

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE PSIHOLOGIE ȘI ȘTIINȚE ALE EDUCAȚIEI
ȘCOALA DOCTORALĂ „EDUCAȚIE, REFLECȚIE, DEZVOLTARE”

TEZĂ DE DOCTORAT

(rezumat)

VALORIFICAREA REPREZENTĂRILOR GRAFICE REALIZATE DE ELEVI ÎN
STUDIUL DISCIPLINEI MATEMATICĂ ȘI EXPLORAREA MEDIULUI.
APLICAȚII PENTRU COMPETENȚA DE REZOLVARE DE PROBLEME LA
ELEVII DIN CICLUL PRIMAR

Coordonator științific,
Prof. univ. dr. Mușata-Dacia Bocoș

Doctorand,
Ana-Maria Tilca (căs. Purcar)

Cluj-Napoca
2025

Cuprins

Argument.....	5
CAPITOLUL I COMPETENȚE ȘI CURRICULUM CENTRAT PE COMPETENȚE.....	6
I.1. Importanța curriculumului centrat pe competențe	6
I.1.1. Competența – element central al curriculumului	6
I.1.2. Componentele structurale ale competențelor	8
I.1.3. Clasificarea competențelor	8
I.2. Formarea și dezvoltarea competențelor	9
I.3. Perspective curriculare europene: achiziții necesare absolvenților secolului XXI	9
I.4. Gândirea critică, gândirea creativă și rezolvarea de probleme în diferite contexte de viață – achiziții fundamentale	10
CAPITOLUL II REZOLVAREA DE PROBLEME: ACHIZIȚIE FUNDAMENTALĂ ÎN STUDIUL MATEMATICII.....	11
II.1. Matematica: știința relațiilor cantitative.....	11
II.2. Rezolvarea de probleme – achiziție fundamentală a absolvenților și a angajaților secolului XXI	11
II.3. Dezvoltarea capacității de rezolvare de probleme, în studiul matematicii, pe parcursul învățământului primar	12
II.4. Problema și problema matematică.....	13
II.4.1. Ce este o „problemă”?	13
II.4.2. Problema matematică.....	13
II.4.3. Clasificări generale ale problemelor matematice.....	13
II.4.4. Etapele rezolvării problemelor matematice	14
II.5. Componentele structurale ale problemelor matematice	15
II.5.1. Informațiile care prezintă conținutul problemei: caracteristici și implicații în elaborarea strategiei de rezolvare	15
II.5.2. Relațiile dintre cunoscute și necunoscute: componente structurale ale problemelor matematice	16
II.5.3. Sarcina de lucru: solicitarea care orientează elaborarea strategiei de rezolvare	18
II.6. Înțelegerea problemelor matematice	18
II.6.1. Cuvintele-cheie, indicatori ai operațiilor matematice necesare pentru rezolvarea problemei	19

II.6.2. Factori determinanți ai dificultăților de înțelegere a problemelor a căror soluție se obține prin <i>compararea</i> a două mulțimi de elemente (<i>compare problems</i>).....	20
CAPITOLUL III REPREZENTĂRILE VIZUALE – INSTRUMENTE ALE REZOLVĂRII PROBLEMELOR MATEMATICE	23
III.1. Teoria simulării mentale.....	23
III.2. Imaginile mentale, vizualizarea (<i>visualization</i>) și raționamentul vizual (<i>visual reasoning</i>): delimitări conceptuale	23
III.3. Imaginile mentale: factor determinant al comprehensiunii textului citit	25
III.4. Reprezentările vizuale: clasificări și implicații în procesul rezolvării problemelor matematice.....	25
III.5. Reprezentările grafice realizate de elevi – expresia vizuală doveditoare a înțelegerii problemelor matematice.....	26
III.6. „Să facem un desen!” – etapă complementară a procesului rezolutiv	27
CAPITOLUL IV PREZENTAREA CERCETĂRII PEDAGOGICE „IMPLICAȚIILE UTILIZĂRII REPREZENTĂRIILOR GRAFICE REALIZATE DE ELEVII CLASEI I ASUPRA ÎNȚELEGERII ȘI REZOLVĂRII PROBLEMELOR MATEMATICE A CĂROR SOLUȚIE SE OBȚINE PRIN COMPARAREA ȘI ÎNSUMAREA A DOUĂ MULȚIMI DE ELEMENTE”	31
IV.1. Metodologia cercetării pedagogice.....	31
IV.1.1. Scopul și obiectivele cercetării	31
IV.1.2. Întrebările de cercetare și ipotezele asociate acestora.....	31
IV.1.3. Sistemul metodologic.....	32
IV.1.4. Variabile și instrumente de cercetare	33
IV.1.5. Eșantionul de participanți	34
IV.1.6. Eșantionul de conținut.....	34
IV.1.7. Etapele cercetării și procedura de investigație.....	36
IV.2. Analiza datelor și interpretarea rezultatelor	37
IV.2.1. Analiza nivelului de dezvoltare a <i>capacității</i> elevilor participanți <i>de înțelegere a unui text citit</i>	37
IV.2.2. Clasificarea <i>soluțiilor problemelor</i> determinate de elevii participanți în pretest și în posttest	38
IV.2.3. Analiza principalelor strategii de rezolvare utilizate de elevii de clasa I pentru determinarea <i>soluțiilor problemelor</i> în pretest și posttest	40
IV.2.4. Analiza cantitativă a reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor, în posttest	50

IV.2.5. Analiza vizuală a reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor în posttest	52
IV.2.6. Interpretarea datelor cercetării în vederea formulării răspunsurilor la întrebările de cercetare.....	55
IV.3. Concluzii.....	63
IV.3.1. Concluzii referitoare la contribuțiile personale – teoretice și practic-aplicative	63
IV.3.2. Concluziile cercetării	64
IV.3.3. Concluzii generale	66
IV.3.4. Limitele cercetării	67
IV.3.5. Direcții viitoare de cercetare	67
Glosar de termeni.....	69
Referințe bibliografice.....	71

Argument

Capacitatea de rezolvare de probleme se constituie ca achiziție cognitivă fundamentală pentru formarea și dezvoltarea competenței matematice, științifice și tehnologice, una din competențele-cheie necesare viitorilor absolvenți în scopul integrării cu succes în mediul social și profesional. Dobândită pe parcursul ciclului achizițiilor fundamentale, în studiul disciplinei Matematică și explorarea mediului, capacitatea de rezolvare de probleme este descrisă în programele școlare ca obiectiv al curriculumului pentru învățământ primar.

Nivelul de dezvoltare a capacității elevilor de rezolvare de probleme a fost evaluat în cadrul testărilor internaționale standardizate, rezultatele înregistrate de elevii români la testele PISA, în 2018 și 2022 (OECD, 2023) evidențiind un nivel sub media OECD al achizițiilor cognitive necesare înțelegerii unui text citit și al achizițiilor matematice și științifice. Rezultate similare au fost înregistrate de elevii români și la testarea internațională TIMSS (Tendențe în domeniul Studiilor Matematice și Științifice Internaționale), în 2019. Dragoș Iliescu, unul dintre coordonatorii secțiunii românești a testării internaționale din 2019, constata că elevii români reușesc să rezolve cu succes o problemă formulată din punct de vedere matematic, fiind, însă, nefuncționali în a rezolva probleme care descriu contexte cotidiene de viață (Ion, 2020). Deși elevii români de clasa a IV-a au demonstrat, la testarea TIMSS din 2023, performanțe semnificativ îmbunătățite față de performanțele obținute la edițiile anterioare ale testării (Ministerul Educației și Cercetării, 2024; von Davier et al., 2024), observațiile curente din timpul practicii educaționale evidențiază multiplele dificultăți cu care elevii se confruntă atunci când sunt solicitați să rezolve diferite tipuri de probleme matematice. Este, așadar, necesară înțelegerea în profunzime a comportamentului cognitiv, a raționamentului utilizat de elevi, dar și a cauzelor care determină apariția principalelor greșeli pe care aceștia le fac pe parcursul rezolvării problemelor matematice.

Pe baza acestor considerente, prezenta lucrare își propune să ofere o perspectivă complementară asupra modalităților prin care poate fi apreciată acuratețea înțelegerii conținutului problemelor matematice de către elevii de clasa I, dar și un instrument accesibil profesorilor pentru învățământul primar, care să permită identificarea erorilor ce pot apărea în diferitele etape ale procesului rezolutiv.

CAPITOLUL I

COMPETENȚE ȘI CURRICULUM CENTRAT PE COMPETENȚE

I.1. Importanța curriculumului centrat pe competențe

De-a lungul timpului, termenul „curriculum” a fost utilizat cu înțelesul de parcurs educațional, de curs de studiu desfășurat într-o instituție de învățământ (Bocoș & Jucan, 2019). Din perspectiva „vechii educații” curriculumul desemna ansamblul documentelor oficiale ce descriau conținuturile învățării (Crețu, 1994).

Pedagogul american John Dewey (1902/1977) s-a opus abordării fragmentate a cunoașterii prin intermediul disciplinelor școlare care prezintă elevului cunoștințele gata elaborate, clasificate și organizate după principiile gândirii adultului, în opoziție cu experiența limitată a copilului. Pedagogul american sublinia că un curriculum cu caracter formativ ar trebui să reprezinte mai mult decât suma unor conținuturi, cuprinzând totalitatea experiențelor în urma cărora elevii dobândesc cunoștințele. Franklin Bobbitt (1918) a descris curriculumul din perspectiva achizițiilor specifice ce trebuie dobândite pentru desfășurarea cu succes a activităților profesionale. Dobândirea abilităților, atitudinilor, deprinderilor, valorilor și a cunoștințelor necesare desfășurării activităților profesionale se va realiza prin parcurgerea experiențelor de învățare organizate și desfășurate în cadrul educației școlare. Aceste achiziții operaționale au fost descrise ulterior drept competențe, constituindu-se ca obiective ale curriculumului. Așadar, curriculumul va reprezenta o serie de experiențe pe care copiii și tinerii le vor parcurge pentru atingerea acestor obiective. Proiectarea și structurarea parcursului educațional descris de Franklin Bobbitt accentuează ideea curriculumului centrat pe competențe.

Câteva decenii mai târziu, transformările produse la nivelul societății ca urmare a evoluției științifice și tehnologice, a globalizării și multiplicării domeniilor cunoașterii, au modificat specificul activităților profesionale. Schimbările determinate de dezvoltarea tehnologică au permis trecerea treptată de la sarcinile de lucru algoritmice către sarcinile euristice, care solicită abilități de experimentare, gândire critică și inovatoare (Senge, 2000/2016).

Caracterul pragmatic al curriculumului centrat pe formarea competențelor asigură legătura dintre conținuturile și finalitățile educaționale. Astfel, învățarea școlară devine relevantă, stimulând motivația celor care învață, predarea detașându-se astfel de transmiterea anostă a conținuturilor gata elaborate (Bocoș & Jucan, 2019).

I.1.1. Competența – element central al curriculumului

În jurul anilor '50, abordarea behavioristă a învățării considera comportamentul (cognitiv al) elevului ca fiind răspunsul la stimulii exteriori, reprezentați, în cazul educației școlare, de cunoștințele predate. Astfel, comportamentul observabil a devenit indicatorul dobândirii achizițiilor școlare. Operaționalizarea obiectivelor educației cuantifica măsura dobândirii achizițiilor cognitive, prin indicarea secvenței comportamentale ce putea fi direct observată și evaluată (Cucoș, 1996). Obiectivele simple descriau comportamente cognitive cum sunt

cunoașterea și înțelegerea informațiilor, iar cele cu grade mai ridicate de complexitate vizau aplicarea cunoștințelor în practică, analiza, sinteza și evaluarea informațiilor. Descrierea obiectivă a modificărilor ce urmau a fi produse în comportamentul elevului a înlocuit enumerarea rigidă a noțiunilor transmise educabililor și a capacităților ce urmau a fi formate (Planchard, 1969/1976). Practica operaționalizării obiectivelor a fost adesea supralicitată în activitatea didactică, comportamentele indicate prin obiectivele operaționale devenind criterii de evaluare care indicau rezultatele cantitative ale învățării, în detrimentul celor calitative.

În anii '60, cognitivismul considera comportamentul drept rezultat al proceselor interioare ale subiectului, fără a-l limita la răspunsul față de un stimul exterior (Doron & Parot, 1991/2006).

Raportându-se la modificările așteptate în comportamentul elevului, ca rezultate ale procesului instructiv-educativ, Émile Planchard (1969/1976) a descris trei tipuri de achiziții: achiziții de ordin cognitiv, afectiv și atitudinal, componente ale unei structuri operaționale ce oferă posibilitatea de acțiune adecvată în diferite situații. Această structură operațională care articulează în mod sistemic o componentă cognitivă, o parte aplicativă care folosește elementele cognitive și atitudini și valori, a fost descrisă în literatură drept competență. Îndeplinirea unei sarcini de lucru presupune mobilizarea resurselor de ordin cognitiv, practic-aplicativ și atitudinal-valoric în scopul rezolvării unei probleme specifice (Dulamă, 2010). Componentele competenței se însușesc global, nu fragmentar, neputând fi separate și tratate individual ca părți de sine stătătoare. Competența în sine, în afara contextelor în care este mobilizată, nu există. Abordarea învățării din perspectiva formării competențelor a necesitat contextualizarea conținuturilor în funcție de situațiile concrete care solicită punerea în act a competenței, elevul realizând, astfel, conexiuni cu experiența sa concretă (Manolescu, 2010; Badea, 2010; Dulamă, 2010).

În literatura de specialitate, competențele au fost definite ca structuri operaționale, care integrează cunoștințe, deprinderi de lucru și atitudini intercorelate și mobilizate cu succes în diverse contexte, în scopul îndeplinirii unei sarcini de lucru sau a rezolvării eficiente a unei probleme (Bocoș, 2021; Bocoș & Jucan, 2019; Ionescu, 2007; Niculescu, 2005; Parry, 1996; Perrenoud, 1998).

Constituindu-se ca obiective ale curriculumului, competențele au fost definite și în documentele oficiale care orientează politicile educaționale la nivel european și național. Atât *Recomandarea Parlamentului European și a Consiliului* din 23 aprilie 2008 privind stabilirea *Cadrului european al calificărilor pentru învățarea de-a lungul vieții*, cât și *Legea învățământului preuniversitar*, nr. 198/2023, Art. 85., alin. (1) descriu competențele drept capacitatea de utilizare a unui ansamblu multifuncțional și transferabil de cunoștințe, deprinderi/ abilități și atitudini, necesare pentru adaptarea, integrarea și participarea activă la viața socială, culturală și politică.

Sintetizând cele de mai sus, în lucrarea de față vom opera cu următoarea definiție de lucru: competența reprezintă un ansamblu integrat de achiziții (cunoștințe, deprinderi practice, abilități, atitudini, capacități sociale și de cooperare) transferabile, însușite în viziune sistemică, global și mobilizate în scopul desfășurării cu succes a unei activități sau a unei sarcini de lucru.

I.1.2. Componentele structurale ale competențelor

Descrisă ca un ansamblu integrat și operațional de componente, competența integrează:

- elemente de factură cognitivă/ intelectuală: a ști;
- structuri psihomotorii – deprinderi și abilități practice: a face;
- elemente afectiv-atitudinale: motivația, atitudinile, valorile și dispozițiile emoționale: a fi, a deveni etc.

Aceste componente pot fi dobândite sau formate anterior articulării lor într-un ansamblu coerent, ele organizându-se și structurându-se în funcție de solicitarea practică apărută la un moment dat, într-un context particular, adesea asimilat rezolvării de probleme (Bocoș & Jucan, 2019; Bîrzea, 2010).

Componenta cognitivă/ intelectuală reprezintă mai mult decât cumulumul *cunoștințelor declarative/ factuale* (a informațiilor gata elaborate). Dan Badea (2010) a descris *cunoștințele procedurale* (moduri de operare puse în practică) și *cunoștințele strategice* (care permit luarea unei decizii cu privire la ce cunoștințe declarative sau procedurale este nevoie a fi mobilizate în atare context).

Acțiunea practică (ce implică abilitățile, deprinderile) este antrenată de cunoaștere și de scopul acțiunii. Deprinderile practice de lucru sunt inoperante în absența unei baze solide de cunoștințe.

Atitudinile și valorile constituie componenta reflexivă a competenței care orientează activitatea practică prin responsabilizarea subiectului față de credințele și normele vieții personale, sociale și profesionale (Badea, 2010).

I.1.3. Clasificarea competențelor

Începând cu anul 2011, competențele au fost introduse în programele școlare din România, constituindu-se ca finalități care orientează desfășurarea procesului instructiv-educativ. Acestea au fost clasificate în *competențe generale*, formulate pe discipline, pentru mai mulți ani de studiu și *competențe specifice*, derivate din competențele generale, formulate pe discipline, pentru un an de studiu. Din perspectiva domeniului științific ale cărui achiziții le integrează, competențele pot fi *disciplinare*, încorporând achiziții specifice unei anumite discipline sau *interdisciplinare*, integrând achiziții specifice mai multor discipline (Dulamă, 2010).

Eliza Dulamă (2010) a descris *competențele virtuale*, care integrează cunoștințe declarative, procedurale și atitudini, care nu au fost aplicate în practică (un elev care, deși știe cum funcționează o busolă, nu a folosit vreodată una) și *competențele in act*, care permit luarea unei decizii și acțiunea în diferite situații cu ajutorul propriilor achiziții cognitive. Totodată, Dulamă (2010) menționează *competențele de tip reproductiv*, care presupun realizarea unei sarcini de lucru pe baza unui plan sau a unei scheme și *competențele de tip productiv* care presupun ducerea la bun sfârșit a unor sarcini cu un înalt grad de dificultate, în absența unui plan prestabilit, permițând desfășurarea unor sarcini complexe, cum sunt rezolvările de probleme, care necesită aportul creativității și al gândirii flexibile și divergente, în detrimentul celei algoritmice.

I.2. Formarea și dezvoltarea competențelor

Toate activitățile umane sunt orientate de anumite scopuri, a căror realizare începe cu anticiparea mentală a rezultatului așteptat și cu stabilirea etapelor de lucru. În funcție de scopul asumat, sunt implicate mai multe grade de expertiză ale aceleiași competențe. De exemplu, deși realizarea unei figurine de origami reclamă mobilizarea aceluiași resurse, atât de către novice, cât și de către expert, cei doi vor realiza produse diferite. Deși novicele va respecta întocmai etapele de lucru în realizarea figurinei de hârtie, expertul va sesiza anumite caracteristici ale materialului sau ale formei, utilizând pe parcursul realizării figurinei modele mentale de execuție dobândite în urma experiențelor repetate. Novicelui „îi scapă” aceste aspecte calitative secundare, atenția sa concentrându-se pe respectarea cu strictețe a etapelor de lucru ce conduc la obținerea produsului final. Așadar, pentru a învăța pe cineva utilizarea tehnicii origami, este importantă identificarea principalelor cunoștințe și deprinderi de lucru ce urmează a fi dobândite și formate.

Depășind etapa însușirii fragmentate a cunoștințelor și a formării deprinderilor practice, Roegiers (1998) propune desfășurarea unor *activități de integrare*. Printr-o sarcină de lucru problematizantă elevul va integra componentele cognitive, acționale și atitudinale, dobândite secvențial. Este evitată, așadar, reproducerea pasivă a unor cunoștințe ori aplicarea algoritmică a unor etape de lucru, determinând elevul să realizeze conexiuni noi, inedite între achizițiile existente în repertoriul cognitiv.

Activitățile de integrare diferă de situațiile de învățare prin faptul că ultimele au ca scop dobândirea secvențiază a unor părți ale competenței, în schimb, activitățile de integrare abordează competența global, având un grad mai mare de complexitate. În activitățile de integrare se pot forma și dezvolta simultan, mai multe tipuri de competențe (Dulamă, 2010).

I.3. Perspective curriculare europene: achiziții necesare absolvenților secolului XXI

Începutul secolului XXI a fost marcat de progresul tehnologiei și de dezvoltarea internetului și a rețelelor de socializare care au generat schimbări la nivelul comunicării și al relațiilor interumane. Varietatea socio-culturală și libertatea de mișcare și de angajare a cetățenilor comunității europene au determinat orientarea politicilor educaționale înspre identificarea unui set de achiziții care să asigure succesul reușitei personale și profesionale. *Recomandarea Parlamentului European și a Consiliului* din 23 aprilie 2008 a descris un set de opt competențe-cheie, achiziții transferabile, aplicabile în diverse contexte socio-culturale, ce pot fi dobândite atât de către tinerii care finalizează învățământul obligatoriu sau învățământul superior, cât și de către adulți, în scopul educării și formării profesionale.

Contextul socio-economic, marcat de restricțiile impuse de pandemia de COVID-19 și de dezvoltarea fulminantă a inteligenței artificiale (IA) a determinat o schimbare de perspectivă asupra activităților profesionale. Analizele realizate de OECD (2019, 2020) și de World Economic Forum (2023) au indicat scăderea ponderii sarcinilor rutiniere și creșterea semnificativă a ponderii sarcinilor de lucru creative, de tip analitic, cărora IA cu greu le-ar putea face față, solicitând, operatorilor umani un grad ridicat gândire flexibilă și creativitate în vederea rezolvării de

probleme în diferite contexte profesionale și personale. Abordarea curriculară propusă de OECD (*Future of Education and Skills: Education 2030*) subliniază importanța dobândirii unor capacități acționale specifice (*skills*), ca părți integrative ale competențelor (achiziții superioare priceperilor și deprinderilor de lucru, cu rol important în mobilizarea resurselor cognitive necesare îndeplinirii unui obiectiv). *OECD Learning Compass 2030* descrie principalele achiziții (*skills*) pe care viitorii absolvenți trebuie să le dobândească în vederea atingerii bunăstării și a împlinirii de sine:

- **cognitive și metacognitive:** gândirea critică, gândirea creativă, capacitatea de a învăța să înveți și de autoreglare cognitivă;
- **socio-emoționale:** empatia, auto-eficacitatea, responsabilitatea și capacitățile colaborative;
- **practic-aplicative:** obiectivate la nivelul utilizării eficiente a noilor informații și a dispozitivelor specifice tehnologiei comunicării.

Noua perspectivă curriculară descrisă de OECD (2020) pentru deceniul 2020–2030 aduce în prim-plan factorul individual, accentul mutându-se de pe acceptarea și promovarea multiculturalității, pe învățarea relevantă pentru sine și pentru bunăstarea individuală. În această paradigmă împlinirea individuală nu mai este sinonimă reușitei profesionale și asumării unui anume statut social; ci se construiește pentru sine și prin sine fiind, apoi, validată și valorificată de societate.

I.4. Gândirea critică, gândirea creativă și rezolvarea de probleme în diferite contexte de viață – achiziții fundamentale

Folosirea, la scară largă a inteligenței artificiale a redefinit cerințele pieței forței de muncă, gândirea critică, creativitatea și rezolvarea de probleme fiind cele mai căutate abilități în rândul angajaților (Vincent-Lancrin et al., 2019).

Procese cognitive de nivel superior, atât gândirea critică (capacitatea de chestionare, analiză, interpretare și evaluare a diferitelor informații sau aspecte ale realității), cât și creativitatea (capacitatea de inovare, de concepere și realizare de produse originale) sunt implicate în identificarea și soluționarea inedită a diferitelor tipuri de probleme (Bocoș, 2021; Mih, 2018; Murawski, 2014; Ruggiero, 2012). Rezolvarea de probleme a fost descrisă ca potențial cognitiv de identificare și analiză critică a unei situații necunoscute, urmată de adoptarea unei decizii referitoare la modalitatea de soluționare și de acțiunea rezolutivă propriu-zisă (Vincent-Lancrin et al., 2019). Astfel, achizițiile de ordin cognitiv și metacognitiv sunt mobilizate de gândirea critică și creativă în scopul rezolvării de probleme.

La nivelul curriculumului formal, rezolvarea de probleme este abordată, cu precădere, în studiul disciplinelor științifice, cum sunt matematica, fizica, chimia etc. Din perspectiva cadrului teoretic oferit de *PISA 2022 Mathematics Framework* (OECD, 2022), matematica se prezintă ca disciplină cu rol esențial în dobândirea și formarea achizițiilor necesare integrării sociale și profesionale a tinerilor secolului XXI, rezolvarea de probleme constituindu-se ca un capitol de sine stătător, analizat în demersuri ample de cercetare și descris de literatura de specialitate.

CAPITOLUL II

REZOLVAREA DE PROBLEME: ACHIZIȚIE FUNDAMENTALĂ ÎN STUDIUL MATEMATICII

II.1. Matematica: știința relațiilor cantitative

În înțeles comun, matematica reprezintă știința care studiază mărimile, relațiile cantitative și formele spațiale cu ajutorul raționamentului de tip deductiv (Academia Română. Institutul de Lingvistică „Iorgu Iordan-Al. Rosetti”, 2016). În Grecia Antică, numerele, expresii ale mărimilor și ale cantităților, au făcut obiectul de studiu al filosofilor Școlii lui Pitagora, dar și a altor înțelepți care au contribuit la fundamentarea matematicii ca știință (Câmpan, 1978).

Știință de sine stătătoare, aritmetica, una din ramurile matematicii, are ca obiect de studiu proprietățile de bază ale numerelor raționale. Chiar dacă în limbajul de specialitate curent termenul este din ce în ce mai rar folosit, aritmetica ocupă un loc important în curriculumul pentru învățământul primar, în studiul disciplinelor Matematică și explorarea mediului din ciclul achizițiilor fundamentale (clasele pregătitoare, I și a II-a) și al disciplinei Matematică în clasele a III-a și a IV-a, din ciclul de dezvoltare. Aritmetica încorporează numerația, cele patru operații matematice și proprietățile acestora, regulile de divizibilitate și operațiile cu numere fracționare, conținuturi necesare fiecărui om în activitățile curente (Vălcan, 2018).

Fuchs et al. (2006) a descris abilitățile de calcul matematic, capacitatea de utilizare a algoritmilor de calcul și capacitatea de rezolvare de probleme ca fiind principalele abilități cognitive al căror nivel de dezvoltare influențează performanțele elevilor în studiul aritmeticii. Aceste achiziții sunt mobilizate în procesul rezolvării diferitelor tipuri de probleme și se constituie ca structuri principale ale competenței matematice, științifice și tehnologice.

II.2. Rezolvarea de probleme – achiziție fundamentală a absolvenților și a angajaților secolului XXI

Competența matematică, științifică și tehnologică a fost descrisă în *Recomandarea Parlamentului European și a Consiliului* din 18 decembrie 2006, fiind structurată în trei secvențe din care au fost derivate conținuturile specifice disciplinelor ce aparțin ariei curriculare *Matematică și științe ale naturii*:

- **competența matematică** integrează abilități specifice gândirii matematice, mobilizate în scopul rezolvării unei arii extinse de probleme întâlnite în diverse situații cotidiene;
- **competența științifică** integrează achiziții din repertoriul cognitiv necesare identificării situațiilor problemă și formulării întrebărilor care conduc la elaborarea concluziilor bazate pe argumente empirice;
- **competența tehnologică** reprezintă capacitatea de aplicare a cunoștințelor și a metodologiei științifice în scopul identificării de soluții pragmatice la necesitățile curente ale oamenilor.

OECD (2019) a identificat principalele achiziții necesare alfabetizării matematice: formarea raționamentului matematic utilizat la rezolvarea de probleme în contexte variate de viață. *PISA 2022 Mathematics framework* (OECD, 2022) definește **raționamentul matematic** drept abilitatea de a raționa logic și de a formula argumente ce vor conduce la elaborarea de concluzii valide. OECD (2022) a identificat șase structuri cognitive implicate în formarea raționamentului matematic: (1) capacitatea de înțelegere și reprezentare a cantităților, (2) formarea reprezentărilor simbolice și a capacității de abstractizare a relațiilor cantitative dintre elementele componente ale realității concrete, (3) transpunerea diferitelor situații problemă în structuri matematice, (4) identificarea relațiilor funcționale existente între diferite cantități, prin intermediul graficelor, (5) utilizarea gândirii matematice în studiul altor discipline, (6) însușirea noțiunilor specifice statisticii, în scopul analizei datelor culese din mediul exterior.

Utilizarea raționamentului matematic la **rezolvarea de probleme** a fost descrisă în PISA 2022 Mathematics framework, ca un ciclu format din trei etape: (1) formularea problemei, (2) rezolvarea matematică a problemei, (3) evaluarea și interpretarea soluției matematice din perspectiva contextului real al problemei.

Datele culese de-a lungul timpului în urma testărilor internaționale (PISA, TIMSS, NAEP etc.) au constituit premisa pentru numeroare cercetări și analize referitoare la strategiile pe care elevii le utilizează atunci când rezolvă probleme matematice. Au fost identificate atât erorile tipice pe care le produc elevii la diferite niveluri ale procesului rezolutiv, cât și diferite strategii didactice care facilitează și susțin formarea raționamentului matematic.

II.3. Dezvoltarea capacității de rezolvare de probleme, în studiul matematicii, pe parcursul învățământului primar

Etapile formării și dezvoltării capacității de rezolvare de probleme sunt detaliate în programele școlare ale disciplinelor *Matematică și explorarea mediului* (clasa pregătitoare, clasa I și clasa a II-a) și *Matematică* (clasele a III-a și a IV-a) prin intermediul competențelor generale și a competențelor specifice. Formarea și dezvoltarea competenței de rezolvare de probleme evoluează pe parcursul ciclului primar, de la formarea capacității de rezolvare a problemelor simple, cu ajutorul materialului concret-intuitiv, până la interiorizarea procesului rezolutiv în plan mental, la nivelul gândirii abstracte, cu ajutorul operațiilor formale ale gândirii. Astfel, competența generală *Rezolvarea de probleme pornind de la sortarea și reprezentarea unor date*, din ciclul achizițiilor fundamentale, se rafinează progresiv în ciclul de dezvoltare, punând în act competența de *Rezolvare de probleme în situații familiare*.

Activitățile de învățare propuse în programa școlară pentru formarea și dezvoltarea competenței de rezolvare de probleme pentru clasele pregătitoare, I și a II-a valorifică materialul concret-intuitiv: reprezentări simbolice ale datelor problemelor, imagini și reprezentări vizuale, suport obiectual, facilitând formarea reprezentărilor mentale și înțelegerea adecvată a relațiilor dintre datele cantitative din enunțul problemelor.

Ca proces, rezolvarea de probleme matematice reclamă mobilizarea unui spectru larg de achiziții de natură cognitivă. Înțelegerea și articularea datelor problemei într-o strategie adecvată de rezolvare sunt dificile pentru mulți dintre elevii din ciclul primar. Literatura de specialitate a identificat, a descris și a analizat modalitățile particulare prin care elevii se raportează la activitățile formale de rezolvare de probleme.

II.4. Problema și problema matematică

II.4.1. Ce este o „problemă”?

Noțiunea de *problemă* descrie o chestiune care conține aspecte neclare, discutabile (Academia Română. Institutul de lingvistică „Iorgu Iordan-Al. Rosetti”, 2016). Din perspectivă psihologică, termenul se referă la o situație apărută în calea realizării unui scop, pentru care subiectul nu dispune de o conduită adaptată și de un răspuns adecvat din memorie (Doron & Parot, 1991/2006; Miclea, 1999). Raportul dintre cunoscut și necunoscut generat de situația problemă determină apariția unui conflict cognitiv, ce poate fi soluționat cu ajutorul diferitelor tipuri de raționament (Bocoș, 1997).

Procesul rezolvării problemelor antrenează atenția, spiritul de observație, gândirea critică și creativă, cu ajutorul cărora subiectul rezolvitor analizează, sintetizează și compară datele pe care le are la dispoziție. Identificarea de noi soluții, prin abstractizarea, contextualizarea și generalizarea rezultatelor obținute, determină abordarea rezolvării de probleme ca proces creativ (Mih, 2018), soluția problemei constituindu-se ca produs final al acestui proces.

Din perspectiva gândirii creative, rezolvarea de probleme este considerată o activitate inovatoare, care mobilizează întregul repertoriu de achiziții cognitive, afective și psiho-motorii, contribuind la atingerea obiectivelor educaționale cu un grad ridicat de complexitate.

II.4.2. Problema matematică

Din perspectivă matematică, o problemă reprezintă o situație practică transpusă în relații cantitative, în care se solicită aflarea unei necunoscute, cu ajutorul valorilor numerice cunoscute, aflate în relație de dependență unele față de altele (Neacșu, 1988).

În clasele primare, problemele de matematică descriu contexte de viață familiare elevilor. Pentru elevii din ciclul primar, aflați în stadiul de dezvoltare dominat de operațiilor concrete (cf. Piaget, 1936/1973), evocarea unor situații cunoscute facilitează înțelegerea ipotezelor, a raționamentelor matematice și a analogiilor existente între coordonatele fizice, ale mediului și relațiile cantitative din enunțul problemelor, exprimate în mod abstract, prin intermediul numerelor.

II.4.3. Clasificări generale ale problemelor matematice

În funcție de numărul de operații necesare pentru aflarea soluției, problemele matematice pot fi clasificate în **probleme simple** (soluția se determină printr-o singură operație) și **probleme compuse** (soluția se determină prin efectuarea mai multor operații matematice) (Aron, 1977; Neacșu, 1988; Roșu, 2006; Petrovici, 2014; Vălcan, 2018).

Problemele compuse pot fi **tipice**, atunci când se utilizează o strategie de rezolvare specifică fiecărui tip de problemă (Aron, 1977) și **netipice**, a căror strategie de rezolvare solicită gândirea critică și întregul repertoriu cognitiv individual (Mărcuț, 2006; Vălcan, 2018).

În funcție de **algoritmul de rezolvare**, problemele tipice se pot rezolva folosind metoda grafică, metoda reducerii la unitate, metoda falsei ipoteze, metoda comparației, regula de trei simplă sau compusă, metoda mersului invers (Neacșu, 1988; Petrovici, 2014; Vălcan, 2018).

În funcție de tipul operațiilor/ a operației matematice necesare pentru determinarea soluției, distingem probleme care se rezolvă prin operații de adunare, prin operații de scădere, prin operații de înmulțire sau de împărțire (Vălcan, 2018; Neacșu, 1988) și probleme care implică utilizarea tuturor operațiilor matematice sau a cel puțin două tipuri dintre acestea.

După modalitatea de exprimare a relațiilor dintre date, problemele matematice pot fi **abstracte** (relațiile dintre date sunt prezentate cu ajutorul terminologiei matematice și a limbajului abstract) și **concrete** (limbajul care exprimă relațiile dintre date denumeste aspecte ale realității concret-obiectuale) (Vălcan, 2018; Petrovici, 2014).

În funcție de raționamentul utilizat la elaborarea strategiei de rezolvare distingem probleme care se rezolvă prin **metoda analitică** (valorifică raționamentul deductiv, de la necunoscut la cunoscut, de la ceea ce se cere, la ceea ce se caută) și prin **metoda sintetică** (valorifică raționamentul inductiv, de la părți către întreg, de la cunoscut la necunoscut) (Neacșu, 1988; Vălcan, 2018). Comparativ cu metoda sintetică care antrenează mai puțin gândirea elevilor, metoda analitică solicită într-o măsură mai mare raționamentul, facilitând abordarea conținutului problemei în ansamblul său, având mereu în atenție întrebarea care orientează demersul rezolutiv. Cele două metode se îmbină în măsuri diferite la nivelul strategiei de rezolvare a fiecărei probleme, în funcție de specificul relațiilor dintre datele cunoscute și necunoscute.

II.4.4. Etapele rezolvării problemelor matematice

Procesul rezolvării problemelor a fost descris pornind de la etapele pe care gândirea elevului le parcurge în scopul soluționării cu succes a unei probleme. Principalele etape metodice ale rezolvării problemelor constau în:

1. Cunoașterea/ însușirea enunțului, prin citirea repetată de către elevi sau de către învățător (în cazul elevilor de clasa I). În această etapă elevii se familiarizează cu *conținutul problemei* (totalitatea informațiilor care prezintă datele cunoscute și necunoscute) și cu scopul acesteia, care va orienta procesul de elaborare al strategiei de rezolvare (Ana et al., n.d.; Lupu, 2014; Magdaș, 2022; Mărcuț; Neacșu, 1988; Petrovici, 2014; Roșu, 2006; Vălcan, 2018).

2. Înțelegerea enunțului prin identificarea informațiilor importante: datele cunoscute, cele necunoscute și relațiile care se stabilesc între ele, adică *condiția problemei* (Polya, 1945/1965). Pentru facilitarea înțelegerii a conținutului problemei de către elevi și pentru identificarea datelor relevante pentru rezolvare, învățătorul poate recurge la *schematizarea problemei*: organizarea sintetică a datelor din enunț (scrierea cu puncte, puncte sau pe verticală).

3. Analiza problemei și întocmirea planului de rezolvare, articularea coerentă a datelor necesare la rezolvare cu ajutorul raționamentului inductiv sau deductiv, în scopul realizării tranziției de la planul concret al situației particulare, la nivelul abstract al relațiilor matematice (Lupu, 2014; Mărcuț, 2006; Neacșu, 1988). În această etapă se alcătuiește *planul logic* (Ana et al., n.d.; Petrovici, 2014)/ *modelul logic al problemei* (Reusser, 1990; Vălcan, 2018; Verschaffel et al., 1994; Verschaffel & De Corte, 1993), prin transpunerea relațiilor cantitative dintre datele cunoscute și necunoscute ale problemei în relații matematice și expresii algebrice.

4. Scrierea operațiilor matematice corespunzătoare planului de rezolvare, efectuarea propriu-zisă a calculelor și determinarea *rezultatului matematic*.

5. Activități suplimentare după rezolvarea problemei (Neacșu, 1988; Petrovici, 2014; Roșu, 2006) În această etapă se verifică rezultatul matematic, are loc scrierea rezolvării sub forma unui exercițiu, identificarea a raționamentelor alternative de rezolvare și/ sau compunerea de probleme după o schemă asemănătoare. Analiza și semnificarea rezultatului matematic prin contextualizarea valorilor numerice obținute din calcule conduce la determinarea *soluției problemei* (Polya, 1945/1965; Vălcan 2018).

II.5. Componentele structurale ale problemelor matematice

Riley et al. (1983) au descris problemele matematice din perspectiva structurală a relațiilor care se stabilesc între datele cantitative din enunț. Problema matematică este compusă:

- dintr-un **text** (enunțul problemei): care prezintă mai multe tipuri de **informații** între care se stabilesc anumite **tipuri de relații** (Greer et al., 2002)
- și o **întrebare/ solicitare**, al cărei răspuns constă în aflarea unei valori numerice ce se poate deriva, prin calcul matematic, din valorile din text și din relațiile care se stabilesc între acestea (Mellone et al., 2014; Vălcan, 2018).

II.5.1. Informațiile care prezintă conținutul problemei: caracteristici și implicații în elaborarea strategiei de rezolvare

Moreau & Viennot (2003) și Voyer (2011) au descris trei categorii de informații care se regăsesc în enunțurile problemelor matematice: informații necesare la rezolvare, informații contextuale, informații explicative.

Informațiile necesare la rezolvare (*solving information*) prezintă datele importante din enunț, fiind esențiale pentru elaborarea strategiei de rezolvare (Moreau & Viennot, 2003; Voyer, 2011). Informațiile necesare la rezolvare descriu datele cunoscute, cele necunoscute și relațiile care se stabilesc între acestea (Vălcan, 2018). Înțelegerea și reprezentarea corespunzătoare a relațiilor dintre datele problemei determină reușita rezolvării (Verschaffel et al., 1994; Verschaffel & De Corte, 1993).

Informațiile contextuale (*situational information*) nu au rol la elaborarea strategiei de rezolvare. Acestea particularizează informațiile necesare la rezolvare, prin descrieri și detalieri care fac trimitere la repertoriul experiențial al elevilor (Voyer, 2011). Evocarea unor aspecte

cunoscute rezolvitorului facilitează realizarea deducțiilor cu privire la caracteristicile situației particulare prezentată în enunț (Kintsch & Dijk, 1978; Kintch & Rawson, 2005).

Informațiile explicative (*explanation information*) detaliază celelalte tipuri de informații existente în enunț (pe cele necesare la rezolvare sau pe cele contextuale).

Cummins et al. (1988) și Stern & Lehrndorfer (1992) au evidențiat că informațiile contextuale și/ sau explicative din enunțul problemelor influențează favorabil performanțele rezolutive ale elevilor. Nu este obligatoriu ca informațiile contextuale și cele explicative să coexiste în enunțul problemelor.

II.5.2. Relațiile dintre cunoscute și necunoscute: componente structurale ale problemelor matematice

Riley et al. (1983) au clasificat problemele matematice simple, a căror soluție se determină prin efectuarea unei singure operații de adunare sau de scădere, în funcție de acțiunea pe care rezolvitorul trebuie să o efectueze asupra mulțimilor de elemente descrise în enunț: *modificarea*, *însurarea* (reunirea/ punerea laolaltă) ori *compararea* numărului de elemente al celor două mulțimi (Tabelul nr. 3.II.).

1. Probleme a căror soluție se obține prin **modificarea numărului de elemente ale unei mulțimi** (*change problems*) (Riley et al., 1983). Soluția problemei, mulțimea obținută în urma modificării unei mulțimi inițiale este rezultatul unei relații de tip cauză-efect (Nesher et al., 1982).

$$\text{valoare inițială} \pm \text{schimbare} = \text{valoare finală}.$$

În funcție de direcția de producere a modificării, Riley et al. (1983) au descris probleme a căror soluție se obține prin:

- **mărirea** numărului de elemente al unei mulțimi (*join problem*):
Radu are 3 mere. Vlad îi dă 4 mere lui Radu. Câte mere are Radu acum?
- **micșorarea** numărului de elemente al unei mulțimi (*separate problem*).:
Radu are 8 mere. El îi dă lui Vlad 5 mere. Câte mere i-au mai rămas lui Radu?
- **egalarea numărului de elemente** (*equalizing problem*) al celor două mulțimi (Riley et al., 1983):
Radu are 3 mere, iar Vlad 8. Câte mere trebuie să mai primească Radu ca să aibă tot atâtea mere câte are Vlad? / Radu are 3 mere, iar Vlad 8. Ce trebuie să facă Vlad pentru a avea tot atâtea mere câte are Radu?

2. Probleme de **reuniune (de punere laolaltă) a elementelor a două (sau mai multor) mulțimi** (*combine problems*). Aceste probleme descriu relația întregului cu părțile, ca mulțimi subordonate, unde necunoscuta poate fi ori întregul, ori una din părți. În aceste probleme relațiile dintre datele cantitative sunt statice, pentru determinarea soluției nefiind necesară modificarea niciuneia dintre mulțimile descrise în enunț:

Radu are 3 mere, iar Vlad are 5 mere. Câte mere au împreună?

Construirea modelului logic al acestor probleme pornește de la exprimarea întregului ca sumă a părților:

$$\text{partea 1} + \text{partea 2} = \text{total/ sumă/ întreg}$$

3. Probleme a căror rezolvare necesită **compararea** a două mulțimi sau valori (**compare problems**). Strategiile de rezolvare ale acestor probleme solicită abilitatea rezolvitorului de a identifica și utiliza diferența dintre două mulțimi sau valori la determinarea necunoscutei. În problemele de comparare, relațiile cantitative dintre date sunt statice, una dintre mulțimi fiind comparată cu cealaltă, care este considerată mulțime de referință (Nesher, 1982; Riley et al., 1983).

Radu are 8 mere, iar Vlad are 5. Cu câte mere are Radu mai multe decât Vlad?

Problemele de comparare pot fi transpuse în relații matematice astfel:

$$\text{valoarea mare} - \text{valoarea mică} = \text{diferența.}$$

O subcategorie a problemelor de comparare este cea în care numărul elementelor mulțimii comparate este necunoscut, fiind exprimat cu ajutorul diferenței față de numărul elementelor mulțimii de referință:

Radu are 3 mere, iar Vlad are cu 5 mai multe/ mai puține (decât Radu). Câte mere are Vlad? / Radu are 8 mere, adică cu 3 mai multe decât Vlad. Câte mere are Vlad?

Expresia matematică care stă la baza rezolvării problemei are forma:

$$\text{valoare de referință} \pm \text{diferența} = \text{valoarea comparată}$$

Tabelul nr. 3.II. Clasificarea problemelor matematice simple în funcție de relația dintre datele cunoscute și cele necunoscute (Riley et al., 1983)

Relații dinamice	Relațiile statice
MODIFICAREA unei valori (prin mărire sau micșorare)	ÎNSUMAREA unor valori
Rolul necunoscutei: valoarea finală	Rolul necunoscutei: valoarea întregului
1. Radu are 3 mere. Vlad îi dă 4 mere lui Radu. Câte mere are Radu acum?	1. Radu are 3 mere, iar Vlad are 5 mere. Câte mere au în total cei doi copii?
2. Radu are 8 mere. El îi dă lui Vlad 5 mere. Câte mere i-au mai rămas lui Radu?	Rolul necunoscutei: valoarea uneia dintre părți
Rolul necunoscutei: valoarea modificării	2. Radu și Vlad au împreună 8 mere. Radu are 3 mere. Câte mere are Vlad?
3. Radu are 3 mere. Vlad îi dă câteva din merele lui. Acum, Radu are 8 mere. Câte mere a primit Radu?	COMPARAREA unor valori
4. Radu are 8 mere. El îi dă câteva mere lui Vlad și îi mai rămân 3 mere. Câte mere i-a dat Radu lui Vlad?	Rolul necunoscutei: valoarea diferenței
Rolul necunoscutei: valoarea inițială	1. Radu are 8 mere, iar Vlad 5. Cu câte mere are Radu mai multe decât Vlad?
5. Radu are câteva mere. După ce primește de la Vlad 5 mere, Radu are în total 8 mere. Câte mere a avut Radu la început?	2. Radu are 8 mere, iar Vlad 5. Cu câte mere are Vlad mai puține decât Radu?
6. Radu are câteva mere. După ce îi dă lui Vlad 5 mere, lui Radu îi rămân 3 mere. Câte mere a avut Radu la început?	Rolul necunoscutei: valoarea comparată
MODIFICAREA unei valori (prin egalare)	3. Radu are 3 mere, iar Vlad are cu 5 mere mai multe decât Radu. Câte mere are Vlad?
	4. Radu are 8 mere, iar Vlad are cu 3 mere mai puține decât Radu. Câte mere are Vlad?

1. Radu are 3 mere, iar Vlad, 8 mere. Câte mere trebuie să mai primească Radu pentru a avea tot atâtea mere ca Vlad?	Rolul necunoscutei: valoarea de referință
2. Radu are 8 mere, iar Vlad, 3 mere. Câte mere trebuie să îi dea Radu lui Vlad, pentru ca amândoi să același număr de mere?	5. Radu are 8 mere, adică cu 3 mere mai multe decât Vlad. Câte mere are Vlad?
	6. Radu are 3 mere, adică cu 5 mai puține decât Vlad. Câte mere are Vlad?

Cercetările asupra performanțelor rezolutive ale elevilor la fiecare din cele trei categorii principale de probleme au indicat că problemele de comparare sunt cele mai dificile de rezolvat de către elevii din ciclul primar (Giroux & Ste-Marie, 2001; Hegarty et al., 1995; Nesher & Teubal, 1975; Stern & Lehrndorfer, 1992).

II.5.3. Sarcina de lucru: solicitarea care orientează elaborarea strategiei de rezolvare

Polya (1945/1965) a clasificat problemele de matematică în funcție de scopul asumat la nivelul sarcinii de lucru: aflarea unei necunoscute („problemele de aflat”) sau demonstrarea unei afirmații („problemele de demonstrat”). Componentele „problemelor de aflat” sunt *necunoscute*, *datele* și *condiția* problemei (relația/ condiția, adică legătura dintre necunoscută și date), iar părțile principale ale „problemelor de demonstrat” sunt *ipoteza* și *concluzia/ concluziile*.

II.6. Înțelegerea problemelor matematice

Pentru rezolvarea unei probleme este necesară identificarea informațiilor necesare la rezolvare (Reusser, 1985; Voyer, 2011). Înțelegerea informațiilor din conținutul unei probleme solicită rezolvitorului 1) *cunoștințe despre realitatea înconjurătoare* și 2) *cunoștințe de factură logico-matematică* (relații mentale și interconexiuni rezultate din ordonarea, clasificarea, abstractizarea și conceptualizarea cunoștințelor dobândite experiențial). Cunoștințele logico-matematice au rol esențial la înțelegerea relațiilor cantitative dintre datele problemei (Kamii & Joseph, 2004; Nesher et al., 1982), fiind dobândite în urma interiorizării acțiunilor efectuate asupra obiectelor. Piaget (1964) a descris noțiunea de *operație* ca acțiune interiorizată, efectuată la nivel mental, asupra obiectului. O operație este pusă în relație cu alte operații, organizându-se în structuri operatorii mentale, care permit dobândirea și structurarea logică a noilor cunoștințe (Piaget, 1964, 1936/1973). Variațiile performanțelor rezolutive ale elevilor au fost explicate prin diferențele de dezvoltare ale gândirii logico-matematice, care determină reprezentarea inadecvată a conținutului problemei și îngreunarea operării, la nivel mental, cu mulțimile de obiecte prezentate în enunțul problemelor (Riley et al., 1983; Verschaffel et al., 1994).

Dificultățile pe care unii elevi le întâmpină atunci când rezolvă probleme matematice au fost atribuite limbajului prea abstract în care este formulat enunțul problemelor, care nu are referent în repertoriul cognitiv al școlarilor mici (ex: „*cu... mai mare decât*”, „*tot atâtea... câte...*”, „*fiecare... are câte...*” etc.) (Cummins et al., 1988; Hudson, 1983; Nesher & Teubal, 1975; Schoenfeld, 1991; Stern & Lehrndorfer, 1992).

Hudson (1983) a investigat rolul limbajului în care este formulat enunțul la înțelegerea și rezolvarea unor probleme, oferind câtorva elevi de clasa I, următoarea problemă de comparare, a

cărei sarcină de lucru a fost formulată cu ajutorul expresiei „*cu câte... mai multe decât...*” (*how many more... than...*) specifică limbajului matematic: *Here are 5 birds and 3 worms. How many more birds are there than worms?* (Cu câte păsări sunt mai multe decât viermișori?). Problema a fost rezolvată corect de 64% dintre copii. Reformularea sarcinii de lucru într-un limbaj accesibil a determinat îmbunătățirea performanțelor rezolutive ale elevilor: *Here are 5 birds and 3 worms. Suppose the birds all race over, and each one tries to get a worm. Will every bird get a worm?... How many birds won't get a worm?* (Câte păsări nu vor reuși să prindă un viermișor?). Odată cu reformularea întrebării, toți subiecții au oferit răspunsul corect. Rezultate similare celor obținute de Hudson (1983) au fost obținute într-un studiu replicativ, cvasi-experimental (pretest-posttest) pe un eșantion unic de 45 de elevi români de clasa I. Numărul mare de soluții greșite la problema a cărei sarcină de lucru a fost formulată cu ajutorul expresiei „*Cu câți copii sunt mai mulți decât mingi?*”, comparativ cu problema a cărei sarcină de lucru a fost reformulată cu ajutorul unui limbaj accesibil elevilor („Câți copii vor rămâne fără mingi?”) a evidențiat că interpretarea necorespunzătoare a primei expresii a determinat numărul mare de soluții greșite.

II.6.1. Cuvintele-cheie, indicatori ai operațiilor matematice necesare pentru rezolvarea problemei

Giroux & Ste-Marie (2001), Hegarty et al. (1995), Stern & Lehrndorfer (1992) și Nesher & Teubal (1975) au identificat și descris principalele tipuri de „greșeli” pe care elevii le fac atunci când rezolvă probleme a căror soluție se determină prin compararea a două mulțimi de elemente. Cea mai frecventă „greșeală” este cauzată de asocierea anumitor cuvinte din enunțul problemelor cu operația matematică sugerată de acestea. De exemplu, expresiile „*mai mult*”/ „*cu... mai mult*” sunt asociate, în mod frecvent, cu adunarea, iar cuvintele „*mai puțin*”/ „*cu... mai puțin*”, cu scăderea. În anumite situații, expresii similare ca formă descriu relații diferite între datele problemelor, operația ce trebuie efectuată pentru determinarea soluției neasigurând congruența cu semnificația de bază a expresiei, cum este cazul următoarei probleme: *În clasa a treia sunt 9 băieți și 14 fete. Cu câte fete sunt mai multe decât băieți?*

Analiza strategiilor de rezolvare ale problemelor de comparare utilizate de către elevii din ciclul primar, a evidențiat că participanții demonstrează performanțe rezolutive superioare la problemele în care unele expresii din enunț sunt congruente cu operația matematică ce trebuie efectuată pentru determinarea soluției (Giroux & Ste-Marie, 2001; Hegarty et al., 1995; Nesher & Teubal, 1975; Riley et al., 1983; Stern & Lehrndorfer, 1992), asemeni următoarei probleme: *Elena are 15 mărgele, iar Mihaela cu 7 mai multe. Câte mărgele are Mihaela?*

Diferențele dintre strategiile rezolutive utilizate de elevi la probleme care prezintă atât congruența, cât și incongruența expresiei care sugerează comparația dintre mulțimile descrise în enunț au fost analizate în cadrul unui cvasi-experiment (pretest-posttest) realizat pe un eșantion de 42 de elevi români de clasa I în care au fost utilizate cele două probleme prezentate anterior.

Analiza rezolvărilor celor două probleme (Tabelul nr. 8.II.) a evidențiat că majoritatea elevilor a rezolvat corect problema unde este asigurată congruența între semnificația de bază a

expresiei „*cu... mai multe*” și operația necesară pentru determinarea soluției. Incongruența dintre semnificația de bază a indicatorului verbal și operația matematică necesară pentru rezolvarea celeilalte probleme a determinat creșterea numărului soluțiilor incorecte, obținute prin efectuarea unei adunări.

Tabelul nr. 8.II. Analiza soluțiilor problemelor și ale strategiilor de rezolvare

	Problema 1 (expresia „ <i>cu... mai multe</i> ” este congruentă cu operația necesară la rezolvarea problemei)		Problema 2 (expresia „ <i>cu... mai multe</i> ” este incongruentă cu operația necesară pentru rezolvarea problemei)	
Strategia de rezolvare	prin adunare: 15+7	Indică un rezultat greșit/ nu răspunde	prin scădere: 14-9	prin adunare: 9+14
Număr de elevi (%)	38 (90,4%)	4 (9,5%)	33 (78%)	9 (21,4%)

Performanțele rezolutive ale elevilor români la nivelul eșantionului analizat corespund, rezultatelor obținute în cadrul unor cercetări pe teme similare (Giroux & Ste-Marie, 2001; Hegarty et al., 1995; Nesher & Teubal, 1975; Riley et al., 1983; Stern & Lehrndorfer, 1992). Abordarea superficială a anumitor expresii din enunț poate fi atribuită fie abilităților slab dezvoltate de înțelegere a textului citit, fie modalităților complexe de prezentare a datelor în cadrul problemei (Boonen et al., 2016; Hegarty et al., 1995; Reusser, 1988). Cercetările care au analizat relațiile dintre abilitățile de înțelegere a textului citit și nivelul performanțelor rezolutive ale elevilor (Bjork & Bowyer-Crane, 2013; Boonen et al., 2016; Can, 2020; Pongsakdi et al., 2020; Timario, 2020) au evidențiat o corelație puternică între cele două variabile, nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit fiind predictor al performanțelor rezolutive ale elevilor.

II.6.2. Factori determinanți ai dificultăților de înțelegere a problemelor a căror soluție se obține prin compararea a două mulțimi de elemente (*compare problems*)

Pe parcursul claselor pregătitoare și întâi, introducerea operațiilor de adunare și scădere se realizează pornind de la reprezentările pe care copiii le au despre acțiunile concrete realizate asupra diferitelor obiecte sau mulțimi de elemente (Piaget, 1964). Reprezentarea adunării și a scăderii cu ajutorul acțiunilor concrete conferă semnificație celor două operații, facilitând transpunerea datelor problemei din planul concret al realității în planul abstract al simbolurilor matematice, explicând ușurința cu care majoritatea elevilor de clasa I rezolvă problemele de modificare și de însumare (Nesher et al., 1982; Riley et al., 1983).

În contrast cu dinamismul acțiunii care produce o modificare, caracterul static al comparării a două mulțimi determină dificultatea unor elevi de asociere a comparației cu o acțiune realizată în plan concret, făcând dificilă înțelegerea și transpunerea acestei relații în operații matematice (Giroux & Ste-Marie, 2001; Nesher, 1980). Abstractizarea comparației a două mulțimi de elemente la nivelul operațiilor matematice se realizează după achiziția unor scheme mentale specifice, împreună cu capacitatea de reprezentare mentală a diferenței dintre mulțimile

prezentate, ca mulțime de sine stătătoare (Kamii & Joseph, 2004; Stern & Lehrndorfer, 1992). Stern & Lehrndorfer (1992) au explicat dificultățile de înțelegere ale relațiilor de comparare din perspectiva experienței copiilor, care nu utilizează în activitățile lor curente comparații cantitative între mulțimi, prin indicarea valorii diferenței, așa cum solicită sarcinile de lucru ale problemelor de matematică, majoritatea comparațiilor utilizate la acest nivel de vârstă fiind calitative.

Dificultățile de înțelegere ale problemelor de comparare de către elevi se manifestă sub forma unor comportamente cognitive, ce pot fi cu ușurință identificate de învățător. Oferim spre ilustrare exemplul elevului T., aflat la începutul clasei I, care a fost solicitat să rezolve un anumit tip de problemă, indicată ca având cele mai mari rate de reușită în rândul problemelor a căror soluție se determină prin compararea a două mulțimi de elemente (Carpenter et al., 1981; Giroux & Ste-Marie, 2001; Nesher et al., 1982; Riley et al., 1983): „Într-o cutie sunt 6 becuri și cu 2 mai multe baterii. Câte baterii sunt în cutie?”

Reușita rezolvării acestei probleme poate fi explicată de congruența expresiei *mai multe* cu operația necesară la rezolvare. Totuși, nivelul de dezvoltare al structurilor logico-matematice ale gândirii este definitoriu pentru succesul elaborării strategiei de rezolvare. Prezentăm discuția cu elevul T. care evidențiază modalitatea de înțelegere și de reprezentare a conținutului problemei.

Figura nr. 1.II. Reprezentarea celor două mulțimi de elemente de către elevul T.

După ce a citit problema, T. este rugat să identifice, în enunț, datele cunoscute, înțelegerea conținutului problemei fiind ghidată de câteva întrebări suplimentare:

Cercetător: Despre ce este vorba în problemă? Câte feluri de obiecte sunt în cutie?

T.: Sunt două feluri de obiecte.

Cerc.: Care sunt acestea?

T.: Becurile și bateriile.

Cerc.: Ce știm despre ele, câte sunt din fiecare?

T.: Sunt 6 becuri.

Cerc.: Și baterii?

T.: 2 baterii.

Cerc.: Recitește problema cu atenție! (T. citește enunțul cu voce tare.) Ce se spune despre baterii?

T.: Că sunt cu 2 mai multe.

Cerc: Așadar, care dintre cele două obiecte sunt mai multe: becurile sau bateriile? (compararea calitativă a mulțimilor, în scopul asigurării înțelegerii corespunzătoare a relațiilor dintre date)

T.: Bateriile.

Cerc.: Cum ți-ai dat seama?

T.: Pentru că spune problema că sunt mai multe.

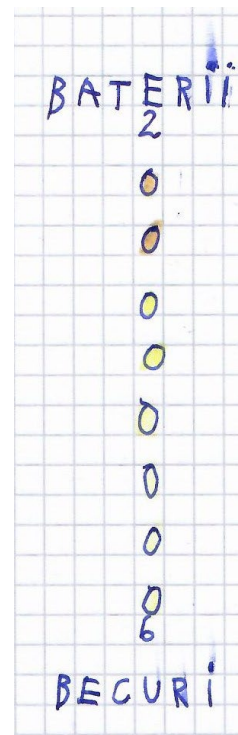
Cerc.: Ce operație crezi că trebuie să efectuezi pentru a rezolva problema?

T.: $6+2$

Cerc.: Te rog să realizezi un desen cu becurile și bateriile din problemă, așa cum îți indică enunțul.

T.: Adică, să desenez 6 becuri și 2 baterii? (reformularea enunțului din perspectiva propriei înțelegeri relevă nivelul real la care are loc comprehensiunea conținutului problemei, așa cum au evidențiat și Cummins et al., 1988)

Cerc.: Recitește enunțul problemei cu atenție, apoi reprezintă prin desen becurile și bateriile, așa cum îți indică problema (Lui T. i s-a explicat că poate reprezenta schematic cele două mulțimi de obiecte, folosind cercuri de diferite culori) (Figura nr. 1.II.)



* desenul realizat de T. ilustrează modalitatea de reprezentare internă a celor două mulțimi de elemente: becurile și bateriile.

Răspunsurile elevului T. evidențiază insuficienta dezvoltare a cunoștințelor logico-matematice necesare la sesizarea relației dintre datele din enunț și la interpretarea corectă a expresiei *cu 2 mai multe*. Reformularea verbală a problemei oferă indicii despre nivelul la care are loc înțelegerea relațiilor dintre date, așa cum au observat și Cummins et al. (1988). Suplimentar, desenul copilului confirmă lacunele înțelegerii acestor relații (Paquette et al., 2007). Deși elevul efectuează operația matematică corespunzătoare, aceasta nu este rezultatul înțelegerii relațiilor dintre date, ci al asocierii cu cuvintele-cheie. Corectitudinea soluției, în ciuda raționamentului greșit, evidențiază că selectarea operației corespunzătoare determinării rezultatului matematic nu constituie garanția înțelegerii problemei și nici nu asigură validitatea soluției.

CAPITOLUL III

REPREZENTĂRILE VIZUALE – INSTRUMENTE ALE REZOLVĂRII PROBLEMELOR MATEMATICE

Utilizarea desenului realizat de elevul T. pe baza conținutului problemei a evidențiat nivelul la care are loc înțelegerea relațiilor cantitative dintre datele problemei. Desenul, act de comunicare specific copilului, ilustrează evoluția sa psihologică (Cambier, 1990/2008), așa cum nivelul dezvoltării limbajului este indicator al nivelului dezvoltării cognitive. Înțelegerea limbajului verbal și a modalităților de exprimare a conținutului gândirii prin cuvinte sau desen, au fost explicate cu ajutorul reprezentărilor mentale vizuale.

III.1. Teoria simulării mentale

Rolul imaginilor mentale în procesul înțelegerii unui mesaj formulat cu ajutorul limbajului verbal, oral sau scris, a fost explicat cu ajutorul *teoriei simulării*. Înțelegerea limbajului verbal se realizează prin *simularea mentală* a situației sau a contextului expus, constând în evocarea imaginilor vizuale dobândite experiențial, pe care subiectul le are despre acțiunea sau despre aspectele particulare prezentate (Gallese & Lakoff, 2005; Glenberg, 2011; Glenberg & Robertson, 1999; Piaget & Inhelder, 1966/2011).

Explicarea înțelegerii unui text citit cu ajutorul teoriei simulării evidențiază caracterul individualizat și contextualizat al comprehensiunii, semnificația enunțurilor care îl alcătuiesc fundamentându-se pe reprezentările mentale și pe propria cunoaștere asupra contextului evocat în text (Glenberg & Robertson, 2009).

III.2. Imaginile mentale, vizualizarea (*visualization*) și raționamentul vizual (*visual reasoning*): delimitări conceptuale

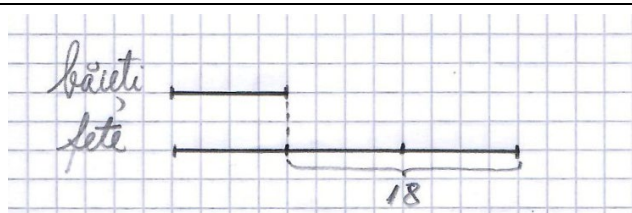
Asemeni oricărui tip de text, înțelegerea enunțului problemelor de matematică se realizează cu ajutorul simulării mentale. Cercetările care au investigat modalitățile specifice de înțelegere a unui text citit au evidențiat prezența imaginilor mentale ca instrumente operatorii ale gândirii. Angajarea reprezentărilor vizuale pe parcursul înțelegerii conținutului problemelor și a elaborării procesului rezolutiv a fost denumită cu ajutorul termenilor din limba engleză, *visualization* și *visual reasoning* (Arcavi, 2003; Bishop, 1988; Dreyfus, 1991; Geçici & Türnüklü, 2021; Lean & Clements, 1981; Presmeg, 1986a; Presmeg, 1986b).

Vizualizarea (*visualization*) a fost descrisă drept capacitatea de organizare, structurare și schematizare logică a datelor într-un format vizual, cum sunt graficele, diagramele, schemele sau orice alte reprezentări vizuale (interioare sau exterioare subiectului), care permit realizarea conexiunilor între informații, a deducțiilor și a altor relații între date care nu sunt accesibile percepției directe (Ahmad, 2010; Arcavi, 2003; Zimmerman & Cunningham, 1991). În lucrările lor, Arcavi (2003), Bishop (1989), Herskowitz et al. (1989), Presmeg (1986b), Polya (1945/1965) și Zimmerman & Cunningham (1991) au făcut referire la potențialul de reprezentare prin mijloace vizuale a ceea ce nu este prezentat explicit în enunțul problemelor matematice (inferențe,

deducții), descriind vizualizarea (*visualization*) drept abilitatea și procesul evocării, creării, utilizării și interpretării reprezentărilor vizuale mentale sau concrete, în scopul înțelegerii informațiilor, a formulării de noi idei și semnificații, cu ajutorul cărora se construiește comprehensiunea globală a problemei.

Reprezentarea vizuală, prin desen schematic, a conținutului următoarei probleme asigură „vizibilitatea” relațiilor cantitative dintre date, evidențiind raportul dintre cele două mulțimi descrise în enunț (Figura nr. 1.III.): *Într-o clasă numărul fetelor este de trei ori mai mare decât numărul băieților. Știind că fetele sunt cu 18 mai multe decât băieții, aflați câte fete și câți băieți sunt în clasă* (Mogoș, 2024).

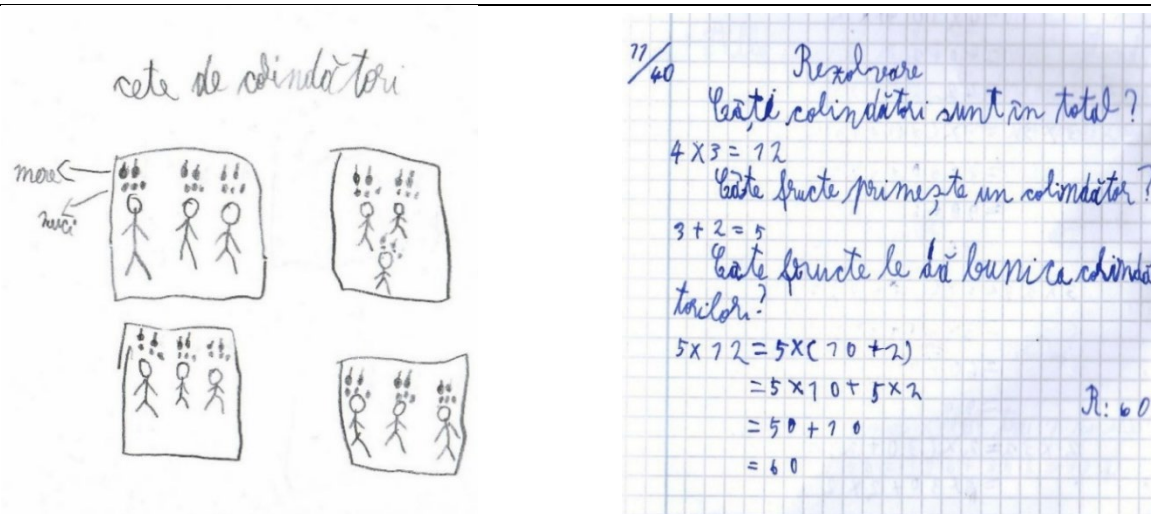
Figura nr. 1.III. Evidențierea relațiilor dintre datele problemei cu ajutorul reprezentării grafice



Ried et al. (2022) au concluzionat că performanțele rezolutive ale subiecților cu un slab potențial de evocare și utilizare a imaginilor mentale sunt mult mai scăzute comparativ cu performanțele rezolutive ale subiecților cu abilități avansate de reprezentare mentală a relațiilor dintre date. Procesul de rezolvare a unei probleme bazat pe generarea și analiza reprezentărilor spațiale și/ sau vizuale ale conținutului problemei de către rezolvitor a fost denumit *raționament vizual* (*visual reasoning*) (Bishop, 1989; Dreyfus, 1991; Geçici & Törnükü, 2021; Herskowitz et al., 2001). Raționamentul vizual se constituie ca potențial individual de organizare a reprezentărilor vizuale în structuri operatorii utilizate la rezolvarea problemelor matematice. Raționamentul vizual se dobândește prin exersarea repetată a reflecției asupra reprezentărilor vizuale care evidențiază nivelul la care are loc procesarea informațiilor din enunț și, totodată, măsura înțelegerii problemei (Dreyfus, 1991; Herskowitz et al., 2001; Rosken & Rolka, 2006). Rezolvarea unei probleme cu ajutorul raționamentului vizual presupune determinarea soluției prin realizarea și utilizarea desenelor, a graficelor, a schemelor sau a diagramelor la elaborarea strategiei de rezolvare (Suwarsono, 1982). Următoarea problemă ridică dificultăți elevilor de clasa a II-a, deoarece descrie o succesiune de submulțimi incluse într-o mulțime de rang superior, făcând dificilă organizarea mentală a datelor problemei și, implicit, alcătuirea strategiei de rezolvare: *Bunica oferă fiecăruia colindător câte trei nuci și câte două mere. Câte nuci și câte mere a oferit bunica, dacă au venit patru cete a câte trei colindători?* (Mogoș, 2024). Reprezentarea corectă prin desen a conținutului problemei de către unul dintre elevii care nu reușeau să o rezolve din cauza dificultății de coordonare a reprezentărilor vizuale ale fiecărei unități de sens din enunț într-o structură unitară, a

evidențiat utilitatea reprezentării grafice a conținutului problemei la organizarea și structurarea datelor în vederea alcătuirii planului de rezolvare (Figura nr. 2.III.).

Figura nr. 2.III. Elaborarea strategiei de rezolvare cu ajutorul desenului realizat de elev



Elaborarea strategiei de rezolvare a fost simplificată odată cu organizarea datelor în format grafic, soluția problemei constituindu-se ca produs al raționamentului vizual (Bishop, 1989; Geçici & Törnükü, 2021; Herskowits et al., 2001; Presmeg, 1986a; Suwarsono, 1982).

III.3. Imaginile mentale: factor determinant al comprehensiunii textului citit

Imaginile mentale sunt produse cognitive evocate, în absența obiectului percepției. În funcție de contextul care le-a generat, imaginile mentale pot fi reproductive (evocă obiecte sau acțiuni anterior percepute) sau anticipative (obținute prin combinarea mentală a celorlalte tipuri de reprezentări). Capacitatea de operare cu reprezentări mentale se obiectivează, la nivelul conduitelor individuale, în apariția jocului simbolic, a limbajului verbal și a desenului (Piaget & Inhelder, 1966/2011; Miclea, 1999).

III.4. Reprezentările vizuale: clasificări și implicații în procesul rezolvării problemelor matematice

Russel (1997) a clasificat reprezentările problemelor matematice, în funcție de mediul în care sunt generate: *reprezentări interne* (produse mentale rezultate din percepțiile și interacțiunile subiectului cu mediul) și *reprezentări externe* (materializări în plan fizic ale reprezentărilor interne: desene, ilustrații, scheme, grafice, diagrame, organizatori grafici, tabele) (Bishop, 1989; Boonen, 2014; Presmeg, 1986b; Russel, 1997).

Presmeg (1986a, 1986b) a descris cinci tipuri de producții imagistice implicate în reprezentarea și rezolvarea problemelor matematice:

(1) *concrete pictorial imagery (reprezentări vizuale ilustrative)*: consemnează în limbaj vizual elementele figurative evocate de informațiile contextuale din enunț, fără relevanță pentru elaborarea strategiei de rezolvare a problemei.;

(2) *pattern imagery*: reprezentări spațiale care descriu relațiile dintre datele problemei, constituindu-se ca reprezentări vizuale ale informațiilor necesare la rezolvare, cu rol esențial la elaborarea strategiei rezolutive (Boonen et al., 2014; Hegarty & Koshevnikov, 1999);

(3) *memory images of formulae*: reprezentări vizuale ale formulelor matematice, cu caracter fotografic,;

(4) *kinaesthetic imagery*: reprezentări pe care rezolvitorul le „explorează” în plan mental;

(5) *dynamic (moving) imagery*: reprezentări spațiale și vizuale pe care rezolvitorul le transformă la nivel mental în scopul înțelegerii și rezolvării problemei) (Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Presmeg, 1986a).

Boonen et al. (2014) au evidențiat trei categorii de reprezentări grafice ale problemelor, cărora le corespund diferite niveluri de reușită a procesului rezolutiv: *reprezentările ilustrative* și *reprezentările grafice (ale informațiilor necesare la rezolvare)* care pot fi *corecte* sau *incorecte*. *Reprezentările grafice corecte* sunt reprezentări vizuale ale relațiilor dintre date și ale informațiilor necesare la rezolvare, obiectivate în desene și schițe/ diagrame realizate de elevi (vezi Figura nr. 2.III.). *Reprezentările grafice incorecte (ale informațiilor necesare la rezolvare)* prezintă deducțiile și reflecțiile necorespunzătoare ale elevului asupra acestor relațiilor dintre datele problemei (vezi desenul realizat de elevul T. din Figura nr. 1.II.). Boonen et al. (2014) și Gros et al. (2025) au evidențiat că există o relație de asociere între tipul reprezentărilor grafice ale problemei și reușita procesului rezolutiv. Performanțele rezolutive ale elevilor care au creat reprezentări grafice corecte ale problemei au fost superioare celor ale elevilor care au creat reprezentări ilustrative ori reprezentări grafice incorecte ale informațiilor necesare la rezolvare. De asemenea, Boonen et al. (2014) au evidențiat că abilitățile de înțelegere a unui text citit și capacitatea de procesare a relațiilor spațiale sunt predictorii de intensitate mare ai performanțelor rezolutive ale elevilor.

III.5. Reprezentările grafice realizate de elevi – expresia vizuală doveditoare a înțelegerii problemelor matematice

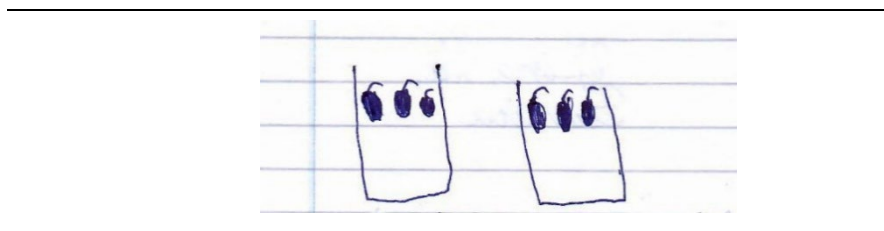
Relația dintre calitatea reprezentărilor vizuale și nivelul cunoștințelor despre un anumit subiect/ o anumită noțiune a fost evidențiată cu ajutorul strategiei *Talking drawings*, care presupune transpunerea imaginilor mentale în reprezentări grafice, adică în desene realizate de elevi (McConell, 1993), acestea devenind indicator al înțelegerii unui anumit conținut care este redat cu ajutorul elementelor specifice limbajului vizual (Bainbridge, 2022).

Paquette et al. (2007) au comparat desenele realizate de câțiva elevi din ciclul primar înainte și după citirea unui text informativ despre un subiect dat. Reprezentările grafice ulterioare lecturii prezentau detalieri suplimentare și acuratețea sporită a subiectului abordat, comparativ cu reprezentările grafice realizate anterior citirii textului informativ. Bainbridge (2022), Nielsen Hibbing & Rankin-Erickson (2003), Paquette et al. (2007) și Peeck (1987) au demonstrat că desenele realizate de elevi reflectă calitatea cunoștințelor și nivelul la care are loc înțelegerea unui subiect sau a unei noțiuni. Totodată, reprezentările grafice *incorecte* evidențiază posibile lacune la

nivelul înțelegerii conținutului abordat (Carotenuto et al., 2021; Paquette et. al., 2007) (vezi Figura nr. 1.II. și Figura nr. 3.III.).

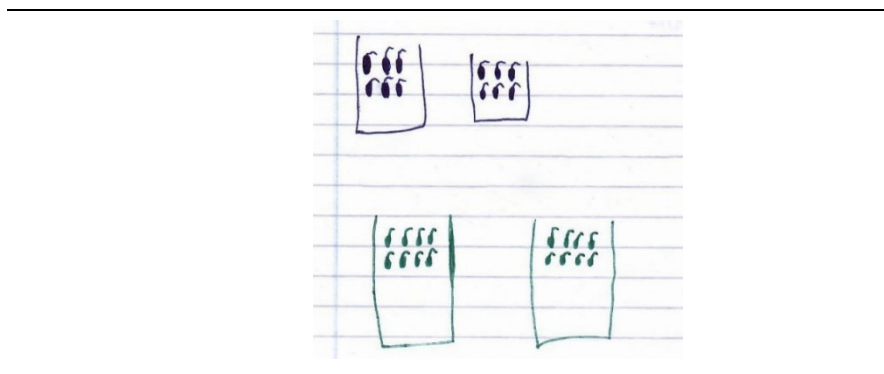
Evaluarea nivelului la care are loc înțelegerea relațiilor dintre datele următoarei probleme, s-a realizat cu ajutorul strategiei *Talking drawings*: „La un magazin s-au vândut două cutii a câte 6 globuri albastre și două cutii a câte 8 globuri verzi. Câte globuri s-au vândut în total?” (Mogoș, 2022, p. 51) Dificultățile de exprimare verbală a neclarităților pe care un elev de clasa a doua le avea referitor la relațiile dintre datele problemei au fost eliminate odată cu ilustrarea conținutului problemei prin desen (Figura nr. 3.III.).

Figura nr. 3.III. Reprezentarea grafică a expresiei „două cutii a câte 6 globuri”, incorect înțeleasă



Reprezentarea grafică inițială a problemei evidențiază neînțelegerea expresiei „două cutii a câte 6 globuri”. După explicarea distributivității expresiei „... a câte...” (*două cutii a câte 6 globuri* înseamnă că în fiecare cutie sunt 6 globuri) calitatea desenului s-a îmbunătățit din perspectiva noii înțelegeri (Figura nr. 4.III.).

Figura nr. 4.III. Reprezentarea grafică a problemei, după explicarea expresiei „două cutii a câte 6 globuri”



Reprezentările grafice, ca expresie a comprehensiunii elevilor, pot fi valorificate ca instrument de evaluare formativă de către profesori (Scott & Weishaar, 2008; Gros et al., 2025) care pot interveni cu ușurință pentru a îndrepta erorile apărute în timpul activității de învățare.

III.6. „Să facem un desen!” – etapă complementară a procesului rezolutiv

Dificultățile pe care elevii din învățământul primar le întâmpină la înțelegerea și rezolvarea problemelor matematice a căror soluție se obține prin compararea a două mulțimi de elemente

(subcapitolele II.5., II.6.) au fost abordate în literatura de specialitate, majoritatea investigațiilor analizând soluțiile și reprezentările vizuale ale altor tipuri de probleme realizate de elevi de liceu sau gimnaziu. Astfel, este necesară investigarea măsurii în care desenele realizate de elevii din clasele primare pot fi utilizate ca instrument la rezolvarea unui anumit tip de probleme matematice, frecvent întâlnite în curriculumul școlar al clasei I, ce presupune compararea și însumarea a două mulțimi de elemente. În cadrul unei cercetări pilot, organizată sub forma unui cvasi-experiment (pretest – posttest, cu eșantion unic), 45 de elevi de clasa I au rezolvat două probleme similare, a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente (Purcar et al., 2024). Întregul demers investigativ a fost orientat de următoarele întrebări:

1. În ce măsură utilizarea strategiei *Talking drawings* va oferi detalii despre nivelul înțelegerii problemei de către elevii din clasa I?
2. În ce măsură elevii din clasa I vor utiliza propriile desene la elaborarea strategiei de rezolvare a problemei?

În pretest, elevii au citit enunțul problemei apoi au rezolvat-o, așa cum fac în mod curent, iar în posttest, elevii au citit problema, au reprezentat conținutul acesteia prin desen, apoi au rezolvat-o.

Problema 1 (pretest): Radu are 3 creioane, iar Tudor are cu 4 creioane mai multe. Câte creioane au cei doi copii?

Problema 2 (posttest): Pe o frunză de nufăr sunt 5 broscuțe. Pe altă frunză de nufăr sunt cu 3 broscuțe mai puțin. Câte broscuțe sunt pe frunzele de nufăr?

Analiza rezolvărilor problemelor de către elevi a evidențiat trei tipuri de rezultate: soluțiile corecte, soluțiile incorecte și absența rezolvării (Tabelul nr. 1.III.).

Tabelul nr. 1.III. Rezolvările problemelor în pretest și posttest

Tipul soluției	Pretest	Posttest
Soluții corecte	12 elevi (26,6%)	19 elevi (42,2%)
Soluții incorecte	29 elevi (64,4%)	17 elevi (37,7%)
Nu rezolvă	4 elevi (8,8%)	9 elevi (20%)

Majoritatea *soluțiilor corecte*, atât în pretest, cât și în posttest, au fost obținute prin scrierea și efectuarea a două operații matematice (determinarea numărului de elemente al mulțimii comparate prin adunare sau scădere, urmată de însumarea elementelor celor două mulțimi).

Toate *soluțiile incorecte* au fost determinate prin efectuarea unei singure operații: adunarea sau scăderea sugerate de cuvintele-cheie din fiecare enunț (*mai multe* în pretest/ *mai puține* în posttest). Numărul mare de soluții corecte din posttest comparativ cu numărul soluțiilor corecte din pretest poate fi atribuit suportului pe care reprezentarea grafică a conținutului problemei l-a oferit elevilor la elaborarea strategiei de rezolvare. Diferențele dintre soluțiile corecte determinate de elevi în pretest și în posttest au fost analizate cu ajutorul testului T pentru eșantioane pereche. Rezultatele obținute au indicat o legătură semnificativă statistic, de intensitate scăzută, între mediile valorilor cu care a fost apreciată corectitudinea soluțiilor problemelor în cele două etape de testare ($p = 0,04 < 0,05$; $r = 0,36$; dif. medie = -0,31).

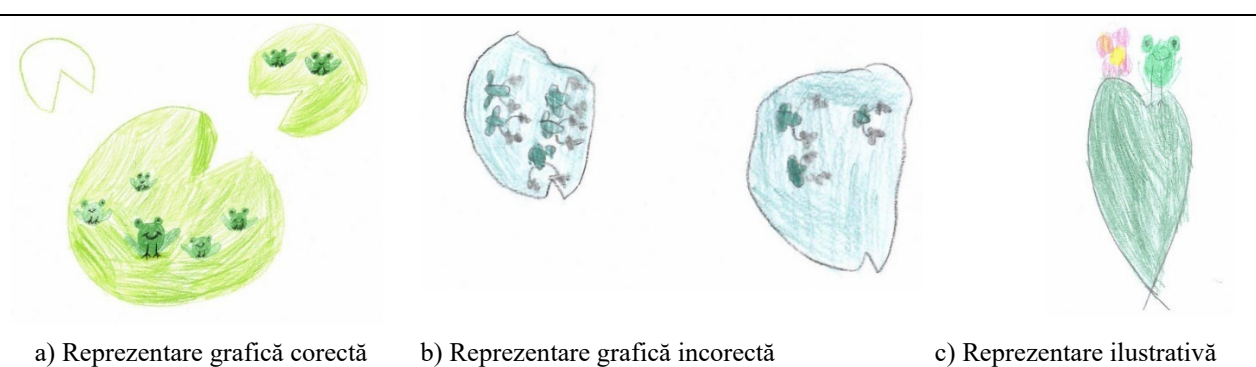
Analiza desenelor realizate de elevi a indicat trei categorii de reprezentări grafice, corespunzătoare celor descrise de Boonen et al. (2014): reprezentări grafice (ale informațiilor necesare la rezolvare) corecte și incorecte și reprezentări grafice ilustrative (Tabelul nr. 2.III.).

Tabelul nr. 2.III. Clasificarea reprezentărilor grafice ale problemelor matematice

Tipul reprezentărilor grafice	
Corecte	33 elevi (73,3%)
Incorecte	7 elevi (15,5%)
Ilustrative	4 elevi (8,8%)
Nu reprezintă	1 elev (2,2%)

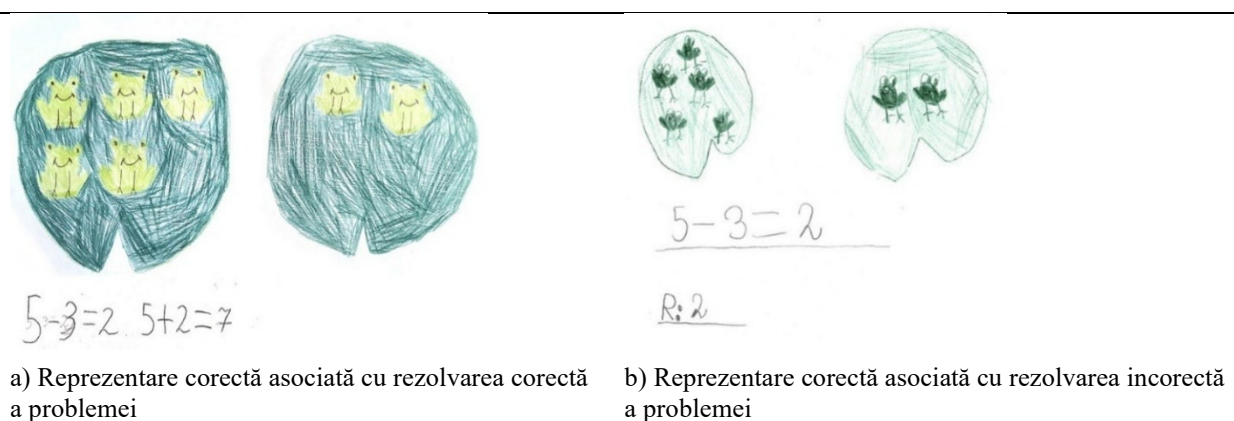
Reprezentările grafice corecte ilustrează cu acuratețe cele două mulțimi de elemente descrise în enunț, iar reprezentările grafice incorecte au constat în reprezentarea a două mulțimi cu tot atâtea elemente câte indică numerele din enunț (Figura nr. 5.III.).

Figura nr. 5.III. Ilustrarea principalelor categorii de reprezentări grafice ale problemei 2 (posttest) realizate de elevi



Reprezentărilor grafice corecte le-au fost asociate un număr mare de soluții corecte (Figura nr. 6.III.), în timp ce reprezentărilor grafice incorecte le-a fost asociat un număr mic de soluții incorecte și o singură soluție corectă. O mică parte din elevii care au realizat reprezentări grafice incorecte nu au rezolvat problema.

Figura nr. 6.III. Tipologia soluțiilor problemelor asociate reprezentărilor grafice corecte, în posttest



În pretest, numărul soluțiilor corecte a fost asociat cu nivelul general de înțelegere a problemei la nivelul eșantionului. În posttest, numărul mare al reprezentărilor grafice corecte a indicat un nivel mult mai ridicat al înțelegerii conținutului problemei. Cu toate acestea, o mare parte din elevii care au reprezentat corect datele problemei prin desen, a determinat soluții incorecte în posttest, prin efectuarea scăderii sugerate de cuvintele-cheie din enunț (*mai puțin*), indicând totodată soluția problemei, „2 broscuțe...” . Încercarea de identificare a cauzelor care stau la baza producerii acestui comportament rezolutiv superficial s-a concretizat prin interviuarea individuală a câtorva elevi, Figura nr. 7.III. fiind însoțită de detalierile necesare.

Figura nr. 7.III. Dialogul cu unul dintre elevii care a reprezentat corect conținutul problemei, dar a determinat soluția incorectă prin efectuarea unei singure operații (scădere)



Cercetătorul: Ai reprezentat corect cele două mulțimi de broscuțe, dar ai efectuat doar scăderea 5-3. Aceasta este soluția finală? (*n.a. 2 broscuțe*)

Elevul: Da.

Cercetătorul: Ce ne cere problema să aflăm? Te rog să recitești întrebarea!

Elevul (citind întrebarea cu voce tare): Câte broscuțe sunt pe frunzele de nufăr?

Cercetătorul: Așadar, care este răspunsul la întrebare?

Elevul: ...5-3=2 ...

Cercetătorul: Uită-te la desenul pe care l-ai realizat. Ți-am explicat că este corect. Care este soluția problemei?

Elevul (privind desenul încurcat): 5-3...

Cercetătorul: Privește desenul cu atenție! Câte broscuțe sunt pe frunzele de nufăr, **în total**?

Elevul: Aaaa, sunt 7 broscuțe!

Analiza reprezentărilor grafice ale problemelor realizate de elevi și a soluțiilor asociate acestora a evidențiat că înțelegerea unei probleme de matematică nu determină, în mod necesar, elaborarea adecvată a strategiei de rezolvare prin alcătuirea corectă a modelului logic al problemei. Desenele realizate de elevi asupra conținutului problemei pot fi valorificate ca instrumente de apreciere a nivelului la care elevii înțeleg conținutul problemei și, totodată, ca suport pentru elaborarea strategiei de rezolvare.

Eșantionul mic utilizat la realizarea studiului pilot nu permite generalizarea corespunzătoare a concluziilor, fiind necesară investigarea suplimentară a efectelor reprezentării grafice a conținutului problemelor matematice asupra calității strategiei de rezolvare și a soluției problemei, prin implicarea unui eșantion mai mare și mai variat de participanți, cu abilități de lucru, capacități cognitive cât mai diverse și abordări diverse ale rezolvărilor de probleme, în funcție de varietatea stilurilor de predare ale cadrelor didactice care predau la respectivele clase.

CAPITOLUL IV

PREZENTAREA CERCETĂRII PEDAGOGICE „IMPLICAȚIILE UTILIZĂRII REPREZENTĂRIILOR GRAFICE REALIZATE DE ELEVII CLASEI I ASUPRA ÎNȚELEGERII ȘI REZOLVĂRII PROBLEMELOR MATEMATICE A CĂROR SOLUȚIE SE OBTINE PRIN COMPARAREA ȘI ÎNSUMAREA A DOUĂ MULȚIMI DE ELEMENTE”

IV.1. Metodologia cercetării pedagogice

IV.1.1. Scopul și obiectivele cercetării

Scopul cercetării: investigarea detaliată a implicațiilor pe care reprezentările grafice realizate de elevii clasei I, pe baza conținutului problemelor matematice a căror soluție se obține prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente, le au asupra înțelegerii problemei și a elaborării strategiei de rezolvare.

Obiectivele cercetării:

1. Descrierea *nivelului de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit* a elevilor clasei I, pe baza aprecierilor profesorilor pentru învățământ primar;
2. Descrierea *strategiilor de rezolvare* și a *soluțiilor* determinate de elevii clasei I la problemele care se rezolvă compararea și însumarea a două mulțimi de elemente;
3. Descrierea principalelor *categorii de reprezentări grafice realizate de elevii clasei I*, pe baza conținutului problemelor a căror strategie de rezolvare presupune compararea și însumarea a două mulțimi de elemente;
4. Identificarea corelațiilor și asocierilor care se stabilesc între *nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit* a elevilor clasei I, *corectitudinea soluțiilor determinate de elevi* la problemele a căror strategie de rezolvare presupune compararea și însumarea a două mulțimi de elemente, *modalitățile de elaborare a strategiei de rezolvare* și *corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevi*, pe baza conținutului problemelor.

IV.1.2. Întrebările de cercetare și ipotezele asociate acestora

I. Care sunt *principalele tipuri de reprezentări grafice* pe care elevii de clasa I le vor realiza pe baza conținutului problemelor matematice a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente?

II. În ce măsură *reprezentările grafice realizate de elevi* pe baza conținutului problemelor matematice a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente vor influența dezirabil elaborarea strategiei de rezolvare și *calitatea soluțiilor problemelor*?

O mare parte dintre elevii de clasa I va realiza reprezentări grafice corecte ale informațiilor necesare la rezolvare, care vor conduce la creșterea numărului soluțiilor corecte, comparativ cu rezolvarea problemelor în absența reprezentării grafice a conținutului acestora.

Întrebarea 1: În ce măsură *corectitudinea soluțiilor* determinate de elevi la problemele care se rezolvă prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente se corelează cu *nivelul de dezvoltare al capacității de înțelegere a unui text citit*?

Ipoteza 1: există o corelație pozitivă între corectitudinea soluțiilor determinate de elevi și nivelul de dezvoltare a capacității lor de înțelegere a unui text citit.

Întrebarea 2: În ce măsură *nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit* se corelează cu *corectitudinea reprezentărilor grafice* realizate de elevii clasei I, pe baza *conținutul problemelor* a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente?

Ipoteza 2: există o corelație pozitivă între nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit și corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor.

Întrebarea 3: Care este relația dintre *principalele tipuri de reprezentări grafice* realizate de elevii de clasa I pe baza conținutului problemelor matematice a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente și *corectitudinea soluțiilor* determinate de elevi la problemele din posttest?

Ipoteza 3: există o corelație pozitivă între *corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevii de clasa I*, pe baza conținutului problemelor din posttest și *corectitudinea soluțiilor* determinate de elevi la aceste probleme.

Întrebarea 4: În ce măsură *reprezentarea grafică corectă a conținutului problemelor* a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente, de către elevii de clasa I, influențează *șansele de reușită a rezolvării problemelor* respective?

Ipoteza 4: reprezentarea grafică corectă a conținutului problemelor de către elevii de clasa I va crește șansele rezolvării corecte a problemelor respective.

Întrebarea 5: Există o îmbunătățire a performanțelor rezolutive ale elevilor de clasa I în posttest, față de performanțele rezolutive ale aceluiași elevi în pretest?

Ipoteza 5: performanțele rezolutive ale elevilor din posttest vor fi superioare performanțelor rezolutive demonstrate de aceștia în pretest.

Întrebarea 6: În ce măsură *prezența informațiilor explicative* în enunțul problemelor a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente va determina un număr cât mai mare de elevi să realizeze *reprezentări grafice corecte ale conținutului problemelor*?

Ipoteza 6: *prezența informațiilor explicative* în enunțul problemelor va determina creșterea numărului de reprezentări grafice corecte realizate de elevii de clasa I pe baza conținutului problemelor.

IV.1.3. Sistemul metodologic

Testarea ipotezelor s-a realizat în cadrul unui *cvasi-experiment, cu design pretest – posttest* și eșantion unic.

1. Variabila independentă: reprezentările grafice realizate de elevii clasei I, pe baza conținutului problemelor matematice a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente.

2. Variabila dependentă: soluțiile problemelor. Indicatori operaționali: (1) corectitudinea rezultatului matematic (soluții corecte/ soluții incorecte) și (2) prezența diferitelor componente ale strategiei de rezolvare.

3. Variabila moderator: capacitatea de înțelegere a unui text citit.

Tabelul nr. 1.IV. Metode și instrumente de colectare și analiză a datelor

Variabile	Sistemul metodologic	Instrumente de cercetare
Variabila independentă (nominală, dihotomică): reprezentările grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor matematice	Cvasi-experiment	Fișă de analiză a reprezentărilor grafice de concepție proprie (<i>analiza calitativă a variabilei independente</i>)
Variabila dependentă (nominală, dihotomică): soluțiile problemelor	Cvasi-experiment	Fișă de analiză de concepție proprie (<i>analiza calitativă a variabilei dependente</i>)
Variabila moderator (cantitativă/ ordinală): capacitatea de înțelegere a unui text citit	Ancheta pe bază de chestionar	Scala Likert cu 10 trepte (1, nivelul minim – 10 nivelul optim pentru categoria de vârstă căreia îi aparțin elevii) (<i>măsurarea variabilei moderator</i>)

IV.1.4. Variabile și instrumente de cercetare

În funcție de caracteristicile datelor, cele trei variabile analizate în cadrul cercetării au clasificate după cum urmează:

1. Variabila independentă (V.I., variabilă nominală, dihotomică). Instrument de cercetare: fișă de analiză a reprezentărilor grafice de concepție proprie.

2. Variabila dependentă (V.D., variabilă nominală, dihotomică). Instrument de cercetare: fișă de analiză de concepție proprie.

3. Variabila moderator (V.M., variabilă ordinală). În unele analize statistice a fost abordată ca *variabilă cantitativă* (subcapitolele IV.2.6.2. și IV.2.6.3.) Instrument de cercetare: scală Likert cu 10 trepte.

Teste și instrumente statistice utilizate pentru testarea ipotezelor:

Ipoteza 1: corelația dintre V.M. (nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit – variabilă cantitativă) și V.D. (corectitudinea soluțiilor determinate de elevi la problemele care se rezolvă prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente) a fost testată cu ajutorul **corelației biseriale**.

Ipoteza 2: corelația dintre V.M. (nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit – variabilă cantitativă) și V.I. (corectitudinea reprezentărilor grafice, realizate de elevii de clasa I, pe baza conținutului problemelor a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente) a fost testată cu ajutorul **corelației biseriale**.

Ipoteza 3: relația dintre V.I. (principalele tipuri de reprezentări grafice realizate de elevii de clasa I pe baza conținutului problemelor matematice a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente) și V.D. (corectitudinea soluțiilor) a fost testată cu ajutorul **testului Chi²**.

Ipoteza 4: șansele V.D. (rezolvării corecte ale problemelor din posttest) în condițiile V.I. (reprezentării grafice corecte a conținutului problemelor care se rezolvă prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente): **analiza de regresie logistică**.

Ipoteza 5: diferența dintre V.D. în posttest (performanțele rezolutive ale elevilor din posttest) și V.D. în pretest (performanțele rezolutive demonstrate de aceeași elevi, în pretest) a fost testată cu ajutorul **testul Chi² al lui McNemar**, pentru eșantioane pereche.

Ipoteza 6: diferența dintre VI-problema 1 și VI-problema 2 (numărul de reprezentări grafice corecte realizate de elevii de clasa I pe baza conținutului problemelor din posttest, în funcție de prezența informațiilor explicative) a fost testată cu **testul Chi² al lui McNemar**, pentru eșantioane pereche.

IV.1.5. Eșantionul de participanți

Selecția participanților la cercetare s-a realizat prin *eșantionare neprobabilistică, de conveniență*. A fost utilizat un *eșantion unic*, alcătuit din 256 de subiecți, 137 fete și 119 băieți (Figura nr. 4.IV.), cu vârsta medie de 7,4 ani.

Figura nr. 4.IV. Reprezentarea grafică a distribuției participanților după genul biologic

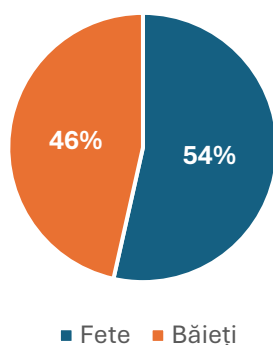
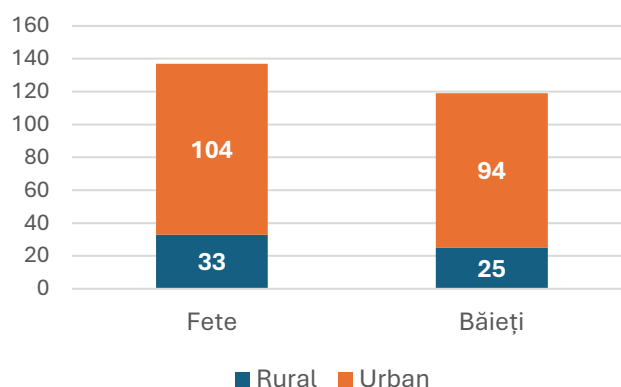


Figura nr. 5.IV. Reprezentarea grafică a distribuției participanților în funcție de mediul de rezidență (rural/urban)



IV.1.6. Eșantionul de conținut

Eșantionul de conținut a fost alcătuit din cinci probleme compuse, a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente (Tabelul nr. 5.IV.).

Tabelul nr. 5.IV. Prezentarea sintetică a tipurilor de informații din enunțul problemelor matematice ce alcătuiesc eșantionul de conținut

	Problema	Informații necesare la rezolvare	Informații contextuale	Informații explicative
Pretest	0. Primul termen al unei adunări este 10, iar al doilea termen este cu 4 mai mic. Află suma celor doi termeni.	- Primul termen este 10; - al doilea termen este cu 4 mai mic.	–	–
	1. Pe o farfurie sunt 4 pere și cu 2 mai puține căpșune. Câte fructe sunt pe farfurie?	- 4 pere; - cu 2 mai puține căpșune.	Pe o farfurie, pere, căpșune, fructe.	–
	2. Ionuț îi oferă mamei, de ziua ei, un buchet în care sunt câțiva ghiocei și mai multe viorele. Știind că în buchet sunt 7 ghiocei și cu 3 mai multe viorele, află câte flori sunt în buchet.	- 7 ghiocei; - cu 3 mai multe viorele.	Ionuț îi oferă mamei, de ziua ei, un buchet cu ghiocei și viorele, flori.	... sunt câțiva ghiocei și mai multe viorele.
Posttest	1. Într-un acvariu sunt 4 peștișori albaștri și cu 3 mai mulți peștișori galbeni. Câți peștișori sunt în acvariu?	- 4 peștișori albaștri; - cu 3 mai mulți peștișori galbeni.	Într-un acvariu, peștișori albaștri, peștișori galbeni.	–
	2. La marginea unui lac locuiește o familie numeroasă de broscuțe. Pe o frunză de nufăr locuiesc câteva broscuțe, iar pe cealaltă frunză locuiesc mai puține broscuțe decât pe prima. Dacă pe prima frunză de nufăr sunt 5 broscuțe, iar pe cealaltă cu 3 mai puține, află câte broscuțe locuiesc pe frunzele de nufăr.	- 5 broscuțe; - cu 3 mai puține.	La marginea unui lac locuiește o familie numeroasă de broscuțe, frunze de nufăr, broscuțe.	Pe o frunză de nufăr locuiesc câteva broscuțe, iar pe cealaltă frunză locuiesc mai puține broscuțe decât pe prima.

Rezolvarea corectă a celor cinci probleme presupune elaborarea unor strategii de rezolvare similare, alcătuite din următoarele etape:

1. determinarea numărului de elemente ale mulțimii comparate;
2. însumarea celor două mulțimi de elemente (Tabelul nr. 6.IV.).

Strategiile de rezolvare ale problemelor 0 și 1 din pretest și a problemei 2 din posttest presupun efectuarea unei operații de scădere și a unei adunări, iar strategiile de rezolvare ale problemelor 2 din pretest și 1 din posttest presupun efectuarea a două operații de adunare.

Tabelul nr. 6.IV. Rezolvările corecte ale problemelor matematice din pretest și posttest

		Pretest			Posttest	
	Problema	0	1	2	1	2
Strategia de rezolvare	Determinarea numărului de elemente a mulțimii comparate	$10 - 4 = 6$ (primul termen)	$4 - 2 = 2$ (căpșune)	$7 + 3 = 10$ (viorele)	$4 + 3 = 7$ (peștișori galbeni)	$5 - 3 = 2$ (broscuțe pe prima frunză de nufăr)
	Însumarea celor două mulțimi de elemente	$10 + 6 = 16$ (suma)	$4 + 2 = 6$ (fructe)	$7 + 10 = 17$ (flori)	$4 + 7 = 11$ (pești)	$5 + 2 = 7$ (broscuțe pe frunzele de nufăr)
	Soluția problemei	16 (suma)	6 fructe	17 flori	11 pești	7 broscuțe

IV.1.7. Etapele cercetării și procedura de investigație

1. *Colectarea datelor despre caracteristicile individuale ale elevilor participanți* (chestionar adresat profesorilor pentru învățământul primar): gen biologic (M/F), vârsta (în ani împliniți) și mediul de rezidență (rural/ urban).

2. *Aprecierea nivelului de dezvoltare a capacității individuale de înțelegere a unui text citit* de către cadrele didactice care predau la clasele în care învață elevii (scală Likert de la 1 la 10).

3. *Administrarea testelor realizate de cercetător* în două ore diferite de Matematică și explorarea mediului (Tabelul 7.IV.). Elevii au primit două fișe de activitate independentă ce conțin, în total, cinci probleme ale căror soluții se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente.

Tabelul nr. 7.IV. Prezentarea sintetică a etapelor administrării testelor realizate de cercetător

Pretest	Posttest
1. Citirea enunțului de către învățătoare (frontal, o singură dată);	1. Citirea enunțului de către învățătoare (frontal, o singură dată);
2. Citirea enunțului de către elevi (individual, în ritm propriu);	2. Citirea enunțului de către elevi (individual, în ritm propriu);
—	3. Reprezentarea grafică a conținutului problemei de către elevi, prin desen;
3. Rezolvarea problemei, prin efectuarea calculelor necesare pentru determinarea soluției.	4. Rezolvarea problemei, prin efectuarea calculelor necesare pentru determinarea soluției.

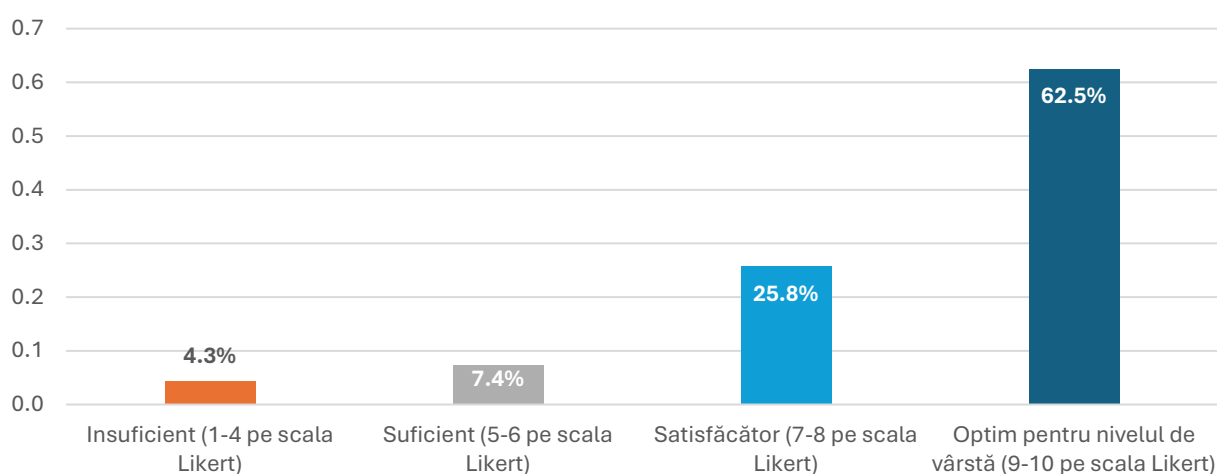
4. *Analiza calitativă și cantitativă a datelor obținute și interpretarea rezultatelor cercetării.* Datele obținute din analiza strategiilor de rezolvare și a soluțiilor determinate de elevi au fost analizate cu ajutorul platformei DATAtab: Online Statistics Calculator. DATAtab e.U. Graz, Austria. URL <https://datatab.net>.

IV.2. Analiza datelor și interpretarea rezultatelor

IV.2.1. Analiza nivelului de dezvoltare a *capacității* elevilor participanți de *înțelegere a unui text citit*

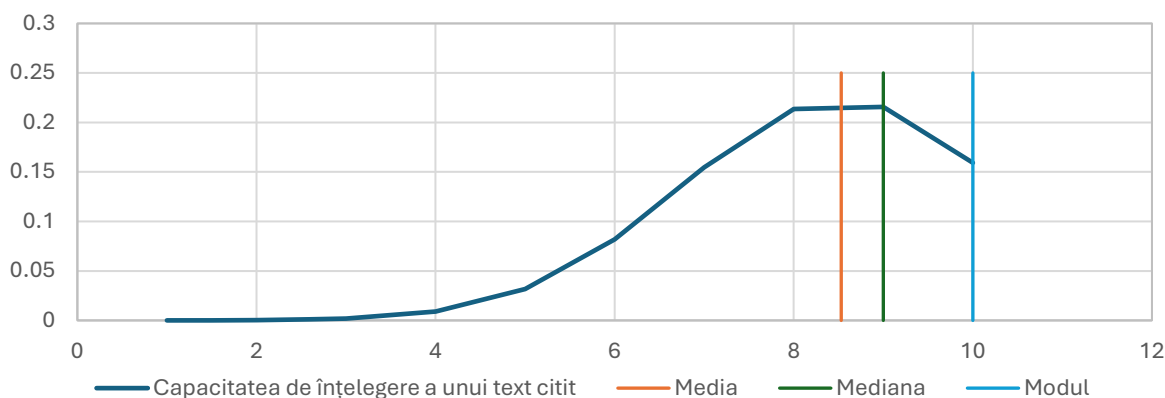
Nivelul individual de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit a fost apreciat de profesorii pentru învățământul primar de la clasele în care învață elevii participanți, cu ajutorul unei scale Likert de la 1 la 10. Valorile cu care a fost apreciat nivelul de dezvoltare al capacității de înțelegere a unui text citit au fost grupate în patru intervale: *optim pentru nivelul de vârstă*, *satisfăcător*, *suficient* și *insuficient*.

Figura nr. 9.IV. Reprezentarea grafică a intervalelor de apreciere a nivelului capacității subiecților de înțelegere a unui text citit



Analiza datelor oferite de profesorii pentru învățământul primar a evidențiat că mai mult de jumătate dintre elevii participanți (62,5%) au abilități de înțelegere a unui text citit optim dezvoltate pentru nivelul de vârstă (Figura nr. 9.IV.), indicând o abatere semnificativă de la distribuția normală, în direcția valorilor mari pe scala Likert (8–10), ceea ce sugerează o posibilă supraapreciere capacității elevilor de înțelegere a unui text citit de către cadrele didactice.

Figura nr. 10.IV. Forma distribuției variabilei moderator (capacitatea de înțelegere a unui text citit) la nivelul eșantionului analizat



Având în vedere rezultatele obținute de Bjork & Bowyer-Crane (2013), Boonen et al. (2016), Can (2020), Pongsakdi et al. (2020), Timario (2020) care evidențiază rolul de predictor al capacității de înțelegere a unui text citit asupra performanțelor rezolutive ale elevilor, putem presupune că cel puțin 62,5% dintre subiecți, a căror capacitate de înțelegere a unui text citit a fost apreciată cu valori optime pentru nivelul de vârstă (Figura nr. 9.IV.), vor rezolva corect problemele matematice, atât în pretest, cât și în posttest.

IV.2.2. Clasificarea soluțiilor problemelor determinate de elevii participanți în pretest și în posttest

În funcție de corectitudinea rezultatului matematic și a detalierilor verbale scrise oferite de elevii care au explicat rezultatul matematic, acolo unde a fost cazul, soluțiile problemelor au fost clasificate în *soluții corecte* și *soluții incorecte* (Tabelul 11.IV.).

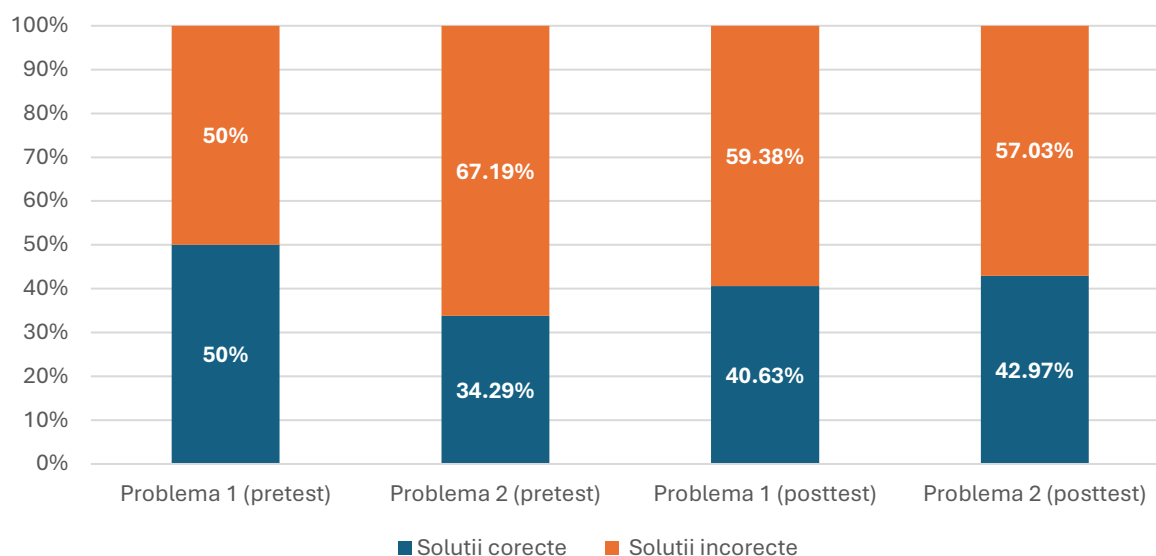
Tabelul nr. 11.IV. Clasificarea soluțiilor problemelor în pretest și posttest în funcție de corectitudinea rezultatului matematic

	Soluții corecte (SC)		Soluții incorecte (SI)		Total	
	Nr. de elevi	%	Nr. de elevi	%	Nr. de elevi	%
Pretest						
Problema 0	111	43,4%	145	56,6%	256	100%
Problema 1	128	50%	128	50%	256	100%
Problema 2	84	32,8%	172	67,2%	256	100%
Posttest						
Problema 1	104	40,6%	152	59,4%	256	100%
Problema 2	110	43%	146	57%	256	100%

Fiind formulată doar cu ajutorul limbajului matematic abstract, problema 0 nu are echivalent în posttest și a fost exclusă din majoritatea analizelor statistice. Numărul soluțiilor determinate de elevi la problema 0 a fost utilizat ca reper în cadrul unora dintre analizele cantitative ale strategiilor rezolutive ale problemelor 1 din pretest și 2 din posttest, similare ca structură cu problema 0.

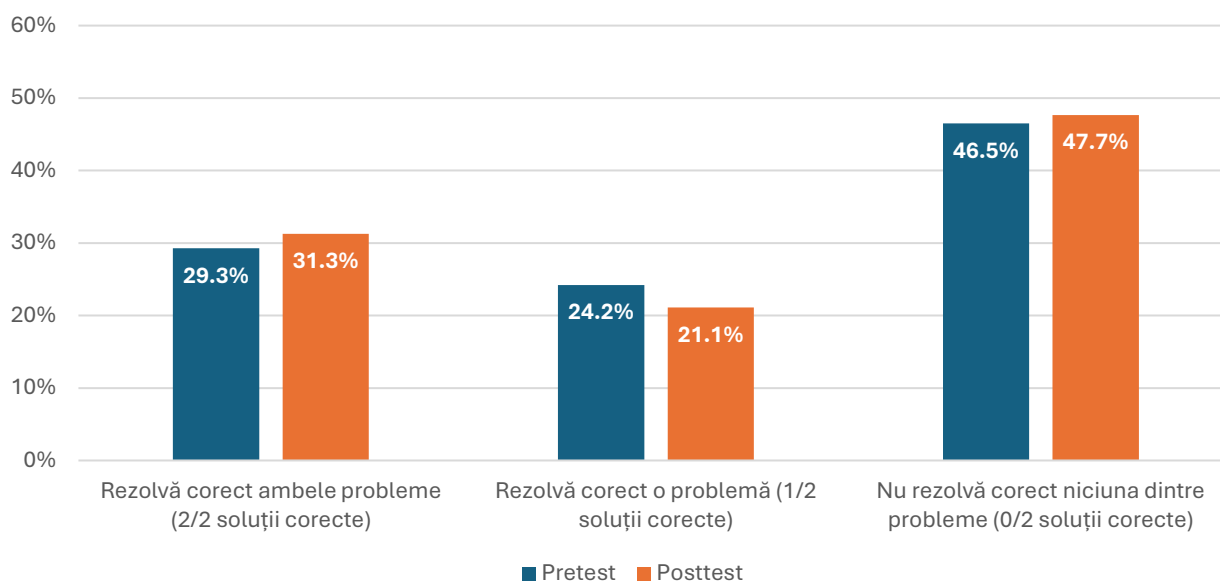
Analiza cantitativă a rezolvărilor celor patru probleme în ambele etape ale cercetării a indicat un număr mare de soluții incorecte determinate de participanți la fiecare dintre cele două probleme din pretest și posttest (Tabelul nr. 11.IV., Figura nr. 11.IV.).

Figura nr. 11.IV. Prezentarea comparativă a soluțiilor corecte și incorecte ale problemelor 1 și 2 din pretest și posttest



Deși procentul de elevi a căror capacitate de înțelegere a unui text citit a fost apreciată ca fiind optim dezvoltată pentru nivelul de vârstă (Figura nr. 9.IV.) ar fi trebuit să anticipeze un procent similar al soluțiilor corecte determinate de aceștia în pretest și posttest, doar 29,3% dintre elevii din pretest și 31,3% dintre elevii din posttest au reușit să rezolve corect ambele probleme, iar 24,2% dintre elevii din pretest și 21,1% dintre elevii din posttest au rezolvat corect doar una din cele două probleme din fiecare etapă a cercetării (Figura nr. 12.IV.).

Figura nr. 12.IV. Distribuția soluțiilor corecte și a soluțiilor incorecte determinate de elevi în pretest și în posttest



IV.2.3. Analiza principalelor strategii de rezolvare utilizate de elevii de clasa I pentru determinarea soluțiilor problemelor în pretest și posttest

În funcție de calitatea strategiei de rezolvare, a soluției problemei și a detaliilor rezultatului matematic oferite de unii elevi, în scris, rezolvările problemelor au fost clasificate în: *rezolvări corecte* (RC) și *rezolvări incorecte* (RI).

1. Rezolvările corecte (RC) demonstrează înțelegerea problemei (vezi subcapitolul IV.1.6., Tabelul 4.IV.). Au fost considerate **corecte**, rezolvările problemelor care articulează cu acuratețe, parțial sau total, următoarele elemente: **strategia corectă de rezolvare** – scrierea și efectuarea corectă a calculelor, în ordinea logică de aflare a necunoscutei din problemă (Figura nr. 13.IV.a.), **soluția corectă** – indicarea rezultatului matematic obținut din efectuarea corectă a calculelor (Figura nr. 13.IV.b) și **detalierea corectă a soluției problemei** (Figura nr. 13.IV.c). Au fost considerate corecte și rezolvările ale căror operații ori rezultate matematice nu erau însoțite de detalieri verbale sau unde elevii nu au indicat explicit soluția problemei (Figura nr. 13.IV.a.), prin formularea convențională „R: rezultat matematic + detaliere” (Figura nr. 13.IV.b, Figura nr. 13.IV.c.), această deprindere de prezentare a soluției neexistând în absența instruirii formale a elevului în acest sens.

Figura nr. 13.IV. Exemplificări ale rezolvărilor corecte ale problemelor din pretest și posttest, în funcție de complexitatea detalierei soluției

a. ► Strategie de rezolvare corectă	Problema 2 (pretest)	Problema 2 (posttest)
	$\cancel{7} + 3 = 10$ $70 + \cancel{7} = 17$	$5 - 3 = 2$ $5 + 2 = 7$
b. ► Strategie de rezolvare corectă ► Soluție corectă	Problema 2 (pretest)	Problema 1 (posttest)
	$\textcircled{1} \quad 7 + 3 = 10 \quad R: 17$ $\textcircled{2} \quad 7 + 10 = 17$	$A = 4$ $G = 4 + 3 = 7$ $7 + 4 = 11$ $R: 11$
c. ► Strategie de rezolvare corectă ► Soluție corectă ► Detaliere corectă a rezultatului matematic	Problema 1 (pretest)	Problema 2 (pretest)
	$4 - 2 = 2$ $2 + 4 = 6$ $R: 6 \text{ fructe}$	$\cancel{7} + 3 = 10 \text{ (corect)}$ $7 + 10 = 17 \text{ (corect)}$ $R: 17 \text{ (corect)}$

2. Rezolvările incorecte (RI) au fost considerate un indicator al înțelegerii precare a problemei și au fost clasificate în funcție de etapa în care se produce eroarea: în etapa elaborării strategiei de rezolvare, a indicării soluției sau a detalierei rezultatului matematic.

- **strategie de rezolvare corectă, soluție corectă, urmată de detalierea incorectă a rezultatului matematic sau a operațiilor care alcătuiesc strategia de rezolvare (RI_d)** (Figura nr. 14.IV.). Acest tip de eroare a fost identificat la problemele al căror

enunț descrie două mulțimi de elemente distincte, subordonate unei mulțimi de nivel superior care denumește categoria acelor elemente (ex: problema 1, pretest – perele și căpșunile aparțin mulțimii fructelor; problema 2, pretest – ghiociei și viorelele sunt flori; problema 1, posttest – peștișorii albaștri și cei galbeni aparțin mulțimii peștișorilor). Această eroare nu poate fi identificată în absența detalierii verbale a rezultatului matematic. Prezența detaliilor verbale incorecte chestionează acuratețea înțelegerii problemei și logica raționamentului care a stat la baza elaborării strategiei de rezolvare. Strategiile de tip RId nu se regăsesc în rândul rezolvărilor problemei 1 din posttest (Tabelul nr. 13.IV.), acestea fiind elaborate după reprezentarea grafică a conținutului problemei, ceea ce evidențiază potențialul clarificator al desenelor realizate de elevi.

Figura nr. 14.IV. Rezolvarea incorectă a problemei (RId) (detalierea incorectă a rezultatului matematic sau a operațiilor care alcătuiesc strategia de rezolvare)

Problema 0 (pretest)	
Problema 1 (pretest)	
Problema 2 (pretest)	

- **strategie de rezolvare corectă, însoțită de soluție incorectă (RIs).** Deși au determinat corect rezultatul matematic, mai mulți participanți au detaliat incorect rezultatul numeric (Figura nr. 15.IV.), evidențiind înțelegerea defectuoasă a problemei.

Figura nr. 15.IV. Rezolvarea incorectă a problemei (RIs) (strategie de rezolvare corectă însoțită de soluție incorectă)

Problema 0
(pretest)

$$10 - 4 = 6$$

$$10 + 6 = 16$$

R: 6 R: 16

Problema 1
(pretest)

$$4 - 2 = 2$$

$$4 + 2 = 6$$

R: 2 FRUCTE

- **strategie de rezolvare incorectă:** elevul scrie și efectuează alte calcule sau efectuează calculele corespunzătoare în altă ordine decât ordinea logică necesară pentru aflarea necunoscutelor (Figura nr. 16.IV.).

Figura nr. 16.IV. Rezolvarea incorectă a problemei (strategie de rezolvare incorectă)

Problema 0
(pretest)

$$10 + 4 = 14$$

$$6 + 4 = 10$$

Problema 2
(pretest)

$$7 + 2 = 9$$

$$10 + 3 = 13$$

$$4 - 2 = 2$$

$$7 + 3 = 10$$

Problema 1
(posttest)

$$4 + 3 = 7$$

$$3 + 4 = 7$$

R: 7

Problema 2
(posttest)

$$5 + 2 = 7$$

$$7 + 2 = 9$$

R: 9 bozcute

Au fost identificate câteva categorii ale **strategiilor de rezolvare incorecte** (Figura nr. 16.IV.) care oferă indicii despre raționamentul care a stat la baza alegerii operațiilor prin care subiecții au rezolvat problema:

- **strategie de rezolvare incorectă (RI3) → prin efectuarea operației necesare pentru determinarea valorii comparate.** Participanții care au utilizat această strategie s-au limitat la a efectua operația sugerată de cuvintele-cheie din enunț (Figura nr. 17.IV.).

Figura nr. 17.IV. Rezolvarea incorectă a problemei (RI3) – strategie de rezolvare incorectă prin efectuarea operației necesare pentru determinarea valorii comparate

Problema 1 (pretest)	$4 - 2 = 2$	R: 2 prute
Problema 2 (pretest)	$7 + 3 = 10$	R: 10
Problema 1 (posttest)	$4 + 3 = 7$	R: 7 prute
Problema 2 (posttest)	$5 - 3 = 2$	R: 2 broscute

- strategie de rezolvare incorectă (RI2) → (1) prin efectuarea operației sugerate de cuvintele-cheie din enunț, urmată de (2) adunarea numerelor din enunț (Figura nr. 18.IV.).

Figura nr. 18.IV. Rezolvarea incorectă a problemei (RI2) – strategie de rezolvare incorectă prin (1) efectuarea operației necesare pentru determinarea valorii comparate și prin (2) adunarea numerelor din enunț

Problema 0 (pretest) (1) efectuarea scăderii sugerate de expresia „cu 4 mai mic” (2) adunarea numerelor din enunț	$10 - 4 = 6$ $10 + 4 = 14$
(1) efectuarea scăderii sugerate de expresia „cu 4 mai mic” (2) adunarea rezultatului primei operații cu diferența dintre valoarea comparată și cea de referință (al doilea număr din enunț)	$10 - 4 = 6$ $6 + 4 = 10$
Problema 1* (pretest) (1) efectuarea scăderii sugerate de expresia „cu 2 mai puține” (2) adunarea numerelor din enunț	$4 - 2 = 2$ (câșturi) $4 + 2 = 6$ (câșturi) R: câșturi
* În cazul particular al acestei probleme, utilizarea unui raționament incorect, conduce la obținerea, întâmplătoare, rezultatului matematic corect (6).	
(1) efectuarea scăderii sugerate de expresia „cu 2 mai puține” (2) adunarea rezultatului primei operații cu diferența dintre valoarea comparată și cea de referință (al doilea număr din enunț)	$4 - 2 = 2$ $2 + 2 = 4$

Problema 2 (pretest)

(1) efectuarea adunării sugerate de expresia „cu 3 mai mulțe”

(2) adunarea numerelor din enunț

$$7 + 3 = 10$$

$$10 + 3 = 13$$

(1) efectuarea adunării sugerate de expresia „cu 3 mai mulțe”

(2) adunarea rezultatului primei operații cu diferența dintre valoarea comparată și cea de referință (al doilea număr din enunț)

$$7 + 3 = 10$$

$$3 + 7 = 10$$

Problema 1 (posttest)

(1) efectuarea adunării sugerate de expresia „cu 3 mai mulți”

(2) adunarea numerelor din enunț

$$4 + 3 = 7$$

$$3 + 4 = 7$$

peste 10

R = 7

(1) efectuarea adunării sugerate de expresia „cu 3 mai mulți”

(2) adunarea rezultatului primei operații cu diferența dintre valoarea comparată și cea de referință (al doilea număr din enunț)

$$4 + 3 = 7$$

$$7 + 3 = 10$$

R = 10

Problema 2 (posttest)

(1) efectuarea scăderii sugerate de expresia „cu 3 mai puține”

(2) adunarea numerelor din enunț

$$5 - 3 = 2$$

$$5 + 3 = 8$$

(1) efectuarea scăderii sugerate de expresia „cu 3 mai puține”

(2) adunarea rezultatului primei operații cu diferența dintre valoarea comparată și cea de referință (al doilea număr din enunț)

$$5 - 3 = 2$$

$$2 + 3 = 5$$

- **strategie de rezolvare incorectă (RI1) → prin adunarea numerelor din enunț.** În cazul problemelor 0 și 1 din pretest și 2 din posttest, în care valoarea comparată se determină prin scădere, intenția subiecților de aflare a numărului total de elemente, prin adunarea numerelor din enunț este evidentă (Figura nr. 19.IV.). La problemele în care valoarea comparată se determină prin adunare, adunarea numerelor din enunț poate fi atribuită fie asocierii cu cuvintele-cheie, fie intenției de aflare a numărului total de elemente al celor două mulțimi, ambele raționamente incorecte, conducând la efectuarea aceleiași operații (Figura nr. 19.IV.).

Figura nr. 19.IV. Rezolvarea incorectă a problemei (RI1) – strategie de rezolvare incorectă prin adunarea numerelor din enunț

Problema 0

(pretest)

$$10 + 4 = 14$$

(termen)

Problema 1*

(pretest)

* Rezultatul adunării numerelor din enunț corespunde, soluției corecte a problemei

$$4 + 2 = 6$$

R = 6

Problema 2
(pretest)

$$7 + 3 = 10 \quad R: 10$$

Problema 1
(posttest)

$$4 + 3 = 7 \quad R: 7 \text{ pusti}$$

Problema 2
(posttest)

$$5 + 3 = 8 \quad R: 8$$

- **strategie de rezolvare incorectă (RI0) → prin efectuarea oricăror alte operații matematice** sau a operațiilor corespunzătoare determinării soluției corecte, dar în altă ordine decât în ordinea logică a aflării necunoscutelor (Figura nr. 20.IV.).

Figura nr. 20.IV. Rezolvarea incorectă a problemei (RI0) – efectuarea operațiilor matematice într-o ordine necorespunzătoare sau efectuarea oricăror alte operații matematice

Problema 0
(pretest)

$$10 + 4 = 14 \quad 14 - 10 = 4$$

Problema 1
(pretest)

$$4 - 2 = 2 \\ 4 + 6 = 8$$

Problema 2
(pretest)

$$7 + 3 = 10 \\ 7 - 3 = 4 \quad \text{mai multe 4}$$

Problema 1
(posttest)

$$4 + 3 = 7 \\ 7 - 3 = 4$$

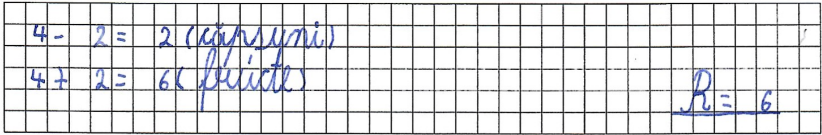
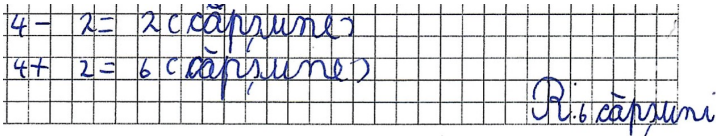
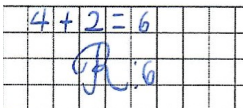
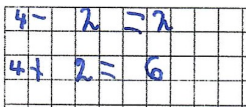
Problema 2
(posttest)

$$5 - 3 = 2 \\ 2 - 2 = 0$$

Analiza strategiilor de rezolvare utilizate de elevi în pretest și în posttest a evidențiat un număr mare de soluții corecte la problema 1 din pretest, comparativ cu numărul soluțiilor corecte obținute de elevi la celelalte probleme (Tabelul 11.IV.). Numărul mare de soluții corecte ale problemei 1 din pretest se datorează egalității dintre diferența dintre valoarea comparată (numărul căpșunelor) și valoarea de referință (numărul perelor), care este 2, și numărul de elemente ale mulțimii necunoscute (cea a căpșunelor), care este tot 2. Din cauza acestor egalități elevii pot ajunge la rezultatul corect 6 (fructe), fie cu ajutorul unui raționament fundamentat pe înțelegerea relațiilor dintre datele cantitative, fie cu ajutorul unui raționament incorect, utilizând strategii de

rezolvare incorecte, cum sunt RI_d, RI₂ sau RI₁, al căror rezultat matematic (6), coincide cu soluția corectă a problemei. Prezența detaliilor verbale ale operațiilor matematice și ale soluțiilor problemelor permite diferențierea raționamentului corect de cel incorect, în ciuda operațiilor identice utilizate la elaborarea celor trei tipuri de strategii rezolutive (Figura nr. 21.IV.).

Figura nr. 21.IV. Similitudinile strategiilor rezolutive utilizate de elevi la rezolvarea problemei 1 din pretest

Problema 1 (pretest) Pe o farfurie sunt 4 pere și cu 2 mai puține căpșune. Câte fructe sunt pe farfurie?	
RC	
RI_d/ RI₂	
RI₁	
RC / RI₂	

În absența detaliilor verbale, identificarea strategiilor corecte de rezolvare, fundamentate pe înțelegerea relațiilor cantitative dintre datele problemei, s-a realizat prin raportarea la rezolvările celorlalte probleme de pe fișa de lucru (problema 0 și problema 2), în special prin raportarea la rezolvarea problemei 0, a cărei direcție de realizare a comparației între mulțimi este identică cu cea a problemei 1.

Absența detaliilor verbale ale operațiilor matematice, ce compun unele dintre strategiile corecte de rezolvare ale problemei 1 din pretest, fac imposibilă discriminarea și aprecierea acurateței raționamentului care a stat la baza rezolvării problemei. În acest sens, aprecierea strategiilor corecte de rezolvare ale problemei 1, ce conțin operații matematice neînsoțite de detalieri, s-a realizat prin raportarea la rezolvările celorlalte probleme de pe fișa de lucru (problema 0 și problema 2), în special prin raportarea la rezolvarea problemei 0, a cărei direcție de realizare a comparației între mulțimi este identică cu cea a problemei 1 (Figura nr. 22.IV.).

Figura nr. 22.IV. Similitudinile comportamentului rezolutiv al subiecților la problemele din pretest

Rezolvări incorecte (RI) ale celor trei probleme în pretest

1. Primul termen al unei adunări este 10, iar al doilea termen este cu 4 mai mic. Află suma celor doi termeni.

$$\begin{array}{r} 10 + 4 = 14 \\ 10 + 4 = 14 \end{array}$$

1. Primul termen al unei adunări este 10, iar al doilea termen este cu 4 mai mic. Află suma celor doi termeni.

$$\begin{array}{r} 10 - 4 = 6 \\ 10 + 4 = 14 \\ 10 + 4 = 14 \\ 10 + 4 = 14 \end{array}$$

2. Pe o farfurie sunt 4 pere și cu 2 mai puține căpșune. Câte fructe sunt pe farfurie?

$$\begin{array}{r} 4 - 2 = 2 \\ 4 + 2 = 6 \end{array}$$

2. Pe o farfurie sunt 4 pere și cu 2 mai puține căpșune. Câte fructe sunt pe farfurie?

$$\begin{array}{r} 4 - 2 = 2 \\ 4 + 2 = 6 \end{array}$$

3. Ionuț îi oferă mamei, de ziua ei, un buchet în care sunt câțiva ghiocei și mai multe violele. Știind că în buchet sunt 7 ghiocei și cu 3 mai multe violele, află câte flori sunt în buchet.

$$\begin{array}{r} 7 + 3 = 10 \\ 7 + 3 = 10 \end{array}$$

3. Ionuț îi oferă mamei, de ziua ei, un buchet în care sunt câțiva ghiocei și mai multe violele. Știind că în buchet sunt 7 ghiocei și cu 3 mai multe violele, află câte flori sunt în buchet.

$$\begin{array}{r} 7 + 3 = 10 \\ 7 + 3 = 10 \end{array}$$

Rezolvări corecte (RC) ale celor trei probleme în pretest

1. Primul termen al unei adunări este 10, iar al doilea termen este cu 4 mai mic. Află suma celor doi termeni.

$$\begin{array}{r} 10 - 4 = 6 \\ 10 + 6 = 16 \end{array}$$

1. Primul termen al unei adunări este 10, iar al doilea termen este cu 4 mai mic. Află suma celor doi termeni.

$$\begin{array}{r} 10 - 4 = 6 \\ 10 + 6 = 16 \end{array}$$

2. Pe o farfurie sunt 4 pere și cu 2 mai puține căpșune. Câte fructe sunt pe farfurie?

$$\begin{array}{r} 4 - 2 = 2 \\ 4 + 2 = 6 \end{array}$$

2. Pe o farfurie sunt 4 pere și cu 2 mai puține căpșune. Câte fructe sunt pe farfurie?

$$\begin{array}{r} 4 - 2 = 2 \\ 4 + 2 = 6 \end{array}$$

3. Ionuț îi oferă mamei, de ziua ei, un buchet în care sunt câțiva ghiocei și mai multe violele. Știind că în buchet sunt 7 ghiocei și cu 3 mai multe violele, află câte flori sunt în buchet.

$$\begin{array}{r} 7 + 3 = 10 \\ 7 + 3 = 10 \end{array}$$

3. Ionuț îi oferă mamei, de ziua ei, un buchet în care sunt câțiva ghiocei și mai multe violele. Știind că în buchet sunt 7 ghiocei și cu 3 mai multe violele, află câte flori sunt în buchet.

$$\begin{array}{r} 7 + 3 = 10 \\ 7 + 3 = 10 \end{array}$$

Similar, la problemele a căror strategie de rezolvare presupune efectuarea a două operații de adunare (problema 2 din pretest și problema 1 din posttest), nu se poate diferenția raționamentul care a determinat rezolvările incorecte de tip RI3 (Figura nr. 17.IV.) de raționamentul care a generat rezolvările incorecte de tip RI1 (Figura nr. 19.IV), ambele rezolvări incorecte îmbrăcând forma unei adunări efectuate cu ajutorul numerelor din enunț.

Analiza strategiilor incorecte utilizate de elevi la rezolvarea problemelor din pretest și din posttest a evidențiat că strategiile de tip RI3 (efectuarea operației sugerate de cuvintele-cheie din enunț) și RI0 (efectuarea altor operații matematice incorecte) au frecvența cea mai mare.

Distribuția diferitelor tipuri de strategii incorecte de rezolvare utilizate de elevi, în funcție de nivelul de dezvoltare al capacității de înțelegere a unui text citit a evidențiat că rezolvările incorecte RI3 și RI sunt majoritare, indiferent de nivelul de dezvoltare al capacității de înțelegere a unui text citit (Tabelul nr. 13.IV).

În urma clasificării și analizei strategiilor rezolutive utilizate de elevi, a fost identificat un număr mare al soluțiilor incorecte (mai mult de jumătate dintre soluțiile fiecăreia din cele cinci probleme). Cele mai frecvente strategii rezolutive utilizate de elevii al căror nivel de dezvoltare a abilităților de înțelegere a unui text citit a fost apreciat ca fiind satisfăcător, suficient sau insuficient, au fost cele de tip RI0, pentru care nu a putut fi identificat un anumit tipar de raționament în alegerea operațiilor matematice. Complementar, cele mai frecvente strategii rezolutive incorecte utilizate de elevii a căror capacitate de înțelegere a unui text citit a fost considerată optim dezvoltată pentru nivelul de vârstă, au fost cele de tip RI, unde, pentru determinarea soluției, subiecții au efectuat doar operația sugerată de cuvintele-cheie din enunțul problemelor.

Tabelul nr. 13.IV. Analiza cantitativă a strategiilor de rezolvare elaborate de elevi la problemele din pretest și în posttest

	Rezolvări corecte (RC)	Rezolvări incorecte (RI)						Total
	► Strategie de rezolvare corectă ► Soluție corectă ► Detaliere corectă a soluției	► Strategie de rezolvare corectă ► Soluție corectă ► Detaliere incorectă a soluției (RIId)	► Strategie de rezolvare corectă ► Soluție incorectă (RIs)	► Strategie de rezolvare incorectă → efectuează operația sugerată de cuvintele-cheie din enunț (RI3)	► Strategie de rezolvare incorectă → efectuează operația sugerată de cuvintele-cheie din enunț, apoi adună numerele din enunț (RI2)	► Strategie de rezolvare incorectă → adună numerele din enunț (RI1)	► Strategie de rezolvare incorectă → orice alte operații matematice/ soluții incorecte (RI0)	
Problema 0 (pretest)	111 elevi 43,4%	5 elevi 2%	1 elev 0,4%	21 elevi 8,2%	16 elevi 6,3%	1 elev 0,4%	101 elevi 39,5%	256 elevi 100%
Problema 1 (pretest)	128 elevi 50%	6 elevi 2,3%	4 elevi 1,6%	53 elevi 20,7%	8 elevi 3,1%	14 elevi 5,5%	43 elevi 16,8%	256 elevi 100%
Problema 2 (pretest)	84 elevi 32,8%	3 elevi 1,2%	—	81 elevi 31,6%	17 elevi 6,6%	1 elev 0,4%	70 elevi 27,3%	256 elevi 100%
Problema 1 (posttest)	104 elevi 40,6%	—	2 elevi 0,8%	73 elevi 28,5%	22 elevi 8,6%	—	55 elevi 21,5%	256 elevi 100%
Problema 2 (posttest)	110 elevi 43%	—	—	55 elevi 21,5%	24 elevi 9,4%	23 elevi 9%	44 elevi 17,2%	256 elevi 100%

IV.2.4. Analiza cantitativă a reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor, în posttest

În funcție de **tipul informațiilor din enunț pe care le prezintă**, reprezentările grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor au fost clasificate în *reprezentări grafice (corecte sau incorecte)*, ce ilustrează informațiile necesare la rezolvare (Figura nr. 24.IV.a.) și *reprezentări grafice ilustrative*, care includ elemente din conținutul problemelor, irelevante pentru elaborarea strategiei de rezolvare, descrise de informațiile contextuale sau relaționate contextului particular pe care acestea îl prezintă (Figura nr. 24.IV.b.).

Figura nr. 23.IV. Prezentarea comparativă a distribuției reprezentărilor grafice ale informațiilor necesare la rezolvare și ale celor ilustrative realizate de elevi la problemele 1 și 2 din posttest

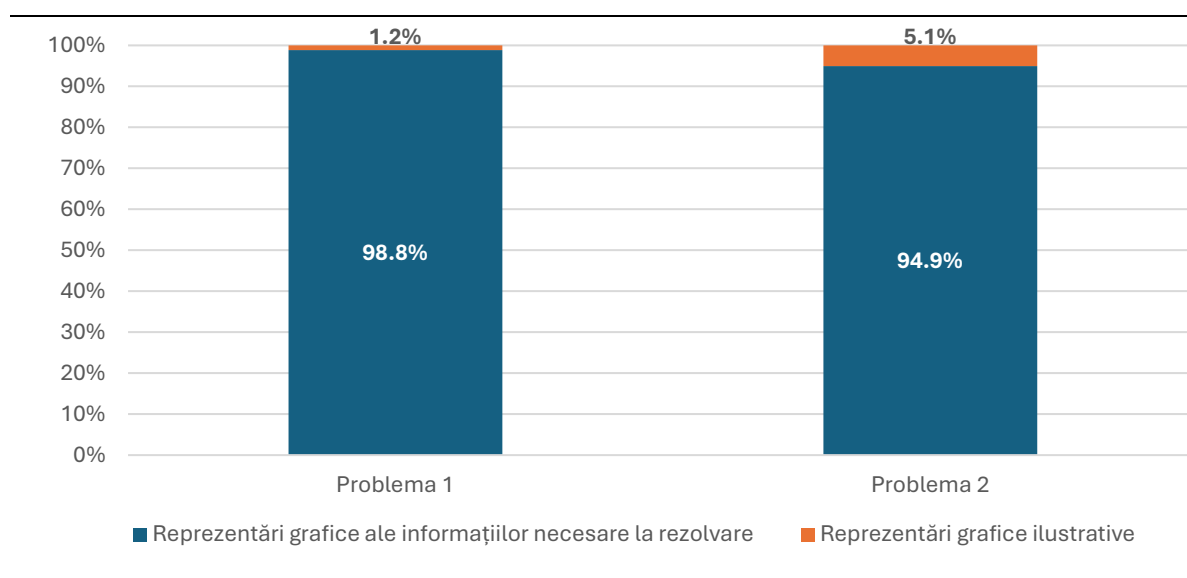
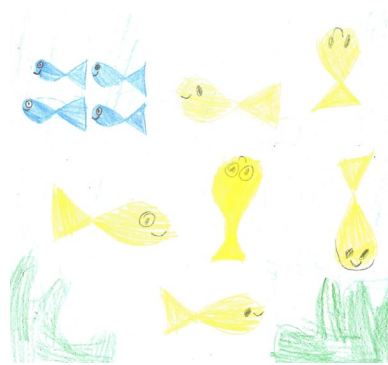


Figura nr. 24.IV. Reprezentări grafice ale informațiilor necesare la rezolvare și reprezentări grafice ilustrative realizate de elevi pe baza conținutului problemelor din posttest

Problema 1
(posttest)

Într-un acvariu sunt **4 peștișori albaștri** și **cu 3 mai mulți peștișori galbeni**.
Câți peștișori sunt în acvariu?

a. reprezentări grafice ale informațiilor necesare la rezolvare



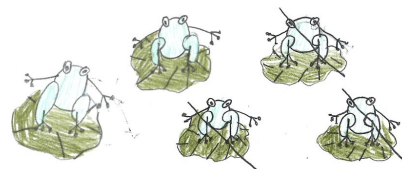
b. reprezentări grafice ilustrative



Problema 2
(posttest)

La marginea unui lac locuiește o familie numeroasă de broscuțe. Pe o frunză de nufăr locuiesc câteva broscuțe, iar pe cealaltă frunză locuiesc mai puține broscuțe decât pe prima. Dacă pe prima frunză de nufăr sunt **5 broscuțe**, iar pe cealaltă **cu 3 mai puține**, află câte broscuțe locuiesc pe frunzele de nufăr.

a. reprezentări grafice ale informațiilor necesare la rezolvare

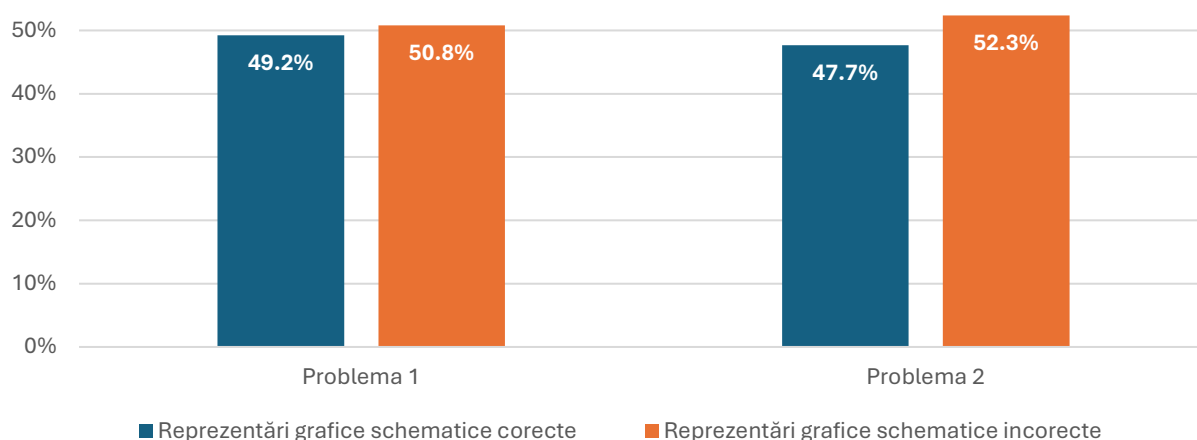


b. reprezentări grafice ilustrative



În funcție de **corectitudinea reprezentării prin desen a informațiilor necesare la rezolvare**, reprezentările grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor din posttest au fost clasificate, asemeni celor descrise de Boonen et al. (2014), în *reprezentări grafice corecte* și *reprezentări grafice incorecte* (Figura nr. 25.IV.).

Figura nr. 25.IV. Prezentarea comparativă a distribuției reprezentărilor grafice corecte și incorecte realizate de elevi la problemele 1 și 2 din posttest



Din cauza dificultăților de discriminare a reprezentărilor grafice ilustrative de o anumită subcategorie a reprezentărilor grafice incorecte, prezentate în subcapitolul IV.2.5., în etapa analizei datelor, reprezentările grafice ilustrative au fost incluse în categoria reprezentărilor incorecte.

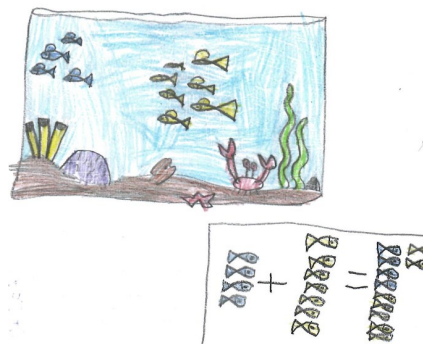
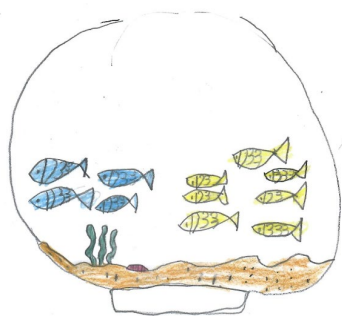
IV.2.5. Analiza vizuală a reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor în posttest

1. Reprezentările grafice corecte descriu două mulțimi de elemente: mulțimea de referință (prima valoare numerică din enunț) și mulțimea comparată, al cărei număr de elemente se obține prin adunarea (pentru problema 1) sau scăderea (pentru problema 2) diferenței (a doua valoare din enunț) din numărul elementelor mulțimii de referință (Figura nr. 26.IV.a.). Un caz particular al reprezentărilor grafice corecte îl constituie reprezentările grafice care indică numărul corect de elemente al celor două mulțimi cu ajutorul cifrelor, în absența reprezentării cantitative a elementelor acelor mulțimi (Figura nr. 26.IV.b.).

Figura nr. 26.IV. Reprezentări grafice corecte realizate de elevi după conținutul problemelor din posttest

Problema 1 (posttest)	Într-un acvariu sunt 4 peștișori albaștri și cu 3 mai mulți peștișori galbeni . Câți peștișori sunt în acvariu?
---------------------------------	--

a. reprezentarea corectă a numărului de elemente al celor două mulțimi



Problema 2
(posttest)

La marginea unui lac locuiește o familie numeroasă de broscuțe. Pe o frunză de nufăr locuiesc câteva broscuțe, iar pe cealaltă frunză locuiesc mai puține broscuțe decât pe prima. Dacă pe prima frunză de nufăr sunt **5 broscuțe**, iar pe cealaltă **cu 3 mai puține**, află câte broscuțe locuiesc pe frunzele de nufăr.

a. reprezentarea corectă a numărului de elemente al celor două mulțimi



b. indicarea numărului de elemente al celor două mulțimi cu ajutorul numerelor, în absența reprezentării cantitative



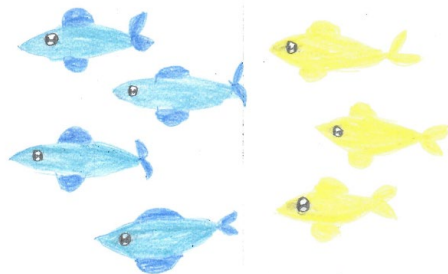
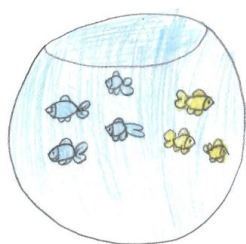
2. Analiza **reprezentărilor grafice incorecte** a evidențiat două categorii de desene. O categorie a reprezentărilor grafice incorecte ilustrează două mulțimi cu tot atâtea elemente câte arată fiecare număr din enunț (RgInr) (Figura nr. 27.IV.a și reprezentări grafice incorecte care ilustrează, cele două mulțimi ca având orice alt număr incorect de elemente (RgI0) (Figura nr. 27.IV.b.).

Figura nr. 27.IV. Reprezentări grafice incorecte realizate de elevi pe baza conținutului problemelor din posttest

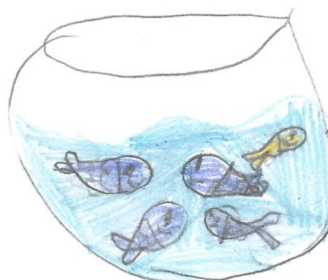
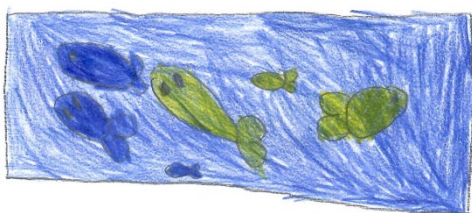
Problema 1
(posttest)

Într-un acvariu sunt **4 peștișori albaștri** și **cu 3 mai mulți peștișori galbeni**. Câți peștișori sunt în acvariu?

a. reprezentarea a două mulțimi cu tot atâtea elemente câte arată fiecare număr din enunț (RsInr)



b. reprezentarea celor două mulțimi cu orice alt număr incorect de elemente

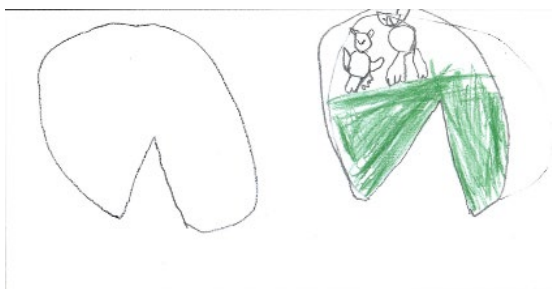


Problema 2 La marginea unui lac locuiește o familie numeroasă de broscuțe. Pe o frunză de nufăr locuiesc câteva broscuțe, iar pe cealaltă frunză locuiesc mai puține broscuțe decât pe prima. Dacă pe prima frunză de nufăr sunt **5 broscuțe**, iar pe cealaltă **cu 3 mai puține**, află câte broscuțe locuiesc pe frunzele de nufăr.

a. reprezentarea a două mulțimi cu tot atâtea elemente câte arată fiecare număr din enunț (SInr)



b. reprezentarea celor două mulțimi cu orice alt număr incorect de elemente



Tabelul nr. 20.IV. Analiza calitativă a reprezentărilor grafice realizate de elevi după conținutul problemelor în posttest

	Reprezentări grafice corecte		Reprezentări grafice incorecte		Total
	► Reprezentarea corectă a numărului de elemente al celor două mulțimi	► Indicarea numărului corect de elemente al celor două mulțimi cu ajutorul numerelor, în absența reprezentării cantitative	► Ilustrarea a două mulțimi cu tot atâtea elemente câte arată fiecare număr din enunț (SI _{nr})	► Alte reprezentări incorecte ale numărului de elemente ale celor două mulțimi (SI ₀)	
Problema 1 (posttest)	126 elevi 49,2%	—	88 elevi 34,4%	45 elevi 17,6%	256 elevi 100%
Problema 2 (posttest)	116 elevi 45,3%	6 elevi 2,3%	83 elevi 32,4%	51 elevi 20%	256 elevi 100%

Pornind de la criteriul clasificării reprezentărilor grafice realizate de elevii clasei I în funcție de corectitudinea reprezentării prin desen a informațiilor necesare la rezolvare, în etapa analizei datelor, reprezentările grafice ilustrative (subcapitolul IV.2.4.) au fost apreciate și incluse, în subcategoria reprezentărilor grafice incorecte, de tipul RgI0.

IV.2.6. Interpretarea datelor cercetării în vederea formulării răspunsurilor la întrebările de cercetare

IV.2.6.1. Întrebarea 1: În ce măsură corectitudinea soluțiilor determinate de elevi la problemele care se rezolvă prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente se corelează cu nivelul de dezvoltare al capacității de înțelegere a unui text citit?

Verificarea existenței unei corelații pozitive între corectitudinea soluțiilor determinate de elevii de clasa I la problemele care se rezolvă prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente și nivelul de dezvoltare a capacității lor de înțelegere a unui text citit (ipoteza 1) a făcut necesară analiza distribuției soluțiilor corecte determinate de elevi la cele două probleme din pretest, în funcție de nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit.

Figura nr. 28.IV. Distribuția soluțiilor corecte determinate, în pretest, de elevii a căror *capacitate de înțelegere a unui text citit* a fost apreciată ca fiind *optimă pentru nivelul de vârstă* (9 și 10 pe scala Likert)

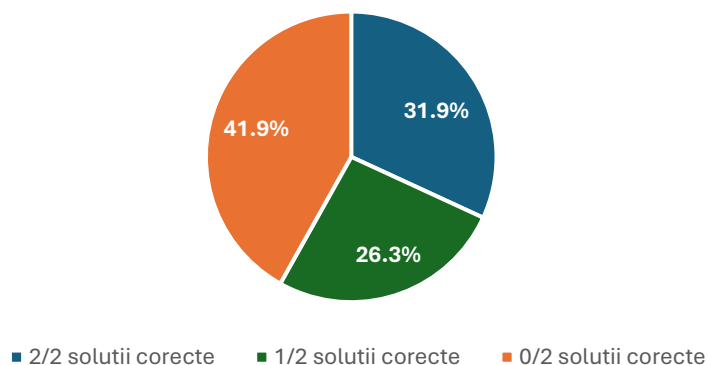
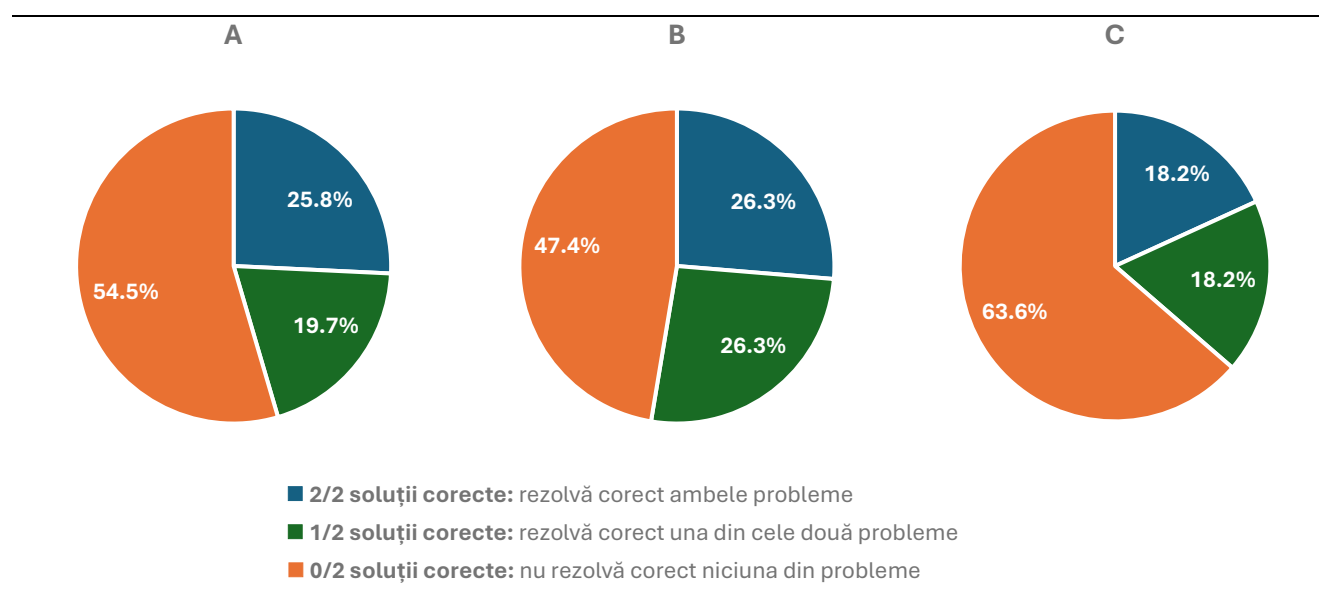


Figura nr. 29.IV. Distribuția soluțiilor corecte determinate, în pretest, de elevii a căror *capacitate de înțelegere a unui text citit* a fost apreciată ca fiind (A) *satisfăcătoare*, (B) *suficientă* și (C) *insuficientă*



Comparativ cu elevii a căror capacitate de înțelegere a unui text citit a fost apreciată ca fiind optim dezvoltată pentru nivelul de vârstă, elevii a căror înțelegere a textelor citite a fost apreciată ca fiind satisfăcătoare, suficientă și insuficientă au determinat un număr mic de soluții corecte (Figura nr. 29.IV.).

Testarea ipotezei 1 s-a realizat cu ajutorul corelației biseriale. Coeficienții de corelație au fost calculați pentru nivelul de dezvoltare al capacității de înțelegere a unui text citit, apreciat de cadrele didactice, pentru fiecare elev în parte, pe o scală numerică de la 1 la 10 și pentru corectitudinea soluțiilor fiecăreia dintre problemele 1 și 2 din pretest, soluții apreciate ca fiind corecte sau incorecte (Tabelul 22.IV.).

Tabelul nr. 22.IV. Valoarea coeficienților de corelație (r_{pb}) calculați pentru relația dintre *nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit* și *corectitudinea soluțiilor problemelor* fiecăreia dintre problemele 1 și 2 din pretest

	r_{pb}	df	t	p
Nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit – corectitudinea soluțiilor problemei 1 din pretest	0,13	254	2,04	,043
Nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit – corectitudinea soluțiilor problemei 2 din pretest	0,12	254	1,97	,05

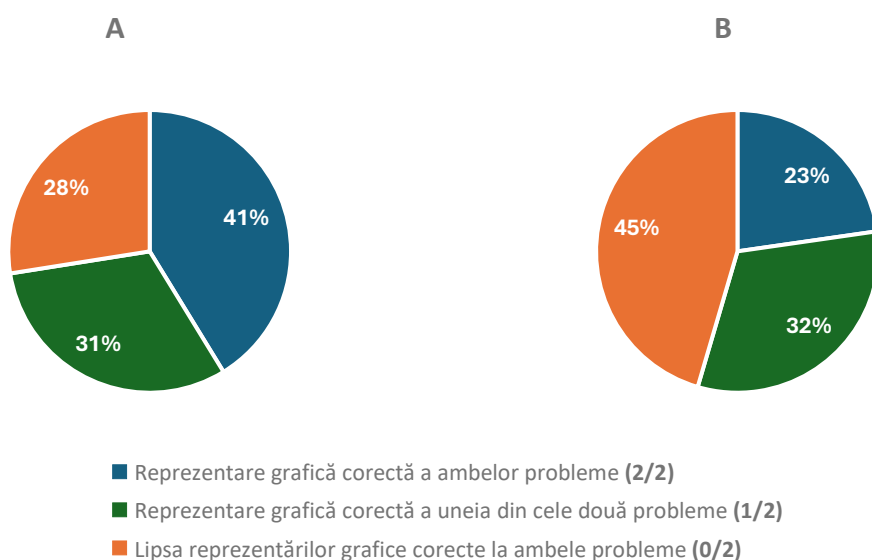
Valoarea coeficienților de corelație calculați pentru relația dintre nivelul de dezvoltare al capacității de înțelegere a textului citit și corectitudinea soluțiilor fiecăreia dintre problemele 1 ($r_{pb} = 0,13$, $n = 256$, $p = 0,043$) și 2 ($r_{pb} = 0,12$, $n = 256$, $p = 0,5$) din pretest a evidențiat o *corelație pozitivă*, de intensitate mică, semnificativă statistic, între *corectitudinea*

soluțiilor determinate de elevii de clasa I la problemele care se rezolvă prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente și nivelul de dezvoltare a capacității lor de înțelegere a unui text citit, fapt care **confirmă ipoteza 1**. Aceste rezultate sunt concordante cu cele obținute de Bjork & Bowyer-Crane (2013), Boonen et al. (2016), Can (2020), Pongsakdi et al. (2020), Timario (2020), care au evidențiat rolul de predictor al capacității de înțelegere a unui text citit asupra performanțelor rezolutive ale elevilor.

IV.2.6.2. Întrebarea 2: În ce măsură nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit se corelează cu corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevii clasei I, pe baza conținutului problemelor a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente?

Verificarea existenței unei corelații pozitive între nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit și corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente (ipoteza 2) a avut ca punct de plecare analiza distribuției reprezentărilor grafice corecte realizate de elevi pe baza conținutului problemelor, în funcție de nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a textelor citite (Figura nr. 30.IV.).

Figura nr. 30.IV. Distribuția reprezentărilor grafice corecte în rândul elevilor a căror capacitate de înțelegere a unui text citit a fost apreciată ca fiind (A) *optim dezvoltată pentru nivelul de vârstă* și (B) *satisfăcătoare*

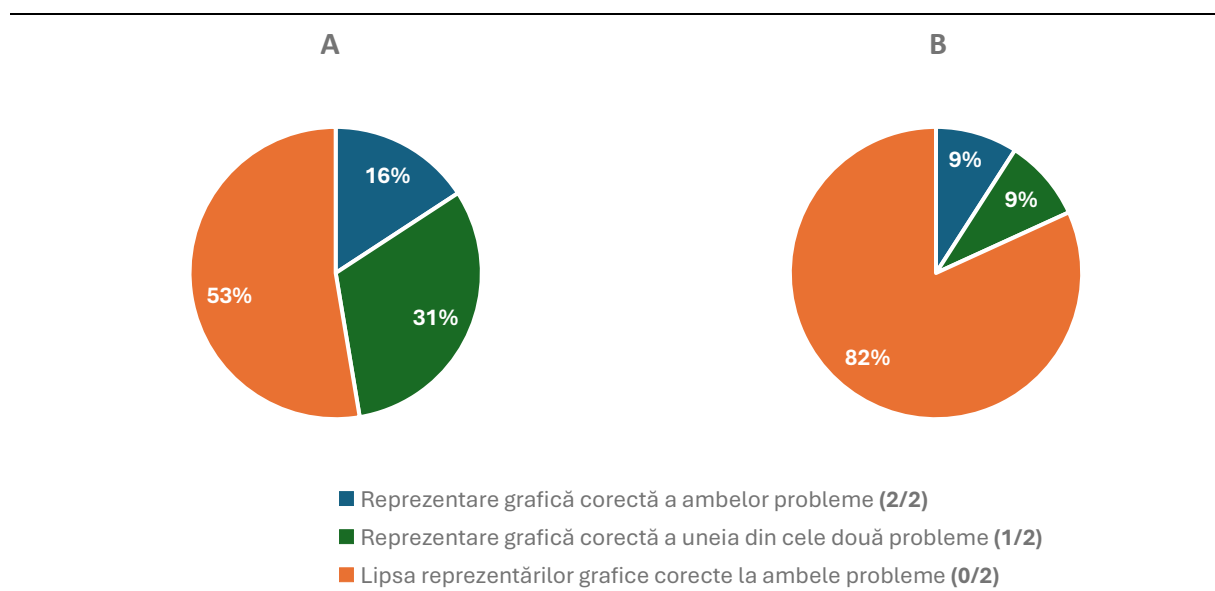


Distribuția reprezentărilor grafice corecte (Figura nr. 30.IV.) în rândul elevilor a căror capacitate de înțelegere a unui text citit a fost apreciată ca fiind optim dezvoltată pentru nivelul de vârstă și satisfăcătoare evidențiază că majoritatea elevilor cu un nivel optim de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit a realizat reprezentări grafice corecte ale conținutului ambelor probleme din posttest (Figura nr. 30.IV.A.), comparativ cu un procent mult mai mic al elevilor a căror capacitate de înțelegere a unui text citit a fost apreciată ca

fiind satisfăcătoare care au realizat reprezentări grafice corecte pentru ambele probleme (Figura nr. 30.IV.B.). Reprezentările grafice incorecte predomină în rândul elevilor apreciați cu un nivel satisfăcător al capacității de înțelegere a unui text citit, 45% dintre aceștia reprezentând incorect informațiile necesare la rezolvare, pentru ambele probleme, evidențiind, astfel, înțelegerea precară a relațiilor dintre date.

Analiza distribuției reprezentărilor grafice corecte în rândul participanților a căror capacitate de înțelegere a unui text citit a fost apreciată ca suficientă (Figura nr. 31.IV.A) sau insuficientă (Figura nr. 31.IV.B) evidențiază o scădere pronunțată a proporției reprezentărilor grafice corecte realizate de elevi la ambele probleme sau doar la una din cele două probleme din posttest. Astfel, numărul reprezentărilor grafice corecte realizate de elevi, scade odată cu scăderea nivelului de dezvoltare al capacității elevilor de înțelegere a unui text citit.

Figura nr. 31.IV. Distribuția reprezentărilor grafice corecte în rândul elevilor a căror capacitate de înțelegere a unui text citit a fost apreciată ca fiind (A) *suficientă* și (B) *insuficientă*



Relația de asociere dintre nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit și corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente (ipoteza 2) s-a realizat cu ajutorul corelației biseriale. Coeficienții de corelație au fost calculați pentru nivelul de dezvoltare al capacității de înțelegere a unui text citit, apreciat pentru fiecare elev în parte pe o scală numerică de la 1 la 10 și pentru corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor, care au fost apreciate ca fiind corecte sau incorecte (Tabelul 24.IV.).

Tabelul nr. 24.IV. Valoarea coeficienților de corelație (r_{pb}) calculați pentru relația dintre nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit și corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor 1 și 2 din posttest

	r_{pb}	df	t	p
Nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit – corectitudinea reprezentărilor grafice ale conținutului problemei 1 din posttest	0,27	254	4,5	< ,001
Nivelul de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit – corectitudinea reprezentărilor grafice ale conținutului problemei 2 din posttest	0,29	254	4,82	< ,001

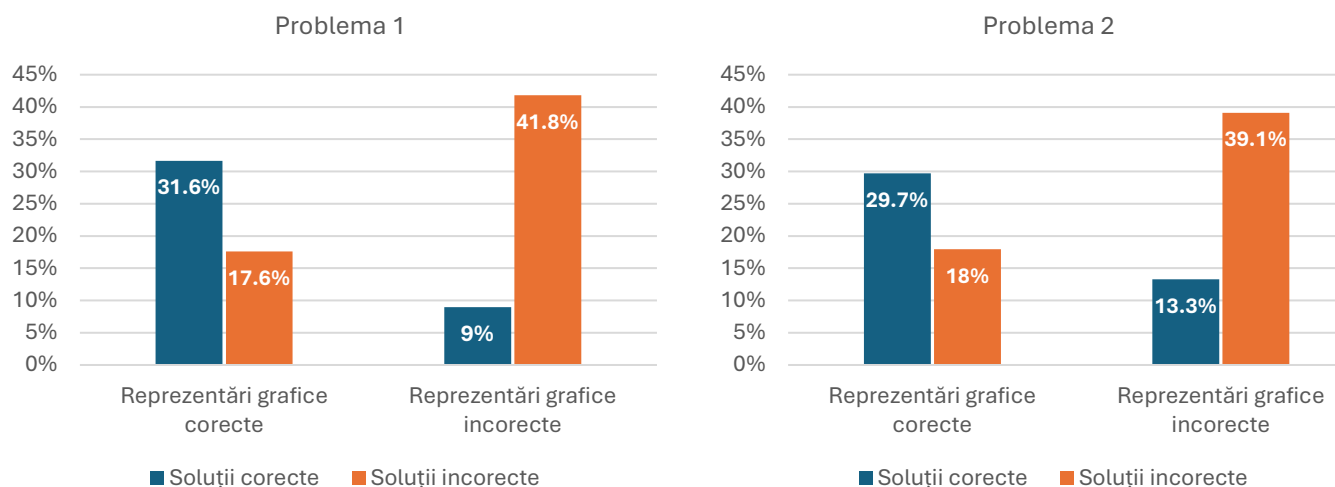
Valoarea coeficienților de corelație calculați pentru relația dintre nivelul de dezvoltare al capacității de înțelegere a textului citit și corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza conținutului fiecăreia dintre problemele 1 ($r_{pb} = 0,27$, $n = 256$, $p < 0,001$) și 2 ($r_{pb} = 0,29$, $n = 256$, $p < 0,001$) din posttest a evidențiat o *corelație pozitivă*, de intensitate medie, semnificativă statistic, între cele două variabile, **confirmând ipoteza 2**; nivelul ridicat al capacității elevilor de înțelegere a unui text citit corelându-se atât cu un număr mare al reprezentărilor grafice corecte determinate de elevii de clasa I, cât și cu un număr mare al soluțiilor corecte determinate de elevi la problemele din pretest (subcapitolul IV.2.6.2.).

IV.2.6.3. Întrebarea 3: Care este relația dintre principalele tipuri de reprezentări grafice realizate de elevii de clasa I pe baza conținutului problemelor matematice a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente și corectitudinea soluțiilor determinate de elevi la problemele din posttest?

Testarea ipotezei 3 presupune existența unei corelații pozitive între corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevii de clasa I, pe baza conținutului problemelor din posttest, a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente și corectitudinea soluțiilor determinate de elevi la aceste probleme.

Relațiile dintre corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor din posttest și corectitudinea soluțiilor determinate de elevi la aceste probleme au fost analizate cu ajutorul testului χ^2 (Figura nr. 32.IV.).

Figura nr. 32.IV. Distribuția soluțiilor corecte în posttest în funcție de corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevi, în posttest



Distribuția soluțiilor corecte ale problemelor pentru fiecare categorie a reprezentărilor grafice indică, pentru ambele probleme din posttest, o frecvență crescută a soluțiilor corecte în rândul reprezentărilor grafice corecte și o frecvență crescută a soluțiilor incorecte în rândul reprezentărilor grafice incorecte (Figura nr. 32.IV.).

Rezultatele obținute din analiza datelor (Tabelul 26.IV.) indică, pentru fiecare problemă în parte, valori ale testului χ^2 mai mari decât valoarea critică: $\chi^2(1) (57,59) > \chi^2_{\text{critic}} (3,84)$, pentru problema 1 și $\chi^2(1) (35,52) > \chi^2_{\text{critic}} (3,84)$, pentru problema 2, subliniind existența unei corelații între cele două variabile.

Tabelul nr. 26.IV. Valorile testului χ^2 pentru relația dintre corectitudinea reprezentărilor grafice corecte și corectitudinea soluțiilor problemelor 1 și 2, în posttest

	χ^2	χ^2_{critic}	df	p
Corectitudinea reprezentărilor grafice – corectitudinea soluțiilor problemei 1 (posttest)	57,59	3,84	1	< ,001
Corectitudinea reprezentărilor grafice – corectitudinea soluțiilor problemei 2 (posttest)	35,52	3,84	1	< ,001

Valorile testului χ^2 (Tabelul 26.IV.) asociate cu valorile coeficientului de contingență Pearson și cu valorile coeficienților V. Cramér (= 0,47, pentru relația variabilelor problemei 1 și 0,37, pentru variabilele problemei 2) evidențiază, *existența unei relații de asociere, de intensitate medie, semnificativă statistic*, cu $p < 0,001$, *între corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor și corectitudinea soluțiilor determinate de elevi la fiecare din cele două probleme din posttest, astfel confirmând ipoteza 3.*

Rezultate similare au fost obținute și după efectuarea testului χ^2 privind relația de asociere dintre frecvențele soluțiilor corecte ale problemelor și frecvența reprezentărilor

grafice corecte realizate de fiecare elev la nivelul întregului eșantion de conținut din posttest. Valoarea testului χ^2 calculată pentru frecvențele celor două variabile, mai mari decât valoarea critică, unde $\chi^2(4) (70,97) > \chi^2_{\text{critic}} (9,49)$ și valoarea coeficientului de contingență Pearson, $C = 0,58$ și a coeficientului V. Cramér = 0,37 indică o *relație de asociere, semnificativă statistic*, cu $p < 0,001$, *de intensitate medie, între frecvența reprezentărilor grafice corecte și frecvența soluțiilor corecte ale problemelor, oferind o confirmare suplimentară a ipotezei 3.*

IV.2.6.4. Întrebarea 4: În ce măsură reprezentarea grafică corectă a conținutului problemelor a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente, de către elevii de clasa I, influențează șansele de reușită a rezolvării problemelor respective?

Corelația pozitivă de intensitate medie dintre corectitudinea reprezentării grafice a conținutului problemelor și corectitudinea soluțiilor determinate de elevi la problemele respective a condus la formularea ipotezei conform căreia **reprezentarea grafică corectă a conținutului problemelor care se rezolvă prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente, crește șansele rezolvării corecte a problemelor respective (ipoteza 4).**

Efectul reprezentărilor grafice corecte realizate de elevi pe baza conținutului problemelor din posttest asupra șanselor de rezolvare corectă a problemelor respective a fost evidențiat printr-o analiză de regresie logistică, pentru fiecare din cele două probleme din posttest.

Modelul regresiei logistice realizat pentru problema 1 a fost semnificativ din punct de vedere statistic, $\chi^2(1) = 60,25$, $p < 0,001$, explicând 28,3% (R^2 Nagelkerke) din variația rezolvărilor corecte ale problemelor, în urma clasificării corecte a 73,4% din observații. Valoarea raportului de șanse a evidențiat că *în condițiile reprezentării grafice corecte a conținutului problemei 1, șansele ca elevii să rezolve corect problema sunt de 8,37 ori mai mari decât șansele ca aceștia să nu o rezolve corect.*

Modelul regresiei logistice realizat pentru problema 2 a fost, de asemenea, semnificativ din punct de vedere statistic, $\chi^2(1) = 36,34$, $p < 0,001$, explicând 17,7% (R^2 Nagelkerke) din variația rezolvărilor corecte ale problemelor, în urma clasificării corecte a 68,75% din observații. În condițiile reprezentării grafice corecte a conținutului problemei 2, *șansele ca elevii să rezolve corect problema sunt de 4,86 ori mai mari decât șansele nerezolvării corecte.*

Analiza raportului de șanse a rezolvărilor corecte ale celor două probleme din posttest, în condițiile reprezentării grafice corecte a conținutului problemei de către elevi, a evidențiat că *reprezentarea grafică corectă a conținutului problemelor 1 și 2 din posttest, de către elevii de clasa I, a crescut șansele rezolvării corecte a problemelor de 8,37, respectiv de 4,86 ori, confirmând ipoteza 4.* Pe baza datelor prezentate anterior putem concluziona că *reprezentarea grafică corectă a conținutului unei probleme, a cărei soluție se determină prin*

compararea și însumarea a două mulțimi de elemente, se constituie ca predictor al reușitei rezolvării problemei respective, de către elevii clasei I.

IV.2.6.5. Întrebarea 5: Există o îmbunătățire a performanțelor rezolutive ale elevilor de clasa I în posttest, față de performanțele rezolutive ale acelorași elevi în pretest?

Șansele crescute de rezolvare corectă a problemelor a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente, în condițiile reprezentării grafice corecte a conținutului problemelor (subcapitolul IV.2.6.4.) conduc către presupunerea că *performanțele rezolutive ale elevilor din posttest sunt superioare performanțelor rezolutive demonstrate de aceștia, în pretest (ipoteza 5)*. Analiza comparativă a corectitudinii soluțiilor problemelor matematice determinate de elevi în pretest și în posttest s-a bazat pe similitudinile dintre strategiile de rezolvare ale fiecăreia dintre cele patru probleme din eșantionul de conținut (subcapitolul IV.2.3.). Astfel, au fost comparate, din punct de vedere calitativ, strategiile de rezolvare ale problemelor din pretest și din posttest ale căror soluții se determină printr-o operație de scădere și printr-o adunare (problema 1 din pretest și problema 2 din posttest) și strategiile rezolutive ale problemelor ce necesită efectuarea a două adunări (problemele 2 din pretest și 1 din posttest). Diferențele dintre performanțele rezolutive ale elevilor problemele din pretest și din posttest au fost analizate cu ajutorul testului χ^2 al lui McNemar pentru eșantioane pereche.

Analiza diferenței dintre performanțele rezolutive înregistrate de elevi la determinarea soluției problemelor care se rezolvă prin efectuarea unei operații de scădere și a unei adunări a evidențiat o valoare calculată a testului χ^2 a lui McNemar mai mică decât valoarea critică $\chi^2(1) (3,44) < \chi^2_{\text{critic}} (3,84)$ și $p = 0,064$. Valoarea $p > 0,05$ sugerează că nu există o diferență semnificativă statistic între performanțele rezolutive ale elevilor de clasa I care s-au îmbunătățit, față de performanțele rezolutive ale elevilor care au regresat în posttest.

Analiza performanțelor rezolutive ale elevilor la problemele care se rezolvă prin două operații de adunare a indicat o valoare χ^2 calculată pentru testul McNemar mai mare decât valoarea critică $\chi^2(1) (5,01) > \chi^2_{\text{critic}} (3,84)$ și $p = 0,025$. Valoarea $p < 0,05$ evidențiază o diferență semnificativă statistic, care indică o îmbunătățire a performanțelor rezolutive ale elevilor la rezolvarea problemei din posttest, comparativ cu performanțele rezolutive înregistrate de aceiași elevi, la rezolvarea problemelor care se rezolvă prin două operații de adunare din pretest (Tabelul 47.IV.).

Diferențele dintre performanțele rezolutive înregistrate de elevi în pretest și în posttest **confirmă parțial ipoteza 5**, numărul elevilor care și-au îmbunătățit performanțele rezolutive în posttest fiind mai mare decât numărul elevilor care au înregistrat un regres al performanțelor rezolutive în posttest, doar în cazul problemelor care se rezolvă prin două operații de adunare, diferența dintre performanțele rezolutive înregistrate de elevi la

determinarea soluțiilor problemelor care se rezolvă prin efectuarea unei operații de scădere și a unei operații de adunare, nefiind semnificative statistic.

IV.2.6.6. Întrebarea 6: În ce măsură prezența informațiilor explicative în enunțul problemelor a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente va determina un număr cât mai mare de elevi să realizeze reprezentări grafice corecte ale conținutului problemelor?

Stern & Lehrndorfer (1992) au subliniat importanța informațiilor explicative asupra înțelegerii comparației cantitative dintre mulțimile de elemente descrise în enunț, astfel, s-a verificat dacă **prezența informațiilor explicative în enunțul problemelor a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente va determina creșterea numărului de reprezentări grafice corecte realizate de elevii de clasa I pe baza conținutului problemelor (ipoteza 6)**. Pentru testarea acestei ipoteze au fost comparate reprezentările grafice realizate de elevi pe baza conținutului celor două probleme din posttest, problema 1 conținând doar informații necesare la rezolvare, iar problema 2 integrând în enunț și informații explicative.

Diferența dintre corectitudinea reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza celor două probleme (apreciate ca fiind *corecte* și *incorecte*) a fost analizată cu ajutorul testului χ^2 al lui McNemar pentru eșantioane pereche. Analiza diferenței dintre corectitudinea reprezentărilor grafice ale celor două probleme din posttest a evidențiat o valoare χ^2 , calculată pentru testul McNemar, cu mult mai mică decât valoarea critică $\chi^2(1) (0,12) < \chi^2_{\text{critic}} (3,84)$ și $p = 0,734$. Valoarea $p > 0,05$ evidențiază că diferența dintre corectitudinea reprezentărilor grafice ale problemelor 1 și 2 din posttest nu este semnificativă statistic. Rezultatele obținute **infirmă ipoteza 6**, sugerând că *prezența informațiilor explicative în enunțul problemei 2 nu determină creșterea numărului reprezentărilor grafice corecte realizate de elevi pe baza conținutului problemelor*. Pentru testarea cu acuratețe a acestei ipoteze este necesară o abordare diferită a designului cercetării, dar și o restructurare a enunțului problemelor, astfel încât efectul informațiilor explicative asupra corectitudinii reprezentării grafice a mulțimilor comparate să poată fi evidențiat corespunzător.

IV.3. Concluzii

IV.3.1. Concluzii referitoare la contribuțiile personale – teoretice și practice aplicative

În activitățile matematice, formarea capacității de rezolvare de probleme are ca scop transferul cunoștințelor matematice, abstracte, în planul concret-operațional, specific diferitelor contexte din viața cotidiană.

Literatura românească și metodicile de specialitate prezintă multiple descrieri și clasificări ale problemelor matematice, în funcție de numărul și de tipul operațiilor necesare la rezolvare ori în funcție de specificul raționamentului utilizat la elaborarea strategiei

rezolutive, limitându-se la expunerea etapelor ce trebuie parcurse de cadrul didactic în vederea organizării și desfășurării secvențelor didactice de rezolvare a problemelor matematice. Deși la testările internaționale (PISA, TIMSS) elevii români au înregistrat în repetate rânduri rezultate slabe, literatura de specialitate din țara noastră nu oferă un răspuns adecvat referitor la cauzele care conduc la obținerea acestor performanțe. Este, așadar, necesară analiza descriptivă a principalelor greșeli apărute pe parcursul rezolvării diferitelor tipuri de probleme și identificarea cauzelor care stau la baza producerii lor.

Literatura științifică care abordează rezolvarea problemelor matematice de către elevi prezintă analize amănunțite ale erorilor de elaborare a raționamentului utilizat la rezolvarea problemelor. Lucrarea de față a valorificat o parte a rezultatelor acestor cercetări în scopul descrierii și explicării greșelilor pe care elevii din ciclul primar le fac pe parcursul rezolvării problemelor matematice a căror soluție implică efectuarea unei singure operații de adunare sau de scădere, literatura științifică neconsemnând date suficiente referitoare la aceste dificultăți. Rezultatele obținute din analiza datelor cercetării curente au indicat atât modalitatea prin care elevii din clasa I înțeleg și reprezintă o mulțime de elemente prezentată prin comparație cu o altă mulțime de referință, cât și principalele erori de raționament pe parcursul rezolvării acestor probleme.

Ca urmare a analizei ultimelor cercetări, au fost identificate lacune în cunoașterea referitoare la rolul desenelor realizate de elevii de clasa I pe baza conținutului problemelor simple, asupra elaborării strategiei de rezolvare, lucrarea de față propunând o abordare inedită a relației dintre cele două variabile. Considerăm că rezultatele cercetării noastre contribuie semnificativ la îmbogățirea cunoașterii științifice și a practicii educaționale, evidențiind rolul pe care desenele realizate de elevii de clasa I îl au la evaluarea înțelegerii conținutului problemelor dar și la identificarea greșelilor apărute în diferitele etape ale elaborării strategiei de rezolvare.

IV.3.2. Concluziile cercetării

Analizele calitative și cantitative ale strategiilor de rezolvare și ale reprezentărilor grafice realizate de elevii de clasa I pe baza conținutului problemelor matematice a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente au permis formularea unor concluzii asupra relațiilor dintre variabilele cercetării.

Întrebarea I. Care sunt principalele tipuri de reprezentări grafice pe care elevii de clasa I le vor realiza pe baza conținutului problemelor matematice a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente?

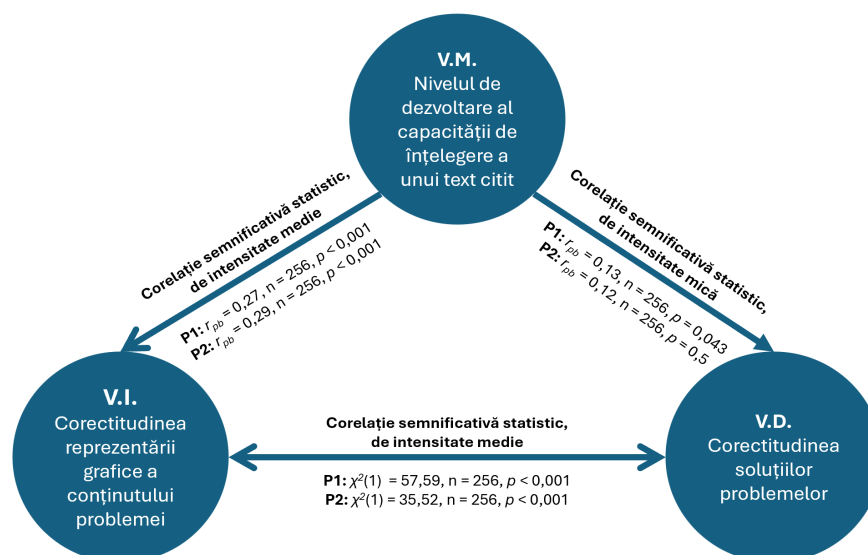
Analiza reprezentărilor grafice realizate de elevii de clasa I, pe baza conținutului problemelor matematice a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente a evidențiat *reprezentările grafice ale informațiilor necesare la rezolvare ca fiind principala categorie de reprezentări grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor care se rezolvă prin compararea și însumarea a două mulțimi de*

elemente. Aproximativ jumătate dintre reprezentările grafice ale informațiilor necesare la rezolvare ale ambelor probleme au fost corecte (subcapitolul IV.2.4., Tabelul 19.IV. și Figura nr. 25.IV.). Aceste rezultate **infirmă ipoteza I** care a presupus că o mare parte dintre elevi vor realiza reprezentări grafice corecte, evidențiindu-se că mai puțin de jumătate dintre participanți a realizat reprezentări grafice corecte ale informațiilor necesare la rezolvare. În cazul ambelor probleme din posttest, numărul reprezentărilor grafice incorecte depășește, cu puțin 50% din totalul reprezentărilor grafice ale informațiilor necesare la rezolvare (subcapitolul IV.2.4., Figura nr. 25.IV.)

Întrebarea II. În ce măsură reprezentările grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor matematice a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente vor influența dezirabil elaborarea strategiei de rezolvare și calitatea soluțiilor problemelor?

Corelațiile pozitive care se stabilesc între cele trei variabile ale cercetării: corectitudinea soluțiilor determinate de elevii de clasa I la problemele care se rezolvă prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente, nivelul de dezvoltare a capacității lor de înțelegere a unui text citit și corectitudinea reprezentărilor grafice realizate baza conținutului problemelor a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente, evidențiază rolul reprezentărilor grafice ale informațiilor necesare la rezolvare de indicatori ai înțelegerii conținutului problemelor, mai precis, de indicatori ai înțelegerii relațiilor care se stabilesc între datele cunoscute și cele necunoscute din enunț.

Figura nr. 33.IV. Corelațiile dintre cele trei variabile ale cercetării



Totodată, șansele crescute de rezolvare corectă în condițiile reprezentării grafice corecte a conținutului problemelor fac din corectitudinea reprezentărilor grafice a conținutului problemelor un predictor al reușitei rezolvării (subcapitolul IV.2.6.5.), rezultat confirmat și de Boonen et al. (2014). Analiza comparativă a performanțelor rezolutive

înregistrate de elevi în pretest și în posttest a evidențiat un număr mai mare al soluțiilor corecte determinate de elevi în posttest la problemele a căror soluție se determină prin două operații de adunare, reprezentările grafice realizate de participanții la cercetare pe baza conținutului problemelor având rol clarificator asupra elaborării strategiei de rezolvare.

Analiza performanțelor rezolutive ale elevilor în funcție de nivelul de dezvoltare al capacității lor de înțelegere a unui text citit a evidențiat că performanțele rezolutive se îmbunătățesc semnificativ în rândul elevilor al căror nivel de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit a fost apreciat ca fiind optim pentru nivelul de vârstă, comparativ cu elevii al căror nivel de dezvoltare a capacității de înțelegere a unui text citit a fost apreciat ca fiind satisfăcător, suficient sau insuficient.

Analiza suplimentară a rolului informațiilor explicative din enunțul problemelor ce au alcătuit eșantionul de conținut a evidențiat că *prezența informațiilor explicative nu determină îmbunătățirea calității reprezentărilor grafice realizate de elevi și, implicit, a înțelegerii conținutului problemei.*

Pe baza argumentelor expuse anterior, referitoare relațiile care se stabilesc între indicatorii înțelegerii problemelor, concluzionăm că *reprezentarea grafică corectă, de către elevi, a conținutului problemelor a căror soluție se determină prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente are potențialul de a influența dezirabil elaborarea strategiilor de rezolvare și determinarea soluțiilor corecte, în cazul problemelor a căror necunoscută (valoarea comparată) se determină prin adunare, confirmând parțial ipoteza a II-a a cercetării.*

IV.3.3. Concluzii generale

Investigarea implicațiilor pe care reprezentările grafice realizate de elevii clasei I, pe baza conținutului problemelor matematice a căror soluție se obține prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente le au asupra înțelegerii problemei și a elaborării strategiei de rezolvare a evidențiat rolul reprezentărilor grafice de indicator al înțelegerii problemei. Dacă reprezentarea grafică corectă a conținutului problemelor se constituie ca predictor al reușitei rezolvării (subcapitolul IV.2.6.4.), reprezentările grafice incorecte detaliază erorile apărute la nivelul înțelegerii relațiilor dintre datele prezentate în enunț, oferind o imagine clară asupra a ceea ce elevii „nu înțeleg” din problemă.

Utilizarea strategiei *Talking drawings* pentru verificarea înțelegerii textelor ce se constituie ca enunțuri ale problemelor matematice a evidențiat o relație similară de dependență între calitatea desenelor realizate de elevi pe baza informațiilor necesare la rezolvare și calitatea înțelegerii enunțului, asemeni relației, evidențiate de Cappello & Walker (2021), Mc.Connell (1993) și Paquette et al. (2007), care există între textele informative citite și conținutul reprezentărilor grafice realizate de copii pe baza textelor respective.

În activitățile matematice, utilizarea limbajului vizual specific reprezentărilor grafice facilitează identificarea lacunelor înțelegerii conținutului unei probleme. Suplimentar,

asezonarea orelor de Matematică și explorarea mediului cu secvențe didactice în care este valorificat desenul copiilor oferă o perspectivă integrată asupra predării conținuturilor instructiv-educative și un prilej de valorificare a imaginației și a creativității elevilor la o disciplină considerată, adesea, anostă, prea abstractă și cu un nivel ridicat de dificultate.

IV.3.4. Limitele cercetării

Obstacolele și dificultățile care nu au putut anticipate pe parcursul realizării cercetării pilot ori a elaborării proiectului prezentului demers investigativ au fost identificate ulterior, la nivelul culegerii și analizei datelor, concretizându-se în limite ale cercetării:

1. *Culegerea datelor valide.* Eșantionul inițial de subiecți a fost alcătuit din 320 de elevi de clasa I. În urma analizei datelor culese au fost eliminați 20% dintre participanți: cei care au absentat la cel puțin una din etapele de testare, cei care nu au abordat integral sarcinile de lucru și subiecții aparținând claselor la care s-a constatat existența unui număr nejustificat de mare de rezolvări corecte ale tuturor problemelor sau unde au fost identificate strategii rezolutive asemănătoare ca structură și organizare, sugerând o posibilă nerespectare a procedurilor de administrare a testelor.

2. *Supraaprecierea capacității elevilor de înțelegere a unui text citit.* Forma distribuției valorilor cu care capacitatea elevilor de înțelegere a unui text citit a fost apreciată de cadrele didactice a evidențiat tendința de supraapreciere a propriilor elevi, fapt care poate fi pus fie e seama subiectivității, fie a lipsei unor criterii standardizate de evaluare, explicit formulate explicit în documentele curriculare. Numărul mare de participanți și resursele de timp limitate de termenele specifice programului de studii doctorale au condus la imposibilitatea testării individuale a participanților cu ajutorul testelor standardizate.

3. *Valorile numerice utilizate în cazul problemei 1 din pretest.* În cazul particular al problemei 1 din pretest, utilizarea unui raționament incorect conduce la obținerea, întâmplătoare, a rezultatului matematic corect, aspect neanticipat în etapa elaborării eșantionului de conținut.

4. *Detalierea insuficientă a soluțiilor problemelor.* Având în vedere limitările impuse de dezvoltarea insuficientă a deprinderilor de scriere ale elevilor de clasa I și variațiile stilurilor de predare ale cadrelor didactice, detalierea rezultatelor obținute în urma efectuării calculelor nu a fost explicit solicitată elevilor, îngreunându-se, astfel, aprecierea corectă a unora dintre strategiile de rezolvare elaborate de elevi.

IV.3.5. Direcții viitoare de cercetare

Valorificarea limitelor cercetării a permis identificarea câtorva direcții viitoare de investigație:

1. Diferențele identificate între nivelul de dezvoltare a capacității elevilor de clasa I de înțelegere a unui text citit și nivelul înțelegerii enunțului problemei, demonstrat de corectitudinea soluțiilor și a reprezentărilor grafice realizate de elevi pe baza conținutului problemelor solicită investigarea *diferențelor dintre nivelul de dezvoltare al capacității elevilor de înțelegere a unui text citit apreciat de profesorii pentru învățământul primar și nivelul de*

dezvoltare al capacității de înțelegere a unui text citit evaluat cu ajutorul unor teste standardizate, dar și a cauzelor care determină supraaprecierea nivelului capacității de înțelegere a textelor citite a elevilor de clasa I, de către profesorii pentru învățământul primar.

2. Strategiile incorecte de rezolvare de tip RId, au fost identificate doar în cazul problemelor al căror enunț descrie două mulțimi de elemente distincte, subordonate unei mulțimi de nivel superior care denumește categoria acelor elemente. Este necesară investigarea *măsurii în care organizarea elementelor mulțimilor descrise în enunțurile problemelor ca mulțimi subordonate din punct de vedere semantic, influențează corectitudinea detalierilor operațiilor matematice și a soluției problemelor de către elevii aflați în ciclul achizițiilor fundamentale.*

3. Diferența dintre numărul soluțiilor corecte determinate de elevi la problemele a căror strategie de rezolvare presupune efectuarea unei scăderi și a unei adunări și numărul soluțiilor corecte determinate la problemele a căror strategie rezolutivă presupune efectuarea a două operații de adunare, fac necesară investigarea cauzelor care determină acest comportament rezolutiv al elevilor de clasa I.

Datele obținute din investigarea implicațiilor pe care reprezentările grafice realizate de elevii clasei I, pe baza conținutului problemelor matematice a căror soluție se obține prin compararea și însumarea a două mulțimi de elemente, le au asupra înțelegerii problemei și a elaborării strategiei de rezolvare se constituie ca punct de plecare în valorificarea ulterioară a desenelor realizate de elevi la descrierea modalităților în care micii școlari înțeleg diferitele tipuri de probleme matematice.

Glosar de termeni

Condiția/ condițiile problemei: relația/ relațiile care se stabilesc între datele cunoscute și datele necunoscute din problemă.

Conținutul problemei: totalitatea informațiilor care prezintă datele cunoscute și pe cele necunoscute, împreună cu relațiile care se stabilesc între acestea.

Enunț (referitor la problemele de matematică): textul care prezintă datele cunoscute și cele necunoscute ale problemei, împreună cu relațiile care se stabilesc între acestea, ceea ce se dă și ceea ce se cere. Enunțul poate prezenta datele problemei fie cu ajutorul limbajului matematic abstract, fie cu ajutorul limbajului comun, prin evocarea unei situații/ a unui context particular, cunoscute/ cunoscut elevilor.

Imagini mentale: reflectări în plan interior ale diferitelor aspecte ale realității exterioare; produse cognitive evocate în absența obiectului percepției, similare, într-o mare măsură, cu reprezentările spațiale.

Informație (în sens general) (cf. Baciú et al., 2022): Ansamblu de elemente noi în raport cu cunoașterea anterioară a unui subiect, cuprinse în structura unui mesaj ori în semnificația unui simbol (text, imagine/ succesiune de imagini sau sunete).

Informații necesare la rezolvare: informații din conținutul problemelor matematice care descriu datele esențiale pentru elaborarea strategiei de rezolvare: datele cunoscute, necunoscutele și relațiile care se stabilesc între acestea.

Informații contextuale: informații din enunțul problemelor care particularizează informațiile necesare la rezolvare, prezentându-le într-un context specific de viață, prin descrieri și detalieri care fac trimitere la repertoriul experiențial al elevilor. Informațiile contextuale facilitează înțelegerea informațiilor necesare la rezolvare, nefiind utilizate la elaborarea strategiei de rezolvare sau a modelului logic.

Informații explicative: informații din enunțul problemelor care detaliază și explicitează informațiile necesare la rezolvare sau pe cele contextuale.

Model logic/ Planul logic: ecuația, sistemul de ecuații și/ sau expresiile matematice care exprimă relațiile existente între datele cunoscute și datele necunoscute ale problemei.

Planul de rezolvare: ansamblul integrativ al propozițiilor interogative sau afirmative care prezintă etapele succesive pe care gândirea le parcurge pentru a rezolva o problemă matematică. Elaborarea corectă a planului de rezolvare facilitează alcătuirea modelului logic al problemei.

Proces rezolutiv: ansamblul etapelor sistemice (de analiză a problemei și întocmire a planului de rezolvare, de scriere și efectuare a operațiilor matematice corespunzătoare planului de rezolvare), parcurse de rezolvitor în scopul determinării soluției problemei.

Raționament vizual: abilitate metacognitivă complexă ce presupune reflecția asupra propriilor reprezentări vizuale și organizarea acestor reprezentări vizuale în structuri operatorii utilizate la rezolvarea logică a problemelor matematice.

Reprezentare grafică ilustrativă: reprezentare grafică a informațiilor contextuale din enunțul problemelor matematice. Deși bogate în detalii, aceste reprezentări au caracter ilustrativ, adesea fiind fără relevanță pentru elaborarea strategiei de rezolvare a problemei.

Reprezentare grafică: tip de reprezentare externă a unui conținut informațional sau conceptual realizat cu ajutorul unor desene, ilustrații, grafice, scheme sau diagrame. Reprezentările grafice ajută la înțelegerea unor fenomene, concepte, produse; la prezentarea conexiunilor dintre diferite elemente; la rezolvarea unor probleme (de exemplu, metoda grafică care se folosește la rezolvarea unui anumit tip de probleme matematice) etc.

Reprezentare grafică corectă/ incorectă (a informațiilor necesare la rezolvare) (cf. Boonen et al., 2014): tip de reprezentare grafică creată de rezolvitor, sub forma unui desen, ilustrație, schemă sau diagramă, ce articulează informațiile necesare la rezolvare într-un ansamblu coerent, pe baza căruia rezolvitorul elaborează cu ușurință strategia de rezolvare a problemei matematice.

Reprezentare spațială: tip de reprezentare internă sau externă a unui conținut informațional sau conceptual sub formă tridimensională care descrie relațiile topologice existente între componentele unei configurații (mărime, proporții, adâncime, distanțe), asupra cărora subiectul poate opera transformări la nivel mental.

Reprezentare vizuală: tip de reprezentare internă sau externă a unui conținut informațional sau conceptual sub forma unui model a cărui percepție se face predominant vizual.

Rezultat matematic: produs de natură matematică (număr, teoremă, proprietate etc.) care se obține ca răspuns la o cerință cu enunț matematic (exercițiu, problemă, întrebare etc.) în urma rezolvării acesteia sau se descoperă prin inferențe logice/raționamente matematice pornind de la date cunoscute.

Soluția problemei matematice: răspunsul oferit la întrebarea/ sarcina de lucru prezentată în enunț. Soluția problemei se obține în urma explicitării, evaluării și/ sau a interpretării rezultatului matematic în contextul particular al problemei. Soluția problemei se formulează explicit, printr-o propoziție enunțiativă, la finalul planului de rezolvare, în urma determinării rezultatului matematic.

Strategie de rezolvare a unei probleme: modalitatea specifică de determinare a soluției unei probleme prin valorificarea, într-o anumită succesiune logică și corectă, a relațiilor dintre datele cunoscute și cele necunoscute ale problemei și a cunoștințelor rezolvitorului despre contextul specific în care sunt prezentate aceste date.

Capacitate de vizualizare (cu referire la problemele matematice): capacitate de reprezentare, de reflectare în imagini, prin mijloace vizuale, a ceea ce nu este prezentat explicit în enunțul problemelor matematice, prin realizare de inferențe, respectiv de deducții valorificând anumite relații dintre date.

Vizualizare (cu referire la problemele matematice): proces de evocare, creare, utilizare și interpretare a reprezentărilor vizuale (interne sau externe), în scopul înțelegerii informațiilor, a formulării de idei și semnificații noi, cu ajutorul cărora se construiește înțelegerea globală a unei probleme matematice.

Referințe bibliografice

- Academia Română. Institutul de lingvistică „Iorgu Iordan-Al. Rosetti” (2010). *Micul dicționar academic*. Editura Univers Enciclopedic.
- Academia Română. Institutul de lingvistică „Iorgu Iordan-Al. Rosetti” (2016). *DEX – Dicționarul explicativ al limbii române*, Ediția a 2-a revizuită și adăugită. Editura Univers Enciclopedic Gold.
- Ana, D., Ana, M. L., Logel, D., & Stroescu-Logel, E. (n.d.). *Metodica predării matematicii la clasele I-IV*. Editura Carminis.
- Ahmad, A., Tarmizi, R. A., & Nawawi, M. (2010). Visual Representations in Mathematical Word Problem Solving among Form Four Students in Malacca. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 8, 356–361. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.050>
- Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives: Complete Edition*. Longman.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Aron, I. (1977). *Metodica predării aritmeticii la clasele I-IV. Manual pentru liceele pedagogice*. Editura Didactică și Pedagogică.
- Baciu, C. (coord.), Bocoș, M.-D., Magdaș, I.-C. (2022). *Tehnologia Informației și a Comunicării în Educație (TICE). Dicționar de termeni. Volumul I: A-K*. Editura CEEOL Press.
- Badea, D. (2010). Competențe și cunoștințe – fața și reversul abordării lor. *Revista de pedagogie*, 58(3), 33–52.
- Bainbridge, W. A. (2022). A tutorial on capturing mental representations through drawing and crowd-sourced scoring. *Behavior Research Methods*, 54(2), 663–675. <https://doi.org/10.3758/s13428-021-01672-9>
- Bishop, A. J. (1988). A review of research on visualization in mathematics education. In A. Borbás (Ed.), *Proceedings of the 12th PME International Conference* (vol. 1, pp. 170–176). OOK Printing House.
- Bîrzea, C. (2010). Definirea și clasificarea competențelor. *Revista de pedagogie*, 58(3), 7–12.
- Bjork, I. M., & Bowyer-Crane, C. (2013). Cognitive skills used to solve mathematical word problems and numerical operations: A study of 6- to 7-year-old children. *European Journal of Psychology of Education*, 28(4), 1345–1360. <https://doi.org/10.1007/s10212-012-0169-7>
- Bobbitt, F. (1918). *The Curriculum*. Boston, New York [etc.]: Houghton Mifflin Company.
- Bloom, B. (1956). *Taxonomy of educational objectives*. Longmans.
- Bocoș, M.-D. (1997). *Problematizarea și învățarea prin descoperire în predarea și învățarea chimiei la clasele a IX-a și a XI-a* [Teză de doctorat]. Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca.
- Bocoș, M., & Jucan, D. (2019). *Fundamentele pedagogiei. Teoria și metodologia curriculumului. Repere și instrumente didactice pentru formarea profesorilor*. Ediția a IV-a, revizuită. Editura Paralela 45.
- Bocoș, M.-D. (coord.), Răduț-Taciu, R., & Stan, C. (2021). *Dicționar de pedagogie*. Presa Universitară Clujeană.
- Boonen, A. J. H., van Wesel, F., Jolles, J., & van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research*, 68, 15–26. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001>

- Boonen, A. J. H., de Koning, B. B., Jolles, J., & van der Schoot, M. (2016). Word problem solving in contemporary math education: A plea for reading comprehension skills training. *Frontiers in Psychology*, 7, Article 191. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00191>
- Brien, R. (1997). *Science cognitive & formation*. Presses de l'Université.
- Cambier, A. (2008). Ce înseamnă să desenezi? (N. Baltă, trad.). În P. Wallon, A. Cambier, & D. Egelhart, *Psihologia desenului la copil* (pp. 17–27). Editura Trei. (Lucrarea originală publicată în anul 1990)
- Can, D. (2020). The Mediator effect of reading comprehension in the relationship between logical reasoning and word problem solving. *Participatory Educational Research*, 7(3), 230–246. <https://doi.org/10.17275/per.20.44.7.3>
- Cappello, M., & Walker, N. T. (2021). Talking drawings: a multimodal pathway for demonstrating learning. *The Reading Teacher*, 74(4), pp. 407–418. <https://doi.org/10.1002/trtr.1952>
- Carotenuto, G., Di Martino, P., & Lemmi, M. (2021). Students' suspension of sense making in problem solving. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 53(2), 817–830. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01215-0>
- Câmpan, F. T. (1978). *Vechi și nou în matematică*. Editura Ion Creangă.
- Crețu, C. (1994). Curriculum: perspective conceptuale, istorice și vocaționale. *Revista de Pedagogie*, 43(3-4), 5–11.
- Crowley, P., Leigh Jette, S., Homer, T., Cork, S., & Posbergh, A. (2020). Image of Transition: Using Embodied Pedagogy to Facilitate Difficult Topics and Build Empathy. *Thresholds*, 43(1), 105–122. <https://academyforeducationalstudies.org/wp-content/uploads/2020/10/crowley-et-al-final.pdf>
- Concursul Național de Matematică LuminaMath (2022). *Culegere de probleme pentru clasele II-IV*. Editura Art Educațional.
- Cucoș, C. (1996). *Pedagogie*. Editura Polirom.
- Cummins, D., Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, 20, 405–438. [https://doi.org/10.1016/0010-0285\(88\)90011-4](https://doi.org/10.1016/0010-0285(88)90011-4)
- Damian, A., & Stavre, C. (2018). *Matematică și explorarea mediului. Exerciții și probleme pentru clasa I: caiet de lucru. Partea a II-a*. Editura Elicart.
- von Davier, M., Kennedy, A., Reynolds, K., Fishbein, B., Khorramdel, L., Aldrich, C., Bookbinder, A., Bezirhan, U., & Yin, L. (2024). *TIMSS 2023 International Results in Mathematics and Science*. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center. <https://doi.org/10.6017/lse.tpisc.timss.rs6460>
- De Corte, E., Verschaffel, L., & de Win, L. (23-27 aprilie 1984). *The influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions* [Conference presentation]. Annual Meeting of the American Educational Research Association (68th), New Orleans, LA, United States. <https://eric.ed.gov/?id=ED243961>
- Dewey, J. (1977). Copilul și curriculum-ul (V. Nicolescu & O. Oprică, trad.). În *Trei scrieri despre educație* (pp. 66–83). Editura Didactică și Pedagogică. (Lucrarea originală publicată în anul 1902)
- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, 1, 33–48.
- Doron, R., & Parot, F. (2006). *Dicționar de psihologie* (N. Cernăuțeanu, trad.). Editura Humanitas. (Lucrarea originală publicată în anul 1991)
- Dulamă, M. E. (2010). O nouă paradigmă în învățământul românesc: centrarea pe competențe. *Revista de pedagogie*, 58(3), 95–110.

- Fisher, J. (26 februarie 2020). Birds and worms. *Text savvy*. <https://textsavvy.substack.com/p/1686>
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., Schatschneider, C., & Fletcher, J. M. (2006). The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 98(1), 29–43. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.98.1.29>
- Gardner, H. (2006). *Inteligențe multiple – noi orizonturi*. Editura Sigma.
- Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive neuropsychology*, 22(3/4), 455–479. <https://doi.org/10.1080/02643290442000310>
- Geçici, M. E., & Türnüklü, E. (2021). Visual reasoning in mathematics education: a conceptual framework proposal. *Acta Didactica Napocensia*, 14(1), 115–126. https://padi.psiedu.ubbcluj.ro/adn/article_14_1_9.pdf
- Giroux, J., & Ste-Marie, A. (2001). The solution of compare problems among first-grade students. *European Journal of Psychology of Education*, 16(2), 141–161. <https://doi.org/10.1007/BF03173022>
- Glenberg, A. M., & Robertson, D. A. (1999). Indexical understanding of instructions. *Discourse Processes*, 28, 1–26. <https://doi.org/10.1080/01638539909545067>
- Glenberg, A. M., & Gallese, V. (2011). Action-based language: A theory of language acquisition, comprehension, and production. *Cortex*, 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.cortex.2011.04.010>
- Glenberg, A. M., Willford, J., Gibson, B., Goldberg, A., & Zhu, X. (2011). Improving Reading to Improve Math. *Scientific Studies of Reading*, 1–25. <https://doi.org/10.1080/10888438.2011.564245>
- Glenberg, A., Sato, M., Cattaneo, L., Riggio, L., Palumbo, D., & Buccino, G. (2008). Processing abstract language modulates motor system activity. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 61(6), 905–919. <https://doi.org/10.1080/17470210701625550>
- Greer, B., Verschaffel, L., & De Corte, E. (2002). „The answer is really 4.5“: Beliefs about word problems. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.) *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Vol. 31. (pp. 271–292). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_16
- Gros, H., Thibaut, J.-P. & Sander, E. (2025). Uncovering the interplay between drawings, mental representations, and arithmetic problem-solving strategies in children and adults. *Memory & Cognition*, 53, 76–95. <https://doi.org/10.3758/s13421-024-01523-w>
- Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91, 684–689. <http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.68>
- Hegarty, M., Mayer R. E., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of Arithmetic Word Problems: A Comparison of Successful and Unsuccessful Problem Solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87(1), 18–32. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.87.1.18>
- Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyle, C., Lappan, G., Mitchelmore, M. and Vinner, S. (1989). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics and Cognition. (ICMI Study Series)* (pp. 70–95). University Press.
- Hershkowitz, R., Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning - the case of the matches. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(2), 255–265. <https://doi.org/10.1080/00207390010010917>
- Hibbing A. N., & Rankin-Erickson, J. L. (2003). A picture is worth a thousand words: Using visual images to improve comprehension for middle school struggling readers. *The Reading Teacher*, 56(8), 758–770.

- Hudson, T. (1983). Correspondences and Numerical Differences between Disjoint Sets. *Child Development*, 54(1), 84–90. <https://doi.org/10.2307/1129864>
- Ionescu, M. (2007). *Instrucție și educație*. „Vasile Goldiș” University Press.
- Ion, R. (2020). Problema banală de matematică pe care 45% din copiii de clasa a VIII-a din România nu pot să o rezolve. Dragoș Iliescu, expert în testare: „Trebuie să înțelegem că matematica nu este doar o poveste. Este un instrument pentru viață”. *Republica*. <https://republica.ro/problema-banala-de-matematica-pe-care-45-din-copiii-de-clasa-a-viii-a-din-romania-nu-pot-sa-o-rezolve>
- Juignet, P. (22 iulie 2016). Qu'est-ce que la science? *Philosophie, Science et Société*. <https://philosciences.com/qu-est-ce-que-la-science>
- Kamii, C., & Joseph, L. L. (2004). *Young children continue to reinvent arithmetic—2nd grade: Implications of Piaget's theory*, Second edition. Teachers College Press.
- Kintsch, W., & van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review*, 85(5), 363–394. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.85.5.363>
- Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109–129. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.92.1.109>
- Kintsch, W., & Rawson, K. A. (2005). Comprehension. În M. J. Snowling & C. Hulme (Eds.), *The science of reading: A handbook* (pp. 209–226). Blackwell Publishing. <https://doi.org/10.1002/9780470757642.ch12>
- Kozhevnikov, M., Hegarty, M., & Mayer, R. E. (2002). Revising the Visualizer-Verbalizer Dimension: Evidence for Two Types of Visualizers. *Cognition and Instruction*, 20(1), 47–77. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI2001_3
- Lean, C., & Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 267–299. <https://doi.org/10.1007/BF00311060>
- Legea învățământului preuniversitar, nr. 198/2023 (2023). https://edu.ro/sites/default/files/fi%C8%99iere/Minister/2023/Legi_educatie_Romania_educata/legi_monitor/Legea_invatamantului_preuniversitar_nr_198.pdf
- Lupu, C. (2014). *Aritmetica pentru învățători*. Editura Alma Mater.
- Magdaș, I. (2022). *Didactica matematicii pentru învățământul primar și preșcolar: fundamente teoretice și aplicative*, Ediția a III-a, revizuită. Presa Universitară Clujeană.
- Manolescu, M. (2010). Pedagogia competențelor – o viziune integratoare asupra educației. *Revista de pedagogie*, 58(3), 53–65.
- Mateescu, D. Z. (n.d.). http://www.ccdcluj.ro/vechi/Preuniversitaria/Nr.9%20mai2014/Preuniversitaria_Creativitate/Mateescu_Dana.pdf
- Mărcuț, I. G. (2008). *Metodica predării matematicii în învățământul primar*. Editura Alma Mater.
- McConnell, S. (1993). Talking drawings: A strategy for assisting learners. *Journal of Reading*, 36(4), 260–269.
- Mellone, M., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2014). Making sense of word problems: The effect of rewording and dyadic interaction. În P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol. 4, (201–208). <https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2036%20PME%2038%202014%20Proceedings%20Vol%204.pdf>
- Merriam-Webster. (n.d.). Savant. În *Merriam-Webster.com dictionary*. <https://www.merriam-webster.com/dictionary/savant>
- Miclea, M. (1999). *Psihologie cognitivă: modele teoretico-experimentale*, Ediția a II-a, revizuită. Editura Polirom.

- Mih, V. (2018). *Psihologie educațională*. Editura ASCR.
- Ministerul Educației Naționale (2013). *Programa școlară pentru disciplina Matematică și explorarea mediului. Clasa pregătitoare, clasa I și clasa a II-a*. Anexa nr. 2 la OMEN Nr. 3418/19.03.2013. <http://programe.ise.ro/>
- Ministerul Educației Naționale (2014). *Programa școlară pentru disciplina Matematică. Clasele a III-a – a IV-a*. Anexa nr. 2 la OMEN Nr. 5003/02.12.2014. <http://programe.ise.ro/>
- Ministerul Educației și Cercetării (4 decembrie 2024). Ministerul Educației și Universitatea din București anunță lansarea rezultatelor studiului internațional privind competențele elevilor de clasa a IV-a și a VIII-a la matematică și științe - TIMSS 2023. https://www.edu.ro/comunicat_presa_113_2024_rezultate_RO_TIMSS23
- Mogoș, M. (2022). *Matematică și explorarea mediului: noua culegere pentru clasa a II-a*. Editura Art Educațional.
- Mogoș, M. (2024). *Noua culegere de matematică pentru clasa a III-a*. Editura ArtKlett.
- Molina, N., Strohmaier, A. R., & Reiss, K. M. (2018). “I added the numbers, it’s math!” How sense-making in “age of the captain” problems differs between a mathematics classroom and a language classroom. În Curtis, F. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 38(3). <https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2019/02/BSRLM-CP-38-3-13.pdf>
- Moreau, S., & Coquin-Viennot, D. (2003). Comprehension of arithmetic word problems by fifth-grade pupils: Representations and selection of information. *British Journal of Educational Psychology*, 73(1), 109–121. <https://doi.org/10.1348/000709903762869941>
- Moses, B. E. (1977). *The nature of spatial ability and its relationship to mathematical problem solving* [Doctoral dissertation, Indiana University]. <https://www.proquest.com/openview/f0333bcf837d76665293e74d3e072e65/1.pdf?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y>
- Murawski, L. M. (2014). Critical thinking in the classroom and ... beyond. *Journal of Learning in Higher Education*, 10(1), 25–30. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1143316.pdf>
- Neacșu, I. (1988). *Metodica predării matematicii la clasele I-IV. Manual pentru liceele pedagogice clasele XI-XII*. Editura Didactică și Pedagogică.
- Nesher, P. (1980). The Stereotyped Nature of School Word Problems. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 41–48.
- Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 13, 373–394.
- Nesher, P., & Teubal, E. (1975). Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 41–51.
- Niculescu, R. M. (2005). Formarea profesorilor – o problemă crucială într-o eră a schimbării. *Revista de pedagogie*, 1(12), 71–77.
- OECD (n.d.). *Definition and Selection of Competencies (DeSeCo)*. <https://www.oecd.org/education/skills-beyond-school/definitionandselectionofcompetenciesdeseco.htm>
- OECD (2019). *OECD Future of Education and Skills 2030: OECD Learning Compass 2030*. https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/about/projects/edu/education-2040/1-1-learning-compass/OECD_Learning_Compass_2030_Concept_Note_Series.pdf
- OECD (2020). *What Students Learn Matters: Towards a 21st Century Curriculum*, OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/d86d4d9a-en>
- OECD (2022). *PISA 2022 Mathematics Framework*. <https://pisa2022-maths.oecd.org/ca/index.html>

- OECD (2023). *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*. PISA, OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Pamfil, A. (2016). *Limba și literatura română în școala primară: perspective complementare*. Editura Art.
- Paquette, K., Fello, S. E., & Jalongo, M. (2007). The talking drawings strategy: using primary children's illustrations and oral language to improve comprehension of expository text. *Early Childhood Education Journal*, 35(1), 65–73. <https://doi.org/10.1007/s10643-007-0184-5>
- Park, J. Y. (2012). A different kind of reading instruction: Using visualizing to bridge reading comprehension and critical literacy. *Journal of Adolescent & Adult Literacy*, 55(7), 629–640. <https://doi.org/10.1002/JAAL.00074>
- Parry, S. B. (1996). The quest for competencies. *Training*, 33(7), 48–56.
- Peeck, J. (1987). Role of illustrations in processing and remembering illustrated text. În D. M. Willows & H. A. Houghton, (Eds.), *The psychology of illustration*. Vol. I (pp. 115–145). Springer-Verlag.
- Petrovici, C. (2014). *Metodica matematicii pentru învățământul primar*. Editura Polirom.
- Perrenoud, P. (1998). *L'évaluation des élèves. De la fabrication de l'excellence à la régulation des apprentissages. Entre deux logiques*. De Boeck.
- Piaget, J. (1964). Cognitive Development in Children: Development and Learning. *Journal of Research in Science Teaching*, 2, 176–186.
- Piaget, J. (1973). *Nașterea inteligenței la copil* (D. Răutu, trad.). Editura Didactică și Pedagogică. (Lucrarea originală publicată în anul 1936)
- Piaget, J. (1976). *Construirea realului la copil* (D. Răutu, trad.). Editura Didactică și Pedagogică. (Lucrarea originală publicată în anul 1937)
- Piaget, J., & Inhelder, B. (2011). *Psihologia copilului* (L. Papuc, trad.). Editura Cartier (Lucrarea originală publicată în anul 1966)
- Pițilă, T., & Mihăilescu, C. (2018). *Matematică și explorarea mediului. Manual pentru clasa I*. Editura Didactică și Pedagogică.
- Planchard, É. (1976). *Introducere în pedagogie* (V. C. Petrescu & E. Balmuș, trad.). Editura Didactică și Pedagogică. (Lucrarea originală publicată în anul 1969)
- Platon (1922). Harmide (sau despre înțelepciune). În *Platon: dialoguri* (Ș. Bezdechi, trad.), (pp. 169–219). Cultura Națională.
- Pongsakdi, N., Kajamies, A., Veermans, K., Lertola, K., Vauras, M., & Lehtinen, E. (2020). What makes mathematical word problem solving challenging? Exploring the roles of word problem characteristics, text comprehension, and arithmetic skills. *ZDM Mathematics Education*, 52, 33–44. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01118-9>
- Polya, G. (1965). *Cum rezolvăm o problemă?* (R. Theodorescu, trad.). Editura Științifică. (Lucrarea originală publicată în anul 1945)
- Powell, S. R., & Fuchs, L. S. (2018). Effective Word-Problem Instruction: Using Schemas to Facilitate Mathematical Reasoning. *TEACHING Exceptional Children*, 51(1), 31–42. <https://doi.org/10.1177/0040059918777250>
- Powell, S. R., Namkung, J. M., & Lin, X. (2022). An investigation of using keywords to solve word problems. *The Elementary School Journal*, 122(3), 452–473. <https://doi.org/10.1086/717888>
- Presmeg, N. C. (1986a). Visualization in High School Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42–46. <https://flm-journal.org/Articles/1917B083BE4534511A32616EED75A8.pdf>

- Presmeg, N. C. (1986b). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297–311. <https://doi.org/10.1007/BF00305075>
- Purcar, A. -M., Bocoș, M., Pop, A. -L., Roman, A., Rad, D., Mara, D., Crișan, C., Răduț-Taciu, R., Mara, E. -L., Todor, I., Muntean-Trif, L., Neacșu, M. -G., Costache Colareza, C., Maier, M., Tăușan-Crișan, L., Triff, Z., Baci, C., Marin, D. -C., & Triff, D. -G. (2024). The Effect of Visual Reasoning on Arithmetic Word Problem Solving. *Education Sciences*, 14(3), 278. <https://doi.org/10.3390/educsci14030278>
- Recomandarea Parlamentului European și a Consiliului din 23 aprilie 2008 privind stabilirea Cadrului european al calificărilor pentru învățarea de-a lungul vieții. (2008). *EUR-Lex. Access to European Union Law*. [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/RO/TXT/?uri=celex:32008H0506\(01\)](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/RO/TXT/?uri=celex:32008H0506(01))
- Reusser, K. (1985). *From situation to equation. On formulation, understanding and solving "situation problems"*. Institute of Cognitive Science. Boulder, Colorado. Technical Report No. 143. <https://doi.org/10.5167/uzh-261755>
- Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science*, 17, 309–338. <https://doi.org/10.1007/BF00056219>
- Reusser, K. (1990). Understanding word arithmetic problem. Linguistic and situational factors. *Annual Meeting of the American Educational Research Association. Boston, MA (April 1620, 1990)*. <https://eric.ed.gov/?id=ED326391>
- Reid, C., Buckley, J., Dunbar, R., & Seery, N. (2022). Examining the relationship between spatial ability and cognitive load during complex problem solving. *PATT2022: PATT on the edge: Technology, innovation, and education*. Memorial University.
- Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. În H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153–196). Academic Press.
- Roegiers, X. (1998). Compétences et situations d'intégration. *Formation pour l'Installation des Compétences*. FESeC.
- Roșu, M. (2006). *Didactica matematicii în învățământul primar*. Ministerul Educației și Cercetării. Proiectul pentru învățământul Rural.
- Rösken, B., & Rolka, K. (2006). A picture is worth a 1000 words – The role of visualization in mathematics learning. În J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 457–464).
- Ruggiero, V. R. (2012). *The art of thinking: A guide to critical and creative thought* (10th ed.). Longman.
- Russell, R. A. (1997). *The use of visual reasoning strategies in problem-solving activities by preservice secondary mathematics teachers* [Unpublished doctoral dissertation]. University of Georgia.
- Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311–343). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Scripcariu, M., & Kovacs, M. (2023). *Toți copiii citesc – Resurse educaționale pentru clasa I*. Fundația Noi Orizonturi. https://toticopiicitesc.ro/wp-content/uploads/2024/10/Ghid-metodologic-pentru-invataatori_cls-I.pdf
- Senge, P. (2016). *Școli care învață: a cincea disciplină aplicată în educație* (Z. Mahu, trad.). Editura Trei. (Lucrarea originală publicată în anul 2000)

- Smith, I. M. (1964). *Spatial ability: Its educational and social significance*. University of London Press.
- Stern, E., & Lehrndorfer, A. (1992). The role of situational context in solving word problems. *Cognitive Development*, 7(2), 259–268. [https://doi.org/10.1016/0885-2014\(92\)90014-I](https://doi.org/10.1016/0885-2014(92)90014-I)
- Stoica, A., & Mihail, R. (2007). *Evaluarea educațională. Inovații și perspective*. Humanitas Educațional.
- Suwarsono, S. (1982). *Visual Imagery in the Mathematical Thinking of Seventh Grade Students* [Doctoral dissertation]. Monash University. <https://doi.org/10.26180/5edd9a8d0facb>
- Timario, R. (2020). Reading comprehension and problem solving skills of grade seven students: a mixed sequential explanatory approach. *American Journal of Humanities and Social Sciences*, 4(6), 83–92.
- Trască, I. (24 septembrie 2015). Competențele – temă pentru schimbarea de paradigmă în educație. *EPALE – Platformă electronică pentru învățarea adulților în Europa*. <https://epale.ec.europa.eu/ro/blog/competentele-tema-pentru-schimbarea-de-paradigma-educatie>
- Vălcan, D. (2018). *Metodologia rezolvării problemelor de aritmetică*. Editura Casa Cărții de Știință.
- Verschaffel, L., & de Corte, E. (1993). A decade of research on word problem solving in Leuven: Theoretical, methodological, and practical outcomes. *Educational Psychology Review*, 5(3), 239–256. <https://doi.org/10.1007/BF01323046>
- Verschaffel, L., de Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4(4), 273–294. [https://doi.org/10.1016/0959-4752\(94\)90002-7](https://doi.org/10.1016/0959-4752(94)90002-7)
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. Swets & Zeitlinger.
- Vincent-Lancrin, S. et al. (2019). *Fostering Students' Creativity and Critical Thinking: What it Means in School*. Educational Research and Innovation, OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/62212c37-en>
- Voyer, D. (2011). Performance in mathematical problem solving as a function of comprehension and arithmetic skills. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 1073–1092. <https://doi.org/10.1007/s10763-010-9239-y>
- Webb, N. L. (1979). Processes, conceptual knowledge and mathematical problem-solving ability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(2), 83–93.
- World Economic Forum (2023). *The Future of Jobs Report 2023*. <https://www.weforum.org/publications/the-future-of-jobs-report-2023/>
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. În W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1–8). Mathematical Association of America. http://www.hitt.uqam.ca/mat7191_fich/Zimmermann_Cunningham_1991.pdf