UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

CERCETĂRI DE TEORIE MORSE CIRCULARĂ ŞI APLICAŢII

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Conducător ştiinţific:
Prof. univ. dr. DORIN ANDRICA

Doctorand:
DANA-MARIA MANGRA

CLUJ-NAPOCA
2013

Cuvinte cheie: punct critic, punct critic nedegenerat, funcţii Morse, funcţii Morse circulare, forme Morse, φ-categoria circulară a unei varietăţi, caracteristica Morse-Smale reală, caracteristica Morse-Smale circulară, complexul Morse-Smale, complexul Novikov, estimarea numărului de puncte critice.

Cuprins

Introducere

La începutul secolului trecut (1925), Marston Morse [51], [52], [53] a iniţiat studiul punctelor critice, deschizând calea teoriei Morse, o tehnică de investigare a topologiei unei varietăţi netede cu ajutorul punctelor critice ale unei funcţii reale definite pe acea varietate ([35], [44]).

Dezvoltarea teoriei Morse clasice, prin numeroase studii, de-a lungul anilor, a condus în mod natural şi la funcţii Morse circulare, adică funcţii de clasă C^∞ cu valori în S^1, care au doar puncte critice nedegenerate ([45], [56]).

Studiul acestor funcţii a fost iniţiat de S.P. Novikov în 1980 în lucrările [54], [55], pornind de la studiul unor probleme de hidrodinamică. Teoria Morse circulară, ca o nouă ramură a teoriei Morse clasice, a fost dezvoltată de către mulţi autori dintre care menţionăm pe M. Farber [32], [33], A. Ranicki [61] şi A. Pajitnov [56] în numeroase studii.

Lucrarea este structurată în 5 capitole care asigură unitatea conţinutului şi relevanţa tematicii cercetate. Lucrarea are la bază o bibliografie cu 86 referinţe.

Capitolul 1 este structurat în patru secţiuni şi are în principal un caracter monografic. Obiectivul principal al acestui capitol este de a prezenta, într-o formă succintă, noţiunile şi rezultatele de bază ce vor fi utilizate în capitolele următoare.

Acest capitol se bazează pe publicaţiile lui Y. Matsumoto [48], G. Cicortaş [27], J. Milnor [49], D. Andrica [3], R. Bott [23], [24], M. Agoston [1], J. Lee [44].

Capitolul 2 este format din patru secţiuni şi are un caracter monografic. Sunt prezentate noţiuni de teorie Morse circulară, definiţii şi proprietăţi ale acestor funcţii. Marea majoritate a notaţiilor folosite în teoria Morse clasică se păstrează şi pentru funcţii circulare.

Capitolul are la bază publicaţiile lui A. Pajitnov [56], M. Farber [32], M. Hutchings [40], S. Maksymenko [45], D. Andrica [3], R. Miron [50], M. Hirsch [39].

Capitolul 3 este structurat în 4 secţiuni. Prima secţiune este dedicată prezentării $\varphi_{\mathcal{F}}$-categoriei unei perechi de varietăţi diferenţiabile. Rezultatele proprii obţinute în studiul φ-categoriei circulare a unei varietăţi diferenţiabile sunt prezentate în secţiunea 2. În ultimele două secţiuni sunt prezentate rezultate importante în studiul caracteristicii Morse-Smale reale.

Capitolul se bazează pe lucrările lui D. Andrica [3], [4], G. Rassias [62], B. Doubrovine [30], D. Andrica, D. Mangra, C. Pintea [15].

Capitolul 4 este structurat în 5 secţiuni şi conţine rezultatele originale ale autorului obţinute în studiul caracteristicii Morse-Smale pentru funcţii Morse circulare, rezultate menţionate în lucrările D. Andrica, D. Mangra [12], [13] şi D. Andrica, D. Mangra, C. Pintea [14].

Capitolul 5 este structurat în patru secţiuni şi conţine aspecte cu caracter monografic referitoare la inegalităţile Morse-Novikov în cazul funcţiilor circulare, ([32], [56], [61]).

Nu aş vrea să închei această introducere fără a mulţumi domnului prof. univ. dr. Dorin Andrica, conducătorul meu ştiinţific, pentru observaţiile, sugestiile, sprijinul substanţial şi amabilitatea cu care a răspuns întotdeauna solicitărilor mele pe parcursul stagiului de elaborare a prezentei lucrări. Domnului conf. univ. dr. Cornel Pintea, îi adresez mulţumiri pentru observaţiile pertinente, sugestiile deosebit de utile şi ajutorul acordat în realizarea acestei lucrări.

Doresc de asemenea să adresez sincere mulţumiri membrilor Catedrei de Geometrie de la Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca, pentru încrederea şi sprijinul acordat în realizarea acestei teze.

Capitolul 1

Elemente de teorie Morse

Acest prim capitol are caracter introductiv, este structurat în patru secţiuni şi cuprinde o scurtă descriere a noţiunilor de bază ce vor fi utilizate.

Prima secţiune prezintă elemente de teorie Morse pe varietăţi finit dimensionale; ne vom referi aici doar la varietăţi netede ([49]). În acest context definim noţiunile de punct critic şi valoare critică, punct critic degenerat şi nedegenerat, funcţie Morse ([23], [24]). În plus, sunt prezentate câteva exemple de funcţii Morse şi proprietăţi ale acestora ([2], [27]).

Secţiunea 1.2 constituie o introducere în teoria funcţiilor Morse pe suprafeţe şi descompunerea unei varietăţi cu ajutorul mânerelor.

Ultimele două secţiuni sunt dedicate unei expuneri succinte a unor rezultate importante privind existenţa funcţiilor Morse şi inegalităţile lui Morse.

1.1 Elemente de teorie Morse pe varietăţi finit dimensionale

Fie M şi N varietăţi diferenţiabile netede de dimensiune m şi respectiv n şi fie $f : M \to N$ o funcţie netedă. Fie $x \in M$ un punct fixat. Amintim că rangul funcţiei f în x este

$$rang_x f = rang d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = rang J(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \leq \min\{m, n\},$$

unde (U, φ) este o hartă locală în x pe M, iar (V, ψ) este o hartă locală în $f(x)$ pe N.

Dacă $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^m)$ şi $f = (f^1, \ldots, f^n)$ putem scrie

$$rang_x f = rang \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(\varphi(x)) \right)_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}} = \dim \operatorname{Im}(df)_x.$$

Definiţia 1.1.1 Un punct $x \in M$ cu proprietatea că $rang_x f = \min\{m, n\}$ se numeşte **punct regular** al lui f. Altfel, x se numeşte **punct critic** al lui f.

Dacă M este o varietate m-dimensională fără bord şi $f : M \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă, un punct $p_0 \in M$ se numeşte punct critic al lui f dacă:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(p_0) = 0$$

unde $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ este un sistem local de coordonate în jurul lui p_0.

Un număr real c, astfel încât $f(p_0) = c$, se numeşte **valoare critică** a lui f corespunzătoare punctului critic p_0 al lui f.

Notăm cu $C(f) = \{p \in M : p \text{ este punct critic}\}$ *mulţimea punctelor critice ale funcţiei* f şi cu $B(f) = f(C(f))$, *mulţimea de bifurcaţie a funcţiei netede* f.

Dacă $p \notin C(f)$ atunci p este un *punct regular* al lui f. Numărul $c \in B(f)$ se numeşte *valoare critică* al lui f. Dacă $c \notin B(f)$, atunci c se numeşte *valoare regulară* a lui f.

Observaţia 1.1.1 1. Mulţimea critică $C(f)$ este închisă în M.
2. Mulţimea de bifurcaţie $B(f)$ este închisă în $\mathbb{R}$.

Teorema 1.1.1 (Teorema lui Sard) *Mulţimea valorilor critice ale unei funcţii netede* $f : M \to \mathbb{R}^m$ *este de măsura nulă în* $\mathbb{R}^m$.

Pentru demonstraţie se poate consulta lucrarea lui G. Cicortaş [27] sau Y. Matsumoto [48].

Propoziţia 1.1.1 ([48]) *Noţiunea de punct critic nu depinde de alegerea sistemului local de coordonate.*

Punctele critice degenerate şi nedegenerate pentru o funcţie pe o varietate m-dimensională sunt definite cu ajutorul matricei Hessiene a funcţiei.

Dacă matricea Hessiană este nesingulară, adică avem $detH_f(p_0) \neq 0$, atunci p_0 se numeşte **punct critic nedegenerat**.

Dacă avem $detH_f(p_0) = 0$, atunci p_0 se numeşte **punct critic degenerat**.

Definiţia 1.1.2 O funcţie netedă $f : M \to \mathbb{R}$ se numeşte **funcţie Morse** dacă toate punctele sale critice sunt nedegenerate.

Propoziţia 1.1.2 *Fie* M *şi* N *două varietăţi închise, adică sunt compacte şi fără bord,* $f : M \to \mathbb{R}$ *şi* $g : N \to \mathbb{R}$ *două funcţii Morse. Definim funcţia* $F : M \times N \to \mathbb{R}$ *prin* $F = (A + f)(B + g)$, *unde* A *şi* B *sunt numere reale pozitive. Funcţia* F *astfel definită este o funcţie Morse pe varietatea* $M \times N$.

Demonstraţia acestui rezultat se găseşte în [48].

Teorema 1.1.2 (Lema lui Morse pentru varietăţi finit dimensionale) *Fie* p_0 *un punct critic nedegenerat al funcţiei* $f : M \to \mathbb{R}$. *Există un sistem local de coordonate* $(X_1, \ldots, X_m)$ *în vecinătatea lui* p_0 *astfel încât reprezentarea locală a lui* f *să aibă următoarea formă:*

$$f = -X_1^2 - X_2^2 - \ldots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \ldots + X_m^2 + f(p_0).$$

Pentru demonstraţie se poate consulta lucrarea lui Y. Matsumoto [48].

Definiţia 1.1.3 Numărul λ de semne minus din reprezentarea canonică din Teorema 1.1.2 se numeşte **indexul Morse** al punctului critic nedegenerat p_0.

Indexul Morse verifică inegalitatea $0 \leq \lambda \leq m$. Punctele critice nedegenerate de index 0 sunt puncte de minim local, iar cele de index m sunt puncte de maxim local.

Din Teorema 1.1.2 se obţin imediat câteva rezultate importante.

Propoziţia 1.1.3 *Pe orice varietate compactă există cel puţin o funcţie Morse.*

Propoziţia 1.1.4 *Un punct critic nedegenerat al unei funcţii $f : M \to \mathbb{R}$ este izolat în mulţimea critică $C(f)$.*

Propoziţia 1.1.5 *Fie M o varietate compactă şi $f : M \to \mathbb{R}$ o funcţie Morse. Atunci mulţimea critică $C(f)$ este finită.*

Exemplul 1.1.1 Fie torul 2-dimensional $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ şi funcţia netedă (funcţia înălţime pe tor), $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z$. Aceasta este o funcţie Morse cu patru puncte critice toate nedegenerate.

1.2 Funcţii Morse pe suprafeţe şi descompunerea în mânere

Teorema 1.2.1 *Dacă M este o suprafaţă închisă şi $f : M \to \mathbb{R}$ o funcţie Morse cu exact 2 puncte critice nedegenerate, atunci varietatea M şi sfera S^2 sunt difeomorfe.*

Pentru demonstraţia acestui rezultat se poate consulta binecunoscuta carte a lui J. Milnor [49].

Funcţia Morse $f : M \to \mathbb{R}$ ia o valoare maximă în punctul critic nedegenerat p_0 în M şi o valoare minimă în punctul critic nedegenerat q_0 în M. Indexul lui p_0 este 2 şi indexul lui q_0 este 0.

Folosind lema lui Morse putem exprima funcţia f în forma standard, în raport cu sistemele locale de coordonate (x, y) în jurul lui p_0 şi (X, Y) în jurul lui q_0:

$$f = \begin{cases} -x^2 - y^2 + C & \text{(în vecinătatea lui } p_0) \\ X^2 + Y^2 + c & \text{(în vecinătatea lui } q_0) \end{cases}$$

unde C şi c sunt valorile maxime, respectiv minime ale funcţiei f.

Pentru un număr real suficient de mic ε notăm cu $D(p_0)$ mulţimea punctelor într-o vecinătate a lui p_0 astfel încât $C - \varepsilon \leq f(p) \leq C$ şi cu $D(q_0)$ mulţimea punctelor într-o vecinătate a lui q_0 astfel încât $c \leq f(p) \leq c + \varepsilon$.

Eliminând interiorul mulţimilor $D(p_0)$ şi $D(q_0)$ din suprafaţa M se obţine o suprafaţă netedă cu bord pe care o vom nota M_0. Notăm prin ∂M_0 bordul lui M_0. Acesta constă din cercurile de frontieră $C(p_0)$ şi $C(q_0)$ ale lui $D(p_0)$ şi $D(q_0)$. Se obţine astfel:

$$\partial M_0 = C(p_0) \cup C(q_0) \text{ şi } int(M_0) = M_0 - \partial M_0$$

Propoziţia 1.2.1 ([48]) *Suprafaţa M_0 este difeomorfă cu produsul direct dintre unul din cercurile de frontieră şi intervalul $[0, 1]$, adică avem $C(q_0) \times [0, 1]$. Deoarece cercul de frontieră $C(q_0)$ este difeomorf cu S^1, obţinem că $M_0 \cong S^1 \times [0, 1]$.*

Propoziţia 1.2.2 ([48]) *Fie discurile D_0 şi D_1. Dacă $k : \partial D_0 \to \partial D_1$ este un difeomorfism atunci k se poate extinde la un difeomorfism $K : D_0 \to D_1$.*

Propoziţia 1.2.3 ([48]) *Fie discurile D_1 şi D_2 şi un difeomorfism $h : \partial D_1 \to \partial D_2$. Atunci, lipind cele două discuri D_1 şi D_2 de-a lungul frontierei prin difeomorfismul h, se obţine o suprafaţă închisă difeomorfă cu sfera 2-dimensională S^2.*

Lema 1.2.1 ([48]) *O funcţie Morse $f : M \to \mathbb{R}$ pe o suprafaţă închisă M are un număr finit de puncte critice.*

Fie M o suprafaţă închisă şi o funcţie Morse $f : M \to \mathbb{R}$.

Notăm cu $M_t = \{p \in M \mid f(p) \leq t\}$, $t \in \mathbb{R}$, mulţimea de nivel t a lui M. Aceasta constă din toate punctele în care f ia valori mai mici sau egale cu t.

Lema 1.2.2 (Tronsonul necritic) *Fie $f : M \to [a, b]$ o funcţie Morse fără valori critice în intervalul $[a, b]$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a < b$. Atunci M_a şi M_b sunt difeomorfe.*

Pentru demonstraţie se pot consulta lucrările [3], [23].

Fie $f : M \to \mathbb{R}$ o funcţie Morse cu un număr finit de puncte critice $p_1, \ldots, p_n$,

$$f(p_i) = c_i.$$

Presupunem că $f(p_1) < f(p_2) < \ldots < f(p_n) \Rightarrow c_1 < c_2 < \ldots < c_n$.

Fie t un parametru real astfel încât dacă $t < c_1$. Atunci $M_t = \emptyset$ şi dacă $t > c_1$, indexul punctului critic p_0 este 0, c_1 este valoarea minimă a lui f, deci avem $M_t = D^2$.

Acest disc corespunzător punctului critic cu indexul 0 se numeşte 0-mâner.

Se continuă procedeul şi de fiecare dată când t traversează o valoare critică c_i se ataşează un 0, 1 sau 2-mâner, în funcţie de indexul punctului critic corespunzător p_i. Ultimei valori critice c_n îi corespunde un 2-mâner.

Teorema 1.2.2 *Fie M o suprafaţă închisă şi $f : M \to \mathbb{R}$ o funcţie Morse. Suprafaţa M poate fi reprezentată ca o reuniune finită de 0, 1 sau 2-mânere.*

Demonstraţia acestui rezultat fundamental se găseşte în [48].

1.3 Existenţa funcţiilor Morse

Folosim în continuare termenul de varietate închisă, prin care înţelegem o varietate compactă şi fără bord.

Lema 1.3.1 *Dacă $\mathbb{R}^m = \{(x_1, \ldots, x_m)\}$ este spaţiul euclidian m-dimensional, U o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^m$ şi $f : U \to \mathbb{R}^m$ o funcţie netedă pe U, atunci pentru orice $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$,*

$$g(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots x_m) - (a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m)$$

este o funcţie Morse pe U.

Pentru demonstraţia acestui rezultat se poate consulta lucrarea [48].

Pentru $\varepsilon > 0$, spunem că funcţia f este o (C^2, ε)-aproximare a funcţiei g pe submulţimea $K \subseteq \mathbb{R}^m$ dacă pentru orice punct p din K sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1. $|f(p) - g(p)| < \varepsilon$
2. $\left| \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(p) \right| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, m$

3. $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right| < \varepsilon$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

Acoperim varietatea M cu un număr finit de vecinătăţi de coordonate $U_1, \ldots, U_k$ şi pentru fiecare $i = 1, \ldots, s$, alegem o mulţime compactă K_i din U_i astfel încât

$$M = K_1 \cup \ldots \cup K_s.$$

Mulţimile K_i acoperă pe M.

Definiţia 1.3.1 Spunem că funcţia $f : M \to \mathbb{R}$ este o (C^2, ε)-**aproximare** a funcţiei $g : M \to \mathbb{R}$, dacă f este o (C^2, ε)-aproximare a lui g pe K_i pentru fiecare $i = 1, \ldots, s$.

Următoarele rezultate sunt demonstrate de Y. Matsumoto în [48].

Lema 1.3.2 *Dacă K este o submulţime compactă a unei varietăţi m-dimensionale M şi funcţia $g : M \to \mathbb{R}$ nu are niciun punct critic degenerat în K, atunci pentru un număr suficient de mic $\varepsilon > 0$, orice (C^2, ε)-aproximare f a lui g nu are niciun punct critic degenerat în K.*

Teorema 1.3.1 (Existenţa funcţiilor Morse) *Fie M o varietate închisă de dimensiune m şi $g : M \to \mathbb{R}$ o funcţie reală netedă pe M. Atunci există o funcţie Morse $f : M \to \mathbb{R}$ care aproximează pe g.*

1.4 Inegalităţile lui Morse

Vom urmări prezentarea din monografia lui G. Cicortaş [27].

Teorema 1.4.1 *Fie $f : M \to \mathbb{R}$ o funcţie Morse astfel încât sunt satisfăcute condiţiile de compactitate. Fie $B[f] \cap (a, b) = \{c\}$ şi $C_c[f] = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, punctul critic p_i având indexul k_i şi coindexul l_i, $i = \overline{1, r}$. Atunci M_b se obţine din M_a prin ataşările disjuncte de mânere de tip $(k_1, l_1), \ldots, (k_r, l_r)$.*

Între topologia varietăţii M şi punctele critice ale unei funcţii $f : M \to \mathbb{R}$ care satisface anumite ipoteze naturale, se stabilesc relaţii ce se pot descrie în termenii unor inegalităţi.

Vom nota cu $H_*(X, A) = H_*(X, A; F)$ omologia relativă cu coeficienţi din F.

Definiţia 1.4.1 Fie Y un subspaţiu închis al unui spaţiu X şi $G : D^k \to X$ o aplicaţie continuă, $G(D^k) = e^k$. Scriem $X = Y \cup_g e^k$ şi spunem că X se obţine din Y prin ataşarea unei k-celule cu aplicaţia de ataşare $g = G|_{S^{k-1}}$ dacă:

i. $X = Y \cup e^k$

ii. $G|_{intD^k}$ este omeomorfism pe $e^k \setminus Y$

iii. g aplică S^{k-1} pe $\partial e^k = e^k \cap Y$.

G se numeşte aplicaţia caracteristică a ataşării.

Propoziţia 1.4.1 *Dacă X se obţine din Y prin ataşarea unei k-celule, atunci*

$$H_l(X, Y) = H_l(e^k, \partial e^k) = H_l(D^k, S^{k-1}) = \begin{cases} F, & \textit{dacă } l = k \\ 0, & \textit{altfel} . \end{cases}$$

Pentru demonstraţia acestui rezultat se poate consulta lucrarea lui G. Cicortaş [27].

Fie K o submulţime convexă a lui $\mathbb{R}^n$ şi A o submulţime închisă a lui K. Dacă r este o retracţie a lui K pe A, atunci $\rho(x,t) = (1-t)x + tr(x)$ este o retracţie tare de deformare a lui K pe A. Se observă că mulţimea $(0 \times D^k) \cup (D^l \times S^{k-1})$ este retract tare de deformare al lui $D^l \times D^k$. Într-adevăr, $D^l \times D^k$ fiind submulţime convexă a lui $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^K$, este suficient să definim o retracţie $r : D^l \times D^k \to (0 \times D^k) \cup (D^l \times S^{k-1})$. Definim $r(0,y) = (0,y)$, iar pentru $x \neq 0$ luăm

$$r(x,y) = \begin{cases} \left(0, \frac{2\|y\|}{2-\|x\|}\right), & \text{dacă } \parallel y \parallel \leq 1 - \frac{\|x\|}{2} \\ \left((\parallel x \parallel + 2 \parallel y \parallel - 2)\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right), & \text{altfel .} \end{cases}$$

Teorema 1.4.2 *Fie N şi P două varietăţi netede cu bord. Dacă N se obţine din P prin ataşarea unui mâner de tip (k,l), atunci $P \cup_g e^k$ este un retract tare de deformare al lui N. În particular,*

$$H_l(N,P) = \begin{cases} F, & \text{dacă } l = k \\ 0, & \text{altfel .} \end{cases}$$

Pentru demonstraţia acestui rezultat se poate consulta lucrarea lui G. Cicortaş [27].

În cazul ataşării disjuncte de mânere de tip $(k_1,l_1),\ldots,(k_r,l_r)$, se obţine ataşarea disjunctă a celulelor $e^{k_1},\ldots,e^{k_r}$.

Fie o familie de subspaţii închise X_i, $i = \overline{0,n}$ ale lui X astfel încât

$$A = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq X$$

şi X_{i+1} este omeomorf cu $X_i \cup_{g_i} e^{k_i}$. Perechea (X,A) se numeşte complex sferic relativ, iar familia aplicaţiilor de ataşare se numeşte descompunere celulară a perechii (X,A).

Dacă X_{i+1} este doar omotopic echivalent cu $X_i \cup_{g_i} e^{k_i}$, vom numi perechea (X,A) complex sferic omotopic (descompunere celulară omotopică).

Vom nota cu ν_i numărul de celule $e^{k_0},\ldots,e^{k_n-1}$ cu $k_j = i$. Astfel, ν_i este numărul celulelor de dimensiune i ce trebuie ataşat subspaţiului A pentru a obţine X.

Fie $f : M \to \mathbb{R}$ o funcţie Morse. Pentru $0 \leq k \leq m$ definim numerele Morse

$$\mu_k(f) = \text{numărul punctelor critice de index } k.$$

Pentru $a < b$ definim

$$\mu_k(f,a,b) = \text{numărul punctelor critice de index } k \text{ în } f^{-1}(a,b).$$

Teorema 1.4.3 *Fie M o varietate riemanniană completă, $f : M \to \mathbb{R}$ o funcţie Morse ce satisface condiţia Palais-Smale pe M şi fie $a < b$ valori regulare ale lui f.*

Atunci (M_b,M_a) este un complex sferic omotopic. De fapt, (M_b,M_a) admite o descompunere celulară omotopică pentru care numărul ν_k al celulelor de dimensiune k este $\mu_k(f,a,b)$.

Corolarul 1.4.1 *Orice varietate netedă compactă M este un complex sferic omotopic. Pentru orice funcţie Morse $f : M \to \mathbb{R}$ există o descompunere celulară omotopică a lui M astfel încât $\nu_k = \mu_k(f)$.*

Considerăm, în continuare, perechi admisibile de spaţii topologice (X, A), altfel spus (X, A) este un complex sferic omotopic. Pentru un corp comutativ fixat F şi o pereche (X, A) dată, definim numerele Betti

$$b_k(X, A) = \dim\ H_k(X, A; F)$$

şi caracteristica Euler-Poincaré a perechii (X, A),

$$\chi(X, A) = \sum_k (-1)^k b_k(X, A).$$

Fie

$$S_k(X, A) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} b_m(X, A).$$

Egalităţile următoare sunt evidente:

$$\begin{aligned}
&S_0 = b_0\\
&S_1 = b_1 - b_0 = b_1 - S_0\\
&\dots\\
&S_k = b_k - b_{k-1} + \dots \pm b_0 = b_k - S_{k-1}\\
&\chi = b_0 - b_1 + b_2 - \dots
\end{aligned}$$

Propoziţia 1.4.2 *Caracteristica Euler-Poincaré este aditivă, iar S_k este subaditivă. Dacă $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n$ şi orice pereche (X_i, X_{i-1}) este admisibilă, atunci avem:*

$$S_k(X_n, X_0) \le \sum_{i=1}^{n} S_k(X_i, X_{i-1})$$

$$\chi(X_n, X_0) = \sum_{i=1}^{n} \chi(X_i, X_{i-1}).$$

Pentru demonstraţia acestui rezultat se poate consulta lucrarea lui G. Cicortaş [27].

Teorema 1.4.4 *Fie (X, A) un complex sferic omotopic ce admite o descompunere celulară omotopică cu ν_k celule de dimensiune k. Au loc următoarele inegalităţi:*

$$\begin{aligned}
&b_0 \le \nu_0\\
&b_1 - b_0 \le \nu_1 - \nu_0\\
&\dots\\
&b_k - b_{k-1} + \dots \pm b_0 \le \nu_k - \nu_{k-1} + \dots \pm \nu_0.
\end{aligned}$$

În plus, are loc identitatea:

$$\chi(X, A) = \sum_k (-1)^k b_k = \sum_k (-1)^k \nu_k.$$

Demonstraţia se poate consulta în lucrarea lui G. Cicortaş [27].

Corolarul 1.4.2 *Fie M o varietate riemanniană completă, $f : M \to \mathbb{R}$ o funcţie Morse ce satisface condiţia Palais-Smale pe M şi fie $a < b$ valori regulare ale lui f. Fie $\mu_k = \mu_k(f, a, b)$ şi $b_k = b_k(M_b, M_a)$. Atunci au loc:*

1. *inegalităţile lui Morse:*

$$\begin{aligned}
& b_0 \leq \mu_0 \\
& b_1 - b_0 \leq \mu_1 - \mu_0 \\
& \dots \\
& b_k - b_{k-1} + \ldots \pm b_0 \leq \mu_k - \mu_{k-1} + \ldots \pm \mu_0
\end{aligned}$$

2. *formula lui Euler:*

$$\chi(X, A) = \sum_k (-1)^k b_k = \sum_k (-1)^k \nu_k$$

3. *inegalităţile lui Morse în forma slabă:* $b_k \leq \mu_k$.

Capitolul 2

Teorie Morse circulară

Acest capitol conţine elemente de teorie Morse circulară, definiţii şi proprietăţi ale acestor funcţii. Marea majoritate a notaţiilor folosite în teoria Morse clasică se păstrează şi pentru funcţii circulare ([40], [56]).

2.1 Funcţii Morse circulare

Fie M^m o varietate fără bord şi $f : M \to S^1$ o funcţie netedă. Cercul

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

este o subvarietate 1-dimensională a lui $\mathbb{R}^2$ şi este înzestrat cu structura netedă corespunzătoare.

Pentru un punct $x \in M$ alegem o vecinătate V a lui $f(x)$ în S^1, difeomorfă cu un interval deschis din $\mathbb{R}$. Notăm $U = f^{-1}(V)$. Funcţia $f|_U$ se identifică astfel cu o funcţie netedă de la U la $\mathbb{R}$.

Definiţia 2.1.1 O funcţie circulară netedă $f : M \to S^1$ se numeşte **funcţie Morse**, dacă toate punctele sale critice sunt nedegenerate.

Notăm cu $C(f)$ mulţimea punctelor critice ale funcţiei f şi cu $C_k(f)$ mulţimea punctelor critice de index k, unde $k = 0, ..., m$.

Dacă M este o varietate compactă, atunci mulţimea punctelor critice $C(f)$ este finită; în acest caz notăm cu $\mu(f)$ cardinalul mulţimii $C(f)$ şi cu $\mu_k(f)$ cardinalul mulţimii $C_k(f)$, pentru $k = 0, ..., m$. Se observă uşor că

$$\mu(f) = \mu_0(f) + ... + \mu_m(f).$$

Este binecunoscut faptul că spaţiul cât $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ este omeomorf cu cercul S^1 prin omeomorfismul $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$, unde $f(\widehat{x}) = e^{2\pi ix}$. Astfel putem identifica cercul S^1 cu grupul factor $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ şi funcţiile circulare pot fi considerate ca funcţii reale cu valori vectoriale ([40], [56]).

În studiul acestor funcţii vom considera o acoperire a domeniului de definiţie a funcţiei astfel încât acestea să devină funcţii cu o singură valoare pe acoperire ([45], [54]).

Fie funcţia de acoperire universală a cercului:

$$\exp : \mathbb{R} \to S^1, \quad \exp(t) = e^{2\pi it}.$$

Funcţia exponenţială $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, definită prin $\exp(t) = e^{2\pi i t}$ este o proiecţie de acoperire şi implicit un omeomorfism local ([50]).

Spaţiul $\mathbb{R}$ împreună cu aplicaţia exponenţială exp este spaţiul de acoperire a cercului S^1.

Fibra acoperirii este subgrupul $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ care acţionează pe $\mathbb{R}$ prin translaţii, observaţie importantă în studiul funcţiilor Morse circulare.

Folosim notaţia multiplicativă pe $\mathbb{Z}$ şi notăm cu t generatorul ce corespunde lui -1 în notaţia aditivă.

Pentru o funcţie Morse circulară $f : M \to S^1$, $\overline{M}$ spaţiu de acoperire pentru M, fie $\pi : \overline{M} \to M$ funcţia de acoperire ciclică infinită indusă din funcţia de acoperire universală a cercului $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, de funcţia f. Din definiţia acoperirii induse obţinem funcţia $\overline{f} : \overline{M} \to \mathbb{R}$, care face comutativă următoarea diagramă:

$$\begin{tikzcd}
\overline{M} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\
M \arrow[r, "f"] & S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

În unele cazuri $\overline{M}$ poate fi considerată ca o submulţime a produsului $M \times \mathbb{R}$.

Funcţia f are proprietatea de ridicare (liftare) la o funcţie Morse $\mathbb{Z}$-echivariantă

$$\overline{f} : \overline{M} = f^*\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

pe acoperirea ciclică infinită ([40]).

Aici f este o funcţie Morse dacă şi numai dacă $\overline{f}$ este o funcţie Morse în sens clasic. Funcţia $\overline{f}$ este echivariantă în raport cu acţiunea lui $\mathbb{Z}$ pe $\overline{M}$ şi $\mathbb{R}$, relaţia următoare fiind adevărată $\overline{f}(tx) = \overline{f}(x) - 1$.

Cu toate că $\overline{f}$ este o funcţie Morse cu valori reale, teoria Morse standard nu poate fi aplicată aici deoarece domeniul de definiţie al funcţiei $\overline{f}$ nu este compact.

O modalitate de a depăşi aceste neajunsuri este de a considera restricţia lui $\overline{f}$ la un domeniu fundamental a lui $\overline{M}$ în raport cu acţiunea grupului $\mathbb{Z}$.

Fie $a \in \mathbb{R}$ o valoare regulară a lui $\overline{f}$. Mulţimea $W = \overline{f}^{-1}([a-1, a])$ este un cobordism compact cu următoarele proprietăţi:

$$\partial_1 W = \overline{f}^{-1}(a) \quad \text{şi} \quad \partial_0 W = \overline{f}^{-1}(a-1).$$

Mulţimea W se numeşte cobordismul fundamental.

Pentru funcţia Morse $\overline{f}|_W : W \to [a-1, a]$, cobordismul W poate fi descris astfel: fie $\alpha = \exp(a) \in S^1$, deci α este o valoare regulară a lui f şi $V = f^{-1}(\alpha)$ este o subvarietate netedă a lui M. Dacă se taie varietatea M de-a lungul lui V se obţine cobordismul W cu ambele componente ale frontierei difeomorfe cu V.

Un studiu amănunţit al funcţiilor circulare se găseşte în lucrarea lui A. Pajitnov [56].

2.2 Forme Morse

S.P. Novikov a iniţiat o generalizare a teoriei Morse în care în loc de puncte critice se operează cu 1-forme închise ([54], [55]).

Definiţia 2.2.1 Dacă M este o varietate netedă închisă, o 1-formă ω pe M,

$$\omega : M \to T^*(M),$$

este o **secţiune netedă** a fibratului cotangent $\pi^* : T^*(M) \to M$ astfel încât

$$\omega \circ \pi^* = 1_M.$$

Notăm cu $\Omega^1(M)$ mulţimea 1-formelor pe varietatea M. În coordonate locale $x_1, x_2, \ldots, x_m$ într-o submulţime deschisă $U \subset M$ orice 1-formă ω se poate scrie ca

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_m dx_m,$$

unde $a_1, \ldots, a_m$ sunt funcţii netede cu valori reale definite pe U.

Operatorul d de diferenţiere exterioară este definit prin:

$$d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M),\ f \to df,$$

unde $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ şi

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^{m} da_i \wedge dx_i = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \cdot dx_i \wedge dx_j. \end{aligned}$$

O 1-formă ω se numeşte **închisă** dacă $d\omega = 0$.

Observaţia 2.2.1 Condiţia ca ω să fie o formă închisă se poate scrie

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j},\ \text{pentru orice } i, j = 1, \ldots, m.$$

Definiţia 2.2.2 Un punct $p \in M$ astfel încât $\omega_p = 0$ se numeşte **zerou** al 1-formei ω. Definim mulţimea zerourilor lui ω prin

$$Z(\omega) = \{p \in M : \omega_p = 0\}.$$

Observaţia 2.2.2 Dacă ω este o 1-formă închisă, adică are loc relaţia $d\omega = 0$, atunci există o funcţie netedă $f_U : U \to \mathbb{R}$ astfel încât $\omega|_U$ este o 1-formă exactă, $\omega|_U = df_U$, pentru orice domeniu simplu conex $U \subset M$. Zerourile lui ω în U sunt chiar punctele critice ale lui f_U.

Se observă că în această generalizare a teoriei Morse, punctele critice ale funcţiilor reale corespund zerourilor 1-formelor ([32]).

Definiţia 2.2.3 Un punct $p \in Z(\omega) \cap U$ este **zerou nedegenerat** al formei ω dacă p este un punct critic nedegenerat pentru orice funcţie $f_U : U \to \mathbb{R}$, care satisface relaţia $df_U = \omega_U$ ([39]).

Definiţia 2.2.4 Fie $\omega \in \Omega^1(M)$:

1. 1-forma închisă ω se numeşte **formă Morse** dacă toate zerourile sale sunt nedegenerate.

2. Dacă ω este o formă Morse, $p \in Z(\omega)$, spunem că p are **indexul Morse** k, $(0 \leq k \leq n)$ dacă p este un punct critic de index k al lui f_U.

Exemplul 2.2.1 Fie $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\omega \in \Omega^1(M)$, unde ω este 1-forma unghi definită prin

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Notăm $\omega|_{S^1} = d\theta \in \Omega^1(S^1)$. Observăm că $d\theta$ este local exactă pe M dar nu este exactă şi avem

$$Z(d\theta) = \emptyset.$$

Funcţia $f : M \to S^1$ induce aplicaţia $f^* : \Omega^1(S^1) \to \Omega^1(M)$, unde $\eta = f^*(d\theta)$ este o 1-formă închisă în $\Omega^1(M)$.

Prezentăm câteva noţiuni generale despre 1-forme închise.

Grupul de coomologie de Rham, notat $H^1_{deRham}(M)$, este prin definiţie câtul dintre spaţiul tuturor 1-formelor închise şi subspaţiul formelor exacte, unde operatorul de diferenţiere exterioară coincide cu diferenţiala funcţiilor reale definite pe M.

Se obţine izomorfismul:

$$H^1(M, \mathbb{R}) \approx H^1_{deRham}(M)$$

între grupul de coomologie de Rham şi grupul de coomologie singulară cu coeficienţi reali.

O caracteristică importantă a 1-formelor închise este clasa de coomologie de Rham.

Pentru o 1-formă închisă ω, imaginea sa în grupul $H^1(M, \mathbb{R}) = \dfrac{Kerd^1}{Imd^0}$,

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(M)$$

se numeşte *clasa de coomologie de Rham a lui* ω şi se notează $[\omega]$.

Forma ω este exactă ($\omega \in Imd^0$) dacă şi numai dacă $[\omega] = 0$.

Numeroase exemple de 1-forme închise sunt date de către funcţiile netede circulare.

1-forma dx pe $\mathbb{R}^1$ este invariantă în raport cu acţiunea lui $\mathbb{Z}$ pe $\mathbb{R}$ şi defineşte 1-forma pe $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, notată tot prin dx.

Clasa de coomologie de Rham a lui dx este imaginea generatorului $t \in H^1(S^1, \mathbb{Z})$ în raport cu aplicaţia de incluziune $H^1(S^1, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^1(S^1, \mathbb{R})$.

Dacă $f : M \to S^1$ este o funcţie netedă circulară, notăm $df = f^*(dx)$.

Atunci df este o 1-formă închisă pe M, numită diferenţiala funcţiei f. Forma df este o formă Morse dacă şi numai dacă f este o funcţie Morse circulară.

Propoziţia 2.2.1 ([56]) *Clasa de omotopie a unei funcţii circulare $f : M \to S^1$ de clasă C^∞ este determinată de clasa de coomologie de Rham $[df]$ a diferenţialei funcţiei.*

Lema 2.2.1 ([56]) *Dacă $\omega \in \Omega^1(M)$ este o 1-formă închisă, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i. $\omega = df$ unde $f : M \to S^1$ este o funcţie de clasă C^∞;

ii. $[\omega]$ este integrabilă.

Fie M o varietate şi $\xi \in H^1(M,\mathbb{R})$. Notăm cu L_ξ mulţimea tuturor 1-formelor închise ω care au clasa de coomologie de Rham egală cu ξ, adică avem $[\omega] = \xi$.

Spunem că o 1-formă închisă ω pe o varietate M este **regulară** pe $U \subset M$ (sau **U-regulară**) dacă fiecare zerou $p \in U$ a lui ω este nedegenerat.

Teorema 2.2.1 ([56]) *Dacă M este o varietate, $\xi \in H^1(M,\mathbb{R})$ şi $U \subset M$ o submulţime compactă, atunci submulţimea tuturor 1-formelor regulare pe U este deschisă şi densă în L_ξ.*

Teorema 2.2.2 ([56]) *Dacă M este o varietate închisă, atunci mulţimea tuturor funcţiilor Morse $f : M \to \mathbb{R}$ este deschisă şi densă în mulţimea tutror funcţiilor de clasă C^∞.*

2.3 Gradientul funcţiilor Morse

Fie M o varietate netedă şi v un câmp de vectori pe M. Orice funcţie $\gamma : I \to M$ de clasă C^1 definită pe un interval deschis $I \subset \mathbb{R}$ care satisface condiţia:

$$\gamma'(t) = v(\gamma(t)) \text{ pentru orice } t \in I$$

se numeşte *curbă integrală* a lui v.

Fie M o varietate fără frontieră şi $f : M \to \mathbb{R}$ o funcţie Morse. Fie v un C^∞-câmp de vectori pe M care satisface condiţia:

$$f'(x)(v(x)) > 0, \text{ pentru orice } x \notin C(f). \tag{2.3.1}$$

Funcţia $\phi(x) = f'(x)(v(x))$ se anulează pe $C(f)$ şi este strict pozitivă pe $M \setminus C(f)$. Fiecare punct $p \in C(f)$ este un punct de minim local al funcţiei ϕ, $\phi'(p) = 0$.

Definiţia 2.3.1 Un câmp de vectori v se numeşte ***f*-gradient** dacă este satisfăcută condiţia (2.3.1) şi fiecare punct $p \in C(f)$ este un minim nedegenerat al funcţiei

$$\phi(x) = f'(x)(v(x)),$$

adică derivata de ordinul doi $\phi''(p)$ este o formă biliniară nedegenerată pe $T_p(M)$.

Notăm cu $G(f)$ mulţimea tuturor f-gradienţilor.

Lema 2.3.1 ([56]) *Dacă v este un f-gradient şi $p \in C(f)$ atunci $v(p) = 0$.*

Definiţia 2.3.2 Fie M o varietate fără frontieră şi $f : M \to \mathbb{R}$ o funcţie Morse.
Un C^∞-câmp de vectori v se numeşte **câmp de vectori de tip gradient** pentru f dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1. pentru orice punct necritic x al lui f avem relaţia $f'(x)(v(x)) > 0$;
2. pentru orice punct critic p al lui f, de index k, există o hartă Morse $\psi : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ pentru f în jurul lui p astfel încât

$$\psi_*(v)(x_1, \ldots, x_m) = (-x_1, \ldots, -x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m).$$

Lema 2.3.2 ([56]) *Un câmp de vectori de tip gradient pentru f este un f-gradient.*

Definiţia 2.3.3 **Gradientul riemannian** al unei funcţii f în raport cu o metrică riemanniană $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pe M se defineşte prin relaţia

$$\langle grad\ f(x), h \rangle = f'(x)(h),$$

unde $x \in M$ şi $h \in T_x(M)$.

Următoarele rezultate sunt demonstrate de A. Pajitnov în monografia [56].

Propoziţia 2.3.1 *Orice gradient riemannian este un f-gradient.*

Lema 2.3.3 *Dacă p este un punct critic al lui f şi v este un gradient riemannian a lui f în raport cu o metrică riemanniană pe M, atunci*

$$\langle v'(p)h, k \rangle = f''(p)(h, k)$$

unde $h, k \in T_p(M)$.

Definiţia 2.3.4 Un câmp de vectori v se numeşte **gradient slab** a lui f dacă pentru orice $x \notin C(f)$, avem $f'(x)(v(x)) > 0$

Lema 2.3.4 *Dacă v este un gradient slab a lui f şi $p \in C(f)$ atunci $v(p) = 0$.*

2.4 Gradientul formelor Morse

Vom prezenta în continuare proprietăţi ale gradienţilor asociaţi 1-formelor închise ([32], [56]).

Fie M o varietate netedă închisă şi o metrică riemanniană $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pe M.

Orice 1-formă ω pe M determină câmpul de vectori $grad(\omega)$ pe M definit prin

$$\langle grad(\omega)_p, h \rangle = \omega(h),$$

pentru orice vector $h \in T_p(M)$, numit gradientul riemannian al lui ω.

În coordonate locale avem:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i$$

şi metrica riemanniană se exprimă prin coeficienţii

$$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Putem scrie:

$$grad(\omega) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \text{ unde } b_j(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) g^{ij}(x).$$

Atunci, $grad(\omega)$ este un câmp de vectori neted şi zerourile lui $grad(\omega)$ coincid cu zerourile formei ω.

Definiţia 2.4.1 Un câmp de vectori neted X pe M se numeşte **câmp de vectori de tip gradient** pentru o 1-formă închisă ω dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii:

1. funcţia $\omega(X) > 0$ înafara mulţimii zerourilor formei ω;
2. pentru orice zerou $p \in M$ al lui ω, există o vecinătate $U \subset M$ ce conţine pe p astfel încât $\omega|_U = df$, unde $f : U \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă, iar câmpul $X|_U$ coincide cu câmpul $grad(f)$ în raport cu o metrică riemanniană pe U.

Fie ω o formă Morse. Aplicând Lema lui Morse, se poate construi un câmp de vectori de tip gradient X pentru ω astfel încât pentru orice zerou $p \in M$ al lui ω, există coordonatele locale $x_1, \dots, x_n$ într-o vecinătate U a lui p cu $x_j(p) = 0$ pentru orice $j = 1, \dots, n$, iar forma $\omega|_U$ este egală cu

$$\omega = -\sum_{i=1}^{r} x_i dx_i + \sum_{i=r+1}^{n} x_i dx_i.$$

Câmpul $X|_U$ se exprimă în aceste coordonate locale prin:

$$X = -\sum_{i=1}^{r} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=r+1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Menţionăm că aici r reprezintă indexul Morse pentru zeroul p, ([32], [49]).

O prezentare mai în detaliu a 1-formelor închise şi respectiv a gradientului formelor Morse apare în monografia lui M. Farber [32].

Capitolul 3

$\varphi_{\mathcal{F}}$-categoria unei perechi de varietăţi diferenţiabile. Exemple importante de $\varphi_{\mathcal{F}}$-categorie

Acest capitol este dedicat prezentării noţiunii de $\varphi_{\mathcal{F}}$-categorie pentru o pereche de varietăţi diferenţiabile, unde $\mathcal{F}$ este o familie fixată de funcţii netede $M \to N$, a rezultatelor proprii obţinute în studiul φ-categoriei circulare a unei varietăţi diferenţiabile şi a caracteristicii Morse-Smale reale.

Capitolul se bazează pe lucrările lui D. Andrica [3], [4], G. Rassias [62], B. Doubrovine [30], D. Andrica, D. Mangra, C. Pintea [15].

3.1 $\varphi_{\mathcal{F}}$-categoria unei perechi de varietăţi

Fie M o varietate netedă fără frontieră.

Pentru o funcţie reală netedă $f \in C^\infty(M)$, notăm cu $\mu(f)$ numărul punctelor critice ale funcţiei f. Se observă uşor că $0 \le \mu(f) \le +\infty$.

Definiţia 3.1.1 Numim **φ-categoria** varietăţii M numărul

$$\varphi(M) = \min\{\mu(f) : f \in C^\infty(M)\}. \tag{3.1.1}$$

Această noţiune a fost studiată pentru varietăţi închise, de F. Takens în [66].

În acest caz are loc relaţia

$$cat(M) \le \varphi(M) \le m + 1, \tag{3.1.2}$$

unde $cat(M)$ este categoria Lusternik-Schnirelmann a varietăţii M.

Pentru două varietăţi difeomorfe M şi N, $\varphi(M) = \varphi(N)$, deci $\varphi(M)$ este un invariant diferenţial al varietăţii.

Pentru două varietăţi netede fără frontieră M şi N, are loc inegalitatea

$$\varphi(M \times N) \le \min\{\dim(M) + \dim(N) + 1, \varphi(M)\varphi(N)\}. \tag{3.1.3}$$

În [4] (vezi de asemenea [3], pagina 144), D. Andrica generalizează această noţiune. Fie M^m, N^n două varietăţi netede fără frontieră. Dacă $f \in C^\infty(M,N)$, notăm cu $\mu(f) = |C(f)|$, cardinalul mulţimii punctelor critice ale funcţiei f.

Fie $\mathcal{F} \subseteq C^\infty(M,N)$ o familie de funcţii netede $M \to N$.

Definiţia 3.1.2 Numim **$\varphi_\mathcal{F}$-categoria** a perechii de varietăţi (M,N), numărul

$$\varphi_\mathcal{F}(M,N) = \min\{\mu(f) \ : \ f \in \mathcal{F}\}.$$

Se observă uşor că $0 \leq \varphi_\mathcal{F}(M,N) \leq +\infty$ şi $\varphi_\mathcal{F}(M,N) = 0$ dacă şi numai dacă familia de funcţii $\mathcal{F}$ conţine imersii, submersii sau difeomorfisme locale după cum $m < n$, $m > n$, respectiv $m = n$.

φ-categoria perechii de varietăţi (M,N) se obţine pentru $\mathcal{F} = C^\infty(M,N)$ şi este studiată de D. Andrica şi L. Funar în [10] şi [11], C. Pintea în [57], [58], respectiv D. Andrica şi C. Pintea în [16], [17].

Definiţia 3.1.3 Fie două perechi de varietăţi (M,N) şi (M',N') difeomorfe. Spunem că familiile $\mathcal{F} \subseteq C^\infty(M,N)$ şi $\mathcal{F}' \subseteq C^\infty(M',N')$ sunt **conectate** (prin difeomorfisme) dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

$$\mathrm{Dif}\, f(N,N')\ \mathcal{F}\ \mathrm{Dif}\, f(M',M) = \mathcal{F}',$$

unde $\mathrm{Dif}\, f(N,N')$ şi $\mathrm{Dif}\, f(M',M)$ reprezintă mulţimile tuturor difeomorfismelor de la N la N', respectiv de la M' la M.

Mai exact, această definiţie arată că dacă $\lambda \in \mathrm{Dif}\, f(M,M')$, $\psi \in \mathrm{Dif}, f(N,N')$, $f \in C^\infty(M,N)$, $f' \in C^\infty(M',N')$, verifică egalitatea $f' = \psi \circ f \circ \lambda^{-1}$, cu alte cuvinte dacă următoarea diagramă este comutativă, atunci $f \in \mathcal{F}$ dacă şi numai dacă $f' \in \mathcal{F}'$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda"'] & N \arrow[d, "\psi"] \\
M' \arrow[r, "f'"] & N'
\end{tikzcd}$$

Propoziţia 3.1.1 *Dacă perechile (M,N) şi (M',N') sunt difeomorfe şi familiile $\mathcal{F} \subseteq C^\infty(M,N)$ şi $\mathcal{F}' \subseteq C^\infty(M',N')$ sunt conectate prin difeomorfisme, atunci*

$$\varphi_\mathcal{F}(M,N) = \varphi_{\mathcal{F}'}(M',N').$$

Demonstraţia acestui rezultat se poate consulta în monografia [3].

Rezultatul anterior arată că dacă ipoteza propoziţiei este îndeplinită, atunci $\varphi_\mathcal{F}(M,N)$ este un invariant diferenţial al perechii (M,N), relativ la toate perechile (M',N') difeomorfe cu (M,N) şi la toate familiile $\mathcal{F}' \subseteq C^\infty(M',N')$ conectate prin difeomorfisme cu $\mathcal{F}$.

În ([3], 146-147) sunt prezentate câteva cazuri particulare pentru familiile de funcţii $\mathcal{F}$ (vezi de asemenea [4]).

Prezentăm în continuare două situaţii speciale pentru familia $\mathcal{F}$.

1. Considerăm cazul $N = \mathbb{R}$ şi familia $\mathcal{F}$ de funcţii netede definite pe M, dată prin relaţia $\mathcal{F}(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$. În acest caz, $\varphi_{\mathcal{F}}(M, \mathbb{R})$ reprezintă φ-categoria varietăţii M şi se notează $\varphi(M)$. După cum am menţionat şi la începutul acestui paragraf, invariantul $\varphi(M)$ a fost pentru prima oară studiat de Takens. Calculul lui $\varphi(M)$ este o problemă dificilă, ([4]). Este interesant de remarcat faptul că nu avem un exemplu de varietate închisă M^m astfel încât $cat(M) < \varphi(M)$ şi de asemenea, egalitatea $cat(M) = \varphi(M)$ este demonstrată doar pentru câteva categorii izolate de varietăţi. Pentru a înţelege dificultatea problemei dacă $cat(M) = \varphi(M)$ pentru orice varietate închisă, vom analiza următorul caz particular: $cat(M) = \varphi(M) = 2$. Din relaţia $cat(M) = 2$ rezultă că M este o sferă omotopică. Ţinând seama de bine cunoscutul rezultat al lui Reeb, din egalitatea $\varphi(M) = 2$ se obţine că M este o m-sferă topologică. Aşadar, egalitatea $cat(M) = \varphi(M) = 2$ este echivalentă cu conjectura lui Poincaré. Ţinând seama de faptul că conjectura lui Poincaré a fost demonstrată, rezultă că pentru orice varietate închisă cu $cat(M) = 2$ avem $\varphi(M) = 2$.

2. Fie G un grup Lie compact care acţionează liber pe varietăţile M^m şi N^n. Reamintim că funcţia $f : M \to N$ este invariantă (G-echivariantă) dacă pentru orice $g \in G$ şi $p \in M$ avem relaţia $f(gp) = f(p)(f(gp) = gf(p))$. Considerăm familia tuturor funcţiilor netede G-invariante, $\mathcal{F} = C^\infty_{G,I}(M, N)$ şi obţinem $\varphi_{\mathcal{F}}(M, N) = \varphi_{G,I}(M, N)$ φ-categoria G-invariantă a perechii (M, N). Analog se defineşte φ-categoria G-echivariantă a perechii (M, N), notată $\varphi_{G,E}(M, N)$.

3.2 φ-categoria circulară a unei varietăţi diferenţiabile

Definim, urmărind lucrarea lui D. Andrica, D. Mangra, C. Pintea [15], φ-categoria circulară a unei varietăţi M, prin

$$\varphi_{S^1}(M) = \min\{\mu(f) : \ f \in C^\infty(M, S^1)\}, \tag{3.2.1}$$

unde S^1 este cercul unitate. Se observă uşor că $\varphi_{S^1}(M) \leq \varphi(M)$.

Într-adevăr, considerând o funcţie $f \in C^\infty(M)$ cu $\mu(f) = \varphi(M)$, funcţia $\widetilde{f} = \exp \circ f$, unde $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ este acoperirea universală a cercului S^1, satisface egalitatea $C(\widetilde{f}) = C(f)$. Obţinem astfel relaţia

$$\varphi_{S^1}(M) \leq \mu(\widetilde{f}) = \mu(f) = \varphi(M).$$

Folosind această inegalitate şi relaţia (3.1.2) obţinem

$$\varphi_{S^1}(M) \leq \varphi(M) \leq m + 1. \tag{3.2.2}$$

Scopul principal al acestei secţiuni este de a prezenta anumite categorii de varietăţi închise cu proprietatea că $\varphi_{S^1}(M) \leq \varphi(M)$.

3.2.1 Funcţii circulare şi acoperirile lor

Vom utiliza proprietăţile de liftare ale aplicaţiilor de acoperire pentru a obţine informaţii despre mărimea mulţimii critice a funcţiilor circulare. Aceste proprietăţi ale aplicaţiilor de acoperire $p : E \to M$ la care ne referim sunt:

1. Omomorfismul de grupuri $p_* : \pi(E) \to \pi(M)$, indus de p la nivelul grupurilor fundamentale este injectiv.

2. Cardinalul imaginii inverse $p^{-1}(y)$ nu depinde de $y \in M$ pentru E conexă şi este egal cu indexul $[\pi(M) : \mathrm{Im}(p_*)]$, unde p_* este omomorfismul de grupuri $p_* : \pi(E) \to \pi(M)$ indus de p la nivelul grupurilor fundamentale.

3. Pentru orice subgrup H al lui $\pi(M)$, există o aplicaţie de acoperire $q : E_H \to M$ astfel încât $q_*(\pi(E_H)) = H$.

4. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca o funcţie continuă $f : X \to M$ să fie liftată la o funcţie $\overline{f} : X \to E$ este incluziunea $f_*(\pi(X)) \subseteq \overline{f}_*(\pi(X))$. Cu alte cuvinte, există o funcţie $\overline{f} : X \to E$ astfel încât $p \circ \overline{f} = f$ dacă şi numai dacă are loc relaţia $f_*(\pi(X)) \subseteq \overline{f_*}(\pi(X))$.

Amintim că funcţiile circulare pe o varietate compactă a cărui grup fundamental este un grup de torsiune, sunt mai degrabă funcţii cu valori reale, ele putând fi liftate la o funcţie cu valori în $\mathbb{R}$ prin aplicaţia de acoperire $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, datorită faptului că $\mathrm{Hom}(\pi(M), \mathbb{Z}) = 0$. Mai exact, avem:

Observaţia 3.2.1 Fie M o varietate diferenţiabilă conexă. Dacă $\mathrm{Hom}(\pi(M), \mathbb{Z}) = 0$, atunci orice funcţie circulară $f : M \to S^1$ poate fi liftată la o funcţie $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}$, prin funcţia de acoperire $\exp : \mathbb{R} \to S^1$.

Într-adevăr, deoarece $f_* = 0$ şi $\exp_* = 0$, existenţa unei liftări $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}$ astfel încât $f = \exp \circ \widetilde{f}$ rezultă din proprietatea (4) din lista prezentată anterior. O clasă de varietăţi pentru care $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}) = 0$ sunt varietăţile pentru care grupul fundamental este un grup de torsiune.

Următoarele rezultate au fost demonstrate în lucrarea lui D. Andrica, D. Mangra, C. Pintea [15].

Corolarul 3.2.1 *Dacă $m, n \geq 2$ sunt numere naturale, atunci*

$$\varphi_{S^1}(S^n) = \varphi(S^n) = 2 \quad \text{şi} \quad \varphi_{S^1}(\mathbb{RP}^n) = \varphi(\mathbb{RP}^n) = n + 1.$$

Pentru varietăţi care au grup fundamental de torsiune, omomorfismele de grup ale sumelor convexe rămân triviale chiar dacă termenii din sumele conexe sunt de dim ≥ 3.

Propoziţia 3.2.1 *Dacă $(G_1, \cdot), \ldots, (G_r, \cdot), (H, \cdot)$ sunt grupuri şi*

$$f : G_1 * \ldots * G_r \to H$$

este un omomorfism de grupuri dat, atunci

$$\mathrm{Im}(f) \subseteq \langle \mathrm{Im}(f \circ i_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Im}(f \circ i_r) \rangle,$$

unde $i_k : G_k \to G_1 * \ldots * G_r$, $k = 1, \ldots, r$ sunt scufundări naturale.

În particular, $\mathrm{Hom}(G_1 * \ldots * G_r, H) = 0$ *dacă $G_1, \ldots, G_r$ sunt grupuri de torsiune şi H este fără torsiune.*

Corolarul 3.2.2 *Dacă $(G_1, \cdot), \ldots, (G_r, \cdot)$ sunt grupuri şi $f : G_1 * \ldots * G_r \to \mathbb{Z}$ este un omomorfism de grupuri dat, atunci* $\mathrm{Im}(f) = \text{c.m.m.d.c.}(m_{i_1}, \ldots, m_{i_s})\mathbb{Z}$, *unde* $\mathrm{Im}(f \circ i_j) = m_j\mathbb{Z}$, *pentru $j = 1, \ldots, r$ şi $m_{i_1}, \ldots, {}_{i_s} \neq 0$.*

Dacă $m_1 = \ldots = m_r = 0$, adică $f \circ i_1 = \ldots = f \circ i_r = 0$, atunci $\mathrm{Im}(f) = 0$.

În particular, $\mathrm{Hom}(G_1 * \ldots * G_r, \mathbb{Z}) = 0$ *dacă $G_1, \ldots, G_r$ sunt grupuri de torsiune.*

Corolarul 3.2.3 *Dacă* $M_1^n, \ldots, M_r^n$, $n \geq 3$ *sunt varietăţi conexe astfel încât* $\pi(M_1), \ldots, \pi(M_r)$ *sunt grupuri de torsiune, atunci* $\mathrm{Hom}(\pi(M_1\# \ldots \# M_r), \mathbb{Z}) = 0$.

În particular, dacă fiecare varietate $M_1^n, \ldots, M_r^n$, $n \geq 3$ *este fie un spaţiu proiectiv rela fie un spaţiu lenticular, atunci* $Hom(\pi(M_1\# \ldots \# M_r), \mathbb{Z}) = 0$.

Observaţia 3.2.2 Condiţia $n \geq 3$ din Corolarul 3.2.3 este esenţială deoarece grupurile fundamentale ale suprafeţelor orientabile compacte $\Sigma_g = T^2 \# \ldots \# T^2$ admit, spre deosebire de cazul grupurilor fundamentale de torsiune pentru termenii sumelor conexe din Propoziţia 3.2.1, funcţii circulare ce induc omomorfisme de grupuri la nivelul grupurilor fundamentale.

Teorema 3.2.1 *Fie* M *o varietate diferenţiabilă compactă cu grup fundamental abelian. Orice funcţie circulară continuă* $f : M \to S^1$ *care nu poate fi liftată la o funcţie reală prin funcţia de acoperire* $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, *poate fi acoperită de o funcţie circulară* $\overline{f} : \overline{M} \to S^1$ *astfel încât* $\pi(\overline{M})$ *este fără torsiune iar omomorfismul de grupuri indus* $\overline{f_*} : \pi(\overline{M}) \to \pi(S^1) = \mathbb{Z}$ *este surjectiv.*

Mai exact, există funcţiile de acoperire $\overline{p} : \overline{M} \to M$ *şi* $q : S^1 \to S^1$ *care, pe lângă proprietăţile menţionate deja, fac ca următoarele diagrame să fie comutative.*

$$
\begin{tikzcd}
\overline{M} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{p}"'] & S^1 \arrow[d, "q"] \\
M \arrow[r, "f"] & S^1
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\pi(\overline{M}) \arrow[r, "\overline{f_*}"] \arrow[d, "\overline{p_*}"'] & \pi(S^1) = \mathbb{Z} \arrow[d, "q_*"] \\
\pi(M) \arrow[r, "f_*"] & \pi(S^1) = \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

3.2.2 Varietăţi care satisfac relaţia $\varphi_{S^1}(M) = \varphi(M)$

Din relaţiile (3.2.2) obţinem relaţia $\varphi_{S^1}(M) \leq \varphi(M)$, iar din următorul exemplu putem observa că inegalitatea poate fi strictă.

Fie torul m-dimensional $T^m = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{de\ m\ ori}$ şi conform [3] (Exemplul 3.6.16) avem relaţia $\varphi(T^m) = m + 1$.

Pe de altă parte, proiecţia $T^m \to S^1$ este o fibrare diferenţiabilă trivială, aşadar nu are puncte critice, deci $\varphi_{S^1}(T^m) = 0$.

Acest exemplu poate fi inclus în următoarea observaţie generală.

Observaţia 3.2.3 Pentru o varietate închisă M, $\varphi_{S^1}(M) = 0$ dacă şi numai dacă există o fibrare diferenţiabilă $M \to S^1$. Existenţa unei fibrări diferenţiabile $M \to S^1$ asigură egalitatea $\varphi_{S^1}(M) = 0$, întrucât fibrarea nu are niciun punct critic. Reciproc, egalitatea $\varphi_{S^1}(M) = 0$ asigură existenţa unei submersii potrivite $M \to S^1$, inversele imaginii mulţimilor compacte din S^1 fiind evident compacte.

Prin urmare, conform teoremei de fibrare Ehresmann ([31] sau [29] pagina 15) putem concluziona că această submersie este de fapt o fibrare locală trivială.

Propoziţia 3.2.2 ([15]) *Fie* M *o varietate diferenţiabilă conexă. Dacă* $\mathrm{Hom}(\pi(M), \mathbb{Z}) = 0$, *atunci* $\varphi_{S^1}(M) = \varphi(M)$. *În particular* $\varphi_{S^1}(M) = \varphi(M)$ *pentru* M *varietate conexă şi simplu-conexă.*

Corolarul 3.2.4 ([15]) *Dacă* $m \geq 2$, *atunci* $\varphi_{S^1}(S^m) = \varphi(S^m) = 2$ *şi* $\varphi_{S^1}(\mathbb{RP}^m) = \varphi(\mathbb{RP}^m) = m+1$, *unde* S^m *este sfera* m*-dimensională şi* $\mathbb{RP}^m$ *este spaţiul proiectiv real* m*-dimensional.*

Corolarul 3.2.5 ([15]) *Dacă* $M_1^n, \ldots, M_r^n$, $m \geq 3$ *sunt varietăţi conexe şi* $\pi(M_1), \ldots, \pi(M_r)$ *sunt grupuri de torsiune, atunci*

$$\varphi_{S^1}(M_1\#\ldots\#M_r) = \varphi(M_1\#\ldots\#M_r).$$

În particular $\varphi_{S^1}(r\mathbb{RP}^n) = \varphi(r\mathbb{RP}^n)$, *unde* $r\mathbb{RP}^n$ *este suma conexă* $\mathbb{RP}^n\#\ldots\#\mathbb{RP}^n$ *de* r *copii ale lui* $\mathbb{RP}^n$.

Corolarul 3.2.6 ([15]) *Dacă* $k, l, m_1, \ldots, m_k \geq 2$ *sunt numere întregi, atunci au loc următoarele relaţii:*

1. $\varphi_{S^1}(S^{m_1} \times \ldots \times S^{m_k}) = \varphi(S^{m_1} \times \ldots \times S^{m_k}) = k+1$.

2. $\varphi_{S^1}(\mathbb{RP}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{RP}^{m_k}) = \varphi(\mathbb{RP}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{RP}^{m_k}) \leq m_1 + m_2 + \ldots + m_k + 1$.

3. $\varphi_{S^1}(L(7,1) \times S^4) = \varphi(L(7,1) \times S^4) = 5$, *unde* $L(r,s)$ *este spaţiul lenticular de dimensiune 3 de forma* (r,s).

4. $\varphi_{S^1}(\mathbb{RP}^k \times S^l) = \varphi(\mathbb{RP}^k \times S^l) \leq k+2$.

Următorul rezultat este menţionat în monografia [28] la pagina 221.

Lema 3.2.1 *Dacă* M *şi* N *sunt varietăţi închise, atunci are loc următoarea inegalitate*

$$\varphi(M\#N) \leq \max\{\varphi(M), \varphi(N)\}.$$

În particular $\varphi(X\#X) \leq \varphi(X)$ *pentru orice varietate* X.

Corolarul 3.2.7 ([15]) *Fie* $\Sigma_g = \underbrace{T^2\#T^2\#\ldots\#T^2}_{\text{de } g \text{ ori}}$ *o suprafaţă închisă orientabilă de gen* g *şi fie* $P_g = \underbrace{\mathbb{RP}^2\#\ldots\#\mathbb{RP}^2}_{\text{de } g+1 \text{ ori}}$ *o suprafaţă închisă neorientabilă de gen* g. *Atunci*

1. $\varphi_{S^1}(\Sigma_g) \leq \varphi(\Sigma_g) = 3,\ g \geq 1$.

2. $\varphi_{S^1}(P_g) \leq \varphi(P_g) = 3,\ g \geq 0$.

Corolarul 3.2.8 ([15]) *Dacă* $k, l \geq 2$ *sunt numere întregi, atunci*

$$\varphi_{S^1}((S^k \times S^l)\#\ldots\#(S^k \times S^l)) = \varphi((S^k \times S^l)\#\ldots\#(S^k \times S^l)) = 3.$$

Problemă. Caracterizaţi toate varietăţile închise M^m cu proprietatea $\varphi_{S^1}(M) = 1$.

3.3 Caracteristica Morse-Smale reală a unei varietăţi diferenţiabile

Fie $N = \mathbb{R}$ şi $\mathcal{F} = \mathcal{F}_m(M) \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$ mulţimea tuturor funcţiilor Morse definite pe M. În acest caz obţinem $\varphi_{\mathcal{F}}(M, \mathbb{R}) = \gamma(M)$ *caracteristica Morse-Smale* a varietăţii M, un invariant important al lui M, intens studiat de numeroşi autori. Menţionăm aici lucrările lui G. M. Rassias şi D. Andrica [62], [4]. Un caz important, când caracteristica Morse-Smale poate fi calculată în termenii omologiei lui M, este dat de condiţia ca varietatea M

să fie simplu conexă de dimensiune > 5. Această proprietate a fost demonstrată în lucrarea aniversară a lui S. Smale, ([65]). S-au depus eforturi pentru generalizarea rezultatului lui Smale pentru cazul când varietatea M nu este simplu conexă. De exemplu, V.V. Sharko a demonstrat că este posibil calcularea caracteristicii Morse-Smale a varietăţii M când $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$, ([64]). Un rezultat complet pentru o varietate M oarecare nu este cunoscut.

Definim numerele $\gamma_i(M)$, $i = 0, \ldots, m$, unde

$$\gamma_i(M) = \min\{\mu_i(f) \ : \ f \in \mathcal{F}_m(M)\}.$$

Bazându-ne pe monografia lui B. Doubrovine [30] rezultă că

$$\gamma_0(M) = \gamma_m(M) = 1.$$

Se observă uşor că are loc inegalitatea

$$\gamma(M) \geq \sum_{i=0}^{m} \gamma_i(M)$$

Numerele $\gamma(M)$ and $\gamma_i(M)$ sunt invarianţi diferenţiali ai varietăţii M.

Fie N o varietate netedă, $\psi : M \to N$ un difeormorfism şi $f : M \to \mathbb{R}$, $g : N \to \mathbb{R}$ două funcţii netede astfel încât următoarea diagramă este comutativă,

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "g"'] & & M \arrow[dl, "f"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

adică avem $g = f \circ \psi$.

Lema 3.3.1 *Are loc relaţia $C(f) = \psi(C(g))$.*

Lema 3.3.2 *Cu notaţiile anterioare, dacă $f \in \mathcal{F}_m(M)$, ψ difeomorfism, atunci $g \in \mathcal{F}_m(N)$ şi punctele critice $p \in C(g)$ şi $\psi(p) \in C(f)$ au acelaşi index Morse.*

Teorema 3.3.1 *Dacă varietăţile M şi N sunt difeomorfe, atunci*

$$\gamma(M) = \gamma(N), \ \gamma_i(M) = \gamma_i(N), \ i = 0, \ldots, m,$$

altfel spus, numerele $\gamma(M)$ şi $\gamma_i(M)$ sunt invarianţi diferenţiali ai varietăţii.

Demonstraţia acestui rezultat se găseşte în monografia [3].

Teorema 3.3.2 *Fie M^m şi N^n două varietăţi diferenţiabile fără frontieră. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(i) $\gamma_i(M) = \gamma_{m-i}(M)$, $i = 0, \ldots, m$ (simetria);

(ii) $\gamma(M \times N) \leq \gamma(M)\gamma(N)$ (submultiplicitatea);

(iii) $\gamma_i(M \times N) \leq \sum\limits_{j+k=i} \gamma_j(M)\gamma_k(N)$, $i = 0, \ldots, m+n$.

Demonstraţia acestui rezultat se găseşte în monografia [3].

În lucrarea lui G. Rassias [63], se arată că $\gamma(M) = 0$ pentru orice varietate netedă deschisă şi că pentru orice varietate netedă închisă de dimensiune impară, caracteristica Morse-Smale este un număr întreg par mai mare sau egal cu 2.

3.4 Calculul caracteristicii Morse-Smale reale

Fie M^m o varietate compactă, netedă, de dimensiune m, fără bord, $\partial M = \emptyset$. Este binecunoscut faptul că $\mathcal{F}_m(M) \neq \emptyset$, adică există o funcţie Morse definită pe M.

Fie $H_k(M; F)$, $k = \overline{0, m}$, grupurile de omologie singulară cu coeficienţi în câmpul F şi $\beta_k(M; F) = rang H_k(M; F) = \dim_F H_k(M; F)$, $k = \overline{0, m}$, numerele Betti în raport cu F. Dacă $f \in \mathcal{F}_m(M)$, atunci are loc relaţia $\mu_k(f) \geq \beta_k(M; F)$, $k = \overline{0, m}$ (inegalităţile lui Morse în forma slabă).

Definiţia 3.4.1 Funcţia Morse $f \in \mathcal{F}_m(M)$ este **exactă** (sau minimală) dacă

$$\mu_k(f) = \gamma_k(M), \ k = \overline{0, m}.$$

Definiţia 3.4.2 Funcţia Morse $f \in \mathcal{F}_m(M)$ se numeşte F-**perfectă** dacă

$$\mu_k(f) = \beta_k(M; F), \ k = \overline{0, m}.$$

Ţinând seama de inegalităţile lui Morse în forma slabă şi de definiţia caracteristicii Morse-Smale, rezultă că pentru orice funcţie Morse definită pe varietatea M şi pentru orice câmp F, are loc următoarea relaţie:

$$\mu_k(f) \geq \gamma_k(M) \geq \beta_k(M; F), \ k = \overline{0, m}.$$

Din aceste relaţii rezultă că orice funcţie Morse F-perfectă pe M este exactă.

Teorema 3.4.1 ([3]) *Varietatea M admite funcţii Morse F-perfecte dacă şi numai dacă*

$$\gamma(M) = \beta(M; F),$$

unde $\beta(M; F) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k(M; F)$ *este numărul total Betti al varietăţii M în raport cu câmpul F.*

Varietatea M^m fiind compactă, rezultă că are tipul de omotopie al unui CW-complex finit ([25]), deci grupurile de omologie singulară $H_k(M; \mathbb{Z})$, $k = \overline{0, m}$, sunt finit generate, ([34]). Pentru $k \in \mathbb{Z}$, se obţine următoarea relaţie

$$H_k(M; \mathbb{Z}) \simeq (\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{\beta_k \text{ ori}}) \oplus (\mathbb{Z}_{n_{k1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_{kb(k)}})$$

unde $\beta_k = \beta_k(M; \mathbb{Z})$, $k = \overline{0, m}$, reprezintă numerele Betti ale varietăţii M în raport cu grupul $(\mathbb{Z}, +)$, adică avem relaţia $\beta_k(M; \mathbb{Z}) = rang H_k(M; \mathbb{Z})$. Este binecunoscut faptul că $H_0(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ şi

$$H_m(M; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{dacă M este orientabilă} \\ \{0\} & \text{altfel} \end{cases}$$

rezultă că avem $b(0) = b(m) = 0$.

Teorema 3.4.2 ([3]) *Dacă M^m este o varietate compactă simplu-conexă fără bord ($\partial M = \emptyset$) şi $m \geq 6$, atunci au loc egalităţile următoare:*

(i) $\gamma_k(M) = \beta_k(M;\mathbb{Z}) + b(k) + b(k-1),\ k \in \mathbb{Z}$;

(ii) $\gamma(M) = \beta(M;\mathbb{Z}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} b(k)$,

unde $\beta(M;\mathbb{Z}) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k(M;\mathbb{Z})$ este numărul total Betti al lui M în raport cu grupul $(\mathbb{Z},+)$.

Corolarul 3.4.1 *Fie M^m o varietate compactă, simplu conexă, fără bord şi $m \geq 6$. Atunci M admite funcţii Morse $\mathbb{Q}$-perfecte dacă şi numai dacă grupul $H_k(M;\mathbb{Z})$ nu are torsiune, $k = \overline{0,m}$.*

Exemplul 3.4.1 1) Este binecunoscut faptul că sfera S^m este o varietate compactă simplu conexă pentru $m \geq 2$. Omologia singulară a sferei S^m este dată prin relaţia

$$H_k(S^m;\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{dacă } k = 0, m \\ \{0\} & \text{altfel} \end{cases}$$

Aplicând Teorema 3.4.2, rezultă că avem relaţiile

$$\gamma_0(S^m) = \gamma_m(S^m) = 1,\ \gamma_k(S^m) = 0,\ 1 \leq k \leq m-1 \text{ şi } \gamma(S^m) = 2 \text{ pentru } m \geq 6.$$

De fapt, aceste rezultate sunt adevărate pentru $m \geq 1$, fiind uşor de observat că funcţia $(x^1, \ldots, x^{m+1}) \longmapsto x^{m+1}$ este o funcţie Morse $\mathbb{Q}$-perfectă pe S^m.

2) Spaţiul proiectiv complex $P\mathbb{C}^m$ este o varietate compactă simplu conexă, cu omologia singulară dată prin relaţia

$$H_k(P\mathbb{C}^m;\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{dacă } k = 0, 2, 4, \ldots, 2m \\ \{0\} & \text{altfel} \end{cases}$$

Astfel, pentru $m \geq 6$ avem relaţiile $\gamma_{2i}(P\mathbb{C}^m) = 1$, $i = \overline{0,m}$, $\gamma_{2j-1}(P\mathbb{C}^m) = 0$, $j = \overline{1,m}$ şi $\gamma(P\mathbb{C}^m) = m+1$. Mai mult, folosind o metodă directă N. H. Kuiper a demonstrat că $\gamma(P\mathbb{C}^m) = m+1$ pentru $m \geq 1$. În lucrarea lui G. M. Rassias [62] este menţionat faptul că pentru m număr par, $\gamma(P\mathbb{C}^m)$ este impar, dar este dată valoarea lui $\gamma(P\mathbb{C}^m)$.

3) Ţinând seama de omologia singulară a spaţiului proiectiv cuaternionic PH^m, dată prin relaţia

$$H_k(PH^m;\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{dacă } k = 0, 4, 8, \ldots, 4m \\ \{0\} & \text{altfel} \end{cases}$$

rezultă că pentru $m \geq 6$ avem relaţiile $\gamma_{4i}(PH^m) = 1$, $i = \overline{0,m}$, $\gamma_j(PH^m) = 0$ dacă $j \not\equiv 0$ (mod 4) şi $\gamma(PH^m) = m+1$.

O problemă importantă care apare în mod natural este obţinerea varietăţilor M şi N care satisfac egalităţile din Teorema 3.3.2 (i), (ii), ([41], [62]). O condiţie suficientă este prezentată în următorul rezultat obţinut de D. Andrica în [7].

Teorema 3.4.3 *Dacă M^m şi N^n sunt varietăţi compacte fără bord ($\partial M = \partial N = \emptyset$), care admit funcţii Morse F-perfecte, atunci*

$$\gamma(M \times N) = \gamma(M)\gamma(N) \text{ şi } \gamma_i(M \times N) = \sum_{j+k=i} \gamma_j(M)\gamma_k(N),\ i = \overline{0, m+n}.$$

Corolarul 3.4.2 *Fie M^m şi N^n două varietăţi compacte simplu conexe fără bord ($\partial M = \partial N = \emptyset$), $m, n \geq 6$. Dacă grupurile de omologie singulară $H_k(M;\mathbb{Z})$, $H_j(N;\mathbb{Z})$, $k = \overline{0,m}$, $j = \overline{0,n}$ sunt fără torsiune, atunci*

$$\gamma(M \times N) = \gamma(M)\gamma(N) \text{ şi } \gamma_i(M \times N) = \sum_{j+k=i} \gamma_j(M)\gamma_k(N), \ i = \overline{0, m+n}.$$

Exemplul 3.4.2 Ţinând seama de egalitatea $\gamma(S^m) = 2$, avem

$$\gamma(S^{m_1} \times \ldots \times S^{m_k}) = 2^k.$$

De exemplu, dacă $T^k = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{k \text{ ori}}$ este torul k-dimensional, atunci $\gamma(T^k) = 2^k$.

Folosind a doua egalitate din Corolarul 3.4.2 avem

$$\gamma_i(T^k) = \binom{k}{i}, \ i = \overline{0,m}.$$

Se poate obţine o extensie a Teoremei 3.4.2 pentru varietăţi compacte, nu neapărat simplu conexe. Fie M^m o varietate compactă fără bord, $m \geq 6$ şi fie $p : \widetilde{M} \to M$ o acoperire universală a lui M. V.V. Sharko ([64]), a arătat că dacă $\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ (de s ori), $s \geq 0$, atunci există o funcţie Morse exactă f, definită pe M astfel încât

$$\mu_k(f) = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} \beta_{k+j-s}(\widetilde{M};\mathbb{Z}) + \sum_{i=0}^{s+1} \binom{s+1}{i} b(b_i - s - 1)$$

pentru $k \in \mathbb{Z}$.

Folosind aceste relaţii, printr-o demonstraţie asemănătoare cu cea a Teoremei 3.4.2 se obţine următorul rezultat al lui D. Andrica, ([5], [6]).

Teorema 3.4.4 *Dacă M^m este o varietate compactă fără bord, cu $m \geq 6$ şi*

$$\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \ (\text{de } s \text{ ori}), \ s \geq 0,$$

atunci:

(i) $\gamma_k(M) = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} \beta_{k+j-s}(\widetilde{M};\mathbb{Z}) + \sum_{i=0}^{s+1} \binom{s+1}{i} b(k+i-s-1), \ k = \overline{0,m}$

(ii) $\gamma(M) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} \beta_{k+j-s}(\widetilde{M};\mathbb{Z}) \right) + \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{s+1} \binom{s+1}{i} b(k_i - s - 1) \right)$

unde $p : \widetilde{M} \to M$ este acoperirea universală a varietăţii M.

În continuare vom prezenta un alt rezultat, obţinut de D. Andrica ([5], [6]), o margine superioară a categoriei Lusternik-Schnirelmann a varietăţii M în raport cu $\beta_k(\widetilde{M};\mathbb{Z})$, $b(k)$, $k = \overline{0,m}$.

Corolarul 3.4.3 *Fie M^m o varietate compactă fără bord cu $m \geq 6$ şi*

$$\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \ (\text{de } s \text{ ori}), \ s \geq 0.$$

Atunci

$$cat(M) \leq \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}\beta_{k+j-s}(\widetilde{M};\mathbb{Z})\right) + \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{s+1}\binom{s+1}{i}b(k+i-s-1)\right),$$

unde $p:\widetilde{M}\to M$ *este acoperirea universală a varietăţii* M.

Fie $p\geq 2$ un număr prim. Ţinând cont de relaţia

$$H_k(M;\mathbb{Z}) \simeq (\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}}_{\beta_k \text{ ori}}) \oplus (\mathbb{Z}_{n_{k1}}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{n_{kb(k)}}),$$

notăm

$$d(M;p) = \text{card}\{n_{kj},\ j=\overline{1,b(k)},\ k=\overline{0,m}:\ p|_{n_{k_j}}\}.$$

Este evidentă relaţia $d(M;p) \leq \sum\limits_{k=1}^{m-1} b(k)$.

Următorul rezultat este o condiţie necesară şi suficientă, în raport cu $\gamma(M)$, $\beta(M;\mathbb{Z})$ şi $d(M;p)$, pentru existenţa funcţiilor Morse $\mathbb{Z}_p$-perfecte pe varietatea M. Rezultatul a fost obţinut de D. Andrica în lucrările [8], [19].

Teorema 3.4.5 *Varietatea* M *admite funcţii Morse* $\mathbb{Z}_p$*-perfecte dacă şi numai dacă are loc următoarea egalitate*

$$\gamma(M) = \beta(M;\mathbb{Z}) + 2d(M;p).$$

Corolarul 3.4.4 *Fie* $p,q\geq 2$ *două numere prime. Varietatea* M *are simultan funcţii Morse* $\mathbb{Z}_p$ *şi* $\mathbb{Z}_p$*-perfecte dacă şi numai dacă are loc relaţia*

$$\gamma(M) = \beta(M;\mathbb{Z}) + 2d(M;p) \ \text{şi}\ d(M;p) = d(M;q).$$

Corolarul 3.4.5 *Fie* M^m *o varietate compactă simplu conexă fără bord şi* $m\geq 6$. *Dacă grupurile de omologie* $H_k(M;\mathbb{Z})$, $k=\overline{0,m}$ *sunt fără torsiune, atunci varietatea* M *admite funcţii Morse* $\mathbb{Z}_p$*-perfecte, pentru orice număr prim* $p\geq 2$.

Observaţia 3.4.1 Rezultatele Corolarului 3.4.5 şi a Corolarului 3.4.1, pot fi extinse, dacă înlocuim condiţia ca varietatea M să fie simplu conexă cu condiţia

$$\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z} \text{ (de } s \text{ ori)},$$

unde $s\geq 0$ este un întreg arbitrar şi $\pi_1(M)$ este grupul fundamental al lui M. În acest caz folosim rezultatul obţinut de V. V. Sharko ([64]) şi formula caracteristicii Morse-Smale obţinută în Teorema 3.4.4. (ii).

Teorema 3.4.6 *Fie* M^m *o varietate compactă, fără bord. Dacă întregii* m *şi* $\beta(M;\mathbb{Z})$ *sunt impare, atunci* M *are funcţii Morse* $\mathbb{Z}_p$*-perfecte, pentru orice număr prim* $p\geq 2$.

Teorema 3.4.7 *(i) Sfera* m*-dimensională* S^m *admite funcţii Morse* $\mathbb{Q}$*-perfecte.*

(ii) Pentru orice număr prim $p\geq 2$, *sfera* S^m *are funcţii Morse* $\mathbb{Z}_p$*-perfecte.*

Fie $P\mathbb{R}^m$ spaţiul proiectiv real m-dimensional. Este binecunoscut că $P\mathbb{R}^m$ este o varietate netedă diferenţiabilă compactă, fără bord, iar omologia lui $P\mathbb{R}^m$ este dată de

$$H_k(P\mathbb{R}^m;\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \ \text{ dacă } k=0 \\ \mathbb{Z}_2 \ \text{ dacă k este impar şi } 0<k<m \\ \mathbb{Z} \ \text{ dacă k este impar şi } k=m \\ \{0\} \ \text{ altfel} \end{cases}$$

Din această relaţie rezultă că $\beta(P\mathbb{R}^m;\mathbb{Z}) = 1$ dacă m este par şi $\beta(P\mathbb{R}^m;\mathbb{Z}) = 2$ dacă m este impar.

Pentru un număr prim $p \geq 2$ avem

$$d(P\mathbb{R}^m;p) = \begin{cases} m/2 \ \text{ dacă } p=2 \text{ şi m este par} \\ (m-1)/2 \ \text{ dacă } p=2 \text{ şi m este impar} \\ 0 \ \text{ dacă } p \geq 3 \end{cases}$$

Este cunoscut faptul că pentru spaţiul proiectiv real $P\mathbb{R}^m$, caracteristica Morse-Smale este $\gamma(P\mathbb{R}^m) = m+1$ ([41]).

Teorema 3.4.8 *(i) $P\mathbb{R}^m$ nu are funcţii Morse $\mathbb{Q}$-perfecte.*
(ii) $P\mathbb{R}^m$ are funcţii Morse $\mathbb{Z}_2$-perfecte.
(iii) Pentru orice număr prim $p \geq 3$, $P\mathbb{R}^m$ nu are funcţii Morse $\mathbb{Z}_p$-perfecte.

Menţionăm că în lucrarea lui N. H. Kuiper [41], este construită o funcţie Morse $\mathbb{Z}_2$-perfectă pe $P\mathbb{R}^m$.

Fie T^2 torul 2-dimensional. Definim suprafaţa netedă, compactă, conexă, orientabilă, având genul $g \geq 0$, prin

$$T_g = \underbrace{T^2 \# T^2 \# \ \dots \ \# T^2}_{g \text{ ori}},$$

adică T_g este suma conexă a g copii ale torului T^2. Dacă $g=0$, atunci $T_g = S^2$, sfera 2-dimensională.

Fie P_g suprafaţa neorientabilă, conexă, compactă, netedă, având genul $g \geq 0$, definită prin

$$P_g = \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \ \dots \ \# \mathbb{RP}^2}_{g+1 \text{ ori}},$$

unde $\mathbb{RP}^2$ este planul proiectiv real.

Este binecunoscut faptul că dacă M este o suprafaţă conexă, compactă, netedă, fără bord, atunci M este difeomorfă cu T_g dacă este orientabilă şi M este difeomorfă cu P_g dacă este neorientabilă, pentru anumite valori ale lui g, ([37]).

Următorul rezultat este o consecinţă imediată a şirului exact Mayer-Vietoris în coomologia de Rham, ([36]):

$$\chi(T_g) = 2-2g, \qquad \chi(P_g) = 1-g.$$

N. H. Kuiper [42] a demonstrat următoarea relaţie între caracteristica Morse-Smale şi caracteristica Euler-Poincaré a unei suprafeţe netede, compacte, conexe M, fără bord:

$$\gamma(M) = 4-\chi(M).$$

Din relaţiile anterioare rezultă că avem

$$\gamma(T_g) = 2 + 2g, \qquad \gamma(P_g) = 3 + g.$$

Teorema 3.4.9 *(i) T_g are funcţii Morse $\mathbb{Q}$-perfecte.*
(ii) Pentru orice număr prim $p \geq 2$, T_g are funcţii Morse $\mathbb{Z}_p$-perfecte.

Teorema 3.4.10 *(i) P_g nu are funcţii Morse $\mathbb{Q}$-perfecte.*
(ii) Pentru orice număr prim $p \geq 3$, P_g nu are funcţii Morse $\mathbb{Z}_p$-perfecte.
(iii) P_g are funcţii Morse $\mathbb{Z}_2$-perfecte.

În lucrarea [26] sunt prezentate următoarele inegalităţi:

$$cat(M) \leq C(M) \leq \beta(M) \leq \gamma(M) \leq m + 1,$$

unde $cat(M)$ este categoria Lusternik-Schnirelmann a varietăţii M (adică numărul minim de mulţimi închise contractibile ce acoperă varietatea M), iar $C(M)$ este numărul minim de discuri deschise necesare pentru a acoperi varietatea M şi

$$\beta(M) = \beta(M; \mathbb{Z}) = \sum_{k=0}^{m} H_k(M; \mathbb{Z}).$$

Scopul următorului rezultat, obţinut de D. Andrica şi M. Todea în lucrarea [20], este de a arăta că inegalitatea $\gamma(M) \leq m + 1$ din relaţia anterioară, nu are loc pentru orice varietate închisă M. Fie $\mathcal{M}_m$ mulţimea tuturor varietăţilor m-dimensionale, netede şi închise.

Teorema 3.4.11 *Relaţia*

$$\sup\{\gamma(M) : \ M \in \mathcal{M}_m\} = \infty$$

are loc pentru $m \geq 2$.

Observaţia 3.4.2 1) Relaţia $\sup\{\gamma(M) : \ M \in \mathcal{M}_m\} = \infty$ nu are loc pentru $m = 1$. Ţinând cont de teorema de clasificare a varietăţilor închise 1-dimensionale rezultă că o astfel de varietate este difeomorfă cu S^1 şi în acest caz avem $\gamma(M) = 2$.

2) Dacă pentru o varietate închisă, m-dimensională $M \in \mathcal{M}_m$, definim numărul

$$\varphi(M) = \min\{\mu(f) : \ f \in C^\infty(M)\}$$

se obţine φ-categoria varietăţii M. Are loc inegalitatea:

$$cat(M) \leq \varphi(M) \leq m + 1,$$

aşadar dacă înlocuim $\gamma(M)$ cu $\varphi(M)$, rezultatul teoremei anterioare nu mai are loc. În acest caz, rezultă că avem

$$\sup\{\varphi(M) : \ M \in \mathcal{M}_m\} = m + 1,$$

deoarece putem avea $\varphi(P\mathbb{R}^m) = m + 1$.

3) Relaţia $\sup\{\gamma(M):\ M\in\mathcal{M}_m\}=\infty$ indică faptul că nu există o constantă pozitivă $c_m>0$ astfel încât $\gamma(M)\le c_m$, oricare ar fi varietatea $M\in\mathcal{M}_m$. Pe de altă parte, rezultatul demonstrat de M. Gromov în lucrarea [38], confirmă existenţa unui număr constant pozitiv $c_m>0$, astfel încât $\beta(M;F)\le c_m$, pentru orice varietate compactă, m-dimensională M^m de curbură pozitivă, unde

$$\beta(M;F)=\sum_{i=0}^{m}\beta_i(M;F)$$

este suma numerelor Betti în raport cu câmpul F.

Fie M^m o varietate netedă, diferenţiabilă, închisă. Considerăm, în continuare, o k-proiecţie de acoperire a varietăţii M, $\pi:\widetilde{M}\to M$, unde $k\ge 2$. Dacă $f\in\mathcal{F}_m(M)$ este o funcţie Morse pe M, fie funcţia $h:\widetilde{M}\to\mathbb{R}$, definită prin $h=f\circ\pi$. Deoarece proiecţia de acoperire π este un difeomorfism local, rezultă că

$$h\in\mathcal{F}_m(\widetilde{M}),\ C(f)=\pi(C(h)),$$

aşadar $\mu(h)=k\mu(f)$. Atunci, pentru orice funcţie Morse $f\in\mathcal{F}_m(M)$, are loc inegalitatea $\gamma(\widetilde{M})\le k\mu(f)$. Ţinând cont de definiţia caracteristicii Morse-Smale, rezultă că

$$\gamma(\widetilde{M})\le k\gamma(M).$$

Teorema 3.4.12 ([3]) *Fie M^m o varietate netedă, închisă şi $\pi:\widetilde{M}\to M$ o k-proiecţie de acoperire a lui M ($k\ge 2$). Are loc următoarea inegalitate:*

$$\gamma(\widetilde{M})\le k\gamma(M)-4(k-1).$$

M. Gromov a ridicat următoarea problemă: Fie $\widetilde{M}_k$, $k\in\mathbb{N}$ un şir de varietăţi, astfel încât fiecare varietate $\widetilde{M}_k$ este o a_k-acoperire a varietăţii M, unde $a_k\to\infty$, când $k\to\infty$. Care sunt proprietăţile asimptotice ale şirului $\gamma(\widetilde{M}_k)$ când $k\to\infty$?

Folosind relaţia $\gamma(\widetilde{M})\le k\gamma(M)-4(k-1)$, avem

$$\gamma(\widetilde{M}_k)\le a_k\gamma(M)-4(a_k-1).$$

Printr-un calcul simplu se obţine o estimare asimptotică parţială a problemei anterioare:

$$\lim_{k\to\infty}\ \sup\frac{\gamma(\widetilde{M}_k)}{a_k}\le\gamma(M)-4.$$

În exemplul următor se arată că, în general, inegalitatea demonstrată în Teorema 3.4.12, este strictă. Fie $m\ge 3$ şi 2-proiecţia de acoperire $\pi:S^m\to P^m(\mathbb{R})$, unde S^m este sfera m-dimensională şi $P^m(\mathbb{R})$ este spaţiul proiectiv real m-dimensional. Este uşor de arătat că $\gamma(S^m)=2$ şi $\gamma(P^m(\mathbb{R}))=m+1$. Inegalitatea din Teorema 3.4.12 devine astfel strictă, $2<2(m+1)-4$, deoarece am considerat $m\ge 3$.

Teorema 3.4.13 *([9]) Dacă M^2 este o suprafaţă netedă închisă, orientabilă sau nu, atunci are loc relaţia*

$$\gamma(\widetilde{M})=k\gamma(M)-4(k-1).$$

Corolarul 3.4.6 *Fie M^m o varietate netedă închisă şi fie G un grup finit care acţionează liber pe M. Atunci:*

(i) $\gamma(M/G) \geq \frac{1}{|G|}(\gamma(M) + 4(|G| - 1))$

(ii) Dacă M^2 este o suprafaţă netedă închisă atunci

$$\gamma(M/G) = \frac{1}{|G|}(\gamma(M) + 4(|G| - 1)).$$

Capitolul 4

Caracteristica Morse-Smale circulară a unei varietăţi diferenţiabile

4.1 Definiţie şi proprietăţi generale

Prezentăm în această secţiune rezultatele proprii obţinute în studiul caracteristicii Morse-Smale pentru funcţii Morse cu valori în S^1, noţiune introdusă şi studiată pentru prima oară de D. Andrica şi D. Mangra în lucrările [12], [13].

Scopul nostru a fost să observăm în ce condiţii, proprietăţile caracteristicii Morse-Smale din teoria Morse clasică se păstrează pentru funcţii circulare.

Definim caracteristica Morse-Smale pentru acest tip de funcţii.

Considerăm varietatea $N = S^1$ şi familia de funcţii Morse circulare definite pe M, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_m(M, S^1) \subseteq C^\infty(M, S^1)$, ([18]).

În acest caz notăm $\varphi_{\mathcal{F}}(M, S^1)$ cu $\gamma_{S^1}(M)$ şi o numim *caracteristica Morse-Smale circulară a varietăţii M*.

Această noţiune a fost introdusă de D. Andrica şi D. Mangra în lucrarea [12].

Din definiţie rezultă că avem

$$\gamma_{S^1}(M) = \min\{\mu(f) \ : \ f \in \mathcal{F}_m(M, S^1)\}.$$

Analog putem defini numerele $\gamma_{S^1}^{(i)}(M)$, pentru $i = 0, \ldots, m$, unde

$$\gamma_{S^1}^{(i)}(M) = \min\{\mu_i(f) \ : \ f \in \mathcal{F}_m(M, S^1)\}.$$

Din relaţia $\mu(f) = \mu_0(f) + \ldots + \mu_m(f)$, rezultă că pentru orice $f \in \mathcal{F}_m(M, S^1)$ avem

$$\mu_(f) \geq \gamma_{S^1}^{(0)}(M) + \ldots + \gamma_{S^1}^{(m)}(M),$$

deci are loc următoarea inegalitate:

$$\gamma_{S^1}(M) \geq \sum_{i=0}^{m} \gamma_{S^1}^{(i)}(M).$$

Vom arăta în continuare că numerele $\gamma_{S^1}(M)$ şi $\gamma_{S^1}^{(i)}(M)$ sunt invarianţi diferenţiali ai varietăţii M, $i = 0, \ldots, m$.

În acest scop fie N o varietate netedă, $\varphi : M \to N$ un difeomorfism de la M la N şi $f : M \to S^1$, $g : N \to S^1$ două funcţii circulare netede astfel încât $g = f \circ \varphi$.

Evident că avem relaţia: $C(f) = \varphi(C(g))$.

Propoziţia 4.1.1 *Dacă $f \in \mathcal{F}_m(M, S^1)$, $\varphi : M \to N$ difeomorfism, atunci*

$$g \in \mathcal{F}_m(N, S^1)$$

şi punctele critice $p \in C(g)$ şi $\varphi(p) \in C(f)$ au acelaşi index Morse.

Următoarele două rezultate au fost demonstrate în lucrarea lui D. Andrica, D. Mangra [12].

Teorema 4.1.1 *Dacă varietăţile M şi N sunt difeomorfe, atunci*

$$\gamma_{S^1}(M) = \gamma_{S^1}(N) \text{ şi } \gamma_{S^1}^{(i)}(M) = \gamma_{S^1}^{(i)}(N),$$

pentru orice $i = 1, \ldots, m$, adică aceste numere sunt invarianţi diferenţiali ai varietăţii.

Teorema 4.1.2 *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(i) (Simetria) Pentru orice $i = 0, \ldots, m$, avem:

$$\gamma_{S^1}^{(i)}(M) = \gamma_{S^1}^{(m-i)}(M)$$

(ii) (Submultiplicitatea) Pentru orice varietăţi M şi N, avem:

$$\gamma_{S^1}(M \times N) \leq \gamma_{S^1}(M) \times \gamma_{S^1}(N)$$

(iii) Pentru orice $i = 0, \ldots, m + n$, avem:

$$\gamma_{S^1}^{(i)}(M \times N) \leq \sum_{j+k=i} \gamma_{S^1}^{(j)}(M) \cdot \gamma_{S^1}^{(k)}(N).$$

Prezentăm în încheierea acestei secţiuni următorul rezultat general, preluat după lucrarea lui D. Andrica, D. Mangra [13].

Teorema 4.1.3 *(1) Are loc relaţia: $\gamma_{S^1}(M) \leq \gamma(M)$, unde $\gamma(M)$ este caracteristica Morse-Smale a varietăţii M.*

(2) Dacă M este o varietate simplu conexă, adică avem $\pi_1(M) = \{0\}$, unde $\pi_1(M)$ grupul fundamental al lui M, atunci $\gamma_{S^1}(M) = \gamma(M)$.

Ca o aplicaţie, fie sfera m-dimensională S^m, unde $m \geq 2$.

Este cunoscut faptul că în acest caz sfera este simplu conexă. Ţinând cont de al doilea rezultat al teoremei anterioare, obţinem că $\gamma_{S^1}(S^m) \geq \gamma(S^m)$.

Pe de altă parte, se ştie că $\gamma(S^m) = 2$, aşadar avem şi $\gamma_{S^1}(S^m) = 2$.

4.2 Extinderea Teoremei 4.1.3 şi aplicaţii

În această secţiune, urmărind lucrarea lui D. Andrica şi M. Todea [19], vom extinde rezultatul obţinut în Teorema 4.1.3(2) pentru o clasă de varietăţi care nu sunt simplu conexe.

Teorema 4.2.1 *Dacă* $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}) = 0$ *pentru o varietate diferenţiabilă conexă* M*, atunci* $\gamma_{S^1}(M) = \gamma(M)$*. În particular,* $\gamma_{S^1}(M) = \gamma(M)$ *pentru* M *conexă şi simplu conexă.*

Corolarul 4.2.1 *Dacă* $n \geq 2$ *este un număr natural, atunci*

$$\gamma_{S^1}(S^n) = \gamma(S^n) = 2 \quad \text{şi} \quad \gamma_{S^1}(\mathbb{RP}^n) = \gamma(\mathbb{RP}^n) = n + 1.$$

Corolarul 4.2.2 *Dacă* $m_1, \ldots, m_k \geq 2$ *sunt numere naturale, atunci*

$$\gamma_{S^1}(S^{m_1} \times \ldots \times S^{m_k}) = \gamma(S^{m_1} \times \ldots \times S^{m_k}) = 2^k,$$

$$\gamma_{S^1}(\mathbb{RP}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{RP}^{m_k}) = \gamma(\mathbb{RP}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{RP}^{m_k}) = (m_1 + 1) \ldots (m_k + 1).$$

O altă proprietate a caracteristicii Morse-Smale a spaţiului total şi spaţiului bază a unei proiecţii de acoperire cu un număr finit de foi este prezentată în următorul rezultat.

Propoziţia 4.2.1 *Dacă* $\widetilde{M}$ *este o acoperire cu* k *foi a lui* M*, atunci are loc inegalitatea*

$$\gamma_{S^1}(\widetilde{M}) \leq k \cdot \gamma_{S^1}(M).$$

4.3 Calculul caracteristicii Morse-Smale circulare pentru suprafeţe compacte

Numărul minim de puncte critice ale unei funcţii Morse pe o varietate M, mai exact caracteristica Morse-Smale a lui M, este de asemenea şi o limită inferioară pentru curbura totală a lui M în raport cu scufundările sale în spaţiul euclidian.

În această secţiune, urmărind lucrarea lui D. Andrica, D. Mangra, C. Pintea [14] calculăm mai întâi caracteristica Morse-Smale circulară a suprafeţelor închise. Observăm de asemenea că punctele critice ale unei funcţii înălţime reale sau ale unor funcţii pe $\Sigma_g \subset \mathbb{R}^3$ cu valori în S^1, sunt punctele de tangenţă în raport cu unele distribuţii involutive.

La final studiem mărimea mulţimii de tangenţă a unei suprafeţe compacte orientabile de gen g scufundată într-un anumit mod în primul grup Heisenberg în raport cu distribuţia sa noninvolutivă orizontală.

Calculul caracteristicii Morse-Smale pentru varietăţi închise M, cu $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}) \neq 0$, este o problemă interesantă şi dificilă.

Principalul scop al acestei secţiuni este de a efectua acest calcul pentru suprafeţe orientabile, netede, compacte, conexe, de gen $g \geq 1$.

Amintim că o astfel de suprafaţă Σ_g este definită prin

$$\Sigma_g = T^2 \# T^2 \# \ldots \# T^2,$$

unde numărul de copii ale torului 2-dimensional $T^2 = S^1 \times S^1$ în suma conexă este egal cu g. Putem extinde definiţia pentru $g = 0$, considerând $\Sigma_0 = S^2$, sfera 2-dimensională.

Din teorema de clasificare a suprafeţelor, rezultă că orice suprafaţă netedă, compactă, orientabilă, conexă, fără bord este difeomorfă cu Σ_g, pentru o anumită valoare a lui $g \geq 0$.

Amintim că, caracteristica Morse-Smale reală a fost calculată de N.H. Kuiper în [43], care a demonstrat relaţia $\gamma(S) + \chi(S) = 4$ pentru orice suprafaţă compactă conexă S (a se vedea paragraful 3.4). În această secţiune, urmărind lucrarea D. Andrica, D. Mangra, C. Pintea [14], vom demonstra că pentru orice suprafaţă închisă S, cu excepţia sferei S^2 şi a planului proiectiv $\mathbb{RP}^2$, avem relaţia $\gamma_{S^1}(S) + \chi(S) = 0$.

Realizând o scufundare convenabilă a suprafeţei Σ_g în $\mathbb{R}^3 \setminus O_z$, unde O_z reprezintă axa z: $\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, şi o submersie $f : \mathbb{R}^3 \setminus O_z \to S^1$, a cărei restricţie $f|\Sigma_g$ este o funcţie Morse circulară cu exact $2(g-1)$ puncte critice, putem calcula caracteristica Morse-Smale circulară a suprafeţei Σ_g.

Pentru aceasta trebuie să caracterizăm punctele critice ale acestei restricţii. De fapt, submersia convenabilă pe care o căutăm este dată prin

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0). \tag{4.3.1}$$

Propoziţia 4.3.1 *Fie $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ o suprafaţă regulară şi fie o submersie $f : \mathbb{R}^3 \to N$, unde N este fie axa reală, fie cercul S^1. Punctul $p = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ este punct critic pentru restricţia $f|_{\Sigma_g}$ dacă şi numai dacă planul tangent al lui Σ în punctul p este planul tangent în p la fibra $\mathcal{F}_p := f^{-1}(f(p))$ a submersiei (4.3.1) prin p.*

Propoziţia 4.3.1 se obţine din următorul rezultat mai general:

Teorema 4.3.1 *Fie M^m, N^n, P^p, $m \geq n > p$, varietăţi diferenţiabile, fie $f : M \to N$ o aplicaţie diferenţiabilă şi $g : N \to P$ o submersie. Atunci $x \in M$ este un punct regular al lui $g \circ f$ dacă şi numai dacă $f \pitchfork_x \mathcal{F}_x$, unde $\mathcal{F}_x$ este fibra $g^{-1}(g(x))$ a lui g.*

Rezultatul anterior a apărut în lucrarea lui D. Andrica [2] şi C. Pintea [59].

4.3.1 Cazul suprafeţelor orientabile de gen g

Conform rezultatelor menţionate anterior, avem relaţiile

$$\gamma_{S^1}(\Sigma_0) = \gamma_{S^1}(S^2) = \gamma(S^2) = 2,$$

întrucât sfera 2-dimensională S^2 este simplu conexă. De asemenea, avem relaţia

$$\gamma_{S^1}(\Sigma_1) = \gamma_{S^1}(T^2) = 0,$$

deoarece proiecţia $T^2 = S^1 \times S^1 \to S^1$ este o submersie şi deci nu are puncte critice.

Vom demonstra următoarea teoremă, mai generală:

Teorema 4.3.2 *Caracteristica Morse-Smale circulară a unei suprafeţe închise este dată de*

$$\gamma_{S^1}(\Sigma) = \begin{cases} |\chi(\Sigma)| & \textit{dacă} \quad \Sigma \neq \mathbb{RP}^2 \\ 3 & \textit{dacă} \quad \Sigma = \mathbb{RP}^2 \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Deoarece pentru cazul $\Sigma = S^2$ demonstraţia s-a realizat în Corolarul 4.2.1, mai trebuie să demonstrăm Teorema 4.3.2 doar pentru cazul când Σ_g este o suprafaţă orientabilă compactă de gen $g \geq 1$. Pentru aceasta parcurgem următoarele etape:

1. Arătăm că

$$\mu(F) := \mu_0(F) + \mu_1(F) + \mu_2(F) \geq 2(g-1),$$

pentru orice funcţie Morse circulară $F : \Sigma_g \to S^1$, unde $\mu_j(F)$ este numărul punctelor critice de index j ale funcţiei F şi $\mu(F)$ cardinalul mulţimii $C(F)$, a tuturor punctelor critice ale lui F;

2. Construim o funcţie Morse circulară pe Σ_g cu exact $2(g-1)$ puncte critice.

În acest scop, observăm în primul rând că are loc relaţia

$$2 - 2g = \mu_0(F) - \mu_1(F) + \mu_2(F). \tag{4.3.3}$$

Într-adevăr, folosind teorema Poincaré-Hopf, obţinem că

$$2 - 2g = \chi(\Sigma_g) = \sum_{p \in C(F)} ind_p(\nabla F),$$

unde ∇F este câmpul de vectori de tip gradient al lui F în raport cu o metrică riemanniană pe Σ_g. Pentru a finaliza demonstraţia relaţiei (4.3.3), trebuie doar să observăm că indexul lui ∇F într-un punct critic de index 1 este -1 şi indexul lui ∇F într-un punct critic de index 0 şi 2 este 1. Într-adevăr, comportamentul local al lui F în jurul punctelor critice de index 1 este dat de reprezentarea locală $F = x^2 - y^2$ iar gradientul său se comportă local ca şi câmpul de vectori $(x, -y)$. Gradul restricţiei sale normalizate la cercul S^1 este -1, întrucât restricţia normalizată este un difeomorfism care inversează orientarea.

În mod similar, indexul lui ∇F într-un punct critic de index 0 sau 2 este 1, deoarece comportamentul local al lui F în jurul unui astfel de punct critic este dat de reprezentarea $F = x^2 + y^2$ sau $F = -x^2 - y^2$, iar gradientul său se comportă local ca şi câmpul de vectori (x, y), respectiv $(-x, -y)$. Restricţia normalizată a acestor vectori la cercul S^1 sunt difeomorfisme care păstrează orientarea, iar gradul lor este în acest caz 1. Astfel, relaţia (4.3.3) este acum complet demonstrată, prin teorema Poincaré-Hopf.

Pentru a doua etapă, demonstrăm următoarea lemă:

Lema 4.3.1 *Suprafaţa Σ_g poate fi scufundată în mod convenabil în spaţiul 3-dimensional $\mathbb{R}^3 \setminus O_z$, astfel încât restricţia $f|_{\Sigma_g} : \Sigma_g \to S^1$ este o funcţie Morse circulară cu exact $2(g-1)$ puncte critice, unde $f : \mathbb{R} \setminus O_z \to S^1$ este submersia dată de*

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0).$$

4.3.2 Scufundarea suprafeţei Σ_g în $\mathbb{R}^3 \setminus O_z$

Amintim că torul $\Sigma_1 = T^2 = S^1 \times S^1$ este de obicei identificat cu suprafaţa de rotaţie în $\mathbb{R}^3$ obţinută prin rotirea unui cerc în planul xOz cu centrul într-un punct de pe axa x, în jurul axei z. Raza a a cercului este considerată a fi strict mai mică decât distanţa δ de la origine la centrul cercului. O anumită scufundare a suprafeţei Σ_g în $\mathbb{R}^3$, obţinută din cea a suprafeţei Σ_1, asupra căreia vom opera anumite modificări, va fi utilă în abordarea noastră. Cu toate acestea, scufundarea menţionată anterior, a suprafeţei Σ_1 în $\mathbb{R}^3$, are un cerc superior şi un cerc la bază, unde curbura Gauss se anulează. Cele două cercuri formează mulţimea critică a funcţiei înălţime $f_{\overrightarrow{k}}$ pe direcţia axei z, restricţionată la imaginea scufundată a lui T^2 în $\mathbb{R}^3$. Aşadar, funcţia înălţime restricţionată nu este o funcţie Morse. Pentru a construi o scufundare convenabilă a suprafeţei Σ_g, mai degrabă va trebui să rotim în jurul axei z o curbă convexă închisă din planul xOz, cu un unic centru de simetrie, pe axa x şi care nu intersectează axa z. Această curbă este necesar să aibă două segmente simetrice în raport cu axa x, unul în vârf şi celălalt la bază. Aceste două segmente formează mulţimea critică a funcţiei înălţime $f_{\overrightarrow{k}}$ restrânsă la curba însăşi.

Considerăm scufundarea suprafeţei Σ_1 obţinută prin rotirea unei astfel de curbe convexe închise, în locul cercului în planul xOz, în acelaşi plan. Imaginea suprafeţei Σ_1 astfel obţinută este plată pe cele două suprafeţe inelare $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{A}'$ din două plane orizontale paralele.

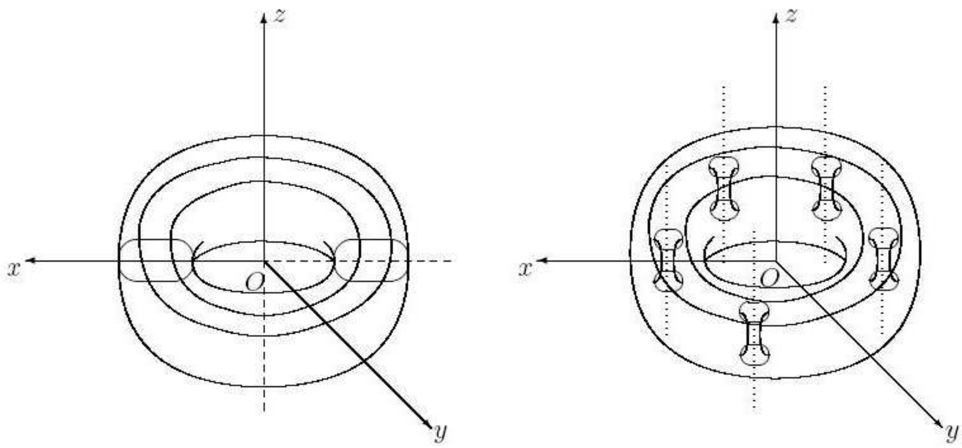

Figura 4.3.1. O copie scufundată a lui Σ_g construită din copia scufundată a lui Σ_1

Fie punctele $p_1, \ldots, p_{g-1} \in \mathcal{A}$ şi $q_1, \ldots, q_{g-1} \in \mathcal{A}'$, astfel încât dreptele $p_i q_i$, $i = 1, \ldots, g-1$ sunt verticale, adică paralele cu axa z. Pentru a obţine o copie topologică a suprafeţei Σ_g vom îndepărta câteva discuri mici deschise $D_1, \ldots, D_{g-1} \subseteq \mathcal{A}$ cu centrul în $p_1, \ldots, p_{g-1}$ şi $D'_1, \ldots, D'_{g-1} \subseteq \mathcal{A}'$ cu centrul în $q_1, \ldots, q_{g-1}$. Razele discurilor D_i şi D'_i se presupun a fi egale. Considerăm în continuare curbele plane $\gamma_i : [0,1] \to cl(\mathcal{B}) \cap \pi_i$, $i = 1, \ldots, g-1$ astfel încât $\gamma_i(0) \in \partial D_i$ şi $\gamma_i(1) \in \partial D'_i$, unde $p_i q_i \cap xOy = \{(x_i, y_i, 0)\}$, π_i este planul paralel cu planul xOz prin punctul $(x_i, y_i, 0)$ (adică $\pi_i : y = y_i$) şi $\mathcal{B}$ este componenta mărginită a complementului copiei scufundate a suprafeţei Σ_1. Curbele γ_i sunt astfel alese, pentru a completa, prin rotaţia lor în jurul axelor $p_i q_i$, copia scufundată a lui $\Sigma_1 \setminus [D_1 \cup \ldots \cup D_{g-1} \cup D'_1 \cup \ldots \cup D'_{g-1}]$ la o copie netedă scufundată a suprafeţei Σ_g.

4.3.3 Punctele critice nedegenerate ale funcţiei $f|_{\Sigma_g}$ şi cardinalul mulţimii sale critice

Deoarece copia scufundată a suprafeţei Σ_g este construită din diferite suprafeţe de rotaţie, vom cerceta mulţimea critică a restricţiei submersiei (4.3.1) la o astfel de suprafaţă, utilizând interpretarea geometrică ce rezultă din Propoziţia 4.3.1.

Propoziţia 4.3.2 *Are loc relaţia* $\mathrm{card}(C(f|_{\Sigma_g})) = 2(g-1)$.

Demonstraţia se poate consulta în lucrarea [14].

Propoziţia 4.3.3 ([14]) *Restricţia $f|_{\Sigma_g}$ este o funcţie Morse circulară, adică punctele sale critice sunt nedegenerate. Mai mult, punctele critice ale lui $f|_{\Sigma_g}$ sunt toate de index* 1.

Observaţia 4.3.1 Nicio funcţie Morse reală definită pe o varietate compactă M^m ($m \geq 2$) nu poate avea doar puncte critice de index 1, deoarece minimul global al unei astfel de funcţii are indexul zero şi maximul global ale indexul $n = \dim(M)$. Astfel, restricţia $f|_{\Sigma_g}$ nu poate fi liftată la o funcţie oarecare $\widetilde{f} : \Sigma_g \to \mathbb{R}$, adică $\exp \circ \widetilde{f} = f$, iar omomorfismul de grupuri $f_* : \pi(\Sigma_g) \to \mathbb{Z} = \pi(S^1)$ indus este netrivial.

4.4 Cazul suprafeţelor neorientabile

Fie o suprafaţă orientabilă compactă de gen $2g+1$ scufundată în $\mathbb{R}^3$ după cum am descris anterior.

Deoarece genul este impar, putem impune ca imaginea scufundată a lui Σ_{2g+1} să fie simetrică în raport cu originea, adică invariantă în raport cu acţiunea antipodală a grupului $\mathbb{Z}_2$ pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Deoarece restricţia acestei acţiuni la Σ_{2g+1} inversează orientarea, obţinem că, câtul $\Sigma_{2g+1}/\mathbb{Z}_2$ este o suprafaţă compactă neorientabilă. În mod evident, proiecţia

$$\pi : \Sigma_{2g+1} \to \Sigma_{2g+1}/\mathbb{Z}_2$$

este o acoperire dublă orientabilă a lui $\Sigma_{2g+1}/\mathbb{Z}_2$. Proprietatea de inversare a orientării a involuţiei antipodale a rezultă din proprietatea de inversare a orientării a reflexiilor σ_{xy}, σ_{xz} şi σ_{yz} în raport cu planele de coordonate xOy, xOz, yOz, şi din descompunerea $a = \sigma_{xy} \circ \sigma_{xz} \circ \sigma_{yz}$.

Observăm că cele trei reflexii comută între ele. De exemplu, proprietatea de schimbare a orientării pentru reflexia σ_{xy}, reiese din comportamentul orientării într-un punct fixat $p \in \mathrm{Fix}(\sigma_{xy}) = xOy \cap \Sigma_{2g+1}$. Deoarece aplicaţia tangentă a lui σ_{xy} în punctul p schimbă orientarea spaţiului tangent $T_p(\Sigma_{2g+1})$, rezultă că σ_{xy} (şi în mod similar σ_{xz} şi σ_{yz}) inversează orientarea lui Σ_{2g+1}. Aşadar, aplicaţia antipodală $a = \sigma_{xy} \circ \sigma_{xz} \circ \sigma_{yz}$ inversează de asemenea orientarea.

Se poate verifica uşor faptul că genul suprafeţei neorientabile $\Sigma_{2g+1}/\mathbb{Z}_2$ este $2g+2$, adică $\Sigma_{2g+1}/\mathbb{Z}_2$ este difeomorfă cu $(2g+2)\mathbb{RP}^2$, unde $k\mathbb{RP}^2$ reprezintă suma conexă $\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\ldots\#\mathbb{RP}^2$ a k copii a planului proiectiv real.

Demonstraţia Teoremei 4.3.2 în cazul suprafeţelor neorientabile. Observăm mai întâi că

$$f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}, \quad f([x_1, x_2, x_3]) = \frac{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

este o funcţie Morse perfectă cu trei puncte critice de index 0, 1, 2, adică un punct de minim p, un punct de maxim q şi un punct de tip şa s.

Pentru un $\varepsilon > 0$ suficient de mic, imaginile opuse $D := f^{-1}(-\infty, f_2(p) + \varepsilon)$ şi $D' := f^{-1}(f(q) - \varepsilon, \infty)$ sunt discuri deschise iar imaginea inversă

$$f^{-1}[f(p) + \varepsilon, f(q) - \varepsilon] = \mathbb{RP}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$$

este o suprafaţă compactă cu două componente circulare ale frontierei, $f^{-1}(f(p) + \varepsilon)$ si $f^{-1}(f(q) - \varepsilon)$. Observăm că restricţia

$$f|_{\mathbb{RP}^2 \setminus (D \cup D')} : \mathbb{RP}^2 \setminus (D_1 \cup D_2) \to [f(p) + \varepsilon, f(q) - \varepsilon]$$

are un punct critic de index 1, deci un punct de tip şa s.

În continuare lipim succesiv g copii ale lui $\mathbb{RP}^2 \setminus (D \cup D')$, să spunem

$$M_1 := \mathbb{RP}^2 \setminus (D_1 \cup D_1'), \ldots, M_g := \mathbb{RP}^2 \setminus (D_g \cup D_g'),$$

de-a lungul frontierelor circulare

$$\partial D_i' = f_i^{-1}(f_i(q) - \varepsilon) \subset M_i \quad \text{şi} \quad \partial D_{i+1} := f_{i+1}^{-1}(f_{i+1}(p) + \varepsilon) \subset M_{i+1}$$

a lui $D_i' := f_i^{-1}(f_i(q) - \varepsilon, \infty)$ şi $D_{i+1} := f_{i+1}^{-1}(-\infty, f_{i+1}(p) + \varepsilon)$ pentru $i = 1, \ldots, g-1$, unde $f_i := f + iL : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}$ şi $L := \text{lungime}([f(p) + \varepsilon, f(q) - \varepsilon]) = f(q) - f(p) - 2\varepsilon$. Suprafaţa obţinută este $g\mathbb{RP}^2 \setminus (D_1 \cup D_g')$.

Observăm că f_i este o funcţie Morse cu un punct şa constant pe fiecare frontieră circulară $\partial D_i = f_i^{-1}(f_i(p) + \varepsilon)$ şi $\partial D_i' = f_i^{-1}(f_i(q) - \varepsilon)$ a lui M_i.

Mai mult decât atât, egalităţile $f_i|_{\partial D_i'} = f_{i+1}|_{\partial D_{i+1}}$ au loc pentru orice $i = 1, \ldots, g-1$, deci funcţia

$$F : g\mathbb{RP}^2 \setminus (D_1 \cup D_g') \to \mathbb{R}, \quad F|_{M_i} := f_i$$

este bine definită. De fapt, F este o funcţie Morse cu g puncte de tip şa, constante pe frontierele circulare

$$\partial D_1 = f_1^{-1}(f_1(p) + \varepsilon) \subset M_1 \quad \text{şi} \quad \partial D_g' = f_g^{-1}(f_g(q) - \varepsilon) \subset M_g.$$

Identificând frontierele circulare ∂D_1 şi $\partial D_g'$ ale lui $g\mathbb{RP}^2 \setminus (D_1 \cup D_g')$, printr-un difeomorfism convenabil $\varphi : \partial D_1 \to \partial D_g'$, obţinem suprafaţa neorientabilă $(g+2)\mathbb{RP}^2$.

Identificând $\min F$ cu $\max F$ în $\operatorname{Im}(F)$ obţinem cercul S^1. De asemenea, funcţia Morse

$$g\mathbb{RP}^2 \setminus (D_1 \cup D_g') \to \operatorname{Im}(F), \quad x \mapsto F(x)$$

ne conduce la o funcţie Morse circulară

$$f_0 : (g+2)\mathbb{RP}^2 = g\mathbb{RP}^2 \setminus (D_1 \cup D_g')/\{x = \varphi(x)\} \to S^1 = \operatorname{Im}(F)/\{\min F = \max F\},$$

cu g puncte şa. Rezultă că $\gamma_{S^1}((g+2)\mathbb{RP}^2) \leq g$ pentru orice $g \geq 1$.

Pentru inegalitatea inversă vom împărţi demonstraţia în două cazuri:

Considerăm mai întâi cazul suprafeţelor închise neorientabile cu genul par, $(2g+2)\mathbb{RP}^2$, $g \geq 0$. Conform Propoziţiei 4.2.1, obţinem relaţia

$$\gamma_{S^1}((2g+2)\mathbb{RP}^2) = \gamma_{S^1}(\Sigma_{2g+1}/\mathbb{Z}_2) \geq \frac{1}{2}\gamma_{S^1}(\Sigma_{2g+1}) = 2g = -\chi((2g+2)\mathbb{RP}^2).$$

Pentru cazul suprafeţelor închise neorientabile de gen neorientabil impar $2g+3$, $g \geq 0$, considerăm acoperirea dublă orientabilă $(2g+3)\mathbb{RP}^2$

$$\Sigma_{2g+2} \to (2g+3)\mathbb{RP}^2.$$

Conform Propoziţiei 4.2.1 şi cazului suprafeţelor închise neorientabile de gen par, obţinem că

$$\begin{aligned}
\gamma_{S^1}(\Sigma_{2g+2}) \leq 2\gamma_{S^1}((2g+3)\mathbb{RP}^2) &\Leftrightarrow 2\gamma_{S^1}((2g+3)\mathbb{RP}^2) \geq 2(2g+2-1) \\
&\Leftrightarrow \gamma_{S^1}((2g+3)\mathbb{RP}^2) \geq 2g+1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{RP}^2((2g+3)\mathbb{RP}^2) \geq -\chi((2g+3)\mathbb{RP}^2).
\end{aligned}$$

Am demonstrat aşadar Teorema 4.3.2 în cazul suprafeţelor neorientabile $g\mathbb{RP}^2$ cu $g \geq 3$.

Pe de altă parte $\gamma_{S^1}(\mathbb{RP}^2) = 3$ şi $2\mathbb{RP}^2$ este sticla lui Klein care este un fibrat peste S^1 cu fibra S^1, adică avem $\gamma_{S^1}(2\mathbb{RP}^2) = 0 = -\chi(2\mathbb{RP}^2)$. $\square$

Observaţia 4.4.1 Pentru inegalitatea $\gamma_{S^1}((2g+2)\mathbb{RP}^2) \leq 2g$ putem construi o funcţie Morse circulară particulară

$$f_0 : (2g+2)\mathbb{RP}^2 = \Sigma_{2g+1}/\mathbb{Z}_2 \to S^1$$

cu exact $2g$ puncte critice în următorul mod. Considerăm funcţia $g_0 := f|_{\Sigma_{2g+1}} : \Sigma_{2g+1} \to S^1$ din demonstraţia Teoremei 4.3.2 şi amintim că g_0 are exact $4g$ puncte critice şi $4g$ valori critice, adică $\mathrm{card}(g_0(C(g_0)))$ este de asemenea $4g$. Datorită modului cum am scufundat Σ_{2g+1}, valorile critice ale lui g_0, alături de punctele sale critice, sunt perechi antipodale în S^1 şi respectiv în Σ_{2g+1}. Considerăm proiecţia de acoperire $p : S^1 \to P^1(\mathbb{R})$, $p(x) = [x] := \{-x, x\}$ şi obţinem de fapt o acoperire ciclică de ordin $2p : S^1 \to S^1$, $\mathbb{RP}^1$ şi S^1 fiind difeomorfe. Funcţia compusă $p \circ g_0$ este o funcţie Morse circulară cu $2g$ valori critice, ale căror imagini inverse conţin două puncte critice. Deci avem $\mathrm{card}(C(p \circ g_0)) = 4g$.

De fapt $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{-x, x\} \subseteq (p \circ g_0)^{-1}(x)$, pentru orice $x \in \Sigma_{2g+1}$.

Rezultă că restricţia g_0 conduce la o funcţie Morse $f_0 : \Sigma_{2g+1}/\mathbb{Z}_2 \to S^1$ astfel încât $p \circ g_0 = f_0 \circ \pi$.

În plus avem $\pi^{-1}(C(f_0)) = C(p \circ g_0)$ şi deci $\mathrm{card}(C(p \circ g_0)) = 2\mathrm{card}(C(f_0))$, adică $\mathrm{card}(C(f_0)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{card}(C(p \circ g_0)) = 2g$.

4.5 Numărul punctelor de tangenţă a suprafeţelor scufundate în primul grup Heisenberg

Dacă $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ este o suprafaţă şi $f : \mathbb{R}^3 \to N$ este o submersie, unde N este fie axa reală, fie cercul S^1, atunci punctele critice ale restricţiei $f|_\Sigma$ sunt punctele de tangenţă, în sens Balogh [21], ale suprafeţei Σ în raport cu distribuţia involutivă a planelor tangente pe fibrele lui f.

Această observaţie ne conduce la studierea numărului minim de puncte de tangenţă a unei suprafeţe în raport cu distribuţiile sale noninvolutive verticale, pentru toate scufundările suprafeţei în spaţiul suport al distribuţiilor.

Această secţiune este dedicată acestui subiect. De exemplu, punctele critice ale unei funcţii înălţime sunt punctele de tangenţă ale varietăţii scufundate în spaţiul euclidean în raport cu distribuţia involutivă a hiperplanelor paralele perpendiculare pe direcţia funcţiei înălţime.

Într-adevăr, aceasta este de fapt distribuţia fibrelor funcţiei înălţime şi punctele regulare ale restricţiei sale la varietatea scufundată sunt, potrivit Teoremei 4.3.1, exact acele puncte ale varietăţii scufundate în care planul tangent intersectează transversal fibra funcţiei înălţime în acel punct, adică cele două plane sunt diferite. Deci punctele critice ale restricţiei funcţiei înălţime la varietatea scufundată sunt exact acele puncte în care planele coincid, adică punctele de tangenţă. De asemenea, punctele critice ale restricţiei $f|_{\Sigma_g}$ sunt punctele de tangenţă ale lui Σ_g în raport cu distribuţia involutivă a semiplanelor $f^{-1}(q)$ când q se deplasează pe cercul S^1. Cu alte cuvinte, punctele de tangenţă reprezintă un concept extins al noţiunii de punct critic al unei funcţii reale sau circulare, într-un context mai general.

Acesta este motivul pentru care studiem acum, urmărind lucrarea D. Andrica, D. Mangra, C. Pintea [14], mărimea mulţimii punctelor de tangenţă în raport cu o distribuţie noninvolutivă, mai exact distribuţia orizontală

$$\mathcal{H}_n = \mathrm{Span}\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n\}$$

a grupului Heisenberg $\mathbb{H}^n = (\mathbb{R}^{2n+1}, *)$, unde

$$X_i = \partial_{x_i} + 2y_i\partial_t \quad \text{şi} \quad Y_i = \partial_{y_i} - 2x_i\partial_t$$

pentru $i = 1, \ldots, n$. Vom acorda o atenţie specială numărului minim de puncte de tangenţă a unei suprafeţe Σ_g compactă, orientabilă, de gen g, scufundată în primul grup Heisenberg $\mathbb{H}^1$.

Amintim că o C^r-diferenţiabilă, $r \in \mathbb{N}$, distribuţie netedă $\mathcal{D}$ de rang n pe o mulţime deschisă $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ este o asociere de clasă C^r la fiecare punct $z \in U$ a unui subspaţiu liniar n-dimensional $\mathcal{D}(z) \preceq T_z(\mathbb{R}^{n+m})$. $\mathcal{D}$ este de obicei descrisă fie prin n câmpuri de vectori de clasă C^r liniar independenţi

$$\{X_1, \ldots, X_n\} \tag{4.5.1}$$

astfel încât $\{X_1(z), \ldots, X_n(z)\}$ formează o bază pentru $\mathcal{D}(z)$, pentru orice $z \in U$, sau ca o intersecţie de nuclee a m 1-forme liniar independente $\{\vartheta^1, \ldots, \vartheta^m\}$ cu coeficienţi de clasă C^r pe U, adică

$$\mathcal{D} = \ker(\vartheta^1) \cap \ldots \cap \ker(\vartheta^m). \tag{4.5.2}$$

Definiţia 4.5.1 Fie $\mathcal{D}$ o C^1 distribuţie de rang n pe o mulţime $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ şi $S \subseteq U$ o C^1 varietate n-dimensională. Un punct $z \in S$ se numeşte **punct de tangenţă** al lui S în raport cu $\mathcal{D}$ dacă şi numai dacă $T_z(S) = \mathcal{D}(z)$. Mulţimea acestor puncte se numeşte **mulţimea de tangenţă**, sau pe scurt, **tangenţa** lui S în raport cu D, notată prin

$$\tau(S, \mathcal{D}) := \{z \in S : T_z(S) = \mathcal{D}(z)\}. \tag{4.5.3}$$

Definiţia 4.5.2 Dacă M^m este o varietate diferenţiabilă, atunci numărul minim de tangenţă a lui M în raport cu distribuţia $\mathcal{D}$ pe $\mathbb{R}^{n+m}$ este definit prin

$$\mu\tau\nu(M, \mathcal{D}) := \min\{\text{card}(\tau(f(M), \mathcal{D})) : f \in \text{Embed}(M, \mathbb{R}^{n+m})\},$$

unde $\text{Embed}(M, \mathbb{R}^{n+m})$ este mulţimea tuturor scufundărilor varietăţii M în spaţiul $\mathbb{R}^{n+m}$.

Observaţia 4.5.1 Dacă M este o $2n$-varietate orientabilă compactă cu caracteristica Euler-Poincaré diferită de zero, atunci, în conformitate cu [22, exemplul 8.9], are loc relaţia

$$\mu\tau\nu(M, \mathcal{H}_n) \geq 2.$$

De fapt, avem $\mu\tau\nu(S^{2n}, \mathcal{H}_n) = 2$, deoarece caracteristica Euler-Poincaré a sferei S^{2n} este 2 şi admite o scufundare în $\mathbb{H}^n$ cu exact două puncte de tangenţă. Imaginea acestei scufundări este binecunoscuta sferă Korányi. Pe de altă parte, torul standard $T^{2n} \subset \mathbb{H}^n$ nu are deloc puncte de tangenţă [67], adică avem

$$\mu\tau\nu(T^{2n}, \mathcal{H}_n) = 0.$$

Teorema 4.5.1 *Dacă $g \geq 2$, atunci*

$$2 \leq \mu\tau\nu(\Sigma_g, \mathcal{H}_1) \leq 4g - 4.$$

Inegalitatea $\mu\tau\nu(\Sigma_g, \mathcal{H}_1) \geq 2$ este evidentă, deoarece

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g < 0.$$

Pentru inegalitatea inversă vom construi o scufundare a suprafeţei Σ_g cu $4g-4$, $\mathcal{H}_1$-puncte de tangenţă.

Pentru aceasta folosim posibilitatea ca Σ_1 să fie scufundată în $\mathbb{H}^1$ ca o suprafaţă de rotaţie şi construim o scufundare convenabilă a suprafeţei Σ_g în exteriorul lui Σ_1, operând anumite modificări pe Σ_1. Mânerele pe care vrem să le lipim vor fi de asemenea suprafeţe de rotaţie. Pentru aceasta, vom acorda o atenţie specială mărimii mulţimilor de tangenţă a suprafeţelor de rotaţie din interiorul lui $\mathbb{H}^1$ în raport cu distribuţia orizontală $\mathcal{H}_1$.

Problema 4.5.1 Este precisă estimarea superioară din Teorema 4.5.1, asupra numărului punctelor de tangenţă în raport cu scufundările suprafeţei compacte orientabile de gen g în primul grup Heisenberg ?

Observăm că estimarea superioară $\mu\tau\nu(\Sigma_g, \mathcal{H}_1) \leq 4g-4$ poate fi rescrisă în termenii caracteristicii Euler-Poincaré a lui Σ_g, un invariant puternic al suprafeţei care determină tipul său topologic, deci $\mu\tau\nu(\Sigma_g, \mathcal{H}_1) + 2\chi(\Sigma_g) \leq 0$.

Problema 4.5.2 Care sunt invarianţii relevanţi ai unei varietăţi compacte $2n$-dimensionale care poate fi scufundată în al n-lea grup Heisenberg $\mathbb{H}^n$ pentru estimări precise a numărului de puncte de tangenţă ale unei astfel de hipersuprafeţe scufundate în raport cu toate scufundările sale în grupul Heisenberg $\mathbb{H}^n$?

4.5.1 Suprafeţe de rotaţie din $\mathbb{H}^1$ cu un număr redus de puncte de tangenţă

Fiecare suprafaţă de rotaţie S obţinută prin rotaţia unei curbe plane

$$x = f(v), \quad z = v,$$

cu $f > 0$, în jurul unei drepte verticale

$$x = x_0, \quad y = y_0,$$

admite o parametrizare locală de tipul

$$\begin{array}{l} x = x_0 + f(v)\cos u \\ y = y_0 + f(v)\sin u \\ z = g(v) \end{array}, \quad u \in I,\ v \in J,$$

unde I este un interval deschis de lungime 2π şi J simetricul său în raport cu originea, adică $J = (-a, a)$. Funcţia f satisface următoarele condiţii:

$$f \text{ este mărginită },\ f'' > 0 \text{ şi } \lim_{v \to \pm a} f'(v) = \pm\infty. \tag{4.5.4}$$

Ecuaţia vectorială a suprafeţei noastre de rotaţie este

$$\overrightarrow{r} = (x_0 + f(v)\cos u)\partial_x + (x_0 + f(v)\sin u)\partial_y + v\partial_t$$

şi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}_u &= -(f(v)\sin u)\partial_x + (f(v)\cos u)\partial_y \\
\overrightarrow{r}_v &= (f'(v)\cos u)\partial_x + (f'(v)\sin u)\partial_y + \partial_t \\
\overrightarrow{r}_u \wedge \overrightarrow{r}_v &= (f(v)\cos u)\partial_x + (f(v)\sin u)\partial_y - f(v)f'(v)\partial_t.
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, câmpurile orizontale de vectori ale distribuţiei $\mathcal{H}_1$ sunt

$$X = \partial_x + 2y\partial_t, \quad Y = \partial_y - 2x\partial_t$$

iar produsul lor vectorial este

$$X \wedge Y = -2y\partial_x + 2x\partial_y + \partial_t.$$

Deci, punctul $r(u,v) := (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in S$ este un punct orizontal dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{r}_u \wedge \overrightarrow{r}_v$, $X \wedge Y$ sunt liniari dependenţi în $r(u,v)$, adică avem

$$\sin u + f(v)f'(v)\cos u = -x_0 f'(v)$$

$$f(v)f'(v)\sin u - \cos u = -y_0 f'(v).$$

Aşadar, obţinem

$$\begin{aligned}
\sin u &= -f'(v)\frac{x_0 + y_0 f(v)f'(v)}{1 + f^2(v)(f'(v))^2} \\
\cos u &= -f'(v)\frac{x_0 f(v)f'(v) - y_0}{1 + f^2(v)(f'(v))^2}.
\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

Observaţia 4.5.2 Nicio suprafaţă de rotaţie în jurul axei z nu are $\mathcal{H}_1$ puncte de tangenţă, deoarece ecuaţiile (4.5.5) nu au soluţii pentru $x_0 = y_0 = 0$.

Identitatea $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ ne conduce la ecuaţia

$$\left(f'(v)\right)^2 = \frac{1}{\|(x_0, y_0)\|^2 - f^2(v)}, \tag{4.5.6}$$

care are cel puţin două soluţii pe intervalul $J = (-a, a)$, deoarece membrul drept al ecuaţiei (4.5.6) este mărginit şi $(f')^2$ acoperă semidreapta reală pozitivă $[0, \infty)$ de două ori, o dată pe intervalul $(-a, 0]$ şi o dată pe intervalul $[0, a)$. Pentru alegeri convenabile ale funcţiei f, ecuaţia (4.5.6) are exact două soluţii. O asemenea alegere este

$$f(v) = 2 - \sqrt{\frac{2 - v^2}{2}} \tag{4.5.7}$$

pentru $a = \sqrt{2}$ şi $\|(x_0, y_0)\| = 3$. Într-adevăr, ecuaţia (4.5.6) pentru alegerea (4.5.7) a funcţiei f, devine:

$$2v^2\sqrt{2(2 - v^2)} = -2v^4 - 3v^2 + 4,$$

care are, în mod evident, exact două soluţii.

Demonstraţia Teoremei 4.5.1. Curba închisă convexă în planul xOz, descrisă după enunţul Teoremei 4.5.1 se presupune că are un unic centru în punctul $(3, 0, 0)$. Coordonatele punctelor p_i şi q_i sunt de forma (x_i, y_i, z_i) şi $(x_i, y_i, -z_i)$, pentru $i = 1, \dots, g-1$. Mai mult, $\|(x_i, y_i)\|^2 := x_i^2 + y_i^2 = 3$, pentru orice $i = 1, \dots, g-1$. Mânerele pe care le folosim în operaţiile efectuate sunt suprafeţe de rotaţie în jurul dreptelor verticale $x = x_i$ şi $y = y_i$ cu ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = x_i + f(v)\cos u \\ y = y_i + f(v)\sin u \qquad u \in I,\ v \in J. \\ z = v \end{cases}$$

Notăm cu v_i şi v_i' rădăcinile ecuaţiilor

$$(f'(v))^2 = \frac{1}{\|(x_i, y_i)\|^2 - f^2(v)}, \tag{4.5.8}$$

cu alegerea (4.5.7) a funcţiei f. Ecuaţiile care corespund lui (4.5.5) sunt

$$\begin{cases} \sin u = -f'(v_i)\dfrac{x_i + y_i f(v_i) f'(v_i)}{1 + f^2(v_i)(f'(v_i))^2} \\ \cos u = -f'(v_i)\dfrac{x_i f(v_i) f'(v_i) - y_i}{1 + f^2(v_i)(f'(v_i))^2}, \end{cases} \tag{4.5.9}$$

$$\begin{cases} \sin u = -f'(v_i')\dfrac{x_i + y_i f(v_i') f'(v_i')}{1 + f^2(v_i')(f'(v_i'))^2} \\ \cos u = -f'(v_i')\dfrac{x_i f(v_i') f'(v_i') - y_i}{1 + f^2(v_i')(f'(v_i'))^2}. \end{cases} \tag{4.5.10}$$

Deoarece graficul funcţiilor sinus şi cosinus pe orice interval de lungime 2π se intersectează de cel mult două ori cu orice dreaptă paralelă cu axa u, rezultă că ecuaţiile (4.5.9) şi (4.5.10) au cel mult două rădăcini pentru orice $i = 1, \dots, g-1$. Pe de altă parte, suprafaţa Σ_g scufundată în $\mathbb{H}^1$, după descrierea din Teorema 4.5.1, nu are alte $\mathcal{H}_1$-puncte de tangenţă deoarece pe suprafeţe inelare $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{A}'$ planele sale tangente sunt paralele cu planul xOy, o relaţie de paralelism care are loc pentru planele distribuţiei $\mathcal{H}_1$ doar de-a lungul axei z iar suprafeţele inelare $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{A}'$ nu au puncte comune cu axa z. Partea care rămâne din suprafaţa Σ_g scufundată este complet conţinută în Σ_1, care este la rândul ei o suprafaţă de rotaţie în jurul axei z fără $\mathcal{H}_1$-puncte de tangenţă, după cum am văzut în Observaţia 4.5.2. Aşadar, suprafaţa scufundată Σ_g are cel mult $4(g-1)$ $\mathcal{H}_1$-puncte de tangenţă.

Un număr minim de tangenţă, în raport cu o anumită distribuţie $\mathcal{D}$ pe $\mathbb{R}^{n+m}$, poate fi definit pentru o varietate M^n care este doar imersabilă în $\mathbb{R}^{n+m}$ prin relaţia

$$mtn(M, \mathcal{D}) := \min\{\operatorname{card}(\tau(f, \mathcal{D})) : f \in \operatorname{Imm}(M, \mathbb{R}^{n+m})\},$$

unde $\operatorname{Imm}(M, \mathbb{R}^{n+m})$ este mulţimea tuturor imersiilor varietăţii M în $\mathbb{R}^{n+m}$ şi $\tau(f, \mathcal{D}) := \{p \in M : \operatorname{Im}(df)_p = \mathcal{D}(f(p))\}$. Dacă M poate fi scufundată în $\mathbb{R}^{n+m}$, observăm că $mtn(M, \mathcal{D}) \le \mu\tau\nu(M, \mathcal{D})$.

Problema 4.5.3 Ne punem întrebarea dacă $mtn(M, \mathcal{D}) = \mu\tau\nu(M, \mathcal{D})$.

Capitolul 5

Inegalităţile Morse-Novikov pentru funcţii circulare

În acest capitol vom prezenta noţiuni şi rezultate importante referitoare la inegalităţile Morse-Novikov pentru funcţii circulare, ([60], [61]).

Ultima secţiune cuprinde rezultate obţinute pentru estimarea numărului de puncte critice în cazul funcţiilor circulare, preluate după lucrările lui D. Andrica [4], D. Mangra [46], [47].

5.1 Complexul Morse-Smale

Definiţia 5.1.1 ([61]) **Complexul Morse-Smale** $C^{MS}(M, f, v)$, definit pentru o funcţie Morse $f : M \to \mathbb{R}$, un câmp de vectori de tip gradient $v \in \mathcal{G}(f)$, şi un spaţiu de acoperire oarecare $\widetilde{M}$ a lui M cu proiecţia de acoperire π, este un complex de lanţuri de $\mathbb{Z}[\pi]$-module libere cu

$$d_i : C^{MS}(M, f, v)_i = \mathbb{Z}[\pi]^{c_i(f)} \to C^{MS}(M, f, v)_{i-1} = \mathbb{Z}[\pi]^{c_{i-1}(f)}$$
$$\widetilde{p} \to \sum_{\widetilde{q}} n(\widetilde{p}, \widetilde{q})\widetilde{q},$$

unde $n(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \in \mathbb{Z}$ este numărul finit de linii de flux $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ ale $\widetilde{v}$-gradientului, cu originea punctul critic $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ al funcţiei $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$, de index i şi extremitatea în punctul critic $\widetilde{q} \in \widetilde{M}$ de index $i - 1$.

Dacă alegem o liftare oarecare a lui f pentru fiecare punct critic $p \in M$ la un punct critic $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ a lui $\widetilde{f}$, se obţine o bază pentru $C^{MS}(M, f, v)$.

Complexul Morse-Smale este complexul de lanţuri

$$C^{MS}(M, f, v) = C(\widetilde{M})$$

corespunzător CW-descompunerii lui $\widetilde{M}$ în care i-celulele sunt liftările i-mânerelor h^i.

Omologia complexului Morse-Smale este izomorfă cu omologia singulară a lui M, deci avem:

$$H_*(C^{MS}(M, f, v)) \cong H_*(M).$$

Dacă $\widetilde{M} = M$ atunci $C^{MS}(M, f, v) = C(M)$. Această proprietate are loc când varietatea M este de exemplu simplu conexă.

Propoziţia 5.1.1 *Inegalităţile lui Morse sunt:*

$$c_i(f) \geq b_i(M) + q_i(M) + q_{i-1}(M),$$

unde $b_i(M)$ sunt numerele Betti ale lui M,

$$b_i(M) = \dim_{\mathbb{Z}}(H_i(M)/T_i(M)),$$

şi $q_i(M)$ sunt definite de numărul minim de generatori ai lui $T_i(M)$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Aici $T_i(M) = \{x \in H_i(M) : nx = 0$ pentru orice $n \neq 0 \in \mathbb{Z}\}$ reprezintă subgrupul de torsiune a lui $H_i(M)$.

Numerele Betti reprezintă, în teoria Morse, limite inferioare ale numărului de puncte critice ale unei funcţii Morse.

Dacă varietatea M este simplu conexă, adică avem $\pi_1(M) = \{0\}$, şi $m \geq 6$, atunci există o funcţie Morse cu proprietatea

$$c_i(f) = b_i(M) + q_i(M) + q_{i-1}(M),$$

pentru $i = 0, 1, \ldots, m$.

Acest rezultat a fost demonstrat de S. Smale şi implică conjectura lui Poincaré pentru dimensiunea $m \geq 6$ ([32]).

5.2 Complexul Novikov

Complexul Novikov se defineşte în mod analog cu complexul Morse-Smale
(o construcţie detaliată apare în lucrarea lui A. Ranicki [61]).

Definiţia 5.2.1 Fie $f : M \to S^1$ o funcţie Morse circulară şi fie $v \in \mathcal{G}(f)$ un câmp de vectori de tip gradient a lui f.

Complexul Novikov $C^{Nov}(M, f, v)$ este un $\widehat{\mathbb{Z}[\Pi]}$-complex de lanţuri liber generat astfel încât:

$$d_i : C^{Nov}(M, f, v)_i = \mathbb{Z}[\pi]_\lambda((z))^{c_i(f)} \to C^{Nov}(M, f, v)_{i-1} = \mathbb{Z}[\pi]_\lambda((z))^{c_{i-1}(f)}.$$

$$\widetilde{p} \to \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\widetilde{q}} n(\widetilde{p}, z^i\widetilde{q}) z^i \widetilde{q},$$

unde $n(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \in \mathbb{Z}$ este numărul finit al liniilor de flux $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ ale $\widetilde{v}$-gradientului, pornind din punctul critic $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ al funcţiei $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ de index i şi oprindu-se în punctul critic $\widetilde{q} \in \widetilde{M}$ de index $i - 1$.

5.3 Inegalităţile Morse-Novikov

Definiţia 5.3.1 ([61]) Numerele Novikov ale oricărui CW-complex M şi $f \in H^1(M)$ sunt $b_i^{Nov}(M, f)$ şi $q_i^{Nov}(M, f)$, unde

$$b_i^{Nov}(M, f) = \dim_{\mathbb{Z}((z))}(H_i^{Nov}(M, f)/T_i^{Nov}(M, f))$$

sunt numerele Betti ale omologiei Novikov şi $q_i^{Nov}(M,f)$ este numărul minim de generatori ai lui $T_i^{Nov}(M,f)$, unde

$$T_i^{Nov}(M,f) = \{x \in H_i^{Nov}(M,f) : ax = 0, a \neq 0 \in \mathbb{Z}((z))\}$$

este $\mathbb{Z}((z))$-submodul de torsiune al lui $H_i^{Nov}(M,f)$.

Teorema 5.3.1 (Inegalităţile Morse-Novikov) *Pentru o varietate compactă m-dimensională M şi o funcţie Morse circulară $f : M \to S^1$ inegalităţile Morse-Novikov sunt, ([54]):*

$$c_i(f) \geq b_i^{Nov}(M,f) + q_i^{Nov}(M,f) + q_{i-1}^{Nov}(M,f), \ i = 0,1,\ldots,m.$$

Următorul rezultat a fost demonstrat de M. Farber în lucrarea [33].

Teorema 5.3.2 ([33]) *Pentru $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ şi $m \geq 6$, fie $f : M \to S^1$ o funcţie Morse circulară, $1 \in [M,S^1] = H^1(M)$ cu un număr minim de puncte critice. Atunci, pentru orice $i = 0,1,\ldots,m$ relaţia următoare este adevărată:*

$$c_i(f) = b_i^{Nov}(M,f) + q_i^{Nov}(M,f) + q_{i-1}^{Nov}(M,f).$$

5.4 Estimarea numărului de puncte critice ale unei funcţii circulare

În continuare vom folosi inegalităţile Morse-Novikov pentru a determina o margine inferioară pentru $\gamma_{S^1}(M)$, urmărind lucrările D. Mangra [46], [47].

Fie $f : M \to S^1$ o funcţie Morse circulară şi fie $f^* : H^1(S^1) \to H^1(M)$ omeomorfismul indus în coomologie de f. Notăm

$$F^1(M) = \{f^*(1) : f \in \mathcal{F}(M,S^1)\} \subseteq H^1(M).$$

Teorema 5.4.1 *Următoarea inegalitate este adevărată:*

$$\gamma_{S^1}(M) \geq \min\{b^{Nov}(\xi) + q_m^{Nov}(\xi) + 2\sum_{i=0}^{m-1} q_i^{Nov}(\xi) : \xi \in F^1(M)\},$$

unde $b^{Nov}(\xi) = \sum_{i=0}^{m} b_i^{Nov}(\xi)$ este numărul Betti total al varietăţii M în raport cu clasa de coomologie $\xi \in H^1(M)$.

Teorema 5.4.2 *Dacă $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ şi $m \geq 6$, următoarea afirmaţie este adevărată:*

$$\gamma_{S^1}(M) = \min\{b^{Nov}(\xi) + q_m^{Nov}(\xi) + 2\sum_{i=0}^{m-1} q_i^{Nov}(\xi) : \xi \in F^1(M)\}.$$

Referitor la mulţimea $F^1(M)$ care apare în Teoremele 5.4.1 şi 5.4.2, formulăm următoarea problemă:
Conjectura 4.4.1 Pentru orice varietate compactă M, are loc egalitatea

$$F^1(M) = H^1(M).$$

Bibliografie

[1] M. Agoston, *Algebraic Topology*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1976.

[2] D. Andrica, *A Remark on the Critical Points of a Smooth Mapping*, Babeş-Bolyai University Research Seminars, Seminar on Geometry, Preprint 4, 1989, 25-28.

[3] D. Andrica, *Critical Point Theory and Some Applications*, Cluj University Press, 2005.

[4] D. Andrica, *Functions with minimal critical set: new results and open problems*, Mathematical Analysis and Applications, Th.M. Rassias ed., Hadronic Press, 1999, 1-10.

[5] D. Andrica, *Some Remarks Concerning the Morse-Smale Characteristic of a Compact Manifold*, Mathematica, L'Analyse Numerique et la Theorie de l'Approximation, Tome 21, 1, 1992, 9-13.

[6] D. Andrica, *The Morse-Smale Characteristic of a Simply-Connected Compact Manifold*, Mathematica, L'Analyse Numerique et la Theorie de l'Approximation, Tome 22, 2, 1993, 121-124.

[7] D. Andrica, *Note on a Result of G. M. Rassias*, Proceedings of the 23rd Conference on Geometry and Topology (D. Andrica, P. Enghiş, eds.), Cluj-Napoca, 1994, 1-5.

[8] D. Andrica, *On the F-perfect Morse Functions on Compact Manifolds*, Mathematica, Tome 41(64), 1999, 3-99.

[9] D. Andrica, *On a Result Concerning a Property of Closed Manifolds*, Mathematical Inequalities and Applications, 4(1), 2001, 151-155.

[10] D. Andrica, L. Funar, *On smooth maps with finitely many critical points*, J. Lond. Math. Soc., II Ser. 69, 2004, 783-800.

[11] D. Andrica, L. Funar, *Addendum: On smooth maps with finitely many critical points*, J. Lond. Math. Soc., II Ser. 73, 2006, 231-236.

[12] D. Andrica, D. Mangra, *Morse-Smale characteristic in circle-valued Morse Theory*, Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics, ICTAMI 2009, Alba Iulia, Acta Universitatis Apulensis, 22, 2010, 215–220, (prezentată la International Conference on Theory and Applications in Mathematics and Informatics, Alba Iulia, 3-6 septembrie 2009).

[13] D. Andrica, D. Mangra, *Some remarks on circle-valued Morse functions*, Abstract booklet Mathematics and Computer Science Section International Conference on Sciences November 12th-14th Oradea, Analele Universitatii din Oradea, Fascicula de Matematica, Tom XVII, Issue No. 1, 2010, 23–27, (prezentată la International Conference on Sciences, Oradea, 12-13 noiembrie 2009).

[14] D. Andrica, D. Mangra, C. Pintea, *The circular Morse-Smale characteristic of closed surfaces*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, acceptată spre publicare.

[15] D. Andrica, D. Mangra, C. Pintea, *Global Analysis of Circle-Valued Mappings*, în "Topics in Mathematical Analysis and Applications", L. Toth and Th. M. Rassias, Eds., Springer, 2014, acceptată spre publicare.

[16] D. Andrica, C. Pintea, *Critical points of vector-valued functions*, Proceedings of the 24th conference of geometry and topology, Part II, Timişoara, 1996, 15-24.

[17] D. Andrica, C. Pintea, *Some situations when the topological φ-category is infinite*, Differential geometry and applications. Proceedings of the 6th international conference, Brno, Masaryk University, 1996, 239-244.

[18] D. Andrica, C. Pintea, *Recent results on the size of critical sets*, in "Essays in Mathematics and its Applications" (dedicated to Stephen Smale), P. Pardalos, Th. M. Rassias (Eds.), Springer, 2012.

[19] D. Andrica, M. Todea, *Perfect Morse Functions and Some Applications*, Proceedings of ICTAMI 2004, Thessaloniki, Greece, September 16-18, 2004.

[20] D. Andrica, M. Todea, *A Counterexample to a Result Concerning Closed Manifolds*, Nonlinear Funct. Anal. and Appl., 7(1), 2002, 39-43.

[21] Z. Balogh, *Size of characteristic sets and functions with prescribed gradient*, J. Reine Angew. Math., 564, 2003, 63-83.

[22] Z. Balogh, C. Pintea, H. Rohner, *Size of tangencies to non-involutive distributions*, to be published by Indiana Univ. Math. J.

[23] R. Bott, *Morse theory indomitable*, Publications Mathematiques de L'Ihes, 68(1), 1988, 99-114.

[24] R. Bott, *Lectures on Morse theory, old and new*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 7, 1982, 331-358.

[25] D. Burghelea, *Introduction to Differential Topology*, (Romanian), Bucharest, 1973.

[26] A. Cavicchioli, *Covering Numbers of Manifolds and Critical Points of a Morse Functions*, Israel Journal Of Mathematics, 70(3), 1990, 279-304.

[27] G. Cicortaş, *Elemente de teorie Morse şi Aplicaţii*, Presa Universitară Clujeană, 2008.

[28] O. Cornea, L. Lupton, I. Oprea, T. Tanré, *Lusternik-Schnirelmann category*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 103, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[29] A. Dimca, *Singularities and Topology of Hypersurfaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[30] B. Doubrovine, *Géométrie Contemporaine, Méthodes et Applications*, MIR, Moscow, vol. III, 1987.

[31] C. Ehresmann, *Sur les espaces fibrés différentiables*, C.R. Acad. Sci. Paris 224, 1947, 1611-1612.

[32] M. Farber, *Topology of Closed One-Forms*, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 108, American Mathematical Society, 2003.

[33] M. Farber, *Exactness of the Novikov inequalities*, Funct. Anal. Appl., 19, 1985, 40-48.

[34] A.T. Fomenko, *Homotopic Topology*, Akademiai Kiado, Budapest, 1986.

[35] R. Forman, *Combinatorial Differential Topology and Geometry*, New Perspectives in Geometric Combinatorics, MSRI Publications, 38, 1999.

[36] C. Godbillon, *Elements de Topologie Algebrique*, Hermann, Paris, 1971.

[37] A. Gramain, *Topologie des Surfaces*, Presses Univ. de France, 1971.

[38] M. Gromov, *Curvature, Diameter and Betti Numbers*, Comment. Math. Helv., 56, 1981, 179-195.

[39] M. Hirsch, *Differential topology*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[40] M. Hutchings, Lee Yi-Jen, *Circle-valued Morse Theory and Reidemeister torsion*, Geometry and Topology, 3, 1999, 369-396.

[41] N.H. Kuiper, *Minimal Total Absolute Curvature of Immersions*, Inventiones Math., 13, 1971, 179-204.

[42] N.H. Kuiper, *On Surfaces in Euclidean Three Space*, Bull. Soc. Math. Belg., 12, 1960, 5-12.

[43] N.H. Kuiper, *Tight embeddings and Maps. Submanifolds of Geometrical Class Three in E^n*, The Chern Symposium 1079 (Proc. Internat. Sympos., Berkley, Calif. 1979), 79-145, Springer-Verlag, 1980.

[44] J. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer Verlag, 2003.

[45] S. Maksymenko, *Deformations of circle-valued Morse functions on surfaces*, arXiv.org [math. GT], 2010.

[46] D. Mangra, *Morse inequalities for circle-valued functions*, Automation Computers Applied Mathematics, 19(1), 2010, 149-157, ISSN 1221-437X, (prezentată la The Thirteen International Conference on Applied Mathematics and Computer Science, 26-28 august 2010, Cluj-Napoca).

[47] D. Mangra, *Estimation of the number of critical points of circle-valued mappings*, Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics, ICTAMI 2011, Alba Iulia, Acta Universitatis Apulensis, Special Issue, 2011, 195–200, (prezentată la International Conference on Theory and Applications in Mathematics and Informatics, Alba Iulia, 21-24 iulie 2011).

[48] Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*, Iwanami Series in Modern Mathematics, 1997 (Translations of Mathematical Monographs, Vol. 208 AMS, 2002).

[49] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, 1963.

[50] R. Miron, I. Pop, *Topologie Algebrica*, Ed. Academiei Republicii Socialiste Romania, Bucureşti, 1974.

[51] M. Morse, *Relations between the critical points of a real function of n independent variables*, Trans. Amer. Math. Soc., 27, 1925, 345-396.

[52] M. Morse, *The calculus of variations in the large*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ, 18, 1934.

[53] M. Morse, *The Existence of Polar Non-Degenerate Functions on Differentiable Manifolds*, Ann. of Math., 71, 1960, 352-383.

[54] S.P. Novikov, *Multivalued functions and functionals. An analogue to Morse theory*, Soviet. Math. Dokl., 24, 1981, 222-226.

[55] S.P. Novikov, *The Hamiltonian formalism and a multi-valued analogue of Morse theory*, Russian Math. Surveys, 37(5), 1982, 1-56.

[56] A. Pajitnov, *Circle-valued Morse Theory*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2006.

[57] C. Pintea, *Differentiable mappings with an infinite number of critical points*, Proc. Am. Math. Soc., 128, 2000, 3435-3444.

[58] C. Pintea, *Some pairs of manifolds with infinite uncountable φ-category*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 21, 2003, 101-113.

[59] C. Pintea, *The size of some critical sets by means of dimension and algebraic φ-category*, Topol. Methods Nonlinear Anal., Vol. 35, 2010, 1-24.

[60] E. Pitcher, *Inequalities of critical point theory*, Bull. Amer. Math. Soc., 1958.

[61] A. Ranicki, *Circle valued Morse theory and Novikov homology*, Summer School on High-dimensional Manifold Topology, Trieste, 2001.

[62] G.M. Rassias, *On the Morse-Smale characteristic of a differentiable manifold*, Bull. Austral. Math. Soc., 20, 1979, 281-283.

[63] G.M. Rassias, *On the non-degenerated critical points of differentiable functions*, Tamkang J. of Math., 10, 1979, 67-73.

[64] V.V. Sharko, *Functions on Manifolds. Algebraic and Topological Aspects*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 131, American Mathematical Society, 1993.

[65] S. Smale, *On the structure of manifolds*, Amer. J. Math., 87, 1965.

[66] F. Takens, *The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik-Schnirelmann category*, Inventiones Math., 6, 1968, 197-244.

[67] J.T. Tyson, *Global conformal Assouad dimension in the Heisenberg group*, Conformal Geometry and Dynamics, An Electronic Journal of the American Mathematical Society, 12, 2008, 32-57.