Universitatea"Babeş-Bolyai",Cluj-Napoca

Facultatea de Matematică şi Informatică

Contribuţii la studiul unor construcţii algebrice. Aspecte categoriale şi aplicaţii la aritmetica numerelor fuzzy.

Teză de doctorat - Rezumat

Conducător ştiinţific:
Prof. dr. Ioan Purdea

Doctorand:
Fechete Dorina–Lucia

Cluj – Napoca

2013

Cuprins

Introducere

Această lucrare prezintă în prima parte câteva construcţii algebrice (inele grupale, extinderi triviale şi extinderi Dorroh), tratate din punct de vedere categorial şi topologic, respectiv, în a doua parte, câteva construcţii algebrice din aritmetica numerelor fuzzy.

Capitolul 1. **Extinderi de inele.** În acest capitol am prezentat unele proprietăţi algebrice şi categoriale ale unor extinderi de inele şi este structurat astfel:

1.1. Inele grupale. În acest paragraf am prezentat, pe lângă unele noţiuni şi rezultate de bază din teoria inelelor grupale şi unele rezultate noi. Astfel am introdus aici categoria $\mathfrak{RngGrp}$ (care are ca obiecte tripletele de forma (R, G, σ) , unde R este un inel cu unitate, G este un grup, iar $\sigma : G \to \operatorname{Aut} R$ este un morfism de grupuri), functorul covariant $\mathrm{F} : \mathfrak{RngGrp} \to \mathfrak{Rng}$, care asociază tripletului (R, G, σ) inelul grupal strâmb $R *_\sigma G$ şi am demonstrat că acest functor are un adjunct la dreapta (Teorema 1.1.4). Tot aici am demonstrat că bifunctorul $\mathrm{H_c} : \mathfrak{Rng}_\mathfrak{c} \times \mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Rng}_\mathfrak{c}$, (care asociază inelului comutativ cu unitate R şi grupului comutativ G, inelul grupal $R[G]$) are un adjunct la dreapta (Teorema 1.1.7).

1.2. Extinderi ale inelelor comutative. În acest paragraf am tratat extinderile triviale din punct de vedere categorial. Astfel, am introdus aici, proprietatea de universalitate a extinderii triviale $R \ltimes M$ (Teorema 1.2.1) şi consecinţele acesteia (Corolarul 1.2.2, Propoziţia 1.2.4), rezultate care facilitează construcţiile categoriale prezentate în acest paragraf. Tot aici am caracterizat grupul de unităţi al produsului semidirect $R * M$ (Propoziţia 1.2.9).

1.3. Produse semidirecte generalizate. Ca şi o generalizare a celor prezentate în paragraful anterior, am introdus aici inelul $R \ltimes_\alpha^\beta M$ (numit (α, β)–produsul semidirect dintre un inel R şi un R-modul M) şi am studiat unele proprietăţi algebrice şi categoriale ale acestuia. Astfel, am caracterizat grupul de unităţi al acestui inel, am dat proprietatea de universalitate şi am făcut unele construcţii categoriale. De asemenea, tot aici, am studiat unele proprietăţi topologice, şi anume, problema extinderii normelor de pe R şi M pe (α, β)–produsul semidirect $R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M$.

Capitolul 2. **Extinderi Dorroh.** În acest capitol al lucrării, am prezentat, pe lângă unele proprietăţi de bază ale extinderilor Dorroh şi câteva contribuţii originale, legate de această construcţie. Astfel, am introdus aici (pentru simplificarea expunerii) două noţiuni, şi anume, cea de pereche Dorroh şi cea de $\mathcal{D}$-morfism, proprietatea de universalitate a acestui inel (Teorema 2.1.6) şi consecinţa acesteia (Corolarul 2.1.8), noţiuni şi rezultate utile în construcţiile categoriale ce urmează. Tot aici, am descris acele inele, care se pot exprima ca şi o anume extindere Dorroh (Teoremele 2.1.10 şi 2.1.11), am caracterizat grupul de unităţi al inelului $R \bowtie M$ (Teorema 2.3.2) şi am construit functorul "extindere Dorroh" ($\mathbf{D} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{Rng}$), arătând că acesta are un adjunct la dreapta (Teorema 2.2.1) şi comută cu produsele directe şi cu limitele inverse (Propoziţiile 2.2.2 şi 2.2.3).

Capitolul 3. **Numere fuzzy. Generalităţi.** În acest capitol am prezentat definiţia şi unele proprietăţi de bază ale numerelor fuzzy, precum şi unele reprezentări ale acestora. Astfel, pe lângă binecunoscuta reprezentare LU, am introdus şi câteva reprezentări noi, ale numerelor fuzzy: reprezentarea multivocă, reprezentarea CE (core ecart) şi reprezentarea MCE (middle-core ecart). Reprezentările CE şi MCE facilitează construcţia unor noi operaţii cu numere fuzzy, operaţii prezentate în capitolele următoare.

Capitolul 4. **Produse de tip Dorroh pe mulţimea numerelor fuzzy.** Ca şi o aplicaţie a extinderilor Dorroh, am introdus aici o nouă structură algebrică pe mulţimea numerelor fuzzy şi am studiat unele proprietăţi ale acesteia. Folosind reprezentarea CE a numerelor fuzzy, am introdus un nou produs (notat cu " $\circledast$ ") pe mulţimea numerelor fuzzy, produs care se bazează pe extinderea Dorroh, a unui semiinel printr-un semimodul. Astfel, $(\mathfrak{F}_{+}, +, \circledast)$ este un semiinel (Teorema 4.2.1), unde $\mathfrak{F}_{+}$ este mulţimea numerelor fuzzy cu nucleul pozitiv. Ca şi o particularizare a acestei construcţii generale, am obţinut un produs nou, produs pe care l-am numit "produsul Dorroh". De asemenea, am construit o relaţie de echivalenţă, compatibilă cu suma şi cu produsul Dorroh (Propoziţia 4.3.2 şi Teorema 4.3.7).

Capitolul 5. **Produse complet distributive pe mulţimea numerelor fuzzy.** În acest capitol, folosind reprezentarea MCE a numerelor fuzzy, am introdus două produse noi pe mulţimea numerelor fuzzy, produse care sunt complet distributive faţă de adunare. Astfel, în Teorema 5.1.1, am arătat că $(\mathfrak{F}_{c}, +, \boxdot)$ este un semiinel comutativ cu unitate, iar $(\mathfrak{F}_c, +, \boxtimes)$ este un semiinel comutativ. Tot aici, am introdus şi un nou produs cu scalari (care pentru un scalar pozitiv coincide cu produsul cu scalari uzual) şi care, pe lângă proprietăţile obişnuite, are o proprietate nouă (Propoziţia 5.1.8.5). Pentru a defini structura topologică a multimii $\mathfrak{F}_c$, am introdus patru tipuri de norme şi o nouă metrică pe mulţimea $\mathfrak{F}_c$. Proprietăţile acestora le-am dat în Propoziţia 5.2.1, Teorema 5.2.2 şi Propoziţia 5.2.3. În ultimul paragraf al acestui capitol, am prezentat câteva funcţii elementare, definite pe mulţimea numerelor fuzzy, construcţia acestora fiind posibilă (în această formă), datorită utilizării reprezentării MCE şi a produsului $\boxdot$.

Capitolul 6. **Grupuri topologice pe mulţimi cât de numere fuzzy.** A.M. Bica a construit în [11] două grupuri abeliene izomorfe, definite pe mulţimi cât de numere fuzzy unimodale, care au părţile laterale strict monotone şi continue. În acest capitol din lucrare, am extins rezultatele din [11], la o clasă mai largă de numere fuzzy, adăugând şi o structură topologică. De asemenea, am caracterizat grupurile cât construite, folosind mulţimea $\mathrm{BVC}\,[0,1]$ a funcţiilor continue şi cu variaţie mărginită, definite pe $[0,1]$.

În încheiere, doresc să mulţumesc îndrumătorului ştiinţific, d-lui Prof. Dr. Ioan Purdea pentru sprijinul acordat în elaborarea acestei lucrări. De asemenea, doresc să aduc mulţumiri şi Colectivului de Algebră de la Universitatea "Babeş–Bolyai" din Cluj Napoca.

CUVINTE CHEIE: inel grupal; inel grupal strâmb; aproape inel; semiinel; semimodul; semigrup cu involuţie; extindere trivială; extindere Dorroh; produs semidirect de grupuri; categorie; functor covariant; functori adjuncţi; inel pseudo-normat; inel normat; grup topologic metrizabil; număr fuzzy; aritmetica numerelor fuzzy; funcţie cu variaţie mărginită;

Partea I

Construcţii algebrice - aspecte categoriale

Capitolul 1

Extinderi de inele

1.1 Inele grupale

Pe tot parcursul paragrafului, prin inel vom înţelege un inel asociativ cu unitate iar prin morfism de inele vom înţelege morfism unitar.

1.1.1 Inele grupale strâmbe

Fie R un inel, G un grup şi $\sigma : G \to \operatorname{Aut} R$ un morfism de grupuri. Pentru fiecare $g \in G$ şi $r \in R$, notăm $\sigma(g)(r) \overset{not.}{=} r^g$.

Inelul grupal strâmb $R *_\sigma G$ (vezi [75],[67]) se defineşte ca fiind R-modulul stâng liber, cu baza G, cu produsul definit distributiv, pe baza relaţiei:

$$(r_1 g_1) \cdot (r_2 g_2) = r_1 r_2^{g_1} g_1 g_2 \,,$$

pentru fiecare $r_1, r_2 \in R$ şi $g_1, g_2 \in G$.

Teorema 1.1.1 ([75], [67]) *Fie R un inel, G un grup şi $\sigma : G \to \operatorname{Aut} R$ un morfism de grupuri. Atunci, pentru orice inel A, pentru orice morfism de inele $\varphi : R \to A$ şi pentru orice morfism de grupuri $f : G \to U(A)$, există un unic morfism de inele $\Phi : R *_\sigma G \to A$, astfel încât $\Phi(r) = \varphi(r)$, pentru orice $r \in R$ şi $\Phi(g) = f(g)$ pentru orice $g \in G$ dacă şi numai dacă*

$$\varphi(r^g) = f(g) \cdot \varphi(r) \cdot (f(g))^{-1}$$

pentru orice $r \in R$ şi pentru orice $g \in G$.

Corolarul 1.1.2 [38] *Fie $\varphi : R \to R'$ un morfism de inele şi $f : G \to G'$ un morfism de grupuri. Dacă $\sigma : G \to \operatorname{Aut} R$ şi $\sigma' : G' \to \operatorname{Aut} R'$ sunt două morfisme de grupuri, astfel încât diagramele*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma(g)"'] & R' \arrow[d, "(\sigma' \circ f)(g)"] \\ R \arrow[r, "\varphi"] & R' \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

să fie comutative (i.e., $(\sigma' \circ f)(g) \circ \varphi = \varphi \circ \sigma(g)$) pentru fiecare $g \in G$, atunci aplicaţia

$$\begin{array}{rcccc} \Phi \overset{not.}{=} \overline{(\varphi, f)} & : & R *_\sigma G & \longrightarrow & R' *_{\sigma'} G' \\ & & \sum\limits_{i=1}^{n} r_i\, g_i & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(r_i)\ f(g_i) \end{array}$$

este unicul morfism de inele care extinde pe φ şi f.

Corolarul 1.1.3 (1) [38] *Fie R un inel, G şi G' două grupuri, iar $f : G \to G'$, $\sigma : G \to \operatorname{Aut} R$ şi $\sigma' : G' \to \operatorname{Aut} R$ morfisme de grup, astfel încât*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & G' \arrow[dl, "\sigma'"] \\ & \operatorname{Aut} R & \end{tikzcd} \qquad \sigma' \circ f = \sigma,$$

$\big($sau echivalent, $r^{f(g)} = r^g$, pentru fiecare $g \in G$ şi $r \in R\big)$. Atunci aplicaţia

$$\begin{array}{rcccc} \overline{f} & : & R *_\sigma G & \longrightarrow & R *_{\sigma'} G' \\ & & \sum\limits_{i=1}^{n} r_i\, g_i & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} r_i\, f(g_i) \end{array}$$

este unicul morfism de inele care-l extinde pe f.

(2) [38] *Fie G un grup, R şi R' două inele, $\varphi : R \to R'$ un morfism de inele, $\sigma : G \to \operatorname{Aut} R$ şi $\sigma' : G \to \operatorname{Aut} R'$ două morfisme de grup, astfel încât*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma(g)"'] & R' \arrow[d, "\sigma'(g)"] \\ R \arrow[r, "\varphi"] & R' \end{tikzcd} \qquad \sigma'(g) \circ \varphi = \varphi \circ \sigma(g),\ \textit{pentru fiecare } g \in G$$

(sau echivalent, $\varphi(r^g) = \varphi(r)^g$, pentru fiecare $g \in G$ şi $r \in R$). Atunci aplicaţia

$$\begin{array}{rcl} \overline{\varphi} : R *_\sigma G & \longrightarrow & R' *_{\sigma'} G \\ \sum_{i=1}^{n} r_i\, g_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \varphi(r_i)\, g_i \end{array}$$

este unicul morfism de inele care-l extinde pe φ.

Rezultatele anterioare ne permit construcţia unor categorii pe care le definim mai jos.

1. **Categoria $\mathfrak{Grp}_R$**, unde R este un inel fixat, are ca obiecte perechi (G, σ), unde G este un grup şi $\sigma : G \to \operatorname{Aut} R$ este un morfism de grupuri. Dacă $(G, \sigma), (G', \sigma')$ sunt două obiecte din această categorie,

   $$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Grp}_R}((G, \sigma), (G', \sigma')) = \{f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Grp}}(G, G') : \sigma' \circ f = \sigma\}$$

   compunerea morfismelor fiind compunerea morfismelor de grupuri.

2. **Categoria $\mathfrak{Rng}_G$**, unde G este un grup fixat, are ca obiecte perechi (R, σ) unde R este un inel şi $\sigma : G \to \operatorname{Aut} R$ este un morfism de grupuri. Dacă $(R, \sigma), (R', \sigma')$ sunt două obiecte din această categorie, atunci mulţimea morfismelor $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Rng}_G}((R, \sigma), (R', \sigma'))$ este

   $$\{\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Rng}}(R, R') : \sigma'(g) \circ \varphi = \varphi \circ \sigma(g),\ \forall\, g \in G\},$$

   iar compunerea morfismelor este compunerea morfismelor de inele.

3. **Categoria $\mathfrak{RngGrp}$** construită astfel:

   - clasa obiectelor este formată din triplete (R, G, σ), unde R este un inel, G este un grup, iar $\sigma : G \to \operatorname{Aut} R$ este un morfism de grupuri;
   - mulţimea morfismelor $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{RngGrp}}((R, G, \sigma), (R', G', \sigma'))$ este formată din perechile (φ, f), unde $\varphi : R \to R'$ este un morfism de inele şi $f : G \to G'$ este un morfism de grupuri, pentru care $(\sigma' \circ f)(g) \circ \varphi = \varphi \circ \sigma(g)$, pentru fiecare $g \in G$;
   - dacă

     $$\begin{array}{rcl} (\varphi, f) & \in & \operatorname{Hom}_{\mathfrak{RngGrp}}((R, G, \sigma), (R', G', \sigma')) \\ (\varphi', f') & \in & \operatorname{Hom}_{\mathfrak{RngGrp}}((R', G', \sigma'), (R'', G'', \sigma'')) \end{array}$$

     atunci

     $$(\varphi', f') \circ (\varphi, f) = (\varphi' \circ \varphi, f' \circ f) \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{RngGrp}}((R, G, \sigma), (R'', G'', \sigma'')).$$

Costruim în continuare câţiva functori covarianţi între categoriile definite anterior:

1. Dacă R este un inel fixat, definim functorul covariant $\mathrm{I}_R : \mathfrak{Grp}_R \to \mathfrak{RngGrp}$ astfel
$$\begin{tikzcd}
(G,\sigma) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{I}_R\,(G,\sigma) = (R,G,\sigma) \arrow[d, "\mathrm{I}_R(f)=(\mathrm{id}_R, f)"] \\
(G',\sigma) \arrow[r, mapsto] & \mathrm{I}_R\,(G',\sigma) = (R,G',\sigma)
\end{tikzcd}$$

2. Dacă G este un grup fixat, definim functorul covariant $\mathrm{I}_G : \mathfrak{Rng}_G \to \mathfrak{RngGrp}$ prin
$$\begin{tikzcd}
(R,\sigma) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathrm{I}_G\,(R,\sigma) = (R,G,\sigma) \arrow[d, "\mathrm{I}_G(\varphi)=(\varphi, \mathrm{id}_G)"] \\
(R',\sigma) \arrow[r, mapsto] & \mathrm{I}_G\,(R',\sigma) = (R',G,\sigma)
\end{tikzcd}$$

3. Conform Corolarului 1.1.2, putem construi functorul covariant $\mathrm{F} : \mathfrak{RngGrp} \to \mathfrak{Rng}$ prin
$$\begin{tikzcd}
(R,G,\sigma) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "(\varphi,f)"'] & \mathrm{F}(R,G,\sigma) = R *_\sigma G \arrow[d, "\mathrm{F}(\varphi,f)\ =\Phi"] \\
(R',G',\sigma') \arrow[r, mapsto] & \mathrm{F}(R',G',\sigma') = R' *_{\sigma'} G'
\end{tikzcd}$$

4. Dacă R este un inel, atunci aplicaţia $\sigma_R : \mathrm{U}\,(R) \to \mathrm{Aut}\,R,\ r_0 \mapsto \sigma_{r_0}$,unde $\sigma_{r_0}\,(x) = r_0\, x\, r_0^{-1}$, pentru fiecare $x \in R$, este un morfism de grup.

   Consider functorul covariant $\widetilde{\mathrm{U}} : \mathfrak{Rng} \to \mathfrak{RngGrp}$ definit prin
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & \widetilde{\mathrm{U}}(A) = (A, \mathrm{U}(A), \sigma_A) \arrow[d, "\widetilde{\mathrm{U}}(\varphi)=(\varphi, \mathrm{U}(\varphi))"] \\
B \arrow[r, mapsto] & \widetilde{\mathrm{U}}(B) = (B, \mathrm{U}(B), \sigma_B)
\end{tikzcd}$$

   unde $\mathrm{U}\,(R)$ este grupul de unităţi al inelului R şi $\mathrm{U}\,(\varphi) : \mathrm{U}\,(A) \to \mathrm{U}\,(B)$ este morfismul de grupuri indus de morfismul de inele $\varphi : A \to B$.

Teorema 1.1.4 [38] *Functorul* F *este adjunct la stânga functorului* $\widetilde{\mathrm{U}}$.

1.1.2 Inele grupale

Dacă în definiţia inelului grupal strâmb, considerăm $\sigma(g) = \mathrm{id}_R$, pentru fiecare $g \in G$, atunci inelul grupal strâmb $R *_\sigma G$ devine inelul grupal $R[G]$.

Particularizând în Teorema 1.1.1, $\sigma(g) = \mathrm{id}_R$, pentru fiecare $g \in G$, obţinem proprietatea de universalitate a inelelor grupale, pe care o dăm în continuare:

Teorema 1.1.5 *Fie R un inel, G un grup. Atunci, pentru orice inel A, pentru orice morfism de inele $\varphi : R \to A$ şi pentru orice morfism de grupuri $f : G \to \mathrm{U}(A)$, există un unic morfism de inele $\Phi : R[G] \to A$, astfel încât $\Phi(r) = \varphi(r)$, pentru orice $r \in R$ şi $\Phi(g) = f(g)$ pentru orice $g \in G$ dacă şi numai dacă*

$$\varphi(r) \cdot f(g) = f(g) \cdot \varphi(r), \tag{1.2}$$

pentru orice $r \in R$ şi pentru orice $g \in G$.

Corolarul 1.1.6 *Din Teorema* 1.1.5*, rezultă că pentru orice morfism de inele $\varphi : R \to R'$ şi pentru orice morfism de grupuri $f : G \to G'$ există un unic morfism de inele $\Phi : R[G] \to R'[G']$, astfel încât $\Phi(r) = \varphi(r)$, pentru orice $r \in R$ şi $\Phi(g) = f(g)$, pentru orice $g \in G$.*

Din Corolarul 1.1.6, rezultă că putem defini un functor covariant $\mathrm{H} : \mathfrak{Rng} \times \mathfrak{Grp} \to \mathfrak{Rng}$, astfel:

$$\begin{tikzcd}
(R,G) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(\varphi,f)}"'] & \mathrm{H}(R,G) = R[G] \arrow[d, "{\mathrm{H}(\varphi,f)=\Phi}"] \\
(R',G') \arrow[r, mapsto] & \mathrm{H}(R',G') = R'[G']
\end{tikzcd}$$

Pentru cazul comutativ, consider functorul $\mathrm{H_c} : \mathfrak{Rng}_\mathfrak{c} \times \mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Rng}_\mathfrak{c}$ definit analog cu functorul H.

Definim încă un functor $\widehat{\mathrm{U}} : \mathfrak{Rng}_\mathfrak{c} \to \mathfrak{Rng}_\mathfrak{c} \times \mathfrak{Ab}$, astfel:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & \widehat{\mathrm{U}}(A) = (A, \mathrm{U}(A)) \arrow[d, "{\widehat{\mathrm{U}}(\varphi)=(\varphi,\mathrm{U}(\varphi))}"] \\
B \arrow[r, mapsto] & \widehat{\mathrm{U}}(B) = (B, \mathrm{U}(B))
\end{tikzcd}$$

unde $\mathrm{U}(R)$ este grupul de unităţi al inelului R şi $\mathrm{U}(\varphi) : \mathrm{U}(A) \to \mathrm{U}(B)$ este morfismul de grupuri indus de morfismul de inele $\varphi : A \to B$.

Teorema 1.1.7 *Functorul* $\mathrm{H_c}$ *este adjunct la stânga functorului* $\widehat{\mathrm{U}}$.

1.2 Extinderi ale inelelor comutative

Pe tot parcursul acestui paragraf, prin inel vom înţelege un inel asociativ.

Considerăm inelul de endomorfisme $(\operatorname{End} M, +, \circ)$ al grupului abelian $(M, +)$, inelul comutativ cu unitate $(R, +, \cdot)$ şi $\delta : (R, +, \cdot) \to (\operatorname{End} M, +, \circ)$ un morfism unitar de inele. Dacă, pentru fiecare $a \in R$ şi $x \in M$, notăm $\delta(a)(x) = ax$, obţinem că M este un R-modul stâng. Reciproc, dacă M este un $R-$modul stâng, atunci corespondenţa $a \mapsto \delta_a$, unde

$$\delta_a : M \to M, \quad x \mapsto ax$$

determină un morfism unitar de inele $\delta : (R, +, \cdot) \to (\operatorname{End} M, +, \circ)$.

Considerăm de asemenea, o copie multiplicativă $\left(\overline{M}, \cdot\right)$ a grupului $(M, +)$, adică $\overline{M} = \{\overline{x} : x \in M\}$ şi

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x + y}, \quad \forall\ x, y \in M.$$

1.2.1 Extinderi triviale

Fie inelul comutativ cu unitate $(R, +, \cdot)$ şi M un R-modul stâng. Pe produsul direct $(R \times M, +)$, al grupurilor abeliene $(R, +)$ şi $(M, +)$, se defineşte operaţia multiplicativă

$$(a, x) \bullet (b, y) = (ab, bx + ay).$$

Astfel, $(R \times M, +, \bullet)$ devine un inel comutativ cu unitate, numit **extinderea trivială** a lui R prin M (sau idealizarea lui M) şi care se notează cu $R \ltimes M$ ([44], [54]). Mai mult, $R \ltimes M$ este chiar o $R-$algebră cu operaţia externă

$$R \times (R \ltimes M) \longrightarrow R \ltimes M, \quad (\alpha, (a, x)) \longmapsto (\alpha a, \alpha x).$$

Considerăm acum următoarele aplicaţii:

$$\begin{aligned}
i_{\overline{M}} &: \overline{M} \to R \times M, \ \ \overline{x} \mapsto (1, x); \\
i_R &: R \to R \times M, \ \ a \mapsto (a, 0); \\
i_M &: M \to R \times M, \ \ x \mapsto (0, x) \\
\pi_R &: R \times M \to R, \ \ (a, x) \mapsto a; \\
\pi_{\overline{M}} &: U(R \ltimes M) \to \overline{M}, \ \ (a, x) \mapsto \overline{a^{-1} x}.
\end{aligned}$$

Aceste aplicaţii verifică următoarele proprietăţi:

1. $i_{\overline{M}}$ este o scufundare a grupului $\overline{M}$ în grupul $U(R \ltimes M)$;

2. i_R este o scufundare a inelului R în inelul $R \ltimes M$, iar restricţia sa $i_R\big|_{U(R)} = i_{U(R)}$ este o scufundare a grupului $U(R)$ în grupul $U(R \ltimes M)$;

3. i_M este o scufundare a grupului $(M,+)$ în grupul $(R \ltimes M,+)$. Dacă identificăm elementul $x \in M$ cu $(0,x) \in R \times M$, putem considera că M este un subinel a lui $R \ltimes M$, înmulţirea pe M fiind cea nulă, $x_1 \bullet x_2 = 0$.

4. π_R este un morfism surjectiv de inele, iar restricţia sa $\pi_R\big|_{U(R)} = \pi_{U(R)} : U(R \ltimes M) \to U(R)$ este un morfism surjectiv de grupuri;

5. $\pi_{\overline{M}}$ este un morfism surjectiv de grupuri;

6. şirurile

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & & \\
 & & U(R) \arrow[d, "i_{U(R)}"'] & & \\
1 \arrow[r] & \overline{M} \arrow[r, "i_{\overline{M}}"] & U(R \ltimes M) \arrow[r, "\pi_{U(R)}"] \arrow[d, "\pi_{\overline{M}}"'] & U(R) \arrow[r] & 1 \\
 & & \overline{M} \arrow[d] & & \\
 & & 1 & &
\end{tikzcd}$$

   sunt exacte iar $\pi_{\overline{M}} \circ i_{\overline{M}} = \mathrm{id}_{\overline{M}}$ şi $\pi_{U(R)} \circ i_{U(R)} = \mathrm{id}_{U(R)}$. Aşadar, $U(R \ltimes M) \cong U(R) \times \overline{M} \cong U(R) \times M$, izomorfismul fiind dat de

$$\begin{array}{ccc} U(R) \times \overline{M} & \longrightarrow & U(R \ltimes M) \\ (a, \overline{x}) & \longmapsto & (a, ax) \end{array}$$

Extinderea trivială satisface următoarea proprietate de universalitate:

Teorema 1.2.1 [39] *Fie $(R,+,\cdot)$ un inel comutativ cu unitate şi M un R-modul stâng. Pentru orice R-algebră Λ şi orice aplicaţie R-liniară $f : M \to \Lambda$ cu proprietatea*

$$f(x) \cdot f(y) = 0, \ \ \forall\, x, y \in M,$$

există un unic morfism de R-algebre $\overline{f} : R \ltimes M \to \Lambda$ astfel încât

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "f"'] & R \ltimes M \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] & R \arrow[l, "i_R"'] \arrow[dl, "i"] \\ & \Lambda & \end{tikzcd} \qquad \overline{f} \circ i_M = f \quad \text{şi} \quad \overline{f} \circ i_R = i.$$

Corolarul 1.2.2 [39] *Dacă M şi M' sunt două R-module stângi şi $f : M \to M'$ este o aplicaţie $R-$liniară, atunci există un unic morfism de $R-$algebre $\overline{f} : R \ltimes M \to R \ltimes M'$, care extinde pe f şi pe id_R, adică diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "f"'] & R \ltimes M \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] & R \arrow[l, "i_R"'] \arrow[d, "id_R"] \\ M' \arrow[r, "i_{M'}"] & R \ltimes M' & R \arrow[l, "i_R"'] \end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

Observaţia 1.2.3 *Din Corolarul* 1.2.2 *rezultă că putem construi un functor covariant $F : \mathfrak{Mod}_R \to \mathfrak{Alg}_R$, astfel:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{F}(M) = R \ltimes M \arrow[d, "\mathrm{F}(f)=\overline{f}"] \\ M' \arrow[r, mapsto] & \mathrm{F}(M') = R \ltimes M' \end{tikzcd}$$

Propoziţia 1.2.4 [39] *Fie R_1 şi R_2 două inele comutative cu unitate, M un grup abelian, $\delta_1 : R_1 \to \operatorname{End} M$ şi $\delta_2 : R_2 \to \operatorname{End} M$ două morfisme unitare de inele. Dacă $f : R_1 \to R_2$ este un morfism unitar de inele, astfel încât*

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\delta_1"'] & & R_2 \arrow[dl, "\delta_2"] \\ & \operatorname{End} M & \end{tikzcd} \qquad \delta_1 = \delta_2 \circ f,$$

atunci, funcţia

$$\begin{array}{rcccc} \overline{f} & : & R_1 \ltimes M & \longrightarrow & R_2 \ltimes M \\ & & (r_1, x) & \longmapsto & (f(r_1), x) \end{array}$$

este unicul morfism unitar de inele care-l extinde pe f şi pe id_M .

Observaţia 1.2.5 *Fixăm grupul abelian $(M, +)$ şi considerăm categoria $\mathfrak{Rng}_M$, ale cărei obiecte sunt perechi de forma (R, δ) , unde R este un inel comutativ cu unitate, iar $\delta : (R, +, \cdot) \to (\operatorname{End} M, +, \circ)$ un morfism unitar de inele şi*

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Rng}_M} ((R_1, \delta_1), (R_2, \delta_2)) = \{f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Rng}} (R_1, R_2) : \delta_1 = \delta_2 \circ f\}.$$

Din Propoziţia 1.2.4*, rezultă că putem considera functorul covariant* $H : \mathfrak{Rng}_M \to \mathfrak{Rng}$ *, definit prin*

$$\begin{tikzcd}
(R_1, \delta_1) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{H}(R_1, \delta_1) = R_1 \ltimes M \arrow[d, "\mathrm{H}(f)=\overline{f}"] \\
(R_2, \delta_2) \arrow[r, mapsto] & \mathrm{H}(R_2, \delta_2) = R_2 \ltimes M
\end{tikzcd}$$

1.2.2 Produsul semidirect al unui inel R cu un R-modul

Aproape-inelele sunt generalizări ale inelelor, acestea fiind prezentate pe larg în [76]. Acestea pot fi descrise în general ca fiind "inele" în care operaţia aditivă nu este neapărat comutativă şi are loc distributivitatea doar pe o parte. Aşadar,

Definiţia 1.2.6 [76] *Se numeşte* ***aproape-inel*** *drept* (*stâng*)*, o mulţime nevidă* A*, împreună cu două operaţii* " $+$ " *şi* " $\cdot$ "*, care verifică următoarele condiţii:*

1. $(A, +)$ *este un grup* (*nu neapărat comutativ*);
2. $(A, \cdot)$ *este un semigrup;*
3. *are loc distributivitatea la dreapta* (*stânga*).

În continuare, prin aproape inel vom înţelege un aproape inel drept.

Considerăm produsul direct $(R \times M, +)$ al grupurilor abeliene $(R, +)$ şi $(M, +)$ şi definim pe mulţimea $R \times M$ operaţia

$$(a, x) \cdot (b, y) = (ab, x + ay).$$

Propoziţia 1.2.7 $(R \times M, +, \cdot)$ *este un aproape-inel drept cu unitate.*

Definiţia 1.2.8 *Aproape-inelul* $(R \times M, +, \cdot)$ *se numeşte* ***produsul semidirect*** *dintre inelul* R *şi grupul* M*. Acesta se notează* $R * M$*.*

Considerăm aplicaţiile:

$$\begin{aligned}
i_{\overline{M}} &: \overline{M} \to R \times M, \ \overline{x} \mapsto (1, x); \\
i_R &: R \to R \times M, \ a \mapsto (a, 0); \\
\pi_R &: R \times M \to R, \ (a, x) \mapsto a.
\end{aligned}$$

Atunci:

1. $i_{\overline{M}}$ este o scufundare a grupului $\overline{M}$ în grupul $U(R*M)$;

2. i_R este o scufundare a inelului R în aproape-inelul $R*M$ şi deci restricţia acesteia $i_R\left|_{U(R)}\right. = i_{U(R)}$ este o scufundare a grupului $U(R)$ în grupul $U(R*M)$;

3. π_R este un morfism surjectiv de la aproape inelul $R*M$, la inelul R, deci restricţia acestuia $\pi_{U(R)} = \pi_R\left|_{U(R)}\right. : U(R*M) \to U(R)$, este un morfism surjectiv de grupuri;

Propoziţia 1.2.9 [39] *Grupul de unităţi* $U(R*M)$, *al aproape-inelului* $R*M$, *este izomorf cu produsul semidirect* $U(R) \times_{U(\delta)} \overline{M}$, *al grupurilor* $U(R)$ *şi* $\overline{M}$, *unde* $U(\delta) : U(R) \to \operatorname{Aut}\overline{M}$ *este morfismul de grupuri indus de către morfismul de inele* $\delta : R \to \operatorname{End} M$.

1.3 Produse semidirecte generalizate

1.3.1 Construcţia produsului semidirect generalizat

Considerăm un grup abelian $(M,+)$, un inel $(R,+,\cdot)$, două funcţii α, $\beta : R \to R$ şi un morfism de inele $\delta : (R,+,\cdot) \to (\operatorname{End} M,+,\circ)$. Pentru fiecare $a \in R$ şi $x \in M$ notăm, $\delta(a)(x) = a \cdot x$.

Considerăm produsul direct $(R \times M,+)$, al grupurilor abeliene $(R,+)$ şi $(M,+)$. Pe mulţimea $R \times M$ construim operaţia multiplicativă

$$(a,x)\cdot(b,y) := (ab, \alpha(b)\cdot x + \beta(a)\cdot y). \tag{1.3}$$

Propoziţia 1.3.1 [37] *În condiţiile de mai sus, au loc:*

1. *Dacă* $\alpha(a)\cdot\beta(b) = \beta(b)\cdot\alpha(a)$, *pentru orice* $a,b \in R$, $\alpha \in \operatorname{End}^*(R,\cdot)$ [1] *şi* $\beta \in \operatorname{End}(R,\cdot)$, *atunci* $(R \times M,\cdot)$ *este un semigrup;*

2. *dacă* R *este un inel cu unitate şi* $\alpha(1) = 1$, *atunci* $(1,0)$ *este unitate la dreapta faţă de operaţia* (1.3)*;*

3. *dacă* R *este un inel cu unitate şi* $\beta(1) = 1$, *atunci* $(1,0)$ *este unitate la stânga faţă de operaţia* (1.3)*;*

4. *dacă* $\alpha \in \operatorname{End}(R,+)$, *atunci are loc distributivitatea la stânga a operaţiei* (1.3) *faţă de adunare;*

[1] adică α este un anti-endomorfism (i.e., $\alpha(a\cdot b) = \alpha(b)\cdot\alpha(a)$, $\forall\, a,b \in R$)

5. *dacă* $\beta \in \operatorname{End}(R,+)$, *atunci are loc distributivitatea la dreapta a operaţiei* (1.3) *faţă de adunare.*

Corolarul 1.3.2 [37] *Fie* R *un inel,* $(M,+)$ *un grup abelian şi* $\delta : (R,+,\cdot) \to (\operatorname{End} M,+,\circ)$ *un morfism de inele. Dacă* $\alpha \in \operatorname{End}^*(R,+,\cdot)$ *şi* $\beta \in \operatorname{End}(R,+,\cdot)$ *verifică proprietatea*

$$\alpha(a)\cdot\beta(b) = \beta(b)\cdot\alpha(a)\,,\ \textit{pentru orice}\ \ a,b \in R, \tag{1.4}$$

atunci $(R \times M,+,\cdot)$ *este un inel. Dacă în plus* R *este cu unitate, iar* α,β *şi* δ *sunt morfisme unitare, atunci* $(R \times M,+,\cdot)$ *este un inel cu unitate.*

Definiţia 1.3.3 [37] *Inelul* $(R \times M,+,\cdot)$ (*din Corolarul* 1.3.2) *se numeşte* (α,β)-***produsul semidirect*** *dintre inelul* R *şi grupul* M. *Acest inel îl vom nota în continuare cu* $R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M$.
De asemenea, în cazul particular R *inel comutativ şi* $\alpha = \beta$, *inelul* $R \ltimes_{\alpha}^{\alpha} M$ *îl vom nota simplu* $R \ltimes_{\alpha} M$.

Notăm în continuare cu:

- Ω clasa tuturor sistemelor ordonate $(R,M,\delta,\alpha,\beta)$, unde $(R,+,\cdot)$ este inel, $(M,+)$ este un grup abelian, $\delta : (R,+,\cdot) \to (\operatorname{End} M,+,\circ)$ este un morfism de inele iar $\alpha \in \operatorname{End}^*(R,+,\cdot)$ şi $\beta \in \operatorname{End}(R,+,\cdot)$ verifică condiţia (1.4);
- Ω_c clasa tuturor sistemelor ordonate $(R,M,\delta,\alpha,\beta) \in \Omega$, unde $(R,+,\cdot)$ este inel comutativ;
- Ω_1 clasa sistemelor ordonate $(R,M,\delta,\alpha,\beta) \in \Omega$, unde $(R,+,\cdot)$ este inel cu unitate, δ este un morfism unitar de inele iar $\alpha \in \operatorname{End}^*(R,+,\cdot,1)$ şi $\beta \in \operatorname{End}(R,+,\cdot,1)$;
- $\Omega_{c,1} = \Omega_c \cap \Omega_1$.

Observaţia 1.3.4 *Aşadar, au loc implicaţiile:*

1. $(R,M,\delta,\alpha,\beta) \in \Omega \implies R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M$ *este un inel;*
2. $(R,M,\delta,\alpha,\beta) \in \Omega_1 \implies R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M$ *este un inel cu unitate;*
3. $(R,M,\delta,\alpha,\alpha) \in \Omega_{c,1} \implies R \ltimes_{\alpha} M$ *este un inel comutativ cu unitate;*

Exemplul 1.3.5 *Pentru sistemul* $(R,M,\delta,\mathrm{id}_R,\mathrm{id}_R) \in \Omega_{c,1}$, *obţinem extinderea trivială* $R \ltimes M$.

1.3.2 Grupul de unităţi al inelului $R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M$

În acest paragraf vom considera că $(R, M, \delta, \alpha, \beta) \in \Omega_1$. Din Corolarul 1.3.2, rezultă că $R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M$ este un inel cu unitate.

Fie de asemenea, $\left(\overline{M}, \cdot\right)$ o copie multiplicativă a grupului $(M, +)$, unde $\overline{M} = \{\overline{x} : x \in M\}$, şi

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x + y}, \quad \forall\, x, y \in M.$$

Propoziţia 1.3.6 *Dacă $(a, x) \in R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M$, atunci $(a, x) \in \mathrm{U}\left(R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M, +, \cdot\right)$ dacă şi numai dacă $a \in \mathrm{U}(R, +, \cdot)$ şi în acest caz,*

$$(a, x)^{-1} = \left(a^{-1}, -\alpha\left(a^{-1}\right) \cdot \beta\left(a^{-1}\right) \cdot x\right).$$

Considerăm următoarele aplicaţii:

$$\begin{aligned}
i_{\overline{M}} &: \overline{M} \to R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M, \ \ \overline{x} \mapsto (1, x);\\
i_R &: R \to R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M, \ \ a \mapsto (a, 0);\\
\pi_R &: R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M \to R, \ \ (a, x) \mapsto a;\\
\pi_{\overline{M}} &: U\left(R \ltimes_{\alpha}^{\alpha} M\right) \to \overline{M}, \ \ (a, x) \mapsto \overline{\alpha\left(a^{-1}\right) \cdot x}.
\end{aligned}$$

Se verifică uşor că:

1. $i_{\overline{M}}$ este o scufundare a grupului $\overline{M}$ în grupul de unităţi $U\left(R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M\right)$;

2. i_R este o scufundare a inelului R în inelul $R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M$, deci restricţia sa la $U(R)$, $i_R\big|_{U(R)} = i_{U(R)}$, este o scufundare a grupului $U(R)$ în grupul $U\left(R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M\right)$;

3. π_R este un morfism surjectiv de inele, iar restricţia sa la $U(R)$, $\pi_R\big|_{U(R)} = \pi_{U(R)}$, este un morfism surjectiv de la grupul $U\left(R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M\right)$ la grupul $U(R)$,

4. $\pi_{\overline{M}}$ este un morfism surjectiv de grupuri.

Deoarece şirurile

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & & \\
 & & U(R) \arrow[d, "i_{U(R)}"'] & & \\
1 \arrow[r] & \overline{M} \arrow[r, "i_{\overline{M}}"] & U(R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M) \arrow[r, "\pi_{U(R)}"] & U(R) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

sunt exacte şi $\pi_{U(R)} \circ i_{U(R)} = \mathrm{id}_{U(R)}$, obţinem că

$$U\left(R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M\right) \cong U(R) \times_{\phi} \overline{M},$$

unde $\phi : (U(R), \cdot) \to \mathrm{Aut}\left(\left(\overline{M}, \cdot\right), \circ\right)$ este morfismul de grupuri definit prin,

$$\phi(a)(\overline{x}) = \overline{\alpha(a^{-1}) \cdot \beta(a) \cdot x}, \qquad \forall\, a \in U(R), \ \ \forall\, \overline{x} \in \overline{M}.$$

Operaţia produsului semidirect $U(R) \times_{\phi} \overline{M}$ este definită prin

$$(a, \overline{x}) \cdot (b, \overline{y}) = (ab, \overline{x} \cdot \phi(a)(\overline{y})) = \left(ab, \overline{x + \alpha(a^{-1}) \cdot \beta(a) \cdot y}\right),$$

iar izomorfismul dintre grupurile $U(R) \times_{\phi} \overline{M}$ şi $U\left(R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M\right)$ este dat de

$$\begin{array}{ccc} U(R) \times_{\phi} \overline{M} & \longrightarrow & U\left(R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M\right) \\ (a, \overline{x}) & \longmapsto & (a,\, \alpha(a) \cdot x) \end{array}$$

Aşadar, are loc:

Propoziţia 1.3.7 *Grupurile* $U(R) \times_{\phi} \overline{M}$ *şi* $U\left(R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M\right)$ *sunt izomorfe.*

Observaţia 1.3.8 *Dacă* $(R, M, \delta, \alpha, \alpha) \in \Omega_{c,1}$, *atunci* $U(R \ltimes_{\alpha} M) \cong U(R) \times \overline{M}$.

1.3.3 Aspecte categoriale

Dacă $(R, M, \delta, \alpha, \beta) \in \Omega$, atunci aplicaţia

$$\sigma_{M} : M \to R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M, \ \ x \mapsto (0, x)$$

este o scufundare a grupului $(M, +)$ în grupul aditiv $\left(R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M, +\right)$. Identificând elementele $x \in M$ cu $(0, x) \in R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M$, putem considera că M este un subinel al inelului $R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M$, produsul în M fiind nul, adică

$$x_1 \cdot x_2 = 0, \ \ \forall x_1, x_2 \in M.$$

Mai mult, M este un ideal în $R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M$.

Teorema 1.3.9 (Proprietatea de universalitate) *Fie* $(R, M, \delta, \alpha, \beta) \in \Omega$. *Pentru orice inel* Λ, *pentru orice morfism de inele* $\varphi : R \to \Lambda$ *şi orice morfism de grupuri* $f : (M, +) \to (\Lambda, +)$, *care verifică proprietăţile:*

1. $f(\alpha(r) \cdot x) = f(x) \cdot \varphi(r)$, $\forall\, r \in R$, $\forall\, x \in M$;

2. $f(\beta(r)\cdot x)=\varphi(r)\cdot f(x)\,,\ \forall\, r\in R,\ \forall\, x\in M;$

3. $f(x)\cdot f(y)=0,\ \forall\, x,y\in M;$

există un unic morfism de inele $\Phi : R\ltimes_{\alpha}^{\beta} M\to\Lambda$ *care extinde pe* f *şi pe* φ, *adică*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i_R"] \arrow[dr, "\varphi"'] & R\ltimes_{\alpha}^{\beta} M \arrow[d, dashed, "\Phi"] & M \arrow[l, "\sigma_M"'] \arrow[dl, "f"] \\ & \Lambda & \end{tikzcd} \qquad \Phi\circ\sigma_M=f \quad \text{şi} \quad \Phi\circ i_R=\varphi.$$

Dacă $(R,M,\delta,\alpha,\beta)\in\Omega_1$, Λ *este un inel cu unitate şi* φ *este un morfism unitar, atunci şi* Φ *este un morfism unitar.*

Corolarul 1.3.10 *Fie* $(R,M,\delta,\alpha,\beta)\,,\,(R,M',\delta',\alpha,\beta)\in\Omega$. *Dacă* $f:(M,+)\to(M',+)$ *este un morfism de grupuri care verifică condiţiile:*

1. $f(\alpha(r)\cdot x)=\alpha(r)\cdot f(x)\,,\ \forall\, r\in R,\ \forall\, x\in M;$

2. $f(\beta(r)\cdot x)=\beta(r)\cdot f(x)\,,\ \forall\, r\in R,\ \forall\, x\in M;$

atunci există un unic morfism de inele $\overline{f}:R\ltimes_{\alpha}^{\beta} M\to R\ltimes_{\alpha}^{\beta} M'$ *care-l extinde pe* f, *adică diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma_M"'] & M' \arrow[d, "\sigma_{M'}"] \\ R\ltimes_{\alpha}^{\beta} M \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & R\ltimes_{\alpha}^{\beta} M' \end{tikzcd}$$

este comutativă şi $\overline{f}\big|_R=\mathrm{id}_R$.

Corolarul 1.3.11 *Fie* $(R,M,\delta,\alpha,\beta)\,,\,(R',M,\delta',\alpha',\beta')\in\Omega$. *Dacă* $\varphi:R\to R'$ *este un morfism de inele pentru care*

1. $\alpha(r)\cdot x=\alpha'(\varphi(r))\cdot x,\quad \forall\, r\in R,\quad \forall\, x\in M;$

2. $\beta(r)\cdot x=\beta'(\varphi(r))\cdot x,\quad \forall\, r\in R,\quad \forall\, x\in M;$

atunci există un unic morfism de inele $\overline{\varphi} : R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M \to R' \ltimes_{\alpha'}^{\beta'} M$ *care-l extinde pe* φ, *adică diagrama*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_R"'] & R' \arrow[d, "i_{R'}"] \\ R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M \arrow[r, dashed, "\overline{\varphi}"] & R' \ltimes_{\alpha'}^{\beta'} M \end{tikzcd}$$

este comutativă şi $\overline{f}\big|_M = \mathrm{id}_M$.

Corolarul 1.3.12 *Fie* $(R, M, \delta, \alpha, \beta), (R', M', \delta', \alpha', \beta') \in \Omega$, $\varphi : R \to R'$ *un morfism de inele şi* $f : M \to M'$ *un morfism de grupuri. Dacă pentru orice elemente* $r \in R$ *şi* $x \in M$, *au loc:*

1. $f(\alpha(r) \cdot x) = \alpha'(\varphi(r)) \cdot f(x)$;
2. $f(\beta(r) \cdot x) = \beta'(\varphi(r)) \cdot f(x)$;

atunci există un unic morfism de inele $\Phi : R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M \to R' \ltimes_{\alpha'}^{\beta'} M'$ *care extinde pe* φ *şi* f, *adică*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i_R"] \arrow[d, "\varphi"'] & R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M \arrow[d, dashed, "\Phi"] & M \arrow[l, "\sigma_M"'] \arrow[d, "f"] \\ R' \arrow[r, "i_{R'}"] & R' \ltimes_{\alpha'}^{\beta'} M' & M' \arrow[l, "\sigma_{M'}"'] \end{tikzcd}$$

$\Phi \circ i_R = i_{R'} \circ \varphi$ *şi* $\Phi \circ \sigma_M = \sigma_{M'} \circ f$.

Considerăm acum categoria $\mathfrak{C}$ definită astfel:

1. $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C} = \Omega$;

2. Pentru orice două obiecte $(R, M, \delta, \alpha, \beta), (R', M', \delta', \alpha', \beta') \in \Omega$, mulţimea morfismelor $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((R, M, \delta, \alpha, \beta), (R', M', \delta', \alpha', \beta'))$ este formată din toate perechile (φ, f) unde $\varphi : R \to R'$ un morfism de inele, iar $f : M \to M'$ un morfism de grupuri care verifică condiţiile 1. şi 2. din Corolarul 1.3.12.

3. Dacă

$$\begin{aligned} (\varphi, f) &\in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((R, M, \delta, \alpha, \beta), (R', M', \delta', \alpha', \beta')) \\ (\varphi', f') &\in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((R', M', \delta', \alpha', \beta'), (R'', M'', \delta'', \alpha'', \beta'')), \end{aligned}$$

   atunci definim

$$(\varphi', f') \circ (\varphi, f) = (\varphi' \circ \varphi,\ f' \circ f) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}((R, M, \delta, \alpha, \beta), (R'', M'', \delta'', \alpha'', \beta'')).$$

Tot din Corolarul 1.3.12 obţinem că putem construi un functor covariant $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Rng}$, definit astfel:

$$\begin{tikzcd}
(R, M, \delta, \alpha, \beta) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "(\varphi, f)"'] & \mathrm{F}(R, M, \delta, \alpha, \beta) = R \ltimes_{\alpha}^{\beta} M \arrow[d, "\mathrm{F}(\varphi, f) = \Phi"] \\
(R', G', \delta', \alpha', \beta') \arrow[r, mapsto] & \mathrm{F}(R', M', \delta', \alpha', \beta') = R' \ltimes_{\alpha'}^{\beta'} M'
\end{tikzcd}$$

1.3.4 Extinderi de norme

Definiţia 1.3.13 *Funcţia* $\|\cdot\| : A \to \mathbb{R}_+$ *se numeşte normă pe grupul abelian* $(A, +)$ *dacă:*

1. $\|a\| = 0$ *dacă şi numai dacă* $a = 0$;
2. $\|a - b\| \leq \|a\| + \|b\|\,,\ \ \forall\, a, b \in A$;

Dacă în plus,

$$\|a + b\| \leq \max\left(\|a\|\,,\ \|b\|\right),\ \forall\, a, b \in A$$

norma se numeşte nearhimediană.

Definiţia 1.3.14 *Funcţia* $\|\cdot\| : R \to \mathbb{R}_+$ *se numeşte pseudo-normă pe inelul* $(R, +, \cdot)$ *dacă:*

1. $\|a\| = 0$ *dacă şi numai dacă* $a = 0$;
2. $\|a - b\| \leq \|a\| + \|b\|\,,\ \forall\, a, b \in R$;
3. $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|\,,\ \forall\, a, b \in R$.

Dacă R *este inel cu unitate se mai cere verificată şi condiţia*

4. $\|1\| = 1$.

Dacă înlocuim condiţia 3. *cu condiţia*

3'. $\|a \cdot b\| = \|a\| \cdot \|b\|\,,\ \forall\, a, b \in R$;

funcţia $\|\cdot\| : R \to \mathbb{R}_+$ *se numeşte normă pe* R.

Definiţia 1.3.15 *Fie* R *un inel pseudo-normat cu unitate. Aplicaţia* $\|\cdot\| : M \to \mathbb{R}_+$ *se numeşte pseudo-normă pe* R*-modulul* M *dacă:*

1. $\|x\| = 0$ *dacă şi numai dacă* $x = 0$;
2. $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall\, x, y \in M$;
3. $\|a \cdot x\| \leq \|a\| \cdot \|x\|$, $\forall\, a \in R$, $\forall\, x \in M$.

Dacă R este inel normat şi condiţia 3. *se înlocuieşte cu*

3'. $\|a \cdot x\| = \|a\| \cdot \|x\|$, $\forall\, a \in R$, $\forall\, x \in M$,

aplicaţia $\|\cdot\| : M \to \mathbb{R}_+$ *se numeşte normă pe M.*

Considerăm acum $(R, M, \delta, \alpha, \beta) \in \Omega_1$, unde R este un inel pseudo-normat şi M un R-modul pseudo-normat. Mai presupunem că

$$\|\alpha(r)\| \leq \|r\| \quad \text{şi} \quad \|\beta(r)\| \leq \|r\|,$$

pentru orice $r \in R$.

Pentru fiecare număr natural k, definim aplicaţiile $\|\cdot\|_k : R \ltimes_\alpha^\beta M \to \mathbb{R}_+$ astfel: dacă $(a, x) \in R \ltimes_\alpha^\beta M$, atunci

$$\begin{aligned} \|(a,x)\|_0 &= \max(\|a\|, \|x\|) \\ \|(a,x)\|_1 &= \|a\| + \|x\| \\ \|(a,x)\|_k &= \sqrt[k]{\|a\|^k + \|x\|^k}, \qquad \text{pentru } k \geq 2. \end{aligned}$$

Teorema 1.3.16 [37] *În condiţiile de mai sus, $\|\cdot\|_1$ este o pseudo-normă pe inelul $R \ltimes_\alpha^\beta M$, iar dacă pseudo-norma grupului $(M, +)$ este nearhimediană, atunci şi $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_k$ (pentru $k \geq 2$) sunt pseudo-norme pe $R \ltimes_\alpha^\beta M$. Toate aceste pseudo-norme extind pseudo-normele de pe R, respectiv M.*

Capitolul 2

Extinderi Dorroh

Peste tot în acest capitol, prin inel vom înţelege un inel asociativ.

2.1 Extinderi Dorroh

Pentru simplificarea expunerii vom introduce mai întâi noţiunea de pereche Dorroh:

Definiţia 2.1.1 *O pereche de inele (R, M) se numeşte pereche Dorroh, dacă M este un (R, R)-bimodul şi pentru orice elemente $a \in R$ şi $x, y \in M$, au loc următoarele condiţii (de compatibilitate):*

$$a\ (xy) = (ax)\ y, \quad (xy)\ a = x\ (ya)\,, \quad (xa)\ y = x\ (ay)\,.$$

Vom nota în continuare cu $\mathcal{D}$, clasa tuturor perechilor Dorroh.

Considerăm acum o pereche Dorroh $(R, M) \in \mathcal{D}$. Pe mulţimea $R \oplus M$ privită ca şi sumă directă de grupuri abeliene, introducem operaţia

$$(a, x) \cdot (b, y) = (ab,\ xb + ay + xy)\,.$$

Astfel, $(R \oplus M, +, \cdot)$ devine un inel, notat cu $R \bowtie M$ şi care se numeşte extinderea Dorroh a lui R şi M. Mai mult, $R \bowtie M$ este chiar un (R, R)-bimodul, operaţiile externe fiind definite prin

$$\lambda\,(a, x) = (\lambda a, \lambda x)\,, \qquad (a, x)\,\lambda = (a\lambda, x\lambda)\,,$$

iar perechea $(R, R \bowtie M)$ este de asemenea o pereche Dorroh.

Dacă inelul R are unitatea 1, atunci $(1, 0)$ este unitatea inelului $R \bowtie M$.

Observaţia 2.1.2 *Dacă M este un inel, atunci el poate fi privit ca un $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-bimodul şi astfel, $\mathbb{Z}\times M$ devine un inel cu unitate în raport cu adunarea (pe componente) şi înmulţirea definită prin*

$$(a,x)\cdot(b,y)=(ab,\ xb+ay+xy)\,.$$

Dorroh [28] a introdus această construcţie pentru a scufunda un inel fără unitate într-un inel cu unitate.

Observaţia 2.1.3 *Dacă M este un inel de pătrat nul, atunci extinderea Dorroh $R\bowtie M$ coincide cu extinderea trivială $R\ltimes M$.*

Exemplul 2.1.4 *Dacă R este un inel, atunci $(R,R)\,,(R,M_n(R))\in\mathcal{D}$.*

Deoarece, aplicaţiile

$$\begin{aligned} i_R &: R\hookrightarrow R\bowtie M, \quad a\mapsto(a,0)\\ i_M &: M\hookrightarrow R\bowtie M, \quad x\mapsto(0,x)\end{aligned}$$

sunt scufundări ale lui R şi M în $R\bowtie M$, atât ca inele cât şi ca bimodule, în continuare vom identifica elementul $a\in R$ cu $(a,0)\in R\bowtie M$, respectiv elementul $x\in M$ cu $(0,x)\in R\bowtie M$. De asemenea, aplicaţia

$$\pi_R: R\bowtie M\to R,\qquad (a,x)\mapsto a$$

este un morfism surjectiv de inele care este şi (R,R) liniară.

Astfel, R este un subinel al lui $R\bowtie M$, iar M este un ideal al inelului $R\bowtie M$ şi $(R\bowtie M)/M\simeq R$.

Definiţia 2.1.5 *Fie (R,M) şi (R',M') două perechi Dorroh. Printr-un $\mathcal{D}$-morfism al perechilor (R,M) şi (R',M'), vom înţelege o pereche (φ,f), unde $\varphi:R\to R'$ şi $f:M\to M'$ sunt morfisme de inele, care pentru orice elemente $\alpha\in R$ şi $x\in M$, verifică condiţiile:*

$$f(\alpha\cdot x)=\varphi(\alpha)\cdot f(x)\qquad\text{şi}\quad f(x\cdot\alpha)=f(x)\cdot\varphi(\alpha)\,.$$

Teorema 2.1.6 (Proprietatea de universalitate) [35] *Dacă (R,M) este o pereche Dorroh, atunci, pentru orice inel Λ şi orice $\mathcal{D}$-morfism $(\varphi,f):(R,M)\to(\Lambda,\Lambda)$,* *există un singur morfism de inele* $\varphi \bowtie f : R \bowtie M \to \Lambda$ *astfel încât*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i_R"] \arrow[dr, "\varphi"'] & R \bowtie M \arrow[d, dashed, "\varphi \bowtie f"] & M \arrow[l, "i_M"'] \arrow[dl, "f"] \\ & \Lambda & \end{tikzcd}$$

$(\varphi \bowtie f) \circ i_M = f$ *şi* $(\varphi \bowtie f) \circ i_R = \varphi.$

Observaţia 2.1.7 1. $\varphi \bowtie f$ *este injectivă dacă şi numai dacă* φ *şi* f *sunt injective şi* $\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
2. $\varphi \bowtie f$ *este surjectivă dacă şi numai dacă* $\operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Im} f = \Lambda$.

Corolarul 2.1.8 [35] *Dacă* $(R, M), (R', M') \in \mathcal{D}$ *şi* $(\varphi, f) : (R, M) \to (R', M')$ *este un* $\mathcal{D}$*-morfism, atunci există un unic morfism de inele* $\varphi \bowtie f : R \bowtie M \to R' \bowtie M'$ *astfel încât*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i_R"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "i_{R'} \circ \varphi"] & R \bowtie M \arrow[d, dashed, "\varphi \bowtie f"] & M \arrow[l, "i_M"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "i_{M'} \circ f"'] \\ R' \arrow[r, "i_{R'}"] & R' \bowtie M' & M' \arrow[l, "i_{M'}"'] \end{tikzcd}$$

$(\varphi \bowtie f) \circ i_R = i_{R'} \circ \varphi$ *şi* $(\varphi \bowtie f) \circ i_M = i_{M'} \circ f.$

Observaţia 2.1.9 *Dacă* (R, M) *este o pereche Dorroh, atunci şirurile*

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & & \\ & & R \arrow[d, "i_R"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_R"] & & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_M"] & R \bowtie M \arrow[r, "\pi_R"] & R \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(*privite ca şiruri de grupuri abeliene*) *sunt exacte şi* $\pi_R \circ i_R = \mathrm{id}_R$ (i_R *este o secţiune*). *În plus, toate morfismele sunt morfisme de inele, dacă* R *este cu unitate, morfismele* i_R *şi* π_R *sunt unitare* (*dacă* M *este inel cu unitate, atunci* i_M *nu este un morfism unitar*).

Teorema 2.1.10 *Fie* T *un inel cu unitate,* M *un ideal al lui* T*, iar* R *un subinel al lui* T*. Dacă* $R \cap M = \{0\}$ *şi* $T = R + M$*, atunci inelele* T *şi* $R \bowtie M$ *sunt izomorfe.*

Teorema 2.1.11 *Fie M un inel, R şi T două inele cu unitate, $\alpha : M \to T$ un morfism de inele, iar $\beta : T \to R$ un morfism unitar de inele. Dacă şirul*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} R \longrightarrow 0$$

(privit ca şir de grupuri abeliene) este exact şi are o secţiune $s : R \to T$, care este un morfism unitar de inele, atunci:

(*i*) *M este un $(R, R)-$bimodul în raport cu operaţiile externe*

$$\begin{aligned} a \cdot x &:= \alpha_0^{-1}\left(s\left(a\right) \cdot \alpha_0\left(x\right)\right) \\ x \cdot a &:= \alpha_0^{-1}\left(\alpha_0\left(x\right) \cdot s\left(a\right)\right) \end{aligned}$$

($a \in R$, $x \in M$, iar $\alpha_0 : M \to \operatorname{Im}\alpha$ este izomorfismul indus de morfismul injectiv α) şi perechea (R, M) este o pereche Dorroh;

(*ii*) *inelele T şi $R \bowtie M$ sunt izomorfe.*

2.2 Aspecte categoriale

Considerăm categoria $\mathfrak{Rng}$ a inelelor asociative şi categoria $\mathfrak{D}$ care are ca obiecte clasa $\mathcal{D}$ a perechilor Dorroh, iar drept morfisme între două obiecte, mulţimea $\mathcal{D}$-morfismelor între acestea.

Conform Corolarului 2.1.8, putem construi un functor covariant $\mathbf{D} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{Rng}$ definit astfel:

- dacă $(R, M) \in \mathcal{D}$, atunci $\mathbf{D}(R, M) = R \bowtie M$;
- dacă $(\varphi, f) : (R, M) \to (R', M')$ este un $\mathcal{D}$-morfism, atunci $\mathbf{D}(\varphi, f) = \varphi \bowtie f$.

Mai considerăm functorul $\mathbf{B} : \mathfrak{Rng} \to \mathfrak{D}$, definit prin:

- dacă A este un inel, atunci $\mathbf{B}(A) = (A, A)$;
- dacă $h : A \to B$ este un morfism de inele, atunci $\mathbf{B}(h) = (h, h)$.

Teorema 2.2.1 [35] *Functorul* $\mathbf{D}$ *este adjunct la stânga functorului* $\mathbf{B}$.

Propoziţia 2.2.2 [35] *Fie $\{(R_i, M_i) : i \in I\}$ o familie de perechi Dorroh şi considerăm produsele directe de inele $\prod_{i\in I} R_i$ şi $\prod_{i\in I} M_i$ (având proiecţiile canonice p_i şi π_i, respectiv injecţiile canonice q_i şi σ_i). Atunci $\left(\prod_{i\in I} R_i, \prod_{i\in I} M_i\right)$ este de asemenea o pereche Dorroh, pentru fiecare $i \in I$, (p_i, π_i) şi (q_i, σ_i) sunt $\mathcal{D}$-morfisme şi*

$$\left(\prod_{i\in I} R_i\right) \bowtie \left(\prod_{i\in I} M_i\right) \cong \prod_{i\in I} (R_i \bowtie M_i).$$

Propoziţia 2.2.3 [35] *Fie I o mulţime dirijată şi $\left\{(R_i, M_i)_{i\in I}\ ; (\varphi_{ij}, f_{ij})_{i,j\in I}\right\}$ o familie inversă de perechi Dorroh. Atunci, $\left\{(R_i \bowtie M_i)_{i\in I}, (\varphi_{ij} \bowtie f_{ij})_{i,j\in I}\right\}$ este o familie inversă de inele şi*

$$\varprojlim (R_i \bowtie M_i) \cong \left(\varprojlim R_i\right) \bowtie \left(\varprojlim M_i\right).$$

2.3 Grupul de unităţi al inelului $R \bowtie M$

Fie (R, M) o pereche Dorroh, astfel ca R să fie un inel cu unitate. Vom descrie aici grupul de unităţi al inelului $R \bowtie M$. Mai întâi, să observăm că dacă $(a, x) \in \mathbf{U}(R \bowtie M)$, atunci $a \in \mathbf{U}(R)$.

Mulţimea M formează un monoid în raport cu operaţia $x \circ y = x + y + xy$, elementul neutru fiind 0. Fie M° grupul de unităţi al acestui monoid.

Observaţia 2.3.1 *Se poate vedea uşor ca aplicaţia*

$$\delta : \mathbf{U}(R) \to \operatorname{Aut} M^\circ, \qquad a \longmapsto \delta_a$$

unde,

$$\delta_a : M^\circ \to M^\circ, \qquad x \mapsto axa^{-1}.$$

este un morfism de grupuri.

Teorema 2.3.2 [35] *Grupul de unităţi $\mathbf{U}(R \bowtie M)$, al extinderii Dorroh $R \bowtie M$, este izomorf cu produsul semidirect $\mathbf{U}(R) \times_\delta M^\circ$.*

Observaţia 2.3.3 *Dacă M este un inel cu unitate, atunci corespondenţa $x \mapsto x-1$, stabileşte un izomorfism între grupurile $\mathbf{U}(M)$ şi M°, de unde, grupul $\mathbf{U}(R \bowtie M)$ este izomorf în acest caz, cu produsul semidirect al grupurilor $\mathbf{U}(R)$ şi $\mathbf{U}(M)$.*

Partea II

Structuri algebrice pe mulţimea numerelor fuzzy

Capitolul 3

Numere fuzzy. Generalităţi

3.1 Definiţia numerelor fuzzy

Definiţia 3.1.1 [5] *Un număr fuzzy este o funcţie* $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ *care satisface următoarele proprietăţi:*

1. *A este normală, adică există* $x_0 \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $A(x_0) = 1$;
2. *A este convexă, adică*
$$A(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \min\{A(x), A(y)\},$$
pentru fiecare $x, y \in \mathbb{R}$ *şi* $\lambda \in [0,1]$;
3. *A este superior semicontinuă pe* $\mathbb{R}$, *adică, pentru fiecare* $x_0 \in \mathbb{R}$ *şi* $\varepsilon > 0$, *există o vecinătate* V_0 *a lui* x_0 *astfel încât*
$$A(x) \leq A(x_0) + \varepsilon, \text{ pentru fiecare } x \in V_0;$$
4. *închiderea mulţimii* $\operatorname{supp}(A) = \{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}$ *(numită supportul lui A) este un interval compact în* $\mathbb{R}$.

Vom nota în continuare cu $\mathfrak{F}$ mulţimea tuturor numerelor fuzzy.

Pentru numărul fuzzy $A \in \mathfrak{F}$, considerăm
$$\operatorname{supp} A = \overline{\{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}}$$
numit suportul lui A, respectiv
$$\operatorname{core} A = \{x \in \mathbb{R} : A(x) = 1\}$$
numit nucleul numărului fuzzy A.

Observaţia 3.1.2 *Din Definiţia* 3.1.1*, rezultă că mulţimile* $\operatorname{supp} A$ *şi* $\operatorname{core} A$ *sunt intervale reale compacte.*

Definiţia 3.1.3 [5] *Numărul fuzzy* $A \in \mathfrak{F}$ *se numeşte unimodal dacă nucleul acestuia,* $\operatorname{core} A$, *este format dintr-un singur punct, respectiv, se numeşte plat, dacă* $\operatorname{core} A$ *este un interval compact netrivial.*

Observaţia 3.1.4 [5] *Din Definiţia* 3.1.1*, rezultă că o funcţie* $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ *este un număr fuzzy dacă şi numai dacă există numerele reale* $\alpha_1, a_1, a_2, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, *cu* $\alpha_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \alpha_2$, *astfel încât:*

1. *restricţia funcţiei* A, $A_1 = A|_{[\alpha_1, a_1]} : [\alpha_1, a_1] \to [0,1]$ (*numită latura stângă a lui* A) *este o funcţie crescătoare şi superior semicontinuă;*

2. *restricţia funcţiei* A, $A_2 = A|_{[a_2, \alpha_2]} : [a_2, \alpha_2] \to [0,1]$ (*numită latura dreaptă a lui* A) *este o funcţie descrescătoare şi superior semicontinuă;*

3. $A(x) = 1$, *pentru fiecare* $x \in [a_1, a_2]$;

4. $A(x) = 0$, *dacă* $x \notin [\alpha_1, \alpha_2]$.

3.2 Reprezentări ale numerelor fuzzy

3.2.1 Reprezentarea LU a numerelor fuzzy

Dacă $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ este un număr fuzzy, mulţimile de nivel $[A]_t$ $(t \in [0,1])$ ale lui A sunt definite prin:

$$[A]_t = \begin{cases} \overline{\{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}}, & \text{dacă} \quad t = 0 \\ \{x \in \mathbb{R} : A(x) \geq t\}, & \text{dacă} \quad 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Pentru fiecare $t \in [0,1]$, $[A]_t$ este un interval compact.

Observaţia 3.2.1 ([45],[5]) *Dacă*

$$[A]_t = \left[x_A^-(t), x_A^+(t)\right], \quad t \in [0,1],$$

atunci funcţiile $x_A^-, x_A^+ : [0,1] \to \mathbb{R}$ (*care definesc capetele mulţimilor de nivel* $[A]_t$) *satisfac următoarele proprietăţi:*

1. *x_A^- şi x_A^+ sunt funcţii mărginite;*

2. *x_A^- şi x_A^+ sunt continue la stânga în fiecare punct din $(0;1]$ şi sunt continue în 0;*

3. *x_A^- este monoton crescătoare, iar x_A^+ este monoton descrescătoare;*

4. *$x_A^-(t) \leq x_A^+(t)$, pentru fiecare $t \in [0,1]$.*

Mai mult, Goetschel şi Woxmann [45] au demonstrat că un număr fuzzy A este complet determinat de o pereche $x_A = \left(x_A^-, x_A^+\right)$ de funcţii $x_A^-, x_A^+ : [0,1] \to \mathbb{R}$, care satisfac cele patru condiţii de mai sus.
Această reprezentare a unui număr fuzzy printr-o pereche de funcţii, care satisfac proprietăţile $1-4$ de mai sus, se numeşte reprezentare LU.

3.2.2 Reprezentarea CE a numerelor fuzzy

Fie numărul fuzzy $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ cu mulţimile de nivel $[A]_t = \left[x_A^-(t), x_A^+(t)\right]$.
Construim funcţiile

$$\delta_A^-, \delta_A^+ : [0,1] \to \mathbb{R}_+,$$

numite deviaţia la stânga, respectiv la dreapta, faţă de nucleul numărului fuzzy A, unde,

$$\begin{cases} \delta_A^-(t) = a_1 - x_A^-(t) \\ \delta_A^+(t) = x_A^+(t) - a_2 \end{cases}, \quad \text{pentru } t \in [0,1].$$

Din proprietăţile funcţiilor x_A^- şi x_A^+ deducem imediat că deviaţiile δ_A^- şi δ_A^+ sunt funcţii mărginite şi descrescătoare, continue la stânga în fiecare punct din $(0;1]$, continue în 0 şi $\delta_A^-(1) = \delta_A^+(1) = 0$.
În consecinţă, numărul fuzzy $A \in \mathfrak{F}$ poate fi reprezentat printr-un sistem ordonat

$$A = \left(\left(a_1, \delta_A^-\right), \left(a_2, \delta_A^+\right)\right),$$

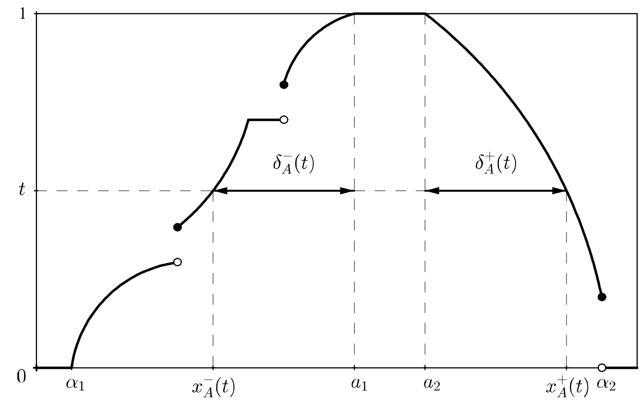
unde

1. $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, cu $a_1 \leq a_2$;

2. $\delta_A^-, \delta_A^+ : [0,1] \to [0,+\infty)$ sunt două funcţii mărginite şi descrescătoare, continue la stânga în fiecare punct din $(0;1]$ şi continue în 0, care satisfac condiţia $\delta_A^-(1) = \delta_A^+(1) = 0$.

Astfel, punctual, numărul fuzzy A se poate reprezenta prin

$$A = \left(\left(a_1, \delta_A^-(t)\right), \left(a_2, \delta_A^+(t)\right)\right)_{t\in[0,1]}.$$



Observaţia 3.2.2 [36] *Dacă Ω este mulţimea tuturor funcţiilor $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ care sunt mărginite, descrescătoare, continue la stânga în fiecare punct din $(0;1]$ şi continue în 0 şi care satisfac condiţia $f(1) = 0$, atunci, pentru orice număr fuzzy $A = \left(\left(a_1, \delta_A^-\right), \left(a_2, \delta_A^+\right)\right) \in \mathfrak{F}$, perechile $\left(a_1, \delta_A^-\right)$ şi $\left(a_2, \delta_A^+\right)$ sunt elemente ale produsului cartezian $\mathbb{R} \times \Omega$, deci putem identifica mulţimea $\mathfrak{F}$ a tuturor numerelor fuzzy, cu o submulţime a lui $(\mathbb{R} \times \Omega)^2$, adică*

$$\mathfrak{F} = \left\{A = \left(\left(a_1, \delta_A^-\right), \left(a_2, \delta_A^+\right)\right) : \left(a_1, \delta_A^-\right), \left(a_2, \delta_A^+\right) \in \mathbb{R} \times \Omega,\ a_1 \le a_2\right\}.$$

Definiţia 3.2.3 *Această reprezentare a numerelor fuzzy o vom numi CE-reprezentare ("core-ecart representation").*

Observaţia 3.2.4 *Dacă $\theta \in \Omega$ este funcţia nulă ($\theta(t) = 0,\ t \in [0,1]$), atunci un număr real $a \in \mathbb{R}$ se poate reprezenta prin $((a,\theta),(a,\theta)) \in \mathfrak{F}$, iar un interval compact $[a_1,a_2] \subset \mathbb{R}$ prin $((a_1,\theta),(a_2,\theta)) \in \mathfrak{F}$.*

Definiţia 3.2.5 *Numărul fuzzy $A = \left(\left(a_1, \delta_A^-\right), \left(a_2, \delta_A^+\right)\right) \in \mathfrak{F}$ se numeşte:*

1. *cu nucleu pozitiv* $(\mathrm{core}\, A \ge 0)$*, dacă* $a_1 \ge 0$;
2. *cu nucleu negativ* $(\mathrm{core}\, A \le 0)$*, dacă* $a_2 \le 0$;
3. *cu nucleu strict pozitiv* $(\mathrm{core}\, A > 0)$*, dacă* $a_1 > 0$;
4. *cu nucleu strict negativ* $(\mathrm{core}\, A < 0)$*, dacă* $a_2 < 0$.

Notaţii: $\mathfrak{F}_+ = \{A \in \mathfrak{F} : \operatorname{core} A \geq 0\}$
$\mathfrak{F}_- = \{A \in \mathfrak{F} : \operatorname{core} A \leq 0\}$
$\mathfrak{F}_+^* = \{A \in \mathfrak{F} : \operatorname{core} A > 0\}$
$\mathfrak{F}_-^* = \{A \in \mathfrak{F} : \operatorname{core} A < 0\}$

3.2.3 Reprezentarea MCE a numerelor fuzzy

Dacă numărul fuzzy $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ are mulţimile de nivel $[A]_t = \left[x_A^-(t), x_A^+(t)\right]$, funcţiile $\Theta_A^-, \Theta_A^+, \Delta_A : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ definite prin

$$\begin{cases} \Theta_A^-(t) = a - x_A^-(t) \\ \Theta_A^+(t) = x_A^+(t) - a \end{cases}, \quad \forall\, t \in [0,1]$$

respectiv,

$$\Delta_A = x_A^+ - x_A^- = \Theta_A^- + \Theta_A^+$$

unde

$$a = \frac{1}{2}\left(x_A^-(1) + x_A^+(1)\right)$$

este mijlocul nucleului $\operatorname{core} A$, a numărului fuzzy A, sunt mărginite, descrescătoare, continue la stânga pe $(0,1]$, continue în 0 şi $\Theta_A^-(1) = \Theta_A^+(1)$.

Definiţia 3.2.6 *Funcţiile Θ_A^-, Θ_A^+ le vom numi deviaţiile la stânga, respectiv, la dreapta, faţă de mijlocul nucleului,* $\operatorname{core} A$, *a numărului fuzzy A, iar Δ_A o vom numi lăţimea lui A.*

Astfel, numărul fuzzy $A \in \mathfrak{F}$ poate fi reprezentat ca un sistem (ordonat) $A = \left(a; \Theta_A^-, \Theta_A^+\right)$, unde $a \in \mathbb{R}$ iar $\Theta_A^-, \Theta_A^+ : [0,1] \to [0,+\infty)$ sunt două funcţii mărginite, descrescătoare, continue la stânga pe $(0,1]$ şi continue în 0, care verifică proprietatea $\Theta_A^-(1) = \Theta_A^+(1)$.

Definiţia 3.2.7 [33] *Această reprezentare a numerelor fuzzy o vom numi în continuare, MCE-reprezentare ("middle core ecart-representation").*

Punctual, numărul fuzzy A se poate reprezenta prin $A = \left(a; \Theta_A^-(t), \Theta_A^+(t)\right)_{t\in[0,1]}$
.

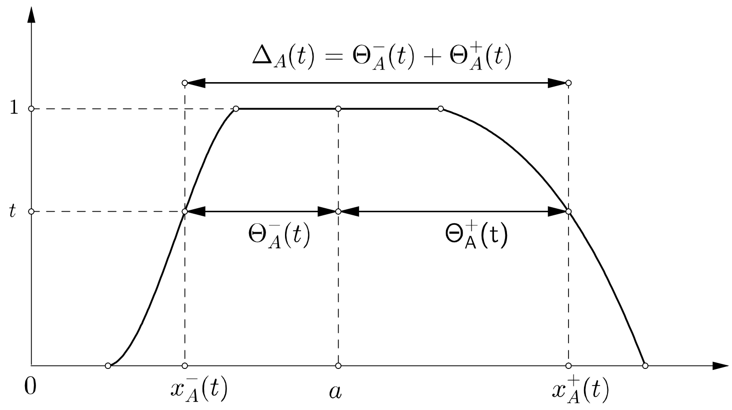


Figura 1.

Considerăm mulţimile

$$\mathfrak{F}_c = \left\{A \in \mathfrak{F} : x_A^-, x_A^+ \in \mathrm{C}\,[0,1]\right\}$$

şi

$$\Xi = \{(f_1, f_2) \in \mathrm{C_{DP}}\,[0,1] \times \mathrm{C_{DP}}\,[0,1] : f_1(1) = f_2(1)\}$$

unde $\mathrm{C_{DP}}\,[0,1]$ este submulţimea lui $\mathrm{C}\,[0,1]$, care conţine toate funcţiile descrescătoare din $[0,1]$ în $[0,+\infty)$.

Astfel, cu aceste notaţii, putem identifica mulţimea $\mathfrak{F}_c$ cu produsul cartezian $\mathbb{R} \times \Xi$.

Evident, $(\mathrm{C_{DP}}\,[0,1], +, \cdot)$ şi $(\Xi, +, \cdot)$ sunt semi-inele comutative cu unitate. Dacă $\theta : x \mapsto 0$ şi $\epsilon : x \mapsto 1$, atunci elementul nul al lui Ξ este perechea (θ, θ), iar unitatea este perechea (ϵ, ϵ).

Definiţia 3.2.8 [33] *Dacă* $A = \left(a; \Theta_A^-, \Theta_A^+\right)$ *şi* $B = \left(a; \Theta_B^-, \Theta_B^+\right)$ *sunt două numere fuzzy, definim pe* $\mathfrak{F}$ *relaţia* " $\preccurlyeq$ ", *prin*

$$A \preccurlyeq B \iff \begin{cases} a \leq b \\ \Theta_A^-(t) \leq \Theta_B^-(t), & \forall\ t \in [0,1] \\ \Theta_A^+(t) \leq \Theta_B^+(t), & \forall\ t \in [0,1] \end{cases}$$

Este evident că aceasta este o relaţie de ordine pe mulţimea $\mathfrak{F}$ a numerelor fuzzy.

3.2.4 Reprezentarea multivocă a numerelor fuzzy

Pentru simplificarea prezentării, vom introduce următoarele notaţii:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_c[0,1] &= \{[\alpha,\beta] : 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1\} \\ \mathcal{P}_c^*[0,1] &= \{[\alpha,\beta] : 0 \leq \alpha < \beta \leq 1\}\end{aligned}$$

pentru mulţimea subintervalelor compacte din $[0,1]$, respectiv, pentru mulţimea subintervalelor compacte netriviale din $[0,1]$. Mai general, putem considera mulţimile

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_c(I) &= \{[\alpha,\beta] \subseteq I : \alpha \leq \beta\} \\ \mathcal{P}_c^*(I) &= \{[\alpha,\beta] \subseteq I : \alpha < \beta\}\end{aligned}$$

ale subintervalelor compacte ale unui interval real I. De asemenea, vom identifica în continuare "intervalul" $[\alpha,\alpha] \in \mathcal{P}_c(I)$ cu numărul real $\alpha \in I$.

Mai considerăm aplicaţiile

$$\begin{aligned}\mathrm{L} &: \mathcal{P}_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad [\alpha,\beta] \mapsto \alpha \\ \mathrm{U} &: \mathcal{P}_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad [\alpha,\beta] \mapsto \beta\end{aligned}$$

care definesc cele două capete ale unui interval compact real.

Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie definită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, vom nota cu $\mathrm{D}(f)$, mulţimea tuturor punctelor de discontinuitate ale funcţiei f.

Observaţia 3.2.9 *Este cunoscut faptul că o funcţie monotonă $f : I \to \mathbb{R}$ are doar puncte de discontinuitate de speţa I (vezi, [83]). Mai mult, din Teorema lui Froda [41], mulţimea $\mathrm{D}(f)$ a discontinuităţilor lui f este o mulţime cel mult numărabilă. Evident, dacă mulţimea $\mathrm{D}(f)$ este finită, atunci elementele acesteia sunt puncte izolate din $\mathbb{R}$, dar, în cazul în care $\mathrm{D}(f)$ este infinită punctele de discontinuitate nu sunt neapărat izolate.*

Observaţia 3.2.10 *Fie $f : [a,b] \to [0,1]$ o funcţie monotonă şi superior semicontinuă. Dacă $\mathrm{D}(f)$ este o mulţime discretă (adică punctele de discontinuitate ale lui f sunt puncte izolate) şi mulţimea $\{x \in [a,b] : f(x) = 1\}$ are un singur element, atunci putem considera funcţia multivocă $\widehat{f} : [a,b] \to \mathcal{P}_c[0,1]$, definită prin:*

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} [f(x-0), f(x)], & \textit{dacă} \quad a < x \leq b \\ [0, f(a)], & \textit{dacă} \quad x = a \end{cases}, \ \textit{dacă } f \textit{ este crescătoare}$$

respectiv,

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} [f(x+0), f(x)], & \text{dacă} \quad a \le x < b \\ [0, f(b)], & \text{dacă} \quad x = b \end{cases}, \text{ dacă } f \text{ este descrescătoare.}$$

Propoziţia 3.2.11 *Funcţia multivocă* $\widehat{f}$ *introdusă în Observaţia* 3.2.10 *are următoarele proprietăţi:*

1. $\widehat{f}(x) = f(x)$, *pentru fiecare* $x \in (a,b) \setminus \mathrm{D}(f)$;
2. *mulţimea* $\left\{x \in [a,b] : \widehat{f}(x) \in \mathcal{P}_c^*[0,1]\right\}$ *este discretă;*
3. $\Gamma\left(\widehat{f}\right) = \left\{(x,y) \in [a,b] \times [0,1] : y \in \widehat{f}(x)\right\}$ *este o curbă plană continuă;*
4. *dacă* f *este crescătoare, atunci* $(a,0),(b,1) \in \Gamma\left(\widehat{f}\right)$, *respectiv, dacă* f *este descrescătoare, atunci* $(a,1),(b,0) \in \Gamma\left(\widehat{f}\right)$;
5. *dacă* f *este crescătoare (descrescătoare), atunci* $\widehat{f}$ *este crescătoare (descrescătoare), adică, pentru fiecare* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *cu proprietatea* $a \le x_1 \le x_2 \le b$, *are loc*
$$t_1 \le t_2 \quad (t_2 \le t_1), \text{ pentru fiecare } t_1 \in f(x_1) \quad \text{şi} \quad t_2 \in f(x_2);$$
6. *imaginea lui* $\widehat{f}$ *este* $[0,1]$, *adică* $\mathrm{Im}\,\widehat{f} = \bigcup_{x \in [a,b]} \widehat{f}(x) = [0,1]$;

Observaţia 3.2.12 *Fie* $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ *un număr fuzzy reprezentat ca şi în Observaţia* 3.1.4. *Dacă* A *are doar discontinuităţi izolate, atunci mulţimile* $\mathrm{D}(A_1)$ *şi* $\mathrm{D}(A_2)$ *sunt discrete, deci putem construi funcţiile multivoce*

$$\widehat{A}_1 : [\alpha_1, a_1] \to \mathcal{P}_c[0,1] \quad \text{şi} \quad \widehat{A}_2 : [a_2, \alpha_2] \to \mathcal{P}_c[0,1]$$

prin

$$\widehat{A}_1(x) = \begin{cases} [A_1(x-0), A_1(x)], & \text{dacă} \quad \alpha_1 < x \le a_1 \\ [0, A_1(\alpha_1)], & \text{dacă} \quad x = \alpha_1 \end{cases},$$

respectiv

$$\widehat{A}_2(x) = \begin{cases} [A_2(x+0), A_2(x)], & \text{dacă} \quad a_2 \le x < \alpha_2 \\ [0, A_2(\alpha_2)], & \text{dacă} \quad x = \alpha_2 \end{cases}.$$

Propoziţia 3.2.13 *Dacă* $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ *este un număr fuzzy, atunci funcţiile multivoce* $\widehat{A}_1 : [\alpha_1, a_1] \to \mathcal{P}_c[0,1]$ *şi* $\widehat{A}_2 : [a_2, \alpha_2] \to \mathcal{P}_c[0,1]$ *construite în Observaţia* 3.2.12*, au următoarele proprietăţi:*

1. *mulţimile* $\left\{x \in [\alpha_1, a_1] : \widehat{A}_1(x) \in \mathcal{P}_c^*[0,1]\right\}$ *şi* $x \in [a_2, \alpha_2] : \widehat{A}_2(x) \in \mathcal{P}_c^*[0,1]$ *sunt mulţimi discrete;*
2. $(\alpha_1, 0), (a_1, 1) \in \Gamma\left(\widehat{A}_1\right)$ *şi* $(a_2, 1), (\alpha_2, 0) \in \Gamma\left(\widehat{A}_2\right)$
3. $\operatorname{Im}\widehat{A}_1 = \operatorname{Im}\widehat{A}_2 = [0,1]$;
4. $\widehat{A}_1$ *este crescătoare, iar* $\widehat{A}_2$ *este descrescătoare;*
5. $\Gamma\left(\widehat{A}_1\right)$ *şi* $\Gamma\left(\widehat{A}_2\right)$ *sunt curbe plane continue.*

Reciproc, dacă $\alpha_1 \le a_1 \le a_2 \le \alpha_2$*, iar*

$$\widehat{A}_1 : [\alpha_1, a_1] \to \mathcal{P}_c[0,1] \quad \text{şi} \quad \widehat{A}_2 : [a_2, \alpha_2] \to \mathcal{P}_c[0,1]$$

sunt două funcţii multivoce, care satisfac condiţiile $(1)-(5)$ *de mai sus, atunci funcţiile*

$$A_1 : [\alpha_1, a_1] \to [0,1] \quad \text{şi} \quad A_2 : [a_2, \alpha_2] \to [0,1]$$

definite prin

$$A_i(x) = \mathrm{U}\left(\widehat{A}_i(x)\right), \quad i \in \{1,2\},$$

pot fi considerate ca cele două părţi laterale ale unui număr fuzzy A*.*

Astfel, din Propoziţia 3.2.13, rezultă că un număr fuzzy A care are discontinuităţile izolate este bine determinat de perechea $\left(\widehat{A}_1, \widehat{A}_2\right)$ de funcţii multivoce (construite în Observaţia 3.2.12).

Definiţia 3.2.14 *Această reprezentare a numărului fuzzy* A *printr-o pereche de funcţii multivoce o vom numi reprezentarea multivocă a acestui număr fuzzy.*

Observaţia 3.2.15 *Dacă* $a_1 \ne a_2$ *sau dacă* $a_1 = a_2 = a$ *şi* $A_1(a-0) = A_2(a+0)$, *atunci funcţia multivocă*

$$\widehat{A} : \mathbb{R} \to \mathcal{P}_c[0,1], \qquad \widehat{A}(x) = \begin{cases} \widehat{A}_1(x), & \text{dacă } x \in [\alpha_1, a_1] \\ 1, & \text{dacă } x \in (a_1, a_2) \\ \widehat{A}_2(x), & \text{dacă } x \in [a_2, \alpha_2] \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

are următoarele proprietăţi:

1. *mulţimea* $\left\{x \in \mathbb{R} : \widehat{A}(x) \in \mathcal{P}_c^*[0,1]\right\}$ *este o mulţime discretă;*

2. *există* $x_0 \in \mathbb{R}$, *astfel încât* $1 \in \widehat{A}(x_0)$;

3. $\mathrm{U}\left(\widehat{A}(\lambda x + (1-\lambda) y)\right) \geq \min\left\{\mathrm{U}\left(\widehat{A}(x)\right), \mathrm{U}\left(\widehat{A}(y)\right)\right\}$, *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$ *şi* $\lambda \in [0,1]$;

4. *pentru fiecare* $x_0 \in \mathbb{R}$ *şi fiecare* $\varepsilon > 0$, *există o vecinătate* V_0 *a lui* x_0, *astfel încât*
$$\mathrm{U}\left(\widehat{A}(x)\right) - \mathrm{U}\left(\widehat{A}(x_0)\right) \leq \varepsilon,$$
pentru orice $x \in V_0$;

5. *închiderea mulţimii* $\left\{x \in \mathbb{R} : 0 \notin \widehat{A}(x)\right\}$ *este un interval compact din* $\mathbb{R}$;

Reciproc, dacă $\widehat{A} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_c[0,1]$ *este o funcţie multivocă, ce satisface aceste cinci condiţii, atunci funcţia* $A : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, *definită prin*

$$A(x) = \begin{cases} \widehat{A}(x), & \textit{dacă} \quad \widehat{A}(x) \in [0,1] \\ \mathrm{U}\left(\widehat{A}(x)\right), & \textit{dacă} \quad \widehat{A}(x) \in \mathcal{P}_c^*[0,1] \end{cases}$$

este un număr fuzzy şi $\mathrm{D}(A) = \left\{x \in \mathbb{R} : \widehat{A}(x) \in \mathcal{P}_c^*[0,1]\right\}$.

Exemplul 3.2.16 *În Figura* 1, *în partea din stânga este reprezentat un număr fuzzy, iar în partea din dreapta este reprezentarea multivocă a acestuia.*

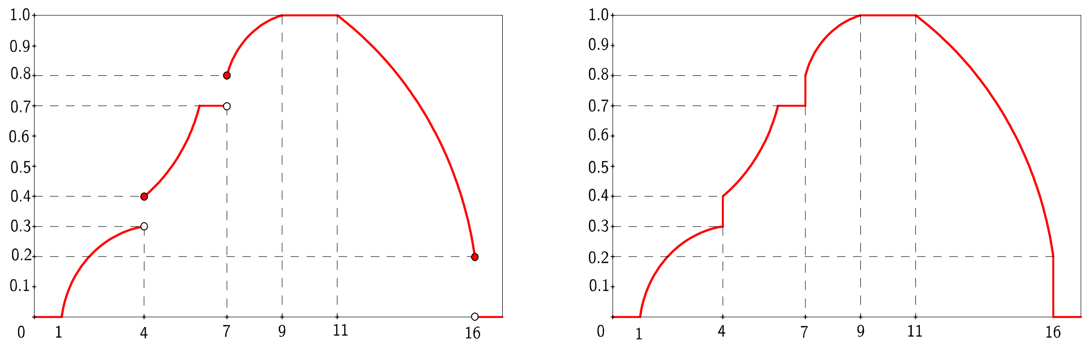


Figura 1.

Se observă că $\mathrm{D}(A) = \{4, 7, 16\}$ *şi*

$$\widehat{A}_1(4) = [0.3, 0.4], \quad \widehat{A}_1(7) = [0.7, 0.8], \quad \widehat{A}_2(16) = [0, 0.2]$$

Capitolul 4

Produse de tip Dorroh pe mulţimea numerelor fuzzy

4.1 Preliminarii algebrice

Definiţia 4.1.1 *Un semiinel* (*comutativ*) *este o structură algebrică* $(S, +, \cdot, 0)$, *care satisface următoarele condiţii:*

1. $(S, +, 0)$ *este un monoid comutativ;*

2. $(S, \cdot)$ *este un semigrup* (*comutativ*)*;*

3. *are loc distributivitatea la stânga şi la dreapta;*

4. $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$, *pentru fiecare* $a \in S$.

Dacă $(S, \cdot, 1)$ *este un monoid, atunci spunem ca* S *este un semiinel cu unitate.*

Definiţia 4.1.2 *Fie* S *un semiinel comutativ cu unitate. Printr-un* S*-semimodul stâng, vom înţelege un monoid comutativ* $(M, +, 0)$, *împreună cu o operaţie externă* $S \times M \to M$, $(a, x) \longmapsto a \cdot x$, *numită înmulţire cu scalari, care satisface următoarele condiţii:*

1. $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$;

2. $a \cdot (x + y) = (a \cdot x) + (a \cdot y)$;

3. $(a + b) \cdot x = (a \cdot x) + (b \cdot x)$;

4. $0_S \cdot x = 0_M = a \cdot 0_M$;

5. $1 \cdot x = x$;

pentru orice $a, b \in S$ *şi* $x, y \in M$.

Observaţia 4.1.3 *Dacă în definiţia extinderii triviale şi a extinderii Dorroh, considerăm peste tot în loc de inel un semiinel comutativ* S, *iar în loc de modul un* S*-semimodul* M, *obţinem că* $S \ltimes M$ *şi* $S \bowtie M$ *sunt semiinele comutative.*

4.2 Produsul Dorroh

Considerăm din nou, mulţimea Ω, a tuturor funcţiilor $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$, care sunt mărginite, descrescătoare, continue la stânga în fiecare punct din $(0; 1]$ şi continue în 0 şi care satisfac condiţia $f(1) = 0$ şi fie Ω_0 submulţimea lui Ω, care conţine toate funcţiile continue din Ω.

Evident, $(\mathbb{R}_+, +, \cdot)$ este un semiinel comutativ, iar $(\Omega, +)$ este un $\mathbb{R}_+$-semimodul stâng în raport cu adunarea şi înmulţirea punctuală. Considerăm acum o structură de semiinel $(\Omega, +, *)$ pe mulţimea Ω, astfel încât

$$(a \cdot f) * g = a \cdot (f * g), \quad \text{pentru fiecare } a \in \mathbb{R}_+ \text{ şi } f, g \in \Omega$$

şi extinderea Dorroh $(\mathbb{R}_+ \bowtie \Omega, +, \bullet)$.

Dacă $A = \left(\left(a_1, \delta_A^-\right), \left(a_2, \delta_A^+\right)\right) \in \mathfrak{F}$ şi $B = \left(\left(b_1, \delta_B^-\right), \left(b_2, \delta_B^+\right)\right) \in \mathfrak{F}$ sunt două numere fuzzy, definim suma lor prin

$$A + B = \left(\left(a_1 + b_1, \delta_A^- + \delta_B^-\right), \left(a_2 + b_2, \delta_A^+ + \delta_B^+\right) \right) \in \mathfrak{F}$$

respectiv, dacă $A, B \in \mathfrak{F}_+$, definim produsul acestora prin

$$\begin{aligned} A \circledast B &= \left(\left(a_1, \delta_A^-\right) \bullet \left(b_1, \delta_B^-\right), \left(a_2, \delta_A^+\right) \bullet \left(b_2, \delta_B^+\right) \right) \\ &= \left(\left(a_1 b_1, \delta_{A \circledast B}^-\right), \left(a_2 b_2, \delta_{A \circledast B}^+\right) \right), \end{aligned} \tag{4.1}$$

unde

$$\begin{cases} \delta_{A \circledast B}^- = a_1 \delta_B^- + b_1 \delta_A^- + \delta_A^- * \delta_B^- \\ \delta_{A \circledast B}^+ = a_2 \delta_B^+ + b_2 \delta_A^+ + \delta_A^+ * \delta_B^+ \end{cases}.$$

Evident, dacă $A, B \in \mathfrak{F}_+$ atunci $A + B, A \circledast B \in \mathfrak{F}_+$.

Teorema 4.2.1 [36] $(\mathfrak{F}_+, +, \circledast)$ *este un semiinel comutativ cu unitate.*

Dacă considerăm că operaţia " $*$ " este produsul punctual definit pe Ω, adică

$$(f * g)(t) = (f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t), \text{ pentru orice } t \in [0,1]$$

pentru $f, g \in \Omega$, vom nota cu " $\odot$ " operaţia definită mai sus pe $\mathfrak{F}_+$. Astfel, în acest caz,

$$A \odot B = \left(\left(a_1 b_1, \delta^-_{A\odot B}\right), \left(a_2 b_2, \delta^+_{A\odot B}\right) \right),$$

unde,

$$\begin{cases} \delta^-_{A\odot B}(t) = a_1 \delta^-_B(t) + b_1 \delta^-_A(t) + \delta^-_A(t) \cdot \delta^-_B(t) \\ \delta^+_{A\odot B}(t) = a_2 \delta^+_B(t) + b_2 \delta^+_A(t) + \delta^+_A(t) \cdot \delta^+_B(t) \end{cases}, \text{ pentru fiecare } t \in [0,1].$$

Definiţia 4.2.2 [36] *Produsul " $\odot$ " (definit mai sus) pe mulţimea $\mathfrak{F}_+$, se numeşte produsul Dorroh.*

Observaţia 4.2.3 *În* [3]*, A.I. Ban şi B. Bede au introdus şi studiat proprietăţile de bază ale produsului încrucişat ("cross product") a numerelor fuzzy. Dacă $A = \left[x^-_A(t), x^+_A(t)\right]_{t\in[0,1]}$ şi $B = \left[x^-_B(t), x^+_B(t)\right]_{t\in[0,1]}$ sunt două numere fuzzy pozitive, produsul încrucişat al acestora se defineşte prin*

$$A \circ B = \left[x^-_{A\circ B}(t), x^+_{A\circ B}(t)\right]_{t\in[0,1]},$$

unde

$$\begin{cases} x^-_{A\circ B}(t) = x^-_A(t) \cdot x^-_B(1) + x^-_A(1) \cdot x^-_B(t) - x^-_A(1) \cdot x^-_B(1) \\ x^+_{A\circ B}(t) = x^+_A(t) \cdot x^+_B(1) + x^+_A(1) \cdot x^+_B(t) - x^+_A(1) \cdot x^+_B(1) \end{cases},$$

pentru fiecare $t \in [0,1]$.
Dacă $A = \left(\left(a_1, \delta^-_A\right), \left(a_2, \delta^+_A\right)\right)$ şi $B = \left(\left(b_1, \delta^-_B\right), \left(b_2, \delta^+_B\right)\right)$, atunci

$$A \circ B = \left(\left(a_1 \cdot b_1, \delta^-_{A\circ B}\right), \left(a_2 \cdot b_2, \delta^+_{A\circ B}\right) \right),$$

unde

$$\begin{cases} \delta^-_{A\circ B}(t) = a_1 \cdot b_1 - x^-_{A\circ B}(t) = \delta^-_A(t) \cdot b_1 + a_1 \cdot \delta^-_B(t) \\ \delta^+_{A\circ B}(t) = x^+_{A\circ B}(t) - a_2 \cdot b_2 = \delta^+_A(t) \cdot b_2 + a_2 \cdot \delta^+_B(t) \end{cases}$$

deci, produsul încrucişat este un caz particular al produsului definit mai sus (4.1) pe mulţimea $\mathfrak{F}_+$, produs ce se obţine considerând produsul nul pe Ω ($f * g = \theta$).

Dacă $A = \left(\left(a_1, \delta^-_A\right), \left(a_2, \delta^+_A\right) \right) \in \mathfrak{F}$, definim opusul său, $-A$, prin

$$-A = \left(\left(-a_2, \delta^+_A\right), \left(-a_1, \delta^-_A\right) \right).$$

Propoziţia 4.2.4 [36] *Produsul Dorroh " $\odot$ " definit pe $\mathfrak{F}_+$ se poate extinde la mulţimea $\mathfrak{F}_+ \cup \mathfrak{F}_-$ prin*

$$A \odot B = \begin{cases} -\left((-A) \odot B\right), & \textit{dacă} \quad A \in \mathfrak{F}_- \quad \textit{şi} \quad B \in \mathfrak{F}_+ \\ -\left(A \odot (-B)\right), & \textit{dacă} \quad A \in \mathfrak{F}_+ \quad \textit{şi} \quad B \in \mathfrak{F}_- \\ (-A) \odot (-B), & \textit{dacă} \quad A \in \mathfrak{F}_- \quad \textit{şi} \quad B \in \mathfrak{F}_- \end{cases}$$

şi are următoarele proprietăţi:

1. $A \odot B = B \odot A$, *pentru fiecare* $A, B \in \mathfrak{F}_+ \cup \mathfrak{F}_-$;
2. $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$, *pentru fiecare* $A, B, C \in \mathfrak{F}_+ \cup \mathfrak{F}_-$;
3. $A \odot (B + C) = A \odot B + A \odot C$, *dacă* $(B, C \in \mathfrak{F}_+)$ *sau* $(B, C \in \mathfrak{F}_-)$ *sau* $(A \in \mathbb{R})$;

Exemplul 4.2.5 [36] *Dacă* $A, B \in \mathfrak{F}_+$ *unde*

$$\begin{aligned} A &= [t+2, 5-t]_{t\in[0,1]} = \left((3, 1-t), (4, 1-t)\right)_{t\in[0,1]} \\ B &= [2t+3, 7-t]_{t\in[0,1]} = \left((5, 2(1-t)), (6, 1-t)\right)_{t\in[0,1]} \end{aligned}$$

atunci, produsele lor sunt:

1. produsul uzual:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= [(t+2)(2t+3), (5-t)(7-t)] \\ &= \left(\left(15, -2t^2 - 7t + 9\right), \left(24, t^2 - 12t + 11\right)\right) \end{aligned}$$

2. produsul încrucişat:

$$\begin{aligned} A \circ B &= [11t + 4, 34 - 10t] \\ &= \left((15, 11(1-t)), (24, 10(1-t))\right) \end{aligned}$$

3. produsul Dorroh:

$$\begin{aligned} A \odot B &= \left[-2t^2 + 15t + 2, t^2 - 12t + 35\right] \\ &= \left(\left(15, 2t^2 - 15t + 13\right), \left(24, t^2 - 12t + 11\right)\right) \end{aligned}$$

Aceste trei produse sunt ilustrate în Figura 4.

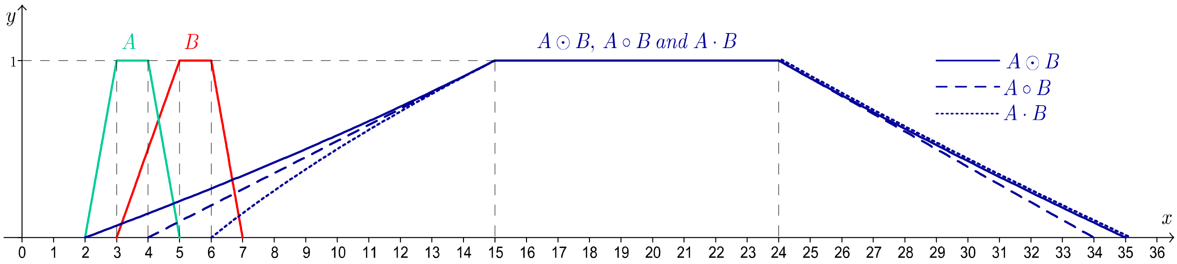


Figura 4.

4.3 O relaţie de congruenţă pe mulţimea numerelor fuzzy

Dacă $A \in \mathfrak{F}$ este un număr fuzzy, atunci deviaţiile δ_A^- şi δ_A^+ sunt funcţii continue dacă şi numai dacă părţile laterale ale lui A sunt strict monotone (adică, A_1 este strict crescătoare, iar A_2 este strict descrescătoare).

Considerăm acum mulţimea $\mathfrak{F}_0$ a tuturor numerelor fuzzy cu discontinuităţi izolate şi care au părţile laterale strict monotone. Astfel, dacă Ω_0 este mulţimea funcţiilor $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ continue şi descrescătoare, care verifică condiţia $f(1) = 0$, atunci

$$\mathfrak{F}_0 = \left\{A = \left(\left(a_1, \delta_A^-\right), \left(a_2, \delta_A^+\right)\right) \in \mathfrak{F} : \delta_A^-, \delta_A^+ \in \Omega_0\right\}.$$

Evident, $(\mathfrak{F}_0, +)$ este un submonoid al monoidului $(\mathfrak{F}, +)$, iar $(\mathfrak{F}_0 \cap \mathfrak{F}_+, +, \odot)$ este un subsemiinel al semiinelului $(\mathfrak{F}_+, +, \odot)$.

Observaţia 4.3.1 *Dacă $f \in \Omega_0$, atunci contraimaginea $f^{-1}(x)$, a unui element $x \in \mathbb{R}_+$ prin aplicaţia f,*

$$f^{-1}(x) = \{t \in [0,1] : f(t) = x\},$$

este fie mulţimea vidă, fie o mulţime formată dintr-un singur element, fie este un interval compact netrivial din $\mathcal{P}_c^*[0,1]$. Mai mult, dacă $x, x' \in \mathbb{R}_+$ şi $x \neq x'$, atunci $f^{-1}(x) \cap f^{-1}(x') = \emptyset$.

Pentru o funcţie $f \in \Omega_0$ definim

$$V(f) = \bigcup_{x \geq 0} \left\{f^{-1}(x) : f^{-1}(x) \in \mathcal{P}_c^*[0,1]\right\},$$

respectiv, dacă $A = \left(\left(a_1, \delta_A^-\right), \left(a_2, \delta_A^+\right) \right) \in \mathfrak{F}_0$, definim $V_1(A) = V\left(\delta_A^-\right)$ şi $V_2(A) = V\left(\delta_A^+\right)$. Mai general, dacă numărul fuzzy $A \in \mathfrak{F}$ are reprezentarea multivocă $\left(\widehat{A}_1, \widehat{A}_2\right)$, unde

$$\widehat{A}_1 : [\alpha_1, a_1] \to \mathcal{P}_c[0,1] \quad \text{şi} \quad \widehat{A}_2 : [a_2, \alpha_2] \to \mathcal{P}_c[0,1],$$

atunci definim

$$\begin{aligned} V_1(A) &= \bigcup_{\alpha_1 \le x \le a_1} \left\{ \widehat{A}_1(x) : \widehat{A}_1(x) \in \mathcal{P}_c^*[0,1] \right\} \\ V_2(A) &= \bigcup_{a_2 \le x \le \alpha_2} \left\{ \widehat{A}_2(x) : \widehat{A}_2(x) \in \mathcal{P}_c^*[0,1] \right\} \end{aligned}$$

Astfel, $V_1(A)$ şi $V_2(A)$ reprezintă verticalităţile celor două ramuri ale numărului fuzzy A, verticalităţi ce apar doar în punctele de discontinuitate ale lui A şi în consecinţă, numărul fuzzy A este continuu dacă şi numai dacă $V_1(A) = V_2(A) = \emptyset$.

Propoziţia 4.3.2 [36] *Dacă* $A = \left(\left(a_1, \delta_A^-\right), \left(a_2, \delta_A^+\right)\right) \in \mathfrak{F}_0$ *şi* $B = \left(\left(b_1, \delta_B^-\right), \left(b_2, \delta_B^+\right)\right) \in \mathfrak{F}_0$ *sunt două numere fuzzy, atunci relaţia*

$$A \sim B \Longleftrightarrow V_1(A) = V_1(B) \quad \text{şi} \quad V_2(A) = V_2(B),$$

este o relaţie de echivalenţă pe $\mathfrak{F}_0$.

Observaţia 4.3.3 *O clasă de echivalenţă* $[A]_\sim$ *relativ la relaţia* " $\sim$ ", *conţine toate acele numere fuzzy care au aceleaşi "verticalităţi" stângi şi drepte.*

Lema 4.3.4 [36] *Fie* $f_1, f_2 \in \Omega_0$ *şi* $x \in \mathbb{R}_+$. *Atunci* $(f_1 + f_2)^{-1}(x) \in \mathcal{P}_c^*[0,1]$ *dacă şi numai dacă există două numere reale* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, *în mod unic determinate, astfel încât* $x = x_1 + x_2$ *şi* $f_1^{-1}(x_1) \cap f_2^{-1}(x_2) \in \mathcal{P}_c^*[0,1]$. *Mai mult, în acest caz, are loc*

$$(f_1 + f_2)^{-1}(x) = f_1^{-1}(x_1) \cap f_2^{-1}(x_2).$$

Lema 4.3.5 [36] *Fie* $f_1, f_2 \in \Omega_0$ *şi* $y \in \mathbb{R}_+$. *Atunci* $(f_1 \cdot f_2)^{-1}(y) \in \mathcal{P}_c^*[0,1]$ *dacă şi numai dacă există două numere reale* $y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+$, *în mod unic determinate, astfel încât* $y = y_1 \cdot y_2$ *şi* $f_1^{-1}(y_1) \cap f_2^{-1}(y_2) \in \mathcal{P}_c^*[0,1]$. *Mai mult, în acest caz, are loc*

$$(f_1 \cdot f_2)^{-1}(y) = f_1^{-1}(y_1) \cap f_2^{-1}(y_2).$$

Dacă

$$C = \cup \{C_i : i \in I\} \quad \text{şi} \quad C' = \cup \left\{C'_j : j \in J\right\},$$

unde $\{C_i : i \in I\}$ şi $\left\{C'_j : j \in J\right\}$ sunt două familii de elemente din $\mathcal{P}_c^*[0,1]$ cu proprietatea că $C_{i_1} \cap C_{i_2} = \emptyset$ şi $C'_{j_1} \cap C'_{j_2} = \emptyset$, pentru orice $i_1 \neq i_2$ şi $j_1 \neq j_2$, definim

$$C \sqcap C' = \cup \left\{C_i \cap C'_j : i \in I,\ j \in J,\ \ C_i \cap C'_j \in \mathcal{P}_c^*[0,1]\right\}.$$

Propoziţia 4.3.6 [36] *Dacă $A, B \in \mathfrak{F}_0$, atunci*

$$V_i(A+B) = V_i(A) \sqcap V_i(B), \quad \text{pentru fiecare } i \in \{1,2\}$$

iar dacă A şi B sunt strict pozitive, atunci

$$V_i(A \odot B) = V_i(A) \sqcap V_i(B), \quad \text{pentru fiecare } i \in \{1,2\}.$$

Teorema 4.3.7 [36] *Relaţia " $\sim$ " este o relaţie de congruenţă pe monoidul $(\mathfrak{F}_0, +)$, iar restricţia relaţiei " $\sim$ " la $\mathfrak{F}_0 \cap \mathfrak{F}_+^*$ este o relaţie de congruenţă pe monoidul $\left(\mathfrak{F}_0 \cap \mathfrak{F}_+^*, \odot\right)$.*

Observaţia 4.3.8 *Mulţimea $\mathfrak{F}_c \subset \mathfrak{F}_0$ care conţine toate numerele fuzzy continue din $\mathfrak{F}_0$ şi mulţimea I a numerelor reale împreună cu toate intervalele compacte din $\mathbb{R}$, sunt două clase de echivalenţă importante. Importanţa acestora constă în:*

1. *I este elementul neutru al monoizilor factor $(\mathfrak{F}_0/_\sim, +)$ şi $\left(\left(\mathfrak{F}_0 \cap \mathfrak{F}_+^*\right)/_\sim, \odot\right)$;*
2. *$\mathfrak{F}_c$ este un ideal al monoidului $(\mathfrak{F}_0, +)$, respectiv, $\mathfrak{F}_c \cap \mathfrak{F}_+^*$ este un ideal al monoidului $\left(\mathfrak{F}_0 \cap \mathfrak{F}_+^*, \odot\right)$, adică, dacă $A \in \mathfrak{F}_c$ şi $B \in \mathfrak{F}_0$, atunci $A + B \in \mathfrak{F}_c$, respectiv, dacă A şi B sunt cu nucleu strict pozitiv, atunci $A \odot B \in \mathfrak{F}_c$.*

Propoziţia 4.3.9 [36] *Dacă $A \in \mathfrak{F}_c$ şi $B \in \mathfrak{F}_0$, atunci $A + B \in \mathfrak{F}_c$, respectiv, dacă A şi B sunt strict pozitive, atunci $A \odot B \in \mathfrak{F}_c$.*

Capitolul 5

Produse complet distributive pe mulţimea numerelor fuzzy

În acest capitol, considerăm mulţimea

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{c}} = \left\{A \in \mathfrak{F} : x_A^-, x_A^+ \in \mathrm{C}\,[0,1]\right\}$$

care, folosind reprezentarea MCE, se identifică cu produsul cartezian $\mathbb{R} \times \Xi$, unde

$$\Xi = \{(f_1, f_2) \in \mathrm{C_{DP}}\,[0,1] \times \mathrm{C_{DP}}\,[0,1] : f_1\,(1) = f_2\,(1)\}\,.$$

5.1 Structuri de semiinel pe multimea $\mathfrak{F}_{\mathrm{c}}$

Fie $A = \left(a; \Theta_A^-, \Theta_A^+\right)$ şi $B = \left(b; \Theta_B^-, \Theta_B^+\right)$ două numere fuzzy. Construim următoarele operaţii:

$$\begin{aligned}
A + B &= \left(a + b;\ \Theta_A^- + \Theta_B^-,\ \Theta_A^+ + \Theta_B^+\right) \\
A \boxdot B &= \left(a \cdot b;\ \Theta_A^- \cdot \Theta_B^-,\ \Theta_A^+ \cdot \Theta_B^+\right) \\
A \boxtimes B &= \left(a \cdot b;\ \Theta_A^- \cdot \Theta_B^- + \Theta_A^+ \cdot \Theta_B^+,\ \Theta_A^- \cdot \Theta_B^+ + \Theta_A^+ \cdot \Theta_B^-\right)
\end{aligned}$$

Deoarece $\Theta_A^-, \Theta_A^+, \Theta_B^-$ şi Θ_B^+ sunt funcţii descrescătoare şi cu valori pozitive, atunci şi funcţiile $\Theta_{A\boxdot B}^-, \Theta_{A\boxdot B}^+, \Theta_{A\boxtimes B}^-$ şi $\Theta_{A\boxtimes B}^+$ sunt la fel, iar din $\Theta_A^-\,(1) = \Theta_A^+\,(1)$ şi $\Theta_B^-\,(1) = \Theta_B^+\,(1)$ obţinem că $\Theta_{A\boxdot B}^-\,(1) = \Theta_{A\boxdot B}^+\,(1)$ şi $\Theta_{A\boxtimes B}^-\,(1) = \Theta_{A\boxtimes B}^+\,(1)$. Aşadar, operaţiile de mai sus, sunt bine definite.

Teorema 5.1.1 [33] $(\mathfrak{F}_{\mathrm{c}}, +, \boxdot)$ *este un semiinel comutativ cu unitate iar* $(\mathfrak{F}_{\mathrm{c}}, +, \boxtimes)$ *este un semiinel comutativ.*

Observaţia 5.1.2 [33] *Dacă* $A, B \in \mathfrak{F}_c$, *atunci* $\Delta_{A+B} = \Delta_A + \Delta_B$ *şi* $\Delta_{A \boxtimes B} = \Delta_A \cdot \Delta_B$.

Observaţia 5.1.3 *Dacă* $a \in \mathbb{R}$ *este un număr real, numărul fuzzy "crisp"* $\widetilde{a}$ *are reprezentarea MCE* $\widetilde{a} = (a; \theta, \theta)$. *Deoarece* $\widetilde{a} + \widetilde{b} = \widetilde{a + b}$ *şi* $\widetilde{a} \boxdot \widetilde{b} = \widetilde{a} \boxtimes \widetilde{b} = \widetilde{a + b}$, *pentru orice* $a, b \in \mathbb{R}$, *corpul* $\mathbb{R}$ *a numerelor reale se scufundă în ambele semiinele* $(\mathfrak{F}_c, +, \boxdot)$ *şi* $(\mathfrak{F}_c, +, \boxtimes)$, *ca subsemiinel, dar unitatea lui* $\mathbb{R}$ *diferă de unitatea semiinelului* $(\mathfrak{F}_c, +, \boxdot)$.

De asemenea, grupul de unităţi al semiinelului $(\mathfrak{F}_c, +, \boxdot)$ *este format din toate intervalele netriviale de forma* $[a - x, a + x] = (a; x, x)$, *cu* $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ *şi* $x > 0$. *Evident, inversul lui* $(a; x, x)$ *este* $\left(\frac{1}{a}; \frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right) = \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{x}, \frac{1}{a} + \frac{1}{x}\right]$.

Exemplul 5.1.4 *Dacă*

$$\begin{aligned} A &= [t+2,\ 7-2t] = (4;\ 2-t,\ 3-2t) \\ B &= [3t+3,\ 9-t] = (7;\ 4-3t,\ 2-t) \end{aligned}$$

sunt două numere fuzzy, atunci

$$\begin{aligned} A \cdot B &= [(t+2)(3t+3), (7-2t)(9-t)] \\ &= \left(29;\ -3t^2 - 9t + 23, 2t^2 - 25t + 34\right) \\ A \boxdot B &= (28;\ (2-t)(4-3t), (3-2t)(2-t)) \\ &= \left[-3t^2 + 10t + 20, 2t^2 - 7t + 34\right] \\ A \boxtimes B &= \left(28;\ (2-t)(4-3t) + (3-2t)(2-t), (2-t)^2 + (3-2t)(4-3t)\right) \\ &= \left[-5t^2 + 17t + 14, 7t^2 - 21t + 44\right] \end{aligned}$$

unde $A \cdot B$ *este produsul uzual (definit prin* $A \cdot B = \left[x_A^- \cdot x_B^-,\ x_A^+ \cdot x_B^+\right]$*) şi* $A \boxdot B$, $A \boxtimes B$ *sunt cele două produse definite anterior. Acestea sunt reprezentate in Figura*

2

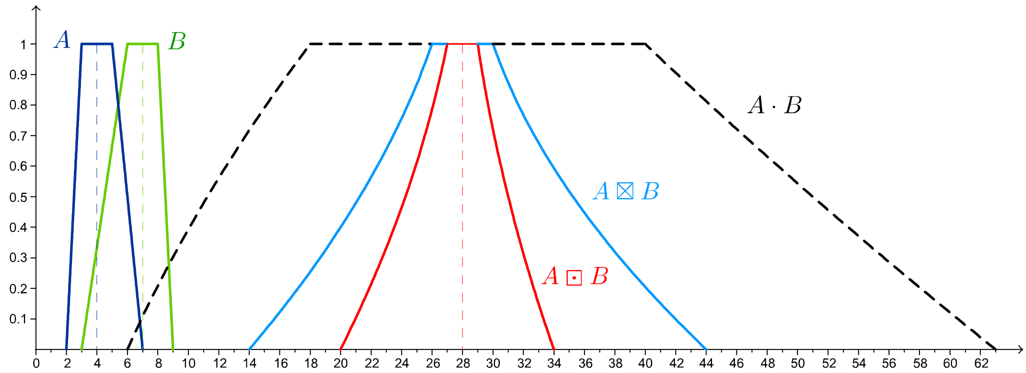


Figura 7.

.

Observaţia 5.1.5 *Dacă* $A = \left[x_A^-, x_A^+\right]$ *şi* $B = \left[x_B^-, x_B^+\right]$, *atunci*

1. $\begin{cases} x_{A+B}^- = x_A^- + x_B^- \\ x_{A+B}^+ = x_A^+ + x_B^+ \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x_{A\boxdot B}^- = ab - \Theta_{A\boxdot B}^- = a \cdot x_B^- + b \cdot x_A^- - x_A^- \cdot x_B^- \\ x_{A\boxdot B}^+ = ab + \Theta_{A\boxdot B}^+ = 2ab - a \cdot x_B^+ - b \cdot x_A^+ + x_A^+ \cdot x_B^+ \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x_{A\boxtimes B}^- = ab - \Theta_{A\boxtimes B}^- = a\left(x_B^- + x_B^+\right) + b\left(x_A^- + x_A^+\right) - x_A^- \cdot x_B^- - x_A^+ \cdot x_B^+ - ab \\ x_{A\boxtimes B}^+ = ab + \Theta_{A\boxtimes B}^+ = a\left(x_B^- + x_B^+\right) + b\left(x_A^- + x_A^+\right) - x_A^- \cdot x_B^+ - x_A^+ \cdot x_B^- - ab \end{cases}$.

Definiţia 5.1.6 [33] *Dacă* $\lambda \in \mathbb{R}$ *şi* $A \in \mathfrak{F}_c$, *definim înmulţirea cu scalari prin*

$$\lambda A = \left(\lambda \cdot a; |\lambda| \cdot \Theta_A^-, |\lambda| \cdot \Theta_A^+\right)$$

Observaţia 5.1.7 *Deoarece*

$$\begin{cases} x_{\lambda A}^- = \lambda a - |\lambda| \cdot \Theta_A^- = (\lambda - |\lambda|)\, a + |\lambda| \cdot x_A^- \\ x_{\lambda A}^+ = \lambda a + |\lambda| \cdot \Theta_A^+ = (\lambda - |\lambda|)\, a + |\lambda| \cdot x_A^+ \end{cases}$$

în cazul în care $\lambda \geq 0$, *înmulţirea cu scalari definită anterior coincide cu înmulţirea cu scalari uzuală, adică cu*

$$\lambda \cdot \left[x_A^-, x_A^+\right] = \left[\lambda \cdot x_A^-, \lambda \cdot x_A^+\right].$$

Propoziţia 5.1.8 [33] *Înmulţirea cu scalari are următoarele proprietăţi:*

1. $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$, *pentru orice* $\lambda \in \mathbb{R}$ *şi oricare* $A, B \in \mathfrak{F}_c$;

2. $\lambda(A \boxdot B) = (\lambda A) \boxdot B = A \boxdot (\lambda B)$, *pentru orice* $\lambda \in \mathbb{R}$ *şi oricare* $A, B \in \mathfrak{F}_c$;
3. $\lambda(A \boxtimes B) = (\lambda A) \boxtimes B = A \boxtimes (\lambda B)$, *pentru orice* $\lambda \in \mathbb{R}$ *şi oricare* $A, B \in \mathfrak{F}_c$;
4. $1 \cdot A = A$; $0 \cdot A = \overline{0}$;
5. $(\alpha + \beta) A \preccurlyeq \alpha A + \beta A$, *pentru oricare* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi orice* $A \in \mathfrak{F}_c$;
6. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \geq 0$.

5.2 Structura topologică a mulţimii $\mathfrak{F}_c$

Pentru fiecare număr fuzzy $A = \left(a; \Theta_A^-, \Theta_A^+\right) \in \mathfrak{F}_c$ definim $\langle A \rangle$ prin

$$\langle A \rangle = \sup_{t \in [0,1]} \max \left(\Theta_A^-(t), \Theta_A^+(t)\right)$$

Deoarece Θ_A^- şi Θ_A^+ sunt funcţii descrescătoare, cu valori pozitive, rezultă că

$$\langle A \rangle = \max \left(\Theta_A^-(0), \Theta_A^+(0)\right) \geq 0.$$

De asemenea, pentru fiecare $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, definim funcţiile $\|\cdot\|_n : \mathfrak{F}_c \to [0, +\infty)$, prin:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max(|a|, \langle A \rangle) \\ \|A\|_2 &= |a| + \langle A \rangle \\ \|A\|_3 &= \max(|a|, 2\langle A \rangle) \\ \|A\|_4 &= |a| + 2\langle A \rangle \end{aligned}$$

Propoziţia 5.2.1 [33] *Pentru orice* $A, B \in \mathfrak{F}_c$ *şi* $\lambda \in \mathbb{R}$, *au loc:*

1. $\|A\|_n = 0 \Leftrightarrow A = \overline{0}$ *pentru* $n \in \{1, 2, 3, 4\}$;
2. $\|A + B\|_n \leq \|A\|_n + \|B\|_n$, *pentru* $n \in \{1, 2, 3, 4\}$;
3. $\|A \boxdot B\|_n \leq \|A\|_n \cdot \|B\|_n$, *pentru* $n \in \{1, 2\}$;
4. $\|A \boxtimes B\|_n \leq \|A\|_n \cdot \|B\|_n$, *pentru* $n \in \{3, 4\}$;
5. $\|\lambda A\|_n = |\lambda| \cdot \|A\|_n$, *pentru* $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Teorema 5.2.2 [33] *Funcţia* $\mathrm{d} : \mathfrak{F}_c \times \mathfrak{F}_c \to [0, +\infty)$, *definită prin*

$$\mathrm{d}(A, B) = |a - b| + \sup_{t \in [0,1]} \max \left(\left|\Theta_A^-(t) - \Theta_B^-(t)\right|, \left|\Theta_A^+(t) - \Theta_B^+(t)\right|\right)$$

este o metrică (completă) pe $\mathfrak{F}_c$.

Propoziţia 5.2.3 [33] *Metrica* d *definită pe* $\mathfrak{F}_c$, *satisface următoarele proprietăţi:*

1. $\mathrm{d}(A+C,B+C)=\mathrm{d}(A,B)$;
2. $\mathrm{d}(A+C,B+D)\leq\mathrm{d}(A,B)+\mathrm{d}(C,D)$;
3. $\mathrm{d}(A\boxdot C,B\boxdot C)\leq\|C\|_1\cdot\mathrm{d}(A,B)\leq\|C\|_2\cdot\mathrm{d}(A,B)$;
4. $\mathrm{d}(A\boxtimes C,B\boxtimes C)\leq\|C\|_3\cdot\mathrm{d}(A,B)\leq\|C\|_4\cdot\mathrm{d}(A,B)$;
5. $\mathrm{d}(\lambda A,\lambda B)=|\lambda|\cdot\mathrm{d}(A,B)$;

pentru orice $A,B,C,D\in\mathfrak{F}_c$ *şi pentru orice* $\lambda\in\mathbb{R}$.

Definiţia 5.2.4 *Spunem că şirul* $(A_n)_{n\geq1}\subset\mathfrak{F}_c$ *converge la* $A\in\mathfrak{F}_c$ *dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{d}(A_n,A)=0$. *Vom folosi, în acest caz, notaţia* $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$.

Observaţia 5.2.5 *Dacă* $A_n=\left(a_n;\Theta^-_{A_n},\Theta^+_{A_n}\right)$ *şi* $A=\left(a;\Theta^-_A,\Theta^+_A\right)$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$, *dacă şi numai dacă*

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\\ \lim\limits_{n\to\infty}\Theta^-_{A_n}(t)=\Theta^-_A(t), & \forall\ t\in[0,1]\\ \lim\limits_{n\to\infty}\Theta^+_{A_n}(t)=\Theta^+_A(t), & \forall\ t\in[0,1]\end{cases}.$$

5.3 Câteva funcţii elementare definite pe $\mathfrak{F}_c$

Considerăm $\mathfrak{F}^*_c$, mulţimea

$$\mathfrak{F}^*_c=\left\{A=\left(a;\Theta^-_A,\Theta^+_A\right)\in\mathfrak{F}_c : a>0,\ \text{şi}\ \Theta^-_A(t),\Theta^+_A(t)\geq1,\ \forall\ t\in[0,1]\right\}.$$

Deoarece $\overline{1}\in\mathfrak{F}^*_c$ şi $A\boxdot B\in\mathfrak{F}^*_c$, pentru $A,B\in\mathfrak{F}^*_c$ rezultă că $(\mathfrak{F}^*_c,\boxdot)$ este un submonoid al lui $(\mathfrak{F}_c,\boxdot)$.
Definim funcţia exponenţială, $\exp:\mathfrak{F}_c\to\mathfrak{F}^*_c$, prin

$$A\longmapsto e^A=\left(e^a;\ e^{\Theta^-_A},e^{\Theta^+_A}\right)$$

şi funcţia logaritmică, $\ln:\mathfrak{F}^*_c\to\mathfrak{F}_c$, prin

$$A\longmapsto\ln A=\left(\ln a;\ \ln\circ\Theta^-_A,\ln\circ\Theta^+_A\right)$$

unde $A=\left(a;\Theta^-_A,\Theta^+_A\right)\in\mathfrak{F}_c$ şi " $\circ$ " este compunerea funcţiilor.

Propoziţia 5.3.1 [33] *Funcţiile* exp *şi* ln, *definite anterior, stabilesc izomorfismul dintre monoizii* $(\mathfrak{F}_c,+)$ *şi* $(\mathfrak{F}^*_c,\cdot)$, *iar* $\ln=\exp^{-1}$.

Observaţia 5.3.2 [33] *Dacă* $A^k = A \boxdot ... \boxdot A$ *(k− ori), atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\bar{1}+\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+...+\frac{A^n}{n!}\right)=e^A.$$

Definiţia 5.3.3 [33] *Dacă* $A=\left(a;\Theta_A^-,\Theta_A^+\right)$ *şi* $B=\left(b;\Theta_B^-,\Theta_B^+\right)$ *sunt două numere fuzzy, astfel încât:*

1. a^b *este definit* (*în* $\mathbb{R}$);

2. $\left(\Theta_A^-(t)\right)^{\Theta_B^-(t)}$ *şi* $\left(\Theta_A^+(t)\right)^{\Theta_B^+(t)}$ *sunt definite pentru fiecare* $t\in[0,1]$;

3. *funcţiile* $\left(\Theta_A^-\right)^{\Theta_B^-}$ *şi* $\left(\Theta_A^+\right)^{\Theta_B^+}$ *sunt descrescătoare;*

atunci definim puterea A^B, *prin* $A^B=\left(a^b;\left(\Theta_A^-\right)^{\Theta_B^-},\left(\Theta_A^+\right)^{\Theta_B^+}\right)$.

Observaţia 5.3.4 *De exemplu, dacă* $A\in\mathfrak{F}_c^*$, *atunci* A^B *poate fi construit pentru orice* $B\in\mathfrak{F}_c$.

Propoziţia 5.3.5 [33] *Dacă* $A\in\mathfrak{F}_c^*$ *şi* $B\in\mathfrak{F}_c$, *atunci:*

1. $A^{\bar{0}}=\bar{1}$ *şi* $A^{\bar{1}}=A$;

2. $A^{B+C}=A^B\boxdot A^C$ *şi* $A^{B\boxdot C}=\left(A^B\right)^C$.

Dacă $A=\left(a;\Theta_A^-,\Theta_A^+\right)\in\mathfrak{F}_c$, putem defini, pentru un întreg pozitiv n,

$$A^n=\underbrace{A\boxdot...\boxdot A}_{n}=\left(a^n;\left(\Theta_A^-\right)^n,\left(\Theta_A^+\right)^n\right),$$

şi,

$$\sqrt[n]{A}=\left(\sqrt[n]{a};\sqrt[n]{\Theta_A^-},\sqrt[n]{\Theta_A^+}\right)$$

(cu $a\ge 0$ dacă n este par).

Observaţia 5.3.6 [33] *Dacă* $A\in\mathfrak{F}_c$ *şi* $\operatorname{supp}A\subset(0,1)$, *adică* $\left[x_A^-(t),x_A^+(t)\right]\subset(0,1)$, $\forall t\in[0,1]$, *atunci, evident are loc şi* $\operatorname{supp}(A^n)=\operatorname{supp}(\underbrace{A\boxdot...\boxdot A}_{n-ori})\subset(0,1)$, *pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*$. *Astfel, pentru orice* $A\in\mathfrak{F}_c$ *cu* $\operatorname{supp}A\subset(0,1)$, *avem*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\bar{1}+A+...+A^n\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a},\frac{1-\left(\Theta_A^-\right)^{n+1}}{1-\Theta_A^-},\frac{1-\left(\Theta_A^+\right)^{n+1}}{1-\Theta_A^+}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1-a},\frac{1}{1-\Theta_A^-},\frac{1}{1-\Theta_A^+}\right)\overset{not.}{=}\frac{\bar{1}}{\bar{1}-A}\end{aligned}$$

Analog, tot pentru $A \in \mathfrak{F}_c$ *cu* $\operatorname{supp} A \subset (0,1)$ *obţinem*

$$\lim_{n\to\infty}\left(A + \frac{1}{2}\cdot A^2 + ... + \frac{1}{n}\cdot A^n\right) = \ln\left(\frac{\overline{1}}{\overline{1} - A}\right).$$

Menţionăm că $\dfrac{\overline{1}}{\overline{1} - A}$ *este doar o notaţie şi nu reprezintă inversul lui* $\overline{1} - A$, *aşa cum nici* $\overline{1} - A$ *nu reprezintă diferenţa dintre* $\overline{1}$ *şi* A.

Capitolul 6

Grupuri topologice pe mulţimi cât de numere fuzzy

6.1 Preliminarii

În acest capitol, notăm cu $\mathfrak{F}$, mulţimea acelor numere fuzzy pentru care funcţiile x_A^- şi x_A^+ (care definesc capetele mulţimilor de nivel) sunt continue. Astfel, mulţimea $\mathfrak{F}$ poate fi privită ca mulţimea elementelor de forma $A = \left[x_A^-, x_A^+\right]$, unde:

- $x_A^-, x_A^+ \in \mathrm{C}\,[0,1]$;
- x_A^- este crescătoare, iar x_A^+ este descrescătoare;
- $x_A^-(t) \leq x_A^+(t)$, pentru $t \in [0,1]$.

De asemenea, mai considerăm mulţimea $\mathfrak{F}_+$, a tuturor numerelor fuzzy strict pozitive $A \in \mathfrak{F}$ (i.e., $x_A^-(t) > 0$, pentru $t \in [0,1]$).

Considerăm mulţimile:

- $\mathrm{C}\,[a,b] -$ mulţimea tuturor funcţiilor (reale) continue, definite pe $[a,b]$;
- $\mathrm{C}_+\,[a,b] -$ mulţimea tuturor funcţiilor din $\mathrm{C}\,[a,b]$ cu valori strict pozitive;
- $\mathrm{BV}\,[a,b] -$ mulţimea tuturor funcţiilor cu variaţie mărginită, definite pe $[a,b]$;
- $\mathrm{BVC}\,[a,b] = \mathrm{C}\,[a,b] \cap \mathrm{BV}\,[a,b]$;
- $\mathrm{BVC}_+\,[a,b] = \mathrm{C}_+\,[a,b] \cap \mathrm{BV}\,[a,b]$.

În teoria funcţiilor cu variaţie mărginită, sunt binecunoscute următoarele rezultate:

Teorema 6.1.1 [69] *Dacă* $f, g \in \mathrm{BV}[a,b]$ *şi* $\lambda \in \mathbb{R}$, *atunci* $f \pm g,\ \lambda f,\ f \cdot g \in \mathrm{BV}[a,b]$. *Dacă în plus,* $\frac{1}{g}$ *este mărginită, atunci* $\frac{f}{g} \in \mathrm{BV}[a,b]$.

Teorema 6.1.2 [69] *O funcţie* $f \in \mathrm{C}[a,b]$ *este cu variaţie mărginită, dacă şi numai dacă, există două funcţii crescătoare* $f_1, f_2 \in \mathrm{C}[a,b]$, *astfel încât* $f = f_1 - f_2$.

Teorema 6.1.3 [53] *Dacă* $[a,b] \xrightarrow{f} [c,d] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *unde* $f \in \mathrm{BV}[a,b]$, *atunci* $g \circ f \in \mathrm{BV}[a,b]$, *dacă şi numai dacă, funcţia* g *satisface condiţia lui Lipschitz pe intervalul* $[c,d]$.

Propoziţia 6.1.4 *O funcţie continuă* $f \in \mathrm{C}_+[a,b]$ *este cu variaţie mărginită pe* $[a,b]$ *dacă şi numai dacă există două funcţii crescătoare* $\alpha, \beta \in \mathrm{C}_+[a,b]$, *astfel încât* $f = \frac{\alpha}{\beta}$.

Observaţia 6.1.5 *Dacă* $f \in \mathrm{BVC}[a,b]$, *atunci putem alege o funcţie crescătoare* $u \in \mathrm{C}[a,b]$ *şi o funcţie descrescătoare* $v \in \mathrm{C}[a,b]$, *astfel încât* $f = \frac{u+v}{2}$ *şi* $u(t) < v(t)$, *pentru* $t \in [a,b]$. *De asemenea, dacă* $f \in \mathrm{BVC}_+[a,b]$, *atunci putem alege o funcţie crescătoare* $u \in \mathrm{C}_+[a,b]$ *şi o funcţie descrescătoare* $v \in \mathrm{C}_+[a,b]$, *astfel încât* $f = \sqrt{u \cdot v}$ *şi* $u(t) < v(t)$, *pentru* $t \in [a,b]$.

Este binecunoscut faptul că $(\mathrm{BVC}[a,b], +)$ şi $(\mathrm{BVC}_+[a,b], \cdot)$ sunt grupuri topologice, topologia fiind cea indusă de metrica definită prin

$$\mathrm{D}(f,g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Mai mult, corespondenţa $f \mapsto e^f$ stabileşte un izomorfism topologic între grupurile (topologice) $\mathrm{BVC}[a,b]$ şi $\mathrm{BVC}_+[a,b]$.

6.2 Monoizi cu involuţii – considerente algebrice şi topologice

Fie $(M, \cdot)$ un semigrup. O involuţie pe M, este o operaţie unară $x \mapsto x^*$, astfel încât:

1. $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$;

2. $x^{**} = x$;

pentru orice elemente $x, y \in M$. Un element $x \in M$, care verifică proprietatea $x^* = x$, se numeşte element Hermitian.

Considerăm acum, clasa $\mathfrak{M}$ a tuturor sistemelor $(M, \cdot, e, ^*)$, unde $(M, \cdot, e)$ este un monoid comutativ cu simplificare, iar * este o involuţie pe M. Dacă $(M_1, \cdot, e_1, ^*)$ şi $(M_2, \bullet, e_2, ^\star)$ sunt din $\mathfrak{M}$, un morfism de monoizi $f : M_1 \to M_2$ care verifică

$$f(x^*) = (f(x))^\star, \quad \forall\, x \in M_1$$

îl vom numi $\mathfrak{M}$ - morfism.

Observaţia 6.2.1 *Dacă $(G, \cdot)$ este un grup abelian, atunci $(G, \cdot, 1, \cdot^{-1}) \in \mathfrak{M}$ şi orice morfism de grupuri abeliene este $\mathfrak{M}$ - morfism.*

Observaţia 6.2.2 *Dacă $(M, \cdot, e, ^*) \in \mathfrak{M}$, atunci mulţimea*

$$S(M) = \{x \in M : x^* = x\}$$

a tuturor elementelor Hermitiene ale lui M, este un submonoid a lui M şi verifică următoarele proprietăţi:

1. $x \in S(M) \Leftrightarrow x^* \in S(M)$;

2. $x \cdot x^* \in S(M), \forall\, x \in M$;

3. *dacă* $x, x \cdot y \in S(M)$, *atunci* $y \in S(M)$;

4. *dacă* $x, y \in M$, *atunci* $x \cdot y^* \in S(M) \Leftrightarrow x \cdot y^* = x^* \cdot y$.

Propoziţia 6.2.3 *Dacă $(M, \cdot, e, ^*) \in \mathfrak{M}$, atunci relaţia " $\sim_*$ " pe M, definită prin*

$$x \sim_* y \Longleftrightarrow x \cdot y^* \in S(M)$$

este o relaţie de congruenţă pe $(M, \cdot, e, ^*)$.

Pe mulţimea cât

$$M/_{\sim_*} = \widehat{M} = \{[x] : x \in M\},$$

unde

$$[x] = \{y \in M : x \cdot y^* = x^* \cdot y\}$$

este clasa de echivalenţă a elementului $x \in M$, considerăm operaţia indusă

$$[x] \odot [y] = [x \cdot y]$$

şi morfismul canonic $p : M \to \widehat{M}$, definit prin $x \mapsto [x]$.

Propoziţia 6.2.4 *Dacă* $(M,\cdot,e,^*) \in \mathfrak{M}$, *atunci* $\left(\widehat{M},\odot\right)$ *este un grup abelian, unde* $[e]=S(M)$ *este elementul neutru, iar inversul elementului* $[x]\in\widehat{M}$ *este* $[x^*]\in\widehat{M}$.

Observaţia 6.2.5 *Fie* $(M,\cdot,e,^*) \in \mathfrak{M}$. *Dacă există un grup abelian* $(G,\bullet)$ *şi un* $\mathfrak{M}-$*morfism surjectiv* $f:(M,\cdot,e,^*)\to(G,\bullet,1,\cdot^{-1})$, *astfel încât, pentru orice* $x,y\in M$,

$$x\sim_* y \Leftrightarrow f(x)=f(y)\,, \tag{6.1}$$

atunci (*din prima teoremă de izomorfism*) *funcţia* $\overline{f}:\widehat{M}\to G$, *definită prin* $[x]\mapsto f(x)$, *este un izomorfism de grupuri şi*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & G \\ \widehat{M} \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad \overline{f}\circ p=f.$$

Observaţia 6.2.6 *Dacă*

$$\ker f=\{(x,y)\in M\times M : f(x)=f(y)\}$$

este nucleul funcţiei f, *iar*

$$\operatorname{Ker} f=\{x\in M : f(x)=1\}$$

este nucleul morfismului f, *atunci condiţiile:* (6.1), $\ker f={\sim_*}$ *şi* $\operatorname{Ker} f=S(M)$, *sunt echivalente.*

Teorema 6.2.7 [34] *Fie* (M,d_1) *şi* (G,d_2) *două spaţii metrice. Dacă*

1. $(M,\cdot,e,^*,\tau_{\mathrm{d}_1})$ *este un monoid topologic comutativ cu involuţia continuă;*
2. $(G,\bullet,\tau_{\mathrm{d}_2})$ *este un grup topologic abelian;*
3. $f:M\to G$ *este un* $\mathfrak{M}$ - *morfism continuu;*

atunci $\left(\widehat{M},\widehat{\mathrm{d}}\right)$ *este un spaţiu metric, unde* $\widehat{\mathrm{d}}:\widehat{M}\times\widehat{M}\to\mathbb{R}$ *este definit prin*

$$\widehat{\mathrm{d}}([x],[y])=\mathrm{d}_2(f(x),f(y))\,,\qquad \forall\ [x],[y]\in\widehat{M}.$$

Mai mult, morfismul canonic $p:M\to\widehat{M}$ *este continuu, iar* $\left(\widehat{M},\odot,\tau_{\widehat{\mathrm{d}}}\right)$ *este un grup topologic abelian, care este topologic izomorf cu* $(G,\bullet,\tau_{\mathrm{d}_2})$.

6.3 Grupuri topologice definite pe mulţimi cât ale lui $\mathfrak{F}$

Reamintim că, dacă $A = \left[x_A^-, x_A^+\right] \in \mathfrak{F}$ şi $B = \left[x_B^-, x_B^+\right] \in \mathfrak{F}$, atunci suma lor se defineşte prin

$$A + B = \left[x_A^- + x_B^-, x_A^+ + x_B^+\right],$$

iar $-A$, prin $-A = \left[-x_A^+, -x_A^-\right]$. De asemenea, dacă $A, B \in \mathfrak{F}_+$, atunci produsul (uzual) este definit prin

$$A \cdot B = \left[x_A^- \cdot x_B^-, x_A^+ \cdot x_B^+\right]$$

iar A^{-1}, prin $A^{-1} = \dfrac{1}{A} = \left[\dfrac{1}{x_A^+}, \dfrac{1}{x_A^-}\right]$. Notăm $\overline{0} = [0, 0]$ şi $\overline{1} = [1, 1]$.

Metrica Hausdorff $\mathrm{d} : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \to [0, +\infty)$ pe mulţimea numerelor fuzzy, se defineşte prin

$$\mathrm{d}(A, B) = \sup_{t \in [0,1]} \left(\left| x_A^-(t) - x_B^-(t) \right| + \left| x_A^+(t) - x_B^+(t) \right| \right).$$

Propoziţia 6.3.1 [34] $\left(\mathfrak{F}, +, \overline{0}, -\right) \in \mathfrak{M}$ *şi* $\left(\mathfrak{F}_+, \cdot, \overline{1}, ^{-1}\right) \in \mathfrak{M}$. *Mai mult, sunt chiar monoizi topologici cu involuţii continue* (*relativ la topologiile induse de metrica* d).

Dacă $S_0 = \mathrm{S}\left(\mathfrak{F}, +, \overline{0}, -\right)$ şi $S_1 = \mathrm{S}\left(\mathfrak{F}_+, \cdot, \overline{1}, ^{-1}\right)$, atunci

$$S_0 = \{A \in \mathfrak{F} : A = -A\} = \left\{A \in \mathfrak{F} : x_A^- + x_A^+ = 0\right\}$$
$$S_1 = \left\{A \in \mathfrak{F}_+ : A = A^{-1}\right\} = \left\{A \in \mathfrak{F} : x_A^- \cdot x_A^+ = 1\right\}$$

şi relaţiile de congruenţă induse pe $\left(\mathfrak{F}, +, \overline{0}, -\right)$ şi $\left(\mathfrak{F}_+, \cdot, \overline{1}, ^{-1}\right)$ sunt definite prin

$$A \sim B \Leftrightarrow A + (-B) \in S_0 \Leftrightarrow x_A^- + x_A^+ = x_B^- + x_B^+$$

dacă $A, B \in \mathfrak{F}$, respectiv

$$A \approx B \Leftrightarrow A \cdot B^{-1} \in S_1 \Leftrightarrow x_A^- \cdot x_A^+ = x_B^- \cdot x_B^+$$

dacă $A, B \in \mathfrak{F}_+$. De asemenea, clasele de echivalenţă corespunzătoare sunt

$$[A] = \{B \in \mathfrak{F} : A \sim B\}$$

dacă $A \in \mathfrak{F}$, respectiv

$$\langle A \rangle = \{B \in \mathfrak{F}_+ : A \approx B\}$$

dacă $A \in \mathfrak{F}_+$.

Notăm în continuare cu $\widehat{\mathfrak{F}}$ şi $\widetilde{\mathfrak{F}}_+$ mulţimile cât corespunzătoare ($\mathfrak{F}/_\sim$ şi $\mathfrak{F}_+/_\approx$). Astfel,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{F}} &= \{[A] : A \in \mathfrak{F}\} \\ \widetilde{\mathfrak{F}}_+ &= \{\langle A\rangle : A \in \mathfrak{F}_+\}\,.\end{aligned}$$

Conform Propoziţiei 6.2.4, avem:

- $\left(\widehat{\mathfrak{F}}, \oplus\right)$ este un grup abelian cu operaţia definită prin $[A] \oplus [B] = [A + B]$. Elementul neutru este $\left[\overline{0}\right] = S_0$, iar opusul lui $[A] \in \widehat{\mathfrak{F}}$ este $-[A] = [-A]$;
- $\left(\widetilde{\mathfrak{F}}_+, \odot\right)$ este un grup abelian cu operaţia definită prin $\langle A\rangle \odot \langle B\rangle = \langle A \cdot B\rangle$. Elementul neutru este $\left\langle\overline{1}\right\rangle = S_1$, iar inversul lui $\langle A\rangle \in \widetilde{\mathfrak{F}}_+$ este $\langle A\rangle^{-1} = \langle A^{-1}\rangle$.

Teorema 6.3.2 [34] $\left(\widehat{\mathfrak{F}}, \oplus\right)$ *este un grup topologic metrizabil şi este topologic izomorf cu grupul* $(\mathrm{BVC}\,[0,1]\,, +)$.

Teorema 6.3.3 [34] $\left(\widetilde{\mathfrak{F}}_+, \odot\right)$ *este un grup topologic metrizabil şi este topologic izomorf cu grupul* $(\mathrm{BVC}_+\,[0,1]\,, \cdot)$.

Teorema 6.3.4 [34] $\left(\widehat{\mathfrak{F}}, \oplus\right) \cong_{\mathrm{top}} \left(\widetilde{\mathfrak{F}}_+, \odot\right)$.

Observaţia 6.3.5 *Clasa de echivalenţă* $[A] \in \widehat{\mathfrak{F}}$, *a numărului fuzzy* $A \in \mathfrak{F}$, *este definită de media aritmetică a lui* A, *respectiv, clasa de echivalenţă* $\langle A\rangle \in \widetilde{\mathfrak{F}}_+$, *a numărului fuzzy* $A \in \mathfrak{F}_+$, *este definită de media geometrică a lui* A. *Acestea sunt ilustrate (pentru un număr fuzzy pozitiv) în Figura* 8.

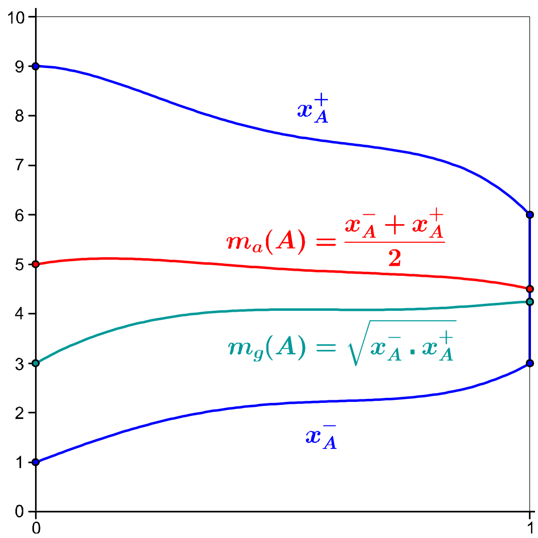


Figura 8.

Bibliografie

[1] FV.W. Anderson, K.R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Second Edition, Springer-Verlag, (1992) .

[2] D.D. Anderson, M. Winders, *Idealization of a module,* Journal of Commutative Algebra, Vol. 1, No. 1 (2009), $3-56$.

[3] A.I. Ban, B. Bede, *Properties of the cross product of fuzzy numbers*, Journal of Fuzzy Mathematics, 14 (2006), 513-531.

[4] A.I. Ban, A. Bica, *Solving systems of equivalentions*, J. Applied Math. & Computing 20 (1-2) (2006) 97-118.

[5] B. Bede, *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013

[6] B. Bede, J. Fodor, *Product type operations between fuzzy numbers and their applications in geology*, Acta Polytechnica Hungarica, 3(2006), 123-139.

[7] A. Bica, *Algebraic operations with fuzzy numbers*, Analele Univ. Oradea Fasc. Mat. 5 (1998) 11-29.

[8] A. Bica, *Categories and algebrical structures for real fuzzy numbers*, Pure Math. Appl. (PUMA) 13 (1-2) (2003) 63-77.

[9] A. Bica, *The fuzzy-classic interpolation,*. Analele Univ Oradea Fasc Mat, 11, (2004) 5-18

[10] A. Bica, *The error estimation in terms of the first derivative in a numerical method for the solution of a delay integral equation from biomathematics*, Rev. Anal. Numér. Théorie Approx. 34 (2005) 23-36.

[11] A.M. Bica, *Algebraic structures for fuzzy numbers from categorial point of view*, Soft Computing 11 (2007) 1099-1105.

[12] A.M. Bica, *Current applications of the method of successive approximations*, Oradea University Press, 2009.

[13] A. Bica, C. Iancu, *A numerical method in terms of the third derivative for a delay integral equation from biomathematics*, J. Inequalities Pure Applied Math. 6 (2) article 42 (2005) 1-18.

[14] B. Bouchon-Meunier , O. Kosheleva , V. Kreinovich , H. T. Nguyen, *Fuzzy numbers are the only fuzzy sets that keep invertible operations invertible*, Fuzzy Sets Syst. 91 (1997) 155-163.

[15] A.A. Bovdi, *The group of units of a group algebra of characteristic* p, Publ. Math. Debrecen, $52/1-2$ (1998), $193-244$.

[16] R. Brauer, *Über Systeme Hypercomplexer Zahlen*, Math. Z., 30 (1929), 79 - 107.

[17] R. Brauer e E. Noether, *Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen*, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, (1927), 221 - 228.

[18] G. A. Cannon, K. M. Neuerburg, *Ideals in Dorroh extensions of rings*, Missouri J. Math. Sci. 20, No. 3 (2008) $165-168$.

[19] S.H. Chen, *Operations of fuzzy numbers with step form membership function using function principle*, Inf. Sci. 108 (1-4) (1998) 149-155.

[20] I.G. Connell, On the Group Ring, Can. J. of Math., 15 (1963), 650 - 685.

[21] K.L. Cooke, J.L.Kaplan, *A periodicity threshold theorem for epidemics and population growth*, Math. Biosciences 31 (1976) 87-104.

[22] M. D'Anna, *A construction of Gorenstein rings*, J. Algebra 306 (2006), 507–519.

[23] M. D'Anna, M. Fontana, *An amalgamated duplication of a ring along an ideal: the basic properties*, J. Algebra Appl. 6 (2007), 443–459.

[24] M. D'Anna, M. Fontana, *The amalgamated duplication of a ring along a multiplicative-canonical ideal*, Arkiv Mat. 45 (2007), 241–252.

[25] M. Delgado, M.A. Vila, W. Voxman, *On a canonical representation of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets Syst. 93 (1998) 125-135.

[26] M.Demirci, *Products ofelements in vague semigroups and their implementations in vague arithmetic*, Fuzzy Sets Syst. 156 (2005) 93–123.

[27] L. Di Lascio , A. Gisolfi, *On the algebraic properties of some fuzzy numbers.* J Fuzzy Math 10 (1) (2002)151–168.

[28] J. L. Dorroh**,** *Concerning adjunctions to algebras*, Bull. Am. Math. Soc. 38 (1932), 85-88.

[29] D. Dubois, H. Prade, *Operations on fuzzy numbers*, Int. J. Syst. Sci. 9 (1978) 613-626.

[30] D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, Academic Press, NewYork, 1980.

[31] T.J. Dorsey, Z. Mesyan, *On minimal extensions of rings*, Commun. Algebra 37, No. 10 (2009), 3463-3486.

[32] K. Crow, *Simple regular skew group rings*, J. Algebra Appl. 4, No. 2, 127-137 (2005).

[33] **D. Fechete,** I. Fechete, *The ecart-representation of fuzzy numbers and fully distributive products,* (trimisă spre publicare).

[34] **D. Fechete,** I. Fechete, *Quotient algebraic structures on the set of fuzzy numbers,* (trimisă spre publicare).

[35] **D. Fechete,** *Some categorial aspects of the Dorroh extensions,* Acta Polytechnica Hungarica*,* 8(4) (2011) $149 - 160$.

[36] **D. Fechete,** I. Fechete, *Multivalued representation and new algebraic structures for fuzzy numbers*, Carpathian J. Math. (acceptată pentru publicare).

[37] **D. Fechete**, I. Fechete**,** *Norm extensions on the generalized semidirect products*, Analele Univ. Oradea, Fasc. Matematica,Tom XVII, Issue No. 1 (2010), $85-88$.

[38] I. Fechete, **D. Fechete,** *Some categorial aspects of the skew group rings*, Analele Univ. Oradea, Fascicola Matematica, Tom XVI (2009), $197 - 208$.

[39] I. Fechete, **D. Fechete**, A.M. Bica, *Semidirect products and near rings*, Analele Univ. Oradea, Fascicola Matematica, Tom XIV (2007), $211 - 219$.

[40] D. P. Filev, R.R. Yager, *Operations on fuzzy numbers via fuzzy reasoning*, Fuzzy Sets Syst. 91 (1997) 137-142.

[41] A. Froda, *Sur la distribution des proprietes de voisinage des functions de variables reelles*, These, Harmann, Paris, 3 December 1929.

[42] A. Gebhardt, *On types of fuzzy numbers and extension principles*, Fuzzy Sets Syst. 75 (1995) 311-318.

[43] R. E. Giachetti, R.E. Young, *A parametric representation of fuzzy numbers and their arithmetic operators*, Fuzzy Sets Syst. 91 (1997) 185-202.

[44] S. Glaz, *Commutative coherent rings*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1371, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[45] R. Goetschel, W. Voxman, *Elementary fuzzy calculus*, Fuzzy Sets Syst. 18 (1986) 31–43.

[46] A. Gonzalez , O. Pons, M.A. Vila, *Dealing with uncertainty and imprecision by means of fuzzy numbers*, International Journal of Approximate Reasoning 21 (1999) 233-256.

[47] M.L. Guerra, L. Stefanini, *Approximate fuzzy arithmetic operations using monotonic interpolations*, Fuzzy Sets Syst. 150 (2005) 5–33.

[48] M. Hanss, *Applied Fuzzy Arithmetic – An Introduction with Engineering Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[49] S. Heilpern, *The expected value of a fuzzy number*, Fuzzy Sets Syst. 47 (1992) 81–86.

[50] S. Heilpern, *Representation and application of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets Syst. 91 (1997) 259-268.

[51] G. Higman, *The units of group rings*, Proc. London Math. Soc, 2, 46 (1940), 231-248.

[52] D.H. Hong, E.L., Moon, J.D. Kim JD, *A note on the core of fuzzy numbers*, Appl. Math. Lett. 23, (2010) , 282 285.

[53] M. Josephy, Composing functions of bounded variation, Proc. Am. Math. Soc., 83 (1981) 354-356.

[54] J. Huckaba, *Commutative rings with zero divisors*, M. Dekker, New York, (1988).

[55] N. Jacobson, *Structure of rings*, A.M.S. Colloquium Publ., vol. 37, Providence, (1964).

[56] I. Kaplansky, *Rings and fields,* Chicago Lectures in Mathematics, (1969).

[57] I. Kaplansky, *Problems in the Theory of Rings*, Nas - NRC Publ. 502, Washington, 1957, pp. 1 - 3.

[58] I. Kaplansky, "*Problems in the Theory of Rings*" revisited, Amer. Math. Mothly, 77 (1970), 445 - 454.

[59] G.J. Klir, *Fuzzy arithmetic with requisite constraints*, Fuzzy Sets Syst. 91 (1997) 165–175.

[60] T.Y. Lam, *A first Course in Noncommutative Rings*, Second Edition, Springer-Verlag, (2001) .

[61] J. Lambek, *Lectures on Rings and Modules*, Blaisdell Publishing, (1966).

[62] S. Lang**,** *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 211 (Revised third ed.), Springer-Verlag, (2002).

[63] M. Ma, *On embedding problems of fuzzy number spaces: Part* 4, Fuzzy Sets Syst. 58 (1993) 185-193.

[64] M. Ma, M. Friedman, A. Kandel, *A new fuzzy arithmetic*, Fuzzy Sets Syst. 108 (1999) 83-90.

[65] M. Mareš, *Weak arithmetics of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets Syst. 91 (1997) 143-153.

[66] Z. Mesyan, *The ideals of an ideal extension*, J. Algebra Appl. 9, No. 3, 407-431 (2010).

[67] S. Montgomery, *Fixed Rings of Finite Automorphism Groups of Associative Rings*, Lecture Notes in Math. 818, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[68] M. Nagata, *Local Rings*, Interscience, New York, (1962).

[69] N. Natanson, *Theory of Real Variables*, Soviet Academic Press, Moscow (1950).

[70] C. Năstăsescu, *Teoria dimensiunii în algebra necomutativă*, Ed. Academiei, Bucureşti, (1983).

[71] E. Noether, *Hypercomplexe Gröşen und Darstellungtheorie*, Math. Z., 30, 1929, 641 - 692.

[72] D.S. Passman, *Infinite Group Rings,* Marcel Dekker, New York, (1971).

[73] D.S. Passman, *The Algebraic Structure of Group Rings*, Wiley-Interscience, New York, (1977).

[74] D.S. Passman, *Group Rings, Crossed Products and Galois Theory*, Regional Conference Series in Mathematics, No. 64, (1986).

[75] D.S. Passman, *Infinite crossed products*, Pure and Applied Mathematics, 135, Academic Press (1989).

[76] G. Pilz, *Near-Rings*, North-Holland Mathematical Studies 23, (1983).

[77] J.E. Pin, P. Weil, *Semidirect products of ordered semigroups*, Commun. Algebra 30, No.1 (2002), 149 – 169.

[78] F. C. Polcino Milies, *Group rings*, www.ime.usp.br/~polcino/group_rings/

[79] R. Precup, *Positive solutions of the initial value problem for an integral equation modelling infectious diseases*, Seminar Fixed Point Theory-Cluj Napoca 3 (1991) 25-30.

[80] I. Purdea, Gh. Pic, *Tratat de algebră modernă*, vol. I, Editura Academiei, Bucureşti, (1977).

[81] I. Purdea, *Tratat de algebră modernă*, vol. II, Editura Academiei, Bucureşti, (1982).

[82] P. Ribemboim, *Rings and Modules*, Interscience, New York, 1969.

[83] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill 1964.

[84] L. Salce, *Transfinite idealization and commutative rings of triangular matrices*, Commutative Algebra and Applications (Proceedings of the Fez 2008 Conference), de Gruyter (2009), 333 – 347.

[85] S.K. Sehgal, *Topics in Group Rings*, Marcel Dekker, New York, 1978.

[86] L. Stefanini, L. Sorini, M.L. Guerra, *Parametric representation of fuzzy numbers and applications to fuzzy calculus*, Fuzzy Sets Syst. 157 (2006) 2423-2455.

[87] L. Stefanini, L. Sorini, *Fuzzy Arithmetic with Parametric LR Fuzzy Numbers*, IFSA/EUSFLAT Conf. (2009) 600-605.

[88] S.K. Sehgal, *Topics in group rings*, M. Dekker, (1978).

[89] C. Wu, Z. Gong, *On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions* (I), Fuzzy Sets Syst. 120 (2001) 523-532.