Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică
Departamentul de Matematică

Frătean (căs. Baias) Alina Ramona

Reprezentări duale şi formule de subdiferenţiere pentru funcţii de risc convexe. Contribuţii la teoreme de prelungire ale operatorilor multivoci

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat: Prof. Univ. Dr. Dorel Duca

Cluj-Napoca
2013

Cuprins

Introducere

Teoria optimizării (alternativ numită optimizare sau programare matematică) este una dintre cele mai importante ramuri ale matematicii. Teoria optimizarii are un puternic caracter interdisciplinar fiind intens aplicată în domenii precum: statistică, informatică, inginerie, economie, finanţe ¸ managementul riscului, s.a. Oportunitatea de a efectua cercetări matematice într-un domeniu atât de atractiv reprezintă un real privilegiu.

Teza de doctorat abordează doua domenii majore de cercetare. Prima parte este dedicată obţinerii reprezentărilor duale ale învelitorilor monotone şi cash invariante pentru funcţii de risc convexe precum şi obţinerii formulelor de conjugare şi subdiferenţiere pentru cele mai uzuale măsuri de risc prezente în literatura de specialitate. Problematica obţinerii formulelor de conjugare şi subdiferenţiere este abordată din două perspective. Pe de o parte deducem reprezentările duale pornind de la o masură de risc generalizată descrisă prin intermediul funcţiei de utilitate iar pe de altă parte determinăm formulele de conjugare şi subdiferenţiere utilizând tehnici de lucru din analiza convexă şi teoria dualităţii. Rezultatele furnizate în această parte au o largă aplicabilitate în managementul riscului, optimizarea problemelor de portofoliu şi în analiza financiară. Cea de-a doua direcţie de cercetare abordată în prezenta teză este situată la confluenţa dintre analiza multivocă si analiza nenetedă. Pornind de la lucrările de pionierat ale lui H. Hahn şi St. Banach [57], [13] care au revoluţionat complet analiza funcţională, a existat un interes continuu pentru studiul şi obţinerea teoremelor de prelungire a operatorilor liniari dominaţi atât de funcţii vectoriale cât şi de operatori multivoci. Prin urmare, prin capitolul 4, ne propunem să umplem golurile existente în literatura şi să obţinem rezultate de prelungire a operatorii liniari şi continui dominaţi de operatori multivoci sub ipoteze de convexitate. Deasemenea pentru a evidenţia aplicabilitatea acestor rezultate obţinem teoreme de existenţa pentru subgradienţi ai operatorilor multivoci.

Această teză este formată din patru capitole, care sunt prezentate pe scurt în cele ce urmează.

Primul capitol este dedicat noţiunilor prelinimarii, şi cuprinde o trecere în revistă a celor mai importante definiţii şi rezultate din analiza convexă şi funcţională. Pentru rezultate referitoare la spaţii finit dimensionale amintim [24, 80] iar pentru cele referitoare la spaţii infinit dimensionale utilizăm [1, 27, 46, 86, 97].

În **capitolul 2**, obţinem reprezentări duale ale învelitorilor *monotone* şi *cash-invariante* pentru funcţii de risc convexe. Pentru o profundă întelegere a acestui capitol dedicăm primele două secţiuni unei scurte sistematizări a noţiunilor utilizate în managementul riscului şi în teoria dualităţii Lagrange. Prin urmare, în secţiunea 2.1 amintim cele mai importante noţiuni de tip interior generalizat, ce intervin in expresia condiţiilor de regularitate, $QC_1 - QC_4$, cu rol important în obţinerea dualităţii tari între cuplul de probleme (P)-(D). Secţiunea 2.2 intitulată "Funcţii de risc. Definiţii şi interpretări economice", este împarţită în două subsecţiuni: prima parte este dedicată definiţiilor şi proprietăţile spaţiilor L^p (pentru $1 \leq p \leq \infty$) iar cea de-a doua secţiune se dezvoltă în jurul definiţiei şi interpretărilor economice ale funcţiei de risc. Noţiunea de funcţie de risc este piatra de temelie a investigaţiilor efectuate în Capitolul 2 şi Capitolul 3 al prezentei lucrări. Definitia 2.2.6 este o adaptare rafinată, îmbunătăţită, a ceea ce literatura de specialitate a propus pana acum în domeniu. Funcţiile de risc au un rol crucial în optimizarea şi analiza riscului şi o gamă largă de aplicaţii în finanţe şi industria asigurărilor, acesta fiind principalul motiv pentru care vom analiza aici, proprietăţile funcţiilor de risc atât din punct de vedere matematic cât şi din punct de vedere economic. Rezultatele din secţiunea 2.3 sunt motivate de articolul lui Filipović şi Kupper [49], unde sunt introduse noţiunile de învelitoare monotonă şi cash-invariantă a unei funcţii. Aceste învelitori sunt definite în limbaj de convoluţie infimală. Pornind de la Definitia 2.3.1 învelitoarea monotonă şi cash-invariantă a unei funcţii nu este nimic altceva decât valoarea optimă a unei probleme de optimizare convexă. Având ca punct de pornire această observaţie vom obţine reprezentări duale ale învelitorilor monotone şi cash invariante prin intermediul teoriei dualităţii. De asemenea în ipoteza că funcţia de risc este inferior semicontinua determinăm şi o condiţie de regularitate care să garanteze dualitatea tare intre cuplul de probleme (2.4) şi (2.5). Coincidenţa valorilor optime ale celor două probleme va garanta validitatea reprezentărilor duale. Toate exemplele discutate în [49] sunt abordate din această nouă perspectivă. Diferit de abordarea din [49, subsecţiunea 5.3], utilizarea teoriei dualităţii garantează atingerea supremumului în Exemplele 2.3.9-2.3.14. Ultima secţiune a acestui capitol abordează aceeaşi problemă a obţinerii învelitorilor monotone şi cash-invariante pentru o situaţie limită, şi anume cazul în care funcţia de risc nu mai este inferior semicontinuă. Pentru această funcţie se poate stabili cu uşurinţă atât învelitoarea monotonă cât şi reprezentarea duală a acesteia, utilizând condiţii de regularitate de tip cvasi-relativ interior. De asemenea, facem referiri la limitările acestei abordări în contextul determinării învelitorii monotone şi cash-invariante a funcţiei de risc în discuţie.

Realizările autoarei cu privire la această direcţie de cercetare au fost publicate în [34] şi sunt urmatoarele: Teoremele: 2.3.4, 2.3.7, Corolariile: 2.3.5, 2.3.6, Observaţiile: 2.3.8, 2.3.15, 2.4.1 şi Exemplele: 2.3.9, 2.3.10, 2.3.11, 2.3.12, 2.3.13, 2.3.14. De asemenea, secţiunea 2.4 constă în întregime din rezultate originale, dar deoarece această parte furnizează o limitare a problematicii obţinerii învelitorilor monotone şi cash-invariante a funcţiilor de risc, care nu mai sunt inferior semicontinue, nu putem indica punctual un rezultat matematic, care întruchipează întreg raţionamentul. Cu toate acestea, discuţia furnizată de-a lungul acestei secţiuni se bazează pe rezultate matematice viabile.

Al treilea capitol începe, de asemenea, cu o secţiune introductivă, având drept scop familiarizarea cititorului cu cadrul general de lucru şi cu raţionamentele matematice necesare pentru obţinerea formulelor de conjugare şi subdiferenţiere pentru măsuri de risc convexe. Subsecţiunile 3.1.1 şi 3.1.2 adună cele mai importante definiţii şi proprietăţi pentru funcţii conjugate şi subdiferenţiala convexă. Existenţa unor formule exacte pentru subdiferenţiala cât şi existenţa unor reprezentări duale sunt fundamentale în rezolvarea unor clase de probleme de optimizarea portofoliului. Ultima parte a secţiunii 3.1 colectează cele mai importante definiţii şi proprietăţi legate de conjugarea şi subdiferenţierea funcţiilor subliniare. Această secţiune este esenţială deoarece pozitiv omogenitatea adesea face diferenţa între principalele clase de funcţii de risc, cele convexe şi cele coerente.

Una dintre marile provocări ale analizei convexe este formularea condiţiilor de optimalitate pentru probleme de optimizare, în particular şi pentru probleme de optimizarea portofoliului avânt drept funcţii de scop, măsuri de risc convexe. Deoarece pentru aceaste clase de funcţii diferenţiabilitatea (derivabilitatea) nu este neapărat garantată, pentru caracterizarea optimalitaţii este necesar să utilizăm formule de subdiferenţiere . Amintim aici câteva referinţe bibliografice relevante pentru acest subiect [32, 74, 75, 81, 83, 84, 88].

În acest capitol utilizăm două moduri diferite de obţinere a formulelor de conjugare şi subdiferenţiere pentru funcţii de risc convexe. Pe de o parte obţinem rezultate întrebuiţând tehnici de calcul bazate pe teoria dualităţii iar pe de altă parte furnizăm formule de subdiferenţiere şi conjugare pornind de la o funcţie de risc generalizată, descrisă prin intermediul funcţiei de utilitate. În Secţiunea 3.2 considerăm o măsură de risc, generalizată, cunoscută în literatură ca şi "Optimized certainty equivalent" definită prin intermediul unei funcţii de utilitate convexă (a se vedea [15, 16]). Această măsură de risc, poate fi exprimată echivalent printr-o problemă de optimizare convexă, de aceea mai întâi obţinem condiţii suficiente pentru atingerea valorii optime. În continuare, deducem formule de calcul pentru funcţia sa conjugată (Teorema 3.2.6) şi pentru subdiferentiala convexă (Teorema 3.2.8). Această măsură de risc generalizată are avantajul major că pentru diferite moduri de alegere a funcţiei de utilitate se obţin măsuri de risc binecunoscute în literatură. Drept urmare, pornind de la aceste rezultate generale, obţinem formule de conjugare şi subdiferenţiere pentru măsura de risc entropică (subsecţiunea 3.2.1) şi măsura de risc pierdere maximă (subsecţiunea 3.2.2).

Din păcate, o mulţime de funcţii de risc, larg răspândite în aplicaţii practice, nu pot fi nici descrise cu ajutorul unei funcţii de utilitate, şi nici înscrise în cadrul general al măsurilor de risc coerente. Pentru toate aceste clase de funcţii singura modalitate de obţinere a formulelor de conjugare şi subdiferenţiere constă în întrebuintarea tehnicilor de calcul bazate pe rezultate din analiza convexă şi teoria dualităţii. Tehnica de lucru dezvoltată de-a lungul sectiunii 3.3 poate fi aplicată cu succes şi funcţiilor de risc ce nu sunt caracterizate de proprietăţi matematice ca şi: pozitiv omogenitate, monotonie şi cash-invariantă. Obţinem astfel, formule de conjugare si subdiferenţiere pentru importante funcţii de risc generalizate:
-abaterea medie generalizata de ordinul p

$$\rho(X) = \|X - \mathbb{E}(X)\|_p^a - \mathbb{E}(X),\ \forall X \in L^p, p \in [1, \infty] \text{şi } a \geq 1,$$

introdusa în [31] şi
-abaterea medie superioară/inferioară de ordinul p, fată de o ţinta dată,

$$\rho_{\tau_\pm}(X) = \|(X - \tau)_\pm\|_p^a - \mathbb{E}(X) \forall X \in L^p, p \in [1, \infty] \text{ and } a \geq 1, \tau \in \mathbb{R}.$$

Secţiunea 3.4 unfică cele două abordări propuse pentru obţinera formulelor de conjugare şi subdiferenţiere pentru o masură de risc importantă, şi anume, funcţia valoare de risc conditionată, (CVaR). In subsecţiunea 3.4.1 deducem formulele pentru conjugată şi sundiferenţială întrebuinţând teoria dualităţii. Obţinem mai întai formula de conjugare şi reprezentarea duală a funcţiei valoare de risc condiționată generalizată(GCVaR), introdusă de Luthi şi Dodge în [65]. Având această formulă deducem prin intermediul Teoremei 3.1.19 formula corespunzătoare pentru subdiferenţiala convexă a acestei măsuri de risc. În ultima secţiune pornind de la funcţia de utilitate $u : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin

$$u(t) = \begin{cases} \gamma_2 t, & \text{dacă } t \leq 0, \\ \gamma_1 t, & \text{dacă} t > 0, \end{cases}$$

obţinem, prin intermediul Teoremelor 3.2.6 şi 3.2.8 atât conjugata cât şi subdiferenţiala funcţiei valoare de risc condiţionată.. Contribuţiile autoarei relaţionate cu aceast domeniu de cercetare sunt distribuite după cum urmează: Teoremele: 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8, 3.3.3, 3.3.5, 3.3.18, 3.3.19, 3.3.21, 3.3.22, 3.3.23, 3.3.24, 3.4.4, 3.4.7, Corolariile: 3.4.5, 3.4.6, Observaţiile: 3.2.1, 3.2.3, 3.3.4, 3.3.6, 3.3.7, 3.3.13, Propoziţiile: 3.2.2, 3.2.5, Lema 3.3.1 şi exemplele prevăzute în paragrafele 3.2.1, 3.2.2 şi respectiv 3.4.3. Rezultatele din acest capitol sunt parţial incluse în 5 lucrări [6, 9, 7, 11, 34].

În capitolul 4 obţinem pe de o parte rezultate de prelungire a operatorilor liniari şi continui dominaţi de operatori multivoci convecşi, în contextul spaţiilor Frèchet iar pe de altă parte extindem la contextul opeatorilor multivoci, teoremele lui Hahn de prelungire a funcţionalelor liniare şi continue, cu conservarea normei.

Secţiunile 4.1, 4.2 şi 4.3 sunt secţiuni introductive, unde descriem motivaţia pentru alegerea acestui subiect, precum şi cadrul general de lucru. Secţiunea 4.3 rezumă cele mai importante definiţii, noţiuni şi proprietăţi ale operatorilor multivoci. Secţiunea 4.4 constă în întregime din rezultate originale.

Unul dintre rezultatele fundamentale ale analizei funcţionale cu o lară aplicabilitate în toate domeniile importante ale matematicii este teorema lui Hahn-Banach. Generalizări ale acestei teoreme au fost dezvoltate în diferite direcţii în trecut a se vedea [38, 42, 63, 91, 100, 101, 70, 71, 94, 99]. Din nefericire marea majoritate a acestor extinderi s-a realizat numai, numai în contextul spaţiilor liniare, furnizând extinderi pur algebrice. Pentru contextul spatiilor liniare topologice putem aminti doar, [19] şi [44] . Chiar şi aşa multe dintre aceste generalizări, pur liniare, conţin o serie de greşeli, după cum arăta Zălinescu în [98], lăsând loc unor noi cercetări în domeniu. În această secţiune, ne propunem sa umplem golurile existente în literatura de specialiate în aceasta direcţie prin obţinerea unor teoreme de prelungire a operatorilor liniari şi continui dominţi de operatori multivoci convecşi (Teorema 4.4.3). Deasemenea obţinem teoreme de tip sandwich (Teorema 4.4.8) şi rezultate referitoare la multiplicatori Lagrange (Teorema 4.4.11) pentru operator multivoci, în ipoteze, mai slabe, exprimate în limbaj de interior generalizat.

Paragraful 4.5 este dedicat aplicaţiilor, şi anume rezultatelor de existenţă pentru subgradienţi ai operatorilor multivoci. După o scurtă trecere în revistă a principalelor tipuri de subgradienţi, demonstăm câteva teoreme de existenţa pentru două dintre cele mai importante concepte de subgradienţi tari, cei introduşi de Borwein în [19] pe de o parte şi cei introduşi mai recent, de E. Hernández c si L. Rodriguez-Martin, în [58], pe de altă parte.

În ultima secţiune furnizăm teoreme de prelungire a proceselor convexe închise, cu conservarea normei, în contextul spaţiilor normate. Astfel prin teoremele 4.6.1 şi 4.6.2 extindem prima şi a două teorema a lui Hahn de prelungire a funcţionalelor liniare şi continue. Ca şi aplicaţie prezentăm teoreme de caracterizare a elementelor de cea mai bună aproximare, în spaţii normate, prin intermediul conurilor convexe închise, utiluzând procese convexe.

Contribuţiile autoarei relaţionate cu aceast domeniu de cercetare au fost cuprinse în articolele [8], [10] and [12] şi sunt următoarele: Teoremele: 4.4.3, 4.4.8, 4.4.11, 4.5.7, 4.5.8, 4.5.9, 4.6.1, 4.6.2, 4.6.3, Corolariile: 4.4.10, 4.5.10, Observaţiile: 4.4.4, 4.4.5, 4.4.9, 4.5.3, 4.5.6, 4.5.11 şi Exemplele: 4.4.6, 4.4.7, 4.4.12.

Cuvinte cheie: analiză convexă, Funcţii conjugate, subdiferenţiala (convexă), dualitate Lagrange, învelitoare monotonă, învelitoare cash-invariantă, condiţie de regularitate, funcţie de risc, măsură de risc convexă, mă sură de risc coerentă, funcţia de utilitate, optimized certainty equivalent, valoare de risc, valoare de risc condiţionată, operator multivoc, proces convex închis, teoreme de prelungire Hahn-Banch, multiplicatori Lagrange, subgradient tare.

Capitolul 1

Preliminarii

Pentru o lecturare mai facilă a tezei dedicăm primul capitol unei scurte prezentări a celor mai importante definiţii şi rezultate din analiza convexă şi funţională. Pentru acesta am utilizat următoarele lucrări [1, 24, 25, 27, 45, 46, 47, 80, 85, 86, 97].

1.1 Noţiuni referitoare la mulţimi

În această secţiune reamintim definiţiile şi proprietăţile conceptelor de învelitoare convexă, învelitoare conică, con convex, con normal, con asimptotc (sau de recesiune) şi con tangent.

1.2 Noţiuni referitoare la funcţii

Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu local convex şi $\mathcal{X}^*$ dualul să topologic. Având o mulţime $C \subseteq \mathcal{X}$, funcţia sa indicator este $\delta_C : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, iar funcţia sa suport este $\sigma_C : \mathcal{X}^* \to \overline{\mathbb{R}}$.

Fie $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie dată, reamintim definiţiile domeniului $\operatorname{dom} f$ şi epigraficului $\operatorname{epi} f$, ale lui f. Tot aici definim şi conceptele de funţie proprie, funţie convexă (concavă), funcţie inferior semicontinuă (superior semicontinuă) şi funcţie subliniară. Fie $f_i : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}, i = 1, \ldots, n$, funcţii proprii, date. Convoluţia infimală a lui $f_1 ... f_n$ este funcţia $f_1 \Box ... \Box f_n : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$, definită prin

$$f_1 \Box ... \Box f_n(x) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) : \sum_{i=1}^{n} x_i = x \right\}, \ \forall x \in \mathcal{X}.$$

Câteva proprietăţi ale convoluţiei infimale sunt deasemenea menţionate.

Capitolul 2

Reprezentări duale ale învelitorilor monotone şi cash-invariante pentru funcţii de risc

2.1 Dualitate Lagrange

Teoria dualităţii, mai exact dualitatea Lagrange, este elementul cheie pentru raţionamentele desfăşurate în ultimele două secţiuni ale acestui capitol, drept urmare, alocăm prima secţiune, unei scurte treceri în revistă a celor mai imporante rezultate referitoare la teoria dualitătii Lagrange, pentru cazul problememlor de optimizare cu restricţii geometrice, a se vedea [26, 27, 46, 80, 86, 97]. Prezentăm aici, definiţiile celor mai importante tipuri de interioare generalizate, i.e. interiorul algebric, cvasi-relativ interiorul tare, cvasi-relativ interiorul si cvasi-interiorul, noţiuni utilizate pentru descriere unor condiţii de regularitate (a se vedea [30, 28, 29, 37, 55]) menite să asigure dualitatea tare între diferite clase de probleme de optimizare.

2.2 Funcţii de risc. Definiţii şi interpretări economice.

Funcţiile de risc sunt esenţiale în optimizarea problemelor de portofoliu dar şi în managementul pierderilor ce pot interveni în domenii ca finanţe, asigurări şi industie. Deoarece raţionamentele matematice ce intervin în cuantificarea riscului, ca de altfel întrega teorie a riscului şi incetitudinii, sunt dezvoltate în spaţii de probabilităţi, începem această secţiune cu o scurtă prezentare a spaţiilor L^p, $1 \leq p \leq +\infty$. Utilizăm pentru aceasta cărţile lui Folland [51] şi Aliprantis [1].

2.2.1 Spaţiile L^P- scurtă prezentare

În întreaga lucrare prin $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, notăm un spaţiu de probabilitate lipsit de atomi, unde Ω reprezintă *mulţimea evenimentelor*, $\mathfrak{F}$ este σ*-algebra* iar $\mathbb{P}$ *măsura de probabilitate.*

Pentru o variabilă aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definim *expectanţa* sau *valoarea medie* a lui X, prin $\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$, cu convenţia $\mathbb{E}(X) = +\infty$. Deasemenea supremumul esenţial al variabilei aleatoare X este dat de $\operatorname{essup} X := \inf\{a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\omega : X(\omega) > a) = 0\}$. În mod similar definim infimimul esenţial prin $\operatorname{esinf} X := -\operatorname{essup}(-X)$. Funcţia caracteristică asociata unei mulţimi este $\mathbf{1}_G : \Omega \to \mathbb{R}$.

Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare, pentru $0 < p < +\infty$, considerăm norma $\|X\|_p = \left(\int_\Omega |X(\omega)|^p d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{p}} = (\mathbb{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}}$ şi definim spaţiile

$$L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}, \mathbb{R}) := \left\{X : \Omega \to \mathbb{R} : X \text{ măsurabilă}, \int_\Omega |X(\omega)|^p d\mathbb{P}(\omega) < +\infty\right\}.$$

Pentru valoarea limită $p = \infty$, introducem spaţiul funcţiilor esenţial mărginite, şi anume

$$L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}, \mathbb{R}) := \{X : \Omega \to \mathbb{R} : X \text{ măsurabilă}, \ \operatorname{essup}|X| < +\infty\},$$

împreună cu norma $\|X\|_\infty = \operatorname{essup}|X|$.

Teorema 2.2.2 [1, 51] Spaţiile $(L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$, $1 \le p \le \infty$, sunt spaţii Banach.

Notăm dualul topologic al spaţiului L^p cu $(L^p)^*$. Pentru $p \in [1, \infty)$ avem $(L^p)^* = L^q$, unde $q = p/(p-1)$ (cu convenţia $1/0 = \infty$). În ceea ce priveşt dualul topologic al lui L^∞, acesta poate fi identificat cu spaţiul *ba,* i.e spaţiul măsurilor σ aditive, mărginite şi absolut continue în raport cu $\mathbb{P}$. În general $L^1 \subset (L^\infty)^*$, ceea ce reprezintă un real inconvenient în special pentru obţinerea reprezentărilor duale ale măsurilor de risc definite în aceste spaţii. Totuşi acest inconvenient poate fi înlaturat dacă înzestrăm L^∞ cu totologia slabă $\sigma_\infty(L^\infty, L^1)$ şi reciproc, L^1 cu topologia $\sigma_1(L^1, L^\infty)$.

Fiecare variabilă aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R}$ poate fi reprezentătă ca $X = X_+ - X_-$, unde $X_+, X_- : \Omega \to \mathbb{R}$ sunt variabilel aleatoare definite prin

$$X_+(\omega) = \max\{0, X(\omega)\} \ \text{ şi } \ X_-(\omega) = \max\{0, -X(\omega)\}, \ \forall \omega \in \Omega.$$

Toate egalităţile şi inegalităţile dintre variabilele aleatoare trebuie interpretate în limbaj de *aproape peste tot* (*a.p.t.*).

2.2.2 Definiţii şi interpretări economice

În aceasta secţiune introducem definiţii ale principalelor clase de funcţii de risc, pe care le discutăm atât din punct de vedere matematic cât şi din punct de vedere economic.

Definiţia 2.2.6 Numim *funcţie de risc* orice funcţie proprie $\rho : L^p \to \overline{\mathbb{R}}, p \in [1, \infty]$. Functia de risc ρ este:

(*i*) *convexă*, dacă: $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \forall \lambda \in [0,1], \forall X, Y \in L^p$;

(*ii*) *pozitiv omogenă*, dacă: $\rho(0) = 0$ and $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \forall \lambda > 0, \forall X \in L^p$;

(*iii*) *monotonă*, dacă: $X \ge Y \Rightarrow \rho(X) \le \rho(Y), \ \forall X, Y \in L^p$;

(*iv*) *cu expectanţa mărginită*, dacă: $\rho(X) \geq -\mathbb{E}(X), \ \forall X \in L^p$;

(*v*) *cash-invariantă*, dacă: $\rho(X+a) = \rho(X) - a, \ \forall X \in L^p, \ \forall a \in \mathbb{R}$;

(*vi*) o *măsură de risc convexă (cf. [52]),* dacă: ρ este convexă, monotonă şi cash-invariantă;

(*vii*) o *măsură de risc coerentă (cf. [2])*, dacă: ρ este o măsură de risc conveă şi pozitiv omogenă;

(*viii*) *măsură de risc cu expectanţa mărginită (cf. [83, 84])*, dacă: ρ este o funcţie de risc pozitiv omogenă, convexă, cash-invariantă şi cu expectanţa mărginită.

Această definiţie este o adaptare rafinată, îmbunătăţită, a ceea ce literatura de specialitate a propus pâna acum în domeniu.

Pentru a evita confuzia numim *funcţie de risc convexă* orice funcţie de risc ce satisface doar ipoteza de convexitate, după cum propun Ruszczynski şi Shapiro în [88, 89].

Din punct de vedere economic valoare funcţiei de risc $\rho(X)$ poate fi interpretată ca necesarul de capital pentru a face poziţia X acceptabilă din punct de vedere al riscului. Tot aici analizăm pe scurt semnificaţia economică a fiecărei proprietăţi matematice ce intervine în definiţia 2.2.6. Pentru backgroundul economic facem referire la [2, 43, 52, 53, 65, 75, 77].

2.3 Reprezentări duale ale învelitorilor monotone şi cash-invariante

Atât în economie cât şi în domeniul financiar există o mare varietate de funcţii de risc. Alături de măsurile coerente sau de cele convexe întâlnim o serie de alte funcţii de risc, cu o mare importanţă practică ce nu sunt nici monotone şi nici cash-invariante. Pentru a înlătura inconvenientul creat de lipsa monotoniei şi/sau a cash-invarianţei Filipovič şi Kupper au propus în [49] noţiunile de *învelitoare monotonă* şi *învelitoare cash-invariantă*. În aceast paragraf obţinem reprezentări duale ale învelitorilor monotone şi cash invariante pentru o gamă largă de funcţii de risc. Mai mult decât atât, pentru a asigura validitatea reprezentărilor duale furnizăm condiţii de regularitate care asigură coincidenţa valorilor optime ale cupluri de probleme primală-duală ce se formează exploatând modul de definire al învelitorilor monotone şi cash-invariante. La final discutăm exemplele din [49] din această nouă perspectivă, fapt ce perimte, obţinerea unor reprezentări duale *rafinate*.

Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu local convex, $\mathcal{X}^*$ dualul său topologic, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{X}$ un con convex, închis şi Π un element nenul din $\mathcal{X}$. Considerăm deasemenea multimea $\mathcal{D} := \{x^* \in \mathcal{X}^* : \langle x^*, \Pi \rangle = -1\}$ şi conjugata funcţiei indicator asociate acestei mulţimi, $\delta^*_{\mathcal{D}}$.

Ca o generalizare a noţiunilor de monotie şi cash-invarianţă definite în contextul măsurilor de risc Filipovič şi Kupper introduc noţiunile de $\mathcal{P}$-monotonie şi Π-invarianţă.

Definiţia 2.3.1 Fie $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie. Spunem că funcţia f este:

(*i*) $\mathcal{P}$*-monotonă*, dacă: $x \geq_{\mathcal{P}} y \Rightarrow f(x) \leq f(y), \ \forall x, y \in \mathcal{X}$;

(ii) Π-*invariantă*, dacă: $f(x + a\Pi) = f(x) - a, \ \forall x \in \mathcal{X}, \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Pentru $\mathcal{X} = L^p$, $\mathcal{P} = L^p_+$ şi $\Pi = 1$, obţinem, în definiţia de mai sus noţiunile de montonie şi cash-invarianţă din Definiţia 2.2.6.

Definiţia 2.3.3 Fie $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie dată. Numim

(*i*) *învelitoare* $\mathcal{P}$*-monotonă* a lui f funcţia $f_{\mathcal{P}} : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin

$$f_{\mathcal{P}}(x) := f \Box \delta_{\mathcal{P}}(x) = \inf\{f(y) : y \in \mathcal{X}, x \geq_{\mathcal{P}} y\};$$

(*ii*) *învelitoare* Π*-invariantă* a lui f funcţia $f_{\Pi} : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin

$$f_{\Pi}(x) := f \Box \delta^*_{\mathcal{D}}(x) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \{f(x - a\Pi) - a\};$$

(*iii*) *învelitoare* $\mathcal{P}$*-monotonă* Π*-invariantă* a lui f funcţia $f_{\mathcal{P},\Pi} : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin

$$f_{\mathcal{P},\Pi}(x) := f \Box \delta_{\mathcal{P}} \Box \delta^*_{\mathcal{D}}(x) = \inf\{f(y) - a : y \in \mathcal{X}, a \in \mathbb{R}, x \geq_{\mathcal{P}} y + a\Pi\}.$$

În mod evident,

$$\operatorname{dom} f_{\mathcal{P}} = \operatorname{dom} f + \mathcal{P}, \quad \operatorname{dom} f_{\Pi} = \operatorname{dom} f + \mathbb{R}\Pi$$

şi

$$\operatorname{dom} f_{\mathcal{P},\Pi} = \operatorname{dom} f + \mathcal{P} + \mathbb{R}\Pi.$$

Mai mult, f este $\mathcal{P}$-monotonă dacă şi numai dacă $f = f_{\mathcal{P}}$, iar f este Π-invariantă dacă şi numai dacă $f = f_{\Pi}$.

În cele ce urmează considerăm o funcţie convexă proprie f, pentru care furnizăm reprezentări duale ale învelitorii $f_{\mathcal{P},\Pi}$, prin intermediul teoriei dualităţii. Această abordare are la bază observaţia că valoare învelitorii $\mathcal{P}$-monotone Π-invariante în punctul considerat coincide cu valoarea optimă a problemei de optimizare convexe ce intervine în definirea acestor învelitori.

Teorema 2.3.4 (R.I. Boţ, **A.R. Frătean (Baias)**, [34]) Fie $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie şi fie $x \in \operatorname{dom} f + \mathcal{P} + \mathbb{R}\Pi$. Dacă una dintre următoarele condiţii de regularitate

$$\exists\, (y', a') \in \operatorname{dom} f \times \mathbb{R} \text{ astfel încât } y' + a'\Pi - x \in -\operatorname{int} \mathcal{P} \tag{2.1}$$

şi

$$\mathcal{X} \text{ este spaţiu Fréchet}, f \text{ este inferior semicontinuă şi } x \in \operatorname{sqri}(\operatorname{dom} f + \mathbb{R}\Pi + \mathcal{P}) \tag{2.2}$$

are loc, atunci

$$f_{\mathcal{P},\Pi}(x) = \max_{\substack{x^* \in -\mathcal{P}^* \\ \langle x^*, \Pi \rangle = -1}} \{\langle x^*, x \rangle - f^*(x^*)\}, \tag{2.3}$$

unde prin folosirea maximului atragem atenţia asupra faptului că supremumul este atins.

Cazul în care, funcţia f este fie $\mathcal{P}$-monotonă fie Π-invariantă este discutat în următoarele Corolarii.

Corolar 2.3.5 (R.I. Boţ, **A.R. Frătean (Baias)**, [34]) Fie $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie şi $\mathcal{P}$-monotonă şi fie $x \in \operatorname{dom} f + \mathcal{P} + \mathbb{R}\Pi$. Dacă una dintre condiţiile de regularitate (2.1) sau (2.2) este îndeplinită atunci

$$f_{\mathcal{P},\Pi}(x) = f_{\Pi}(x) = \max_{\langle x^*, \Pi\rangle = -1} \{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\}. \tag{2.4}$$

Corolar 2.3.6 (R.I. Boţ, **A.R. Frătean (Baias)**, [34]) Fie $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie şi Π-invariantă şi fie $x \in \operatorname{dom} f + \mathcal{P} + \mathbb{R}\Pi$. Dacă una dintre condiţiile de regularitate (2.1) sau (2.2) este îndeplinită atunci

$$f_{\mathcal{P},\Pi}(x) = f_{\mathcal{P}}(x) = \max_{x^* \in -\mathcal{P}^*} \{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\}. \tag{2.5}$$

În cele ce urmează verificăm validitatea condiţiilor de regularitate (2.1) şi (2.2) în contextul măsurilor de risc, şi anume pentru $\mathcal{X} = L^p$ şi $\mathcal{P} = L^p_+$. Mai mult decât atât presupunem că f este *inferior semicontinuă.* O situaţie în care funcţia f nu mai are această proprietate topologică fiind discutată în secţiunea următoare.

Teorema 2.3.7 (R.I. Boţ, **A.R. Frătean (Baias)**, [34]) Fie $p \in [1, \infty]$ şi fie $f : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă. Dacă una dintre următoarele condiţii de regularitate este îndeplinită

• pentru $p \in [1, \infty]$

$$\text{f este inferior semicontinuă şi} \quad -L^p_+ \subseteq \operatorname{dom} f; \tag{2.6}$$

• pentru $p = \infty$

$$\operatorname{essinf} \Pi \cdot \operatorname{essup} \Pi > 0; \tag{2.7}$$

atunci pentru fiecare $X \in L^p$ avem

$$f_{\mathcal{P},\Pi}(X) = \max_{\substack{X^* \in -(L^p_+)^* \\ \mathbb{E}(X^*\Pi) = -1}} \{\mathbb{E}(X^* X) - f^*(X^*)\},$$

unde prin folosirea maximului atragem atenţia asupra faptului că supremumul este atins.

Observaţia 2.3.8 (R.I. Boţ, **A.R. Frătean (Baias)**, [34]) Pentru $p = \infty$ condiţia (2.7) este automat îndeplinită când $\Pi \in L^\infty$ este o constantă.

În ultima parte a acestei secţiuni discutăm exemplele din [49] din această nouă perspectivă, verificăm îndeplinirea condiţiilor de regularitate (2.6) sau (2.7) şi furnizăm reprezentări duale, pentru funcţiile de risc considerate. Noţiunile de *monotonie* şi *cash-invarianţă* vor fi folosite în locul celor de L^p_+*-monotonie* şi 1-*invarianţă*. Aceeaşi observaţie se aplică şi pentru cazul învelitorilor monotone şi cash-invariante. Menţionăm în cele ce urmează câteva dintre aceste exemple.

Exemplul 2.3.9 (R.I. Boţ, **A.R. Frătean (Baias)**, [34]) Fie $p \in [1, \infty)$ şi fie $c > 0$. Considerăm funcţia *deviaţie de risc* $f : L^p \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(X) = c\|X - \mathbb{E}(X)\|_p - \mathbb{E}(X).$$

Această funcţie este convexă, continuă şi cash-invariană ($\Pi = 1$) dar ne monotonă, în general. Pentru formula de conjugare a acestei deviaţii de risc facem referire la lucrarea [31], astfel pentru fiecare $X^* \in L^q$, avem

$$f^*(X^*) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \exists\, Y^* \in L^q \text{ a. î. } c(Y^* - \mathbb{E}(Y^*)) - 1 = X^*,\ \|Y^*\|_q \leq 1, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Deoarece $\operatorname{dom} f = L^p$, condiţia (2.6) este verificată şi astfel învelitoarea monotonă a lui f are expresia

$$f_{L^p_+,1}(X) = f_{L^p_+}(X) = \max_{\substack{\|Y^*\|_q \leq 1 \\ c(Y^* - \mathbb{E}(Y^*)) \leq 1}} c[\mathbb{E}(Y^*)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y^*X)] - \mathbb{E}(X).$$

În acest mod descoperim formula dată în [49, Subsection 5.1].

Exemplul 2.3.11 (R.I. Boţ, **A.R. Frătean (Baias)**, [34]) Fie $p \in [1, \infty)$ şi fie $c > 0$. Considerăm funcţia $f : L^p \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(X) = c/p\mathbb{E}(|X|^p) - \mathbb{E}(X) = c/p\|X\|_p^p - \mathbb{E}(X).$$

Deşi convexă şi continuă, această funcţie de risc nu este nici monotonă şi nici cash-invariantă. Pornind de la formula pentru conjugată

$$f^*(X^*) = \frac{p-1}{pc^{\frac{1}{p-1}}}\mathbb{E}(|X^* + 1|^q), \quad \forall X^* \in L^q,$$

obţinem prin intermediul relaţiei (2.6), următoarea învelitoare *monotonă cash-invariant* a lui f

$$f_{L^p_+,1}(X) = \max_{\substack{X^* \in -L^q_+ \\ \mathbb{E}(X^*) = -1}} \mathbb{E}\left[X^*X - \frac{1}{c^{q-1}q}|X^* + 1|^q\right].$$

Diferit de abodarea din [49, Subsection 5.3], garantarea dualităţii tari permite atingerea valorii optime.

Exemplul 2.3.14 (R.I. Boţ, **A.R. Frătean (Baias)**, [34]) Pentru $p = \infty$ definim *măsura de risc logaritmică* prin $f : L^\infty \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$f(X) = \begin{cases} \mathbb{E}(-\ln(X)) - 1, & \text{dacă } X > 0, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Aceasta este o măsură de risc convexă, inferior semicontinuă şi monotonă, având conjugata dată de

$$f^*(X^*) = \mathbb{E}\left\{\sup_{x>0}\{X^*x + \ln(x) + 1\}\right\} = \begin{cases} -\mathbb{E}(\ln(-X^*)), & \text{dacă } X^* < 0, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Înainte de a furniza reprezentarea duală a funcţie de risc logartitmice facem observaţia că deşi în acest caz condiţia (2.6) nu poate fi verificată, totuşi validitatea reprezentării duale este asigurată de condiţia (2.7). Drept urmare, obţinem pentru învelitoarea cash-invariantă a lui f, următoarea reprezentare

$$f_{L^\infty_+,1}(X) = f_1(X) = \max_{\substack{X^* \in (L^\infty)^*, X^* > 0 \\ \mathbb{E}(X^*)=1}} \mathbb{E}[-X^*X + \ln(X^*)].$$

pentru orice $X \in L^\infty$.

Secţiunea următoare evidenţiază o situaţie interesantă, pentru care nici o condiţie de regularitate de tip interior generalizat nu poate fi verificată.

2.4 O situaţie limită

Acest paragraf este format în totalitate din rezultate originale publicate în [34] şi are drept scop obţinerea reprezentărilor duale pentru învelitoarea monotonă cash-invariantă a unei situaţie limită, şi anume cazul unei funcţii de risc ce nu este inferior semicontinua.

Pentru $p \in [1, \infty]$ considerăm funcţia $f : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin

$$f(X) = \begin{cases} \|X - \mathbb{E}(X)\|_p, & \text{dacă } X_- \in L^\infty, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Această funcţie de risc este în mod evident convexă însa nu este inferior semicontinuă pentru valori finite ale lui p. Se poate observa cu uşurinţă că $\operatorname{dom} f = L^\infty + L^p_+$.

Urmând modelul secţiunii precedente considerăm relaţia de ordine indusă de L^p_+ şi fixăm $\Pi \in L^p \setminus \{0\}$. Conjugata funcţiei $Y \mapsto \|Y - \mathbb{E}(Y)\|_p$, $p \in [1, \infty]$, este dată de

$$(\| \cdot - \mathbb{E}(\cdot)\|_p)^*(X^*) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \exists\, Y^* \in (L^p)^*, \|Y^*\|_{(L^p)^*} \leq 1, \text{ a.î. } X^* = Y^* - \mathbb{E}(Y^*) \\ +\infty, & \text{altfel,} \end{cases} \tag{2.8}$$

a se vedea [31, Fact 4.3].

Cazul $p = \infty$. Deoarece $\operatorname{dom} f = L^\infty$ iar f este o funcţie conevexă şi *continuă* condiţia de regularitate (2.6) poate fi cu uşurinţă verificată, ceea ce conduce la obţinerea următoarei reprezentări duale pentru învelitoarea monotonă Π-invariantă a lui f

$$f_{L^\infty_+,\Pi}(X) = \max_{\substack{\|Y^*\|_{(L^\infty)^*} \leq 1, \mathbb{E}(Y^*) - Y^* \in (L^\infty_+)^* \\ \mathbb{E}(Y^*\Pi) - \mathbb{E}(Y^*)\mathbb{E}(\Pi) + 1 = 0}} \mathbb{E}(Y^*X) - \mathbb{E}(Y^*)\mathbb{E}(X), \forall X \in L^\infty. \tag{2.9}$$

Pentru cazul în care Π este o constantă, $f_{L^\infty_+,\Pi} \equiv -\infty$.

Cazul $p \in [1, \infty)$. Pentru acest caz determinăm mai întâi învelitoarea monotonă a lui f împreună cu reprezentarea sa duală evidenţiind dificultăţile ce apar când se doreşte obţinerae învelitorii L^p_+-monotone Π-invariante. Reamintim că $f_{L^p_+,\Pi}(X) = (f_{L^p_+})_\Pi(X)$ pentru orice $X \in L^p$.

Deoarece $\operatorname{dom} f_{L^p_+} = \operatorname{dom} f + L^p_+ = L^\infty + L^p_+$, pentru orice $X \in \operatorname{dom} f_{L^p_+}$ avem

$$f_{L^p_+}(X) = \inf_{\substack{Y \in L^\infty + L^p_+ \\ Y - X \in -L^p_+}} \|Y - \mathbb{E}(Y)\|_p, \tag{2.10}$$

iar pentru orice X din afara domeniului obţinem $f_{L^p_+}(X) = +\infty$. Ceea ce ne conduce la următaorea formulă pentru învelitoare monotonă a funcţiei considerate, $f_{L^p_+} = \delta_{L^\infty + L^p_+}$.

Înaninte de a furniza învelitoarea monotonă Π-invariantă a lui f studiem pe scurt modul de obţinere al reprezentării duale pentru învelitoarea L^p_+-monotonă.

Pentru $X \in L^\infty + L^p_+$, fixat considerăm următoarea problemă de optimizare convexă

$$\inf_{\substack{Y \in L^\infty + L^p_+ \\ Y - X \in -L^p_+}} \|Y - \mathbb{E}(Y)\|_p, \tag{2.11}$$

căreia îi ataşăm *duala Lagrange*

$$\sup_{X^* \in -L^q_+} \{\langle X^*, X\rangle - (\| \cdot - \mathbb{E}(\cdot)\|_p)^*(X^*)\} = \sup_{\substack{\|Y^*\|_q \leq 1, \\ \mathbb{E}(Y^*) - Y^* \in L^q_+}} \mathbb{E}(Y^* X) - \mathbb{E}(Y^*)\mathbb{E}(X). \tag{2.12}$$

Pentru a demonstra că între cuplul de probleme primală-duală de mai sus, dualitatea tare are loc verificăm îndeplinirea unor condiţii de regulariate exprimate în termeni de cvasi-interior şi cvasi-relativ-interior, devreme ce în contextul spaţiilor L^p, doar aceste interioare rămân nevide. Obţinem, drept consecinţă pentru orice $X \in L^p$ urătoarea reprezentare duală

$$f_{L^p_+}(X) = \begin{cases} \max\limits_{\substack{\|Y^*\|_q \leq 1, \\ \mathbb{E}(Y^*) - Y^* \in L^q_+}} \mathbb{E}(Y^* X) - \mathbb{E}(Y^*)\mathbb{E}(X), & \text{dacă } X \in L^\infty + L^p_+, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Învelitoarea *monotonă* Π-*invariantă* a lui f, este dată de

$$f_{L^p_+,\Pi}(X) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \{f_{L^p_+}(X - a\Pi) - a\} = \inf_{\substack{(Y,a) \in (L^\infty + L^p_+) \times \mathbb{R} \\ Y + a\Pi - X = 0}} -a.$$

Deoarece $f_{L^p_+,\Pi}$ este valoarea optimă a unei probleme de optimizare convexă este natural să ne întrebăm dacă şi în acest caz putem obţine o repezentare duală. Din nefericire în situaţia în care ipotezele topologice ale funcţie de scop lipsesc, nu putem raspunde întotdeauna acestei provocări. Ceea ce putem însa spune este că pentru orice $X \in L^\infty + L^p_+ + \mathbb{R}\Pi = \operatorname{dom} f_{L^p_+,\Pi}$ are loc $f_{L^p_+,\Pi}(X) = +\infty$. Pentru $X \notin L^\infty + L^p_+ + \mathbb{R}\Pi$ duala Lagrange ataşată problemei primale

$$\inf_{\substack{(Y,a) \in (L^\infty + L^p_+) \times \mathbb{R} \\ Y + a\Pi - X = 0}} -a \tag{2.13}$$

este

$$\sup_{X^* \in L^q} \left[-\langle X^*, X \rangle + \inf_{a \in \mathbb{R}} a(\langle X^*, \Pi \rangle - 1) + \inf_{Y \in L^p} \langle X^*, Y \rangle \right] = -\infty. \tag{2.14}$$

Totuşi nu putem fi siguri că aceasta este valoare optimă a învelitorii $f_{L^p_+,\Pi}(X)$ devreme ce nu am putut garanta verificarea nici unei condiţii de regularitate.

Pentru cazul în care $\Pi \in L^\infty$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există $Y \in L^\infty + L^p_+$ astfel încât $X = a\Pi + Y$, ceea ce implcă $f_{L^p_+,\Pi}(X) = -\infty$. În acest caz obţinem pentru orice $X \in L^p$

$$f_{L^p_+,\Pi}(X) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } X \in L^\infty + L^p_+ + \mathbb{R}\Pi, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Observaţia 2.4.1 (R.I. Boţ, **A.R. Frătean (Baias)**, [34]) Faptul că $L^\infty + L^p_+$ nu este închis, nu face posibilă nici aplicarea condiţiilor de regularitate de tip închidere pentru cuplul de probleme (2.13)-(2.14).

Acest exemplu prezintă o situaţie limită pentru care nu putem obţine reprezentări duale nici prin tehnici bazate pe teoria dualităţii şi nici prin alte metode dezvoltate până acum în această direcţie.

Capitolul 3

Formule de conjugare şi subdiferenţiere pentru funcţii de risc convexe

3.1 Funcţii conjugate şi subdifferenţiabilitate-abordare generală

Pentru o lecturare facilă a acestui capitol, dedicăm prima secţiune definiţiilor, rezultatelor şi notaţiilor referitoare la funcţii conjugate şi subdiferenţiala convexă.

3.1.1 Funcţii conjugate

Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu Hausdorff local convex, $\mathcal{X}^*$ dualul său topologic înzestrat cu topologia slabă σ^* şi fie $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie dată.

Definiţia 3.1.1 Funţia $f^* : \mathcal{X}^* \to \overline{\mathbb{R}}$, definită prin

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \{\langle x^*, x\rangle - f(x)\} \tag{3.1}$$

se numeşte *conjugata funcţiei* f.

În mod similar putem, defini biconjugata funcţiei f, prin

$$f^{**} : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}},\ f^{**}(x) = (f^*)^*(x) = \sup_{x^* \in \mathcal{X}^*} \{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\}.$$

Cele mai importante proprietăţi şi rezultate referitoare la funcţii conjugate sunt colectate în această secţiune, dintre acestea menţionăm aici doar Teorema Fenchel-Moreau.

Teorema 3.1.10 Fie $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funţie proprie. Atunci $f = f^{**}$ dacă şi numai dacă f este convexă şi inferior semicontinuă.

3.1.2 Subdiferenţiala convexă

Subdiferenţiabilitatea este una dintre noţiunile centrale ale analizei matematice având o largă aplicabilitate în modelarea matematică, teoria jocurilor şi mangementul riscului. În economie şi industria asigurărilor, spre exemplu obţinerea unor formule exacte pentru subdiferenţiala măsurilor de risc devine elementul cheie în optimizarea problememlor de portofoliu şi implicit în cuantificarea riscului.

Definiţia 3.1.16 Fie $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funţie dată şi fie $x \in \mathcal{X}$ astfel încât $f(x) \in \mathbb{R}$. Se numeşte *subdiferenţiala* (*convexă*) a lui f, în punctul x, mulţimea

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathcal{X}^* : f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle, \forall y \in \mathcal{X}\}.$$

Spunem că f este subdiferenţiabilă în x dacă $\partial f(x) \neq \emptyset$. Elementele subdiferenţialei se numesc subgradienţi. Considerăm că $\partial f(x) = \emptyset$ dacă $f(x) \notin \mathbb{R}$.

Definiţia 3.1.17 Fie $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie dată, fie $\varepsilon \geq 0$ şi fie $x \in \mathcal{X}$ astfel încât $f(x) \in \mathbb{R}$. Se numeşte *ε-subdiferenţiala* lui f, în punctul x, mulţimea

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{x^* \in X^* : f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle - \varepsilon, \forall y \in X\}.$$

Pentru $f(x) = \pm\infty$, $\partial_\varepsilon f(x) = \emptyset$.

Observaţia 3.1.18 Pentru $\varepsilon = 0$, ε-subdiferenţiala coincide cu subdiferenţiala convexă, i.e. $\partial f(x) = \partial_0 f(x)$.

Următoarea legătură dintre subdiferenţiala convexă a unei funţii f şi conjugata sa f^*, va fi des întrebuinţată în cele ce urmează.

Teorema 3.1.19 Fie $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie dată şi fie $x \in \mathcal{X}$. Atunci

$$x^* \in \partial f(x) \Longleftrightarrow f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle, \forall x \in \mathcal{X}. \tag{3.2}$$

Tot aici, sunt specificate atât proprietăţi ale subdiferenţialei convexe cât şi condiţii pentru obţinerea formulelor exacte de calcul a subdiferenţialei sumei şi compunerii unor funcţii convexe.

3.1.3 Conjugarea şi subdiferenţiabilitatea funcţiilor subliniare.

Teorema 3.1.27 [17] Fie $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie subliniară. Atunci

(a) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este subdiferenţiabilă în 0,

(ii) f este mărginită inferior pe o vecinătate a originii,

(iii) f este inferior semicontinuă în 0.

(b) Dacă una dintre condiţiile (i), (ii) sau (iii) este îndeplinită atunci

$$\sigma_{\partial f(0)}(\cdot) = \overline{f(\cdot)}.$$

(c) Fie $x \in \mathcal{X}$ astfel încât $f(x)$ este finită. Atunci

$$\partial f(x) = \{x^* \in \partial f(0) : \langle x^*, x \rangle = f(x)\}. \tag{3.3}$$

Această teoremă reprezintă elemetul cheie pentru obţinerea formulelor pentru subdiferenţiala măsurilor de risc coerente, a se vedea [74, 88, 83, 84, 89].

3.2 Formule de conjugare şi subdiferenţiere pentru funcţii de risc convexe descrise prin intermediul modelului de utilitate

Una dintre marile provocări ale analizei convexe este formularea condiţiilor de optim pentru probleme de optimizare, în particular şi pentru problemele de optimizarea portofoliului avânt drept funcţii de scop măsuri de risc convexe. Deoarece pentru aceaste clase de funcţii diferentiabilitatea (derivabilitatea) nu este garantată, pentru caracterizarea optimalităţii este necesar să utilizăm formule de subdiferenţiere, a se vedea, de exemplu [32, 75, 81, 83, 84, 88].

În acest capitol abordăm două moduri diferite de obţinere a formulelor de conjugare şi subdiferenţiere pentru funcţii de risc convexe. Pe de o parte obţinem rezultate întrebuiţând tehnici de calcul bazate pe teoria dualităţii iar pe de altă parte furnizăm formule de subdiferenţiere şi conjugare pentru o măsură de risc generalizată, *the Optimized Certainty Equivalent* (*OCE*) descrisă prin intermediul funcţiei de utilitate.

Pentru cercetările făcute în această secţiune, adaptăm definiţia funcţiei de risc, "Optimized Certainty Equivalent" introduse de Ben-Tal şi Teboulle în [15], la contextul analizei convexe. Utilizarea acestei noi măsuri de risc generalizate are avantajul că permite obţinerea formulelor pentru conjugarea şi subdiferenţierea unor importante clase de funcţii de risc, prin simpla particularizare a funcţiei de utilitate.

Assumption *Fie* $u : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ *o funcţie convexă proprie, descrescătoare şi inferior semicontinuă ce satisface următoarele două condiţii de normalizare* $u(0) = 0$ *şi* $-1 \in \partial u(0)$.

Având ca punct de plecare modul de definire al măsurii de risc, OCE din [16], definim pentru $p \in [1, \infty]$ *funcţia de risc geenralizată* $\rho_u : L^p \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\rho_u(X) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda + \mathbb{E}(u(X + \lambda))\}. \tag{3.4}$$

Cele mai imporatante proprietăţi ale acestei funcţii de risc sunt sintetizate în urmatoarele propoziţii.

Propoziţia 3.2.2 (**A.R. Baias**, D. Duca, [9]) Funcţia de risc generalizată $\rho_u : L^p \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definită prin relaţia (3.4), este o măsură de risc convexă (i.e. este convexă, monotonă şi cash-invariantă) cu expectanţa mărginită.

Propoziţia 3.2.5 (**A.R. Baias**, D. Duca, [9]) Funcţia de risc geenralizată $\rho_u : L^p \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definită prin relaţia (3.4) este monotonă în raport cu dominanţa stohastică de ordinul doi.

În cele ce urmează prezentăm rezultate referitoare la obţinerea formulelor de conjugare şi subdiferenţiere pentru măsura de risc ρ_u.

Teorema 3.2.6 (R.I. Boţ, **A.R. Frătean (Baias)**, [34]) Conjugata funcţiei ρ_u este funcţia $\rho_u^* : (L^p)^* \to \overline{\mathbb{R}}$, definită prin

$$\rho_u^*(X^*) = \begin{cases} \mathbb{E}(u^*(X^*)), & \text{dacă } \mathbb{E}(X^*) = -1, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Înainte de a furniza formula pentru subdiferenţiala funcţiei ρ_u, obţinem, prin intermediul dualităţii Lagrange, o condiţie suficientă pe care funcţia de utilitate u trebuie să o îndeplinească pentru a garanta atingerea infimimului în definiţia lui $\rho_u(X)$. Conform lui Ben-Tal şi Teboulle, valoarea optimă în definiţia (3.4) este atinsă pentru acele variabile aleatoare $X \in L^p$ ce au ca suport un interval mărginit şi închis. Diferit de abordarea lui Ben-Tal şi Teboulle, condiţia pe care o obţinem prin intermediul teoriei dualităţii, asigură atingerea valorii optime în relaţia (3.4), independent de modul de alegere al variabilei aleatoare.

Teorema 3.2.7 (R.I. Boţ, **A.R. Frătean (Baias)**, [34]) Dacă funcţia de recesiune a funcţiei de utilitate u îndeplineşte condiţia

$$\{d \in \mathbb{R} : u_\infty(d) = -d\} = \{0\}, \tag{3.6}$$

atunci pentru orice $X \in L^p$ există $\bar{\lambda}(X) \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\rho_u(X) = \bar{\lambda}(X) + \mathbb{E}(u(X + \bar{\lambda}(X))).$$

Teorema 3.2.8 (R.I. Boţ, **A.R. Frătean (Baias)**, [34]) Presupunând condiţia (3.6) îndeplinită. Fie $X \in L^p$ şi fie $\bar{\lambda}(X) \in \mathbb{R}$ elementul pentru care se atinge valoarea minimă în definiţia funcţiei de risc $\rho_u(X)$. Atunci subdiferenţiala funcţiei $\rho_u(X)$, este dată de

$$\partial\rho_u(X) = \{X^* \in (L^p)^* : X^*(\omega) \in \partial u(X(\omega) + \bar{\lambda}(X)) \ \text{ a.p.t. } \ \omega \in \Omega, \mathbb{E}(X^*) = -1\}. \tag{3.7}$$

Această teoremă poate fi demonstrată utilizând două metode distincte, pe de o parte aplicând rezultate din teoria dualităţii iar pe de altă parte aplicând rezultate referitoare la subdiferenţiala funcţiei valoare infimală.

În următoarele subsecţiuni arătăm cum pentru diferite moduri de alegere a funcţiei de utilitate obţinem formulele de calcul aferente conjugării şi subdiferenţiereii funcţiei de risc entropice şi a funcţiei pierdere maximă.

3.2.1 Măsura de risc entropică

Pornind de la funcţia de utilitate $u_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $u_1(t) = \exp(-t) - 1$, obţinem *funcţia de risc entropică* $\rho_{u_1} : L^p \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\rho_{u_1}(X) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda + \mathbb{E}(\exp(-X - \lambda) - 1)\},$$

sau echivalent $\rho_{u_1}(X) = \ln(\mathbb{E}(\exp(-X)))$, a se vedea [14].

Utilizând convenţia $0 \ln(0) = 0$ deducem pentru orice $t^* \in \mathbb{R}$ următoarea expresie a conjugatei funcţiei u_1,

$$u_1^*(t^*) = \begin{cases} -t^* \ln(-t^*) + t^* + 1, & \text{dacă } \ t^* \leq 0, \\ +\infty, & \text{dacă } \ t^* > 0. \end{cases}$$

Aplicând, Teorema 3.2.6 obţinem următoarea formulă pentru conjugata funcţiei de risc entropicĕ,

$$\rho_{u_1}^*(X^*) = \begin{cases} -\mathbb{E}(X^* \ln(-X^*)), & \text{dacă } X^* < 0, \ \mathbb{E}(X^*) = -1, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Deoarece $(u_1)_\infty = \delta_{[0,+\infty)}$, condiţia (3.6) este îndeplinită pentru orice $X \in L^p$, ceea ce implică atingerea infimimului în definţia funcţiei de risc $\rho_{u_1}(X)$. Fie deci $\bar{\lambda}(X) = \ln(\mathbb{E}(\exp(-X))$ atunci subdiferenţiala funcţiei entropice este dată de

$$\partial \rho_{u_1}(X) = \{\nabla \rho_{u_1}(X)\} = \left\{ \frac{-1}{\mathbb{E}(\exp(-X))} \exp(-X) \right\}.$$

3.2.2 Funcţia pierdere maximă

Alegând drept funcţie de utilitate, funcţia indicator $u_2 = \delta_{[0,+\infty)}$, obţinem prin intermediul relaţiei (3.4), funcţia pierdere maximă (*the worst-case risk measure*), $\rho_{u_2} : L^p \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definită prin

$$\rho_{u_2}(X) = \inf_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ X + \lambda \geq 0}} \lambda = -\operatorname{esinf} X. \tag{3.8}$$

Deoarece $u_2^* = \delta_{(-\infty,0]}$, aplicând Teorema 3.2.6 obţinem pentru $X^* \in (L^p)^*$ conjugata

$$\rho_{u_2}^*(X^*) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } X^* \leq 0, \ \mathbb{E}(X^*) = -1, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Deoarece $(u_2)_\infty = \delta_{[0,+\infty)}$, condiţia (3.6) este evident îndeplinită, ceea ce garantează pentru orice $X \in L^p$ existenţa unui $\bar{\lambda}(X)$ real pentru care infimimul în definiţia (3.8) este atins. Pentru $\operatorname{esinf} X = -\infty$, $\bar{\lambda}(X)$ poate fi ales arbitrar în $\mathbb{R}$, iar pentru $\operatorname{esinf} X \in \mathbb{R}$, alegem $\bar{\lambda}(X) = -\operatorname{esinf} X$. Subdiferenţiala funcţiei indicator, are expresia

$$\partial u_2(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{dacă } t < 0, \\ (-\infty, 0], & \text{dacă } t = 0, \\ \{0\}, & \text{dacă } t > 0, \end{cases}$$

ceea ce ne conduce, prin intermediul Teoremei 3.2.8, la următoarea relaţie pentru subdiferenţiala funcţiei pierdere maximă.

$$\partial \rho_{u_2}(X) = \left\{ X^* \in (L^p)^* : \mathbb{E}(X^*) = -1, \begin{array}{ll} X^*(\omega) \in (-\infty, 0], & \text{dacă } X(\omega) = \operatorname{esinf} X \\ X^*(\omega) = 0, & \text{dacă } X(\omega) > \operatorname{esinf} X \end{array} \right\},$$

pentru orice $X \in L^p$ cu $\operatorname{esinf} X \in \mathbb{R}$. Pentru cazul în care $\operatorname{esinf} X = -\infty$ avem $\partial \rho_{u_2}(X) = \emptyset$.

3.3 Formule de conjugare şi subdiferenţiere pentru funcţii de risc convexe descrise prin intermediul teoriei dualităţii

Din păcate, o mare parte a funcţiilor de risc, cu rol important în aplicaţiile practice, nu pot fi nici descrisă cu ajutorul unei funcţii de utilitate, şi nici înscrise în cadrul general al măsurilor de risc coerente, datorită lipsei unor proprietăţi matematice esenţiale precum: pozitiv omogenitatea, monotonia sau cash-invarianţa.

În această secţiune deducem formule de conjugare şi subdiferenţiere întrebuinţând tehnici de calcul bazate pe rezultate din analiza convexă şi teoria dualităţii, pentru o serie de funcţii de risc cu rol semnificativ în aplicaţii practice precum: abaterea medie, abaterea medie generalizatăta de ordinul p şi abaterea medie generalizată superioară\inferioară de ordinul p fată de o ţintă dată, τ. Ceea ce prezentăm aici este, de fapt, un algoritm ce poate fi aplicat cu succes atât funcţiilor de risc ce nu pot fi înscrise în categora măsurilor de risc coerente cât şi funcţiilor de risc ce nu pot fi descrise prin intermediul modelelor de utilitate. Pentru aceste categorii de funcţii singura abordare viabilă pentru obţinerea reprezentărilor duale şi pentru caracterizarea condiţiilor de optimalitate constă în aplicarea raţionamentelor bazate pe rezultate din analiza convexă şi teoria dualităţii. Următoarea lemă este de o reală importanţă pentru deducerea formulelor de conjugare şi subdiferenţiere pentru semideviaţiile medii inferioare şi superioare de ordinul p.

Lema 3.3.1 (**A.R. Baias**, D.M. Nechita, [11]) Fie funcţia $g : L^p \to \mathbb{R}$, definită prin $g(X) = X_-$ şi respectiv funcţia $h : L^p \to \mathbb{R}$, definită prin $h(X) = X_+$. Următoarele relaţii de legătură între funcţiile g şi h au loc:

(*a*) $h(X) = g(-X)$ şi $g(X) = h(-X), \quad \forall X \in L^p$,

(*b*) $h^*(X^*) = g^*(-X^*), \quad \forall X \in (L^p)^*$,

(*c*) $\partial h(X) = -\partial g(-X), \quad \forall X \in L^p$.

Deoarece cele mai importante măsuri de risc şi deviaţii de risc folosite în literatura de specialitate nu pot fi descrise prin intermediul funcţiilor de utilitate, fiind definte prin intermediul normei $\|\cdot\|_p$, $p \in [1,\infty]$, dedicăm o atenţie deosebită subdiferenţiereii normei de ordinul p şi respectiv abaterilor inferioare şi superioare de ordinul p.

Propoziţia 3.3.2 Fie funcţiile $f_-, f_+ : L^p \to \mathbb{R}$, definite prin $f_- = \|X_-\|_p$, şi respectiv $f_+ = \|X_+\|_p$, pentru $p \in [1,\infty]$. Atunci obţinem următoarele formule pentru conjugatele şi subdiferenţialele funcţiilor f_- şi f_+:

$$(a) \quad f_+^*(X^*) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \|X^*\|_q \leq 1, X^* \geq 0, \\ +\infty, & \text{altfel;} \end{cases}$$

$$(b) \quad f_-^*(X^*) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \|X^*\|_q \leq 1, X^* \leq 0, \\ +\infty, & \text{altfel;} \end{cases}$$

$$(c) \ \partial f_+(x) = \begin{cases} \{X^* \in L^q : \|X^*\|_q \leq 1, X^* \geq 0\}, & \text{dacă } X = 0, \\ \{X^* \in L^q : \|X^*\|_q \leq 1, X^* \geq 0, \langle X^*, X\rangle = \|X_+\|_p\}, & \text{dacă } X \neq 0; \end{cases}$$

$$(d) \ \partial f_-(x) = \begin{cases} \{X^* \in L^q : \|X^*\|_q \leq 1, X^* \leq 0\}, & \text{dacă } X = 0, \\ \{X^* \in L^q : \|X^*\|_q \leq 1, X^* \leq 0, \langle X^*, X\rangle = \|X_-\|_p\}, & \text{dacă } X \neq 0. \end{cases}$$

3.3.1 Abaterea medie generalizată de ordinul p

Considerăm funcţia de risc generalizată $\rho : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$, introdusă de Boţ şi Lorenz în [31], definită prin

$$\rho(X) = \|X - \mathbb{E}(X)\|_p^a - \mathbb{E}(X), \ \forall X \in L^p, \tag{3.9}$$

unde $p \in [1,\infty]$ şi $a \geq 1$.

Această funcţie de risc convexă este una dintre măsurile de risc cele mai renumite din literatură, cu o gamă largă de aplicaţii practice. Diferite cazuri particulare ale acesteia au făcut obiectul cercetărilor matematice apărute într-o serie de articole precum [31, 83, 84, 88, 89]. Pentru cazul $a = p = 1$ redescoperim în formula de mai sus, abaterea medie, în timp ce pentru $p = 2$ şi $a = 1$ obţinem abaterea pătratică medie.

În mod similar definim abaterea medie inferioară, $\rho_- : L^p \to \mathbb{R}$ şi abaterea medie superioară, $\rho_+ : L^p \to \mathbb{R}$ de ordinul p astfel

$$\rho_-(X) = \|(X - \mathbb{E}(X))_-\|_p^a - \mathbb{E}(X), \ \forall X \in L^p, a \geq 1, p \in [1,\infty], \tag{3.10}$$

şi respectiv

$$\rho_+(X) = \|(X - \mathbb{E}(X))_+\|_p^a - \mathbb{E}(X), \ \forall X \in L^p, a \geq 1, p \in [1,\infty]. \tag{3.11}$$

ρ_- ia în considerare numai abaterea medie negativă. Din acest punct de vedere, ρ_- poate fi considerată o măsură de cuantificare a riscului de investiţie. Prin urmare, studiul acstei măsuri de risc şi elaborarea unui aparat matematic riguros este o reală provocare pentru matematicieni şi economişti deopotrivă. Cu toate aceastea abaterea medie inferioară ρ_-, nu poate descrie imaginea de ansamblu a întregii distribuţii de vreme ce neglijează abaterea medie superioară. Responsabilă de descrierea acestui aspect este funcţia de risc ρ_+. În cele ce urmează deducem atât formulele aferente funcţiilor conjugate cât şi formulele pentru subdiferenţialele convexe ale abaterilor medii inferioare şi superioare. Pentru cazul $a = 1$ menţionăm următoarele rezultate.

Teorema 3.3.3 (**A.R. Baias**, D.M. Nechita, [11]) Fie $\rho_1 : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţia de risc definită prin

$$\rho_1(X) = \|X - \mathbb{E}(X)\|_p - \mathbb{E}(X), \ \forall X \in L^p \text{ şi } p \in [1, \infty]. \tag{3.12}$$

Subdiferenţiala funcţiei ρ_1 este

$$\partial\rho_1(X) = \begin{cases} \{-1 + X^* - \mathbb{E}(X^*) : X^* \in L^q, \|X^*\|_q \le 1)\}, & \text{dacă } X - \mathbb{E}(X) = 0, \\ \left\{-1 + \frac{1}{\|X - \mathbb{E}(X)\|_p^{\frac{p}{q}}} \left[(X - \mathbb{E}(X))^{\frac{p}{q}} - \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^{\frac{p}{q}})\right]\right\}, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{3.13}$$

Observaţia 3.3.4 (**A.R. Baias**, D.M. Nechita, [11]) Formula pentru subdiferenţiala abaterii medii a fost obţinută de Rockafellar et all. în [83], dar numai în contextul spaţiilor Hilbert, L^2. Mulţimea subgradienţilor poartă aici denumirea de, învelitoare de risc şi este notată prin $\mathcal{Q}$. Relaţia de legătură între învelitoarea de risc a lui Rockafellar si subdiferenţiala funcţiei ρ_1, este dată de relaţia

$$\mathcal{Q} = -\partial\rho_1(0).$$

Teorema 3.3.5 (**A.R. Baias**, D.M. Nechita, [11]) Fie funcţiile de risc $\rho_{1_-}, \rho_{1_+} : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$ definite prin

$$\rho_{1_+}(X) = \|(X - \mathbb{E}(X))_+\|_p - \mathbb{E}(X), \ \forall X \in L^p, \ p \in [1, \infty] \tag{3.14}$$

şi respectiv

$$\rho_{1_-}(X) = \|(X - \mathbb{E}(X))_-\|_p - \mathbb{E}(X), \ \forall X \in L^p, \ p \in [1, \infty], \tag{3.15}$$

Atunci:

(i) subdiferenţiala abaterii medii superioare ρ_{1_+} este

$$\partial\rho_{1_+}(X) = \begin{cases} \{-1 + X^* - \mathbb{E}(X^*) : X^* \in L^q, \|X^*\|_q \le 1, X^* \ge 0\}, & \text{dacă } X - \mathbb{E}(X) = 0, \\ \left\{-1 + \frac{1}{\|(X - \mathbb{E}(X))_+\|_p^{\frac{p}{q}}} \left[[(X - \mathbb{E}(X))_+]^{\frac{p}{q}} - \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+]^{\frac{p}{q}}\right]\right\}, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{3.16}$$

(ii) subdiferenţiala abaterii medii inferioare ρ_{1_-} este

$$\partial\rho_{1_-}(X) = \begin{cases} \{-1 + X^* - \mathbb{E}(X^*) : X^* \in L^q, \|X^*\|_q \le 1, X^* \le 0\}, & \text{dacă } X - \mathbb{E}(X) = 0, \\ \left\{-1 + \frac{1}{\|(X - \mathbb{E}(X))_-\|_p^{\frac{p}{q}}} \left[\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_-]^{\frac{p}{q}} - [(X - \mathbb{E}(X))_-]^{\frac{p}{q}}\right]\right\}, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{3.17}$$

Observaţia 3.3.7 (**A.R. Baias**, D.M. Nechita, [11]) Relaţia de legătură dintre formulele de subdiferenţiere relative la abterile medii inferioare şi superioare şi învelitorile de risc introduse de Rockafellar în [83] pot fi exprimate prin relaţiile $\mathcal{Q}_+ = -\partial\rho_+(0)$ şi respectiv $\mathcal{Q}_- = -\partial\rho_-(0)$.

Prin Teorema 3.3.5, extindem studiul subdifernţiabilităţii abaterilor medii inferioare şi superioare la contextul spaţiilor L^p, $p \geq 1$. Rezultatele obţinute în [83, 84] fiind cazuri particulare ale acestei teoreme, obţinute pentru $p = q = 2$.

Observaţia 3.3.13 (**A.R. Baias**, D.M. Nechita, [11]) Pentru cazul $a > 1$, învelitoarea de risc a funcţiilor generalizate ρ, ρ_- şi ρ_+ constă doar din singletonul $\{0\}$, ceea ce nu prezintă interes din punct de vedere al aplicaţiilor practice. Totuşi subdiferenţiala convexă a normei $\|\cdot\|_p^a$ poate fi calculată, prin intermediul Teoremei 3.1.19, ceea ce ne conduce la următoarea expresie

$$\left\{X^* \in L^q : \langle X^*, X\rangle = \|X\|_p^a + (a-1)\|\frac{1}{a}X^*\|_q^{\frac{a}{a-1}}\right\}, \forall X \in L^p.$$

3.3.2 Abaterea medie superioară/inferioară de ordinul p, faţă de o ţintă dată

Fie funcţia $\rho_{\tau_+} : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$, abatere medie superioară de ordinul p, faţă de o ţintă dată definită prin

$$\rho_{\tau_+}(X) = \|(X-\tau)_+\|_p^a - \mathbb{E}(X), \tag{3.18}$$

unde $\tau \in \mathbb{R}$ este ţinta dată iar $a \geq 1$. Similar putem defini funcţia abatere medie inferioară de ordinul p, faţă de ţinta τ, $\rho_{\tau_-} : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$ prin

$$\rho_{\tau_-}(X) = \|(X-\tau)_-\|_p^a - \mathbb{E}(X),\ \forall a \geq 1. \tag{3.19}$$

Pentru cazul $a = 1$ obţinem abaterea medie clasică inferioară/superioară de ordinul p, faţă de o ţintă dată introduse în [88, 89].

Aşa cum am argumentat deja, în cazul semideviaţiilor medii inferioare şi superioare de ordinul p, descrise în secţiunea precedentă, suntem intresaţi să deducem reprezentări duale şi formule de subdiferenţiere atât pentru abaterea medie inferioară cât şi pentru abaterea medie superioară.

Deoarece semideviaţiile medii generalizate ρ_{τ_+} şi ρ_{τ_-} nu pot fi înscrise în categoria măsurilor de risc coerente (din cauza lipsei de pozitiv omogenitate) nu putem întrebuinţa Teorema 3.1.27 pentru deducerea formulelor de conjugare şi subdiferenţiere. Mai mult decât atât aceste funcţii de risc nu pot fi descrise nici prin intermediul funcţiilor de utilitate, deci nici abordarea prezentătă în Secţiunea 3.2 nu poate fi aplicată. În consecinţă singura abordare posibilă pentru obţinerea reprezentărilor duale şi pentru caracterizarea condiţiilor de optimalitate prin intermediul subdiferenţialei convexe, rămâne în utilizarea tehnicilor de lucru bazate pe teoria dualităţii. Pentru cazul $a = 1$ rezultatele autoarei cu privire la obţinerea formulelor de conjugare sunt următoarele.

Teorema 3.3.18 (**A.R. Baias,** [7]) Fie $\rho_{\tau_{1_+}} : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţia de risc definită prin

$$\rho_{\tau_{1+}}(X) = \|(X-\tau)_+\|_p - \mathbb{E}(X),\ \forall X \in L^p,$$

unde $p \in [1, \infty)$. Atunci conjugata funcţiei $\rho_{\tau 1_+}$ este funcţia, $\rho^*_{\tau 1_+} : L^q \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin

$$\rho^*_{\tau 1_+}(X^*) = \begin{cases} \tau\, \mathbb{E}(X^* + 1), & \text{dacă } \|X^* + 1\|_q \leq 1, X^* \geq -1, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{3.20}$$

Teorema 3.3.19 (**A.R. Baias,** [7]) Fie $\rho_{\tau 1_-} : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţia de risc definită prin

$$\rho_{\tau 1-}(X) = \|(X - \tau)_-\|_p - \mathbb{E}(X),\ \forall X \in L^p,$$

unde $p \in [1, \infty)$. Atunci conjugata funcţiei $\rho_{\tau 1_-}$ este funcţia $\rho^*_{\tau 1_-} : L^q \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin

$$\rho^*_{\tau 1_-}(X^*) = \begin{cases} -\tau \mathbb{E}(X^* + 1), & \text{dacă } \|X^* + 1\|_q \leq 1, X^* \leq -1, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{3.21}$$

Pentru cazul $a > 1$ rezultatele autoarei cu privire la obţinerea formulelor de conjugare pentru abaterile medii generalizate sunt următoarele.

Teorema 3.3.20(**A.R. Baias,** [7]) Fie $\rho_{\tau a_+} : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţia de risc definită prin

$$\rho_{\tau a+}(X) = \|(X - \tau)_+\|_p^a - \mathbb{E}(X),\ \forall X \in L^p$$

unde $p \in [1, \infty)$ şi $a > 1$. Atunci conjugata funcţiei $\rho_{\tau a_+}$ este funcţia $\rho^*_{\tau a_+} : L^q \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin

$$\rho^*_{\tau a_+}(X^*) = \begin{cases} (a-1)\|\frac{1}{a}(X^* + 1)\|_q^{\frac{a}{a-1}} + \tau \mathbb{E}(X^* + 1), & \text{dacă } X^* \geq -1, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{3.22}$$

Teorema 3.3.21(**A.R. Baias,** [7]) Fie $\rho_{\tau a_-} : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţia de risc definită prin

$$\rho_{\tau a-}(X) = \|(X - \tau)_-\|_p^a - \mathbb{E}(X),\ \forall X \in L^p$$

unde $p \in [1, \infty)$ şi $a > 1$. Atunci conjugata funcţiei $\rho_{\tau a_-}$ este funcţia $\rho^*_{\tau a_-} : L^q \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin

$$\rho^*_{\tau a_-}(X^*) = \begin{cases} (a-1)\|\frac{1}{a}(X^* + 1)\|_q^{\frac{a}{a-1}} - \tau \mathbb{E}(X^* + 1), & \text{dacă } X^* \leq -1, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{3.23}$$

Utilizând formulele de conjugare ale abaterilor medii inferioare şi superioare de ordinul p, faţă de o ţintă dată, deducem şi caracterizările duale ale acestor funcţii de risc. Reprezentările duale sunt obţinute ca şi o consecinţă a aplicării Teoremei Fenchel-Moreau, deoarece atât ρ_{τ_+} cât şi ρ_{τ_-} sunt funcţii convexe proprii şi inferior semicontinue.

În ceea ce priveşte subdifereţiabilitatea abaterii inferioare şi superioare de ordinul p faţă de o ţintă dată τ am obţinut următoarele rezultate.

Teorema 3.3.23 (**A.R. Baias,** [7]) Fie $\rho_{\tau_{1_+}}, \rho_{\tau_{1_-}} : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţiile de risc definite prin

$$\rho_{\tau_1+}(X) = \|(X-\tau)_+\|_p - \mathbb{E}(X), \quad \forall X \in L^p,\ p \in [1,\infty), \tag{3.24}$$

şi respectiv

$$\rho_{\tau_1-}(X) = \|(X-\tau)_-\|_p - \mathbb{E}(X),\ \forall X \in L^p, p \in [1,\infty). \tag{3.25}$$

Atunci:

(i) subdiferenţiala convexă a lui ρ_{τ_1+} este dată de

$$\partial\rho_{\tau_1+}(X) = \begin{cases} \{X^*-1 : X^* \in L^q, \|X^*\|_q \le 1, X^* \ge 0\}, & \text{dacă } X = \tau, \\ \left\{\frac{((X-\tau)_+)^{\frac{p}{q}}}{\|(X-\tau)_+\|_p^{\frac{p}{q}}} - 1\right\}, & \text{dacă } X \ne \tau; \end{cases} \tag{3.26}$$

(ii) subdiferenţiala convexă a lui ρ_{τ_1-} este dată de

$$\partial\rho_{\tau_1-}(X) = \begin{cases} \{X^*-1 : X^* \in L^q, \|X^*\|_q \le 1, X^* \le 0\}, & \text{dacă } X = \tau, \\ \left\{\frac{((X-\tau)_-)^{\frac{p}{q}}}{\|(X-\tau)_-\|_p^{\frac{p}{q}}} - 1\right\}, & \text{dacă } X \ne \tau. \end{cases} \tag{3.27}$$

3.4 O aplicaţie - Funcţia valoare de risc condiţionată (CVaR)

3.4.1 Definiţie şi interpretare economică

Două dintre cele mai uzuale măsuri de risc sunt funcţia valoare de risc (VaR) şi funcţia valoare de risc condiţionată (CVaR).

VaR-ul reprezintă pierderea estimată a unui portofoliu de instrumente financiare pe un orizont fix de timp. Utilizarea acestui indicator implică alegerea arbitrară a doi parametri: orizontul de timp şi nivelul de relevanţă.

Definiţia 3.4.1 [84] Funcţia valoare de risc a pierderilor asociate deciziei descrise de variabiala aleatoare X, pentru nivelul $\beta \in (0,1)$, are expresia

$$\mathrm{VaR}_\beta(X) = -\inf\{\alpha : \mathbb{P}(X \le \alpha) > \beta\}.$$

Din nefericire funcţia valoare de risc nu este convexă, fapt ce o face indezirabilă din punc de vedere al optimizării matematice. O măsură de risc alternativă cu bune proprietăţi matematice, ce apare ca o extindere a funcţiei valoare de risc, este funcţia valoare de risc condiţionată. Spre deosebire de VaR, CVaR-ul, cuantifică şi pierderile situate la sfârsitul curbei de distribuţie, adică acele pierderi ce depăşesc valoarea de risc.

Pe lângă bune prorietăţi matematice (a se vedea [2]) funcţia valoare de risc condiţionată prezintă şi un uimitor avantaj computaţional, fiind definită prin

$$\mathrm{CVaR}_\beta(X) := \inf_{\eta\in\mathbb{R}} \left\{ \eta + \frac{1}{\beta}\mathbb{E}[(X+\eta)_-] \right\}. \tag{3.28}$$

Funcţia valoare de risc condiţionată a fost extinsă în diferite direcţii în trecut. Una dintre cele mai importante generalizări ale acesteia, fiind dată de Lüthi şi Doege, în [65]. Funcţia valoare de risc generalizată (GCVaR) păstrează atât avantajul computational cât şi abilitatea de a gestiona riscurile extreme.

$$\mathrm{GCVaR}_{\beta,l}(X) := \inf_{\substack{\eta\in\mathbb{R} \\ \mathbb{E}[(X+\eta)_-]\le l}} \left\{ \eta + \frac{1}{\beta}\mathbb{E}[(X+\eta)_-] \right\},$$

unde $l \geq 0$ este un parametru fixat iar $\beta \in (0,1)$ reprezintă nivelul de relevanţă.

Observaţia 3.4.3 Alegând $l \geq \mathbb{E}[(X+\eta_{VaR})_-]$ în definiţia GCVaR-ului obţinem funcţia valore de risc condiţionată în timp ce pentru $l = 0$ se obţine funcţia pierdere maximă (the worst case risc measure) i.e. $\mathrm{GCVaR}_{\beta,0} = -\operatorname{esinf} X = \text{Max Loss}$.

În cele ce urmează furnizăm formule pentru conjugata şi subdiferenţiala funcţiei valoare de risc condiţionată atât prin intermediul teoriei dualităţii cât şi prin intermediul modelului de utilitate dezvoltat în Secţiunea 3.2.

3.4.2 Formule de conjugare şi subdiferenţiere pentru funcţia CVaR descrise prin intermediul teoriei dualităţii

În acest paragraf obţinem mai întâi formulele pentru conjugata şi subdiferenţiala măsurii de risc generalizate, GCVaR.

Teorema 3.4.4 (**A.R. Baias,** [6]) Fie $GCVaR_{\beta,l} : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$, unde $p \geq 1$, $l \geq 0$ şi $\beta \in (0,1)$ funcţia de risc definită prin

$$\mathrm{GCVaR}_{\beta,l}(X) = \inf_{\substack{\eta\in\mathbb{R} \\ \mathbb{E}[(X+\eta)_-]\le l}} \left\{ \eta + \frac{1}{\beta}\mathbb{E}[(X+\eta)_-] \right\}. \tag{3.29}$$

Atunci conjugata funcţie GCVaR, este funcţia $\mathrm{GCVaR}^*_{\beta,l} : L^q \to \overline{\mathbb{R}}$, definită prin

$$\mathrm{GCVaR}^*_{\beta,l}(X^*) = \begin{cases} -l\min\{0, \operatorname{esinf}(X^* + \frac{1}{\beta})\}, & \text{dacă } \mathbb{E}(X^*) = -1, X^* \leq 0, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{3.30}$$

Particularizând acest rezultat pentru $l = 0$ şi respectiv pentru $l \geq \mathbb{E}[(X+\eta_{VaR})_-]$ obţinem formulele de conjugare aferente funcţiei pierdere maximă şi funcţiei valoare de risc condiţionată (CVaR).

Corolar 3.4.5 (**A.R. Baias,** [6]) Fie funcţia de risc Max Loss : $L^p \to \overline{\mathbb{R}}$, $p \geq 1$ definită prin

$$\text{Max Loss} := -\operatorname{esinf} X.$$

Atunci conjugata funcţiei Max Loss este funcţia Max Loss$^*: L^q \to \overline{\mathbb{R}}$, definită prin

$$\text{Max Loss}^*(X^*) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \mathbb{E}(X^*) = -1,\ X^* \le 0, \\ +\infty, & \text{altfel,} \end{cases} \tag{3.31}$$

Corolar 3.4.6 (**A.R. Baias,** [6]) Fie $\beta \in (0,1)$ şi fie funcţia de risc $\text{CVaR}_\beta : L^p \to \overline{\mathbb{R}},\ p \ge 1$ definită prin relaţia (3.28). Atunci conjugată funcţiei CVaR este funcţia $\text{CVaR}^*_\beta : L^q \to \overline{\mathbb{R}}$, definită prin

$$\text{CVaR}^*_\beta(X^*) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \mathbb{E}(X^*) = -1,\ X^* \le 0, (X^* + \frac{1}{\beta}) \ge 0, \\ +\infty, & \text{altfel .} \end{cases} \tag{3.32}$$

Teorema 3.4.7 (**A.R. Baias,** [6]) Fie $\beta \in (0,1)$ şi fie $\text{CVaR}_\beta : L^p \to \overline{\mathbb{R}}$, $p \ge 1$ funcţia de risc definită prin relaţia (3.28). Atunci subdiferenţiala funcţiei CVaR_β este dată de

$$\partial \text{CVaR}_\beta(X) = \left\{ X^* \in L^q : \mathbb{E}(X^*) = -1, \begin{array}{ll} X^*(\omega) = -1/\beta, & \text{dacă } X(\omega) < -\text{VaR}_\beta(X) \\ X^*(\omega) \in [-1/\beta, 0], & \text{dacă } X(\omega) = -\text{VaR}_\beta(X) \\ X^*(\omega) = 0, & \text{dacă } X(\omega) > -\text{VaR}_\beta(X) \end{array} \right\}. \tag{3.33}$$

3.4.3 Formule de conjugare şi subdiferenţiere pentru funcţia CVaR descrise prin intermediul modelului de utilitate

Fie $\gamma_2 < -1 < \gamma_1 \le 0$ şi fie $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia de utilitate definită prin

$$u(t) = \begin{cases} \gamma_2 t, & \text{dacă } t \le 0, \\ \gamma_1 t, & \text{dacă } t > 0. \end{cases}$$

Obţinem în baza relaţie (3.4) funcţia de risc $\rho_u : L^p \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\rho_u(X) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda + \gamma_1 \mathbb{E}(X+\lambda)_+ - \gamma_2 \mathbb{E}(X+\lambda)_-\}.$$

Se observă cu uşurinţă că pentru $\gamma_1 = 0$ şi $\gamma_2 = -1/\beta$, obţinem expresia funcţiei valoare de risc condiţionată.

Deoarece $u^* = \delta_{[\gamma_2, \gamma_1]}$, în baza Teoremei 3.2.6 obţinem pentru conjugata lui ρ_u, următoarea expresie

$$\rho_u^*(X^*) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \gamma_2 \le X^* \le \gamma_1, \mathbb{E}(X^*) = -1, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Astfel, pentru orice $X^* \in L^q$ conjugata funcţie CVaR este funcţia $\text{CVaR}^*_\beta : L^q \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin

$$\text{CVaR}^*_\beta(X^*) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } -\frac{1}{\beta} \le X^* \le 0, \mathbb{E}(X^*) = -1, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Pentru orice $d \in \mathbb{R}$, funcţia de recesiune a lui u este

$$(u)_\infty(d) = \begin{cases} \gamma_2 d, & \text{dacă } d < 0, \\ 0, & \text{dacă } d = 0, \\ \gamma_1 d, & \text{dacă } d > 0, \end{cases}$$

ceea ce asigură îndeplinirea condiţiei (3.6). Deci pentru fiecare $X \in L^p$ există $\bar{\lambda}(X) = \mathrm{VaR}(X)$ astfel încât $\rho_u(X) = \bar{\lambda}(X) + \gamma_1 \mathbb{E}(X + \bar{\lambda}(X))_+ - \gamma_2 \mathbb{E}(X + \bar{\lambda}(X))_-$. Subdiferenţiala funcţiei de utilitate are expresia

$$\partial u(t) = \begin{cases} \{\gamma_2\}, & \text{dacă } t < 0, \\ [\gamma_2, \gamma_1], & \text{dacă } t = 0, \\ \{\gamma_1\}, & \text{dacă } t > 0, \end{cases}$$

ceea ce ne conduce, în baza Teorem 3.2.8, la expresia subdiferenţialei funcţiei CVaR dată de relaţia (3.33).

Capitolul 4

Teoreme de prelungire ale operatorilor multivoci

4.1 Motivaţia

In capitolul 4 obţinem pe de o parte rezultate de prelungire a operatorilor liniari şi continui dominaţi de operatori multivoci convecşi, în contextul spaţiilor Frèchet iar pe de altă parte extindem la contextul opeatorilor multivoci, teoremele lui Hahn de prelungire a functionalelor liniare şi continue.

Unele dintre rezultatele cele mai importante ale analizei funcţionale cu o largă aplicabilitate în toate domeniile importante ale matematicii sunt teoremele de tip Hahn-Banach. Generalizări ale acestor teoreme au fost dezvoltate în diferite direcţii în trecut, a se vedea [38, 42, 63, 91, 100, 101, 70, 71, 94, 99]. Multe dintre aceste generalizări, chiar pur algebrice, conţin o serie de greşeli, după cum arăta Zălinescu în [98], ceea ce lasă loc unor noi cercetări în domeniu. Din nefericire marea majoritate a acestor generalizări s-au realizat numai în contextul spaţiilor liniare, pentru contextul spatiilor liniare topologice putem aminti doar, [19] şi [44].

În această secţiune, ne propunem sa umplem golurile existente în literatura de specialitate pentru această direcţie de cercetare prin obţinerea unor teoreme de prelungire a operatorilor liniari şi continui dominţi de operatori multivoci, în ipoteze de convexitate şi condiţii de tip interior generalizat.

4.2 Spaţii parţial ordonate

În această secţiune descriem cadrul general de lucru pentru prezentul capitol. Astfel:

- $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{Y}$ sunt spaţii Fréchet
- $K \subset \mathcal{Y}$ este un con punctat, convex, închis, normal cu $\operatorname{int} K \neq \emptyset$
- spaţiul $\mathcal{Y}$ este complet ordonat fie în raport cu relaţia de *ordine tare* indusă de conul K,

$$y_2 \geq y_1 \text{ dacă } y_2 - y_1 \in K, \ \forall y_1, y_2 \in \mathcal{Y},$$

fie în raport cu relaţia de *ordine slabă* indusă de $\operatorname{int} K$

$$y_2 > y_1 \quad \text{dacă} \quad y_2 - y_1 \in \operatorname{int} K, \ \forall y_1, y_2 \in \mathcal{Y}.$$

Secţiunea se încheie cu o prezentare detaliată a celor mai importante prorietăţi ale spaţiilor topologice ordonate în raport cu relaţii de ordine induse de conuri.

4.3 Preliminarii pentru analiza operatorilor multivoci

Această secţiune este dedicată prezentării celor mai importante definiţii şi proprietăţi referitoare la operatori multivoci. Reamintim aici definiţiile conceptelor de: operator multivoc convex, operator multivoc K convex, opertaor multivoc strict, proces convex şi operator multivoc inferior semicontinuu.

Similar cu modul de definire a normei unui operator liniar şi continuu definim norma unui proces convex închis Λ prin

$$\|\Lambda\| := \sup_{x \in \operatorname{Dom} \Lambda} \frac{d(0, \Lambda(x))}{\|x\|} = \sup_{x \in \operatorname{Dom} \Lambda} \inf_{u \in \Lambda(x)} \frac{\|u\|}{\|x\|}.$$

Ca şi lucrări de referinţă în acest domeniu menţionăm [3, 21, 76, 78, 92].

4.4 Teoreme de prelungire a operatorilor liniari şi continui dominaţi de operatori multivoci

În această secţiune obţinem teoreme de prelungire a operatorilor liniari şi continui dominaţii de operatori multivoci convecşi, în ipoteze de interior generalizat. Cadrul de lucru descris în secţiunea 4.2 va fi valabil pentru toate raţionamentele şi rezultatele obţinute în această secţiune.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este dat de următoarea teoremă.

Teorema 4.4.3 (**A.R. Baias**, [8]) Fie $\Lambda : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ un operator multivoc convex. Dacă

$$0 \in \operatorname{sqri}(\operatorname{Dom}(\Lambda)) \quad \text{şi} \tag{4.1}$$

$$\Lambda(0) \geq 0 \ (\text{ i.e. } \forall y \in \Lambda(0) \text{ avem } y \geq 0). \tag{4.2}$$

Atunci există un operator liniar şi continuu $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ astfel încât

$$T(x) \leq \Lambda(x), \ \forall x \in \operatorname{Dom} \Lambda. \tag{4.3}$$

Observaţia 4.4.4 (**A.R. Baias**, [8]) Dacă spaţiul $\mathcal{X}$ este înzestrat cu cea mai fină topologie convexă atunci pentru un operator multivoc $\Lambda : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$, următoarele condiţii sunt echivalente

(a) Λ este inferior semicontinuu în 0;

(b) $0 \in \operatorname{core}(\operatorname{Dom}(\Lambda))$;

(c) $0 \in \operatorname{sqri}(\operatorname{Dom}(\Lambda)) \cap \operatorname{qi}(\operatorname{Dom}(\Lambda))$.

Echivalenţa dintre condiţiile (a) şi (b) rezultă din [19, Proposition 2.1, (d)] în timp ce echivalenţa dintre condiţiile (b) şi (c) este o simplă consecinţă a definiţiilor conceptelor de cvasi-interior şi cvasi-relativ interior tare.

Pentru a ilustra aplicabilitatea Teoremei 4.4.3 prin comparaţie cu condiţiile prezentate în observaţia 4.4.5 considerăm următorul exemplu.

Exemplul 4.4.7 (**A.R. Baias**, [8])
Fie spaţiul Fréchet $\ell^2(\mathbb{N})$ şi fie $\bar{\mathcal{X}} = \{(x_n)_n \in \mathbb{N} \in \ell^2 : x_{2n-1} + x_{2n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$, un subspaţiu liniar închis al lui $\ell^2(\mathbb{N})$.

Definim funcţia multivocă $\Lambda : \ell^2(\mathbb{N}) \rightrightarrows \bar{\mathbb{R}}$ prin

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{dacă } x \in \bar{\mathcal{X}}, \\ \emptyset, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Se verifică cu uşurinţă că Λ este un operator multivoc convex cu $\operatorname{Dom}\Lambda = \bar{\mathcal{X}}$. Deoarece $\operatorname{cone}(\operatorname{Dom}\Lambda) = \bar{\mathcal{X}} \neq \ell^2$ condiţia (4.1) este îndeplinită şi Teorema 4.4.3 poate fi aplicată. Pe de altă parte $0 \notin \operatorname{core}(\operatorname{Dom}\Lambda)$, ceea ce face imposibilă aplicarea rezultatelor similare bazate pe condiţii de tip interior algebric.

Teorema 4.4.8 (Teoremă de tip sandwich)(**A.R. Baias**, [8]) Fie $\Lambda_1, \Lambda_2 : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ doi operatori multivoci convecşi, cu

$$0 \in \operatorname{sqri}(\operatorname{Dom}\Lambda_1 - \operatorname{Dom}\Lambda_2).$$

Dacă

$$\Lambda_2(x) \leq \Lambda_1(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \tag{4.4}$$

atunci există un operator liniar continuu $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ şi există $y_0 \in \mathcal{Y}$ astfel încât

$$\Lambda_2(x) \leq T(x) - y_0 \leq \Lambda_1(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Observaţia 4.4.9 (**A.R. Baias**, [8]) Teorema 4.4.3 poate fi obţinută din Teorema 4.4.8 alegând $\operatorname{Gr}(\Lambda_1) = \operatorname{Gr}(\Lambda)$ şi $\operatorname{Gr}(\Lambda_2) = 0$.

În cele ce urmează descriem cadrul de lucru pentru obţinere rezultatelor referitoare la multiplicatori Lagrange.

Assumption *Fie $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ spaţii Fréchet, cu $\mathcal{Y}$ complet ordonat în raport cu relaţia de ordine tare indusă de conul K şi fie operatorii multivoci $\Lambda : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ şi respectiv $\Gamma : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Z}$.*

Considerăm următoarea problemă de optimizare

$$(P_\Lambda) \quad \inf_{0 \in \Gamma(x)} \Lambda(x).$$

Teorema 4.4.11 (Multiplicatori Lagrange)(**A.R. Baias**, [8]) Pentru problema de optimizare (P_Λ) considerăm operatorul multivoc $\Phi : \mathcal{Z} \rightrightarrows \mathcal{Y}$, definit prin

$$\Phi(z) = (\Lambda \circ \Gamma^{-1})(z) = \{\Lambda(x) : z \in \Gamma(x)\}.$$

Dacă operatorul Φ este convex şi $0 \in \operatorname{sqri}(\operatorname{Dom}(\Phi))$, atunci pentru fiecare μ, soluţie a problemei (P_Λ), există un operator liniar şi continuu $T : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ astfel încât

$$\mu \leq \Lambda(x) + (T \circ \Gamma)(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}. \tag{4.5}$$

4.5 Subgradienţi pentru operatori multivoci

Una dintre cele mai importante direcţii de cercetare ale analizei nenetede constă în obţinerea unor condiţii suficiente care să garanteze existenţa subgradienţilor pentru operatori multivoci. Printre rezultatele de marcă ale acestui domeniu menţionăm [19, 38, 39, 58, 71, 94].

Pentru o prezentare detaliată a noţiunilor de subdiferenţiabilitate pentru funcţii vectoriale şi operatori multivoci menţionăm cărţile lui Mordukhovich [67, 68], care pot fi considerate piatra de temelie a analizei nenetede.

4.5.1 Noţiuni generale, definiţii şi notaţii

Începem această secţiune cu o prezentare detaliată a principalelor noţiuni de subgradienţi.

Definiţia 4.5.1 [19] Fie $\Lambda : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ un operator multivoc. Considerăm $x_0 \in \operatorname{Dom}(\Lambda)$ şi $y_0 \in \mathcal{Y}$ astfel încât $y_0 \leq \Lambda(x_0)$. Un operator liniar şi continuu $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se numeşte *s*ubgradient tare în sensul lui Borwein al opratorului multivoc Λ în punctul (x_0, y_0) dacă

$$T(x - x_0) \leq \Lambda(x) - y_0, \quad \forall x \in \operatorname{Dom}(\Lambda).$$

Mulţimea subgradienţilor tari în sensul lui Borwein ai opratorului multivoc Λ în punctul (x_0, y_0) este notătă prin $\partial^{B-S}_{y_0}\Lambda(x_0)$.

Definiţia 4.5.2 [58] Fie $\Lambda : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ un operator multivoc şi fie $x_0 \in \operatorname{Dom}(\Lambda)$. Un operator liniar şi continuu $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se numeşte *s*ubgradient tare al lui Λ în puntul x_0 dacă

$$T(x - x_0) \leq \Lambda(x) - \Lambda(x_0), \quad \forall x \in \operatorname{Dom}(\Lambda) \setminus \{x_0\}.$$

Mulţimea subgradienţilor tari ai opratorului multivoc Λ în punctul x_0 este notată prin $\partial^S\Lambda(x_0)$.

Tot aici prezentăm şi câteva noţiuni referitoare la conceptul de subgradient slab al unui operator multivoc. Deşi multe dintre aceste noţiuni au fost introduse în contextul spaţiilor liniare, extindem şi generalizăm aceste noţiuni la contextul spaţiilor vectoriale topologice.

4.5.2 Teoreme de existenţă pentru subgradienţi

În acest paragraf furnizăm atât rezultate de existenţă pentru conceptul de subgradient tare în sensul lui Borwein cât şi pentru conceptul de subgradient tare. Cele mai importante rezultate ale acestei secţiuni sunt amintite în cele ce urmează.

Teorema 4.5.7 (**A.R. Baias**, [8]) Fie $\Lambda : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ un operator multivoc convex şi fie $x_0 \in \operatorname{sqri}(\operatorname{Dom}(\Lambda))$. Dacă există $y_0 \in \mathcal{Y}$ astfel încât $y_0 \leq \Lambda(x_0)$ atunci $\partial_{y_0}^{B-S}\Lambda(x_0)$ este nevidă.

Teorema 4.5.8 (**A.R. Baias**, [8]) Fie $\Lambda : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ un operator multivoc convex şi fie $x_0 \in \operatorname{Dom}(\Lambda)$ astfel încât $x_0 \in \operatorname{sqri}(\operatorname{Dom}(\Lambda))$. Atunci $\partial^S\Lambda(x_0)$ este nevidă.

Ipoteza de convexitate din teorema precedentă poate fi relaxată cu uşurinţă, după cum vom vedea în cele ce urmeză.

Teorema 4.5.9 (**A.R. Baias**, [8]) Fie $\Lambda : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ un operator multivoc şi fie $x_0 \in \operatorname{Dom}(\Lambda)$. Dacă există un operator multivoc convex $\Gamma : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ astfel încât

$$0 \in \operatorname{sqri}(\operatorname{Dom}(\Gamma)),\ \Gamma(0) \geq 0 \text{ şi} \tag{4.6}$$

$$\Lambda(x) - \Lambda(x_0) \subset \Gamma(x - x_0) \text{ pentru orice } x \in \mathcal{X} \setminus \{x_0\}, \tag{4.7}$$

atunci $\partial^S\Lambda(x_0)$ este nevidă.

Teorema 4.5.9 are loc şi dacă înlocuim operatorul multivoc Γ cu derivata contingentă a lui Λ.

Observaţia 4.5.11 (**A.R. Baias**, [8]) Aceste teoreme îmbunătăţesc rezultatele obţinute de E. Hernández, şi L. Rodriguez-Martin în [58].

4.6 Teoreme de prelungire pentru procese convexe închise

În această secţiune obţinem teoreme de prelungire pentru procese convexe închise în spaţii normate, cu conservarea normei. Drept consecinţă furnizăm rezultate pentru caracterizarea elementelor de cea mai bună aproximare, în spaţii normate, prin intermediul conurilor convexe închise, utilizând procese convexe.

Teoremele lui Hahn de prelungire a funcţionalelor liniare şi continue sunt extinse la cazul multivoc prin următoarele rezultate.

Teorema 4.6.1 (**A.R. Baias**, T. Trif, [12]) Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu normat, $\mathcal{X}_0$ un subspaţiu liniar al lui $\mathcal{X}$, şi fie $\Gamma_0 : \mathcal{X}_0 \rightrightarrows \mathbb{R}$ un proces convex închis astfel încât

$$\operatorname{Dom}\Gamma_0 = \mathcal{X}_0 \quad \text{şi} \quad \|\Gamma_0\| < \infty. \tag{4.8}$$

Atunci există un proces convex închis $\Gamma : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbb{R}$ ce satisface următoarele proprietăţi:

(i) $\operatorname{Dom}\Gamma = \mathcal{X}$ şi $\|\Gamma\| = 1$;

(ii) $\Gamma(x) = \Gamma_0(x)$ pentru orice $x \in \mathcal{X}_0$;

(iii) $\|\Gamma\| = \|\Gamma_0\|$.

Teorema 4.6.2 (**A.R. Baias**, T. Trif, [12]) Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu normat, K_0 un con convex înschis din $\mathcal{X}$ şi fie $x_0 \in \mathcal{X} \setminus K_0$, cu $d_0 := d(x_0, K_0) = \inf_{x \in K_0} \|x - x_0\|$. Atunci există un proces convex închis $\Gamma : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbb{R}$, ce satisface următoarele proprietăţi:

(i) $\operatorname{Dom}\Gamma = \mathcal{X}$ şi $\|\Gamma\| = 1$;

(ii) $\min \Gamma(x) = 0$ pentru orice $x \in K_0$;

(iii) $\min \Gamma(x_0) = d_0$.

Ca şi o consecinţă a acestei teoreme obţinem următoarea teoremă de caracterizare a elemetelor de cea mai buna aproximare.

Teorema 4.6.3 (**A.R. Baias**, T. Trif, [12]) Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu normat, K_0 un con convex închis din $\mathcal{X}$, $x_0 \in \mathcal{X} \setminus K_0$ şi fie $y_0 \in K_0$. Atunci $y_0 \in \operatorname{pr}_{K_0}(x_0)$ dacă şi numai dacă există un proces convex închis $\Gamma : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathbb{R}$, cu următoarele proprietăţi:

(i) $\operatorname{Dom}\Gamma = \mathcal{X}$ şi $\|\Gamma\| = 1$;

(ii) $\min \Gamma(x) = 0$ pentru orice $x \in K_0$;

(iii) $\min \Gamma(x_0) = \|x_0 - y_0\|$.

Bibliografie

[1] C.D Aliprantis, K.C. Border: *Infinite Dimensional Analysis,* Springer, 1999.

[2] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath: *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance **9(3)**, 203–228, 1999.

[3] J.P. Aubin, H. Frankowska: *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[4] J.P. Aubin, I. Ekeland: *Applied Nonlinear Analisis*, John Wiley and Sons, 1984.

[5] A. Auslender, M. Teboulle: *Asymptotic Cones and Functions in Optimization and Variational Inequalities*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[6] A.R. Baias: *A Note on the Subdifferentiability of Convex Risk Measures. The Case of Conditional Value-at-Risk*, Automation Computers Applied Mathematics **19(2)**, 59-68, 2010.

[7] A.R. Baias: *Some remarks on the generalized mean upper/lower semideviations of order p from a target*, to appear in Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity.

[8] A.R. Baias: *Extension theorems for convex set-valued maps via strong quasi-relative interior conditions*, submitted.

[9] A.R. Baias, D. Duca: *Some remarks on risk functions described by utilities. Alternative proofs*, to appear in Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation.

[10] A.R. Baias, D.M. Nechita: *Looking for an exact difference formula for the Dini-Hadamard-like subdifferential*, Studia Universitatea Babeş-Bolyai, Mathematica **57(3)**, 355-376, 2012.

[11] A.R. Baias, D.M. Nechita: *Old-New Methods for Computing Subdifferential Formulae for Convex Risk Functions*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity **10**, 3-20, 2012.

[12] A.R. Baias, T.Trif: *Extensions of Closed Convex Processes*, submitted.

[13] S. Banach: *Théorie des opérations linéaires*, Monografje Matematyczne **1**, Warszawa, 1932.

[14] P. Barrieu, N. El Karoui: *Optimal derivatives design under dynamic risk measures*, Mathematics of Finance. Contemporary Mathematics **351**, 13-25, 2004.

[15] A. Ben-Tal, M. Teboulle: *Expected utility, penalty functions and duality in stochastic nonlinear programming*, Management Science **32(11)**, 1445–1466, 1986.

[16] A. Ben-Tal, M. Teboulle: *An old-new concept of convex risk measures: the optimized certainty equivalent*, Mathematical Finance **17(3)**, 449–476, 2007.

[17] J.F. Bonnans, A. Shapiro: *Perturbation analysis of optimization problems*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[18] J.M. Borwein: *Continuity and differentiability properties of convex operators*, Proceedings of the London Mathematical Society **44(3)**, 420-444, 1980.

[19] J.M. Borwein: *A Lagrange multiplier theorem and sandwich theorem for convex relations*, Mathematica Scandinavica **48**, 189-204, 1981.

[20] J.M. Borwein: *On the Hahn-Banach extension property*, Proceedings of the American Mathematical Society **86(1)**, 42-46, 1982.

[21] J.M. Borwein: *Convex relations in analysis and optimization*, NATO Advanced Study Institute on Generalized Concavity in Optimization and Economics, North Holand Publisher, 1982.

[22] J.M. Borwein, V. Jeyakumar, A.S. Lewis, H. Wolkowicz: *Constrained approximation via convex programming*, Preprint, University of Waterloo, 1988.

[23] J.M. Borwein, A.S. Lewis: *Partially finite convex programming, part I: Quasi relative interiors and duality theory*, Mathematical Programming **57**, 15–48, 1992.

[24] J.M. Borwein, A.S. Lewis: *Convex Analysis and Nonlinear Optimization, Theory and Examples*, Springer, 2000.

[25] J.M. Borwein, J.D. Vanderwerff: *Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples*, Cambridge University Press, New York, 2010.

[26] R.I. Boţ: *Conjugate Duality in Convex Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Vol. **637**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.

[27] R.I. Boţ, S.M. Grad, G. Wanka: *Duality in Vector Optimization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

[28] R.I. Boţ, E.R. Csetnek: *Regularity conditions via generalized interiority notions in convex optimization: new achievements and their relations to some classical statements*, Optimization 61(1), 35–65, 2012.

[29] R.I. Boţ, E.R. Csetnek, A. Moldovan: *Revisiting some duality theorems via the quasirelative interior in convex optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications **139(1)**, 67–84, 2008.

[30] R.I. Boţ, E.R. Csetnek, G. Wanka: *Regularity conditions via quasi-relative interior in convex programming*, SIAM Journal on Optimization **19(1)**, 217–233, 2008.

[31] R.I. Boţ, N. Lorenz, G. Wanka: *Dual representations for convex risk measures via conjugate duality*, Journal of Optimization Theory and Applications **144(2)**, 185–203, 2010.

[32] R.I. Boţ, N. Lorenz, G. Wanka: *Optimality conditions for portfolio optimization problems with convex deviation measures as objective functions*, Taiwanese Journal of Mathematics **13(2A)**, 515–533, 2009.

[33] R.I. Boţ, D.M. Nechita: *On the Dini-Hadamard subdifferential of the difference of two functions*, Journal of Global Optimization, **50(3)**, 485–502, 2011.

[34] R.I. Boţ, A.R. Frătean (Baias): *Looking for appropriate qualification conditions for subdifferential formulae and dual representations for convex risk measures*, Mathematical Methods of Operations Research, **74(2)**, 191–215, 2011.

[35] Ş. Cobzaş, C. Mustăţa: *Norm preserving extension of convex Lipschitz functions*, Journal of Approximation Theory **24**, 555–564, 1978.

[36] Ş. Cobzaş, C. Mustăţa: *Extension of Lipschitz functions and best approximation*, Research on the Theory of Allure, Approximation, Convexity and Optimization (E. Popoviciu ed.), Srima Publishers, Cluj-Napoca, 3–21, 1999.

[37] E.R. Csetnek: *Overcoming the failure of the classical generalized interior-point regularity conditions in convex optimization. Applications of the duality theory to enlargements of maximal monotone operators*, Logos Verlag Berlin, 2010.

[38] G.Y. Chen, B.D. Craven: *A vector variational inequality and optimization over an efficient set*, Methods and Models of Operation Research **34**, 1–12, 1990.

[39] G.Y. Chen, J. Jahn: *Optimality conditions for set-valued optimization problems*, Mathemathical Methods of Operation Research **48**, 187–200, 1990.

[40] P. Cheridito, T. Li: *Dual characterizations of properties of risk measures on Orlicz hearts*, Mathematics and Financial Economics **2**, 29–55, 2008.

[41] P. Cheridito, T. Li: *Risk measures on Orlicz hearts*, Mathematical Finance **19**, 189–214, 2009.

[42] M.M. Day: *Normed Linear Space,* Springer-Verlag, Berlin, 1962.

[43] F. Delbaen: *Coherent risk measures on general probability spaces*, Advances in Finance and Stochastics **19**, 1–37, 2002.

[44] W-S. Du: *A vector variational inequality and optimization over an efficient set*, Nonlinear Analysis **71**, 3176–3184, 2009.

[45] D. Duca: *Multicriteria optimization in complex spaces*, Casa cărţii de ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005.

[46] I. Ekeland, R.Temam: *Convex analysis and variational problems* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976.

[47] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santaluca, J. Pelant, V. Zizler: *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CSM Books in Mathematics/Ouverages de Mathématiques de la SMC **8**, Springer-Verlag, New York, 2001.

[48] W. Fenchel: *On conjugate convex functions*, Canadian Journal of Mathematics, **1**, 73–77, 1949.

[49] D. Filipović, M. Kupper: *Monotone and cash-invariant convex functions and hulls*, Insurance: Mathematics and Economics **41(1)**, 1-16, 2007.

[50] D. Filipović, G. Svindland: *Convex risk measures on L^p*, Preprint, www.math.lmu.de/ filipo/PAPERS/crmlp.

[51] G.B. Folland: *Real Analisis. Modern Techniques and their Applications*, John Wiley and sons,New York, 1999.

[52] H. Föllmer, A. Schied: *Stochastic Finance. A Introduction in Discrete Time*, Walter de Gruyter, Berlin, 2002.

[53] M. Fritelli, E. Rosazza Gianin: *Putting order in risk measures*, Journal of Banking and Finance **26(7)**, 1473–1486, 2002.

[54] D. Gale, H.W. Kuhn, A.W. Tucker: *Linear Programming and the Theory of Games*, in: TC Koopman (ed.), Activity Analysis of Production and Allocation, John Wiley and Sons, New York, 317–359, 1951.

[55] A. Grad: *Quasi-relative interior-type constraint qualifications ensuring strong Lagrange duality for optimization problems with cone and affine constraints*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **361(1)**, 86-95, 2010.

[56] F. Giannessi: *Constrained Optimization and Image Space Analysis, Vol. 1. Separation of Sets and Optimality Conditions*, Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering Vol. **49**, Springer, New York, 2005.

[57] H. Hahn: *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen*, J. Reine Angew. Math. **157**, 214–229, 1927.

[58] E. Hernández, L. Rodriguez-Martin: *Weak and strong subgradients of set-valued maps*, Journal of Optimization Theory and Applications **149(2)**, 352–365, 2011.

[59] R.B. Holmes: *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[60] A.D. Ioffe: *Nonsmooth analysis: Differential calculus of nondifferentiable mappings*, Transactions of the American Mathematical Society **266**, 1–56, 1981.

[61] G. Jameson: *Ordered Linear Spaces*, Lecture Notes in Mathematics Systems Vol. **141**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1970.

[62] D. Kuroiwa: *On set-valued optimization*, Nonlinear Analysis **47**, 1395–1400, 2001.

[63] M. Lassonde: *Hahn-Banach theorems for convex functions*, Nonconvex Optimization and Its Applications **26**, 135–145, 1998.

[64] M.A. Limber, R.K. Goodrich: *Quasi interiors, Lagrange multipliers, and L^p spectral estimation with lattice bounds*, Journal of Optimization Theory and Applications **78(1)**, 143–161, 1993.

[65] H.J. Lüthi, J. Doege: *Convex risk measures for portfolio optimization and concepts of flexibility*, Mathematical Programming, **104(2-3)**, 541–559, 2005.

[66] J.A. McShane: *Extension of range of functions*, Bulletin of the American Mathematical Society **40**, 837–842, 1934.

[67] B.S. Mordukhovich: *Variational analysis and generalized differentiation. I. Basic theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[68] B.S. Mordukhovich: *Variational analysis and generalized differentiation. II. Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[69] J.J. Moreau: *Fonctions convexes en dualité*, (multigraph), Faculté des Sciences, Séminaires de Mathématiques, Université de Montpellier, Montpellier, 1962.

[70] J.W. Peng, H.W.J. Lee, W.D. Rong, X.M. Yang: *A generalization of Hahn-Banach extension theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **302**, 441–449, 2005.

[71] J.W. Peng, H.W.J. Lee, W.D. Rong, X.M. Yang: *Hahn-Banach theorems and subgradients of set-valued maps*, Mathemathical Methods of Operation Research **61**, 281–297, 2005.

[72] J.P. Penot, M. Thera: *Semi-continuous mappings in general topology*, Archiv der Mathematik **38**, 158–166, 1982.

[73] G.Ch. Pflug: *Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk. Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[74] G.Ch. Pflug: *Subdifferential representation of risk measures*, Mathematical Programming **108(2-3)**, 339–354, 2007.

[75] G.Ch. Pflug, W. Römisch: *Modeling, Measuring, and Managing Risk*, World Scientific Publishing, Singapore, 2007.

[76] A.L. Peressini: *Ordered topological vector spaces*, Harper and Row, New-York-London, 1967.

[77] S. Rachev, S.Stoyanov and F. Fabozzi: *Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization*, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2008.

[78] S. Robinson: Normed convex processes, Transactions of the American Mathematical Society **174**, 127–140, 1972.

[79] R.T. Rockafellar: *Duality theorems for convex functions*, Bulletin of the American Mathematical Society **70**, 189–192, 1964.

[80] R. T. Rockafellar: *Convex Analysis*, Priceton University Press, Priceton 1970.

[81] R.T. Rockafellar, S. Uryasev: *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk **2(3)**, 21–42, 2000.

[82] R.T. Rockafellar, S. Uryasev: *Conditional value-at-risk for general loss distributions*, Journal of Banking and Finance **26(7)**, 1443–1471, 2002.

[83] R.T. Rockafellar, S. Uryasev, M. Zabarankin: *Optimality conditions in portofolio analysis with general deviation measures,* Mathematical Programming **108(2-3)**, Ser.B, 515–540, 2006.

[84] R.T. Rockafellar, S. Uryasev, M. Zabarankin: *Generalized deviations in risk analysis*, Finance and Stochastics **10(1)**, 51–74, 2006.

[85] R.T. Rockafellar, R.J-B. Wets: *Variational Analysis*, Fundamental Principles in Mathematical Sciences Vol. **317**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[86] W. Rudin: *Functional Analysis,* McGraw-Hill, New-York, 1973.

[87] W. Ruess: *Ein Dualkegel für p-konvexe topologische lineare Räume*, Geselschaft für Mathematik und Datenverarbeitung **60**, 1973.

[88] A. Ruszczynski, A. Shapiro: *Optimization of convex risk functions*, Mathematics of Operations Research **31(3)**, 433–452, 2006.

[89] A. Ruszczynski, A. Shapiro: *Optimization of risk measures*, in G.Calafiore and F. Dabbene (eds.) Probabilistic and Randomized Methods for Design under Uncertainty, Springer-Verlag, London, 119–157 2006.

[90] I. Singer: *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspeces*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[91] S. Simons: *Extended and sandwich versions of the Hahn-Banach theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **21**, 112–122, 1968.

[92] C. Ursescu: *A multifunction with convex closed graph*, Czechoslovak Mathematical Journal **25**, 438–441, 1975.

[93] N. Vogelpoth: L^0 *Convex Analysis and Conditional Risk Measures*, Phd. Thesis, University of Wien, 2009.

[94] X.Q. Yang: *A Hahn-Banach theorem in ordered linear spaces and its applications*, Optimization **25**, 1–9, 1992.

[95] S.S. Wang: *A separation theorem of convex cone on ordered vector space and its applications*, Acta Mathematicae Applicatae Sinica **9**, 309–318, 1986.

[96] C. Zălinescu: *Duality for vectorial nonconvex optimization by covexification and applications*, Analele Ştiinţifice ale Universităţii "Al. I. Cuza" din Iaşi **29**, 15–34, 1983.

[97] C. Zălinescu: *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, Singapore, 2002.

[98] C. Zălinescu: *Hahn-Banach extension theorems for multifunctions revisted*, Mathemathical Methods of Operation Research **68**, 493–508, 2008.

[99] M. Zhiqing: *Hahn-Banach theorems of set-valued map*, Applied Mathematics and Mechanics **19(1)**, 59–66, 1998.

[100] J. Zowe: *Linear maps majorized by a sublinear map*, Arch. Math. **26**, 637–645, 1975.

[101] J. Zowe: *Sandwich theorem for convex operators with values in an ordered vector space*, Journal of Mathemathical Analysis and Applications **66**, 282–296, 1978.