului $F_{n,\beta}$ care a fost introdus şi studiat în lucrarea [23].

Teorema 2.2.1. *[61] Fie funcţiile $f_i \in A$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, care satisfac condiţia:*

$$\left|\frac{z^2 f_i'(z)}{(f_i(z))^2} - 1\right| < 1, z \in U. \tag{2.11}$$

Presupunem că M_i, N_i sunt numere reale pozitive şi funcţiile $g_i \in A$ astfel încât:

$$|f_i(z)| < M_i, \left|\frac{g_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq N_i, z \in U. \tag{2.12}$$

Dacă $\beta \in \mathbb{C}, \Re(\beta) = a > 0$ *şi*

$$c \sum_{i=1}^{n} (2M_i^2 + N_i) \leq 1, \tag{2.13}$$

unde

$$c = \frac{2}{1+2a} \cdot \left(\frac{1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2a}}, \tag{2.14}$$

atunci operatorul $F_{n,\beta}$ *definit prin relaţia (2.10) aparţine clasei* S.

Dacă luăm $M_i = N_i = M$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, numere reale pozitive în Teorema 2.2.1, obţinem următorul rezultat.

Corolar 2.2.1. *[61] Fie funcţiile* $f_i \in A$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *care satisfac condiţia:*

$$\left| \frac{z^2 f_i'(z)}{(f_i(z))^2} - 1 \right| < 1, z \in U. \tag{2.15}$$

Presupunem că M *este un număr real pozitiv şi funcţiile* $g_i \in A$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *astfel încât:*

$$\begin{aligned} &|f_i(z)| < M, \\ &\left| \frac{g_i''(z)}{g_i'(z)} \right| \leq M, z \in U. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Dacă $\beta \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\beta) = a > 0$ *şi*

$$cM(2M+1)n \leq 1, \tag{2.17}$$

unde $c = \frac{2}{1+2a} \left(\frac{1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2a}}$, *atunci operatorul* $F_{n,\beta}$ *definit prin relaţia (2.10) aparţine clasei* S.

Luând $M = 1$ în Corolarul 2.2.1 obţinem următorul rezultat.

Corolar 2.2.2. *[61] Fie funcţiile* $f_i, g_i \in A$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *care satisfac condiţiile*

$$\begin{aligned} &\left| \frac{z^2 f_i'(z)}{\left(f_i(z)\right)^2} - 1 \right| < 1, \\ &|f_i(z)| < 1, \left| \frac{g_i''(z)}{g_i'(z)} \right| \leq 1, z \in U. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dacă $\beta \in \mathbb{C}, \Re(\beta) = a > 0$ *şi*

$$c \leq \frac{1}{3n}, \tag{2.19}$$

unde $c = \frac{2}{1+2a} \cdot \left(\frac{1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2a}}$, *atunci operatorul* $F_{n,\beta}$ *definit prin relaţia (2.10) aparţine clasei* S.

Observaţia 2.2.2. *[61] Pentru* $n = 1$ *în Corolarul 2.2.2 se obţine Corolarul 2.1.2.*

2.3 Condiţii de univalenţă pentru operatorul integral $G_{\beta,\gamma}(f,g)(z)$

Pentru funcţiile $f, g \in A$, introducem un nou operator integral definit prin:

$$G_{\beta,\gamma}(f,g)(z) = \left\{ \beta \int_0^z t^{\beta-1} \left(\frac{e^{f(t)}}{g'(t)} \right)^\gamma dt \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \tag{2.20}$$

unde $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma \in \mathbb{C}, z \in U$.

Şi acest operator generalizează operatorii introduşi în lucrarea [23] de către P. Dicu, R. Bucur şi D. Breaz.

În acest paragraf sunt prezentate condiţii de univalenţă pentru operatorul $G_{\beta,\gamma}(f,g)$.

Pentru a demonstra univalenţa operatorului $G_{\beta,\gamma}(f,g)$ utilizăm criteriul lui N. N. Pascu [52].

Teorema 2.3.1. *[62] Fie funcţia $f \in A$ care satisface condiţia:*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{(f(z))^2} - 1 \right| < 1, z \in U. \tag{2.21}$$

Dacă M, N sunt numere reale pozitive şi $g \in A$ sunt astfel încât:

$$\begin{aligned} &|f(z)| < M, \\ &\left| \frac{g''(z)}{g'(z)} \right| \leq N, z \in U, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$\beta, \gamma \in \mathbb{C}, \Re(\beta) = a > 0$ şi avem că

$$c \cdot |\gamma| \cdot (2M^2 + N) \leq 1, \tag{2.23}$$

unde $c = \frac{2}{1+2a} \left(\frac{1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2a}}$, atunci operatorul $G_{\beta,\gamma}(f,g)$ definit prin relaţia (2.20) este în clasa S.

Dacă luăm $N = 1$ în Teorema 2.3.1 obţinem următorul rezultat.

Corolar 2.3.1. *[62] Fie funcţia $f \in A$ care satisface condiţia:*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{(f(z))^2} - 1 \right| < 1, z \in U. \tag{2.24}$$

Dacă M este un număr real pozitiv şi funcţia $g \in A$ sunt astfel încât:

$$\begin{aligned} &|f(z)| < M, \\ &\left| \frac{g''(z)}{g'(z)} \right| \leq 1, z \in U, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$\beta, \gamma \in \mathbb{C}, \Re(\beta) = a > 0$ şi avem că

$$c \cdot |\gamma| \cdot (2M^2 + 1) \leq 1, \tag{2.26}$$

unde $c = \frac{2}{1+2a} \cdot \left(\frac{1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2a}}$, atunci operatorul $G_{\beta,\gamma}(f,g)$ definit prin relaţia (2.20) este în clasa S.

Punând $M = 1$ în Corolarul 2.3.1, obţinem umătorul corolar.

Corolar 2.3.2. *[62] Fie funcţia $f \in A$ care satisface condiţia:*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{(f(z))^2} - 1 \right| < 1, z \in U. \tag{2.27}$$

Dacă M este un număr real pozitiv şi $g \in A$ sunt astfel încât:

$$\begin{aligned} &|f(z)| < 1, \\ &\left| \frac{g''(z)}{g'(z)} \right| \leq 1, z \in U, \end{aligned} \tag{2.28}$$

$\beta, \gamma \in \mathbb{C}, \Re(\beta) = a > 0$ şi avem că

$$c|\gamma| \leq \frac{1}{3}, \tag{2.29}$$

unde $c = \frac{2}{1+2a} \left(\frac{1}{2a+1} \right)^{\frac{1}{2a}}$. Atunci operatorul $G_{\beta,\gamma}(f, g)$ definit prin relaţia (2.20) este în clasa S.

Observaţia 2.3.1. *[62] Pentru $\beta = 1$ şi $\gamma = \alpha$ s-a obţinut condiţia de univalenţă a operatorului $I_1(z) = \int_0^z \left(\frac{e^{f(t)}}{g'(t)} \right)^\alpha dt$ din relaţia (1.59).*

2.4 Condiţii de univalenţă pentru operatorul integral $G_{n,\beta}(z)$

Pentru funcţiile $f_i, g_i \in A$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, introducem operatorul integral $G_{n,\beta}(z)$ definit prin:

$$G_{n,\beta}(z) = \left\{ \beta \int_0^z t^{\beta-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{e^{f_i(t)}}{g_i'(t)} \right)^{\gamma_i} dt \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \tag{2.30}$$

unde $\beta, \gamma \in \mathbb{C}, \beta \neq 0, \alpha_i \in \mathbb{C}, i \in \{1, 2, ..., n\}, z \in U$.

Vom prezenta în acest paragraf generalizarea operatorului din Teorema 2.3.1 considerând operatorul ca depinzând de n funcţii analitice.

Vom demonstra univalenţa acestui operator utilizând criteriul de univalenţă a lui N. N. Pascu.

Teorema 2.4.1. *[63] Fie funcţiile $f_i \in A$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, astfel încât:*

$$\left| \frac{z^2 f_i'(z)}{(f_i(z))^2} - 1 \right| < 1, z \in U. \tag{2.31}$$

Presupunem că M_i, N_i sunt numere reale pozitive şi $g_i \in A, i \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât:

$$|f_i(z)| < M_i, \left| \frac{g_i''(z)}{g_i'(z)} \right| \leq N_i, z \in U. \tag{2.32}$$

Dacă $\beta \in \mathbb{C}, \Re(\beta) = a > 0, \gamma_i \in \mathbb{C},$ *şi:*

$$c \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i|(M_i^2 + N_i) \leq 1, \tag{2.33}$$

unde $c = \frac{2}{1+2a} \cdot \left(\frac{1}{2a+1}\right)^{\frac{1}{2a}}$ *, atunci operatorul* $G_{n,\beta}(z)$ *definit prin relaţia (2.30) aparţine clasei* S.

Pentru $M_i = N_i = M, i \in \{1, 2, ..., n\}$ în Teorema 2.4.1, obţinem:

Corolar 2.4.1. *[63] Fie funcţiile* $f_i \in A, i \in \{1, 2, ..., n\}$ *astfel încât:*

$$\left| \frac{z^2 f_i'(z)}{(f_i(z))^2} - 1 \right| < 1, z \in U. \tag{2.34}$$

Presupunem că M *este un număr real pozitiv şi* $g_i \in A, i \in \{1, 2, ..., n\}$*, astfel încât:*

$$\begin{aligned} &|f_i(z)| < M, \\ &\left| \frac{g_i''(z)}{g_i'(z)} \right| \leq M, z \in U. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Dacă $\beta \in \mathbb{C}, \Re(\beta) = a > 0, \ \gamma_i \in \mathbb{C}, i \in \{1, 2, ..., n\}$ *şi:*

$$c \cdot M \cdot (M+1) \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \leq 1, \tag{2.36}$$

unde $c = \frac{2}{1+2a} \cdot \left(\frac{1}{2a+1}\right)^{\frac{1}{2a}}$ *, atunci operatorul* $G_{n,\beta}(z)$ *definit prin relaţia (2.30) aparţine clasei* S.

Dacă luăm $M = 1$ în Corolarul 2.4.1 obţinem următorul rezultat.

Corolar 2.4.2. *[63] Fie funcţiile* $f_i, g_i \in A, \ i \in \{1, 2, ..., n\}$*, astfel încât:*

$$\begin{aligned} &\left| \frac{z^2 f_i'(z)}{(f_i(z))^2} - 1 \right| < 1, \\ &|f_i(z)| < 1, \\ &\left| \frac{g_i''(z)}{g_i'(z)} \right| \leq 1, z \in U. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Dacă $\beta \in \mathbb{C}, \Re(\beta) = a > 0, \ \gamma_i \in \mathbb{C}, i \in \{1, 2, ..., n\}$ *şi*

$$2 \cdot c \cdot \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \leq 1, \tag{2.38}$$

unde $c = \frac{2}{1+2a} \cdot \left(\frac{1}{2a+1}\right)^{\frac{1}{2a}}$ *, atunci operatorul* $G_{n,\beta}$ *definit prin relaţia (2.30) aparţine clasei* S.

Observaţia 2.4.1. *[63] Pentru* $\beta = 1$ *şi* $\gamma_i = \alpha_i$ *obţinem o altă condiţie de univalenţă a operatorului*

$$I_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{f_i(t)}}{g_i'(t)} \right)^{\alpha_i} dt$$

definit în [23], prima condiţie fiind dată în Teorema 1.6.15 din lucrarea [23].

Capitolul 3

Proprietăţi ale anumitor clase de funcţii meromorfe definite pe exteriorul discului unitate şi ale unor noi operatori integrali

În acest capitol ne propunem să studiem şi să găsim noi condiţii suficiente de univalenţă, convexitate şi stelaritate, condiţii asupra coeficienţilor unor clase de funcţii univalente, definite pe exteriorul discului unitate pentru diverse subclase de funcţii analitice. Aceste funcţii meromorfe au unicul pol simplu $z = \infty$.

Rezultatele acestui capitol, care cuprinde şapte secţiuni, sunt originale.

Secţiunea 3.1 cuprinde proprietăţi ale unor funcţii din clasa funcţiilor meromorfe injective, stelate de ordin γ, $O_1^*(\gamma)$, şi funcţii din clasa funcţiilor meromorfe convexe de ordin γ, $O_k(\gamma)$.

În secţiunile 3.2, 3.3, 3.4, şi 3.7 sunt prezentate condiţii de univalenţă ale unor operatori integrali formaţi din funcţii definite pe exteriorul discului unitate. Aceşti operatori au fost formaţi pornind de la operatorul $F_{\alpha_i,\beta}(z)$ introdus de N. Seenivasagan şi D. Breaz în lucrarea [71], iar rezultatele originale obţinute de autoarea acestei teze de doctorat au fost publicate în jurnale precum Afrika Matematika [55], Journal of Advanced Mathematical Studies [57], Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica [58]. Un caz particular al operatorului $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ este reprezentat de operatorul integral $E(z)$, pentru care, în secţiunea 3.6 am obţinut anumite valori ale coeficienţilor, demonstrând apartenenţa operatorului la clasa funcţiilor meromorfe stelate de ordin 0, $O_1^*(0)$, iar aceste rezultate sunt publicate în revista General Mathematics [56].

3.1 Proprietăţi ale unor funcţii meromorfe din anumite subclase speciale

Dacă în Definiţia 1.4.12. aplicăm transformarea

$$\begin{aligned} z &\to \frac{1}{z}|()' \\ dz &\to \frac{-1}{z^2}dz, g(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

atunci obţinem:

$$\begin{aligned} -\Re\left(\frac{\frac{1}{z}f'(\frac{1}{z})}{f(\frac{1}{z})}\right) &= -\Re\left(\frac{f'(\frac{1}{z})}{z\cdot f(\frac{1}{z})}\right) = -\Re\left(\frac{g(z)\cdot\left(\frac{1}{g(z)}\right)'}{z}\right) \\ &= -\Re\left(\frac{-g'(z)}{z\cdot g(z)}\right) = \Re\left(\frac{g'(z)}{z\cdot g(z)}\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Pentru a ilustra relaţia (3.2), considerăm $b_3 = 1, \gamma = 0$ în relaţia (1.3).

Avem astfel $g(z) = z + \frac{1}{z^3}$ şi

$$\Re\left(\frac{g'(z)}{z\cdot g(z)}\right) = \Re\left(\frac{(z+z^{-3})'}{z(z+z^{-3})}\right) = \Re\left(\frac{1-\frac{3}{z^4}}{z^2+\frac{1}{z^2}}\right) = \Re\left(\frac{z^4-3}{z^6+z^2}\right).$$

Vom considera câteva cazuri particulare pentru a vedea dacă $\Re\left(\frac{z^4-3}{z^6+z^2}\right)$ are valoare pozitivă sau negativă.

Pentru a simplifica calculele vom folosi aplicaţia symbolab [76].

z	$1+i$	$2-3i$	$2+3i$	$3-i$	$3+2i$	$-4-5i$	$-5-4i$	$-5+4i$
$\Re\left(\frac{z^4-3}{z^6+z^2}\right)$	$=0$	<0	<0	>0	>0	<0	>0	>0

Tabelul 3.1: Valorile lui $\Re\left(\frac{z^4-3}{z^6+z^2}\right)$ pentru un anumit z.

Observăm că este necesar să adăugăm condiţia $|\Re(z)| > |Im(z)|$, pentru a putea formula următoarea definiţie.

Definiţia 3.1.1. *[54] O funcţie $g \in O_1$ meromorfă, stelată de ordin $\gamma, 0 \leq \gamma < 1$, aparţine clasei $O_1^*(\gamma)$ dacă satisface inegalităţile:*

$$\Re\left(\frac{g'(z)}{zg(z)}\right) > \gamma, \tag{3.3}$$

$$\left|\Re(z)\right| > \left|Im(z)\right|, z \in W.$$

Dacă în Definiţia 1.4.16 aplicăm transformarea (3.1) şi folosim relaţia (3.3) vom obţine:

$$-\Re\left(1+\frac{\frac{1}{z}f''\left(\frac{1}{z}\right)}{f'\left(\frac{1}{z}\right)}\right)=-\Re\left(1+\frac{\left(\frac{1}{g(z)}\right)''}{z\cdot\left(\frac{1}{g(z)}\right)'}\right),$$

$$-\Re\left(1+\frac{\frac{1}{z}f''\left(\frac{1}{z}\right)}{f'\left(\frac{1}{z}\right)}\right)=-\Re\left(1+\frac{g''(z)\cdot g^2(z)-g'(z)\cdot 2g(z)\cdot g'(z)}{-\frac{z\cdot g'(z)}{g^2(z)}\cdot g^4(z)}\right),$$

$$-\Re\left(1+\frac{\frac{1}{z}f''\left(\frac{1}{z}\right)}{f'\left(\frac{1}{z}\right)}\right)=-\Re\left(1+\frac{g''(z)}{z\cdot g'(z)}-2\cdot\frac{g'(z)}{z\cdot g(z)}\right),$$

$$-\Re\left(1+\frac{\frac{1}{z}f''\left(\frac{1}{z}\right)}{f'\left(\frac{1}{z}\right)}\right)=-\Re\left(1+\frac{g''(z)}{z\cdot g'(z)}\right)+2\cdot\Re\left(\frac{g'(z)}{z\cdot g(z)}\right)$$

$$-\Re\left(1+\frac{\frac{1}{z}f''\left(\frac{1}{z}\right)}{f'\left(\frac{1}{z}\right)}\right)>2\cdot\gamma-\gamma>\gamma.$$

Dorim să ilustrăm:

$$\Re\left(1+\frac{g''(z)}{z\cdot g'(z)}\right)>\gamma.$$

Astfel vom considera $b_3=1,\gamma=0$ în funcţia definită în relaţia (1.3).
Pentru a simplifica calculele am folosit aplicaţia symbolab ([76]).
Avem astfel că $g(z)=z+\frac{1}{z^3}$. Atunci

$$\Re\left(1+\frac{g''(z)}{z\cdot g'(z)}\right)=\Re\left(1+\frac{[(z+z^{-3})']'}{z\cdot(z+z^{-3})'}\right)=\Re\left(1+\frac{12}{z^6-3z^2}\right).$$

Vom considera cazuri particulare ale lui z pentru a vedea dacă $\Re\left(1+\frac{12}{z^6-3z^2}\right)$ are valoare pozitivă sau negativă.

z	$1+i$	$1+2i$	$2-3i$	$3-i$	$3+2i$	$-4-5i$	$-5-4i$
$\Re\left(1+\frac{12}{z^6-3z^2}\right)$	>0	>0	>0	>0	>0	>0	>0

Tabelul 3.2: Valorile lui $\Re\left(1+\frac{12}{z^6-3z^2}\right)$ pentru un anumit z.

Se observă astfel că în toate cazurile considerate mai sus, $\Re\left(1+\frac{12}{z^6-3z^2}\right)>0$.

Putem astfel să formulăm următoarea definiţie.

Definiţia 3.1.2. *[54] O funcţie $g\in O_1$, meromorfă, convexă de ordin $\gamma, 0\le\gamma<1$, aparţine clasei $O_k(\gamma)$ dacă satisface inegalitatea:*

$$\Re\left(1+\frac{g''(z)}{z\cdot g'(z)}\right) > \gamma, z \in W.$$

Propoziţia 3.1.1. *[54] O funcţie $g \in O_1$ este meromorfŭ, normată şi injectivă dacă:*

$$\Re\left(\frac{z\cdot g'(z)}{g(z)}\right) < 1, \tag{3.4}$$

$$\left|\Re(z)\right| > \left|Im(z)\right|, \tag{3.5}$$

şi

$$\Re(z^4) > 0, \forall z \in W.$$

3.2 O condiţie de univalenţă pentru operatorul $K_{\alpha,\beta}(z)$

Pornind de la operatorul $F_{\alpha_i,\beta}$ definit în relaţia (1.60), putem defini un nou operator $K_{\alpha,\beta}(z) = \left\{\beta\int_1^z t^{-1-\beta+\frac{1}{\alpha}} g(t)^{\frac{-1}{\alpha}} dt\right\}^{\frac{1}{\beta}}$, pentru care vom prezenta în acest subcapitol condiţii de univalenţă.

Teorema 3.2.1. *[55] Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $z \in W$ şi $\Re(\beta) \geq \Re(\alpha) \geq \frac{3}{|\alpha|}$. Dacă $f \in T_2$ şi $g \in V_2$, verifică condiţiile:*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{g'(z)}{z^2}+1\right| > 1,\\
&\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \left|\frac{1}{g(z)}\right| \geq 1, z \in W,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

atunci operatorul integral, $K_{\alpha,\beta}(z)$, aparţine clasei Σ.

3.3 Condiţii de univalenţă pentru operatorii $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ şi $G_\beta(z)$

Pornind de la operatorul integral $F_{\alpha_i,\beta}(z)$, definit în relaţia (1.60), putem defini noi operatori pe care să-i notăm cu $G_{\alpha_i,\beta}(z) = \left\{\beta\int_1^z t^{-1-\beta}\prod_{i=1}^n\left(\frac{t}{g_i(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} dt\right\}^{\frac{1}{\beta}}$ şi $G_\beta(z) = \left\{\beta\int_1^z t^{-1-\beta}\frac{g'(t)}{g^2(t)}dt\right\}^{\frac{1}{\beta}}$. Pentru aceşti operatori vom da în continuare condiţii de univalenţă.

Fie $g_i(t) = \frac{1}{f_i(\frac{1}{t})} \in O_1$, cu $g_i(t) \neq 0, t \in O_1, (t \neq 0)$.

Cum O_1 este subclasa lui O care conţine funcţiile meromorfe şi injective g, definite în relaţia (1.3), putem spune că între T_2 şi O_1 există o bijecţie.

Pornim astfel de la operatorul $F_{\alpha_i\beta}(z)$ şi aplicăm următoarele transformări:

$$\begin{aligned} t &\to \frac{1}{t}|()' \\ dt &\to \frac{-1}{t^2}dt, \\ g_i(t) &= \frac{1}{f_i(\frac{1}{t})} \in O_1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ţinem cont de faptul că trebuie să aplicăm transformări şi la capetele de integrare, astfel:

- când $t = 0$, vom avea $t = \frac{1}{0_+} = +\infty$,
- când $t = z$, vom avea $t = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} > 1$.

Prin urmare $\int_0^z$ se transformă în $\int_\infty^1$, dar z face parte din exteriorul discului unitate, adică $\int_z^1 = -\int_1^z$.

Se defineşte operatorul integral:

$$G_{\alpha_i,\beta}(z) = \left\{\beta\int_1^z t^{-1-\beta}\prod_{i=1}^n\left(\frac{t}{g_i(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}}dt\right\}^{\frac{1}{\beta}}. \tag{3.8}$$

Dacă $\beta = 1$, atunci operatorul integral $G_{\alpha_i,\beta}$ va avea forma:

$$G_{\alpha_i,1}(z) = \int_1^z t^{-2}\prod_{i=1}^n\left(\frac{t}{g_i(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}}dt. \tag{3.9}$$

Teorema 3.3.1. *[55] Fie $\beta \in \mathbb{C}$, $Re\beta \geq \gamma > 0$. Dacă $g \in O$ verifică condiţia*

$$\frac{|z|^{2\gamma}-1}{\gamma|z|^{2\gamma}}\cdot\left|\frac{g''(z)}{zg'(z)}\right| > 1,$$

atunci operatorul $G_\beta(z)$ aparţine clasei Σ.

Teorema 3.3.2. *[55] Fie $\alpha_i, \beta \in \mathbb{C}$ şi $\Re(\beta) \geq \Re(\alpha_i) \geq \frac{3n}{|\alpha_i|}$. Fie $g_i \in O_2$, unde O_2 este subclasă a lui O_1, cu:*

$$g_i(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{{b_k}^i}{z^k}, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă $|g_i(z)| > 1, z \in W$, atunci operatorul integral $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ este în O_1.

Teorema 3.3.3. *[55] Fie $m > 1$, $g_i \in V_{2,\mu_i}$, (V_{2,μ_i} subclasă definită în relaţia (1.23)), $\alpha_i, \beta \in \mathbb{C}$, $\Re(\beta) \geq \gamma$ şi*

$$\gamma = \sum_{i=3}^{n}\frac{(1+\mu_i)m-1}{|\alpha_i|}, \mu_i > 1, i \in \{1, 2, ..., n\}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă

$$|g_i(z)| > m, z \in W, i \in \{1, 2, .., n\},$$

atunci operatorul integral

$$G_{\alpha_i,\beta}(z) = \left\{\beta \int_1^z t^{-1-\beta} \prod_{i=1}^n \left(\frac{t}{g_i(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} dt\right\}^{\frac{1}{\beta}},$$

aparţine clasei Σ.

Teorema 3.3.4. *[55] Fie* $m > 1, g_i \in S(p)$, *(*g_i *definit în Teorema 3.3.2) şi*

$$\gamma_1 = \sum_{i=3}^n \frac{(1+p)m - 1}{|\alpha_i|}, i = 1, 2, ..., n, n \in \mathbb{N}^*,$$

iar p cu proprietăţile din relaţiile (1.24) şi (1.25).
Dacă

$$|g_i(z)| > m, z \in W, i = 1, 2, .., n,$$

atunci obţinem că operatorul $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ *aparţine clasei* Σ.

Lema 3.3.1. *[58] Fie funcţia analitică g, regulată pe exteriorul discului unitate* $W_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ *şi fie* $g(\infty) = \infty, g'(\infty) = 1$.
Dacă $|g(z)| \geq 1$, *atunci au loc inegalităţile:*

$$\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{z}\right|,$$
$$\frac{1}{|g(z)|} \leq \frac{1}{|z|}, z \in W.$$

Egalitatea este adevărată doar dacă $|g(z)| = K \cdot z$ şi $K = 1$.

În Lema 1.1.1 [58] aplicăm transformările din relaţia (3.7) şi obţinem următoarea lemă.

Lema 3.3.2. *[57] Fie funcţia regulată g pe exteriorul discului unitate* $W_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, *cu* $|f(z)| > M$, *pentru M fixat.*
Dacă ordinul de multiplicitate al zerourilor este cu unu mai mult decât m pentru $z = \infty$, *atunci:*

$$\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq \frac{M}{R^m} \cdot \left|\frac{1}{z}\right|^m,$$
$$\left|\frac{1}{g(z)}\right| \leq \frac{M}{R^m} \cdot \frac{1}{|z|^m}\Bigg|()^{-1}, z \in W.$$

Egalitatea are loc doar dacă $f(z) = e^{i\tau} \cdot \frac{R^m}{M} \cdot z^m$, unde τ este constant.

Teorema 3.3.5. *[57] Fie $g \in O_1$ astfel încât:*

$$\left|\frac{g'(z)}{z^2}+1\right| \geq 1, \forall z \in W. \tag{3.10}$$

Atunci g este univalentă în W.

Teorema 3.3.6. *[57] Fie c şi β numere complexe astfel încât $\Re\{\beta\} > 0, |c| \geq 1$, şi $c \neq -1$. Fie $k(z) = z + \frac{b_3}{z^3} + \frac{b_4}{z^4} + ...$ o funcţie regulată în W. Dacă*

$$\left|\frac{c}{|z|^{2\beta}} + \left(1 - \frac{1}{|z|^{2\beta}}\right) \cdot \frac{k''(z)}{\beta \cdot z \cdot k'(z)}\right| \geq 1, \forall z \in W,$$

atunci operatorul $G_{\alpha,\beta}(z)$, definit prin

$$G_{\alpha,\beta}(z) = \left\{\beta \int_1^z t^{-\beta-1} \cdot k'(t)dt\right\}^{\frac{1}{\beta}}, z \in W,$$

este o funcţie regulată şi univalentă în W.

Teorema 3.3.7. *[57] Fie $M \geq 1$ şi funcţiile $g_i \in O_1, i \in \{1, 2, ..., n\}$, care satisfac condiţia (3.10) şi fie β un număr real, $\beta \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{M|\alpha_i|}$ iar c şi α_i sunt numere complexe, $\alpha_i \neq 0$ Dacă*

$$\begin{aligned} &|c| \geq |z|^{2\beta} - \left(1 - |z|^{2\beta}\right) \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{M|\alpha_i|}, \\ &|g_i(z)| \geq M, \\ &|z| \geq M, \forall z \in W, \end{aligned} \tag{3.11}$$

atunci operatorul $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ definit în (3.8) este din clasa Σ.

Teorema 3.3.8. *[57] Fie $M \geq 1$ şi funcţia $g_i \in O_1$, pentru $i \in \{1, 2, ..., n\}$, care satisface relaţia (3.10), β un număr real, $\beta \leq \frac{n}{M|\alpha|}$,iar $c, \alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.*
Dacă:

$$|c| \geq |z|^{2\beta} - \left(1 - |z|^{2\beta}\right) \frac{1}{\beta} \cdot \frac{n}{M|\alpha|},$$
$$|g_i(z)| > M,$$
$$|z| > M, z \in W,$$

atunci operatorul $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ definit în relaţia (3.8) aparţine clasei Σ.

Corolar 3.3.1. *[57] Fie funcţia $g_i \in O_1$ care satisface (3.10) şi β un număr real, $\beta \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_i|}$, unde $c, \alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Dacă relaţia*

$$|c| \geq |z|^{2\beta} - \left(1 - |z|^{2\beta}\right) \frac{1}{\beta} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_i|},$$

$$|g_i(z)| > 1, \forall z \in W,$$

atunci operatorul $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ definit în relaţia (3.8) aparţine clasei Σ.

Corolar 3.3.2. *[57] Fie $M \geq 1$ şi funcţia $g \in O_1$ ce satisface condiţia (3.10), $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \leq \frac{1}{M|\alpha|}$ şi $c \in \mathbb{C}$. Dacă:*

$$|c| \geq |z|^{2\beta} - \left(1 - |z|^{2\beta}\right) \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{M|\alpha|},$$
$$|g(z)| > M,$$
$$|z| > M, \forall z \in W,$$

atunci operatorul $G_{\alpha,\beta}(z), z \in W$, aparţine clasei Σ.

Corolar 3.3.3. *[57] Fie funcţia $g \in O_1$ care satisface condiţia (3.10), $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \leq \frac{1}{|\alpha|}$ iar $c, \alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.*
Dacă:

$$|c| \geq |z|^{2\beta} - \left(1 - |z|^{2\beta}\right) \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{|\alpha|},$$
$$|g(z)| > 1, \forall z \in W,$$

atunci operatorul $G_{\alpha,\beta}(z), z \in W$ aparţine clasei Σ.

Vom da în următoarea teoremă condiţii de aparteneţă a operatorului integral $G_\beta(z)$ la clasa Σ.

Teorema 3.3.9. *[58] Fie $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$ şi $k \in O$. Dacă k satisface inegalităţile*

$$\frac{|z|^{2\Re(\alpha)} - 1}{\Re(\alpha) \cdot |z|^{2\Re(\alpha)}} \cdot \left| \frac{k''(z)}{z \cdot k'(z)} \right| > 1, \forall z \in W,$$
$$\left| \frac{k''(z)}{zk'(z)} \right| > \Re(\alpha) \cdot |z|, \forall z \in W, \tag{3.12}$$

atunci, pentru orice număr complex β cu $\Re(\beta) \leq \Re(\alpha)$, operatorul

$$G_\beta(z) = \left\{ \beta \int_1^z t^{-\beta-1} \cdot k'(t) dt \right\}^{\frac{1}{\beta}},$$

aparţine clasei Σ.

În continuare vom da condiţii de univalenţă a operatorului $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ la clasa Σ.

Teorema 3.3.10. *[58] Fie g_i definită prin*

$$g_i(z) = z + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{b_k^i}{z^k}, |z| > 1, \tag{3.13}$$

din clasa $V_j, i \in \{1, 2, ...n\}, n \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}_1^*$.
Dacă $|g_i(z)| \geq M_i, M_i \geq 1, z \in W$, atunci operatorul $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ definit în relaţia (3.8) este în clasa Σ,

$$\Re(\alpha) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{M_i|\alpha_i|}, \tag{3.14}$$

şi $\Re(\beta) \leq \Re(\alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Corolar 3.3.4. *[58] Fie g_i definit în (3.13) din clasa $V_j, i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $j \in \mathbb{N}_1^*$.*
Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, atunci operatorul $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ definit în relaţia (3.8) este în clasa Σ, şi

$$\Re(\alpha) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{M|\alpha_i|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha), \alpha_i, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.5. *[58] Fie g_i definită în relaţia (3.13) din clasa $V_j, i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $j \in \mathbb{N}_1^*$.*
Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, atunci operatorul $G_{\alpha,\beta}(z)$ definit în relaţia (3.8) este în clasa Σ, şi

$$\Re(\alpha) \leq \frac{n}{M|\alpha|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.6. *[58] Fie g_i definit în (3.13) din clasa $V_2, i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.*
Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, atunci operatorul $G_{\alpha,\beta}(z)$ definit în relaţia (3.8) este în clasa Σ, şi

$$\Re(\alpha) \leq \frac{n}{M|\alpha|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.7. *[58] Fie g_i definit în (3.13) din clasa $V_2, i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.*
Dacă $|g_i(z)| \geq 1, z \in W$, atunci operatorul $G_{\alpha,\beta}(z)$ definit în relaţia (3.8) este în clasa Σ, şi

$$\Re(\alpha) \leq \frac{n}{|\alpha|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Teorema 3.3.11. *[58] Fie g_i definit în (3.13) din clasa $V_{j,\mu_i}, i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $j \in \mathbb{N}_1^*$.*
Dacă $|g_i(z)| \geq M_i, M_i \geq 1, z \in W$, atunci operatorul $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ definit în relaţia (3.8) este în clasa Σ, şi

$$\Re(\alpha_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+\mu_i)M_i|\alpha_i|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha_i), \alpha_i, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.8. *[58] Fie g_i definit în (3.13) din clasa $V_{j,\mu_i}, i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $j \in \mathbb{N}_1^*$.*
Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, atunci operatorul $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ definit în relaţia (3.8) aparţine clasei Σ, şi

$$\Re(\alpha_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+\mu_i)M|\alpha_i|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha_i), \alpha_i, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.9. *[58] Fie g_i definit în (3.13) din clasa $V_{j,\mu_i}, i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $j \in \mathbb{N}_1^*$.*

Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, *atunci operatorul* $G_{\alpha,\beta}(z)$ *definit în relaţia (3.8) aparţine clasei* Σ, *şi*

$$\Re(\alpha) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+\mu_i)M|\alpha|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.10. *[58] Fie* g_i *definit în (3.13) din clasa* $V_{j,\mu}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}^*$, $j \in \mathbb{N}_1^*$.
Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, *atunci operatorul* $G_{\alpha,\beta}(z)$ *definit în relaţia (3.8) aparţine clasei* Σ, *şi*

$$\Re(\alpha) \leq \frac{n}{(1+\mu)M|\alpha|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.11. *[58] Fie* g_i *definit în (3.13) din clasa* V_{2,μ_i} *pentru* $i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, *atunci operatorul* $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ *definit în relaţia (3.8) aparţine clasei* Σ, *şi*

$$\Re(\alpha_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+\mu_i)M|\alpha_i|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha_i), \alpha_i, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.12. *[58] Fie* g_i *definit în (3.13) din clasa* $V_{2,\mu}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}^*$.
Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, *atunci operatorul* $G_{\alpha,\beta}(z)$ *definit în relaţia (3.8) aparţine clasei* Σ, *şi*

$$\Re(\alpha) \leq \frac{n}{(1+\mu)M|\alpha|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.13. *[58] Fie* g_i *definit în (3.13) din clasa* $V_{2,\mu}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}^*$.
Dacă $|g_i(z)| \geq 1, z \in W$, *atunci operatorul* $G_{\alpha,\beta}(z)$ *definit în relaţia (3.8) aparţine clasei* Σ, *şi*

$$\Re(\alpha) \leq \frac{n}{(1+\mu)|\alpha|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Teorema 3.3.12. *[58] Fie* g_i *definit în (3.13) din clasa* $\Sigma_j(p_i), i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}_1^*$.
Dacă $|g_i(z)| \geq M_i, M_i \geq 1, z \in W$, *atunci operatorul* $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ *definit în relaţia (3.8) aparţine clasei* Σ, *şi*

$$\Re(\alpha_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+p_i)M_i|\alpha_i|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha_i), \alpha_i, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.14. *[58] Fie* g_i *definit în (3.13) din clasa* $\Sigma_j(p_i), i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}_1^*$.
Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, *atunci operatorul* $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ *definit în relaţia (3.8) aparţine clasei* Σ, *şi*

$$\Re(\alpha_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+p_i)M|\alpha_i|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha_i), \alpha_i, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.15. *[58] Fie* g_i *definit în (3.13) din clasa* $\Sigma_j(p_i), i \in \{1, 2, ...n\}, n \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}_1^*$.
Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, *atunci operatorul* $G_{\alpha,\beta}(z)$ *definit în relaţia (3.8) aparţine clasei* Σ, *şi*

$$\Re(\alpha) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+p_i)M|\alpha|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.16. *[58] Fie* g_i *definit în (3.13) din clasa* $\Sigma_j(p_i), i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}_1^*$.
Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, *atunci operatorul* $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ *definit în relaţia (3.8) aparţine clasei* Σ, *şi*

$$\Re(\alpha_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+p)M|\alpha_i|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha_i), \alpha_i, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.17. *[58] Fie* g_i *definit în (3.13) din clasa* $\Sigma_j(p), i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}_1^*$.
Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, *atunci operatorul* $G_{\alpha,\beta}(z)$ *definit în relaţia (3.8) aparţine clasei* Σ, *şi*

$$\Re(\alpha) \leq \frac{n}{(1+p)M|\alpha|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.18. *[58] Fie* g_i *definit în (3.13) din clasa* $\Sigma_2(p), i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*, j \in \mathbb{N}_1^*$.
Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, *atunci operatorul integral* $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ *definit în relaţia (3.8) aparţine clasei* Σ, *şi*

$$\Re(\alpha_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+p)M|\alpha_i|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha_i), \alpha_i, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.19. *[58] Fie* g_i *definit în (3.13) din clasa* $\Sigma_2(p), i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Dacă $|g_i(z)| \geq M, M \geq 1, z \in W$, *atunci operatorul* $G_{\alpha,\beta}(z)$ *definit în relaţia (3.8) aparţine clasei* Σ, *şi*

$$\Re(\alpha) \leq \frac{n}{(1+p)M|\alpha|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Corolar 3.3.20. *[58] Fie* g_i *definit în (3.13) din clasa* $\Sigma_2(p), i \in \{1, 2, ...n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Dacă $|g_i(z)| \geq 1, z \in W$, *atunci operatorul* $G_{\alpha,\beta}(z)$ *definit în relaţia (3.8) aparţine clasei* Σ, *şi*

$$\Re(\alpha) \leq \frac{n}{(1+p)|\alpha|}, \Re(\beta) \leq \Re(\alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

3.4 Stelaritatea şi convexitatea operatorului $G_{\alpha_i,1}(z)$

Vom defini operatorul $G_{\alpha_i,1}(z) = \int_1^z t^{-2} \prod_{i=1}^n \left(\frac{t}{g_i(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} dt$. Acest operator este tot o generalizare a operatorului $F_{\alpha_i,\beta}(z)$, definit în [71].

Teorema 3.4.1. *[54] Fie $g_i \in O_1, \alpha_i \in \mathbb{C}, i \in \{1, ..., n\}$.*
Dacă

$$\Re\left(\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right) < 1, \tag{3.15}$$

$$\left|\Re(z)\right| > \left|Im(z)\right|$$

şi

$$\Re(z^4) > 0, z \in W,$$

atunci $G_{\alpha_i,1}(z)$ aparţine clasei $O_1^*(0)$.

Pentru a uşura scrierea, vom nota $G(z)$ în locul lui $G_{\alpha_i,1}(z)$.

Teorema 3.4.2. *[54] Fie $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ şi $g_i \in O(\gamma_i), 0 \leq \gamma_i < 1$.*
Dacă $0 < \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}(1 - \gamma_i) \leq 1, z \in W$, şi:

$$|\Re(z)| > |Im(z)|,$$

$$\Re\left(-\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right) > -\gamma_i, z \in W, \tag{3.16}$$

atunci $G_{\alpha_i,1}(z)$ definit în relaţia (3.9) aparţine clasei $O_1^*(\mu)$, unde $\mu = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}(1 - \gamma_i)$.

Dacă luăm $\gamma_i = \gamma$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ în Teorema 3.7.2, obţinem următorul corolar.

Corolar 3.4.1. *[54] Fie $g_i \in O_1(\gamma), 0 \leq \gamma < 1, \alpha_i \in \mathbb{C}, i \in \{1, 2, ..., n\}$. Dacă $0 < \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} \leq \frac{1}{1-\gamma}$, şi*

$$|\Re(z)| > |Im(z)|$$

$$\Re\left(\frac{-z \cdot g_i'(z)}{g_i(z)}\right) > -\gamma, \forall z \in W,$$

atunci $G_{\alpha_i,1}(z)$ definit în relaţia (3.9) este stelat de ordin μ, unde $\mu = (1-\gamma)\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}$.

Teorema 3.4.3. *[54] Fie $g_i \in O_k(\gamma_i), 0 \leq \gamma_i < 1, i \in \{1, 2, ..., n\}, \alpha_i \in \mathbb{C}$. Dacă $0 < \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} \cdot 2\gamma_i \leq 1$ şi*

$$|\Re(z)| > |Im(z)|,$$

$$\Re(z^4) > 0, \forall z \in W,$$

atunci $G_{\alpha_i,1}(z)$ definit în relaţia (3.9) aparţine clasei $O_k^*(\mu)$, unde $\mu = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} \cdot 2\gamma_i$.

Notând $\gamma_i = \gamma, i \in \{1, 2, ..., n\}$ în Teorema 3.7.3., obţinem următorul corolar.

Corolar 3.4.2. *[54] Fie* $g_i \in O_k(\gamma), -1 \leq \gamma < 1, i \in \{1, 2, ..., n\}, \alpha_i \in \mathbb{C}$. *Dacă* $0 < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} \leq \frac{1}{2\cdot\gamma}$,

$$|\Re(z)| > |Im(z)|,$$

şi

$$\Re(z^4) > 0, \forall z \in W,$$

atunci $G_{\alpha_i,1}(z)$ *dat de relaţia (3.9) este stelat de ordin* μ, *unde* $\mu = 2\gamma \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}$.

3.5 Proprietăți ale coeficienților operatorului $E(z)$

Pentru operatorul integral $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ definit în relaţia (3.8) luăm cazul particular: $\beta = 1, \alpha_i = 1$.

Pentru simplitate vom scrie $E(z)$ în loc de $G_{1,1}(z)$, adică

$$E(z) = \int_1^z t^{-1-1}\left(\frac{t}{g(t)}\right) dt = \int_1^z \frac{1}{t \cdot g(t)} dt \tag{3.17}$$

Condiţia (3.4) poate fi rescrisă astfel:

$$\Re\left(\frac{-z \cdot g'(z)}{g(z)}\right) > -1,$$

$$\Re\left(1 + \frac{z \cdot g'(z)}{g(z)}\right) < 2,$$

$$\frac{1}{\Re\left(1 + \frac{z \cdot g'(z)}{g(z)}\right)} > \frac{1}{2}.$$

Luând în considerare condiţia din relaţia (1.3), adică $1 < |z| < \infty$, vom obţine:

$$\Re(z^2) > 1.$$

Vom concluziona cu uşurinţă că dacă $0 \leq \gamma < 1$, atunci:

$$\frac{5-\gamma}{2} > 2 => \frac{1-\gamma}{2} > 0. \tag{3.18}$$

Teorema 3.5.1. *[56] Fie* $g \in O_{1(\gamma)}$. *Dacă*

$$-\Re\left\{\frac{z \cdot E'''(z)}{E''(z)}\right\} > 0,$$

atunci $E(z) \in O_1^*(0)$, *unde* $E(z)$ *este operatorul integral dat de relaţia (3.17).*

Corolar 3.5.1. *[56] Fie* $g \in O_{1(\gamma)}$*. Dacă*

$$\Re\left\{-\frac{z \cdot E'''(z)}{E''(z)} - 2\right\} > \frac{1-\gamma}{2},$$

atunci $E(z) \in O_1^*(0)$*, unde* $E(z)$ *este operatorul din relaţia (3.17).*

Vom considera câteva exemple.

Exemplul 3.5.1. *[56]*

Pentru funcţiile meromorfe, normate şi injective g, din relaţia (1.3):

$$g(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}, 1 < |z| < \infty,$$

fie $b_k = 0$. Atunci obţinem

$$g(z) = z. \tag{3.19}$$

şi dorim să verificăm dacă sunt îndeplinite condiţiile Teoremei 3.5.1. Vom găsi noile forme ale lui $E(g(z) = z)$, $E'(g(z) = z)$, $E''(g(z) = z)$ şi $E'''(g(z) = z)$.

Aplicăm relaţia (3.19) în relaţia (3.17) şi avem

$$E(g(z) = z) = \int_1^z \frac{1}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{z}. \tag{3.20}$$

După diferenţierea succesivă a lui $E(z)$ definit în relaţia (3.20), vom obţine:

$$E'(g(z) = z) = \frac{1}{z^2},$$

$$E''(g(z) = z) = -\frac{2}{z^3}, \tag{3.21}$$

$$E'''(g(z) = z) = \frac{6}{z^4}. \tag{3.22}$$

Vom înmulţi relaţia (3.22) cu z şi vom împărţi rezultatul la relaţia (3.21):

$$\frac{z \cdot E'''(g(z) = z)}{E''(g(z) = z)} = -3.$$

Se obţine astfel

$$-\Re\left\{\frac{z \cdot E'''(g(z) = z)}{E''(g(z) = z)}\right\} = 3 > 0.$$

Deci $E(g(z) = z) \in O_1^*(0)$.

Verificăm dacă condiţiile din Corolarul 3.5.1. au loc. Avem că

$$\frac{z \cdot E'''(g(z) = z)}{E''(g(z) = z)} + 2 = -3 + 2 = -1,$$

$$-\Re\left\{\frac{z \cdot E'''(g(z) = z)}{E''(g(z) = z)} + 2\right\} = 1 > 0,$$

deci $E(g(z) = z) \in O_1^*(0)$.

Exemplul 3.5.2. *[56]*

Pentru funcţiile meromorfe, normate şi injective g, din relaţia (1.3):

$$g(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}, 1 < |z| < \infty,$$

fie $k = 3$ şi $b_k = 1$. Găsim astfel funcţia:

$$g(z) = z + \frac{1}{z^3}. \tag{3.23}$$

Dorim să verificăm dacă Teorema 3.5.1 are loc în acest caz găsind astfel noile forme a lui $E(g(z))$, $E'(g(z))$, $E''(g(z))$ şi $E'''(g(z))$.

Aplicăm funcţia g definită mai sus în relaţia (3.23) , operatorului definit în relaţia (3.17) şi astfel obţinem:

$$E(z) = \int_1^z \frac{1}{t \cdot \left(t + \frac{1}{t^3}\right)} dt = \int_1^z \frac{t^2}{t^4 + 1} dt. \tag{3.24}$$

După diferenţierea succesivă a lui $E(z)$ definit în relaţia (3.24), vom obţine:

$$E'(z) = \frac{z^2}{1 + z^4} - \frac{1}{2},$$

$$E''(z) = \frac{2z - 2z^5}{(1 + z^4)^2}, \tag{3.25}$$

$$E'''(z) = \frac{2(1 - 12z^4 + 3z^8)}{(1 + z^4)^3}. \tag{3.26}$$

Vom înmulţi relaţia (3.26) cu z şi vom împărţi rezultatul la relaţia (3.25), obţinând astfel:

$$\begin{aligned} \frac{z \cdot E'''(z)}{E''(z)} &= \frac{2z(1 - 12z^4 + 3z^8)}{(1 + z^4)^3} \cdot \frac{(1 + z^4)^2}{2z(1 - z^4)}, \\ &= -3 + \frac{12}{1 + z^4} - \frac{8}{1 - z^8}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Se ştie că z este un număr complex de forma $z = a + ib$, cu $a, b \in \mathbb{R}, |z| > 1, a^2 + b^2 > 1$.

Dacă luăm cazul în care $z = 1 + i$, avem că $|z| = \sqrt{2} > 1$,

$$z^4 = -4, z^8 = 16,$$

$$\frac{z \cdot E'''(z)}{E''(z)} = -3 + \frac{12}{1 - 4} - \frac{8}{1 - 16} = -\frac{97}{15} = -6,4(6),$$

$$-\Re\left\{\frac{z \cdot E'''(z)}{E''(z)}\right\} = +6,4(6) > 0.$$

Am obţinut că: $-\Re\left\{\frac{z\cdot E'''(z)}{E''(z)}\right\} > 0$. Deci $E(z) \in O_1^*(0)$.

Verificăm dacă Corolarul 3.5.1., are loc în acest caz.

$$\frac{z\cdot E'''(z)}{E''(z)} + 2 = -6,4(6) + 2 = -4,4(6),$$

$$-\Re\left\{\frac{z\cdot E'''(z)}{E''(z)} + 2\right\} = +4,4(6) > 0.$$

Obţinem:

$$-\Re\left\{\frac{z\cdot E'''(z)}{E''(z)} + 2\right\} > 0.$$

Prin urmare avem că $E(z) \in O_1^*(0)$.

3.6 Condiţii de univalenţă pentru operatorul $T_{\alpha_i,\beta}(z)$

Considerăm operatorul $T_{\alpha_i,\beta}(z)$ definit prin

$$T_{\alpha_i,\beta}(z) = \left\{\beta\int_1^z t^{-1-\beta}\prod_{i=1}^n\left(\frac{t}{g_i(t)\cdot e^{g_i(t)}}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}}dt\right\}^{\frac{1}{\beta}}.$$

Acest operator este tot o generalizare a operatorului $F_{\alpha_i,\beta}(z)$ dar şi a operatorului $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ definit în relaţia (3.8).

Teorema 3.6.1. *[59] Fie $m > 1$, $g_i \in V_{2,\mu_i}$,*

$$g_i(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{b_k{}^i}{z^k}, \forall i = 1,2,...,n, n \in \mathbb{N}^*$$

şi $\alpha_i, \beta \in \mathbb{C}$, $\Re(\beta) \geq \gamma$, unde:

$$\gamma = \sum_{i=3}^{n}\frac{m - 2(\mu_i - 1)}{|\alpha_i|\cdot m}, \mu_i > 1, i = 1,2,...,n; n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă:

$$|g_i(z)| > m, z \in W, i = 1,2,..,n,$$

atunci obţinem că operatorul integral

$$T_{\alpha_i,\beta}(z) = \left\{\beta\int_1^z t^{-1-\beta}\prod_{i=1}^n\left(\frac{t}{g_i(t)\cdot e^{g_i(t)}}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}}dt\right\}^{\frac{1}{\beta}},$$

aparţine clasei Σ.

Teorema 3.6.2. *[59] Fie $m > 1, g_i \in S(p), (g_i$ definit în Teorema 3.3.2) şi:*

$$\gamma_1 = \sum_{i=3}^{n} \frac{m - 2p + 2}{m \cdot |\alpha_i|}, i = 1, 2, ..., n; n \in \mathbb{N}^*$$

şi p cu proprietăţile din relaţiile (1.24) şi (1.25), adică

$$\left| \left(\frac{g(z)}{z} \right)'' \right| > p, z \in W, \left| \frac{g'(z)}{z^2} + 1 \right| \geq \frac{p}{|z|^j}, j \in \mathbb{N}_1^*.$$

Dacă:

$$|g_i(z)| > m, z \in W, i = 1, 2, .., n,$$

atunci operatorul

$$T_{\alpha_i,\beta}(z) = \left\{ \beta \int_1^z t^{-1-\beta} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{t}{g_i(t) \cdot e^{g_i(t)}} \right)^{\frac{1}{\alpha_i}} dt \right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

aparţine clasei Σ.

3.7 Stelaritatea şi convexitatea operatorului $T_{\alpha_i,1}(z)$

În această secţiune vom introduce operatorul integral:

$$T_{\alpha_i,\beta}(z) = \left\{ \beta \int_1^z t^{-1-\beta} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{t}{g_i(t) \cdot e^{g_i(t)}} \right)^{\frac{1}{\alpha_i}} dt \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \tag{3.28}$$

$g_i(t) \neq 0; g_i(t) \in O_1, \alpha_i \in \mathbb{C}^*, \forall i \in 1, 2, .., n$, care este o generalizare a operatorului $F_{\alpha_i,\beta}(z)$ definit în [71] şi a operatorului $G_{\alpha_i,\beta}(z)$ definit în (3.8).

Pentru $\beta = 1$, operatorul $T_{\alpha_i,\beta}(z)$ devine

$$T_{\alpha_i,1}(z) = \int_1^z t^{-2} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{t}{g_i(t) \cdot e^{g_i(t)}} \right)^{\frac{1}{\alpha_i}} dt \tag{3.29}$$

Următoarea teoremă ne dă condiţii de apartenenţă a operatorului introdus mai sus, la clasa $O_1^*(0)$.

Teorema 3.7.1. *[59] Fie $g_i \in O_1, \alpha_i \in \mathbb{C}^*, i \in \{1, ..., n\}$.*
Dacă

$$\Re \left(\frac{z g_i'(z)}{g_i(z)} \right) < 1, \Re(1 + g_i(z)) < 1, \tag{3.30}$$

$$\big|\Re(z)\big| > \big|Im(z)\big|,$$

şi

$$\Re(z^4) > 0, z \in W,$$

atunci $T_{\alpha_i,1}(z)$ aparţine clasei $O_1^*(0)$.

Următoarea teoremă ne dă o condiţie de aparteneţă a operatorului $T_{\alpha_i,1}(z)$ la clasa $O_1^*(\mu)$.

Teorema 3.7.2. *[59] Pentru* $i \in \{1, 2, ..., n\}$*, fie* $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ *şi* $g_i \in O(\gamma_i), 0 \le \gamma_i < 1$*. Dacă* $0 < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}(1-\gamma_i) \le 1$

$$|\Re(z)| > |Im(z)|,$$

$$\Re\left(1 + g_i(z)\right) > 1, \tag{3.31}$$

şi

$$\Re\left(-\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right) > -\gamma_i, \forall z \in W,$$

atunci operatorul $T_{\alpha_i,1}(z)$ *dat de relaţia (3.29) aparţine clasei* $O_1^*(\mu)$*, unde* $\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}(1-\gamma_i)$.

Dacă luăm $\gamma_i = \gamma$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ în Teorema 3.7.2, obţinem următorul corolar.

Corolar 3.7.1. *[59] Pentru* $i \in \{1, 2, ..., n\}$*, fie* $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$*,* $g_i \in O_1(\gamma), 0 \le \gamma < 1$*. Dacă* $0 < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} \le \frac{1}{1-\gamma}$,

$$|\Re(z)| > |Im(z)|,$$

$$\Re\left(1 + g_i(z)\right) > 1,$$

$$\Re\left(\frac{-z \cdot g_i'(z)}{g_i(z)}\right) > -\gamma, \forall z \in W,$$

atunci operatorul $T_{\alpha_i,1}(z)$ *dat de relaţia (3.29) este stelat de ordin* μ*, unde* $\mu = (1-\gamma)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}$.

Următoarea teoremă ne dă o condiţie de aparteneţă a operatorului $T_{\alpha_i,1}(z)$ la clasa $O_k^*(\mu)$.

Teorema 3.7.3. *[59] Pentru* $i \in \{1, 2, ..., n\}$*, fie* $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ *şi* $g_i \in O_k(\gamma_i), 0 \le \gamma_i < 1$*. Dacă* $0 < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} \cdot (2-\gamma_i) \le 1, T_{\alpha_i,1}(z)$

$$|\Re(z)| > |Im(z)|,$$

$$\Re(g_i(z)) > 1,$$

$$\Re(z^4) > 0, \forall z \in W,$$

atunci operatorul $T_{\alpha_i,1}(z)$ *dat de relaţia (3.29) aparţine clasei* $O_k^*(\mu)$*, unde* $\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} \cdot (2-\gamma_i)$.

Notând $\gamma_i = \gamma, i \in \{1, 2, ..., n\}$ în Teorema 3.7.3., se obţine următorul rezultat:

Corolar 3.7.2. *[59] Pentru* $i \in \{1, 2, ..., n\}$*, fie* $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ *şi* $g_i \in O_k(\gamma), -1 \leq \gamma < 1$. *Dacă* $0 < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} \leq \frac{1}{2-\gamma}$,

$$|\Re(z)| > |Im(z)|\,,$$

$$\Re(g_i(z)) > 1,$$

şi

$$\Re(z^4) > 0, \forall z \in W,$$

atunci operatorul $T_{\alpha_i,1}(z)$ *dat de relaţia (3.9) este stelat de ordin* μ*, unde* $\mu = (2-\gamma) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}$.

Bibliografie

[1] M. Acu, *Operatorul integral Libera-Pascu şi proprietăţile acestuia cu privire la funcţiile uniform stelate, convexe, aproape convexe şi α-uniform convexe*, Editura Univ."Lucian Blaga", Sibiu (2005).

[2] M. Acu, I. Dorca, *On some close to convex functions with negative coefficients*, Filomat, Vol. 21, No. 2 (2007), pp. 121-131.

[3] L. V. Ahlfors, *Sufficient conditions for quasiconformal extension*, Conf. Univ. of Maryland, Ann. of Math. Studies, Vol. 79, Proc. (1973), pp. 23-29.

[4] J. W. Alexander, *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. of Math., Vol. 17 (1915), pp. 12-22.

[5] J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schichte Functionen*, J. Reine Angew. Math. Vol. 255 (1972), pp. 23-43.

[6] J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheits-Kriterion*, Math. Ann. Vol. 202, Nr. 4(1973), pp. 321-335.

[7] S. D. Bernardi, *Convex and starlike univalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 135 (1969), pp. 129-446.

[8] L. Bieberbach, *Über die Koeffizientem derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsb., (1916), pp. 940-955.

[9] L. Bieberbach, *Über einige Extremslprobleme im Gebiete der konformen Abbildung*, Ann. of Math., Vol. 77 (1916), pp. 153-172.

[10] D. Blezu, *On the n-close to convex functions with respect to a convex set (I)*, Mathematica Cluj-Napoca, Tome 28 (5), Nr. 1 (1986), pp. 9-19.

[11] L. De Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture,* Acta Math., 154 (1985), pp. 137-152.

[12] D. Breaz, A. A. Alahmari, L. I. Cotîrlă, S. A. Shah, *On Generalizations of the Close-to-Convex Functions Associated with q-Srivastava-Attiya Operator*, Mathematics, Vol. 11, Nr. 9, https://doi.org/10.3390/math11092022(2022).

[13] D. Breaz , N. Breaz, *Sufficient Univalence Conditions for Analytic Functions*, J. Inequal. Appl., doi.org/10.1155/2007/86493 (2007).

[14] N. Breaz, D. Breaz, *The univalent conditions for an integral operator on the classes* $S(p)$ *and* T_2, Journal of Approximation Theory and Applications, Vol. 1, No. 2 (2005), pp. 93-98.

[15] D. Breaz, H. Orhan, L. I. Cotîrlă, H. Arikan *A new subclass of bi-valent functions defined by a certain integral operator*, Axioms, Vol. 12, Nr. 2(2023), 172.

[16] D. Breaz, L. I. Cotîrlă, *The study of coefficient estimates and Fekete-Szegö inegalities for the new classes of m-fold symmetric bi-univalent functions defined using an operator*, Journal of Inegualities and Applications, Vol. 15, Nr. 2023(2023).

[17] D. Breaz, N. Suciu, N. Breaz, *Transformări integrale şi funcţii complexe cu aplicaţii în tehnică, Vol. 1, Funcţii complexe cu aplicaţii în tehnică* , Iaşi, Editura Studis, (2013).

[18] L. Brickman, *Extreme points of the set of univalent functions,* Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), pp. 372-376.

[19] L. Brickman, D. J. Hallenbeck, T. H. MacGregor, D. R. Wilken, *Convex hulls and extreme points of families of starlike and convex mappings,* Trans. Amer. Math. Soc. 185 (1973), pp. 413-428.

[20] R. Bucur, L. Andrei, D. Breaz, *Properties of a New Integral Operator* , An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, Vol. 24, No. 2 (2016), pp. 127-136.

[21] R. Diaconu, *Preserving properties of subclasses p-valent and estimating the coefficients by operator* $L_{a,p}$, Gen. Math., ISSN:1221-5023, Vol. 21, No. 1-2 (2013), pp. 31-39.

[22] P. Dicu, M. Acu, *Preserving properties of p-valent functions*, Analele Universităţii Oradea, Fasc. Matematica, Tom XXII (2015), Issue No. 2, pp. 69-72.

[23] P. Dicu, R. Bucur, D. Breaz, *Mapping properties of a new Integral Operator*, GFTA (2016).

[24] B. A. Frasin, L. I. Cotîrlă, *New conditions for Pascal distribution series to be in a certain class analytic functions*, Heliyon, Vol. 10, Nr. 22(2024).

[25] G. M. Goluzin, *Asupra unei metode variaţionale în reprezentarea conformă II,*(traducere din limba rusă), Mat. Sb. Vol. 21 (1947), pp. 83-117.

[26] G. M. Goluzin, *Teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă,* (traducere din limba rusă), Ed. de Stat pt. lit. Tehnică-teoretică, Moscova-Leningrad, (1952).

[27] T. H. Gronwall, *Some remarks on conformal representation,* Ann. of Math. Vol. 2 (1914/1915), pp. 72-76.

[28] T. H. Gronwall, *Sur la déformation dans la représentation conforme*, C. R. Acad. Sci. Paris Vol. 162 (1916), pp. 249-252.

[29] H. Grunsky, *Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen,* Math. Z. Vol. 45 (1939), pp. 29-61.

[30] P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu *Analiză complexă (Funcţii complexe)*, Edutura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, (1982), pp. 100-111.

[31] W. Hengartner, G. Schober, *Univalent Harmonic Exterior and Ring Mappings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 156 (1991), pp. 154-171.

[32] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analitischen Kurven*, Nachr. Ges. Wiss. Götingen, Math.-phys. Vol. 1, (1907), pp. 191-210.

[33] G. Kohr, P. Mocanu, *Capitole speciale de analiză complexă*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, (2005), pp. 133-144.

[34] R. J. Libera, *Some classes of regular univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 16 (1965), pp. 755-758.

[35] E. Lindelöf, *Memoire sur certaines inegalités dans la théory des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel*, Acta Soc. Fenn., Vol. 35, No. 7 (1908).

[36] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbodungen des Einheitskreises*, Math. Ann. Vol. 89 (1923), pp. 103-121.

[37] T. H. MacGregor, *Applications of extreme point theory to univalent functions,* Michigan Math. J. Vol. 19 (1972), pp. 361-376.

[38] A. Marx, *Untersuchungen uber schlichte Abbildungen*, Math. Ann., Vol. 107 (1932-1933), pp. 40-67.

[39] S. S. Miller, P. Mocanu, M. O. Reade, *All α - convex functions are univalent and starlike*, Proc Amer. Math. Soc.MR 47 2044. Zbl 258.30012., Vol. 37 (1973), 553-554.

[40] S. S. Miller, P. Mocanu, M. O. Reade, *Bazilevic functions and generalized convexity*, Rev. Roumaine Math. Pures Apple., Vol. 19, No. 2 (1974), pp. 213-224.

[41] S. S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential subordinations and inequalities in the complex plane*, J. Diff. Eqn., Vol. 67 (1987), pp. 199-211.

[42] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Differential subordinations and univalent functions*, The Michigan Mathematical Journal, Vol. 28, No. 2 (1981), pp. 157-172.

[43] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 65 (1978), pp. 298-305.

[44] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *The theory and applicatins of second-order differential subordinations*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, math., Vol. 34, No. 4 (1989), 3-33.

[45] P. T. Mocanu, T. Bulboacă, G. S. Sălăgean, *Teoria geometrică a funcţiilor univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, (2006).

[46] A. Mohammed, M. Darus, *Starlikeness Properties of a New Integral Operator for Meromorphic Functions*, Journal of Applied Mathematics, Vol. 2011(2011), Art. ID 804150.

[47] A. Mohammed, M. Darus, *New criteria for meromorphic functions*, International Journal of Applied Mathematics and Statistics,Vol. 33, Issue no.3 (2013).

[48] Z. Nehari, *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, New York, NY, USA (1952).

[49] Z. Nehari, *Conformal Mapping*, Dover, New York, NY, USA (1975).

[50] S. Ozaki, M. Nunokawa, *The Schwarzian derivative and univalent functions*, Proceeding of the American Mathematical Society, Vol. 33, No. 2 (1972), pp. 392-394.

[51] N. N. Pascu, *An improvement of Becker's univalence criterion, in Proceedings of the Commemorative Session: Simion Stoïlow*, Univ. Braşov (1987), pp. 43-48.

[52] N. N. Pascu, *On a univalence criterion. II, in Itinerant seminar on functional equations, approximation and convexity*, Univ. Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca (1985), pp. 153-154.

[53] N. N. Pascu, I. Radomir, *A new generalization of Ahlfor's and Becker's criterion of univalence*, Seminar on Geometric function theory, Cluj- Napoca, Preprint Nr. 5 (1989).

[54] **O. M. Pârva**, D. Breaz, *Starlikeness properties of an integral operator*, trimisă spre publicare.

[55] **O. M. Pârva**, D. Breaz, *Univalence properties of an integral operator*, Afrika Matematika, https://doi.org/10.1007/s13370-022-00975-0, Vol. 33, No. 37, (2022).

[56] **O. M. Pârva**, D. Breaz, S. Owa, *Properties of the coefficients of an integral operator*, General Mathematics, Vol. 31, No. 1 (2023).

[57] **O. M. Pârva**, D. Breaz, *Univalence conditions for analytic functions on the exterior unit disk*, Journal of Advanced Mathematical Studies, Vol. 16, no. 2 (2023), pp. 125-133.

[58] **O. M. Pârva**, D. Breaz, *Univalence conditions of an integral operator on the exterior unit disk*, Studia Universitatis Babeș-Bolyai Mathematica, Vol 69, No. 4 (2024), pp. 749-758.

[59] **O. M. Pârva**, D. Breaz, *Univalence conditions for the integral operator* $T_{\alpha_i,\beta}(z)$ *on the exterior unit disk*, trimisă spre publicare.

[60] **O. M. Pârva**, D. Breaz, *Univalence condition for the integral operator* $F_\beta(f,g)(z)$, trimisă spre publicare.

[61] **O. M. Pârva**, D. Breaz, *Univalence criteria for the general integral operator* $F_{n,\beta}(z)$, trimisă spre publicare.

[62] **O. M. Pârva**, D. Breaz, *Univalence condition for the integral operator* $G_{\beta,\gamma}(f,g)(z)$, trimisă spre publicare.

[63] **O. M. Pârva**, D. Breaz, *Univalence criteria for a general integral operator* $G_{n,\beta}(z)$, trimisă spre publicare.

[64] V. Pescar, *A new generalization of Ahlfor's and Becker's criterion of univalence*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Society, Vol. 19, No. 2 (1996), pp. 53-54.

[65] V. Pescar, *New criteria for univalence of certain integral operators*, Demonstratio Math. Vol. 33, No. 1 (2000), pp. 51-54.

[66] C. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vanderhoeck & Ruprecht, Göttingen, (1975.)

[67] D. Răducanu, I. Radomir, M. E. Gageonea, N. R. Pascu, *A Generalization of Ozaki-Nunokawa's Univalence Criterion*, J. Inequal. Pure Appl. Math. (2004), Vol. 5, Issue 4.

[68] K. Sakaguchi, *A note on p-valent functions*, J. Math. Soc. Japan, 14(1962), pp. 312-321.

[69] K. Sakaguchi, *A variational method for functions with positive real part,* J. Math. Soc. Japan Vol. 16 (1964), pp. 287-297.

[70] M. Schiffer, *Variation of the Green function and theory of p-valued functions*, Amer. J. Math. Vol. 65 (1943), pp. 341-360.

[71] N. Seenivagan, D. Breaz, *Certain sufficient conditions for univalence*, General Mathematics Vol. 15, No. 4 (2007), pp. 7-15.

[72] H. Silverman, *Convex and Starlike Criteria*, Internat. J. Math, Math. Sci., Vol 22, No. 1(1999), pp. 75-79.

[73] V. Singh, *On a class og univalent functions*, Ins. J. Math. Math. Sci. Vol. 23, No. 12 (2000), pp. 855-857.

[74] E. Strohhäcker, *Beiträge zur Theorie der schlichten Functionen*, Math. Z., Vol. 37 (1933), pp. 356-380.

[75] E. Study, *Vorlesungen über ausgewählte Gegenstande der Gerometrie*, 2. Heft, Teubner, Leipzig und Berlin, (1913).

[76] https://www.symbolab.com/solver?or=calcButton

[77] Ç. Yildiz, S. Erden, S. Kermausuor, D. Breaz, L. I. Cotîrlă, *New estimates on generalized Hermite-Hadamard-Mercer-type inequalities*, Boundary Value Problems, Vol. 2025, Art. nr. 19, (2025).