UNIVERSITATEA BABEŞ - BOLYAI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
ŞCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

ABORDĂRI MODERNE ÎN TEORIA FUNCŢIILOR UNIVALENTE ÎN $\mathbb{C}$ ŞI $\mathbb{C}^n$

Teză de doctorat – Rezumat

Conducători ştiinţifici:

Prof. Dr. Gabriela Kohr
Prof. Dr. Mirela Kohr

Student doctorand:

Eduard Ştefan Grigoriciuc

Cluj-Napoca
2025

Cuprins

Introducere

Teza de faţă explorează atât rezultate clasice, cât și rezultate noi în teoria funcțiilor univalente de una şi mai multe variabile complexe. Teza urmează cursul acestui domeniu în ultimii ani, cuprinzând noțiuni legate de funcții univalente de o variabilă complexă, apoi legate de familii de aplicații biolomorfe în $\mathbb{C}^n$ și se încheie cu o parte dedicată aplicațiilor biolomorfe și operatorilor de extensie în spații Banach complexe. Teoria funcțiilor univalente este un subiect major în teoria funcțiilor geometrice, fiind intens studiată de mai mulți autori care au contribuit la dezvoltarea acestui domeniu.

Rezultatele incluse în această teză continuă, la o scară mai mică, munca excelentă a marilor profesori din Cluj-Napoca (menționăm aici pe Prof. dr. Petru T. Mocanu, Prof. dr. Grigore S. Sălăgean, Prof. dr. Gabriela Kohr și Prof. dr. Mirela Kohr), fiind inspirate de ideile lor inovatoare folosite de-a lungul anilor. Este de remarcat aici contribuția specială a Prof. dr. Gabriela Kohr împreună cu colaboratorii săi, în special Prof. dr. Ian Graham, Prof. dr. Hidetaka Hamada și Prof. dr. Mirela Kohr (a se vedea [45]).

Un rezultat important în teoria funcțiilor univalente în $\mathbb{C}$ este teorema lui Riemann care prezintă conform echivalența domeniilor simplu conexe în caz uni-dimensional (a se vedea de exemplu [45], [77]). Având în vedere acest rezultat, studiul funcțiilor univalente de o variabilă complexă poate fi redus la discul unitate $\mathbb{U}$. În dimensiuni mai mari, teorema lui Riemann nu are loc (a se vedea de exemplu [45]), iar această diferenţă majoră între $\mathbb{C}$ și $\mathbb{C}^n$, unde $n \geq 2$, a fost demonstrată de Poincaré (a se vedea [112]).

Începând cu Bieberbach (a se vedea [4]) care a obţinut în 1916 estimarea exactă a celui de-al doilea coeficient din dezvoltarea în serie Taylor a funcţiilor univalente normate pe discul unitate $\mathbb{U}$ (deci funcţii din clasa S), teoria funcțiilor univalente a suferit importante dezvoltări (mai ales datorită celor care au lucrat pentru a demonstra conjectura propusă de Bieberbach legată de estimările coeficienților pentru funcțiile din S). Unul dintre instrumentele importante folosite în acest context a fost teoria lanțurilor Loewner. Bazându-se pe aceste idei, L. de Branges a demonstrat conjectura lui Bieberbach, deschizând astfel noi direcții pentru studiul funcțiilor univalente. Mai mult, teoria Loewner a fost utilă și pentru a demonstra criterii de univalență, caracterizări analitice ale proprietăților geometrice (stelaritate, convexitate, spiralitate), raze de stelaritate, convexitate, univalență și alte rezultate strâns legate de funcțiile univalente în $\mathbb{C}$. Un alt pas important a fost făcut de Pommerenke (a se vedea [114]) care a demonstrat că orice funcţie $f \in S$ admite reprezentare parametrică, adică există un lanț Loewner $f(z,t)$ astfel încât $f = f(\cdot, 0)$ este primul element al acestui lanț. Diverse aspecte și aplicații ale acestei teorii pot fi găsite în monografiile lui Duren [19], Graham și Kohr [45], Pommerenke [114] și, de asemenea, în lucrările lui Conway [12], Goluzin [23], Mocanu, Bulboacă și Sălăgean [102].

În cazul n-dimensional, Cartan a studiat clasa $S(\mathbb{B}^n)$ a aplicațiilor biolomorfe normate pe bila unitate Euclidiană $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de exemplu [7], [45], [83]). Cartan a demonstrat că $S(\mathbb{B}^n)$ nu este compactă, deoarece nu este local uniform mărginită. Având în vedere această proprietate, obținem că $S(\mathbb{B}^n)$ nu admite o teoremă de deformare și distorsiune (a se vedea de exemplu [45]). Această problemă a fost rezolvată de Graham, Hamada și Kohr, care au introdus clasa $S^0(\mathbb{B}^n)$ a aplicațiilor care admit reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de exemplu [32]; a se vedea și [114]). Pentru $n = 1$, avem că $S^0(\mathbb{B}^1) = S$ (a se vedea de exemplu [114]). Totuși, dacă $n \geq 2$, atunci $S^0(\mathbb{B}^n)$ este strict inclusă în $S(\mathbb{B}^n)$. Mai mult, Graham, Kohr și Kohr (a se vedea [48]) au demonstrat că $S^0(\mathbb{B}^n)$ este compactă (a se vedea de exemplu [32], [45], [48]). Acest rezultat este unul dintre rezultatele care prezintă o diferență clară între cazul uni, respectiv multi-dimensional. Pe de altă parte, a deschis noi modalități de studiu a teoriei aplicațiilor biolomorfe în caz n-dimensional.

O altă temă importantă în teoria aplicațiilor biolomorfe de mai multe variabile compelxe este investigarea proprietăților geometrice (de ex. stelaritate, convexitate, spiralitate). Matsuno (a se vedea [99]) a studiat pentru prima dată noțiunea de stelaritate pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$, în timp ce Suffridge (a se vedea de exemplu [126]) a obţinut rezultate similare pe polidiscul unitate $\mathbb{U}^n$. În cazul infinit dimensional, Gurganus [57] și Suffridge [127] au obținut caracterizări ale stelarității. Alte proprietăți importante ale aplicațiilor stelate pe $\mathbb{B}^n$ au fost demonstrate de-a lungul timpului de Curt [14], Gong [24], Graham, Hamada și Kohr [32], Graham și Kohr [45], Kikuchi [80], Kohr [83], Kubicka și Poreda [86] și alții. Noţiunea de stelaritate de ordin $\alpha \in [0, 1)$ în $\mathbb{C}^n$ a fost introdusă de Kohr în [81], iar aproape stelaritatea de ordin $\alpha \in [0, 1)$ a fost definită de Feng în [22] în cazul infinit dimensional. Clasa aplicațiilor convexe a fost studiată de Suffridge [126] pe $\mathbb{U}^n$, respectiv de Kikuchi și Gong [80] pe $\mathbb{B}^n$. Mai târziu, Hamada și Kohr [68] au obținut generalizări ale condiției necesare și suficiente de convexitate dată de Kikuchi pentru cazul spațiilor Hilbert complexe. Aceeași problemă a fost studiată de Suffridge [127] pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$ în raport cu diferite norme. Alte contribuții importante în acest domeniu au fost aduse de Curt [14], Graham, Hamada și Kohr [32], Graham și Kohr [45], Liu [91], Roper și Suffridge [121]. În [57], Gurganus a propus ideea de spiralitate în raport cu un operator liniar normal cu proprietatea că valorile sale proprii au parte reală pozitivă. Acest concept a fost extins de Suffridge în cazul infinit dimensional în [128] (a se vedea şi generalizările considerate de Liu și Liu [94]).

La fel ca în caz uni-dimensional, teoria lanțurilor Loewner rămâne un instrument important şi în analiza aplicațiilor biolomorfe de mai multe variabile complexe. Pfaltzgraff [109] este primul contribuitor în acest domeniu, obținând generalizări pe bila unitate Euclidiană în $\mathbb{C}^n$ ale rezultatelor clasice din $\mathbb{C}$. Pe de altă parte, Poreda a extins aceste rezultate pe $\mathbb{U}^n$ în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [115], [116]). Numeroase proprietăți și rezultate din teoria lanțurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$ au fost obținute de Duren, Graham, Hamada și Kohr [20], Graham, Hamada și Kohr [32], Graham, Kohr și Kohr [47], Graham, Kohr și Pfaltzgraff [49] și, de asemenea, de Arosio [2], Curt și Kohr [15], Cristea [16], Poreda [117], Vodă [130]. Printre cele mai importante rezultate, menționăm că Graham, Hamada și Kohr (a se vedea [32]) au arătat că în $\mathbb{C}^n$ există aplicații biolomorfe normate care nu pot fi scufundate ca prime elemente ale lanțurilor Loewner. De asemenea, există aplicații care nu au reprezentare parametrică pe bila unitate din $\mathbb{C}^n$, unde $n \geq 2$. O altă diferență semnificativă între cazul uni-dimensional şi $\mathbb{C}^n$ cu $n \geq 2$ constă în faptul că în $\mathbb{C}$ ecuația diferențială Loewner are o unică soluție univalentă normată. În contrast, în caz multi-dimensional, acest rezultat nu este adevărat (a se vedea de exemplu [32], [114]). Duren, Graham, Hamada și Kohr au studiat forma soluțiilor generale ale ecuației diferențiale Loewner în [20].

Un punct de turnură în evoluția teoriei aplicațiilor biolomorfe de mai multe variabile complexe a fost demonstrarea compactității familiei Carathéodory $\mathcal{M}$ de către Graham, Hamada și Kohr în 2002 (a se vedea [44], [68]). Acest rezultat a revitalizat studiul aplicațiilor biolomorfe de mai multe variabile complexe și a deschis noi oportunități de studiu în teoria funcțiilor geometrice. Alte aspecte și aplicații ale teoriei lanțurilor Loewner, respectiv clasa Carathéodory în $\mathbb{C}^n$ pot fi găsite în [14], [16], [17], [32], [45], [48], [109], [117].

O problemă care a apărut în studiul aplicațiilor biolomorfe în $\mathbb{C}^n$ a fost construcția de exemple de aplicații convexe. Cei care au făcut primii pași spre rezolvarea acestei probleme au fost K. Roper și T.J. Suffridge (a se vedea [121]). Ei au introdus operatorul de extensie $\Phi_n : \mathcal{LS} \to \mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n)$ definit prin

$$\Phi_n(f)(z) = \left(f(z_1), \tilde{z}\sqrt{f'(z_1)}\right), \quad z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n,$$

unde ramura funcției radical este considerată astfel încât $\sqrt{f'(z_1)}\big|_{z_1=0} = 1$. Acest operator păstrează noțiunea de convexitate de la $\mathbb{U}$ la $\mathbb{B}^n$. Păstrarea convexităţii prin Φ_n a fost obținută ulterior și de Graham și Kohr într-un mod diferit (a se vedea [43]). Mai mult, ei au arătat că operatorul păstrează și noțiunea de stelaritate. Mai apoi, au fost obţinute şi alte rezultate de extensie legate de păstrarea stelarității de ordin 1/2 (Hamada, Kohr și Kohr în [73]), stelarității de ordin $0 < \alpha < 1$ (Liu în [92] și Chirilă în [11]), spiraliarității de tip δ, unde $\delta \in \mathbb{R}$ este astfel încât $|\delta| < \frac{\pi}{2}$ (Graham, Kohr și Kohr în [48]). Luând în considerare metoda g-lanțurilor Loewner, Chirilă (a se vedea [11]) a demonstrat că Φ_n păstrează aproape stelaritatea de ordin α și de tip γ, unde $\alpha, \gamma \in [0, 1)$, respectiv spiraliatatea de tip δ și de ordin α, unde $\delta \in \mathbb{R}$ cu $|\delta| < \frac{\pi}{2}$ și $\alpha \in [0, 1)$. Păstrarea spiralității de tip δ și de ordin α a fost obținută și de Liu și Liu (a se vedea [94]) folosind o metodă diferită. Alte proprietăți ale operatorului de extensie Φ_n pot fi găsite în [30], [45].

Pornind de la Roper și Suffridge, teoria operatorilor de extensie a devenit un subiect important în studiul aplicațiilor biolomorfe în $\mathbb{C}^n$. Alți operatori de extensie cu proprietăți importante au fost introduși de

- Graham şi Kohr (a se vedea [43], [44]) - operatorul de extensie Graham-Kohr $\Psi_{n,\alpha}$ definit prin

$$\Psi_{n,\alpha}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha} \tilde{z}\right), \quad z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n,$$

  pentru $f \in \mathcal{LS}$ cu $f(z_1) \neq 0$ şi $z_1 \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$. Ramura funcţiei putere este aleasă astfel încât $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha}\big|_{z_1=0} = 1$.

- Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge (a se vedea [42]) - operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ definit prin

$$\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha} \left(f'(z_1)\right)^{\beta} \tilde{z}\right), \quad z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n,$$

  unde $\alpha, \beta \geq 0$ şi $f \in \mathcal{LS}$ are proprietatea că $f(z_1) \neq 0$ pentru $z_1 \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$. Ramura funcţiei putere este aleasă astfel încât $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha}\big|_{z_1=0} = 1$ şi $\left(f'(z_1)\right)^{\beta}\big|_{z_1=0} = 1$.

- Pfaltzgraff şi Suffridge (a se vedea [111]) - operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge $\Gamma_n : \mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n) \to \mathcal{LS}_{n+1}(\mathbb{B}^{n+1})$ definit prin

$$\Gamma_n(f)(z) = \left(f(z'), z_{n+1}\left[J_f(z')\right]^{\frac{1}{n+1}}\right), \quad z = (z', z_{n+1}) \in \mathbb{B}^{n+1},$$

  unde $J_f(z') = \det Df(z')$ cu $z' \in \mathbb{B}^n$. Ramura funcţiei putere are proprietatea că $\left[J_f(z')\right]^{\frac{1}{n+1}}\big|_{z'=0} = 1$.

Toţi aceşti operatori de extensie păstrează noțiunea de reprezentare parametrică (în particular, stelaritatea, stelaritatea de ordin $\alpha \in (0,1)$, spiralitatea). O observație importantă este că Graham, Hamada, Kohr și Suffridge au demonstrat că $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ păstrează convexitatea doar dacă $\alpha = 0$ și $\beta = \frac{1}{2}$. În particular, operatorul de extensie Graham-Kohr $\Psi_{n,\alpha}$ nu păstrează convexitatea pentru $n \geq 2$. Problema păstrării convexității prin operatorul Γ_n a fost parțial rezolvată de Graham, Kohr și Pfaltzgraff (a se vedea [49]), respectiv de Chirilă (a se vedea [10]) pentru operatorul Pfaltzgraff-Suffridge generalizat. Mai multe detalii despre generalizările operatorilor de extensie de tip Roper-Suffridge și proprietățile lor pot fi găsite în [25], [27], [43], [46], [84], [93], [103], [138].

În ultimii ani, studiul aplicațiilor biolomorfe s-a concentrat pe cazul infinit dimensional. O parte din rezultatele obținute pentru funcţii de o variabilă, respectiv pentru aplicaţii de mai multe variabile complexe, pot fi extinse în cazul spațiilor Banach complexe (de ex. teoria funcțiilor univalente, familii de funcții univalente cu proprietăți geometrice speciale, teoria lanțurilor Loewner, teoria operatorilor de extensie și altele). Cu toate acestea, multe dintre problemele propuse în cazul infinit dimensional sunt încă deschise și de mare interes pentru cercetători. Printre cei care au început studiul aplicațiilor biolomorfe în caz infinit dimensional îi menționăm pe K. Gurganus [57], J. Mujica [106], T. Poreda [118] și T.J. Suffridge [127]. Una dintre diferențele importante în acest context este că noțiunile de univalență și biolomorfie nu sunt echivalente, adică există aplicații univalente care nu sunt biolomorfe (a se vedea de exemplu [107], [119], [128]). Acest rezultat este în contrast cu cazul finit dimensional (a se vedea [45]). Proprietăți generale ale clasei $S(\mathbb{B}_X)$ ale aplicațiilor biolomorfe normate pe bila unitate $\mathbb{B}_X$ în spațiul Banach complex X au fost obținute în lucrările lui Graham și Kohr [45], Hille și Phillips [79], Mujica [106].

Referitor la generalizarea clasei Carathéodory în caz infinit dimensional, contribuții importante au fost aduse de Bracci, Elin, Shoikhet [6], Graham, Hamada, Honda, Kohr și Shon [31], Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea de exemplu [36], [38]). Ei au îmbunătățit unele rezultate obținute inițial de Gurganus [57] și Pfaltzgraff [109]. Mai mult, Hamada și Kohr (a se vedea [68]) au obținut versiunea finală a caracterizării analitice a stelarității studiată de Suffridge [127] și Gurganus [57]. De asemenea, au demonstrat caracterizarea analitică a convexității în cazul spațiilor Hilbert (a se vedea de exemplu

[68]). Alte familii de aplicații biolomorfe pe $\mathbb{B}_X$ au fost studiate de Gong și Liu [25], Graham și Kohr [45], Hamada, Kohr și Kohr [74], Wang și Wang [133].

Recent, studiul lanțurilor de subordonare în spații infinit dimensionale început de Poreda (a se vedea de exemplu [117], [118]) a fost continuat și îmbunătățit de Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea de exemplu [34], [38], [39], [40], [41]), Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [70], [72]), Arosio, Bracci, Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [2], [3]) care au obținut rezultate importante legate de lanțurile Loewner și ecuaţia diferenţială Loewner în caz infinit dimensional. O altă abordare în teoria lanțurilor Loewner a fost introdusă de Arosio, Bracci, Hamada și Kohr în [3]. Aceştia au considerat lanțuri Loewner pe varietăți complexe hiperbolice complete și au obținut o corespondență biunivocă între L^d-lanțurile Loewner și L^d-familiile de evoluție. Mai mult, au construit L^d-lanțuri Loewner generate de operatorul de extensie Roper-Suffridge.

Un alt domeniu care a fost extins în context infinit dimensional este cel al operatorilor de extensie. Printre cei care studiază operatorii de extensie în spațiile Banach complexe îi menționăm pe Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea de exemplu [39], [40]), Muir Jr. (a se vedea de exemplu [104], [105]), Wang și Zhang (a se vedea de exemplu [131], [132], [134]), Zhang și Thang (a se vedea de exemplu [139]). Recent, s-au obținut rezultate importante legate de operatorul de extensie generalizat Roper-Suffridge, respectiv operatorii de extensie de tip Muir, g-lanțuri Loewner și reprezentarea parametrică generalizată în spații Banach complexe. De asemenea, un instrument recent folosit pentru generarea operatorilor de extensie este teoria semigrupurilor studiată de Elin (a se vedea de exemplu [21]).

În prezent, cea mai recentă abordare a teoriei Loewner a fost introdusă de Hamada și Kohr în [72]. Ei au studiat un nou concept, și anume inversul unui lanț Loewner în caz infinit dimensional. Contribuţia lor reprezintă o nouă modalitate de a studia rezultatele legate de lanțuri Loewner și operatori de extensie în spații Banach complexe.

Conținutul acestei teze este structurat în trei părți organizate în șase capitole. Prezentăm aici o scurtă descriere a fiecărei părți, evidențiind principalele rezultate pe care le-am obținut în fiecare capitol. Rezultatele originale incluse în teză sunt în principal extrase din cele șase articole ale autorului prezentate în bibliografie (o scurtă prezentare a acestor rezultate poate fi consultată în partea de concluzii de la sfârșitul tezei). Mai mult, este important de menționat că pe parcursul acestei teze sunt adresate unele conjecturi și întrebări deschise ce conduc spre capitolul final dedicat direcțiilor de cercetare viitoare.

Partea I conține rezultate legate de funcții univalente de o variabilă complexă. Ea include primele două capitole ale tezei care conțin atât rezultate clasice, cât și originale (acestea din urmă fiind obținute de autor în [50], [51] și [54]). Sursele principale citate în această secțiune sunt [19], [29], [45], [77], [85], [87], [102], [114].

- În **Capitolul 1** includem rezultate generale legate de funcții univalente de o variabilă complexă în $\mathbb{C}$. Începem cu notații, noțiuni și rezultate preliminare ce vor fi folosite pe parcursul primei părți a tezei.

  În Secțiunea 1.1 discutăm pe scurt teoria funcțiilor olomorfe în $\mathbb{C}$, incluzând aici teorema maximului modulului şi aplicațiile sale (de ex. lema lui Schwarz sau lema Schwarz-Pick). În partea finală a primei secțiuni reamintim noţiunile de familie de funcții olomorfe normală, respectiv local uniform mărginită în $\mathbb{C}$. Încheiem această secțiune cu echivalența celor două noțiuni de mai sus obţinută de Montel (a se vedea de exemplu [77], [85], [87]), caracterizarea compactității familiilor închise de funcții olomorfe în termeni de local uniform mărginire (a se vedea de exemplu [85]) și una dintre cele mai importante aplicații ale teoremei lui Montel, anume teorema lui Vitali (a se vedea de exemplu [85], [87]).

  Secțiunea 1.2 conține câteva rezultate clasice referitoare la noțiunea de subordonare, respectiv clasa Carathéodory $\mathcal{P}$ în $\mathbb{C}$. Familia de funcții olomorfe cu partea reală pozitivă este un instrument important în caracterizarea funcțiilor univalente și în teoria lanțurilor Loewner pe $\mathbb{U}$. Includem aici teorema de deformare și distorsiune pentru clasa $\mathcal{P}$, estimări ale coeficienților și formula de reprezentare Herglotz care caracterizează familia Carathéodory $\mathcal{P}$ (a se vedea de exemplu [29], [45], [102]).

În Secțiunea 1.3 discutăm rezultate generale legate de funcțiile univalente pe $\mathbb{U}$. Prezentăm mai multe proprietăți ale funcțiilor univalente, condiții necesare și suficiente de univalență și câteva exemple la care ne vom referi pe parcursul tezei (a se vedea de exemplu [19], [85]). Încheiem această secțiune cu unul dintre cele mai importante rezultate în teoria funcțiilor univalente în $\mathbb{C}$, anume teorema lui Riemann care stabilește conform echivalența fiecărui domeniu simplu conex $D \subsetneq \mathbb{C}$ cu discul unitate $\mathbb{U}$.

În Secțiunea 1.4 considerăm clasa S a funcțiilor univalente normate pe $\mathbb{U}$ și câteva subclase particulare ale lui S (stelate, respectiv aproape stelate de ordin α, convexe de ordin α și spiralate). Pentru aceste familii de funcții univalente pe $\mathbb{U}$ prezentăm rezultatele bine cunoscute legate de deformare, distorsiune și estimări ale coeficienților, precum și caracterizările analitice ale familiilor $S^*(\alpha)$, $K(\alpha)$ și $\hat{S}_\delta$.

Este important de menționat aici că, deși acest capitol este unul introductiv, el conține și rezultate originale referitoare la teoremele generale de distorsiune pentru funcțiile stelate de ordin α (a se vedea Teorema 1.4.9), respectiv pentru funcțiile convexe de ordin α (a se vedea Teorema 1.4.19). Rezultatele originale au fost obţinute de autor în [51].

Secțiunea 1.5 a acestui capitol se concentrează pe studiul clasei $\mathcal{R}$ a funcțiilor olomorfe normate a căror derivată are parte reală pozitivă. Aici, includem cele mai importante rezultate legate de clasa $\mathcal{R}$ obținute în [89], [90], [96] sau [129]. Împreună cu rezultatele clasice prezentăm și câteva rezultate originale obținute de autor în [50]. În §1.5.3 și §1.5.4 definim două noi subclase de funcții, și anume $\mathcal{R}_p$ și $\mathcal{R}_p(\alpha)$, și studiem proprietățile lor (a se vedea Teoremele 1.5.3, 1.5.9). Clasa $\mathcal{R}_p(\alpha)$ a fost introdusă pentru a generaliza clasa $\mathcal{R}(\alpha)$ descrisă în §1.5.2. Ideea de a considera un parametru $\alpha \in [0, 1)$ este inspirată din extensiile pe care Robertson le-a făcut în [120] pentru funcțiile stelate, respectiv convexe de ordin α. Relația cu familia Carathéodory este un instrument important care poate fi folosit în caracterizarea noilor subclase introduse de autor în [50].

În Secțiunea 1.6 prezentăm rezultate importante referitoare la teoria Loewner în $\mathbb{C}$. Deoarece lanțurile Loewner sunt strâns legate de ecuația diferențială Loewner, prezentăm aici unele dintre cele mai importante rezultate ce vor fi utilizate în studiul funcțiilor univalente menționate mai sus. În a doua parte a acestei secțiuni ne referim la caracterizarea analitică a unor subclase ale lui S prin lanțuri Loewner și, în final, prezentăm noțiunea de reprezentare parametrică pe $\mathbb{U}$ (a se vedea de exemplu [45], [114]). Caracterizarea proprietăților geometrice ale funcțiilor univalente în termeni de lanțuri Loewner va juca un rol important în Capitolul 2, unde folosim teoria Loewner pentru a descrie câteva noi subclase de funcții univalente pe $\mathbb{U}$ (a se vedea §2.2.2).

- Ideea principală a **Capitolului 2** constă în studiul unui nou operator diferențial și a două noi subclase de funcții univalente pe discul unitate $\mathbb{U}$ definite cu ajutorul acestui operator. Capitolul este format în întregime din rezultate originale obținute de autor în [54].

  În Secțiunea 2.1 prezentăm operatorul diferențial $\mathcal{G}_k$ definit pe familia $\mathcal{H}_0(\mathbb{U})$ de funcții olomorfe normate pe $\mathbb{U}$. Folosind operatorul $\mathcal{G}_k$ putem construi două noi subclase de funcții univalente pe $\mathbb{U}$ care sunt strâns legate de familiile S^*, respectiv K, așa cum se poate vedea în §2.2. Diferite proprietăți ale operatorului $\mathcal{G}_k$ sunt studiate în această secțiune, de ex. liniaritatea lui $\mathcal{G}_k$, produsul de convoluție și condiții suficiente de univalență pentru $\mathcal{G}_k$ (a se vedea Propozițiile 2.1.3–2.1.6). Este important de menționat aici că operatorul diferențial $\mathcal{G}_k$ este diferit de operatorul diferențial Sălăgean D^n (a se vedea Remarca 2.2.6; a se vedea și [124]). O altă observaţie importantă este că operatorul $\mathcal{G}_k$ poate fi extins în cazul mai multor variabile complexe (a se vedea Capitolul 4; a se vedea și [53]).

  Folosind operatorul diferențial $\mathcal{G}_k$ menționat mai sus, putem construi două noi subclase de funcții univalente pe $\mathbb{U}$ în $\mathbb{C}$. Aceste subclase, denumite aici $E_k^*(\alpha)$, respectiv $E_k(\alpha)$, unde $\alpha \in [0, 1)$, sunt în strânsă legătură cu clasele de funcții stelate, respectiv convexe de ordin α pe $\mathbb{U}$. O observație importantă este că pentru $k = 0$ obținem $E_0^*(\alpha) = S^*(\alpha)$ și $E_0(\alpha) = K(\alpha)$, deci putem studia aceste noi subclase folosindu-ne de familiile $S^*(\alpha)$ și $K(\alpha)$ introduse de Robertson în [120]. Pe de altă parte, avem că E_1 este strict inclusă în familia $K(1/2)$ de funcții convexe de ordin $1/2$ și $E_1^*(\alpha) = K(\alpha)$. Așa cum am menționat deja mai sus, operatorul $\mathcal{G}_k$ și subclasele introduse în acest capitol pot fi extinse și în cazul mai multor variabile complexe (a se vedea de exemplu [53]). Cu toate acestea, în $\mathbb{C}^n$ unele proprietăți sunt diferite, așa cum se poate vedea în rezultatele incluse de autor în Capitolul 4.

Secțiunea 2.2 este dedicată studiului subclaselor $E_k(\alpha)$ și $E_k^*(\alpha)$ în $\mathbb{C}$, unde $k \in \mathbb{N}$ și $\alpha \in [0,1)$. Împreună cu proprietățile generale ale acestor subclase (teoreme de deformare și distorsiune, estimări ale coeficienților, caracterizare analitică, conexiune cu lanțurile Loewner şi altele), studiem și cazuri particulare (de ex. $k = 1$ și $\alpha = 0$) care sunt de interes, fiind în strânsă legătură cu clasele de funcții univalente menționate în primul capitol (a se vedea rezultatele din §2.2.2). Toate rezultatele din acest capitol sunt originale și au fost obținute de autor în [54].

Partea II conține rezultate legate de aplicațiile biolomorfe de mai multe variabile complexe. Include capitolele 3 și 4 ale tezei care conțin atât rezultate clasice, cât și rezultate originale. Această parte se bazează pe mai multe cărți importante (de ex. [45], [83], [107], [119], [123]) și lucrări ale acestor autori (de ex. [32], [37], [44], [128]) și conține rezultate originale obținute de autor în [52] și [53].

- În **Capitolul 3** prezentăm rezultate generale legate de aplicațiile biolomorfe de mai multe variabile complexe în $\mathbb{C}^n$. Începem cu notații, noțiuni și rezultate preliminare de bază care vor fi folosite pe parcursul celei de-a doua părți a tezei.

  În Secțiunea 3.1 ne referim la teoria funcțiilor olomorfe, respectiv aplicațiilor olomorfe în $\mathbb{C}^n$, incluzând teorema maximului modulului și aplicații ale sale (de ex. lema lui Schwarz). Reamintim și definiția mulţimilor de unicitate (a se vedea de exemplu [45], [83]) și două rezultate importante legate de această noțiune, și anume teorema lui Montel, respectiv teorema lui Vitali în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [83], [107], [119]). În partea finală a acestei secțiuni menționăm rezultate generale privind aplicațiile olomorfe în $\mathbb{C}^n$ și principalele rezultate care vor fi utilizate în acest capitol (de ex. lema Schwarz-Pick).

  Secțiunea 3.2 conține noțiuni clasice legate de generalizarea clasei Carathéodory in $\mathbb{C}^n$. Ne referim aici în special la teoremele de deformare și distorsiune obținute de Graham, Hamada și Kohr (a se vedea [32]), Pfaltzgraff (a se vedea [109]) și Poreda (a se vedea [115]). Unul dintre cele mai importante rezultate obţinute de Graham, Hamada și Kohr în 2002 (a se vedea [32], [68]) este compactitatea familiei Carathéodory $\mathcal{M}$. Acest rezultat a avut un impact puternic asupra dezvoltării teoriei geometrice a funcţiilor în $\mathbb{C}^n$.

  Secțiunile 3.3 și 3.4 sunt destinate studiului subclaselor de aplicații biolomorfe pe bila unitate Euclidiană $\mathbb{B}^n$, respectiv pe polidiscul unitate $\mathbb{U}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Pentru $n \geq 2$, notăm cu $S(\mathbb{B}^n)$ familia aplicațiilor biolomorfe și normate pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de exemplu [45], [83]). Se știe că familia $S(\mathbb{B}^n)$ nu este local uniform mărginită și astfel nu admite o teoremă de deformare și distorsiune. Ca o consecință importantă a acestei proprietăți datorate lui Cartan (a se vedea de exemplu [7], [45]) obținem că $S(\mathbb{B}^n)$ nu este compactă pentru $n \geq 2$. Printre cele mai importante subclase ale lui $S(\mathbb{B}^n)$ menționăm familia de aplicații stelate, stelate de ordin α, convexe și spiralate pe $\mathbb{B}^n$. Pentru aceste aplicații reamintim caracterizările analitice și geometrice, rezultatele de deformare și distorsiune, precum şi exemple sugestive ce vor fi utilizate pe parcursul acestui capitol.

  Secțiunea 3.5 conține extensii ale noțiunilor prezentate în §1.6 referitoare la lanțurile Loewner, ecuația diferențială Loewner și reprezentarea parametrică în $\mathbb{C}^n$. Pfaltzgraff (a se vedea de exemplu [109]) a fost primul care a obținut generalizări ale lanțurilor Loewner și ecuației diferențiale Loewner pe $\mathbb{B}^n$. Studiul a fost extins de Poreda în cazul polidiscului unitate în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [115], [116]), respectiv de Kubicka și Poreda (a se vedea de exemplu [86]). Rezultate importante au fost obținute de-a lungul timpului de Duren, Graham, Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [20]), Graham, Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [32]), Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea de exemplu [36], [37]) și alții. Una dintre cele mai importante diferențe între $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{C}^n$ cu $n \geq 2$ este compactitatea familiei de aplicații biolomorfe normate. Se știe că $S(\mathbb{U})$ este o familie compactă (a se vedea Teorema 1.4.4), în timp ce clasa $S(\mathbb{B}^n)$ nu este compactă pentru $n \geq 2$ (a se vedea de exemplu [7], [45]). Această problemă a fost rezolvată de Graham, Hamada și Kohr care au introdus clasa $S^0(\mathbb{B}^n)$ de aplicații care admit reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de exemplu [32]; a se vedea și [114]). Pentru $n = 1$, avem că $S^0(\mathbb{B}^1) = S$ (a se vedea de exemplu [114]). Cu toate acestea, dacă $n \geq 2$, atunci $S^0(\mathbb{B}^n)$ este strict inclusă în $S(\mathbb{B}^n)$. Mai mult, Graham, Kohr și Kohr (a se vedea [48]) au demonstrat că $S^0(\mathbb{B}^n)$ este compactă (a se vedea de exemplu [32], [45], [48]). Acest rezultat este unul dintre rezultatele care prezintă diferența clară între cazul uni şi multi-dimensional. Pe de altă parte, a deschis noi modalități de studiu al teoriei geometrice a funcțiilor de mai multe variabile complexe. O altă problemă importantă care a fost rezolvată de Graham, Hamada, Kohr și Kohr este existența în $\mathbb{C}^n$ a aplicațiilor care nu pot fi scufundate ca prime elemente ale unui lanț Loewner. Folosind familia $S^0(\mathbb{B}^n)$, aceștia au reușit să demonstreze analogul teoremei lui Pommerenke (a se vedea Teorema 1.6.3) în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [48]; a se vedea și [32]). Mai mult, noțiunea de reprezentare parametrică a fost extinsă la g-reprezentare parametrică de Graham, Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [32]). Mai multe detalii despre clasa $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ vor fi discutate în ultima parte a tezei.

Secțiunea 3.6 este dedicată studiului combinațiilor convexe ale aplicațiilor biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$. Considerăm aplicații de forma $h_\lambda = (1-\lambda)f + \lambda g$, unde $f, g \in S(\mathbb{B}^n)$ și $\lambda \in (0,1)$. Se știe că, în general, combinația convexă a două aplicații biolomorfe normate nu este biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de exemplu [45], [83]). Acest fenomen apare și în caz uni-dimensional și a fost intens studiat de mai mulți autori (a se vedea de exemplu [9], [58], [97], [100]). Ideea principală a acestei secțiuni este de a obține aplicații biolomorfe h_λ pe $\mathbb{B}^n$ (sau chiar aplicații stelate) de forma unor combinații convexe $h_\lambda = (1-\lambda)f + \lambda g$, unde $f, g \in S(\mathbb{B}^n)$ și $\lambda \in (0,1)$. Rezultatele prezentate în această secțiune sunt originale și au fost obținute de Grigoriciuc în [52].

Un instrument puternic în studiul aplicațiilor biolomorfe în $\mathbb{C}^n$ este teoria operatorilor de extensie. În Secțiunea 3.7 prezentăm operatori de extensie care păstrează proprietățile geometrice și analitice pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$. Începem discuția noastră cu operatorul de extensie Roper-Suffridge Φ_n (considerat de K. Roper și T.J. Suffridge în [121]) și operatorul de extensie Graham-Kohr $\Psi_{n,\alpha}$ (definit de I. Graham și G. Kohr în [44]; a se vedea și [43]). Vom analiza mai apoi două generalizări ale operatorului de extensie Roper-Suffridge introduse de Graham, Hamada, Kohr, Kohr și Suffridge (a se vedea de exemplu [42], [47]) care transformă o funcție local univalentă pe $\mathbb{U}$ într-o aplicație local biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$. În partea finală a acestei secțiuni prezentăm operatorul de extensie introdus de Pfaltzgraff și Suffridge (a se vedea [111]) și o generalizare a acestui operator (a se vedea de exemplu [10]).

Secțiunea 3.8 încheie acest capitol cu un studiu ce combină ideile prezentate mai sus, și anume operatorii de extensie și combinațiile convexe ale aplicațiilor biolomorfe în $\mathbb{C}^n$. Astfel, discutăm despre combinații convexe ale operatorilor de extensie pe $\mathbb{B}^n$. În particular, considerăm un nou operator de extensie obținut ca o combinație convexă a doi operatori de extensie de tip Graham-Kohr (a se vedea de exemplu [43], [44]). Rezultatele prezentate în această secțiune sunt originale.

- **Capitolul 4** conține extensii ale principalelor rezultate prezentate în Capitolul 2 privind un nou operator diferențial, respectiv noi subclase de aplicații biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$.

  În Secțiunea 4.1 discutăm despre forma n-dimensională a operatorului $\mathcal{G}_k$, denumit aici $\mathcal{G}n, k$, pentru $n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq 2$ și $k \in \mathbb{N}$. Operatorul $\mathcal{G}_{n,k}$ va fi utilizat pentru a extinde subclasele E_k și E_k^* de la discul unitate $\mathbb{U}$ la bila unitate B^n în $\mathbb{C}^n$ în raport cu o normă arbitrară. Chiar dacă aceste clase pot fi definite într-un context foarte general, cazul bilei unitate Euclidiene $\mathbb{B}^n$ va fi considerat în mod particular în discuția noastră, având în vedere proprietățile care sunt păstrate (sau nu) de la cazul uni-dimensional la cel multi-dimensional.

  Rezultatul principal evidențiat în Secțiunea 4.2 arată că familia $E_1^*(\mathbb{B}^n)$ coincide cu clasa K a funcțiilor convexe pentru $n = 1$ (a se vedea Teorema 4.2.1; a se vedea și Propoziția 2.2.4). Cu toate acestea, pentru $n \geq 2$, obținem că $E_1^*(\mathbb{B}^n) \cap K(\mathbb{B}^n) \neq \emptyset$, dar $E_1^*(\mathbb{B}^n) \neq K(\mathbb{B}^n)$. Se observă că în cazul subclasei $E_1^*(\mathbb{B}^n)$ obținem o diferență majoră între cazul uni-dimensional și cel al mai multor variabile complexe, adică familia aplicațiilor convexe nu este aceeași cu subclasa $E_1^*(\mathbb{B}^n)$. Un alt rezultat obținut în această secțiune (a se vedea Teorema 4.2.3) prezintă conexiunea dintre $E_1(\mathbb{B}^n)$ și familia $K(\mathbb{B}^n; 1/2)$ a aplicațiilor convexe de ordin 1/2. Incluziunea $E_1 \subset K(1/2)$ valabilă în $\mathbb{C}$ poate fi parțial extinsă în $\mathbb{C}^n$. Alte proprietăți și exemple relevante sunt prezentate în această secțiune pentru a descrie noile subclase introduse de autor (de ex. o teoremă de tip Marx-Strohacker pentru subclasele prezentate).

În Secțiunea 4.3 includem două cazuri particulare ale operatorului de extensie Graham-Kohr $\Psi_{n,\alpha}$ (prezentat în §3.7) aplicat familiei de funcții convexe K. Deși operatorul $\Psi_{n,\alpha}$ nu păstrează noțiunea de convexitate (a se vedea de exemplu [44]), putem demonstra o proprietate importantă legată de subclasa E_1^*. Știm că $E_1^* = K$ în $\mathbb{C}$ și astfel, în §4.3 arătăm că $\Psi_{n,\alpha}(K) \subseteq E_1^*(\mathbb{B}^n) \neq K(\mathbb{B}^n)$ pentru $\alpha \in \{0,1\}$. Cu acest rezultat, nu numai că am reușit să conectăm rezultatele obţinute în Capitolele 2 și 4 cu ajutorul operatorului de extensie Graham-Kohr, dar am obținut și o nouă proprietate a operatorului $\Psi_{n,\alpha}$. Împreună cu aceste rezultate, propunem și câteva întrebări și probleme deschise legate de operatorul de extensie Graham-Kohr și subclasa E_k^* în $\mathbb{C}^n$. Toate rezultatele originale prezentate aici au fost obținute de Grigoriciuc în [53].

Partea III conține rezultate legate de aplicațiile biolomorfe în spații Banach complexe. Include ultimele două capitole ale tezei, care conțin atât rezultate cunoscute (bazate pe [39], [40], [41], [45], [106], [117], [127]), cât și rezultate originale (obținute de autor în [55]).

- **Capitolul 5** este dedicat unui scurt studiu asupra aplicațiilor biolomorfe și operatorilor de extensie în spații Banach complexe. Includem aici extensii ale unor rezultate prezentate în capitolele anterioare. Printre cei care au adus contribuții importante în teoria geometrică a funcţiilor în caz infinit dimensional se numără J. Mujica, T. Poreda, T.J. Suffridge (a se vedea de exemplu [106], [117], [118], [127]) și mai recent F. Bracci, I. Graham, H. Hamada, G. Kohr și M. Kohr (a se vedea de exemplu [3], [34], [38], [39], [40], [41]). Începem discuția noastră de la lucrarea foarte recentă publicată de Graham, Hamada, Kohr și Kohr referitoare la aplicații biolomorfe, lanțuri Loewner și operatori de extensie în spații Banach complexe (a se vedea [39], [40], [41]). Aceste lucrări constituie baza studiului nostru, conținând unele dintre ideile fundamentale în obținerea tuturor celorlalte rezultate din această parte.

  Secțiunea 5.1 conține rezultate de bază și proprietăți ale funcțiilor olomorfe și ale aplicațiilor olomorfe în caz infinit dimensional. Prezentăm principalele noțiuni și rezultate care vor fi utilizate în acest capitol (de ex. teorema maximului modulului, lema lui Schwarz). Pentru mai multe detalii, se poate consulta [45], [78], [79], [106], [127], [128]. În plus, reamintim aici generalizarea familiei Carathéodory și rezultatele de deformare obținute de Gurganus (a se vedea [57]), respectiv de Bracci, Elin, Shoikhet (a se vedea [6]) și Graham, Hamada, Honda, Kohr și Shon (a se vedea [31]) în caz infinit dimensional.

  Secțiunea 5.2 este dedicată unor familii particulare de aplicații biolomorfe în spații Banach complexe. Prezentăm aici clasele de aplicații stelate, convexe, respectiv ε-stelate împreună cu caracterizarea lor analitică. Contribuții importante au fost aduse de Suffridge (a se vedea [127]), Gurganus (a se vedea [57]), Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [68], [74]), Gong și Liu (a se vedea [25], [26]).

  În Secțiunea 5.3 discutăm câteva rezultate generale legate de teoria lanțurilor Loewner în spații Banach complexe care vor fi utilizate în rezultatele noastre principale. Studiul lanțurilor de subordonare în spații infinit dimensionale a fost început de Poreda (a se vedea de exemplu [117], [118]). Aceste idei au fost continuate și îmbunătățite de Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea de exemplu [34], [38], [39], [40], [41]), Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [70], [72]), Arosio, Bracci, Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [2], [3]) care au obținut rezultate importante legate de lanțurile Loewner și ecuţia diferenţială Loewner în spații infinit dimensionale. A doua parte a acestei secțiuni conține rezultate legate de noțiunea de reprezentare parametrică în dimensiuni infinite. Această noțiune se datorează lui Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea [38]) și reprezintă generalizarea reprezentării parametrice prezentată în Definiția 3.5.11). De asemenea, discutăm în această secțiune despre g-reprezentare parametrică, g-lanțuri Loewner și familii particulare de aplicații biolomorfe asociate acestor noţiuni. Pentru detalii, se poate consulta [32], [34], [45], [60], [61], [62], [74].

- **Capitolul 6** conține rezultate originale obținute pe baza ideilor prezentate de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [39] și [40]. Parte din rezultatele originale au fost obținute de Grigoriciuc în [55].

  În Secţiunea 6.1 considerăm operatorul de extensie Graham-Kohr Ψ_α pe domeniul $\Omega_{p,r} = \{(z_1,w) \in \mathcal{Y} = \mathbb{C} \times X : |z_1|^p + \|w\|_X^r < 1\}$, unde X este un spațiu Banach complex, $\alpha \in [0,1]$ și $p, r \geq 1$. Pe baza rezultatelor obţinute de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [39] pentru $p = 2$ (a se vedea și [40]), vom încerca să obținem proprietăți de extensie pentru cazul general $p \in [1, \infty)$.

Secțiunea 6.2 este dedicată studiului consevării lanțurilor Loewner prin operatorul de extensie definit de Pfaltzgraff şi Suffridge. Recent, Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea de exemplu [40]) au arătat că operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge păstrează primele elemente ale lanțurilor Loewner din bila unitate deschisă $\mathbb{B}X$ a unui JB*-triple de dimensiune n X într-un domeniu $\mathbb{D}\alpha \subseteq \mathbb{B}_X \times \mathbb{B}_Y$, unde Y este un spațiu Banach complex (pentru rezultate complete și demonstrațiile acestora, se poate consulta [33], [35] și [40]). Inspiraţi de aceste idei, vom demonstra că operatorul de extensie de tip Pfaltzgraff-Suffridge păstrează primele elemente ale lanțurilor Loewner din bila unitate B^n a $\mathbb{C}^n$ (în raport cu diferite norme, adică norma Euclidiană, norma supremum) pe bila unitate a spaţiului $\mathcal{W} = \mathbb{C}^n \times Y$, unde Y este un spațiu Banach complex.

În final, prezentăm o listă a principalelor rezultate originale incluse în această teză. Menționăm din nou că în Capitolele 1–4 și 6 sunt incluse rezultate originale.

- **Capitolul 1:** Teorema 1.4.9, Teorema 1.4.19, Teorema 1.5.3, Teorema 1.5.7, Propoziţia 1.5.8, Teorema 1.5.9
- **Capitolul 2:** Propoziţia 2.1.3, Propoziţia 2.1.4, Propoziţia 2.1.5, Propoziţia 2.1.6, Propoziţia 2.2.4, Teorema 2.2.7, Teorema 2.2.8, Corolarul 2.2.9, Teorema 2.2.10, Teorema 2.2.16, Teorema 2.2.18, Corolarul 2.2.19, Teorema 2.2.21, Propoziţia 2.2.25, Propoziţia 2.2.26, Teorema 2.2.27, Corolarul 2.2.28, Lema 2.2.30, Teorema 2.2.31, Teorema 2.2.32
- **Capitolul 3:** Lema 3.6.4, Lema 3.6.5, Propoziţia 3.6.6, Teorema 3.6.8, Propoziţia 3.8.2, Lema 3.8.4, Propoziţia 3.8.5, Teorema 3.8.6, Teorema 3.8.7, Propoziţia 3.8.8, Teorema 3.8.9
- **Capitolul 4:** Observaţia 4.1.4, Teorema 4.2.1, Teorema 4.2.3, Teorema 4.2.5, Corolarul 4.2.6, Propoziţia 4.3.1, Lema 4.3.2, Corolarul 4.3.3, Teorema 4.3.4, Lema 4.3.5, Corolarul 4.3.6
- **Capitolul 6:** Lema 6.1.1, Teorema 6.1.4, Corolarul 6.1.5, Corolarul 6.1.6, Corolarul 6.1.7, Teorema 6.1.8, Corolarul 6.1.9, Teorema 6.1.11, Corolarul 6.1.14, Corolarul 6.1.15, Teorema 6.2.6, Corolarul 6.2.7, Corolarul 6.2.8, Corolarul 6.2.9, Corolarul 6.2.10, Teorema 6.2.11, Teorema 6.2.13, Corolarul 6.2.14, Teorema 6.2.16, Corolarul 6.2.17, Corolarul 6.2.18

Parte a rezultatelor originale prezentate mai sus au fost publicate (sau sunt în curs de publicare) în următoarele lucrări:

- **Grigoriciuc E.S.**, *On some classes of holomorphic functions whose derivatives have positive real part*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **66**(3) (2021), 479–490. **WoS-ESCI**, **IF**(2022): 0.400
- **Grigoriciuc E.S.**, *Some general distortion results for $K(\alpha)$ and $S^*(\alpha)$*, Mathematica **64**(87) (2022), 222–232. (**Scopus**)
- **Grigoriciuc E.S.**, *On Some Convex Combinations of Biholomorphic Mappings in Several Complex Variables*, Filomat **36**(16) (2022), 5503–5519. **WoS-SCIE**, **IF**(2021): 0.988
- **Grigoriciuc E.S.**, *New Subclasses of Univalent Mappings in Several Complex Variables: Extension Operators and Applications*, Comput. Methods Funct. Theory **23**(3) (2023), 533–555. **WoS-SCIE**, **IF**(2022): 1.155
- **Grigoriciuc E.S.**, *New subclasses of univalent functions on the unit disc in* $\mathbb{C}$, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **69**(4) (2024), 769–787. **WoS-ESCI**, **IF**(2022): 0.400
- **Grigoriciuc E.S.**, *g-Loewner chains and the Graham-Kohr extension operator in complex Banach spaces*, Comput. Methods Funct. Theory, accepted

Rezultatele originale incluse în această teză au fost prezentate în aproximativ treizeci de conferinţe naţionale şi internaţionale şi seminarii de cercetare. Menţionăm aici participarea la

- **International Conference of Young Mathematicians**, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences, Kiev, Ucraina, online, 3 – 5 Iunie 2021;
- **8th European Congress of Mathematics**, Portorož, Slovenia, online, 20 – 26 Iunie 2021 (Talk in the Minisymposium *Current topics in Complex Analysis*);
- **The International Conference on Complex Analysis and Related Topics** (*dedicated to the 90-th anniversary of Anatolii Asirovich Goldberg*, 1930-2008), Universitatea "Ivan Franko" Lviv, Ucraina, online, 28 Iunie – 1 Iulie 2021;
- **16th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications (GFTA 2021)** – *Dedicated to the memory of Professor Gabriela Kohr*, Universitatea "Lucian Blaga" Sibiu, România, online, 15 – 18 Octombrie 2021;
- **The 14th Joint Conference on Mathematics and Computer Science (14th MaCS)**, Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca, România, 24 – 27 Noiembrie 2022;
- **2nd Edition of The Workshop dedicated to the memory of Professor Gabriela Kohr** – *Geometric Function Theory in Several Complex Variables and Complex Banach Spaces*, Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca, România, 1 – 3 Decembrie 2022;
- **9th International Conference on Mathematics and Informatics**, Universitatea Sapientia, Târgu Mureş, România, 7 – 8 Septembrie 2023;
- **3rd Edition of The Workshop dedicated to the memory of Professor Gabriela Kohr** – *Geometric Function Theory in Several Complex Variables and Complex Banach Spaces*, Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca, România, 1 – 3 Decembrie 2023;
- **Sixth Romanian Itinerant Seminar on Mathematical Analysis and its Applications (RIS-MAA)**, Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca, România, 30 – 31 Mai 2024.
- **4th Edition of The Workshop dedicated to the memory of Professor Gabriela Kohr** – *Geometric Function Theory in Several Complex Variables and Complex Banach Spaces*, Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca, România, 29 Noiembrie – 1 Decembrie 2024;

MSC 2020: 32H02 (primary), 30C45 (secondary).

Cuvinte cheie: funcţie univalentă, aplicaţie biolomorfă, familia Carathéodory, aplicaţie stelată, aplicaţie convexă, combinaţie convexă, lanţ Loewner, g-lanţ Loewner, reprezentare parametrică, g-reprezentare parametrică, g-stelaritate, operatorul de extensie Graham-Kohr, operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge, operatorul de extensie Muir, spaţiu Banach complex.

Mulţumiri

Dedicată doamnei Prof. dr. Gabriela Kohr

Această teză este rezultatul unei colaborări deosebite pe care am avut-o începând cu anul 2016 când, pentru prima dată, am avut privilegiul de a o întâlni pe dna. ***Prof. dr. Gabriela Kohr****. În anii următori, am avut onoarea să lucrez împreună cu dna.* ***Prof. dr. Gabriela Kohr*** *atât pentru lucrarea de licență, cât și pentru cea de master. Fiind unul dintre cei care am avut șansa enormă de a o cunoaște pe dna.* ***Prof. dr. Gabriela Kohr*** *și de a-mi începe studiile de doctorat sub îndrumarea ei, doresc să-i dedic această teză.*

Aș dori să mulţumesc conducătorilor mei de doctorat, **Prof. dr. Gabriela Kohr** și **Prof. dr. Mirela Kohr**, pentru răbdarea, îndrumarea, motivația, sprijinul continuu și cuvintele încurajatoare în decursul acestor ani. Sunt recunoscător pentru oportunitatea de a scrie această teză sub îndrumarea dumnealor, pentru efortul depus și pentru tot ajutorul pe care mi l-au oferit. În mod special, vreau să îi mulțumesc dnei. **Prof. dr. Mirela Kohr** pentru tot efortul și munca depusă în realizarea acestei teze, continuând astfel munca începută de draga noastră dna. **Prof. dr. Gabriela Kohr**. Sunt onorat și recunoscător să fiu unul dintre studenţii doamnelor **Profesor Gabriela** și **Mirela Kohr**.

Sincerele mele mulțumiri se îndreaptă şi către membrii Grupului de Cercetare de Analiză Complexă "Prof. Dr. Gabriela Kohr" de la Universitatea Babeş-Bolyai. Sunt recunoscător pentru sugestiile și discuțiile valoroase pe care le-am avut în cadrul Seminarului nostru de cercetare.

Doresc să mulţumesc şi părinţilor mei, Anca și Sorin, pentru înțelegerea și răbdarea lor neclintită de-a lungul anilor de şcoală. Sacrificiul și sprijinul lor continuu au făcut ca tot acest parcurs să fie posibil.

Soli Deo Gloria!

Part I

Contribuţii în teoria funcţiilor univalente de o variabilă complexă

Capitolul 1

Funcţii univalente de o variabilă complexă

În primul capitol includem rezultate generale legate de funcții univalente de o variabilă complexă în $\mathbb{C}$. Începem cu notații, noțiuni și rezultate preliminare ce vor fi folosite pe parcursul primei părți a tezei.

În prima secţiune prezentăm pe scurt teoria funcțiilor olomorfe în $\mathbb{C}$, incluzând aici teorema maximului modulului şi aplicațiile sale (de ex. lema lui Schwarz sau lema Schwarz-Pick). În partea finală a primei secțiuni reamintim noţiunile de familie de funcții olomorfe normală, respectiv local uniform mărginită în $\mathbb{C}$. Încheiem această secțiune cu echivalența celor două noțiuni de mai sus obţinută de Montel (a se vedea de exemplu [77], [85], [87]), caracterizarea compactității familiilor închise de funcții olomorfe în termeni de local uniform mărginire (a se vedea de exemplu [85]) și una dintre cele mai importante aplicații ale teoremei lui Montel, anume teorema lui Vitali (a se vedea de exemplu [85], [87]).

În continuare, reluăm câteva dintre rezultate clasice referitoare la noțiunea de subordonare, respectiv clasa Carathéodory $\mathcal{P}$ în $\mathbb{C}$. Familia de funcții olomorfe cu partea reală pozitivă este un instrument important în caracterizarea funcțiilor univalente și în teoria lanțurilor Loewner pe $\mathbb{U}$. Includem aici teorema de deformare și distorsiune pentru clasa $\mathcal{P}$, estimări ale coeficienților și formula de reprezentare Herglotz care caracterizează familia Carathéodory $\mathcal{P}$ (a se vedea de exemplu [29], [45], [102]).

A treia secțiune conține rezultate generale legate de funcțiile univalente pe $\mathbb{U}$. Prezentăm mai multe proprietăți ale funcțiilor univalente, condiții necesare și suficiente de univalență și câteva exemple la care ne vom referi pe parcursul tezei (a se vedea de exemplu [19], [85]). Încheiem această secțiune cu unul dintre cele mai importante rezultate în teoria funcțiilor univalente în $\mathbb{C}$, anume teorema lui Riemann care stabilește conform echivalența fiecărui domeniu simplu conex $D \subsetneq \mathbb{C}$ cu discul unitate $\mathbb{U}$. Acest rezultat este printre cele mai importante rezultate din teoria funcțiilor univalente în $\mathbb{C}$, dar care nu este valabil în $\mathbb{C}^n$ cu $n \geq 2$.

În secţiunea a patra considerăm clasa S a funcțiilor univalente normate pe $\mathbb{U}$ și câteva subclase particulare ale lui S (stelate, respectiv aproape stelate de ordin α, convexe de ordin α și spiralate). Pentru aceste familii de funcții univalente pe $\mathbb{U}$ prezentăm rezultatele bine cunoscute legate de deformare, distorsiune și estimări ale coeficienților, precum și caracterizările analitice ale familiilor $S^*(\alpha)$, $K(\alpha)$ și $\hat{S}_\delta$. Este important de menționat aici că, deși acest capitol este unul introductiv, el conține și rezultate originale referitoare la teoremele generale de distorsiune pentru funcțiile stelate de ordin α (a se vedea Teorema 1.4.9), respectiv pentru funcțiile convexe de ordin α (a se vedea Teorema 1.4.19). Rezultatele originale au fost obţinute de autor în [51].

Secțiunea a cincea a acestui capitol se concentrează pe studiul clasei $\mathcal{R}$ a funcțiilor olomorfe normate a căror derivată are parte reală pozitivă. Aici, includem cele mai importante rezultate legate de clasa $\mathcal{R}$ obținute în [89], [90], [96] sau [129]. Împreună cu rezultatele clasice prezentăm și câteva rezultate originale obținute de autor în [50]. În §1.5.3 și §1.5.4 definim două noi subclase de funcții, și anume $\mathcal{R}_p$ și $\mathcal{R}_p(\alpha)$, și studiem proprietățile lor (a se vedea Teoremele 1.5.3, 1.5.9). Clasa $\mathcal{R}_p(\alpha)$ a fost introdusă pentru a generaliza clasa $\mathcal{R}(\alpha)$ descrisă în §1.5.2. Ideea de a considera un parametru $\alpha \in [0, 1)$ este inspirată din extensiile pe care Robertson le-a făcut în [120] pentru funcțiile stelate, respectiv convexe de ordin α. Relația cu familia Carathéodory este un instrument important care poate fi folosit în caracterizarea noilor subclase introduse de autor în [50].

Ultima secțiune este axată pe teoria Loewner în $\mathbb{C}$. Având în vedere relația puternică dintre lanțurile Loewner și ecuația diferențială Loewner, prezentăm aici câteva rezultate cheie legate de ambele, care vor fi utilizate în studiul funcțiilor univalente menționate mai sus. În a doua parte a acestei secțiuni ne referim la caracterizarea analitică a subfamiliilor speciale de S prin lanțuri Loewner și, în final, prezentăm noțiunea de reprezentare parametrică pe $\mathbb{U}$ (a se vedea de exemplu [45], [114]) Caracterizarea proprietăților geometrice ale funcțiilor univalente în termeni de lanțuri Loewner va juca un rol important în capitolul 2, unde folosim teoria Loewner pentru a descrie câteva subclase noi de funcții univalente pe $\mathbb{U}$ (a se vedea §2.2.2).

Principalele referințe bibliografice utilizate pentru alcătuirea acestui capitol sunt [19], [29], [45], [85], [77], [96], [102], [113], [114]. Pentru detalii, se pot consulta și lucrările [8], [12], [23], [87].

1.1 Noţiuni generale privind olomorfia în $\mathbb{C}$

Prima secțiune conține noțiuni de bază, notații și rezultate clasice privind funcțiile olomorfe de o variabilă complexă. Includem aici principalele rezultate de interes în teoria funcțiilor olomorfe în $\mathbb{C}$ ce vor fi utilizate în cadrul acestei teze. Principalele surse bibliografice la care vom face referire sunt [77], [85]. Pentru detalii, se poate consulta și [8], [87].

1.1.1 Preliminarii

Fie $\mathbb{C}$ planul complex, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ și $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pe parcursul acestei teze notăm cu

$$\mathcal{U}(w, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$$

discul deschis cu centru $w \in \mathbb{C}$ și rază $r > 0$, respectiv cu

$$\overline{\mathcal{U}}(w, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$$

discul închis cu centru $w \in \mathbb{C}$ și rază $r > 0$. În particular, notăm cu $\mathbb{U} = \mathcal{U}(0, 1)$ *discul unitate deschise* în $\mathbb{C}$ și cu $\partial\mathbb{U}$ cercul unitate în $\mathbb{C}$. De asemenea, pentru simplitate, vom folosi notația $\mathcal{U}_r = \mathcal{U}(0, r)$ pentru discul deschis de centru zero și rază $r > 0$.

1.1.2 Funcții olomorfe în $\mathbb{C}$

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă. Notăm cu

$$\mathcal{H}(D) = \{f : D \to \mathbb{C} : f \text{ este olomorfă pe } D\}$$

familia tuturor funcțiilor olomorfe pe D. În particular, mulțimea $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ conține toate funcțiile olomorfe pe întreg planul complex $\mathbb{C}$.

Observaţia 1.1.1. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu astfel încât $0 \in D$. Atunci $f \in \mathcal{H}(D)$ este o funcţie normată dacă $f(0) = 0$ și $f'(0) = 1$. Pentru simplitate, vom nota cu $\mathcal{H}_0(D)$ *familia funcţiilor olomorfe normate* pe D.

În continuare, prezentăm câteva rezultate clasice din teoria funcţiilor olomorfe ce vor fi utilizate în secțiunile ulterioare (a se vedea [77], [85]). Primul rezultat este cunoscut în literatura de specialitate ca *teorema aplicaţiei deschise* pentru funcțiile olomorfe (a se vedea de exemplu [85]). Este important de menționat că acest rezultat poate fi generalizat și în cazul funcțiilor olomorfe definite pe domenii din $\mathbb{C}^n$ în $\mathbb{C}$, respectiv în cazul aplicaţiilor local biolomorfe de la $\mathbb{C}^n$ la $\mathbb{C}^n$ pentru $n \geq 2$ (a se vedea de exemplu [119]).

Teorema 1.1.2 (Teorema aplicaţiei deschise). *Fie $f \in \mathcal{H}(D)$, unde $D \subseteq \mathbb{C}$ este un domeniu și f este neconstantă. Atunci $f(D) \subseteq \mathbb{C}$ este un domeniu.*

Un alt rezultat important legat de funcțiile olomorfe de o variabilă complexă este *teorema maximului modulului* (a se vedea de exemplu [77], [85]).

Teorema 1.1.3 (**Teorema maximului/minimului modulului**). *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f \in \mathcal{H}(D)$. Dacă $\exists z_0 \in D$ astfel încât*

$$|f(z_0)| = \max\{|f(z)| \,:\, z \in D\} \qquad \textit{sau} \qquad |f(z_0)| = \min\{|f(z)| \,:\, z \in D\},$$

atunci f este constantă pe D.

Prima aplicație importantă a Teoremei 1.1.3 este cunoscută în literatură sub numele de *Lema lui Schwarz* (a se vedea de exemplu [85]):

Lema 1.1.4 (**Lema lui Schwarz**). *Fie $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ astfel încât $f(0) = 0$ și $|f(z)| < 1$, pentru $z \in \mathbb{U}$. Atunci $|f(z)| \leq |z|$, pentru $z \in \mathbb{U}$ și $|f'(0)| \leq 1$. Mai mult, dacă $\exists z_0 \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$ astfel încât $|f(z_0)| = |z_0|$ sau dacă $|f'(0)| = 1$, atunci $\exists a \in \mathbb{C}$ cu $|a| = 1$ astfel încât $f(z) = az$, pentru $z \in \mathbb{U}$.*

1.2 Familia Carathéodory în $\mathbb{C}$

A doua secțiune a acestui capitol este dedicată familiei Carathéodory în $\mathbb{C}$. Descriem aici conceptul de subordonare în $\mathbb{C}$ împreună cu câteva rezultate binecunoscute legate de funcțiile olomorfe cu parte reală pozitivă. Referințele principale utilizate în această secțiune sunt [102] și [114].

Definiţia 1.2.1. Fie $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$. Atunci f *este subordonat lui* g și scriem $f \prec g$ dacă $\exists v \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ cu $v(0) = 0$ și $|v(z)| < 1$, $z \in \mathbb{U}$ (adică funcție Schwarz) astfel încât $f = g \circ v$ pe $\mathbb{U}$.

Pentru a descrie relația de subordonare dintre două funcții olomorfe putem folosi următorul rezultat de caracterizare (a se vedea de exemplu [102], [114]):

Teorema 1.2.2. *Fie $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ astfel încât g este o funcţie injectivă pe $\mathbb{U}$. Atunci $f \prec g$ este echivalent cu faptul că $f(0) = g(0)$ și $f(\mathbb{U}) \subseteq g(\mathbb{U})$.*

O familie cunoscută de funcții olomorfe (şi care joacă un rol important în caracterizarea funcțiilor univalente și, de asemenea, în teoria lanțurilor Loewner pe $\mathbb{U}$) este *familia Carathéodory mathcalP* (a se vedea de exemplu [45], [102], [114]). Reamintim că familia Carathéodory este definită prin

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{H}(\mathbb{U}) \,:\, p(0) = 1, \mathfrak{Re}\, p(z) > 0, z \in \mathbb{U}\}$$

și conține toate funcțiile olomorfe cu parte reală pozitivă pe $\mathbb{U}$.

Observaţia 1.2.3. O caracterizare simplă a clasei Carathéodory arată că $p \in \mathcal{P}$ dacă și numai dacă $\exists \phi$ o funcție Schwarz cu $p(z) = \frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)}$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$ (a se vedea de exemplu [114]).

O altă caracterizare importantă a funcțiilor din clasa $\mathcal{P}$ este dată de *formula de reprezentare Herglotz*. Acest rezultat constă într-o reprezentare integrală a familiei Carathéodory pe $\mathbb{U}$. Pe baza acestui rezultat, obținem *teorema de deformare și distorsiune* pentru clasa Carathéodory (a se vedea de exemplu [102]).

Teorema 1.2.4 (**Teorema de deformare și distorsiune**). *Fie $p \in \mathcal{P}$. Atunci*

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \mathfrak{Re}\, p(z) \leq |p(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{1.2.1}$$

şi

$$|p'(z)| \leq \frac{2\mathfrak{Re}\, p(z)}{1-|z|^2} \leq \frac{2}{(1-|z|)^2}, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{1.2.2}$$

Aceste estimări sunt exacte și funcția extremală este $p : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ definită prin $p(z) = \frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| = 1$.

Formula de reprezentare Herglotz poate fi utilizată în diferite moduri în studiul funcțiilor univalente (a se vedea de exemplu [19], [45], [102], [114]). Una dintre aceste aplicații este demonstrarea estimărilor pentru coeficienţii funcţiilor din clasa $\mathcal{P}$ (a se vedea de exemplu [102]).

Propoziţia 1.2.5. *Fie $p \in \mathcal{P}$ astfel încât $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ... + p_n z^n + ...$, pentru $z \in \mathbb{U}$. Atunci*

$$|p_n| \leq 2, \quad n \geq 1. \tag{1.2.3}$$

Acest rezultat este exact și egalitatea are loc pentru funcția extremală $p(z) = \frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}$, unde $z \in \mathbb{U}$ și lambda $\in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| = 1$.

Ultima proprietate importantă a familiei $\mathcal{P}$ prezentată aici este legată de compactitatea sa ca submulțime a lui $\mathcal{H}(\mathbb{U})$ (a se vedea [45], [102]).

Teorema 1.2.6. *Familia Carathéodory $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{U})$ este compactă.*

1.3 Rezultate generale privind funcţiile univalente în $\mathbb{C}$

Secțiunea 1.3 se concentrează pe rezultate privind funcțiile univalente în $\mathbb{C}$. Includem aici rezultate cunoscute în acest domeniu (univalență, local univalență, conform echivalență, precum și alte noțiuni importante). În partea finală a secțiunii prezentăm rezultatul principal în acest context, anume Teorema lui Riemann. Principalele referințe utilizate în această secțiune sunt [19], [29], [45], [85], [77], [114].

Definiţia 1.3.1. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f : D \to \mathbb{C}$. Atunci f este *univalentă pe D* dacă f este olomorfă și injectivă pe D. Notăm cu

$$\mathcal{H}_u(D) = \big\{ f : D \to \mathbb{C} \, : \, f \, \text{ este univalentă pe } D \big\}$$

familia funcţiilor univalente pe D.

Definiţia 1.3.2. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și fie $f \in \mathcal{H}(D)$. Atunci f se numește *local univalentă* pe D dacă pentru fiecare $z \in D$, există $r > 0$ astfel încât $f\big|_{\mathcal{U}(z,r)}$ este univalentă.

Pentru mai multe detalii despre noțiunile de univalență și local univalență prezentate în definițiile anterioare, se pot consulta lucrările [85], [114].

În următorul rezultat este prezentată o condiție necesară de univalență (a se vedea de exemplu [77], [85], [114]).

Teorema 1.3.3. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ și $f \in \mathcal{H}_u(D)$. Atunci $f' \not\equiv 0$ pe D.*

După cum am spus mai sus, rezultatul anterior nu asigură şi o condiție suficientă de univalență. Pentru a rezolva această problemă, Alexander [1], Noshiro [108], Warschawski [135] și Wolff [136] au obținut o versiune îmbunătățită a condiției din Teorema 1.3.3 pe anumite domenii (adică domenii convexe). Reamintim că un domeniu $D \subseteq \mathbb{C}$ este convex dacă pentru oricare două puncte $z_1, z_2 \in D$, întregul segment $[z_1, z_2]$ se află în D, adică $(1-t)z_1 + tz_2 \in D$, pentru orice $t \in [0,1]$.

Teorema 1.3.4. *Fie $f \in \mathcal{H}(D)$, unde D este un domeniu convex în $\mathbb{C}$. Dacă $\mathfrak{Re} f'(z) > 0$, pentru orice $z \in D$, atunci $f \in \mathcal{H}_u(D)$.*

Probabil cel mai important exemplu de funcție univalentă pe discul unitate $\mathbb{U}$ este *funcția lui Koebe* prezentată mai jos (a se vedea de exemplu [19], [45]):

Exemplul 1.3.5. Fie $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$. Atunci $f(\mathbb{U}) = \mathbb{C} \setminus \big\{ w \in \mathbb{C} \, : \, \mathfrak{Re} w \leq -1/4, \mathfrak{Im} w = 0 \big\}$ și $f \in \mathcal{H}_u(\mathbb{U})$.

Funcțiile univalente au proprietatea că păstrează domeniile simplu conexe în $\mathbb{C}$ (a se vedea de exemplu [77], [85]) așa cum putem vedea în următorul rezultat:

Teorema 1.3.6. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex și $f \in \mathcal{H}_u(D)$. Atunci $f(D)$ este un domeniu simplu conex în $\mathbb{C}$.*

În partea finală a acestei secțiuni, reamintim conceptul de *conform echivalența a domeniilor în* $\mathbb{C}$ și rezultatul fundamental în acest context, teorema lui Riemann (a se vedea de exemplu [19], citeHamburgMocanuNegoescu, [85], [114]).

Definiţia 1.3.7. Fie $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ două domenii.

a) Domeniile D_1 și D_2 sunt *conform echivalente* dacă $\exists f : D_1 \to D_2$ astfel încât $f \in \mathcal{H}_u(D_1)$ și $f(D_1) = D_2$.

b) Funcția $f : D_1 \to D_2$ cu proprietățile anterioare se numește *aplicaţie conformă* între D_1 și D_2.

În final, avem toate noțiunile și rezultatele necesare pentru a prezenta rezultatul fundamental în teoria funcțiilor univalente în $\mathbb{C}$, anume *Teorema lui Riemann* (a se vedea [45], [77]). Este important să menționăm aici că acest rezultat nu are loc în $\mathbb{C}^n$ pentru $n \geq 2$ (a se vedea de exemplu [107], [119]).

Teorema 1.3.8 (Teorema lui Riemann). *Fie $D \subsetneq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex. Atunci D și $\mathbb{U}$ sunt conform echivalente. În plus, dacă $z_0 \in D$ este un punct dat, atunci $\exists f : D \to \mathbb{U}$ o unică aplicaţie conformă astfel încât $f(z_0) = 0$ și $f'(z_0) > 0$.*

1.4 Familii de funcţii univalente pe discul unitate $\mathbb{U}$

În această secțiune prezentăm câteva familii importante de funcții univalente pe discul unitate $\mathbb{U}$. Mai întâi, descriem pe scurt clasa S a funcțiilor univalente normate pe $\mathbb{U}$. Continuăm apoi cu subclase de funcții univalente care au proprietăți geometrice speciale: familia S^* a funcţiilor stelate (în raport cu originea), respectiv familia K a funcţiilor convexe pe $\mathbb{U}$. Includem aici și rezultate privind familiile de funcții stelate și convexe de ordin $\alpha \in [0, 1)$, clasa funcțiilor aproape stelate de ordin α și clasa funcțiilor spiralate de tip $\delta \in \big(-\pi/2, \pi/2\big)$. Pentru aceste familii de funcţii prezentăm caracterizări analitice, teoreme de deformare și distorsiune și estimărilor ale coeficienților. Dintre referințele folosite aici, amintim [19], [45], [102], [114]. Este important de menționat că §1.4.3 și §1.4.6 conțin rezultate originale obținute de autor în [51].

1.4.1 Funcţii univalente normate

Maiîntâi, vom discuta despre clasa S (clasa funcţiilor univalente normate pe $\mathbb{U}$). Pentru această familie de funcții prezentăm estimări ale coeficienților, teoreme de deformare şi distorsiune, precum şi alte rezultate cunoscute în literatura de specialitate. Pentru mai multe detalii despre clasa S, se pot consulta lucrările [19], [45], [29], [85], [102], [114]. Reamintim că familia S este definită prin

$$S = \big\{f \in \mathcal{H}_u(\mathbb{U}) \,:\, f(0) = f'(0) - 1 = 0\big\}.$$

Este bine cunoscut faptul că fiecare funcție $f \in S$ admite o dezvoltare în serie Taylor de forma

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + ... + a_nz^n + ..., \tag{1.4.1}$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$. Este clar că $a_0 = 0$ și $a_1 = 1$, chiar dacă aceştia nu apar explicit în relaţia de mai sus.

În continuare prezentăm un exemplu important de funcție care aparține clasei S (a se vedea de exemplu [19], [85]).

Exemplul 1.4.1. Funcția Koebe prezentată în Exemplul 1.3.5 aparține clasei S, deoarece $f \in \mathcal{H}_u(\mathbb{U})$, $f(0) = 0$ și $f'(0) = 1$. De asemenea, $f_\theta \in S$, unde f_θ este funcția lui Koebe generalizată.

Este cunoscut faptul că pentru o funcţie $f \in S$ de forma (1.4.1), avem că $|a_2| \leq 2$ și egalitatea se obține dacă și numai dacă f este o rotație a funcției Koebe. Acest rezultat se datorează lui L. Bieberbach (a se vedea [4]). Pornind de la estimarea de mai sus, Bieberbach a formulat în 1916 următoarea conjectură (a se vedea [4]):

Teorema 1.4.2 (Conjectura lui Bieberbach). *Fie $f \in S$ de forma (1.4.1). Atunci $|a_n| \leq n$, pentru orice $n \geq 2$. Aceste estimări sunt exacte și egalitatea se obține dacă și numai dacă f este o rotație a funcției Koebe.*

Conjectura lui Bieberbach a fost rezolvată de L. de Branges în 1985 (a se vedea [18]). Până la rezolvarea ei au fost obținute mai multe rezultate parțiale de către diferiți autori (pentru detalii, se poate consulta [12], [19], [23], [114]).

Un alt rezultat important referitor la clasa S este *teorema de deformare și distorsiune* (a se vedea de exemplu [4], [45], [85]).

Teorema 1.4.3. *Fie $f \in S$. Atunci*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \tag{1.4.2}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \tag{1.4.3}$$

şi

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}, \tag{1.4.4}$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$. Aceste estimări sunt exacte și egalitatea se obține dacă și numai dacă f este o rotație a funcției Koebe.

În încheierea acestei subsecţiuni, reamintim rezultatul privitor la compactitatea clasei S. Pentru detalii, a se vedea [45], [102].

Teorema 1.4.4. *Clasa $S \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{U})$ este compactă.*

1.4.2 Funcţii stelate

Printre subclasele particulare ale clasei S se află familia S^* formată din funcții univalente normate stelate pe $\mathbb{U}$. În această subsecţiune vom prezenta rezultate legate de caracterizarea analitică a stelarităţii, estimări ale coeficienților, rezultate de deformare şi distorsiune. Alte proprietăți ale funcțiilor stelate pe $\mathbb{U}$ pot fi găsite în [19], [29], [45], [102], [114].

În primul rând, reamintim definiția unui domeniu stelat în raport cu un punct dat în $\mathbb{C}$, respectiv a unei funcții stelate pe $\mathbb{U}$.

Definiţia 1.4.5. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $z_0 \in D$. Atunci D este *stelat în raport cu z_0* dacă segmentul închis $[z_0, z]$ se află în întregime în D, $\forall z \in D$.

Luând în considerare definiția anterioară, reamintim conceptul de funcție stelată pe $\mathbb{U}$. Această definiție a fost introdusă de Alexander în [1].

Definiţia 1.4.6. Fie $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ astfel încât $f(0) = 0$. Atunci f este *stelată* pe discul unitate $\mathbb{U}$ dacă $f \in \mathcal{H}_u(\mathbb{U})$ și $f(\mathbb{U})$ este un domeniu stelat (în raport cu 0) în $\mathbb{C}$. Notăm cu S^* familia funcţiilor normate stelate pe $\mathbb{U}$.

Următorul rezultat important în acest context este caracterizarea analitică a stelarităţii (a se vedea de exemplu [19], [45], [102]). Acest rezultat joacă un rol important în teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă.

Teorema 1.4.7. *Fie $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ satisface $f(0) = 0$. Atunci $f \in S^*$ dacă și numai dacă $f'(0) \neq 0$ și*

$$\mathfrak{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \quad z \in \mathbb{U}.$$

Este clar că $S^* \subseteq S$ și $f_\theta \in S^*$, pentru orice $\theta \in \mathbb{R}$. Prin urmare, rezultatul de deformare şi distorsiune pentru clasa S (a se vedea Teorema 1.4.3) rămâne adevărat şi pentru clasa S^* (a se vedea de exemplu [95], [102]). Ca o consecință directă obținem că familia S^* este o submulțime compactă a $\mathcal{H}(\mathbb{U})$ (a se vedea de exemplu [45], [95]).

1.4.3 Funcţii stelate de ordin α

O altă subclasă importantă a lui S studiată în această secțiune este familia funcțiilor stelate de ordinul $\alpha \in [0,1)$ pe $\mathbb{U}$. Ideea stelarităţii de ordin α a fost descrisă de M.S. Robertson în [120]. Pentru detalii, se pot consulta și [19], [29], [45], [102].

Definiţia 1.4.8. Fie $0 \leq \alpha < 1$ și $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$. Funcția $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ este *stelată de ordinul* α dacă $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ și $\mathfrak{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$. Notăm cu

$$S^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U}) \, : \, \mathfrak{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha, \quad z \in \mathbb{U} \right\}$$

familia *funcţiilor stelate de ordin* α pe $\mathbb{U}$.

Este evident faptul că $S^*(\alpha) \subseteq S$ pentru orice $\alpha \in [0,1)$ şi că $S^*(0) = S^*$.

Pe baza estimărilor coeficienţilor pentru clasa $S^*(\alpha)$, putem obține o teoremă de distorsiune generalizată. Acest rezultat a fost obținut de Grigoriciuc în [51].

Teorema 1.4.9. *Fie $\alpha \in [0,1)$ și $f \in S^*(\alpha)$. Atunci*

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{B(k,\alpha)\big[k + |z| \cdot (1-2\alpha)\big]}{(1-|z|)^{k+2-2\alpha}}, \quad z \in \mathbb{U}, \quad k \geq 1, \tag{1.4.5}$$

unde

$$B(k,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-2\alpha} \displaystyle\prod_{m=1}^{k} (m-2\alpha), & \alpha \neq \dfrac{1}{2} \\ (k-1)!, & \alpha = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Aceste estimări sunt exacte.

1.4.4 Funcţii aproape stelate de ordin α

Noțiunea de aproape stelaritate de ordin α a fost definită de Feng (a se vedea [22]) în caz infinit dimensional. Prezentăm aici familia de funcții aproape stelate de ordin $\alpha \in [0,1)$ pe discul unitate $\mathbb{U}$ în $\mathbb{C}$.

Definiţia 1.4.10. Fie $\alpha \in [0,1)$ și $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$. Atunci f este *aproape stelată de ordin* α dacă

$$\mathfrak{Re}\left[\frac{f(z)}{zf'(z)}\right] > \alpha, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{1.4.6}$$

1.4.5 Funcţii convexe

În următoarea subsecțiune descriem pe scurt clasa K a funcțiilor convexe normate pe $\mathbb{U}$. Începând cu E. Study care a introdus această noțiune în 1913, mulți alți autori au contribuit la studiul familiei K (a se vedea de exemplu T. Gronwall [56] și K. Loewner [95]). Prezentăm aici caracterizarea analitică a convexității pe $\mathbb{U}$, estimările coeficienților și rezultate de creştere și distorsiune. Alte două rezultate importante care stabilesc legătura dintre clasele K și S^* sunt prezentate aici. Pentru detalii legate de funcțiile convexe se pot consulta [19], [29], [45], [102], [114].

Definiţia 1.4.11. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $z_0 \in D$. Atunci D este *convex* dacă pentru orice $z_1, z_2 \in D$, segmentul $[z_1, z_2] \subseteq D$, adică $(1-t)z_1 + tz_2 \in D$, pentru orice $t \in [0,1]$.

Definiţia 1.4.12. Fie $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$. Atunci f este *convexă* pe discul unitate $\mathbb{U}$ dacă $f \in \mathcal{H}_u(\mathbb{U})$ și $f(\mathbb{U})$ este un domeniu convex în $\mathbb{C}$. Notăm cu K familia de funcții convexe normate pe $\mathbb{U}$.

Este clar că K și S^* sunt subclase ale familiei S. Mai mult, avem $K \subset S^* \subset S$ (a se vedea de exemplu [19], [29], [45]).

Pentru a descrie o funcție din clasa K putem folosi următoarea caracterizare analitică a convexității (a se vedea de exemplu [19], [29], [45], [102]):

Teorema 1.4.13. *Fie $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$. Atunci $f \in K$ dacă și numai dacă $f'(0) \neq 0$ și $\mathfrak{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$.*

Următorul rezultat de deformare și distorsiune are loc pentru familia K (a se vedea de exemplu [45], [56], [95]):

Teorema 1.4.14. *Fie $f \in K$. Atunci*

$$\frac{|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|} \tag{1.4.7}$$

şi

$$\frac{1}{(1+|z|)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{1.4.8}$$

Aceste estimări sunt exacte, iar egalitatea se obține pentru funcţia $f(z) = \frac{z}{1-\lambda z}$, unde $z \in \mathbb{U}$ și $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| = 1$.

Conform rezultatului anterior, avem că familia K este local uniform mărginită. Prin urmare, obținem că familia K este compactă, fiind și închisă (a se vedea de exemplu [45], [102]). Un alt rezultat important este dat de următoarele estimări ale coeficienților pentru funcţiile din clasa K (a se vedea de exemplu [95]).

Propoziţia 1.4.15. *Fie $f \in K$ de forma (1.4.1). Atunci $|a_n| \leq 1$ pentru orice $n \geq 2$. Estimările sunt exacte și egalitatea se obține pentru $f(z) = \frac{z}{1-\lambda z}$, unde $z \in \mathbb{U}$ și $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| = 1$.*

Ultimul rezultat se datorează lui Alexander [1] și descrie relația dintre familiile S^* și K (a se vedea de exemplu [102]). Reamintim că pe bila unitate Euclidiană din $\mathbb{C}^n$ acest rezultat nu are loc (a se vedea de exemplu [45], [121], [128]).

Teorema 1.4.16 (Teorema lui Alexander). *Fie $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ astfel încât $f(0) = 0$. Atunci $f \in K$ dacă și numai dacă $F \in S^*$, unde $F(z) = zf'(z)$, pentru $z \in \mathbb{U}$.*

1.4.6 Funcţii convexe de ordin α

Strâns legată de clasa K este familia de funcții convexe normate de ordin α cu $\alpha \in [0, 1)$. Această noțiune a fost introdusă de M.S. Robertson în [120]. Pentru detalii, se pot consulta și [19], [29], [45], [102].

Definiţia 1.4.17. Fie $0 \leq \alpha < 1$ și $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$. Funcția $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ este *convexă de ordin* α dacă $f'(0) \neq 0$ și $\mathfrak{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$. Notăm cu

$$K(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U}) \,:\, \mathfrak{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha, \quad z \in \mathbb{U} \right\}$$

familia *funcţiilor convexe normate de ordin* α pe $\mathbb{U}$.

Este uşor de observat că $K(\alpha) \subseteq S$, pentru orice $\alpha \in [0, 1)$ și $K(0) = K$. Mai mult, o teoremă de tip Alexander este valabilă pentru clasele $K(\alpha)$ și $S^*(\alpha)$, pentru $0 \leq \alpha < 1$ (a se vedea [45]).

Pentru funcţiile din $K(\alpha)$ au fost obținute următoarele estimări ale coeficienţilor (a se vedea de exemplu [29], [120]):

Propoziţia 1.4.18. *Fie $\alpha \in [0, 1)$ și $f \in K(\alpha)$. Atunci*

$$|a_n| \leq \frac{1}{n!} \prod_{m=2}^{n} (m - 2\alpha), \quad n \geq 2. \tag{1.4.9}$$

Aceste estimări sunt exacte.

Având în vedere Propoziția 1.4.18, putem demonstra şi aici o teoremă de distorsiune generalizată. Acest rezultat este analogul Teoremei 1.4.9 din secțiunea anterioară și a fost obținut de Grigoriciuc în [51].

Teorema 1.4.19. *Fie* $\alpha \in [0, 1)$ *și* $f \in K(\alpha)$. *Atunci au loc următoarele estimări exacte*

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{B(k,\alpha)}{(1-|z|)^{k+1-2\alpha}}, \quad z \in \mathbb{U}, \quad k \ge 1,$$

unde

$$B(k,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-2\alpha}\displaystyle\prod_{m=1}^{k}(m-2\alpha), & \alpha \ne \dfrac{1}{2} \\ (k-1)!, & \alpha = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

1.4.7 Funcţii spiralate

În ultima parte a acestei secțiuni prezentăm câteva rezultate generale privind spiralitatea pe $\mathbb{U}$. Această noțiune a fost definită de L. Špaček în 1932 (a se vedea [125]) ca o generalizare a stelarităţii pe $\mathbb{U}$. Pentru detalii, se pot consulta și [19], [45], [102].

Definiţia 1.4.20. Fie $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\delta| < \frac{\pi}{2}$.

a) O *δ-spirală logaritmică* (sau *δ-spirală*) este o curbă în $\mathbb{C}$ dată prin $s(t) = s_0 e^{-(\cos\delta - i\sin\delta)t}$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi $s_0 \in \mathbb{C}^*$.

b) Un domeniu $D \subseteq \mathbb{C}$ cu $0 \in D$ se numește *δ-spiralat* dacă pentru fiecare punct $z_0 \in D \setminus \{0\}$, arcul δ-spiralei dintre z_0 și origine se află în D.

Definiţia 1.4.21. Fie $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\delta| < \frac{\pi}{2}$ și $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ cu $f(0) = 0$. Atunci f se numeşte

a) *spiralată de tipul* δ pe $\mathbb{U}$ dacă $f \in \mathcal{H}_u(\mathbb{U})$ și $f(\mathbb{U})$ este un domeniu δ-spiralat în $\mathbb{C}$;

b) *spiralată* dacă există $\delta \in \mathbb{R}$ cu $|\delta| < \pi/2$ astfel încât f este spiralată de tipul δ pe $\mathbb{U}$.

Reamintim că notăm cu $\hat{S}_\delta$ familia tuturor funcțiilor spiralate de tip δ normate pe $\mathbb{U}$. Este uşor de observat că $\hat{S}_\delta \subseteq S$ și $\hat{S}_0 = S^*$ (a se vedea de exemplu [29], [102]).

În continuare, prezentăm caracterizarea analitică a spiralităţii de tip δ pe $\mathbb{U}$ obţinută Špaček (a se vedea [125]; a se vedea și [45], [102]):

Teorema 1.4.22. *Fie* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ *astfel încât* $f(0) = 0$ *și* $f'(0) \ne 0$. *De asemenea, fie* $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$. *Atunci* $f \in \hat{S}_\delta$ *dacă și numai dacă*

$$\mathfrak{Re}\left[e^{i\delta}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{1.4.10}$$

1.5 Funcţii olomorfe cu partea reală a derivatei pozitivă

În strânsă legătură cu familia S este familia $\mathcal{R}$ a funcţiilor olomorfe normate cu partea reală a derivatei pozitivă. Având în vedere rezultatul dovedit de Alexander, Noshiro, Warschawski și Wolff (a se vedea Teorema 1.3.4; a se vedea și [19], [77]) obținem că orice funcție $f \in \mathcal{R}$ este univalentă pe $\mathbb{U}$. Prin urmare, $\mathcal{R}$ este o subclasă a clasei S (a se vedea, de exemplu, [19], [96] sau [102]) numită uneori clasa Noshiro-Warschawski. Prezentăm în această secțiune câteva rezultate clasice legate de clasa $\mathcal{R}$ și extensii ale acestei clase (a se vedea [89], [90], [96], [102]), precum și rezultatele originale obținute de autor în [50].

1.5.1 Rezultate generale privind clasa $\mathcal{R}$

În primul rând, reamintim că

$$\mathcal{R} = \left\{f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U}) \,:\, \mathfrak{Re}f'(z) > 0, \quad z \in \mathbb{U}\right\}$$

este *familia funcţiilor olomorfe normate a căror derivată are partea reală pozitivă* (a se vedea de exemplu [29], [45] sau [102]). După cum am menționat deja mai sus, se știe că $\mathcal{R} \subseteq S$ (a se vedea de exemplu [19], [96] sau [102]).

Ținând cont de definiția clasei $\mathcal{P}$ este ușor de observat că $f \in \mathcal{R}$ dacă și numai dacă $f' \in \mathcal{P}$ (a se vedea de exemplu [102]). Această proprietate este echivalentă cu faptul că $|\arg f'(z)| < \frac{\pi}{2}$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$.

Exemplul 1.5.1. Fie $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$f(z) = -z - \frac{2}{\lambda}\log(1 - \lambda z), \tag{1.5.1}$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| = 1$. Atunci $f \in \mathcal{R}$.

Primul rezultat prezentat se referă la teorema de deformare și distorsiune și la estimările coeficienților pentru clasa $\mathcal{R}$ (a se vedea de exemplu [96], [102] sau [129]).

Propoziţia 1.5.2. *Fie $f \in \mathcal{R}$. Atunci*

$$|a_n| \le \frac{2}{n}, \quad n \ge 2, \tag{1.5.2}$$

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \mathfrak{Re} f'(z) \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{1.5.3}$$

şi

$$-|z| + 2\log(1+|z|) \le |f(z)| \le -|z| - 2\log(1-|z|), \tag{1.5.4}$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$. Aceste estimări sunt exacte și egalitatea se obține pentru funcția dată de (1.5.1).

Pornind de la rezultatul anterior, putem demonstra o teoremă generală de distorsiune pentru clasa $\mathcal{R}$. Acest rezultat a fost obținut de Grigoriciuc în [50].

Teorema 1.5.3. *Dacă $f \in \mathcal{R}$, atunci*

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{2(k-1)!}{(1-|z|)^k}, \quad z \in \mathbb{U}, \quad k \ge 2.$$

Estimările sunt exacte și egalitatea se obține pentru funcția dată de (1.5.1).

1.5.2 Clasa $\mathcal{R}(\alpha)$

O primă generalizare a clasei $\mathcal{R}$ a fost considerată de Krishna, RamReddy și Venkateswarlu în [89] și [90]. Pentru un parametru real $\alpha \in [0, 1)$, aceştia au definit clasa

$$\mathcal{R}(\alpha) = \{f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U}) : \mathfrak{Re} f'(z) > \alpha, \quad z \in \mathbb{U}\}$$

a *funcțiilor olomorfe normate a căror derivată are partea reală pozitivă de ordinul α*. Această familie de funcții a fost studiată și de Grigoriciuc în [50].

Observaţia 1.5.4. Este ușor de arătat că f aparține clasei $\mathcal{R}(\alpha)$ dacă și numai dacă $g \in \mathcal{P}$, unde $g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ este definită prin $g(z) = \frac{1}{1-\alpha}\big(f'(z) - \alpha\big)$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$.

Pe baza echivalenței anterioare dintre $\mathcal{R}(\alpha)$ și $\mathcal{P}$, putem obține următorul exemplu:

Exemplul 1.5.5. Fie $\alpha \in [0, 1)$ și $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{1}{\lambda}\Big[(2\alpha - 1)\lambda z - 2(1-\alpha)\log(1 - \lambda z)\Big], \tag{1.5.5}$$

unde $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $|\lambda| = 1$. Atunci $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

În continuare, prezentăm estimările coeficienţilor funcţiilor din clasa $\mathcal{R}(\alpha)$ obținute de Grigoriciuc în [50] (a se vedea de exemplu [90] pentru o altă demonstrație a acestui rezultat).

Propoziţia 1.5.6. *Fie $\alpha \in [0,1)$ și $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Atunci $|a_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{n}$, pentru orice $n \geq 2$. Aceste estimări sunt exacte, iar egalitatea se obţine pentru funcția dată de (1.5.5).*

Pentru clasa $\mathcal{R}(\alpha)$ putem obține și un rezultat de deformare și distorsiune. Acest rezultat este original și a fost obținut de Grigoriciuc în [50].

Teorema 1.5.7. *Fie $\alpha \in [0,1)$ și $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Atunci*

$$|f(z)| \leq (2\alpha-1)|z| + 2(\alpha-1)\log(1-|z|) \tag{1.5.6}$$

şi

$$|f(z)| \geq -|z| - 2(\alpha-1)\log(1+|z|), \quad z \in \mathbb{U}. \tag{1.5.7}$$

În plus,

$$\frac{1-2\alpha-|z|}{1+|z|} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+(1-2\alpha)|z|}{1-|z|}, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{1.5.8}$$

Aceste estimări sunt exacte, iar funcția extremală este dată de (1.5.5).

1.5.3 Clasa $\mathcal{R}_p$

În a treia parte a acestei secțiuni considerăm o altă extensie a clasei $\mathcal{R}$ și anume clasa

$$\mathcal{R}_p = \left\{f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U}) \,:\, f^{(p)}(0) = 1, \mathfrak{Re} f^{(p)}(z) > 0, \quad z \in \mathbb{U}\right\}, \quad p \geq 1,$$

ce conţine *funcțiile olomorfe normate a căror derivată de ordin p are partea reală pozitivă.* Rezultatele originale prezentate în această parte au fost obținute în [50].

Este important să menționăm aici legătura cu clasa $\mathcal{P}$. Dacă $p \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$ este arbitrar fixat, atunci $f \in \mathcal{R}_p$ dacă și numai dacă $f^{(p)} \in \mathcal{P}$. Prin urmare, putem studia proprietățile clasei $\mathcal{R}_p$ în termenii clasei Carathéodory. Este uşor de văzut că $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}$.

Următorul rezultat obţinut de Grigoriciuc (a se vedea [50]) prezintă estimările coeficienţilor pentru funcţiile din clasa $\mathcal{R}_p$ și este o generalizare a Propoziției 1.5.6.

Propoziţia 1.5.8. *Fie $p \in \mathbb{N}^*$ și fie $f \in \mathcal{R}_p$ de forma $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, pentru $z \in \mathbb{U}$. Atunci*

$$|a_n| \leq \frac{2(n-p)!}{n!}, \quad n \geq p+1. \tag{1.5.9}$$

În continuare, prezentăm o teoremă generală de distorsiune obținută de Grigoriciuc în [50].

Teorema 1.5.9. *Fie $p \in \mathbb{N}^*$ și fie $f \in \mathcal{R}_p$ de forma $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, pentru $z \in \mathbb{U}$. Atunci*

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{2(k-p)!}{(1-|z|)^{k-p+1}}, \quad z \in \mathbb{U}, \quad k \geq p. \tag{1.5.10}$$

1.5.4 Clasa $\mathcal{R}_p(\alpha)$

Ultima parte a acestei secțiuni conține o generalizare a clasei anterioare (după modelul prezentat în [89] și [90]) introdusă de Grigoriciuc în [50]. Pentru $\alpha \in [0,1)$ și $p \in \mathbb{N}^*$ notăm cu

$$\mathcal{R}_p(\alpha) = \left\{f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U}) \,:\, f^{(p)}(0) = 1, \mathfrak{Re} f^{(p)}(z) > \alpha, \quad z \in \mathbb{U}\right\}.$$

clasa *funcțiilor olomorfe normate a căror derivată de ordin p are partea reală pozitivă de ordin α.* Clasa $\mathcal{R}_p(\alpha)$ a fost introdusă pentru a generaliza clasa $\mathcal{R}_p$ descrisă în subsecțiunea anterioară. Ideea de a considera un parametru $\alpha \in [0,1)$ este preluată din extensiile pe care Robertson le-a făcut în [120] pentru funcții stelate, respectiv convexe.

În lumina rezultatelor prezentate anterior, avem că $f \in \mathcal{R}_p(\alpha)$ dacă și numai dacă $g \in \mathcal{P}$, unde $g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ este definită prin $g(z) = \frac{f^{(p)}(z)-\alpha}{1-\alpha}$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$.

Şi aici, clasa $\mathcal{R}_p(\alpha)$ poate fi studiată folosindu-ne de clasa Carathéodory. Prin urmare, putem obține estimări ale coeficienţilor şi rezultate de deformare şi distorsiune.

1.6 Teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}$

A şasea secţiune conţine o scurtă introducere în teoria lanțurilor Loewner în $\mathbb{C}$. Reamintim câteva definiții cunoscute în literatură (de exemplu, lanț de subordonare, lanț Loewner) și rezultate importante legate de acestea. În a doua parte a acestei secțiuni ne referim la caracterizarea analitică a unor subclase de S cu ajutorul lanțurilor Loewner, iar în final, prezentăm noțiunea de reprezentare parametrică pe $\mathbb{U}$. Principalele referințe utilizate în această secțiune sunt [45], [102], [113], [114]. Mai multe detalii despre teoria lanțurilor Loewner pot fi găsite în [12], [16], [17], [19], [23].

1.6.1 Rezultate generale privind lanțurile Loewner în $\mathbb{C}$

Prezentăm în începutul acestei subsecţiuni noțiunile și rezultateke preliminare legate de teoria lanțurilor Loewner în $\mathbb{U}$ (a se vedea de exemplu [45], [102], [113], [114]).

Definiţia 1.6.1. Fie $f = f(z,t) : \mathbb{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ o funcție.

- Dacă $f(\cdot,t) \in \mathcal{H}_u(\mathbb{U})$, $f(0,t) = 0$, pentru $t \geq 0$ și $f(\cdot,s) \prec f(\cdot,t)$, pentru $0 \leq s \leq t < \infty$, atunci $f(z,t)$ este un *lanț de subordonare univalent* pe $\mathbb{U}$.
- Dacă $f(z,t)$ satisface și proprietatea că $f'(0,t) = e^t$, pentru orice $t \geq 0$, atunci f se numește *lanț Loewner* (*lanț de subordonare univalent normat*) pe $\mathbb{U}$.

Reamintim că notația $f'(z,t)$ este folosită pentru derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$.

Observaţia 1.6.2. Fie $f(z,t)$ un lanț Loewner. Atunci $\exists v = v(z,s,t)$ o unică funcție Schwarz asociată lui $f(z,t)$ astfel încât

$$f(z,s) = f\big(v(z,s,t),t\big), \quad \forall z \in \mathbb{U}, \quad 0 \leq s \leq t < \infty, \tag{1.6.1}$$

numită *funcția de tranziție* a lui f (a se vedea, de exemplu, [45]).

Pe baza normă rii lui $f(z,t)$, obținem că $v'(0,s,t) = e^{s-t}$, pentru orice $0 \leq s \leq t < \infty$. Din (1.6.1), rezultă că $v = v(z,s,t)$ satisface proprietatea *semigrupului*

$$v(z,s,T) = v\big(v(z,s,t),t,T\big), \tag{1.6.2}$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și $0 \leq s \leq t \leq T < \infty$. În plus, funcția $|v(z,s,t)|$ este descrescătoare în raport cu $t \in [s,\infty)$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și $s \geq 0$.

Probabil unul dintre rezultatele cheie în teoria lanțurilor Loewner este legătura dintre funcțiile univalente normate și lanțurile Loewner. Acest rezultat se datorează lui Pommerenke (a se vedea [114]) și spune că

Teorema 1.6.3 (**Teorema lui Pommerenke**). *Fie $f \in S$ și fie $f(\cdot,t)$ un lanț Loewner pe $\mathbb{U}$, pentru orice $t \geq 0$. Atunci $f(\cdot,0) = f$.*

În continuare prezentăm câteva rezultate clasice, dar foarte importante în teoria lanțurilor Loewner și ecuația diferențială Loewner pe $\mathbb{U}$ (a se vedea de exemplu [45], [114]). Prima teoremă a fost demonstrată de Pommerenke (a se vedea [114]) și oferă o metodă de generare a lanțurilor Loewner (a se vedea de exemplu [45]).

Teorema 1.6.4. *Presupunem că $p = p(z,t) : \mathbb{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ satisface proprietățile: $p(\cdot,t)$ aparține clasei $\mathcal{P}$, pentru toate numerele nenegative t și pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $p(z,\cdot)$ aparține clasa de funcții măsurabile pe $[0,\infty)$. Fie*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = -vp(v,t), & a.e. \quad t \geq s \\ v(z,s,s) = z \end{cases} \tag{1.6.3}$$

o problemă cu valori iniţiale. Atunci $\forall z \in \mathbb{U}$ și $s \geq 0$, problema (1.6.3) este rezolvabilă în mod unic, iar soluția sa $v(z,s,\cdot)$ este local absolut continuă cu $v'(0,s,t) = e^{s-t}$. În plus, dacă $s \geq 0$ și $z \in \mathbb{U}$, atunci

$v(z,s,\cdot)$ aparține clasei de funcții Lipschitz pe $[s,\infty)$ local uniform continue în raport cu z și $v(\cdot,s,t)$ aparține clasei de funcții Schwarz univalente pentru orice $t \geq s$. În plus, pentru orice $s \geq 0$, limita $\lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s)$ *există local uniform pe $\mathbb{U}$, iar $f(z,s)$ este un lanț Loewner care satisface ecuația*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zp(z,t)f'(z,t), \quad a.e. \quad t \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{U}. \tag{1.6.4}$$

Reamintim că ecuația diferențială (1.6.4) este cunoscută sub denumirea de *ecuația diferențială Loewner(-Kufarev)* (a se vedea de exemplu [45], [114]).

Următorul rezultat oferă o caracterizare a lanțurilor Loewner și a fost obținut de Pommerenke în [113] (a se vedea și [45], [114]).

Teorema 1.6.5. *Fie $f : \mathbb{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ astfel încât $f(0,t) = 0$ și $f'(0,t) = e^t$, pentru orice $t \geq 0$. Atunci $f(z,t)$ este un lanț Loewner dacă și numai dacă*

a) $\exists \rho \in (0,1)$ și $\alpha > 0$ astfel încât $f(\cdot,t)$ aparține familiei $\mathcal{H}(\mathcal{U}_\rho)$ pentru orice $t \geq 0$, $f(z,\cdot)$ aparține clasei funcţiilor local absolut continue pe $[0,\infty)$ local uniform în raport cu $z \in \mathcal{U}_\rho$ și $|f(z,t)| \leq \alpha e^t$, pentru orice $z \in \mathcal{U}_\rho$ și $t \geq 0$.

b) $\exists p = p(z,t)$ astfel încât $p(\cdot,t)$ aparține clasei $\mathcal{P}$ pentru fiecare $t \geq 0$, $p(z,\cdot)$ aparține familiei de funcții măsurabile pe $[0,\infty)$ pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și aproape peste tot în $[0,\infty)$ astfel încât

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zp(z,t)f'(z,t), \quad z \in \mathcal{U}_\rho.$$

1.6.2 Lanțuri Loewner și funcții univalente în $\mathbb{C}$

Încheiem această secțiune ilustrând modul în care teoria lanțurilor Loewner poate fi utilizată în caracterizarea proprietăților geometrice ale funcțiilor univalente (a se vedea de exemplu [45], [114], [137]). În primul rând, prezentăm caracterizarea spiralităţii (în particular, a stelarităţii) cu ajutorul lanţurilor Loewner (a se vedea de exemplu [45], [114]).

Teorema 1.6.6. *Fie $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$, $\delta \in \mathbb{R}$ cu $|\delta| < \frac{\pi}{2}$ și $\alpha = \tan\delta$. Atunci $f \in \hat{S}_\delta$ dacă și numai dacă $f(z,t) = e^{(1-i\alpha)t} f(e^{i\alpha t}z)$ este un lanț Loewner, pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și $t \geq 0$. În particular, pentru $\delta = 0$, obținem că $f \in S^*$ dacă și numai dacă $f(z,t) = e^t f(z)$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și $t \geq 0$.*

În continuare, reamintim caracterizarea aproape stelarităţii de ordin α cu ajutorul lanțurilor Loewner (a se vedea de exemplu [137]).

Teorema 1.6.7. *Fie $\alpha \in [0,1)$ și $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$. Atunci f este aproape stelată de ordin α dacă și numai dacă $f(z,t) = e^{\frac{t}{1-\alpha}} f\big(e^{\frac{\alpha t}{\alpha-1}} z\big)$ este un lanț Loewner, pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și $t \geq 0$.*

Similar, putem obține și o caracterizare a convexității in termeni de lanțuri Loewner (a se vedea de exemplu [45], [114]).

Teorema 1.6.8. *Fie $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$. Atunci $f \in K$ dacă și numai dacă $f(z,t) = f(z) + (e^t - 1)zf'(z)$ este un lanț Loewner, pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și $t \geq 0$.*

1.6.3 Reprezentare parametrică pe $\mathbb{U}$

În ultima subsecțiune reamintim noțiunea de reprezentare parametrică pe $\mathbb{U}$ (a se vedea de exemplu [45], [114]). Cum fiecare funcție $f \in S$ poate fi văzută ca primul element al unui lanț Loewner (a se vedea Teorema 1.6.3; a se vedea și [45], [114]) este uşor de înţeles că f are reprezentare parametrică.

Definiţia 1.6.9. O funcție $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$ are *reprezentare parametrică pe* $\mathbb{U}$ dacă $\exists p : \mathbb{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ astfel încât $p(\cdot,t)$ aparține clasei $\mathcal{P}$, pentru $t \geq 0$, $p(z,\cdot)$ aparține familiei de funcții măsurabile pe $[0,\infty)$, pentru $z \in \mathbb{U}$ și limita $\lim_{t\to\infty} e^t v(z,t) = f(z)$ este local uniformă pe $\mathbb{U}$, unde $v(z,\cdot)$ este unica soluție a problemei (1.6.3) pentru $s = 0$ cu proprietatea că v este local absolut continuă pe $[0,\infty)$.

Dacă notăm cu $S^0(\mathbb{U})$ familia de funţii care admit reprezentare parametrică, atunci $S^0(\mathbb{U}) = S$ conform Teoremei 1.6.3 (a se vedea de exemplu [45], [114]). Cu toate acestea, în caz multi-dimensional, acest rezultat nu este adevărat (a se vedea de exemplu [32]) așa cum vom vedea în Capitolul 3.

Capitolul 2

Noi subclase de funcţii univalente pe $\mathbb{U}$

Ideea principală a capitolului al doilea constă în studiul unui nou operator diferențial și a două noi subclase de funcții univalente pe discul unitate $\mathbb{U}$ definite cu ajutorul acestui operator. Capitolul este format în întregime din rezultate originale obținute de autor în [54].

În prima secţiune prezentăm operatorul diferențial $\mathcal{G}_k$ definit pe familia $\mathcal{H}_0(\mathbb{U})$ de funcții olomorfe normate pe $\mathbb{U}$. Folosind operatorul $\mathcal{G}_k$ putem construi două noi subclase de funcții univalente pe $\mathbb{U}$ care sunt strâns legate de familiile S^*, respectiv K, așa cum se poate vedea în §2.2. Diferite proprietăți ale operatorului $\mathcal{G}_k$ sunt studiate în această secțiune, de ex. liniaritatea lui $\mathcal{G}_k$, produsul de convoluție și condiții suficiente de univalență pentru $\mathcal{G}_k$ (a se vedea Propozițiile 2.1.3–2.1.6). Este important de menționat aici că operatorul diferențial $\mathcal{G}_k$ este diferit de operatorul diferențial Sălăgean D^n (a se vedea Remarca 2.2.6; a se vedea și [124]). O altă observaţie importantă este că operatorul $\mathcal{G}_k$ poate fi extins în cazul mai multor variabile complexe (a se vedea Capitolul 4; a se vedea și [53]).

Folosind operatorul diferențial $\mathcal{G}_k$ menționat mai sus, putem construi două noi subclase de funcții univalente pe $\mathbb{U}$ în $\mathbb{C}$. Aceste subclase, denumite aici $E_k^*(\alpha)$, respectiv $E_k(\alpha)$, unde $\alpha \in [0,1)$, sunt în strânsă legătură cu clasele de funcții stelate, respectiv convexe de ordin α pe $\mathbb{U}$. O observație importantă este că pentru $k = 0$ obținem $E_0^*(\alpha) = S^*(\alpha)$ și $E_0(\alpha) = K(\alpha)$, deci putem studia aceste noi subclase folosindu-ne de familiile $S^*(\alpha)$ și $K(\alpha)$ introduse de Robertson în [120]. Pe de altă parte, avem că E_1 este strict inclusă în familia $K(1/2)$ de funcții convexe de ordin $1/2$ și $E_1^*(\alpha) = K(\alpha)$. Așa cum am menționat deja mai sus, operatorul $\mathcal{G}_k$ și subclasele introduse în acest capitol pot fi extinse și în cazul mai multor variabile complexe (a se vedea de exemplu [53]). Cu toate acestea, în $\mathbb{C}^n$ unele proprietăți sunt diferite, așa cum se poate vedea în rezultatele incluse de autor în Capitolul 4.

A doua secţiune este dedicată studiului subclaselor $E_k(\alpha)$ și $E_k^*(\alpha)$ în $\mathbb{C}$, unde $k \in \mathbb{N}$ și $\alpha \in [0,1)$. Împreună cu proprietățile generale ale acestor subclase (teoreme de deformare și distorsiune, estimări ale coeficienților, caracterizare analitică, conexiune cu lanțurile Loewner şi altele), studiem și cazuri particulare (de ex. $k = 1$ și $\alpha = 0$) care sunt de interes, fiind în strânsă legătură cu clasele de funcții univalente menționate în primul capitol (a se vedea rezultatele din §2.2.2). Toate rezultatele din acest capitol sunt originale și au fost obținute de autor în [54]. Alte surse bibliografice importante folosite pentru pregătirea acestui capitol sunt [19], [29], [45], [85].

2.1 Operatorul diferenţial $\mathcal{G}_k$

În această secţiune introducem operatorul diferențial $\mathcal{G}_k$ definit pe familia $\mathcal{H}_0(\mathbb{U})$ de funcții olomorfe normate pe $\mathbb{U}$. Folosind operatorul $\mathcal{G}_k$ putem construi două noi subclase de funcții univalente pe $\mathbb{U}$ care sunt strâns legate de familiile S^*, respectiv K, așa cum se poate vedea în secţiunea următoare.

Este important de menționat aici că operatorul diferențial $\mathcal{G}_k$ este diferit de operatorul diferențial Sălăgean D^n (a se vedea Remarca 2.2.6; a se vedea și [124]). O altă observaţie importantă este că operatorul $\mathcal{G}_k$ poate fi extins în cazul mai multor variabile complexe (a se vedea Capitolul 4; a se vedea și [53]).

Pentru operatorul diferenţial $\mathcal{G}_k$ în $\mathbb{C}$ prezentăm câteva proprietăţi legate de liniaritate şi univalenţă pe discului unitate $\mathbb{U}$. Discutăm de asemenea despre modul în care produsul de convoluţie este păstrat sub acţiunea operatorului $\mathcal{G}_k$. Rezultatele originale discutate în această secțiune au fost obţinute de autor în [54].

Definiţia 2.1.1. Fie $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ și fie $\mathcal{G}_k : \mathcal{H}_0(\mathbb{U}) \to \mathcal{H}(\mathbb{U})$ operatorul diferenţial definit pe clasa funcţiilor olomorfe normate pe $\mathbb{U}$ prin

$$(\mathcal{G}_k f)(z) = \begin{cases} z^k f^{(k)}(z) + a_{k-1}z^{k-1} + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, & k \geq 1 \\ f(z) & k = 0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

pentru orice $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$ și $z \in \mathbb{U}$. Observăm că, pentru $k \geq 1$, $a_0, ..., a_{k-1}$ sunt primii k coeficienți din dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$.

Observaţia 2.1.2. Având în vedere definiția de mai sus, este ușor de observat că operatorul $\mathcal{G}_0$ (de ordinul 0) este operatorul identitate, adică $\mathcal{G}_0 f = f$. O altă formă particulară a operatorului $\mathcal{G}_k$ este pentru $k = 1$ (de ordinul 1). În acest caz, $(\mathcal{G}_1 f)(z) = zf'(z)$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$.

Legătura dintre doi operatori diferenţiali de ordine consecutive $k-1$, respectiv k, unde $k \in \mathbb{N}$ cu $k \geq 1$, este dată în următorul rezultat (a se vedea [54])

Propoziţia 2.1.3. *Fie $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$. Atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$ este valabilă relația*

$$(\mathcal{G}_k f)(z) = z(\mathcal{G}_{k-1} f)'(z) - (k-1)(\mathcal{G}_{k-1} f)(z) + \sum_{n=0}^{k-1} (k-n) a_n z^n, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{2.1.2}$$

Propoziţia 2.1.4. *Fie $k \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $f, g \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$. Atunci*

$$\mathcal{G}_k(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{G}_k f + \beta \mathcal{G}_k g. \tag{2.1.3}$$

O altă proprietate a operatorului $\mathcal{G}_k$ este legată de produsul Hadamard/de convoluție (pentru detalii, a se vedea [19], [29], [45]). Fie $f, g \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$ definite prin $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ și $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Notăm

$$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n, \quad z \in \mathbb{U} \tag{2.1.4}$$

produsul Hadamard (de convoluție) al funcțiilor f și g pe $\mathbb{U}$ (a se vedea de exemplu [19], [29], [45]). Legătura între produsul de convoluție a doi operatori diferiți și operatorul aplicat pe un produs de convoluție este dată de următorul rezultat (a se vedea [54]).

Propoziţia 2.1.5. *Fie $k \in \mathbb{N}$ și $f, g \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$. Atunci*

1. $\mathcal{G}_k(f * g) = (\mathcal{G}_k f) * g = f * (\mathcal{G}_k g)$;
2. $(\mathcal{G}_k f) * (\mathcal{G}_k g) = \mathcal{G}_k(\mathcal{G}_k(f * g))$.

O altă proprietate importantă este condiția suficientă de univalență pentru $\mathcal{G}_k f$ (în raport cu modulul coeficienților a_n):

Propoziţia 2.1.6. *Fie $k \in \mathbb{N}$ și $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$. De asemenea, fie σ_k definit de*

$$\sigma_k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot n!}{(n-k)!} |a_n|, & k \leq 2 \\ \displaystyle\sum_{n=2}^{k-1} n|a_n| + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n \cdot n!}{(n-k)!} |a_n|, & k \geq 3. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Dacă $\sigma_k \leq 1$, atunci $\mathcal{G}_k f$ este univalent pe $\mathbb{U}$. În particular, $\mathcal{G}_k f \in S$.

Observaţia 2.1.7. În particular, pentru $k = 0$, obținem binecunoscuta condiție de univalență pentru o funcție olomorfă pe $\mathbb{U}$ (a se vedea de exemplu [45, Exercițiul 1.1.4]): dacă $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$, atunci f este univalentă pe $\mathbb{U}$.

2.2 Subclase de funcții univalente

Folosind operatorul diferenţial $\mathcal{G}_k$ definit mai sus, putem construi două noi subclase de funcţii univalente pe discul unitate $\mathbb{U}$ în $\mathbb{C}$. Aceste subclase, notate $E_k^*(\alpha)$, respectiv $E_k(\alpha)$, cu $\alpha \in [0,1)$, sunt strâns legate de clasele de funcții stelate, respectiv convexe de ordin α pe $\mathbb{U}$. O observaţie importantă este că pentru $k = 0$ obținem $E_0^*(\alpha) = S^*(\alpha)$ și $E_0(\alpha) = K(\alpha)$, așadar studiul acestor noi subclase se va face folosind cunoscutele familii $S^*(\alpha)$ și $K(\alpha)$ introduse de Robertson în [120]. Pe de altă parte, avem că E_1 este strict inclusă în familia $K(1/2)$ de funcții convexe de ordin $1/2$ (a se vedea Propoziția 2.2.25). Rezultatele originale incluse în această secțiune pot fi găsite în [54].

2.2.1 Subclasa $E_k^*(\alpha)$

Mai întâi, prezentăm câteva rezultate generale privind subclasa $E_k^*(\alpha)$ și conexiunile acestei clase cu alte clase importante de funcții univalente (de exemplu, clasa funcțiilor stelate de ordin α sau clasa de funcţii univalente introduse de Sălăgean în [124]).

Definiţia 2.2.1. Fie $\alpha \in [0,1)$ și $k \in \mathbb{N}$. Fie $\mathcal{G}_k$ operatorul diferenţial definit de relaţia (2.1.1). Atunci

$$E_k^*(\alpha) = \{f \in S : \mathcal{G}_k f \in S^*(\alpha)\}$$

este familia de funcții univalente normate f pe discul unitate cu proprietatea că funcţia $\mathcal{G}_k f$ este stelată de ordinul α. În particular, notăm cu $E_k^* = E_k^*(0)$.

Observaţia 2.2.2. Este evident că $E_0^*(\alpha) = S^*(\alpha)$ este clasa funcţiilor stelate de ordin α pe $\mathbb{U}$.

Observaţia 2.2.3. Ținând cont de definiția stelarităţii ordinul α (a se vedea Definiția 1.4.8), avem că

$$E_k^*(\alpha) = \left\{f \in S : \mathfrak{Re}\left[\frac{z(\mathcal{G}_k f)'(z)}{(\mathcal{G}_k f)(z)}\right] > \alpha, \quad z \in \mathbb{U}\right\}. \tag{2.2.1}$$

Într-adevăr, dacă $f \in S$, atunci $\mathcal{G}_k f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$, $(\mathcal{G}_k f)(0) = 0$ și $(\mathcal{G}_k f)'(0) = 1$. Împreună cu condiția $\mathfrak{Re}\left[\frac{z(\mathcal{G}_k f)'(z)}{(\mathcal{G}_k f)(z)}\right] > \alpha$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$, sunt îndeplinite toate ipotezele din definiția stelartităţii e ordin α.

Propoziţia 2.2.4. *Fie $\alpha \in [0,1)$. Atunci $E_1^*(\alpha) = K(\alpha)$.*

Observaţia 2.2.5. Ca o consecință a celor două observații anterioare, obținem că $E_0^* = S^*$ și $E_1^* = K$. Este important de menționat aici că a doua egalitate nu este adevărată în cazul aplicaţiilor biolomorfe de mai multe variabile complexe (a se vedea [53]).

Observaţia 2.2.6. O menţiune importantă în acest context este că

$$E_0^*(\alpha) = S_0(\alpha) \quad \text{and} \quad E_1^*(\alpha) = S_1(\alpha),$$

unde $S_0(\alpha)$ și $S_1(\alpha)$ sunt forme particulare ale clasei $S_n(\alpha)$ introduse de Sălăgean în [124] pentru $\alpha \in [0,1)$. Aceste egalităţi sunt valabile pentru că

$$D^0 f(z) = f(z) = (\mathcal{G}_0 f)(z) \quad \text{and} \quad D^1 f(z) = zf'(z) = (\mathcal{G}_1 f)(z),$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, unde D^n este operatorul diferenţial introdus de Sălăgean. Totuși, pentru $n = k \geq 2$, avem că

$$E_k^*(\alpha) \neq S_n(\alpha),$$

întrucât operatorul diferenţial Sălăgean $D^n f$ (a se vedea [124]) este diferit de operatorul $\mathcal{G}_k f$, pentru orice $n = k \geq 2$. De exemplu, dacă $n = 2$, atunci

$$D^2 f(z) = D(Df(z)) = z^2 f''(z) + zf'(z) \neq z^2 f''(z) + z = (\mathcal{G}_2 f)(z),$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$. Prin urmare, rezultatele comune din această teză și cele obținute de Sălăgean în [124] sunt valabile doar pentru cazurile particulare $k = 0$ și $k = 1$ (care sunt oricum cunoscute).

Folosind un argument similar cu cel folosit de Merkes, Robertson și Scott în [101], putem demonstra următorul rezultat:

Teorema 2.2.7. *Fie $\alpha \in [0,1)$, $k \in \mathbb{N}$ și $f \in S$. De asemenea, fie $\sigma_{k,\alpha}$ definit prin*

$$\sigma_{k,\alpha} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-\alpha)\cdot n!}{(n-k)!}|a_n|, & k \le 2 \\ \displaystyle\sum_{n=2}^{k-1}(n-\alpha)|a_n| + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(n-\alpha)\cdot n!}{(n-k)!}|a_n|, & k \ge 3. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Dacă $\sigma_{k,\alpha} \le 1-\alpha$, atunci $f \in E_k^*(\alpha)$.

În continuare prezentăm câteva rezultate privind estimări ale coeficienților și teoreme de distorsiune pentru clasa $E_k^*(\alpha)$. Pentru demonstrarea primului nostru rezultat, folosim estimările coeficienților pentru clasa $S^*(\alpha)$ date de Robertson în [120] (a se vedea [45]). Rețineți că acest rezultat a fost obținut de Grigoriciuc în [54].

Teorema 2.2.8. *Fie $\alpha \in [0,1)$, $k \in \mathbb{N}$ și $f \in E_k^*(\alpha)$. Atunci*

$$|a_n| \le \frac{(n-k)!}{(n-1)!\cdot n!} \prod_{m=2}^{n} (m-2\alpha), \quad n \ge k \ge 2. \tag{2.2.3}$$

Corolarul 2.2.9. *Fie $k \in \mathbb{N}$ și $f \in E_k^*$. Atunci*

$$|a_n| \le \frac{n}{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)} = \frac{n\cdot(n-k)!}{n!}, \quad n \ge k. \tag{2.2.4}$$

Urmând ideea prezentată de Duren în [19] și de Goodman în [29] (mai apoi de Grigoriciuc în [51]), putem demonstra un rezultat general de distorsiune pentru clasa E_k^*. Cu alte cuvinte, putem obţine estsimări pentru modulul derivatei de ordin m a unei funcții $f \in E_k^*$, unde $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $m \ge k$ (a se vedea [54]).

Teorema 2.2.10. *Fie $k \in \mathbb{N}$. Dacă $f \in E_k^*$, atunci*

$$\left|f^{(m)}(z)\right| \le \frac{\left[m + (1-k)|z|\right]\cdot(m-k)!}{(1-|z|)^{m-k+2}}, \tag{2.2.5}$$

pentru orice $m \ge k$ și $z \in \mathbb{U}$.

Observaţia 2.2.11. Evident, pentru $k \in \{0,1\}$ obținem rezultatele clasice incluse de Goodman în [29].

Pe baza teoremei anterioare și a rezultatului demonstrat în [51], propunem următoarea conjectură (adevărată în cazurile particulare $k=0$, $\alpha = 0$ și $\alpha = \frac{1}{2}$):

Conjectura 2.2.12. *Fie $\alpha \in [0,1)$ și $m,k \in \mathbb{N}$. Dacă $f \in E_k^*(\alpha)$, atunci*

$$\left|f^{(m)}(z)\right| \le \frac{\left[m + (1-k)(1-2\alpha)|z|\right]\cdot B(m-k,\alpha)}{(1-|z|)^{m-k+2-2\alpha}}, \tag{2.2.6}$$

pentru orice $m \ge k+1$ și $z \in \mathbb{U}$, unde

$$B(m-k,\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{m}(m-k)!, & \alpha = \frac{1}{2} \\ \displaystyle\frac{1}{1-2\alpha}\prod_{j=1}^{m-k}(j-2\alpha), & \alpha \ne \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Observaţia 2.2.13. Este uşor de observat că pentru $k=0$, Conjectura 2.2.12 se reduce la Teorema 1.4.9 (a se vedea de exemplu [51]). Mai mult, pentru $\alpha = 0$, Conjectura anterioară se reduce la Teorema 2.2.10 demonstrată în această secțiune.

2.2.2 Subclasa $E_k(\alpha)$

În mod similar ca în secțiunea anterioară, putem folosi operatorul $\mathcal{G}_k$ pentru a defini clasa $E_k(\alpha)$ de funcții univalente normate pe $\mathbb{U}$ pentru care $\mathcal{G}_k f$ este o funcție convexă de ordin α pe $\mathbb{U}$. În prima parte, prezentăm câteva rezultate generale pentru clasa $E_k(\alpha)$ legate de estimări ale coeficienților și rezultate generale de distorsiune. Partea finală a acestei secțiuni este dedicată cazului particular $k = 1$.

În această subsecțiune introducem subclasa $E_k(\alpha)$ împreună cu câteva proprietăți generale ale acesteia. Rezultatele originale prezentate în această parte au fost obținute de Grigoriciuc în [54].

Definiţia 2.2.14. Fie $\alpha \in [0, 1)$ și $k \in \mathbb{N}$. Fie $\mathcal{G}_k$ operatorul diferenţial definit de relaţia (2.1.1). Atunci

$$E_k(\alpha) = \{f \in S : \mathcal{G}_k f \in K(\alpha)\}$$

este familia de funcții univalente normate f pe discul unitate cu proprietatea că funcţia $\mathcal{G}_k f$ este convexă de ordinul α. În particular, notăm cu $E_k = E_k(0)$.

Observaţia 2.2.15. Ținând cont de definiția convexității de ordin α (a se vedea Definiția 1.4.17; a se vedea și [45], [120], [102]), deducem că

$$E_k(\alpha) = \left\{f \in S : \mathfrak{Re}\left[1 + \frac{z(\mathcal{G}_k f)''(z)}{(\mathcal{G}_k f)'(z)}\right] > \alpha, \quad z \in \mathbb{U}\right\}. \tag{2.2.8}$$

Este uşor de observat că $E_0(\alpha) = K(\alpha)$ este familia funcțiilor convexe de ordin α pe $\mathbb{U}$.

Ținând cont de Teorema 2.2.7, putem demonstra un criteriu similar pentru familia $E_k(\alpha)$, după cum urmează

Teorema 2.2.16. *Fie $\alpha \in [0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$ și $f \in S$. De asemenea, fie $\sigma_{k,\alpha}$ definit prin*

$$\sigma_{k,\alpha} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-\alpha)\cdot n!}{(n-k)!}|a_n|, & k \le 2 \\ \displaystyle\sum_{n=2}^{k-1} n(n-\alpha)|a_n| + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n(n-\alpha)\cdot n!}{(n-k)!}|a_n|, & k \ge 3. \end{cases} \tag{2.2.9}$$

Dacă $\sigma_{k,\alpha} \le 1 - \alpha$, atunci $f \in E_k(\alpha)$.

Observaţia 2.2.17. Dacă $k = 0$, atunci $E_0(\alpha) = K(\alpha)$ și obținem condiția suficientă pentru convexitatea de ordin α (a se vedea [45] sau [101]).

Similar cu Teorema 2.2.8, putem obține estimări ale coeficienților unei funcții $f \in E_k(\alpha)$, după cum urmează

Teorema 2.2.18. *Fie $\alpha \in [0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$ și $f \in E_k(\alpha)$. Atunci*

$$|a_n| \le \frac{(n-k)!}{n!\cdot n!} \prod_{m=2}^{n} (m - 2\alpha), \quad n \ge k \ge 2. \tag{2.2.10}$$

Corolarul 2.2.19. *Fie $k \in \mathbb{N}$ și $f \in E_k$. Atunci*

$$|a_n| \le \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)} = \frac{(n-k)!}{n!}, \quad n \ge k. \tag{2.2.11}$$

Observaţia 2.2.20. Dacă $k = 0$, atunci $E_0 = K$ și obținem rezultatul clasic legat de estimările coeficienţilor pentru funcțiile convexe (a se vedea de exemplu [19]).

În urma observațiilor prezentate mai sus, putem demonstra următorul rezultat general de distorsiune (a se vedea [54]):

Teorema 2.2.21. *Fie $k \in \mathbb{N}$. Dacă $f \in E_k$, atunci*

$$\left|f^{(m)}(z)\right| \leq \frac{(m-k)!}{(1-|z|)^{m-k+1}}, \tag{2.2.12}$$

pentru orice $m \geq k$ și $z \in \mathbb{U}$.

Observaţia 2.2.22. Este clar că pentru $k = 0$ obţinem rezultatul demonstrat de Goodman în [29, Teorema 9, Capitolul 8].

Încheiem prima parte a acestei subsecțiuni cu următoarea caracterizare a funcțiilor din E_k în termeni de lanțuri Loewner. Pe baza teoremei dualității lui Alexander (a se vedea 1.4.16) și a caracterizării stelarităţii, respectiv a convexității cu lanțuri Loewner (a se vedea Teoremele 1.6.6 și 1.6.8), putem construi două lanţuri Loewner diferite pornind de la aceeaşi funcţie $f \in E_k$, după cum urmează

Teorema 2.2.23. *Fie $k \in \mathbb{N}$ și $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$. Atunci $f \in E_k$ dacă și numai dacă*

$$f_1(z,t) = (\mathcal{G}_k f)(z) + (e^t - 1)z(\mathcal{G}_k f)'(z) \tag{2.2.13}$$

sau

$$f_2(z,t) = e^t z(\mathcal{G}_k f)'(z) \tag{2.2.14}$$

este un lanț Loewner, pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și $t \geq 0$. În plus,

$$f_2(z,t) - f_1(z,t) = z(\mathcal{G}_k f)'(z) - (\mathcal{G}_k f)(z), \quad z \in \mathbb{U}, \quad t \geq 0.$$

Cazul particular $k = 1$ și $\alpha = 0$

Următoarea secțiune este dedicată studiului unei forme speciale ($k = 1$ și $\alpha = 0$) a clasei $E_k(\alpha)$. Considerând acest caz particular, putem obţine rezultate şi exemple legate de proprietățile clasice ale funcțiilor univalente pe $\mathbb{U}$. Conform Definiției 2.2.14, avem că E_1 este

$$E_1 = \left\{f \in S \,:\, \mathcal{G}_1 f \in K\right\},$$

unde $\mathcal{G}_1 f(z) = zf'(z)$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$.

Exemplul 2.2.24. Fie $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = -\log(1-z)$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$, unde log este ramura principală a logaritmului complex. Atunci f aparține clasei E_1.

În continuare, prezentăm un rezultat important care stabilește legătura dintre clasele E_1 și $K(1/2)$. În particular, obținem că fiecare funcție din E_1 este și convexă (a se vedea [54]). Demonstraţia acestui rezultat a fost dată de autor și se bazează pe demonstrația [45, Teorema 2.3.2] dată de Suffridge.

Propoziţia 2.2.25. *Dacă f aparține clasei E_1, atunci f aparține clasei $K(1/2)$.*

Propoziţia 2.2.26. *Dacă f aparține clasei E_1, atunci f aparține clasei $\mathcal{R}(1/2)$, adică $\mathfrak{Re}f'(z) > 1/2$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$.*

Teorema 2.2.27. *Fie $f \in E_1$. Atunci*

$$\log(1+|z|) \leq |f(z)| \leq -\log(1-|z|) \tag{2.2.15}$$

şi

$$\frac{1}{1+|z|} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}, \tag{2.2.16}$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$. Toate aceste estimări sunt exacte.

Corolarul 2.2.28. *Dacă f aparține clasei E_1, atunci discul deschis $\mathcal{U}_{\ln 2}$ este inclus în $f(\mathbb{U})$.*

Ultimul rezultat din această subsecțiune este o formă particulară a Teoremei 2.2.23 și prezintă caracterizarea funcţiilor din clasa E_1 cu ajutorul lanţurilor Loewner.

Teorema 2.2.29. *Fie $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{U})$. Atunci $f \in E_1$ dacă și numai dacă*

$$f_1(z,t) = e^t z f'(z) + (e^t - 1) z^2 f''(z) \tag{2.2.17}$$

sau

$$f_2(z,t) = e^t z f'(z) + e^t z^2 f''(z) \tag{2.2.18}$$

este un lanț Loewner, pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și $t \geq 0$. În plus,

$$f_2(z,t) - f_1(z,t) = z^2 f''(z), \quad z \in \mathbb{U}, \quad t \geq 0.$$

2.2.3 Legătura între clasele E_k^* și E_k

Pe baza teoremei de dualitate a lui Alexander între funcțiile convexe și stelate pe $\mathbb{U}$ (a se vedea [1], [19], [102]), demonstrăm în această secțiune rezultate similare de dualitate pentru subclasele E_k^* și E_k (a se vedea [54]).

Lema 2.2.30. *Fie $k \in \mathbb{N}$ și $f, g \in S$ astfel încât $g(z) = zf'(z)$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$. Atunci*

$$z(\mathcal{G}_k f)'(z) = (\mathcal{G}_k g)(z), \quad z \in \mathbb{U}. \tag{2.2.19}$$

Pe baza lemei anterioare, putem obține o teoremă de tip Alexander pentru familiile E_k^* și E_k. Acest rezultat a fost demonstrat de Grigoriciuc în [54].

Teorema 2.2.31. *Fie $k \in \mathbb{N}$ și $f, g \in S$. Atunci $f \in E_k$ dacă și numai dacă $g \in E_k^*$, unde $g(z) = zf'(z)$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$.*

Teorema 2.2.32. *Fie $k \in \mathbb{N}$. Dacă $f \in E_k$, atunci $f \in E_k^*(1/2)$.*

Observaţia 2.2.33. Este clar că Teorema 2.2.32 este o generalizare a Propoziției 2.2.25 (unde $k = 1$). Pe de altă parte, dacă $k = 0$, atunci Teorema 2.2.32 se reduce la [45, Teorema 2.3.2] obţinută de Marx și Strohhäcker.

În sfârșit, încheiem această secțiune cu câteva întrebări legate de subclasele E_k și E_k^* studiate mai sus. Prima întrebare este o generalizare a Propoziției 2.2.25:

Întrebarea 2.2.34. *Este adevărat că $E_{k+1} \subset E_k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$?*

În mod clar, o întrebare similară poate fi formulată și pentru subclasa E_k^*. O altă proprietate importantă a acestor subclase este compactitatea. Prin urmare, avem următoarea întrebare:

Întrebarea 2.2.35. *Este adevărat că subclasele E_k și E_k^* sunt compacte în $\mathcal{H}(\mathbb{U})$?*

Deoarece E_k^* și E_k sunt subclase ale clasei S, ar fi important şi studiul altor proprietăți geometrice și analitice ale acestor subclase.

2.2.4 Subclasa $E_{\mathbb{N}}$

Încheiem acest capitol cu câteva observaţii asupra unei clase speciale de funcţii, strâns legată de cele prezentate anterior. Pentru aceasta, fie $k \in \mathbb{N}$ şi $f \in \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} E_k$. Este clar că pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, avem că $f \in E_k$. În plus, conform Corolarului 2.2.19, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. avem că $|a_n| \leq \dfrac{(n-k)!}{n!}$, unde $n \geq k$.

În particular, pentru $n = k$ obținem $|a_k| \leq \frac{1}{k!}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Să notăm prin

$$E_{\mathbb{N}} = \left\{ f \in S \,:\, |a_n| \leq \frac{1}{n!},\, n \geq 2 \right\}. \tag{2.2.20}$$

Prin urmare, obținem următoarea observație

Observaţia 2.2.36. Fie $E_{\mathbb{N}}$ mulțimea definită de (2.2.20). Atunci $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k \subsetneqq E_{\mathbb{N}}$, adică intersecția tuturor subclaselor E_k este inclusă în $E_{\mathbb{N}}$, dar nu este egală cu $E_{\mathbb{N}}$.

Part II

Contribuţii în teoria aplicaţiilor biolomorfe de mai multe variabile complexe

Capitolul 3

Aplicaţii biolomorfe şi operatori de extensie în $\mathbb{C}^n$

În acest capitol prezentăm rezultate generale legate de aplicațiile biolomorfe de mai multe variabile complexe în $\mathbb{C}^n$. Începem cu notații, noțiuni și rezultate preliminare de bază care vor fi folosite pe parcursul celei de-a doua părți a tezei.

În prima secţiune ne referim la teoria funcțiilor olomorfe, respectiv aplicațiilor olomorfe în $\mathbb{C}^n$, incluzând teorema maximului modulului și aplicații ale sale (de ex. lema lui Schwarz). Reamintim și definiția mulţimilor de unicitate (a se vedea de exemplu [45], [83]) și două rezultate importante legate de această noțiune, și anume teorema lui Montel, respectiv teorema lui Vitali în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [83], [107], [119]). În partea finală a acestei secțiuni menționăm rezultate generale privind aplicațiile olomorfe în $\mathbb{C}^n$ și principalele rezultate care vor fi utilizate în acest capitol (de ex. lema Schwarz-Pick).

Secțiunea a doua conține noțiuni clasice legate de generalizarea clasei Carathéodory in $\mathbb{C}^n$. Ne referim aici în special la teoremele de deformare și distorsiune obținute de Graham, Hamada și Kohr (a se vedea [32]), Pfaltzgraff (a se vedea [109]) și Poreda (a se vedea [115]). Unul dintre cele mai importante rezultate obţinute de Graham, Hamada și Kohr în 2002 (a se vedea [32], [68]) este compactitatea familiei Carathéodory $\mathcal{M}$. Acest rezultat a avut un impact puternic asupra dezvoltării teoriei geometrice a funcţiilor în $\mathbb{C}^n$.

Următoarele două secţiuni sunt destinate studiului subclaselor de aplicații biolomorfe pe bila unitate Euclidiană $\mathbb{B}^n$, respectiv pe polidiscul unitate $\mathbb{U}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Pentru $n \geq 2$, notăm cu $S(\mathbb{B}^n)$ familia aplicațiilor biolomorfe și normate pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de exemplu [45], [83]). Se știe că familia $S(\mathbb{B}^n)$ nu este local uniform mărginită și astfel nu admite o teoremă de deformare și distorsiune. Ca o consecință importantă a acestei proprietăți datorate lui Cartan (a se vedea de exemplu [7], [45]) obținem că $S(\mathbb{B}^n)$ nu este compactă pentru $n \geq 2$. Printre cele mai importante subclase ale lui $S(\mathbb{B}^n)$ menționăm familia de aplicații stelate, stelate de ordin α, convexe și spiralate pe $\mathbb{B}^n$. Pentru aceste aplicații reamintim caracterizările analitice și geometrice, rezultatele de deformare și distorsiune, precum şi exemple sugestive ce vor fi utilizate pe parcursul acestui capitol.

Secțiunea 3.5 conține extensii ale noțiunilor prezentate în §1.6 referitoare la lanțurile Loewner, ecuația diferențială Loewner și reprezentarea parametrică în $\mathbb{C}^n$. Pfaltzgraff (a se vedea de exemplu [109]) a fost primul care a obținut generalizări ale lanțurilor Loewner și ecuației diferențiale Loewner pe $\mathbb{B}^n$. Studiul a fost extins de Poreda în cazul polidiscului unitate în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [115], [116]), respectiv de Kubicka și Poreda (a se vedea de exemplu [86]). Rezultate importante au fost obținute de-a lungul timpului de Duren, Graham, Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [20]), Graham, Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [32]), Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea de exemplu [36], [37]) și alții. Una dintre cele mai importante diferențe între $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{C}^n$ cu $n \geq 2$ este compactitatea familiei de aplicații biolomorfe normate. Se știe că $S(\mathbb{U})$ este o familie compactă (a se vedea Teorema 1.4.4), în timp ce clasa $S(\mathbb{B}^n)$ nu este compactă pentru $n \geq 2$ (a se vedea de exemplu [7], [45]). Această problemă a fost rezolvată de Graham, Hamada și Kohr care au introdus clasa $S^0(\mathbb{B}^n)$ de aplicații care admit reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de exemplu [32]; a se vedea și [114]). Pentru $n = 1$, avem că $S^0(\mathbb{B}^1) = S$ (a se vedea de exemplu [114]). Cu toate acestea, dacă $n \geq 2$, atunci $S^0(\mathbb{B}^n)$ este strict inclusă în $S(\mathbb{B}^n)$. Mai mult, Graham, Kohr și Kohr (a se vedea [48]) au demonstrat că $S^0(\mathbb{B}^n)$ este compactă (a se vedea de exemplu [32], [45], [48]). Acest rezultat este unul dintre rezultatele care prezintă diferența clară între cazul uni şi multi-dimensional. Pe de altă parte, a deschis noi modalități de studiu al teoriei geometrice a funcțiilor de mai multe variabile complexe. O altă problemă importantă care a fost rezolvată de Graham, Hamada, Kohr și Kohr este existența în $\mathbb{C}^n$ a aplicațiilor care nu pot fi scufundate ca prime elemente ale unui lanț Loewner. Folosind familia $S^0(\mathbb{B}^n)$, aceștia au reușit să demonstreze analogul teoremei lui Pommerenke (a se vedea Teorema 1.6.3) în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [48]; a se vedea și [32]). Mai mult, noțiunea de reprezentare parametrică a fost extinsă la g-reprezentare parametrică de Graham, Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [32]). Mai multe detalii despre clasa $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ vor fi discutate în ultima parte a tezei.

Secțiunea 3.6 este dedicată studiului combinațiilor convexe ale aplicațiilor biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$. Considerăm aplicații de forma $h_\lambda = (1-\lambda)f + \lambda g$, unde $f, g \in S(\mathbb{B}^n)$ și $\lambda \in (0,1)$. Se știe că, în general, combinația convexă a două aplicații biolomorfe normate nu este biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de exemplu [45], [83]). Acest fenomen apare și în caz uni-dimensional și a fost intens studiat de mai mulți autori (a se vedea de exemplu [9], [58], [97], [100]). Ideea principală a acestei secțiuni este de a obține aplicații biolomorfe h_λ pe $\mathbb{B}^n$ (sau chiar aplicații stelate) de forma unor combinații convexe $h_\lambda = (1-\lambda)f + \lambda g$, unde $f, g \in S(\mathbb{B}^n)$ și $\lambda \in (0,1)$. Rezultatele prezentate în această secțiune sunt originale și au fost obținute de Grigoriciuc în [52].

Un instrument puternic în studiul aplicațiilor biolomorfe în $\mathbb{C}^n$ este teoria operatorilor de extensie. În Secțiunea 3.7 prezentăm operatori de extensie care păstrează proprietățile geometrice și analitice pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$. Începem discuția noastră cu operatorul de extensie Roper-Suffridge Φ_n (considerat de K. Roper și T.J. Suffridge în [121]) și operatorul de extensie Graham-Kohr $\Psi_{n,\alpha}$ (definit de I. Graham și G. Kohr în [44]; a se vedea și [43]). Vom analiza mai apoi două generalizări ale operatorului de extensie Roper-Suffridge introduse de Graham, Hamada, Kohr, Kohr și Suffridge (a se vedea de exemplu [42], [47]) care transformă o funcție local univalentă pe $\mathbb{U}$ într-o aplicație local biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$. În partea finală a acestei secțiuni prezentăm operatorul de extensie introdus de Pfaltzgraff și Suffridge (a se vedea [111]) și o generalizare a acestui operator (a se vedea de exemplu [10]).

Încheiem acest capitol cu un scurt studiu ce combină ideile prezentate mai sus, și anume operatorii de extensie și combinațiile convexe ale aplicațiilor biolomorfe în $\mathbb{C}^n$. Astfel, discutăm despre combinații convexe ale operatorilor de extensie pe $\mathbb{B}^n$. În particular, considerăm un nou operator de extensie obținut ca o combinație convexă a doi operatori de extensie de tip Graham-Kohr (a se vedea de exemplu [43], [44]). Rezultatele prezentate în această secțiune sunt originale.

Menţionăm că principalele referinţe bibliografice folosite în acest capitol sunt [14], [24], [25], [27], [32], [45], [46], [48], [83], [84], [88], [107], [109], [117], [128], [138].

3.1 Noţiuni generale privind olomorfia în $\mathbb{C}^n$

Prima secțiune este dedicată studiului proprietăților funcțiilor olomorfe și al aplicaţiilor olomorfe în $\mathbb{C}^n$. Prezentăm aici principalele rezultate care pot fi generalizate de la cazul uni-dimensional la cel multi-dimensional. Pentru detalii, se pot consulta lucrările [8], [45], [83], [88], [119].

3.1.1 Preliminarii

Fie $\mathbb{C}^n$ spațiul complex n-dimensional înzestrat cu produsul scalar Euclidian $\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w}_k$ și norma Euclidiană $\|z\| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$, unde $z, w \in \mathbb{C}^n$. Notăm

$$\mathbb{B}^n(a, r) = \left\{z \in \mathbb{C}^n \,:\, \|z - a\| < r\right\}$$

bila deschisă de centru $a \in \mathbb{C}^n$ și rază $r > 0$ în raport cu norma Euclidiană. Pentru simplitate, folosim notația $\mathbb{B}_r^n = \mathbb{B}^n(0, r)$ pentru bila deschisă de centru zero și rază r. În particular, notăm cu $\mathbb{B}^n = \mathbb{B}^n(0,1)$ *bila unitate Euclidiană (deschisă) în* $\mathbb{C}^n$. Polidiscul deschis $U^n(a, R)$ de centru a și (multi)rază R este definit prin

$$U^n(a, R) = \mathcal{U}(a_1, r_1) \times ... \times \mathcal{U}(a_n, r_n),$$

unde $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ și $R = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Dacă $r_j = r$, pentru orice $j = \overline{1, n}$, atunci folosim notaţia $U^n(a, r)$. În particular, notăm cu $\mathbb{U}^n = U^n(0, 1)$ *polidiscul (deschis) unitate în* $\mathbb{C}^n$. Este clar că $\mathbb{U}^n$ este bila unitate în $\mathbb{C}^n$ în raport cu norma supremum $\|z\|_\infty = \max\{|z_j| : j = \overline{1, n}\}$, pentru orice $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Pe parcursul acestei teze vom lucra pe diferite domenii (în special, bile unitate în $\mathbb{C}^n$ în raport cu diferite norme), după cum urmează:

- $\mathbb{B}^n$ – bila unitate Euclidiană în $\mathbb{C}^n$ în raport cu norma Euclidiană $\|z\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2}$, pentru orice $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Pentru cazul euclidian, notăm norma Euclidiană $\| \cdot \|$ (fără indice). De fiecare dată când folosim notația $\| \cdot \|$, ne vom referi automat la norma Euclidiană.

- $\mathbb{U}^n$ – polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$ în raport cu norma supremum $\|z\|_\infty = \max\{|z_j| : j = \overline{1, n}\}$, pentru orice $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$.

- B^n_p – bila unitate în $\mathbb{C}^n$ în raport cu p-norma $\|z\|_p = \left[\sum_{j=1}^n |z_j|^p \right]^{1/p}$, pentru orice $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ și $p \in [1, \infty)$.

În $\mathbb{C}$ fiecare dintre mulţimite $\mathbb{B}^1$, $\mathbb{U}^1$ și B^1_p coincid cu $\mathbb{U}$. Menționăm că atunci când lucrăm cu o normă arbitrară, aceasta va fi notată $\| \cdot \|_*$. Pe de altă parte, atunci când domeniile sunt cele descrise mai sus, folosim notațiile particulare pentru bile și norme prezentate pentru fiecare caz.

3.1.2 Funcţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$

Prima parte a acestei secțiuni conține rezultate privitoare la funcții olomorfe în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [45], [88], [107])

Definiţia 3.1.1. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ o mulţime deschisă. Dacă $f : \Omega \to \mathbb{C}$ este olomorfă în fiecare variabilă și continuă pe Ω, atunci f este *olomorfă*. Notăm cu $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C}) = \big\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : f \textit{ este olomorfă pe } \Omega \big\}$ familia tuturor funcțiilor olomorfe de la Ω la $\mathbb{C}$.

Reamintim că rezultatele demonstrate de Hartogs ne spun că ipoteza continuității din definiția anterioară poate fi neglijată. Prin urmare, rezultă că fiecare funcție olomorfă în fiecare variabilă este, de fapt, olomorfă (a se vedea de exemplu [8], [88]).

În continuare prezentăm câteva proprietăți cunoscute ale funcțiilor olomorfe în $\mathbb{C}^n$. Aceste rezultate sunt generalizări ale proprietăților prezentate în primul capitol pentru cazul unei variabile complexe. Mai întâi, precizăm *teorema aplicaţiei deschise* în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [83], [107], [119]).

Teorema 3.1.2 (**Teorema aplicaţiei deschise**). *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un domeniu. Dacă $f : \Omega \to \mathbb{C}$ este olomorfă și neconstantă, atunci $f(\Omega) \subseteq \mathbb{C}$ este un domeniu.*

O aplicație a Teoremei 3.1.2 este *lema lui Schwarz pentru funcțiile olomorfe* în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [83], [107]):

Lema 3.1.3 (**Lema lui Schwarz**). *Fie $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}^n, \mathbb{C})$ cu $f(0) = 0$ și $|f(z)| < 1$, pentru toate $z \in \mathbb{B}^n$. Atunci $|f(z)| \leq \|z\|$, pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$. Mai mult, dacă $\exists z_0 \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ astfel încât $|f(z_0)| = \|z_0\|$, atunci $|f(az_0)| = \|az_0\|$, pentru orice $a \in \mathbb{C}$ cu $|a| \leq \frac{1}{\|z_0\|}$.*

3.1.3 Aplicaţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$

În continuare, descriem pe scurt cazul aplicaţiilor olomorfe de la $\mathbb{C}^n$ în $\mathbb{C}^m$, unde $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $m, n \geq 2$. Dintre referințele bibliografice folosite în această subsecțiune, amintim [45], [83], [88], [107], [119].

Definiţia 3.1.4. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ o mulţime deschisă și fie $f : \Omega \to \mathbb{C}^m$. Dacă $f_k \in \mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$, pentru orice $k = \overline{1, m}$, atunci $f = (f_1, ..., f_m)$ este *olomorfă* pe Ω.

Notăm cu $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C}^m)$ familia tuturor aplicaţiilor olomorfe pe mulţimea deschisă $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ cu valori în $\mathbb{C}^m$. În particular, dacă $m = n$, atunci folosim notația $\mathcal{H}(\Omega)$.

Dacă $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ este un domeniu astfel încât $0 \in \Omega$, atunci spunem că $f \in \mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C}^m)$ este normat dacă $f(0) = 0$ și $Df(0) = I_m$, unde diferențiala Frechét

$$Df(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & ... & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

este o aplicaţie liniară complexă de la $\mathbb{C}^n$ în $\mathbb{C}^m$ în punctul $z \in \Omega$, iar I_m este operatorul identitate în spaţiul $\mathbb{C}^m$. Când $m = n$, notăm $J_f(z) = \det Df(z)$, pentru $z \in \Omega$ determinantul matricii $Df(z)$ în z. În acest caz, notăm cu $\mathcal{H}_0(\Omega)$ mulţimea tuturor aplicaţiilor olomorfe normate din Ω în $\mathbb{C}^n$.

Următorul rezultat reprezintă lema lui Schwarz pentru aplicaţiile olomorfe din $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [83], [107]). Vom considera $\|\cdot\|_*$ o normă arbitrară pe $\mathbb{C}^n$ și $B^n \subseteq \mathbb{C}^n$ bila unitate.

Teorema 3.1.5 (**Lema lui Schwarz**). *Fie $f \in \mathcal{H}(B^n, \mathbb{C}^n)$ cu $f(0) = 0$ și $\|f(z)\|_* < 1$, pentru orice $z \in B^n$. Atunci $\|f(z)\|_* \leq \|z\|_*$, pentru orice $z \in B^n$ și $\|Df(0)\| \leq 1$. În plus, dacă $\exists z_0 \in B^n \setminus \{0\}$ cu proprietatea că $\|f(z_0)\|_* = \|z_0\|_*$, atunci $\|f(z_0)\|_* = \|az_0\|_*$, pentru orice $a \in \mathbb{C}$ cu $|a| \leq 1/\|z_0\|_*$.*

Încheiem această subsecțiune cu un rezultat important, și anume *lema Schwarz-Pick* pentru aplicaţii olomorfe pe bila unitate Euclidiană $\mathbb{B}^n$. Acest rezultat va juca un rol cheie în partea finală a acestei teze (a se vedea de exemplu [76], [123]).

Lema 3.1.6. *Fie $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}^n)$ astfel încât $f(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^n$. Atunci*

$$|J_f(z)| \leq \left[\frac{1 - \|f(z)\|^2}{1 - \|z\|^2}\right]^{\frac{n+1}{2}}, \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{3.1.1}$$

Această inegalitate este exactă, iar egalitatea într-un punct $z \in \mathbb{B}^n$ este are loc dacă și numai dacă f este un automorfism al lui $\mathbb{B}^n$.

3.2 Familia Carathéodory în $\mathbb{C}^n$

În Secțiunea 3.2 ne concentrăm atenția asupra noțiunii de subordonare în $\mathbb{C}^n$ și studiem generalizarea clasei Carathéodory în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [32] , [45], [109]). Pentru aceasta, fie $\mathbb{B}^n$ bila unitate Euclidiană în $\mathbb{C}^n$.

Definiţia 3.2.1. Fie $f, g, \phi \in \mathcal{H}(\mathbb{B}^n)$. Atunci

1. ϕ este o *aplicaţie Schwarz* dacă $\|\phi(z)\| \leq \|z\|$, pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$;
2. $f \prec g$ dacă există o aplicaţie Schwarz ϕ astfel încât $f(z) = g(\phi(z))$, pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$ (știm deja că $f \prec g$ înseamnă că f *este subordonată lui* g)

Familia de aplicaţii olomorfe normate pe $\mathbb{B}^n$ care extinde clasa Carathéodory în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [109], [127], [128]; a se vedea și [45], [83]) este dată de

$$\mathcal{M}(\mathbb{B}^n) = \Big\{h \in \mathcal{H}_0(\mathbb{B}^n) \, : \, \mathfrak{Re}\langle h(z), z\rangle > 0, \quad z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}\Big\}.$$

Când $\mathbb{C}^n$ este înzestrat cu norma Euclidiană, atunci notăm $\mathcal{M}(\mathbb{B}^n)$ simplu cu $\mathcal{M}$. Clasa $\mathcal{M}$ joacă un rol important în teoria lanțurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$, precum și în caracterizarea diferitelor subclase de aplicaţii biolomorfe în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [45], [83], [109]).

În cazul uni-dimensional, nu este greu de observat că $h \in \mathcal{M}$ dacă și numai dacă $p \in \mathcal{P}$, unde $h(\zeta) = \zeta p(\zeta)$, pentru orice $\zeta \in \mathbb{U}$.

În continuare, prezentăm câteva dintre proprietățile clasei $\mathcal{M}$ în cazul normei Euclidiene în $\mathbb{C}^n$. Reamintim că aceste proprietăți sunt valabile și pentru o normă arbitrară. Mai întâi, menționăm un rezultat de deformare obținut de Pfaltzgraff în [109] (a se vedea și [57]).

Teorema 3.2.2. *Dacă $h \in \mathcal{M}(\mathbb{B}^n)$, atunci*

$$\|z\|^2 \frac{1 - \|z\|}{1 + \|z\|} \leq \mathfrak{Re}\langle h(z), z\rangle \leq \|z\|^2 \frac{1 + \|z\|}{1 - \|z\|}, \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{3.2.1}$$

Aceste inegalități sunt exacte.

Similar cu rezultatul anterior, Graham, Hamada și Kohr au obținut (a se vedea [32]):

Teorema 3.2.3. *Dacă $h \in \mathcal{M}(\mathbb{B}^n)$, atunci*

$$\|z\| \frac{1 - \|z\|}{1 + \|z\|} \leq \|h(z)\| \leq \frac{4\|z\|}{(1 - \|z\|)^2}, \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{3.2.2}$$

Pe baza rezultatelor prezentate mai sus, Graham, Hamada și Kohr au obținut compactitatea clasei $\mathcal{M}$ (a se vedea [32], [68]).

Corolarul 3.2.4. *Familia $\mathcal{M}(\mathbb{B}^n)$ este compactă.*

Este important de menționat că rezultatele prezentate mai sus pot fi extinse la o normă arbitrară în $\mathbb{C}^n$. Pentru mai multe detalii, se pot consulta lucrările [45], [57], [127], [128].

3.3 Rezultate generale privind aplicaţiile biolomorfe în $\mathbb{C}^n$

În ultima subsecțiune prezentăm rezultate generale privitoare la aplicaţiile biolomorfe în $\mathbb{C}^n$. De asemenea, prezentăm noțiunea de univalență în cazul mai multor variabile complexe (a se vedea de exemplu [45], [83], [88], [107]).

Definiţia 3.3.1. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un domeniu. Atunci $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ este

a) *univalentă* pe Ω dacă $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ și f este injectivă pe Ω;

b) *biolomorfă* pe Ω dacă $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ și $\exists f^{-1} \in \mathcal{H}(\Delta)$, unde $\Delta = f(\Omega)$.

Dacă $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ este biolomorfă, atunci domeniile Ω și Δ sunt *biolomorf echivalente*. În plus, dacă domeniile coincid, atunci f este un *automorfism* al lui Ω.

Similar cu cazul unei variabile complexe, noțiunile de biolomorfie și univalență sunt echivalente (a se vedea de exemplu [107], [119]). Totuși, în caz infinit dimensional această echivalență nu mai este adevărată (a se vedea [128]).

Teorema 3.3.2. *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un domeniu. Atunci $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ este o aplicaţie univalentă pe Ω dacă şi numai dacă f este biolomorfă de la Ω în $f(\Omega)$.*

Unul dintre rezultatele importante în $\mathbb{C}^n$ este teorema lui Poincaré (a se vedea de exemplu [112]), care arată că $\mathbb{B}^n$ și $\mathbb{U}^n$ nu sunt biolomorf echivalente. Prin urmare, teorema lui Riemann nu este adevărată în caz multi-dimensional (a se vedea de exemplu [107], [119]).

Teorema 3.3.3 (Poincaré). *Dacă $n \geq 2$, atunci bila unitate Euclidiană $\mathbb{B}^n$ și polidiscul unitate $\mathbb{U}^n$ nu sunt biolomorf echivalente.*

3.4 Familii de aplicaţii biolomorfe pe bila unitate $\mathbb{B}^n$

În Secțiunea 3.4 prezentăm proprietățile generale ale unor familii de aplicaţii biolomorfe pe bila unitate Euclidiană $\mathbb{B}^n$. Reamintim aici clasele aplicaţiilor stelate, stelate de ordin α, aproape stelate de ordin α, convexe şi spiralate pe $\mathbb{B}^n$ împreună cu cele mai importante rezultate din fiecare caz. Includem aici caracterizările analitice ale acestor clase, teoreme de deformare și exemple sugestive. Cele mai importante referințe bibliografice utilizate în această secțiune sunt [24], [45], [83], [128].

3.4.1 Aplicaţii biolomorfe normate

Fie $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ multimea operatorilor liniari din $\mathbb{C}^n$ în $\mathbb{C}^n$ cu norma

$$\|A\| = \sup\big\{\|A(z)\| \,:\, \|z\| = 1\big\}.$$

Reamintim că dacă $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ este un domeniu astfel încât $0 \in \Omega$ și $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, atunci f este normată dacă $f(0) = 0$ și $Df(0) = I_n$, unde I_n este operatorul identitate în $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ și $Df(z)$ este diferenţiala Fréchet a lui f în z.

În această teză notăm cu $S(\mathbb{B}^n)$ mulțimea aplicaţiilor biolomorfe normate pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$ și cu $\mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n)$ mulţimea aplicaţiilor local biolomorfe normate pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. În particular, dacă $n = 1$, atunci $S(\mathbb{B}^1) = S$ este familia de funcții univalente normate pe $\mathbb{U}$, respectiv $\mathcal{LS}_1(\mathbb{B}^1) = \mathcal{LS}$ este familia de funcții local univalente pe $\mathbb{U}$ (pentru detalii, se pot consulta [24], [45], [83], [128]).

3.4.2 Aplicaţii stelate

În această subsecțiune prezentăm noțiunea de stelaritate în $\mathbb{C}^n$ împreună cu câteva rezultate legate de familia aplicaţiilor stelate pe $\mathbb{B}^n$. Pentru simplitate, considerăm cazul euclidian, dar toate rezultatele prezentate aici sunt valabile în $\mathbb{C}^n$ în raport cu o normă arbitrară (a se vedea de exemplu [24], [45], [83]).

Reamintim că un domeniu $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ este stelat (în raport cu 0) dacă segmentul închis $[0, z] \subseteq \Omega$, pentru orice $z \in \Omega$ (a se vedea de exemplu [83]). În continuare, reamintim şi definiția unei aplicaţii stelate pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de exemplu [24], [45]).

Definiţia 3.4.1. Fie $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}^n)$. Spunem că f este *stelată pe* $\mathbb{B}^n$ (în raport cu originea) dacă $f(0) = 0$, f este biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$ și $f(\mathbb{B}^n)$ este un domeniu stelat (în raport cu originea).

Notăm cu $S^*(\mathbb{B}^n)$ clasa aplicaţiilor stelate (în raport cu originea) normate pe bila unitate Euclidiană $\mathbb{B}^n$. În mod clar, dacă $n = 1$, atunci $S^*(\mathbb{B}^1) = S^*$.

Primul rezultat prezentat în această secțiune este caracterizarea analitică a stelarităţii pe $\mathbb{B}^n$ obţinută de Matsuno (a se vedea de exemplu [99]). Alți autori au obținut extensii ale acestui rezultat pentru bila unitate în spații Banach complexe (Gurganus [57] și Suffridge [127]) și pentru polidisc în $\mathbb{C}^n$ (Suffridge [126]).

Teorema 3.4.2. *Fie $f \in \mathcal{LS}(\mathbb{B}^n)$ astfel încât $f(0) = 0$. Atunci $f \in S^*(\mathbb{B}^n)$ dacă și numai dacă*

$$\mathfrak{Re}\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle > 0, \quad z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}. \tag{3.4.1}$$

Nu este greu de observat că pentru $n = 1$, rezultatul anterior se reduce la caracterizarea analitică a stelarităţii pe $\mathbb{U}$ (a se vedea Teorema 1.4.7).

3.4.3 Aplicaţii stelate de ordin α

Continuăm această secțiune cu prezentarea clasei de aplicaţii stelate de ordin α pe $\mathbb{B}^n$, unde $\alpha \in [0, 1)$. Această noțiune a fost considerată pentru prima dată de Kohr (a se vedea [81]; a se vedea și [75]) și Curt (a se vedea [13]).

Definiţia 3.4.3. Fie $\alpha \in [0,1)$. Spunem că $f \in \mathcal{LS}(\mathbb{B}^n)$ este *stelată de ordin* α dacă

$$\mathfrak{Re}\left[\frac{\|z\|^2}{\langle [Df(z)]^{-1}f(z), z\rangle}\right] > \alpha, \quad z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}. \tag{3.4.2}$$

Dacă $n = 1$, atunci definiția anterioară se reduce la stelaritatea de ordin α pe $\mathbb{U}$.

Notăm cu $S^*_\alpha(\mathbb{B}^n)$ familia tuturor aplicaţiilor stelate de ordin α pe $\mathbb{B}^n$. Prin urmare, $S^*_0(\mathbb{B}^n) = S^*(\mathbb{B}^n)$ și $S^*_\alpha(\mathbb{B}^n) \subseteq S^*(\mathbb{B}^n)$, pentru orice $\alpha \in [0,1)$.

3.4.4 Aplicaţii aproape stelate de ordin α

O altă noțiune importantă considerată în această secțiune este aproape stelaritatea de ordin α pe $\mathbb{B}^n$. Acest concept a fost denifint de Feng în cazul spațiilor Banach complexe (a se vedea [22]).

Definiţia 3.4.4. Fie $\alpha \in [0,1)$. Atunci $f \in \mathcal{LS}(\mathbb{B}^n)$ este *aproape stelată de ordin* α dacă

$$\frac{1}{\|z\|^2}\mathfrak{Re}\langle [Df(z)]^{-1}f(z), z\rangle > \alpha, \quad z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}.$$

Notăm $\mathcal{AS}^*_\alpha(\mathbb{B}^n)$ familia aplicaţiilor aproape stelate de ordin α pe $\mathbb{B}^n$.

Observați că pentru $n = 1$ definiția anterioară se reduce la Definiția 1.4.10 şi $\mathcal{AS}^*_\alpha(\mathbb{B}^1) = \mathcal{AS}^*_\alpha$.

3.4.5 Aplicaţii convexe

În această subsecțiune ne vom referi la familia de aplicaţii convexe pe polidisc, respectiv pe bila unitate Euclidiană în $\mathbb{C}^n$. Având în vedere că $\mathbb{U}^n$ și $\mathbb{B}^n$ nu sunt biolomorf echivalente pentru $n \geq 2$, este necesară studierea separată a celor două cazuri de convexitate. Includem aici caracterizările analitice și teoremele de deformare pentru aplicaţiile convexe normate pe cele două domenii în $\mathbb{C}^n$. Sursele bibliografice utilizate în această parte sunt [24], [45], [83], [128].

Reamintim că un domeniu $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ este convex dacă segmentul închis $[z_1, z_2] \subseteq \Omega$, pentru orice $z_1, z_2 \in \Omega$ (a se vedea de exemplu citeazăGong98, [83]). În continuare, reamintim definiția unei aplicaţii convexe pe bila unitate B^n în $\mathbb{C}^n$ în raport cu o normă arbitrară (a se vedea de exemplu [83]).

Definiţia 3.4.5. Fie $f \in \mathcal{H}(B^n)$. Atunci f este *convexă pe* B^n dacă f este biolomorfă pe B^n și $f(B^n)$ este un domeniu convex.

Notăm cu $K(B^n)$ clasa aplicaţiilor convexe normate pe B^n. Evident, dacă $n = 1$, atunci $K(B^1) = K$.

Convexitatea pe polidiscul unitate $\mathbb{U}^n$

În cazul polidiscului uniate $\mathbb{U}^n$ în $\mathbb{C}^n$ avem următoarea caracterizare analitică a convexității demonstrată de Suffridge (a se vedea [126]).

Teorema 3.4.6. *Fie $f \in \mathcal{LS}(\mathbb{U}^n)$. Atunci $f \in K(\mathbb{U}^n)$ dacă și numai dacă $\exists \varphi_k \in K$, pentru orice $k = \overline{1,n}$ astfel încât $f(z) = \big(\varphi_1(z_1), ..., \varphi_n(z_n)\big)$, pentru orice $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{U}^n$.*

Convexitatea pe bila unitate Euclidiană $\mathbb{B}^n$

În cazul bilei unitate Euclidiene $\mathbb{B}^n$, Kikuchi a obţinut următoarea caracterizare analitică a convexităţii (a se vedea [80]). Gong, Wang și Yu au obținut o caracterizare echivalentă pe $\mathbb{B}^n$ în [28].

Teorema 3.4.7. *Fie $f \in \mathcal{LS}(\mathbb{B}^n)$. Atunci f este convexă dacă și numai dacă*

$$1 - \mathfrak{Re}\langle [Df(z)]^{-1}D^2f(z)(w,w), z\rangle > 0, \tag{3.4.3}$$

pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$ și $w \in \mathbb{C}^n$ cu $\|w\| = 1$ și $\mathfrak{Re}\langle z, w\rangle = 0$.

Evident, dacă $n = 1$, atunci rezultatul anterior se reduce la caracterizarea analitică a convexităţii pe $\mathbb{U}$ (a se vedea Teorema 1.4.13).

Încheiem această subsecţiune cu un rezultat care extinde Teoremei lui Marx-Strohhäcker (a se vedea [45], [102]). În $\mathbb{C}^n$ această generalizare a fost obţinută de Kohr [81] şi Curt [13].

Teorema 3.4.8. *Dacă $f \in K(\mathbb{B}^n)$, atunci $f \in S^*_{1/2}(\mathbb{B}^n)$, iar acest rezultat este exact.*

Observaţia 3.4.9. O observaţie importantă cu privire cazul multi-dimensional este că generalizarea teoremei de dualitate a lui Alexander (a se vedea Teorema 1.4.16) nu are loc pe $\mathbb{B}^n$, pentru orice $n \geq 2$ (a se vedea [45], [83]). Pentru detalii şi exemple, se pot consulta [81], [83], [128].

3.4.6 Aplicaţii spiralate

Ultima parte a acestei secţiuni explorează conceptul de spiralitate pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Spiralitatea relativă la un operator liniar normal pentru care valorile proprii au partea reală pozitivă a fost introdusă de Gurganus (a se vedea [57]). În cazul spaţiilor Banach complexe, această noţiune a fost extinsă de Suffridge (a se vedea [128]). Pentru mai multe detalii, se pot consulta şi [37], [67], [94].

Definiţia 3.4.10. Fie $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A) > 0$, unde $m(A) = \min\left\{\mathfrak{Re}\langle A(z), z\rangle \,:\, \|z\| = 1\right\}$. Atunci $f \in S(\mathbb{B}^n)$ este *spiralată în raport cu A* dacă $e^{-tA}f(\mathbb{B}^n) \subseteq f(\mathbb{B}^n)$, pentru orice $t \geq 0$, unde

$$e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k A^k.$$

Fie $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A) > 0$. Caracterizarea analitică dată de Suffridge (a se vedea [128]; a se vedea şi [57]) pentru spiralitatea relativă la (în raport cu) A spune că:

Teorema 3.4.11. *Fie $f \in \mathcal{LS}(\mathbb{B}^n)$. Atunci f aparţine clasei aplicaţiilor spiralate (în raport cu A) dacă şi numai dacă*

$$\mathfrak{Re}\langle [Df(z)]^{-1} Af(z), z\rangle > 0, \quad z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}. \tag{3.4.4}$$

În particular, dacă $A = e^{-i\delta} I_n$, unde $\delta \in \mathbb{R}$ cu $|\delta| < \frac{\pi}{2}$, atunci obţinem clasa $\hat{S}_\delta(\mathbb{B}^n)$ de aplicaţii spiralalte de tip δ. Această clasă a fost introdusă de Hamada şi Kohr în [67].

3.5 Teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$

Secţiunea a cincea a acestui capitol conţine generalizări ale noţiunilor prezentate în §1.6. Pfaltzgraff (a se vedea de exemplu [109]) a fost primul care a obţinut generalizări ale lanţurilor Loewner şi ale ecuaţiei diferenţiale Loewner pe bila unitate Euclidiană. Studiul a fost extins de Poreda în cazul polidiscului unitate în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [115], [116]), respectiv de Kubicka şi Poreda (a se vedea de exemplu [86]). Rezultate importante au fost obţinute de-a lungul timpului de Duren, Graham, Hamada şi Kohr (a se vedea de exemplu [20]), Graham, Hamada şi Kohr (a se vedea de exemplu [32]), Graham, Hamada, Kohr şi Kohr (a se vedea de exemplu [36], [37], [47]).

Probabil cea mai importantă distincţie între cazul uni-dimensional şi cel multi-dimensional o reprezintă compactitatea familiei de aplicaţii univalente normate. Este cunoscut faptul că $S(\mathbb{U})$ este o mulţime compactă (a se vedea Teorema 1.4.4), în timp ce mulţimea $S(\mathbb{B}^n)$ nu este compactă pentru $n \geq 2$ (a se vedea de exemplu [45]). Această problemă a fost rezolvată de Graham, Hamada şi Kohr care au introdus clasa $S^0(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor care admit reprezentarea parametrică pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de exemplu [32]; a se vedea şi [114]). Pentru $n = 1$, avem că $S^0(\mathbb{B}^1) = S$ (a se vedea, de exemplu, [114]). Totuşi, dacă $n \geq 2$, atunci $S^0(\mathbb{B}^n)$ este strict inclusă în $S(\mathbb{B}^n)$. Mai mult, Graham, Kohr şi Kohr (a se vedea [48]) au demonstrat că $S^0(\mathbb{B}^n)$ este o familie compactă (a se vedea de exemplu [32], [45], [48]).

O altă problemă importantă care a fost rezolvată de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr este existenţa în $\mathbb{C}^n$ a aplicaţiilor care nu pot fi scufundate ca prime elemente ale unui lanţ Loewner. Folosind familia $S^0(\mathbb{B}^n)$ ei reuşesc să demonstreze analogul teoremei lui Pommerenke (a se vedea Teorema 1.6.3) în caz multi-dimensional (a se vedea [48]; a se vedea şi [32]). Alte rezultate importante pot fi găsite în [14], [16], [17], [32], [45], [48].

3.5.1 Rezultate generale privind lanțurile Loewner în $\mathbb{C}^n$

Prima secțiune conţine noțiuni și rezultate preliminare legate de teoria lanțurilor Loewner pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de exemplu [14], [45], [48], [109] , [117]).

Definiţia 3.5.1. Fie $f = f(z,t) : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie.

- Dacă $f(\cdot,t)$ este biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$, $f(0,t) = 0$, pentru orice $t \geq 0$ și $f(\cdot,s) \prec f(\cdot,t)$, pentru orice $0 \leq s \leq t < \infty$, atunci $f(z,t)$ este un *lanț de subordonare univalent* pe $\mathbb{B}^n$.

- Dacă $f(z,t)$ satisface și proprietatea $Df(0,t) = e^t I_n$, pentru orice $t \geq 0$, atunci $f(z,t)$ se numește *lanţ Loewner* (*lanț de subordonare univalent normat*) pe $\mathbb{B}^n$.

Observaţia 3.5.2. Dacă $f(z,t)$ este un lanț Loewner, atunci există o unică aplicaţie Schwarz biolomorfă $v = v(z,s,t)$ astfel încât

$$f(z,s) = f\big(v(z,s,t),t\big), \quad z \in \mathbb{B}^n, \quad 0 \leq s \leq t < \infty. \tag{3.5.1}$$

Aplicaţia $v(z,s,t)$ se numește *aplicaţia de tranziție* a lui $f(z,t)$ (a se vedea de exemplu [45], [109]).

Pe baza normă rii lui $f(z,t)$, deducem cu ușurință că $Dv(0,s,t) = e^{s-t}I_n$, pentru orice $0 \leq s \leq t < \infty$. Din (3.5.1), rezultă că $v = v(z,s,t)$ satisface și proprietatea *semigrupului*

$$v(z,s,T) = v\big(v(z,s,t),t,T\big), \quad z \in \mathbb{B}^n, \quad 0 \leq s \leq t \leq T < \infty. \tag{3.5.2}$$

Următorul rezultat a fost obținut de Graham, Kohr și Kohr (a se vedea [48]), respectiv Curt și Kohr (a se vedea [15]) și prezintă legătura dintre lanțurile Loewner și aplicaţiile de tranziție (a se vedea și [45]).

Teorema 3.5.3. *Fie $f(z,t)$ un lanț Loewner și $v(z,s,t)$ aplicaţia sa de tranziție. Fie $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ și limita*

$$\lim_{k\to\infty} e^{-t_k} f(z,t_k) = F(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B}^n)$$

este local uniform pe $\mathbb{B}^n$. Atunci $\exists \lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s)$ local uniform pe $\mathbb{B}^n$, pentru orice $s \in [0,\infty)$.

Al doilea rezultat important din această secțiune a fost obţinut de Pfaltzgraff (a se vedea [109]). În cazul spațiilor Banach complexe rezultatul a fost studiat de Poreda (a se vedea [117]). Teoria lanțurilor Loewner a fost studiată şi în cadrul abstract al varietăților hiperbolice complexe de Arosio, Bracci, Hamada și Kohr (a se vedea [3]). Alte contribuții importante pot fi găsite în [2], [5].

Teorema 3.5.4. *Fie $h : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ astfel încât $h(\cdot,t)$ aparține clasei $\mathcal{M}$, pentru orice $t \geq 0$ și $h(z,\cdot)$ aparține familiei de funcții măsurabile pe $[0,\infty)$, pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$. Fie*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = -h(v,t), \quad a.e. \quad t \geq s \\ v(s) = z \end{cases} \tag{3.5.3}$$

o problemă cu valori iniţiale. Atunci $\forall s \in [0,\infty)$ și $z \in \mathbb{B}^n$, problema (3.5.3) este rezolvabilă în mod unic și soluția sa $v(t) = v(z,s,t) = e^{s-t}z + \ldots$ este local absolut continuă. Mai mult, $v(\cdot,s,t,)$ aparține familiei de aplicaţii Schwarz univalente pe $\mathbb{B}^n$ pentru $s \leq t \in [0,\infty)$ fixat. Pentru $s \geq 0$ fixat și $z \in \mathbb{B}^n$ avem că $v(z,s,\cdot)$ aparține familiei de funcții Lipschitz local uniform în raport cu z .

Observaţia 3.5.5. Reamintim că aplicația $h = h(z,t)$ prezentată în rezultatul anterior este cunoscută sub numele de *câmp vectorial Herglotz* (a se vedea de exemplu [45]). Ecuația diferențială (3.5.3) se numește *ecuația diferențială Loewner (clasică)* asociată lui h.

Rezultatul următor indică faptul că, dacă aplicaţia de tranziţie este soluţia problemei (3.5.3), atunci ea generează un lanț Loewner. Acest rezultat se datorează lui Poreda (a se vedea [117]), Hamada și Kohr (a se vedea [68]).

Teorema 3.5.6. *Fie $h(z,t)$ un câmp vectorial Herglotz și $v(z,s,t)$ soluția problemei Cauchy (3.5.3). Atunci*

$$\forall s \geq 0, \quad \exists \lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s)$$

local uniform pe $\mathbb{B}^n$. În plus, $f(\cdot,s)$ aparține familiei de aplicaţii biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$ și

$$f(z,s) = f\big(v(z,s,t),t\big), \quad z \in \mathbb{B}^n, 0 \leq s \leq t < \infty.$$

În consecință, $f(z,t)$ este un lanț Loewner cu proprietatea că familia $\left\{e^{-t}f(\cdot,t)\right\}_{t\geq 0}$ este normală pe $\mathbb{B}^n$ și $f(z,\cdot)$ aparține familiei de funcții local Lipschitz pe $[0,\infty)$ local uniform în raport cu $z \in \mathbb{B}^n$. În acest context, $f(z,t)$ satisface ecuația

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t), \quad a.e. \quad t \geq 0, z \in \mathbb{B}^n. \tag{3.5.4}$$

Ecuația diferențială (3.5.4) se numește *ecuația diferențială Loewner (generalizată)* asociată lui h (a se vedea de exemplu [45]).

Principalul rezultat în teoria lanțurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$ este prezentat în următoarea teoremă. Acest rezultat a fost obținut de Pfaltzgraff (a se vedea [109]) și a fost generalizat de Poreda (a se vedea [117]) în cazul spațiilor Banahc complexe. Contribuții notabile au fost realizate de Hamada și Kohr (a se vedea [68]).

Teorema 3.5.7. *Fie $h(z,t)$ un câmp vectorial Herglotz și fie $f = f(z,t) : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie ce satisface proprietățile: $f(\cdot,t) \in \mathcal{H}(\mathbb{B}^n)$, $f(0,t) = 0$, $Df(0,t) = e^t I_n$, pentru orice $t \geq 0$ și $f(z,\cdot)$ aparține clasei de funcţii local absolut continute pe $[0,\infty)$ local uniform în raport cu $z \in \mathbb{B}^n$. De asemenea, presupunem că relația (3.5.4) este adevărată. Dacă $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ crește astfel încât $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$ și $\lim_{k\to\infty} e^{-t_k} f(z,t_k) = F(z)$ local uniform pe $\mathbb{B}^n$, atunci $f(z,t)$ este un lanț Loewner și pentru orice $s \geq 0$, există limita $\lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s)$ local uniform pe $\mathbb{B}^n$, unde $v(z,s,t)$ este soluţia problemei (3.5.3) pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$.*

Următorul rezultat a fost obținut de Graham, Hamada și Kohr (a se vedea [32]). A se vedea și rezultatele obținute de Curt și Kohr în [15].

Teorema 3.5.8. *Fie $f = f(z,t) : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ un lanț Loewner. Atunci $\exists h = h(z,t) : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ cu proprietățile: $h(\cdot,t) \in \mathcal{M}$, pentru orice $t \geq 0$, $h(z,\cdot)$ aparține familiei de funcții măsurabile pe $[0,\infty)$, pentru $z \in \mathbb{B}^n$ și*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Df(z,t)h(z,t), \quad a.e. \quad t \geq 0, z \in \mathbb{B}^n.$$

Mai mult, dacă $\exists (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ cu $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$ iar limita $\lim_{k\to\infty} e^{-t_k} f(z,t_k) = F(z)$ este local uniformă pe $\mathbb{B}^n$, atunci pentru fiecare $s \geq 0$, există limita $\lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s)$ local uniform pe $\mathbb{B}^n$, unde $v(z,s,t)$ este soluţia problemei (3.5.3) pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$.

Încheiem această secțiune cu teorema de deformare pentru lanțurile Loewner cu proprietatea că familia $\left\{e^{-t}f(\cdot,t)\right\}_{t\geq 0}$ este normală pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de exemplu [32]). Reamintim că în $\mathbb{C}^n$ există lanțuri Loewner care nu îndeplinesc această proprietate (a se vedea [32], [45]).

Teorema 3.5.9. *Fie $f(z,t)$ un lanț Loewner astfel încât familia $\left\{e^{-t}f(\cdot,t)\right\}_{t\geq 0}$ este normală pe $\mathbb{B}^n$. Atunci*

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leq \|e^{-t}f(z,t)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2},$$

pentru toate $z \in \mathbb{B}^n$ și $t \geq 0$.

3.5.2 Lanțuri Loewner și aplicaţii biolomorfe în $\mathbb{C}^n$

În această subsecțiune includem caracterizări ale subclaselor lui $S(\mathbb{B}^n)$ prin lanțuri Loewner. Pe baza acestor rezultate, se pot construi cu ușurință exemple de lanțuri Loewner în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [45]).

Primul rezultat prezintă caracterizarea aplicaţiilor din clasa $\hat{S}_\delta(\mathbb{B}^n)$ și a fost obținut de Hamada și Kohr (a se vedea [67]). În particular, pentru $\delta = 0$, obținem caracterizarea stelarităţii pe $\mathbb{B}^n$ demonstrată de Pfaltzgraff și Suffridge (a se vedea [110]).

Teorema 3.5.10. *Fie $f \in \mathcal{LS}(\mathbb{B}^n)$, $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\delta| < \frac{\pi}{2}$ și $a = \tan\delta$. Atunci $f \in \hat{S}_\delta(\mathbb{B}^n)$ dacă și numai dacă $f(z,t) = e^{(1-ia)t} f(e^{iat}z)$ este un lanț Loewner, pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$ și $t \geq 0$. Pentru $\delta = 0$ obținem caracterizarea stelarităţii pe $\mathbb{B}^n$.*

3.5.3 Reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$

A treia parte a acestei secțiuni este dedicată studiului aplicaţiilor care admit reprezentarea parametrică pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Prezentăm aici câteva noțiuni generale, teoreme de deformare și distorsiune, precum și legătura cu lanțurile Loewner.

Mai întâi, aplicaţiile univalente care admit reprezentarea parametrică au fost studiate de Poreda pe $\mathbb{U}^n$ (a se vedea [115], [116]) și de către Kohr pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [82]). Graham, Hamada și Kohr au generalizat aceste rezultate în cazul unei norme arbitrare (a se vedea [32]; a se vedea și [48]).

Definiţia 3.5.11. Fie $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{B}^n)$. Atunci f are *reprezentare parametrică* dacă $\exists h : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ un câmp vectorial Herglotz astfel încât $\lim_{t\to\infty} e^t v(z,t) = f(t)$ local uniform pe $\mathbb{B}^n$, unde $v(z,\cdot)$ este unica soluţie a problemei (3.5.3) pe $[0,\infty)$ pentru $s = 0$. Notăm cu $S^0(\mathbb{B}^n)$ clasa aplicaţiilor care admit reprezentarea parametrică pe $\mathbb{B}^n$.

Analogul teoremei lui Pommerenke (a se vedea Teorema 1.6.3) în $\mathbb{C}^n$ a fost demonstrat de Graham, Kohr și Kohr (a se vedea [48]; a se vedea și [32]).

Teorema 3.5.12. *Fie $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{B}^n)$. Atunci $f \in S^0(\mathbb{B}^n)$ dacă și numai dacă $\exists f = f(z,t) : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ un lanț Loewner care satisface proprietatea că $\left\{e^{-t} f(z,t)\right\}_{t\geq 0}$ este o familie normală pe $\mathbb{B}^n$ și $f = f(\cdot, 0)$.*

Reamintim că pentru $n = 1$, avem că $S^0(\mathbb{B}^1) = S$ (a se vedea de exemplu [114]). Totuși, dacă $n \geq 2$, atunci $S^0(\mathbb{B}^n)$ este strict inclusă în $S(\mathbb{B}^n)$. Această incluziune și proprietatea că multe submulțimi ale lui $S(\mathbb{B}^n)$ sunt şi submulțimi ale lui $S^0(\mathbb{B}^n)$ au fost demonstrate de Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea [32], [48], [115], [116]).

În continuare, prezentăm teorema de deformare pentru aplicaţiile cu reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$. Acest rezultat a fost obținut de Graham, Hamada și Kohr pentru bilă unitate $\mathbb{C}^n$ în raport cu o normă arbitrară (a se vedea [32]).

Teorema 3.5.13. *Dacă $f \in S^0(\mathbb{B}^n)$, atunci*

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}, \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

Aceste inegalități sunt exacte. În consecință, obținem că $f(\mathbb{B}^n) \supseteq \mathbb{B}^n_{1/4}$.

Pe baza rezultatului anterior obținem compactitatea clasei $S^0(\mathbb{B}^n)$. Acest rezultat a fost demonstrat de Graham, Kohr și Kohr (a se vedea [48]) și este în contrast cu clasa $S(\mathbb{B}^n)$ care nu este compactă (a se vedea de exemplu [32], [45], [48]).

Corolarul 3.5.14. *Familia $S^0(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{B}^n)$ este compactă.*

3.5.4 g-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$

Strâns legată de noțiunea de reprezentare parametrică este noțiunea de g-reprezentare parametrică (a se vedea de exemplu [32]). Mai întâi, considerăm următoarea ipoteza ce va fi utilizată în această teză.

Ipoteza 3.5.15. Fie $g \in \mathcal{H}_u(\mathbb{U})$ astfel încât $g(0) = 1$, $g(\overline{\zeta}) = \overline{g(\zeta)}$ și $\mathfrak{Re}\, g(\zeta) > 0$, pentru orice $\zeta \in \mathbb{U}$. În plus, presupunem că pentru $\rho \in (0, 1)$

$$\min_{|\zeta|=\rho} \mathfrak{Re}\, g(\zeta) = \min\left\{g(\rho), g(-\rho)\right\} \quad \text{și} \quad \max_{|\zeta|=\rho} \mathfrak{Re}\, g(\zeta) = \max\left\{g(\rho), g(-\rho)\right\}.$$

Având în vedere ipoteza anterioară, reamintim că familia $\mathcal{M}_g(\mathbb{B}^n)$ este generalizarea familiei Carathéodory în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [32]), fiind definită în cele ce urmează.

Definiţia 3.5.16. Fie $g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ astfel încât Ipoteza 3.5.15 este îndeplinită. Atunci

$$\mathcal{M}_g(\mathbb{B}^n) = \left\{h \in \mathcal{H}_0(\mathbb{B}^n) \,:\, \left\langle h(z), \frac{z}{\|z\|^2}\right\rangle \in g(\mathbb{U}), \quad z \in \mathbb{B}^n\right\},$$

unde $\left\langle h(z), \frac{z}{\|z\|^2}\right\rangle\big|_{z=0} = 1$. Când spațiul $\mathbb{C}^n$ este înzestrat cu norma Euclidiană, notăm $\mathcal{M}_g(\mathbb{B}^n)$ cu $\mathcal{M}_g$. Această clasă a fost introdusă și studiată de Graham, Hamada și Kohr (a se vedea [32]).

Reamintim că $\mathcal{M}_g \neq \emptyset$, deoarece $id_{\mathbb{B}^n} \in \mathcal{M}_g$ și $\mathcal{M}_g \subseteq \mathcal{M}$. În particular, dacă $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, pentru orice $\zeta \in \mathbb{U}$, atunci $\mathcal{M}_g \equiv \mathcal{M}$.

În continuare, reamintim definiția aplicaţiilor care au g-reprezentare parametrică dată de Graham, Hamada și Kohr în [32] (a se vedea și [82]).

Definiţia 3.5.17. Fie $g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ o funcţie ce îndeplineşte Ipoteza 3.5.15. Atunci $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{B}^n)$ are *g-reprezentare parametrică* dacă $\exists h : \mathbb{B}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ un câmp vectorial Herglotz care satisface proprietățile: $h(\cdot, t) \in \mathcal{M}_g$, pentru orice $t \geq 0$ și

$$\lim_{t\to\infty} e^t v(z, t) = f(t)$$

local uniform pe $\mathbb{B}^n$, unde $v(z, \cdot)$ este unica soluţie a problemei (3.5.3) pe $[0, \infty)$ pentru $s = 0$. Notăm cu $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ familia de aplicaţii care au g-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$.

Observaţia 3.5.18. Graham, Hamada și Kohr (a se vedea [32]) au demonstrat că

$$S_g^0(\mathbb{B}^n) \subseteq S^0(\mathbb{B}^n) \subsetneq S(\mathbb{B}^n) \tag{3.5.5}$$

iar egalitatea este valabilă în prima incluziune dacă $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, pentru orice $\zeta \in \mathbb{U}$.

Definiţia 3.5.19. Fie $f : \mathbb{B}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie. Atunci $f(z, t)$ este un *g-lanț Loewner* dacă $f(z, t)$ este un lanț Loewner astfel încât $\left\{e^{-t} f(\cdot, t)\right\}_{t\geq 0}$ este o familie normală pe $\mathbb{B}^n$ și aplicaţia $h(z, t)$ din ecuația (3.5.4) are proprietatea că $h(\cdot, t) \in \mathcal{M}_g$ pentru aproape fiecare $t \geq 0$.

Caracterizarea clasei $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ prin lanțuri Loewner a fost dată de Graham, Hamada și Kohr în [32].

Propoziţia 3.5.20. *O aplicaţie $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{B}^n)$ aparține clasei $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ dacă și numai dacă $\exists f(z, t)$ un g-lanţ Loewner cu proprietatea că $f = f(\cdot, 0)$.*

3.6 Noi rezultate asupra combinaţiilor convexe de aplicaţii biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$

În această secțiune studiem combinații convexe de forma $(1 - \lambda)f + \lambda g$, unde $f, g \in S(\mathbb{B}^n)$ și $\lambda \in [0, 1]$. Se știe că, în general, combinația convexă a două aplicaţii biolomorfe normate nu este biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de exemplu [45], [83]). Fenomenul acesta are loc și în cazul uni-dimensional și a fost studiat de mai mulți autori (a se vedea de exemplu [9], [58], [97], [100]).

Ideea principală a acestei secțiuni este de a obține aplicaţii biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$ (sau chiar aplicaţii stelate) de forma unor combinații convexe $(1 - \lambda)f + \lambda g$, unde $f, g \in S(\mathbb{B}^n)$ și $\lambda \in [0, 1]$. Rezultatele prezentate în această secțiune au fost obţinute de Grigoriciuc (a se vedea [52]) și reprezintă extensii parțiale ale rezultatelor obținute de Chichra și Singh în [9].

3.6.1 Preliminarii

Prima parte a acestei secțiuni conţine exemple de combinații convexe de funcții univalente în $\mathbb{C}$. Aceste exemple clasice ne arată că, în general, combinația liniară a două funcții univalente normate nu este univalentă pe $\mathbb{U}$ în $\mathbb{C}$ (a se vedea de exemplu [19], [85] , [97], [102]).

Exemplul 3.6.1. Fie $f, g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ definite prin $f(\zeta) = \dfrac{\zeta}{(1-\zeta)^2}$ și $g(\zeta) = \dfrac{\zeta}{(1+\zeta)^2}$, pentru orice $\zeta \in \mathbb{U}$. Atunci $f, g \in S$, dar $h = \frac{f+g}{2} \notin S$.

În Exemplul 3.6.1, funcțiile f și g sunt univalente normate, dar mai mult, sunt chiar stelate pe $\mathbb{U}$. Totuși, funcția h nu este stelată pe $\mathbb{B}$ (de fapt, h nu este nici măcar univalentă pe $\mathbb{U}$). Pe de altă parte, MacGregor (a se vedea [97]) a demonstrat că, în general, combinația liniară a două funcții convexe nu este univalentă pe discul unitate.

În continuare, putem extinde Exemplul 3.6.1 la cazul mai multor variabile complexe. Pentru $n = 2$, obținem următorul exemplu (a se vedea [45], [83]):

Exemplul 3.6.2. Fie $F, G : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ definite prin

$$F(z) = \left(\frac{z_1}{(1-z_1)^2}, \frac{z_2}{(1-z_2)^2}\right) \quad \text{and} \quad G(z) = \left(\frac{z_1}{(1+z_1)^2}, \frac{z_2}{(1+z_2)^2}\right),$$

pentru orice $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$. Atunci $H = \frac{1}{2}(F+G) \notin S^*(\mathbb{B}^2)$. De fapt, $H \notin S(\mathbb{B}^2)$.

Deși combinațiile liniare de funcții univalente nu sunt întotdeauna univalente (pentru mai multe detalii despre aceste rezultate, se pot consulta [58], [97]), există subclase ale clasei S care îndeplinesc această condiție (a se vedea de exemplu [9], [100] pentru cazul $n = 1$). Scopul nostru este de a extinde în cazul mai multor variabile complexe un rezultat obţinut de P.N. Chichra și R. Singh (a se vedea [9] pentru cazul $n = 1$). În cele ce urmează, prezentăm rezultatul lor pentru cazul $n = 1$:

Teorema 3.6.3. *Fie $\lambda \in (0,1)$. Dacă $f \in S^*$ și $\mathfrak{Re} f'(\zeta) > 0$, pentru orice $\zeta \in \mathbb{U}$, atunci*

$$h_\lambda(\zeta) = (1-\lambda)\zeta + \lambda f(\zeta) \tag{3.6.1}$$

este stelată pe $\mathbb{U}$ și $\mathfrak{Re} h'(\zeta) > 0$, pentru orice $\zeta \in \mathbb{U}$.

3.6.2 Univalența combinațiilor convexe în $\mathbb{C}^n$

Având în vedere rezultatele prezentate în secțiunea anterioară, putem obţine criterii de univalență a unei combinații convexe de aplicaţii olomorfe normate pe bila unitate Euclidiană $\mathbb{B}^n$. În esenţă, putem obține o condiție pentru ca o combinație convexă să fie o aplicaţie care admite reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$. Rezultatele originale prezentate în această parte au fost obținute de Grigoriciuc în [52].

Lema 3.6.4. *Fie $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{B}^n)$ astfel încât $\mathfrak{Re}\langle Df(z)(u), u\rangle > 0$, pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$ și $u \in \mathbb{C}^n$ cu $\|u\| = 1$. Fie, de asemenea, $h_\lambda : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ definită prin*

$$h_\lambda(z) = (1-\lambda)z + \lambda f(z), \tag{3.6.2}$$

pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$ și $\lambda \in [0,1]$. Atunci $h_\lambda \in S(\mathbb{B}^n)$.

Lema 3.6.5. *Fie $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{B}^n)$ astfel încât $\|Df(z) - I_n\| < 1$, pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$ și fie h_λ dat de (3.6.2) pentru $\lambda \in [0,1]$. Atunci $h_\lambda \in S^0(\mathbb{B}^n)$. În particular, h_λ este univalentă pe $\mathbb{B}^n$.*

3.6.3 Stelaritatea combinațiilor convexe pe $\mathbb{B}^n$

În această subsecțiune discutăm despre stelaritatea unei combinații convexe de aplicaţii biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$. Prezentăm, de asemenea, câteva exemple care ilustrează modul în care această proprietate apare în mai multe cazuri particulare.

Propoziţia 3.6.6. *Fie $\lambda \in [0,1]$ și $f_j \in S^*$ astfel încât $\mathfrak{Re} f_j'(\zeta) > 0$, pentru $j = \overline{1,n}$ și $\zeta \in \mathbb{U}$. De asemenea, fie $f(z) = \big(f_1(z_1), ..., f_n(z_n)\big)$, pentru $z \in \mathbb{B}^n$. Atunci $h_\lambda \in S^*(\mathbb{B}^n)$, unde h_λ este dat de (3.6.2). Mai mult, $\mathfrak{Re}\langle Dh_\lambda(z)(u), u\rangle > 0$, pentru $z \in \mathbb{B}^n$ și $u \in \mathbb{C}^n$ cu $\|u\| = 1$.*

Este clar că aplicaţia considerată în rezultatul anterior are o formă particulară (are pe fiecare componentă o funcție stelată de o variabilă complexă). Cu toate acestea, putem obține rezultate similare pentru aplicaţii stelate pe $\mathbb{B}^n$ de forme arbitrare, ca în exemplele următoare (a se vedea [47], [128]).

Exemplul 3.6.7. Fie $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ definit prin $f(z) = \big(z_1 + az_2^2, z_2\big)$, pentru orice $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$ cu $|a| \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Știm (a se vedea, de exemplu, [24], [45], [83]) că $f \in S^*(\mathbb{B}^2)$. În plus,

$$\begin{aligned} h_\lambda(z) = (1-\lambda)z + \lambda f(z) &= (1-\lambda)\big(z_1, z_2\big) + \lambda\big(z_1 + az_2^2, z_2\big) \\ &= \big((1-\lambda)z_1 + \lambda z_1 + \lambda a z_2^2, (1-\lambda)z_2 + \lambda z_2\big) \\ &= \big(z_1 + \lambda a z_2^2, z_2\big), \end{aligned}$$

pentru orice $z \in \mathbb{B}^2$. Deoarece $\lambda \in [0,1]$ și $|a| \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$, rezultă că $|\lambda a| \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ și atunci $h_\lambda \in S^*(\mathbb{B}^2)$.

Pe baza ideilor prezentate mai sus, putem demonstra o a doua versiune a teoremei lui Chichra-Singh (a se vedea Teorema 3.6.3) în $\mathbb{C}^n$, pentru $n \ge 2$. Reamintim că acest rezultat a fost obținut de Grigoriciuc în [52].

Teorema 3.6.8. *Fie $\lambda \in (0,1)$, $\mu = \lambda/(1-\lambda)$ și fie $f \in \mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n)$ astfel încât*

$$\big\|Df(z) - I_n\big\| < \lambda^{-1} \tag{3.6.3}$$

şi

$$\mathfrak{Re}\Big\langle \big(I_n + \mu Df(z)\big)^{-1}\big(z + \mu f(z)\big), z\Big\rangle > 0, \quad z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}. \tag{3.6.4}$$

Atunci $h_\lambda \in S^*(\mathbb{B}^n)$, pentru orice $\lambda \in (0,1)$, unde h_λ este dată de (3.6.2).

Inspirat de rezultatul anterior, putem defini subclasa $\mathcal{L}_\lambda^*(\mathbb{B}^n)$ de aplicaţii local biolomorfe normate pe $\mathbb{B}^n$ care îndeplinesc condițiile din Teorema 3.6.8.

Definiţia 3.6.9. Fie $\lambda \in (0,1)$ și $\mu = \lambda/(1-\lambda)$. Spunem că $f \in \mathcal{L}_\lambda^*(\mathbb{B}^n)$ dacă $f \in \mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n)$ astfel încât (3.6.3) și (3.6.4) sunt satisfăcute. Observăm că $\mathcal{L}_\lambda^*(\mathbb{B}^n) \neq \emptyset$, deoarece $I_n \in \mathcal{L}_\lambda^*(\mathbb{B}^n)$.

În continuare oferim un exemplu de aplicaţie $f \in \mathcal{L}_\lambda^*$ (a se vedea și [24], [45], [83], [128]).

Exemplul 3.6.10. Fie $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ definit prin $f(z) = \big(z_1 + az_2^2, z_2\big)$, pentru orice $z \in \mathbb{B}^2$ cu $|a| \le \frac{1}{2}$. Atunci $f \in \mathcal{L}_\lambda^*(\mathbb{B}^2)$. Mai mult, $h_\lambda \in S^*(\mathbb{B}^2)$, unde h_λ este definită prin (3.6.2).

Încheiem această secțiune propunând o conjectură care generalizează rezultatul obţinut de Chichra și Singh (a se vedea [9]). Pornind de la rezultatul obţinut de aceştia în $\mathbb{C}$, considerăm următoarea problemă în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [52]):

Conjectura 3.6.11. *Fie $\lambda \in (0,1)$. Dacă $f \in S^*(\mathbb{B}^n)$ și $\mathfrak{Re}\big\langle Df(z)(u), u\big\rangle > 0$, pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$ și $u \in \mathbb{C}^n$ cu $\|u\| = 1$, atunci $h_\lambda(z) = (1-\lambda)z + \lambda f(z)$ este o aplicaţie stelată pe $\mathbb{B}^n$. Mai mult, $\mathfrak{Re}\big\langle Dh_\lambda(z)(u), u\big\rangle > 0$, pentru $z \in \mathbb{B}^n$ și $u \in \mathbb{C}^n$ cu $\|u\| = 1$. În particular, h_λ este biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$.*

Este uşot de observat că în $\mathbb{C}$ Conjectura 3.6.11 propusă de Grigoriciuc în [52] este adevărată, deoarece se reduce la Teorema 3.6.3 obținută de Chichra și Singh în [9].

3.7 Operatori de extensie în $\mathbb{C}^n$

În secţiunea a şaptea prezentăm noţiuni generale privind operatori de extensie care păstrează proprietăți geometrice pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$. Vom discuta aici despre operatorul de extensie Roper-Suffridge Φ_n (considerat de K. Roper și T.J. Suffridge în [121]) și operatorul de extensie Graham-Kohr $\Psi_{n,\alpha}$ (definit de I. Graham și G. Kohr în [44] a se vedea și [43]). A treia parte a acestei secțiuni conține două generalizări ale operatorului de extensie Roper-Suffridge introduse de Graham, Hamada, Kohr, Kohr și Suffridge (a se vedea de exemplu [42], [47]) care transformă o funcţie local univalentă pe $\mathbb{U}$ într-o aplicaţie local biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$. În partea finală a acestei secțiuni prezentăm, pe scurt, operatorul de extensie introdus de Pfaltzgraff și Suffridge (a se vedea [111]), împreună cu o generalizare a acestui operator (a se vedea de exemplu [10]).

În următoarele secțiuni, pentru $n \geq 2$, folosim notaţia $z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{C}^n$, unde $\tilde{z} = (z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Reamintim că $\mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n)$ este familia aplicaţiilor local biolomorfe normate pe $\mathbb{B}^n$, iar $\mathcal{LS}_1(\mathbb{B}^1) = \mathcal{LS}$.

3.7.1 Operatorul de extensie Roper-Suffridge Φ_n

Operatorul de extensie Roper-Suffridge $\Phi_n : \mathcal{LS} \to \mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n)$ este definit prin

$$\Phi_n(f)(z) = \left(f(z_1), \tilde{z}\sqrt{f'(z_1)}\right), \quad z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n, \tag{3.7.1}$$

unde ramura funcției radical are proprietatea $\sqrt{f'(z_1)}\big|_{z_1=0} = 1$.

Primul rezultat important legat de operatorul de extensie Φ_n se datorează lui Roper și Suffridge. Ei au demonstrat că Φ_n păstrează noțiunea de convexitate de la cazul uni-dimensional la cel multi-dimensional (a se vedea [121]). Același rezultat a fost demonstrat de Graham și Kohr într-o manieră diferită (a se vedea [43]).

Teorema 3.7.1. *Dacă $f \in K$, atunci $\Phi_n(f) \in K(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Phi_n(K) \subseteq K(\mathbb{B}^n)$.*

O altă proprietate importantă a operatorului Φ_n este legată de păstrarea stelarității de ordin $\alpha \in [0, 1)$. De-a lungul timpului, mai mulți autori au obținut rezultate puternice de extensie, după cum urmează:

- Graham și Kohr (a se vedea [43]) au demonstrat că Φ_n păstrează stelaritatea;
- Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea [73]) au obținut că Φ_n păstrează stelaritatea de ordin $1/2$;
- Liu (a se vedea [92]) a obținut că Φ_n păstrează stelaritatea de ordin $\alpha \in (0, 1)$;

Ultimul rezultat se datorează lui Graham, Kohr și Kohr (a se vedea [48]) și stabilește relația dintre teoria Loewner și operatorul de extensie Roper-Suffridge.

Teorema 3.7.2. *Dacă $f \in S$, atunci $\Phi_n(f) \in S^0(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Phi_n(S) \subseteq S^0(\mathbb{B}^n)$.*

3.7.2 Operatorul de extensie Graham-Kohr $\Psi_{n,\alpha}$

Al doilea operator de extensie prezentat aici a fost definit de I. Graham și G. Kohr (a se vedea [43], [44]). Pentru $\alpha \in [0, 1]$, fie $\Psi_{n,\alpha}$ definit prin

$$\Psi_{n,\alpha}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha} \tilde{z}\right), \quad z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n \tag{3.7.2}$$

pentru orice funcție $f \in \mathcal{LS}$ cu $f(z_1) \neq 0$, unde $z_1 \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$. Ramura funcției putere are proprietatea că $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha}\big|_{z_1=0} = 1$. Cazul particular $\Psi_{n,1}$ a fost studiat de Pfaltzgraff și Suffridge în [111].

Graham și Kohr (a se vedea [44]) au demonstrat că operatorul de extensie $\Psi_{n,\alpha}$ are următoarele proprietăți importante (valabile și pentru norma $\|\cdot\|_p$, unde $1 \leq p \leq \infty$):

Teorema 3.7.3. *Fie $\alpha \in [0, 1]$.*

a) Dacă $f \in S$, atunci $\Psi_{n,\alpha}(f) \in S^0(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Psi_{n,\alpha}(S) \subseteq S^0(\mathbb{B}^n)$.

b) Dacă $f \in S^*$, atunci $\Psi_{n,\alpha}(f) \in S^*(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Psi_{n,\alpha}(S^*) \subseteq S^*(\mathbb{B}^n)$.

c) Operatorul de extensie $\Psi_{n,\alpha}$ nu păstrează convexitatea pentru $n \geq 2$.

3.7.3 Generalizări ale operatorului de extensie Roper-Suffridge

În a treia parte a acestei secțiuni ne concentrăm atenția asupra a două generalizări ale operatorului de extensie Roper-Suffridge introduse de Graham, Kohr și Kohr (a se vedea [47]), respectiv de Graham, Hamada, Kohr și Suffridge (a se vedea [42]). Alte rezultate legate de operatorul de extensie Roper-Suffridge generalizat pot fi găsite în [25], [27], [43], [46], [84], [93] , [103], [138].

Operatorul generalizat de extensie Roper-Suffridge $\Phi_{n,\beta}$

O primă formă generală a operatorului Φ_n a fost considerată de Graham, Kohr și Kohr în [47]. Pentru $\beta \in [0, 1/2]$, a fost definit operatorul $\Phi_{n,\beta} : \mathcal{LS} \to \mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n)$ prin

$$\Phi_{n,\beta}(f)(z) = \Big(f(z_1), \big(f'(z_1)\big)^{\beta}\tilde{z}\Big), \quad z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n, \tag{3.7.3}$$

unde ramura funcției putere are proprietatea $\big(f'(z_1)\big)^{\beta}\big|_{z_1=0} = 1$. Este clar că $\Phi_{n,1/2} = \Phi_n$ este operatorul de extensie Roper-Suffridge dat de (3.7.1).

Următoarele proprietăți ale operatorului $\Phi_{n,\beta}$ au fost obținute de Graham, Kohr și Kohr în [47].

Teorema 3.7.4. *Fie $\beta \in [0, 1/2]$ și $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\delta| < \frac{\pi}{2}$.*

a) Dacă $f \in S$, atunci $\Phi_{n,\beta}(f) \in S^0(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Phi_{n,\beta}(S) \subseteq S^0(\mathbb{B}^n)$.

b) Dacă $f \in \hat{S}_\delta$, atunci $\Phi_{n,\beta}(f) \in \hat{S}_\delta(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Phi_{n,\beta}(\hat{S}_\delta) \subseteq \hat{S}_\delta(\mathbb{B}^n)$. În particular, dacă $\delta = 0$, atunci $\Phi_{n,\beta}(S^*) \subseteq S^*(\mathbb{B}^n)$.

Este important de menționat aici că operatorul $\Phi_{n,\beta}$ păstrează convexitatea numai dacă $\beta = \frac{1}{2}$ (adică operatorul de extensie Roper-Suffridge). Acest rezultat a fost obținut de Graham, Kohr și Kohr (a se vedea [47]).

Operatorul generalizat de extensie Roper-Suffridge-Graham-Kohr $\Phi_{n,\alpha,\beta}$

A doua generalizare a operatorului de extensie Roper-Suffridge, respectiv a operatorului de extensie Graham-Kohr a fost introdusă de Graham, Hamada, Kohr și Suffridge în [42]. Ei au considerat operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ definit prin

$$\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha} \big(f'(z_1)\big)^{\beta}\tilde{z}\right), \quad z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n,$$

unde $\alpha, \beta \geq 0$ și $f \in \mathcal{LS}$ au proprietatea că $f(z_1) \neq 0$ pentru $z_1 \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$. Aici, ramurile funcțiilor putere sunt considerate astfel încât $\big(\frac{f(z_1)}{z_1}\big)^{\alpha}\big|_{z_1=0} = 1$ și $\big(f'(z_1)\big)^{\beta}\big|_{z_1=0} = 1$. Este clar că $\Phi_{n,0,1/2} = \Phi_n$ este operatorul de extensie Roper-Suffridge, $\Phi_{n,0,\beta} = \Phi_{n,\beta}$ este operatorul de extensie Roper-Suffridge generalizat și $\Phi_{n,\alpha,0} = \Psi_{n,\alpha}$ este operatorul de extensie Graham-Kohr.

Graham, Hamada, Kohr și Suffridge (a se vedea [42]) au studiat operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ și au obținut următoarele rezultate de extensie:

Teorema 3.7.5. *Fie $\alpha \in [0, 1]$ și $\beta \in [0, 1/2]$ astfel încât $\alpha + \beta \leq 1$.*

a) Dacă $f \in S$, atunci $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in S^0(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S) \subseteq S^0(\mathbb{B}^n)$.

b) Dacă $f \in S^*$, atunci $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in S^*(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*) \subseteq S^*(\mathbb{B}^n)$.

În plus, Graham, Hamada, Kohr și Suffridge (a se vedea [42]) au demonstrat că $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ păstrează noțiunea de convexitate numai dacă $\alpha = 0$ și $\beta = \frac{1}{2}$ (adică operatorul extensiei Roper-Suffridge).

3.7.4 Operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge Γ_n

Pfaltzgraff și Suffridge au considerat o extensie diferită a operatorului Roper-Suffridge în [111]. Ei au definit un operator care extinde aplicaţiile local biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$ la aplicaţii local biolomorfe pe $\mathbb{B}^{n+1}$ în $\mathbb{C}^{n+1}$. Aici, fie $z = (z', z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$, unde $z' = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Pentru $n \geq 1$, operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge $\Gamma_n : \mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n) \to \mathcal{LS}_{n+1}(\mathbb{B}^{n+1})$ este dat de

$$\Gamma_n(f)(z) = \Big(f(z'), z_{n+1}\big[J_f(z')\big]^{\frac{1}{n+1}}\Big), \quad z = (z', z_{n+1}) \in \mathbb{B}^{n+1}, \tag{3.7.4}$$

unde $J_f(z') = \det Df(z')$, pentru $z' \in \mathbb{B}^n$. Considerăm funcția putere astfel încât $\big[J_f(z')\big]^{\frac{1}{n+1}}\big|_{z'=0} = 1$. Dacă $n = 1$, atunci $\Gamma_1 = \Phi_2$ este o formă particulară a operatorului de extensie Roper-Suffridge Φ_n.

Observaţia 3.7.6. Dacă $f \in \mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n)$, atunci $\Gamma_n(f) \in \mathcal{LS}_{n+1}(\mathbb{B}^{n+1})$. În plus, $\Gamma_n\big(S(\mathbb{B}^n)\big) \subseteq S(\mathbb{B}^{n+1})$. Pentru detalii, se poate consulta [111].

Graham, Kohr și Suffridge (a se vedea [49]) au demonstrat că operatorul de extensie Γ_n păstrează primul element al unui lanț Loewner de la $\mathbb{B}^n$ la $\mathbb{B}^{n+1}$. Pentru $n \geq 2$, Graham, Hamada și Kohr (a se vedea [35]; a se vedea și [10], [33]) au obținut aceeași proprietate pe domenii simetrice mărginite.

Teorema 3.7.7. *Dacă $f \in S^0(\mathbb{B}^n)$, atunci $\Gamma_n(f) \in S^0(\mathbb{B}^{n+1})$. Prin urmare, $\Gamma_n\big(S^0(\mathbb{B}^n)\big) \subseteq S^0(\mathbb{B}^{n+1})$.*

3.8 Combinaţii convexe de operatori de extensie de tip Graham-Kohr

În ultima secțiune a acestui capitol vom aduce împreună ideile prezentate mai sus, și anume operatori de extensie și combinații convexe de aplicaţii biolomorfe în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [9], [19], [97] pentru combinații convexe de funcții univalente în $\mathbb{C}$; a se vedea de exemplu [45], [52], [83] pentru combinații convexe de aplicaţii biolomorfe în $\mathbb{C}^n$; a se vedea și [42], [44], [111], [121] pentru operatori de extensie). Prin urmare, discutăm despre combinații convexe de operatori de extensie pe $\mathbb{B}^n$. În particular, considerăm un nou operator de extensie obținut ca o combinație convexă a doi operatori de extensie de tip Graham-Kohr (a se vedea de exemplu [43], [44]). Rezultatele prezentate în această secțiune sunt originale.

3.8.1 Operatorul de extensie $\mathcal{K}^{\alpha,\beta}_{n,\lambda}$

Mai întâi, pentru $\lambda, \alpha, \beta \in [0, 1]$ definim operatorul de extensie $\mathcal{K}^{\alpha,\beta}_{n,\lambda}$ în $\mathbb{C}^n$. Acest operator este obținut ca o combinație convexă a doi operatori de extensie de tip Graham-Kohr (a se vedea de exemplu [44]).

Definiţia 3.8.1. Fie $\lambda, \alpha, \beta \in [0, 1]$. Definim operatorul

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{\alpha,\beta}_{n,\lambda}(f, g)(z) &= (1 - \lambda)\Psi_{n,\alpha}(g)(z) + \lambda\Psi_{n,\beta}(f)(z)\\ &= \bigg((1 - \lambda)g(z_1) + \lambda f(z_1), \quad (1 - \lambda)\tilde{z}\Big[\frac{g(z_1)}{z_1}\Big]^{\alpha} + \lambda\tilde{z}\Big[\frac{f(z_1)}{z_1}\Big]^{\beta}\bigg),\end{aligned} \tag{3.8.1}$$

pentru orice $z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n$, unde $f, g \in \mathcal{LS}$ astfel încât $f(z_1) \neq 0$ și $g(z_1) \neq 0$, pentru orice $z_1 \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$ și $\Psi_{n,\alpha}$ și $\Psi_{n,\beta}$ sunt operatori de extensie Graham-Kohr definiți prin (3.7.2). Considerăm ramura funcțiilor putere astfel încât $\big(\frac{g(z_1)}{z_1}\big)^{\alpha}\big|_{z_1=0} = 1$ și $\big(\frac{f(z_1)}{z_1}\big)^{\beta}\big|_{z_1=0} = 1$.

Propoziţia 3.8.2. *Fie $\lambda, \alpha, \beta \in [0, 1]$ și fie $\mathcal{K}^{\alpha,\beta}_{n,\lambda}$ operatorul definit prin (3.8.1). De asemenea, fie $f, g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ două funcții cu proprietățile din Definiția 3.8.1. Atunci $\mathcal{K}^{\alpha,\beta}_{n,\lambda}(f, g) \in \mathcal{H}_0(\mathbb{B}^n)$.*

Ținând cont de Definiția 3.8.1 este natural să considerăm $\lambda \in (0, 1)$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ și cazurile particulare ale operatorului $\mathcal{K}^{\alpha,\beta}_{n,\lambda}$ prezentate în următoarea definiție. De asemenea, impunem condiții suplimentare funcției f pentru a obține o generalizare completă a operatorului de extensie Graham-Kohr $\Psi_{n,\alpha}$.

Definiţia 3.8.3. Fie $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$ astfel încât $\alpha \neq \beta$ și $\lambda \in (0,1)$. Fie $f \in \mathcal{LS}$ astfel încât $f(z_1) \neq 0$, pentru orice $z_1 \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$ și $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\gamma}\Big|_{z_1=0} = 1$. Mai mult, considerăm

A) $f'(z_1) \neq \frac{\lambda-1}{\lambda}$, pentru orice $z_1 \in \mathbb{U}$ și $\lambda \in (0,1)$

B) $\left[\dfrac{f(z_1)}{z_1}\right]^{\gamma} \neq \dfrac{\lambda-1}{\lambda}$, pentru orice $z_1 \in \mathbb{U}$, $\lambda \in (0,1)$ și $\gamma \in [0,1]$.

Definim atunci

- operatorul de extensie $\mathcal{K}_{\lambda}^{\beta}$ prin

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\lambda}^{\beta}(f)(z) &= \mathcal{K}_{n,\lambda}^{\alpha,\beta}(f, id_{\mathbb{U}})(z) = (1-\lambda)I_n(z) + \lambda\Psi_{n,\beta}(f)(z) \\ &= \left((1-\lambda)z_1 + \lambda f(z_1), \quad (1-\lambda)\tilde{z} + \lambda\tilde{z}\left[\frac{f(z_1)}{z_1}\right]^{\beta}\right), \quad z \in \mathbb{B} \end{aligned} \tag{3.8.2}$$

  unde I_n este operatorul identitate în $\mathbb{C}^n$ și

- operatorul de extensie $\mathcal{K}_{\lambda}^{\alpha,\beta}$ prin

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\lambda}^{\alpha,\beta}(f)(z) &= \mathcal{K}_{n,\lambda}^{\alpha,\beta}(f, f)(z) = (1-\lambda)\Psi_{n,\alpha}(f)(z) + \lambda\Psi_{n,\beta}(f)(z) \\ &= \left(f(z_1), \quad (1-\lambda)\tilde{z}\left[\frac{f(z_1)}{z_1}\right]^{\alpha} + \lambda\tilde{z}\left[\frac{f(z_1)}{z_1}\right]^{\beta}\right), \quad z \in \mathbb{B}^n. \end{aligned} \tag{3.8.3}$$

Reamintim că $\Psi_{n,\alpha}$ și $\Psi_{n,\beta}$ sunt operatori de extensie de tip Graham-Kohr definiți prin (3.7.2).

3.8.2 Conservarea biolomorfiei prin operatorul $\mathcal{K}_{\lambda}^{\beta}$

În a doua parte a acestei secțiuni studiem proprietățile operatorului $\mathcal{K}_{\lambda}^{\beta}(f)$. Observăm că unele condiții suplimentare asupra funcției local univalente normate f pot asigură local biolomorfia, respectiv univalența aplicaţiei $\mathcal{K}_{\lambda}^{\beta}(f)$ în $\mathbb{C}^n$. Rezultatele originale prezentate aici au fost obținute de autor.

Proprietăți generale

Conform relaţiei (3.8.2) deducem că dacă $f \in \mathcal{LS}$, atunci $\mathcal{K}_{\lambda}^{\beta}(f) \in \mathcal{H}_0(\mathbb{B}^n)$, pentru orice $\lambda \in (0,1)$ și $\beta \in [0,1]$, unde

$$D\mathcal{K}_{\lambda}^{\beta}(f)(z) = (1-\lambda)I_n + \lambda D\Psi_{n,\beta}(f)(z), \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{3.8.4}$$

Într-adevăr, dacă $f \in \mathcal{LS}$, atunci $\Psi_{n,\beta}(f) \in \mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n)$, pentru orice $\beta \in [0,1]$. În plus, conform ipotezelor considerate în Definiția 3.8.3, obținem local biolomorfia aplicaţiei $\mathcal{K}_{\lambda}^{\beta}(f)$, după cum urmează:

Lema 3.8.4. *Fie $f \in \mathcal{LS}$ astfel încât $f(z_1) \neq 0$, pentru orice $z_1 \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$ și $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta}\Big|_{z_1=0} = 1$, pentru orice $\beta \in [0,1]$. De asemenea, considerăm că f satisface ipotezele A) și B) din Definiția 3.8.3. Atunci $\mathcal{K}_{\lambda}^{\beta}(f) \in \mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n)$, pentru orice $\lambda \in (0,1)$ și $\beta \in [0,1]$.*

Având în vedere rezultatul anterior, deducem următoarea proprietate:

Propoziţia 3.8.5. *Fie $f \in \mathcal{LS}$ cu $f(z_1) \neq 0$, pentru orice $z_1 \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$ și $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\beta}\Big|_{z_1=0} = 1$, pentru $\beta \in [0,1]$. De asemenea, presupunem că $\mathfrak{Re} f'(z_1) > 0$, pentru orice $z_1 \in \mathbb{U}$. Atunci $\mathcal{K}_{\lambda}^{\beta}(f) \in \mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n)$, pentru $\lambda \in (0,1)$ și $\beta \in [0,1]$.*

Pentru valori particulare ale parametrului β, putem obține un rezultat chiar mai bun care asigură univalența aplicaţiei $\mathcal{K}_{\lambda}^{\beta}(f)$.

Teorema 3.8.6. *Fie $\lambda \in (0,1)$ și $f \in S$ astfel încât $\mathfrak{Re} f'(z_1) > 0$, pentru orice $z_1 \in \mathbb{U}$. Atunci $\mathcal{K}_{\lambda}^{\beta}(f) \in S^0(\mathbb{B}^n)$, pentru orice $\lambda \in (0,1)$ și $\beta \in \{0,1\}$.*

3.8.3 Conservarea stelarităţii prin operatorul $\mathcal{K}_\lambda^\beta$

Pe baza rezultatului obținut mai sus, putem demonstra că, în ipoteze similare, operatorul $\mathcal{K}_\lambda^\beta$ păstrează stelaritatea de la discul unitate $\mathbb{U}$ la bila unitate Euclidiană $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Următoarele rezultate au fost obţinute de autor.

Teorema 3.8.7. *Fie $\lambda \in (0,1)$ și $f \in S^*$ astfel încât $\mathfrak{Re} f'(z_1) > 0$, pentru toți $z_1 \in \mathbb{U}$. Atunci $\mathcal{K}_\lambda^1(f) \in S^*(\mathbb{B}^n)$, pentru orice $\lambda \in (0,1)$.*

Aplicând Teorema 3.8.6 și utilizând un argument similar ca în demonstrația rezultatului anterior, putem obține următoarea proprietate a operatorului $\mathcal{K}_\lambda^0$:

Propoziţia 3.8.8. *Fie $\lambda \in (0,1)$ și $f \in S^*$ astfel încât $\mathfrak{Re} f'(z_1) > 0$, pentru orice $z_1 \in \mathbb{U}$. Atunci $\mathcal{K}_\lambda^0(f) \in S^*(\mathbb{B}^n)$, pentru orice $\lambda \in (0,1)$.*

Până în acest punct, am demonstrat că dacă $f \in S^*$ cu $\mathfrak{Re} f'(z_1) > 0$, pentru orice $z_1 \in \mathbb{U}$, atunci $\mathcal{K}_\lambda^\beta(f) \in S^*(\mathbb{B}^n)$, pentru orice $\lambda \in (0,1)$ și $\beta \in \{0,1\}$. Chiar dacă aceste rezultate au loc, cazul în care $\beta \in (0,1)$ rămâne o întrebare deschisă.

3.8.4 Conservarea local biolomorfiei prin operatorul $\mathcal{K}_\lambda^{\alpha,\beta}$

Încheiem această secțiune prezentând două proprietăți simple ale operatorului $\mathcal{K}_\lambda^{\alpha,\beta}$ definit prin (3.8.3). În primul rând, observăm că operatorii $\mathcal{K}_\lambda^\beta$ și $\mathcal{K}_\lambda^{\alpha,\beta}$ sunt diferiți pentru orice $\alpha, \beta \in [0,1]$ cu $\alpha \neq \beta$ și $\lambda \in (0,1)$. Prin urmare se poate obţine un criteriu de local biolomorfie pentru operatorul $\mathcal{K}_\lambda^{\alpha,\beta}$. Această subsecțiune conține rezultate originale obținute de autor.

Teorema 3.8.9. *Fie $f \in \mathcal{LS}$ astfel încât $\mathfrak{Re} f'(z_1) > 0$, pentru orice $z_1 \in \mathbb{U}$ și fie $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Atunci $\mathcal{K}_\lambda^{\alpha,\beta}(f) \in \mathcal{LS}_n(\mathbb{B}^n)$, pentru orice $\lambda \in (0,1)$ și $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$.*

Capitolul 4

Noi subclase de aplicaţii biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$

Capitolul al patrulea al acestei teze conține extensii ale principalelor rezultate prezentate în Capitolul 2 privind un nou operator diferențial, respectiv noi subclase de aplicații biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$.

În primul rând, discutăm despre forma n-dimensională a operatorului $\mathcal{G}_k$, denumit aici $\mathcal{G}_{n,k}$, pentru $n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq 2$ și $k \in \mathbb{N}$. Operatorul $\mathcal{G}_{n,k}$ va fi utilizat pentru a extinde subclasele E_k și E_k^* de la discul unitate $\mathbb{U}$ la bila unitate B^n în $\mathbb{C}^n$ în raport cu o normă arbitrară. Chiar dacă aceste clase pot fi definite într-un context foarte general, cazul bilei unitate Euclidiene $\mathbb{B}^n$ va fi considerat în mod particular în discuția noastră, având în vedere proprietățile care sunt păstrate (sau nu) de la cazul uni-dimensional la cel multi-dimensional.

Rezultatul principal evidențiat în §4.2 arată că familia $E_1^*(\mathbb{B}^n)$ coincide cu clasa K a funcțiilor convexe pentru $n = 1$ (a se vedea Teorema 4.2.1; a se vedea și Propoziția 2.2.4). Cu toate acestea, pentru $n \geq 2$, obținem că $E_1^*(\mathbb{B}^n) \cap K(\mathbb{B}^n) \neq \emptyset$, dar $E_1^*(\mathbb{B}^n) \neq K(\mathbb{B}^n)$. Se observă că în cazul subclasei $E_1^*(\mathbb{B}^n)$ obținem o diferență majoră între cazul uni-dimensional și cel al mai multor variabile complexe, adică familia aplicațiilor convexe nu este aceeași cu subclasa $E_1^*(\mathbb{B}^n)$. Un alt rezultat obţinut în această secțiune (a se vedea Teorema 4.2.3) prezintă conexiunea dintre $E_1(\mathbb{B}^n)$ și familia $K(\mathbb{B}^n; 1/2)$ a aplicațiilor convexe de ordin $1/2$. Incluziunea $E_1 \subset K(1/2)$ valabilă în $\mathbb{C}$ poate fi parțial extinsă în $\mathbb{C}^n$. Alte proprietăți și exemple relevante sunt prezentate în această secțiune pentru a descrie noile subclase introduse de autor (de ex. o teoremă de tip Marx-Strohacker pentru subclasele prezentate).

Încheiem acest capitol cu studiul a două cazuri particulare ale operatorului de extensie Graham-Kohr $\Psi_{n,\alpha}$ (prezentat în §3.7) aplicat familiei de funcții convexe K. Deși operatorul $\Psi_{n,\alpha}$ nu păstrează noțiunea de convexitate (a se vedea de exemplu [44]), putem demonstra o proprietate importantă legată de subclasa E_1^*. Știm că $E_1^* = K$ în $\mathbb{C}$ și astfel, în §4.3 arătăm că $\Psi_{n,\alpha}(K) \subseteq E_1^*(\mathbb{B}^n) \neq K(\mathbb{B}^n)$ pentru $\alpha \in \{0, 1\}$. Cu acest rezultat, nu numai că am reușit să conectăm rezultatele obţinute în Capitolele 2 și 4 cu ajutorul operatorului de extensie Graham-Kohr, dar am obținut și o nouă proprietate a operatorului $\Psi_{n,\alpha}$. Împreună cu aceste rezultate, propunem și câteva întrebări și probleme deschise legate de operatorul de extensie Graham-Kohr și subclasa E_k^* în $\mathbb{C}^n$.

În final, menționăm că toate rezultatele originale detaliate în acest capitol au fost obținute de Grigoriciuc în [53]. Alte surse bibliografice importante folosite pentru pregătirea acestui capitol sunt [19], [44], [45], [71], [83], [122].

4.1 Preliminarii

În această secțiune introducem versiunea n-dimensională a operatorului diferenţial $\mathcal{G}_k$ definit în Capitolul 2. Notăm acest operator în $\mathbb{C}^n$ cu $\mathcal{G}_{n,k}$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq 2$ și $k \in \mathbb{N}$. Folosind operatorul diferential $\mathcal{G}_{n,k}$ putem extinde subclasele E_k^*, respectiv E_k de la discul unitate $\mathbb{U}$ la bila unitate B^n în $\mathbb{C}^n$ în raport cu o normă arbitrară $\|\cdot\|_*$. Prezentăm definițiile subclaselor menționate într-un cadru general (pe bila unitate B^n în $\mathbb{C}^n$ în raport cu o normă arbitrară $\|\cdot\|_*$), dar ne vom concentra atenția asupra proprietăţilor claselor în cazul particular al bilei unitate Euclidiene $\mathbb{B}^n$. Rezultatele originale din această secțiune sunt incluse în [53].

Definiţia 4.1.1. Fie $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ și fie $f \in \mathcal{H}_0(B^n)$ de forma $f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} P_m(z)$, unde

$$P_m(z) = \frac{1}{m!} D^m f(0)(z^m), \quad z \in B^n, \quad m \geq 2. \tag{4.1.1}$$

Definim operatorul diferenţial $\mathcal{G}_{n,k} : \mathcal{H}_0(B^n) \to \mathcal{H}(B^n)$ prin

$$\big(\mathcal{G}_{n,k} f\big)(z) = \begin{cases} D^k f(z)(z^k) + z + \sum\limits_{m=2}^{k-1} P_m(z), & k \geq 3 \\ D^2 f(z)(z^2) + z, & k = 2 \\ Df(z)(z), & k = 1 \\ f(z), & k = 0, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

pentru $z \in B^n$. Este clar că $\mathcal{G}_{1,k} = \mathcal{G}_k$ este operatorul diferenţial definit în Capitolul 2 (a se vedea Definiţia 2.1.1) pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$. Mai mult, $\mathcal{G}_{n,0} = I_n$ este operatorul identitate în $\mathbb{C}^n$ și (similar cu cazul uni-dimensional) $\mathcal{G}_{n,k}(I_n) = I_n$, pentru $k \in \mathbb{N}$.

Ținând cont de definiția operatorului $\mathcal{G}_{n,k}$, putem defini versiunea n-dimensională a subclaselor E_k^*, respectiv E_k prezentate în Capitolul 2 (a se vedea Definițiile 2.2.1 și 2.2.14). Aceste subclase au fost introduse de Grigoriciuc în [53].

Definiţia 4.1.2. Fie $k \in \mathbb{N}$. Notăm cu

$$E_k^*(B^n) = \big\{ f \in S(B^n) \, : \, \mathcal{G}_{n,k} f \in S^*(B^n) \big\} \tag{4.1.3}$$

subclasa aplicaţiilor biolomorfe normate pe B^n pentru care aplicaţia $\mathcal{G}_{n,k} f$ este stelată pe B^n, respectiv prin

$$E_k(B^n) = \big\{ f \in S(B^n) \, : \, \mathcal{G}_{n,k} f \in K(B^n) \big\}. \tag{4.1.4}$$

subclasa aplicaţiilor biolomorfe normate pe B^n pentru care aplicaţia $\mathcal{G}_{n,k} f$ este convexă pe B^n.

Observaţia 4.1.3. Conform definiției anterioare, este clar că

1. dacă $k = 0$, atunci $E_0^*(B^n) = S^*(B^n)$ și $E_0(B^n) = K(B^n)$;
2. dacă $k = 1$, atunci $E_1^*(B^n) = \big\{ f \in S(B^n) \, : \, \mathcal{G}_{n,1} f \in S^*(B^n) \big\}$ și $E_1(B^n) = \big\{ f \in S(B^n) \, : \, \mathcal{G}_{n,1} f \in K(B^n) \big\}$, unde $\mathcal{G}_{n,1} f(z) = Df(z)(z)$, pentru $z \in B^n$.

O remarcă importantă cu privire la subclasele anterioare de aplicaţii biolomorfe în $\mathbb{C}^n$ constă în faptul că teorema de dualitate lui Alexander nu este adevărată în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea Observația 3.4.9; a se vedea de exemplu [45], [83]). În conformitate cu aceasta, obținem următoarele observații:

Observaţia 4.1.4. Dacă $n \geq 2$, atunci

$$K(B_1^n) \subsetneq E_1^*(B_1^n) \quad \text{and} \quad K(\mathbb{U}^n) \subsetneq E_1^*(\mathbb{U}^n), \tag{4.1.5}$$

unde B_1^n este bila unitate în $\mathbb{C}^n$ în raport cu 1-norma (amintim că 1-norma este dată de $\|z\|_1 = \sum_{j=1}^n |z_j|$, pentru $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$), respectiv $\mathbb{U}^n$ este polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$ (pentru detalii, a se vedea §3.1.1).

Observaţia 4.1.5. Spre deosebire de Observația 4.1.4, putem demonstra (a se vedea Teorema 4.2.1 prezentată în secțiunea următoare) că

$$E_1^*(\mathbb{B}^n) \neq K(\mathbb{B}^n), \quad n \geq 2, \tag{4.1.6}$$

unde $\mathbb{B}^n$ este bila unitate Euclidiană în $\mathbb{C}^n$. Prin urmare, nu este trivial să definim subclasele E_k^* și E_k de aplicaţii biolomorfe în $\mathbb{C}^n$, chiar și cel mai simplu caz $k = 1$ fiind important pe bila unitate Euclidiană $\mathbb{B}^n$, având în vedere diferența furnizată de relația (4.1.6).

În continuare prezentăm un exemplu de aplicaţie care aparține clasei $E_1^*(B_p^n)$ pentru cazul general al bilei unitate B_p^n în $\mathbb{C}^n$ în raport cu p-norma (reamintim că B_p^n este definit în §3.1.1). Acest exemplu a fost considerat și în [45], [83], [71], [122]. Prezentăm aici acest exemplu pentru a arăta că familia $E_1^*(B^n)$ este nevidă.

Exemplul 4.1.6. Fie $f : B_p^2 \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definit de $f(z) = \big(z_1 + az_2^2, z_2\big)$, pentru $z = (z_1, z_2) \in B_p^2$. Atunci $f \in E_1^*(B_p^2)$ dacă și numai dacă $|a| \leq \frac{1}{2}\big(\frac{p^2-1}{4}\big)^{1/p}\big(\frac{p+1}{p-1}\big)$, pentru orice $p > 1$.

4.2 Proprietăţi generale ale subclaselor $E_k^*(\mathbb{B}^n)$ şi $E_k(\mathbb{B}^n)$

A doua secțiune este dedicată studiului unor proprietăți generale ale subclaselor definite mai sus. Vom evidenția legătura dintre subclasele E_1^* (respectiv E_1) pe $\mathbb{U}$ și clasa de aplicaţii convexe $K(B_p^n)$ în $\mathbb{C}^n$. Este important de menționat că rezultatele din cazul $n = 1$ nu mai sunt adevărate în $\mathbb{C}^n$, pentru $n \geq 2$. Următoarle rezultate au fost obținute în [53].

Teorema 4.2.1. *Referitor la clasa E_1^*, următoarele afirmații sunt adevărate:*

1. *Dacă $n = 1$, atunci $E_1^*(\mathbb{U}) = K(\mathbb{U}) = K$.*
2. *Dacă $n \geq 2$, atunci $E_1^*(\mathbb{B}^n) \cap K(\mathbb{B}^n) \neq \emptyset$ și $E_1^*(\mathbb{B}^n) \neq K(\mathbb{B}^n)$.*

Observaţia 4.2.2. Conform Teoremei 4.2.1, este clar că dacă $n = 1$, atunci $K(\mathbb{U}) = E_1^*(\mathbb{U})$. Totuși, dacă $n \geq 2$, atunci $K(B_1^n) \subsetneq E_1^*(B_1^n)$ și $K(\mathbb{U}^n) \subsetneq E_1^*(\mathbb{U}^n)$ având în vedere Observația 4.1.4 și $K(\mathbb{B}^n) \neq E_1^*(\mathbb{B}^n)$ conform Teoremei 4.2.1.

Teorema 4.2.3. *Referitor la clasa E_1, următoarele afirmații sunt adevărate:*

1. *Dacă $n = 1$, atunci $E_1(\mathbb{U}) \subsetneq K(1/2)$.*
2. *Dacă $n \geq 2$, atunci $E_1(\mathbb{B}^n) \cap K(\mathbb{B}^n; 1/2) \neq \emptyset$ și $K(\mathbb{B}^n; 1/2) \setminus E_1(\mathbb{B}^n) \neq \emptyset$, adică există aplicaţii convexe de ordin $1/2$ pe $\mathbb{B}^n$ care nu aparțin clasei $E_1(\mathbb{B}^n)$.*

Definiţia 4.2.4. Fie $k \in \mathbb{N}$ și $\alpha \in [0, 1)$. Conform Definiției 4.1.2, notăm

$$E_k^*(B^n; \alpha) = \Big\{f \in S(B^n) \ : \ \mathcal{G}_{n,k}f \in S_\alpha^*(B^n)\Big\}, \tag{4.2.1}$$

unde $S_\alpha^*(B^n)$ este familia aplicaţiilor stelate de ordin α în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea Definiţia 3.4.3; a se vedea și [13], [81]) și B^n este bila unitate în $\mathbb{C}^n$ în raport cu o normă arbitrară $\|\cdot\|_*$. În mod clar, pentru $\alpha = 0$, avem că $S_0^*(B^n) = S^*(B^n)$ și $E_k^*(B^n; 0) = E_k^*(B^n)$.

Folosind definiția anterioară, putem obține o formă a teoremei Marx-Strohhäcker pentru clasele E_k și E_k^* (a se vedea Teorema 3.4.8 în $\mathbb{C}^n$ cu $n \geq 2$; a se vedea și [13], [45]). Acest rezultat a fost obţinut de autor în [53].

Teorema 4.2.5. *Fie $k \in \mathbb{N}$. Atunci $E_k(B^n) \subseteq E_k^*(B^n; 1/2) \subseteq E_k^*(B^n)$, unde B^n este bila unitate a lui $\mathbb{C}^n$ în raport cu o normă arbitrară $\|\cdot\|_*$.*

Încheiem această secțiune cu câteva consecințe ale rezultatului anterior legate de incluziunile dintre subclasele studiate în aceast capitol. În particular, obținem rezultatele cunoscute din $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [13], [29], [45], [83], [102]).

Corolarul 4.2.6. *Să considerăm $k \in \mathbb{N}$.*

1. *Dacă $n = 1$, atunci $E_k(\mathbb{U}) \subseteq E_k^*(\mathbb{U}; 1/2) \subseteq E_k^*(\mathbb{U})$. În particular, pentru $k \in \{0, 1\}$ obținem*

$$K = E_0(\mathbb{U}) \subseteq E_0^*(\mathbb{U}; 1/2) = S^*(1/2) \subseteq S^* = E_0^*(\mathbb{U}) \tag{4.2.2}$$

şi

$$E_1(\mathbb{U}) \subseteq E_1^*(\mathbb{U}; 1/2) = K(1/2) \subseteq K = E_1^*(\mathbb{U}). \tag{4.2.3}$$

2. Pe de altă parte, dacă $n \geq 2$ și $k \in \{0,1\}$, atunci

$$E_0(B_p^n) = K(B_p^n) \subseteq E_0^*(B_p^n;1/2) = S^*(B_p^n;1/2) \subseteq S^*(B_p^n) \tag{4.2.4}$$

şi

$$E_1(B_p^n) \subseteq E_1^*(B_p^n;1/2), \quad 1 \leq p < \infty, \tag{4.2.5}$$

unde B_p^n este bila unitate în $\mathbb{C}^n$ în raport cu p-norma și

$$E_1(\mathbb{U}^n) \subseteq E_1^*(\mathbb{U}^n;1/2), \tag{4.2.6}$$

unde $\mathbb{U}^n$ este polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$.

4.3 Proprietăţi geometrice păstrate prin operatorul de extensie Graham-Kohr

În a treia parte a acestei secțiuni vom considera două cazuri particulare ale operatorului de extensie Graham-Kohr $\Psi_{n,\alpha}$ pentru $\alpha \in \{0,1\}$. Deși operatorul $\Psi_{n,\alpha}$ nu păstrează convexitate (a se vedea de exemplu [44]), putem obţine o proprietate importantă legată de subclasa E_1^* (a se vedea Definiția 2.2.1) în cazurile particulare menționate mai sus (subclasa E_1^* este păstrată de operatorul de extensie Graham-Kohr $\Psi_{n,\alpha}$). Rezultatele originale prezentate în această secțiune au fost obţinute de Grigoriciuc în [53].

Propoziţia 4.3.1. *Dacă f aparține familiei K, atunci $\Psi_{n,0}(f) \in E_1^*(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare,*

$$\Psi_{n,0}(K) = \Psi_{n,0}\big(E_1^*(\mathbb{U})\big) \subseteq E_1^*(\mathbb{B}^n) \neq K(\mathbb{B}^n). \tag{4.3.1}$$

Următorul rezultat a fost observat şi demonstrat de Grigoriciuc în [53].

Lema 4.3.2. *Fie $\alpha = 0$ și $k \in \{0,1,2\}$. Atunci $\Psi_{n,0}(\mathcal{G}_{n,k}f) = \mathcal{G}_{n,k}(\Psi_{n,0}(f))$.*

Corolarul 4.3.3. *Fie $\alpha = 0$ și $k \in \{0,1,2\}$. Atunci $\Psi_{n,0}\big(E_k^*(\mathbb{U})\big) \subseteq E_k^*(\mathbb{B}^n)$.*

Al doilea rezultat important din această secțiune este legat de operatorul $\Psi_{n,1}$ în cazul particular $\alpha = 1$.

Teorema 4.3.4. *Dacă $f \in K$, atunci $\Psi_{n,1} \in E_1^*(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Psi_{n,1}(K) = \Psi_{n,1}\big(E_1^*(\mathbb{U})\big) \subseteq E_1^*(\mathbb{B}^n) \neq K(\mathbb{B}^n)$.*

Similar cu Lema 4.3.2, obţinem următoarele rezultate:

Lema 4.3.5. *Fie $\alpha = 1$ și $k \in \{0,1,2\}$. Atunci $\Psi_{n,1}(\mathcal{G}_{n,k}f) = \mathcal{G}_{n,k}(\Psi_{n,1}(f))$.*

Corolarul 4.3.6. *Fie $\alpha = 1$ și $k \in \{0,1,2\}$. Atunci $\Psi_{n,1}\big(E_k^*(\mathbb{U})\big) \subseteq E_k^*(\mathbb{B}^n)$.*

Graham și Kohr au demonstrat în [44] că operatorul de extensie $\Psi_{n,\alpha}$ nu păstrează convexitatea pentru orice $n \geq 2$ şi $\alpha \in [0,1]$. Cu toate acestea, am demonstrat aici că $\Psi_{n,\alpha}\big(E_k^*(\mathbb{U})\big) \subseteq E_k^*(\mathbb{B}^n)$, pentru $\alpha \in \{0,1\}$ și $k \in \{1,2\}$. În particular, obţinem că $\Psi_{n,\alpha}(K) \subseteq E_1^*(\mathbb{B}^n)$, pentru $\alpha \in \{0,1\}$. Cum acestea sunt doar câteva cazuri particulare ale operatorului de extensie, respectiv ale clasei E_k^*, este natural să considerăm următoarea întrebare:

Întrebarea 4.3.7. *Fie $\alpha \in [0,1]$ și $k \in \mathbb{N}$*

- *Este adevărat că $\Psi_{n,\alpha}\big(E_k^*(\mathbb{U})\big) \subseteq E_k^*(\mathbb{B}^n)$?*
- *În particular, este adevărat că $\Psi_{n,\alpha}(K) \subseteq E_1^*(\mathbb{B}^n)$, pentru orice $\alpha \in [0,1]$?*

Pe de altă parte, Roper și Suffridge au arătat în [121] că operatorul lor de extensie păstrează convexitatea de la $\mathbb{U}$ la bilă unitate a unui spațiu Hilbert complex. Graham, Hamada, Kohr și Kohr au demonstrat în [36] că operatorul de extensie $\Psi_{\alpha,\beta}$ păstrează noțiunea de stelaritate de la discul unitate $\mathbb{U}$ la bila unitate B_H a unui spațiu Hilbert complex H. Având în vedere aceste rezultate, putem considera următoarea întrebare:

Întrebarea 4.3.8. *Fie $\alpha \in [0,1]$ și $k \in \mathbb{N}$. Fie și B_H bilă unitate a unui spațiu Hilbert complex H.*

- *Este adevărat că $\Psi_{n,\alpha}\big(E_k^*(\mathbb{U})\big) \subseteq E_k^*(B_H)$?*
- *În particular, este adevărat că $\Psi_{n,\alpha}(K) \subseteq E_1^*(B_H)$?*

Part III

Contribuţii în teoria aplicaţiilor biolomorfe în spaţii Banach complexe

Capitolul 5

Aplicaţii biolomorfe şi teoria Loewner în spaţii Banach complexe

Capitolul 5 este dedicat unui scurt studiu asupra aplicațiilor biolomorfe și operatorilor de extensie în spații Banach complexe. Includem aici extensii ale unor rezultate prezentate în capitolele anterioare. Printre cei care au adus contribuții importante în teoria geometrică a funcţiilor în caz infinit dimensional se numără J. Mujica, T. Poreda, T.J. Suffridge (a se vedea de exemplu [106], [117], [118], [127]) și mai recent F. Bracci, I. Graham, H. Hamada, G. Kohr și M. Kohr (a se vedea de exemplu [3], [34], [38], [39], [40], [41]). Începem discuția noastră de la lucrarea foarte recentă publicată de Graham, Hamada, Kohr și Kohr referitoare la aplicații biolomorfe, lanțuri Loewner și operatori de extensie în spații Banach complexe (a se vedea [39], [40], [41]). Aceste lucrări constituie baza studiului nostru, conținând unele dintre ideile fundamentale în obținerea tuturor celorlalte rezultate din această parte.

Prima secţiune conține rezultate de bază și proprietăți ale funcțiilor olomorfe și ale aplicațiilor olomorfe în caz infinit dimensional. Prezentăm principalele noțiuni și rezultate care vor fi utilizate în acest capitol (de ex. teorema maximului modulului, lema lui Schwarz). Pentru mai multe detalii, se poate consulta [45], [78], [79], [106], [127], [128]. În plus, reamintim aici generalizarea familiei Carathéodory și rezultatele de deformare obținute de Gurganus (a se vedea [57]), respectiv de Bracci, Elin, Shoikhet (a se vedea [6]) și Graham, Hamada, Honda, Kohr și Shon (a se vedea [31]) în caz infinit dimensional.

Următoarea secţiune este dedicată unor familii particulare de aplicații biolomorfe în spații Banach complexe. Prezentăm aici clasele de aplicații stelate, convexe, respectiv ε-stelate împreună cu caracterizarea lor analitică. Contribuții importante au fost aduse de Suffridge (a se vedea [127]), Gurganus (a se vedea [57]), Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [68], [74]), Gong și Liu (a se vedea [25], [26]).

În §5.3 ne concentrăm atenţia asupra rezultatelor generale legate de teoria lanțurilor Loewner în spații Banach complexe care vor fi utilizate în rezultatele noastre principale. Studiul lanțurilor de subordonare în spații infinit dimensionale a fost început de Poreda (a se vedea de exemplu [117], [118]). Aceste idei au fost continuate și îmbunătățite de Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea de exemplu [34], [38], [39], [40], [41]), Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [70], [72]), Arosio, Bracci, Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [2], [3]) care au obținut rezultate importante legate de lanțurile Loewner și ecuţia diferenţială Loewner în spații infinit dimensionale. A doua parte a acestei secțiuni conține rezultate legate de noțiunea de reprezentare parametrică în dimensiuni infinite. Această noțiune se datorează lui Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea [38]) și reprezintă generalizarea reprezentării parametrice prezentată în Definiția 3.5.11). De asemenea, discutăm în această secțiune despre g-reprezentare parametrică, g-lanțuri Loewner și familii particulare de aplicații biolomorfe asociate acestor noţiuni. Pentru detalii, a se vedea [32], [34], [45], [60], [61], [62], [74].

Așa cum am menționat deja, principalele surse bibliografice sunt [3], [34], [38], [39], [40], [41], [106], [117], [118], [127], [131], [132], [133], [134].

5.1 Noţiuni generale privind olomorfia în spaţii Banach complexe

Această secțiune este dedicată studiului proprietăților de bază ale funcțiilor olomorfe și ale aplicațiilor olomorfe în caz infinit dimensional. Prezentăm principalele noțiuni și rezultate care vor fi utilizate în acest capitol (de ex. teorema maximului modulului, lema lui Schwarz). Pentru mai multe detalii, se poate consulta [45], [78], [79], [106], [127], [128].

5.1.1 Aplicaţii olomorfe în spaţii Banach complexe

Fie X un spațiu Banach complex în raport cu norma $\|\cdot\|$. Notăm cu

$$\mathbb{B}_X(x_0, r) = \{x \in X \,:\, \|x - x_0\| < r\}$$

bila deschisă de centru $x_0 \in X$ și raza $r > 0$. În particular, notăm simplu $\mathbb{B}_X = \mathbb{B}_X(0,1)$ *bila unitate deschisă* a spaţiului X.

Notăm cu $L(X, Y)$ mulțimea operatorilor liniari continui din X într-un alt spațiu Banach complex Y cu norma standard

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\|_Y \,:\, \|x\|_X = 1\},$$

pentru orice $A \in L(X, Y)$. Când este evidentă norma spaţiului pe care lucrăm, vom omite indicii inferiori ai normei. În particular, notăm $L(X, X)$ cu $L(X)$ și operatorul de identitate din $L(X)$ cu I_X (a se vedea de exemplu [45], [79], [106], [127], [128]).

Definiţia 5.1.1. Fie $\Omega \subseteq X$ un domeniu. Aplicaţia $f : \Omega \to Y$ se numește *olomorfă* pe Ω dacă pentru fiecare $x \in \Omega$ există o aplicaţie $Df(x) \in L(X, Y)$ astfel încât

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Notăm cu $\mathcal{H}(\Omega, Y)$ mulţimea aplicaţiilor olomorfe pe Ω cu valori în Y. Dacă $Y = X$, atunci notăm familia $\mathcal{H}(\Omega, Y)$ cu $\mathcal{H}(\Omega)$.

Observaţia 5.1.2. Fie X un spațiu Banach complex și $\Omega \subseteq X$ un domeniu astfel încât $0 \in \Omega$. Spunem că $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ este *normată* dacă $f(0) = 0$ și $Df(0) = I_X$, unde $Df(x)$ este diferenţiala Fréchet a lui f în x. Notăm mulţimea aplicaţiilor olomorfe normate pe Ω cu $\mathcal{H}_0(\Omega)$.

Următorul rezultat este o extensie a lemei lui Schwarz (a se vedea Lema 1.1.4 pentru $n = 1$; a se vedea Lema 3.1.3 pentru $n \geq 2$) în caz infinit dimensional (a se vedea de exemplu [78]).

Lema 5.1.3. *Fie $M > 0$ și $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_X)$ astfel încât $f(0) = 0$ și $\|f(x)\| < M$, pentru orice $x \in \mathbb{B}_X$. Atunci $\|f(x)\| \leq M\|x\|$, pentru orice $x \in \mathbb{B}_X$. În plus, dacă $\exists x_0 \in \mathbb{B}_X \setminus \{0\}$ cu $\|f(x_0)\| = M\|x_0\|$, atunci $\|f(ax_0)\| = M\|ax_0\|$, pentru orice $a \in \mathbb{C}$ cu $|a| \leq \frac{1}{\|x_0\|}$.*

5.1.2 Generalizări ale familiei Carathéodory

În această subsecțiune prezentăm generalizarea familiei Carathéodory în spații Banach compexe (a se vedea de exemplu [45], [57], [74], [106], [127] , [128]).

Fie X un spațiu Banach complex. Pentru orice $x \in X \setminus \{0\}$ notăm cu

$$T(x) = \{l_x \in L(X, \mathbb{C}) \,:\, l_x(x) = \|x\|_X,\, \|l_x\| = 1\}.$$

Având în vedere teorema lui Hahn-Banach, știm că $T(x) \neq \emptyset$. De exemplu, dacă $X = \mathbb{C}^n$ este înzestrat cu o p-normă $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$ (reamintim că în §3.1.1 p-norma este definită prin $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, pentru orice $x \in \mathbb{C}^n$; a se vedea [45], [106]) și $l_x \in L(X, \mathbb{C})$ este definit prin $l_x(y) = \frac{1}{\|x\|_p^{p-1}} \sum_{j \geq 1, x_j \neq 0} |x_j|^p \frac{y_j}{x_j}$, pentru orice $x, y \in X$ cu $x \neq 0$, atunci $l_x \in T(x)$ (pentru detalii, a se vedea [45], [106]). Este binecunoscut faptul că această mulțime joacă un rol important în studiul aplicaţiilor biolomorfe în spații Banach complexe.

Fie $\mathbb{B}_X$ bilă unitate deschisă a lui X. Atunci

$$\mathcal{M}(\mathbb{B}_X) = \Big\{ h \in \mathcal{H}_0(\mathbb{B}_X) \,:\, \mathfrak{Rel}_x\big(h(x)\big) > 0,\, x \in \mathbb{B}_X \setminus \{0\},\, l_x \in T(x) \Big\} \tag{5.1.1}$$

este familia Carathéodory în $\mathcal{H}(\mathbb{B}_X)$. Dacă $X = \mathbb{C}$, atunci se observă ușor că $f \in \mathcal{M}(\mathbb{U})$ dacă și numai dacă $\frac{f(x)}{x} \in \mathcal{P}$, unde $\mathcal{P}$ este familia Carathéodory pe $\mathbb{U}$ definită în Capitolul 1.

Unul dintre rezultatele care poate fi extins de la cazul n-dimensional la spații Banach complexe este *teorema de deformare* pentru clasa Carathéodory (a se vedea Teorema 3.2.2). Această extensie a fost obținută de Gurganus (a se vedea [57]).

Propoziţia 5.1.4. *Fie X un spațiu Banach complex și fie $h \in \mathcal{M}(\mathbb{B}_X)$. Atunci*

$$\|x\|\frac{1-\|x\|}{1+\|x\|} \le \mathfrak{Rel}_x\big(h(x)\big) \le \|x\|\frac{1+\|x\|}{1-\|x\|}, \tag{5.1.2}$$

pentru orice $x \in \mathbb{B}_X \setminus \{0\}$ și $l_x \in T(x)$.

Pentru detalii si alte rezultate importante legate de familia Carathéodory in caz infinit dimensional, se pot consulta [32], [36], [38], [45], [118], [128].

5.2 Familii de aplicaţii biolomorfe în spaţii Banach complexe

Fie X, Y două spații Banach complexe și fie $\Omega \subseteq X$ un domeniu. Spunem că $f \in \mathcal{H}(\Omega, Y)$ este

- *local biolomorfă* pe Ω dacă $\forall x \in \Omega$, $\exists r_1, r_2 > 0$ astfel încât f este o aplicaţie bijectivă de la $\mathbb{B}_X(x, r_1)$ în $\mathbb{B}_Y(f(x), r_2)$ a cărei inversă este olomorfă pe $\mathbb{B}_Y(f(x), r_2)$;
- *biolomorfă* pe Ω dacă $f(\Omega) \subseteq Y$ este un domeniu și $\exists f^{-1} \in \mathcal{H}(f(\Omega))$.

Ca și în cazul finit dimensional, notăm cu

- $\mathcal{LS}(\mathbb{B}_X)$ familia aplicaţiilor local biolomorfe normate pe $\mathbb{B}_X$ în X;
- $S(\mathbb{B}_X)$ familia aplicaţiilor biolomorfe normate pe $\mathbb{B}_X$ în X.

În particular, când $X = \mathbb{C}$, avem că $\mathbb{B}_X = \mathbb{U}$ și atunci $\mathcal{LS}(\mathbb{U}) = \mathcal{LS}$, respectiv $S(\mathbb{U}) = S$ ca în Capitolul 1. Pentru detalii, se pot consulta [45], [106], [127], [128].

Observaţia 5.2.1. Este important de menționat aici că $f \in \mathcal{LS}(\mathbb{B}_X)$ dacă și numai dacă diferenţiala Frechét $Df(x)$ are o inversă mărginită pentru fiecare $x \in \mathbb{B}_X$. Dacă $X = \mathbb{C}^n$, condiția anterioară se reduce la proprietatea că $J_f(z) \neq 0$, pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$ (în particular, pentru $n = 1$, obținem $f'(\zeta) \neq 0$, pentru orice $\zeta \in \mathbb{U}$).

Observaţia 5.2.2. O altă observaţie importantă este că, în cazul infinit dimensional, noțiunile de univalență și biolomorfie nu sunt echivalente, adică există aplicaţii univalente care nu sunt biolomorfe (a se vedea de exemplu [107], [119], [128]). Acest rezultat este în contrast cu cazul finit dimensional (a se vedea Definiția 3.3.1). Pentru mai multe detalii și exemple, se poate consulta și [128].

5.2.1 Aplicaţii stelate

În cele ce urmează, fie X, Y două spații Banach complexe și fie $\Omega \subseteq X$ un domeniu.

Definiţia 5.2.3. Fie $f : \Omega \to Y$ o aplicaţie şi fie $x_0 \in \Omega$. Atunci f este *stelată în raport cu x_0* pe Ω dacă f este biolomorfă pe Ω și $f(\Omega)$ este un domeniu stelat în raport cu $f(x_0)$.

Notăm cu $S^*(\mathbb{B}_X)$ familia aplicaţiilor stelate (față de zero) şi normate pe bila unitate $\mathbb{B}_X$ în X. Caracterizarea analitică a acestei familii a fost obţinută de Suffridge (a se vedea [127]). O formă simplificată a acestui rezultat a fost demonstrată de Gurganus (a se vedea [57]), iar forma finală a caracterizării se datorează lui Hamada și Kohr (a se vedea [68]).

Teorema 5.2.4. *Fie $f : \mathbb{B}_X \to Y$ o aplicaţie local biolomorfă astfel încât $f(0) = 0$. Atunci $f \in S^*(\mathbb{B}_X)$ dacă și numai dacă există $h \in \mathcal{M}(\mathbb{B}_X)$ astfel încât $f(x) = Df(x)h(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{B}_X$.*

Pentru mai multe detalii și exemple de aplicaţii stelate în caz infinit dimensional, se pot consulta lucrările [45], [75], [127], [128]. De remarcat că noțiunile de spiralitate de tip $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$, respectiv aproape stelaritate de ordin $\alpha \in [0, 1)$ pot fi extinse şi în cazul spațiilor Banach complexe (a se vedea de exemplu [45], [74], [127], [128], [133]).

5.2.2 Aplicaţi convexe

Fie X, Y două spații Banach complexe și fie $\Omega \subseteq X$ un domeniu.

Definiţia 5.2.5. Fie $f \in \mathcal{H}(\Omega, Y)$ o aplicaţie. Atunci f este *convexă pe* Ω dacă f este biolomorfă pe Ω și $f(\Omega)$ este un domeniu convex în Y.

Notăm cu $K(\mathbb{B}_X)$ familia aplicaţiilor convexe normate pe bila unitate $\mathbb{B}_X$ în X. În continuare, prezentăm o condiţie necesară pentru convexitatea pe $\mathbb{B}_X$ obținută de Suffridge, respectiv de Roper și Suffridge (a se vedea [122], [127]).

Teorema 5.2.6. *Dacă $f : \mathbb{B}_X \to Y$ este convexă, atunci*

$$D^2 f(x)(x, x) + Df(x)x = Df(x)h(x), \tag{5.2.1}$$

pentru orice $x \in \mathbb{B}_X$, unde $h \in \mathcal{M}(\mathbb{B}_X)$.

Alte rezultate importante legate de aplicaţii convexe și teoreme de caracterizare în caz infinit dimensional pot fi găsite în [45], [127], [128].

5.2.3 Aplicaţii ε-stelate

O noțiune importantă care leagă clasele prezentate mai sus este ε-stelaritatea introdusă de Gong și Liu (a se vedea [25]). Prezentăm aici definiția împreună cu caracterizarea analitică a ε-stelarităţii (a se vedea [25]).

Definiţia 5.2.7. Fie $0 \le \varepsilon \le 1$ și fie $f : \mathbb{B}_X \to Y$ o aplicaţie biolomorfă astfel încât $f(0) = 0$. Atunci f este *ε-stelată pe* $\mathbb{B}_X$ dacă $f(\mathbb{B}_X)$ este un domeniu stelat în raport cu fiecare punct din $\varepsilon f(\mathbb{B}_X)$, adică

$$(1 - t)f(x) + t\varepsilon f(y) \in f(\mathbb{B}_X), \quad t \in [0, 1], \quad x, y \in \mathbb{B}_X.$$

Observaţia 5.2.8. Este ușor de observat că pentru $\varepsilon = 0$ obținem familia aplicaţiilor stelate pe $\mathbb{B}_X$ și pentru $\varepsilon = 1$ obținem familia aplicaţiilor convexe pe $\mathbb{B}_X$.

5.3 Teoria lanţurilor Loewner în spaţii Banach complexe

În această secțiune prezentăm câteva rezultate generale legate de teoria lanțurilor Loewner în context infinit dimensional. După cum va fi menționat în cele ce urmează, studiul lanțurilor de subordonare în spații infinit dimensionale a fost început de Poreda (a se vedea [117], [118]). Aceste idei au fost continuate și îmbunătățite de Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea de exemplu [34], [38], [39], [40]), Hamada Kohr (a se vedea [70], [72]), Arosio, Bracci, Hamada și Kohr (a se vedea [2], [3]) care au obținut rezultate importante privind lanțurile Loewner și ecuaţia diferenţială Loewner în spații Banach complexe. A doua parte a acestei secțiuni conține rezultate legate de ideea de reprezentare parametrică în caz infinit dimensional. Această noțiune se datorează lui Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea [38]) și reprezintă generalizarea reprezentării parametrice prezentate în Definiția 3.5.11. De asemenea, discutăm în această parte despre conceptul de g-reprezentare parametrică, g-lanț Loewner și familii de aplicaţii biolomorfe asociate acestor noţiuni. Pentru detalii, se pot consulta lucrările [32], [34], [45], [60], [61], [62].

5.3.1 Lanţuri Loewner şi aplicaţii biolomorfe

Începem această secțiune cu câteva noțiuni introductive și rezultate legate de teoria lanțurilor Loewner în caz infinit dimensional. Poreda a fost primul care a studiat lanțurile de subordonare și ecuaţia diferenţială Loewner pe bila unitate a unui spaţiu complex Banach (a se vedea de exemplu [117], [118]). Mai târziu, au fost obținute diverse rezultate importante de către Arosio, Bracci, Hamada și Kohr (a se vedea de exemplu [2], [3]), Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea de exemplu [34], [38], [39], [70]). Este important de menționat că rezultate foarte recente au fost obținute de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [40], [41], [72].

În cele ce urmează, fie X un spațiu Banach complex în raport cu norma $\|\cdot\|$ și fie $\mathbb{B}_X$ bila deschisă unitate a lui X.

Definiţia 5.3.1. Fie $f, g, \phi \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_X)$. Atunci

1. ϕ este o *aplicaţie Schwarz* dacă $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$, pentru orice $x \in \mathbb{B}_X$;

2. f *este subordonat lui* g și scriem $f \prec g$ dacă există o aplicaţie Schwarz ϕ astfel încât $f(x) = g(\phi(x))$, pentru orice $x \in \mathbb{B}_X$.

Definiţia 5.3.2. O aplicaţie $f : \mathbb{B}_X \times [0, \infty) \to X$ este numită

- *lanț de subordonare univalent* dacă $f(\cdot, t)$ este univalentă pe $\mathbb{B}_X$, $f(0, t) = 0$ pentru $t \geq 0$ și $f(\cdot, s) \prec f(\cdot, t)$ pentru orice $0 \leq s \leq t < \infty$;

- în plus, dacă $f(\cdot, t)$ este biolomorfă pe $\mathbb{B}_X$ și $Df(0, t) = e^t I_X$ pentru orice $t \geq 0$, atunci f se numește *lanț Loewner*.

Reamintim că condiția anterioară de subordonare corespunde existenței unei unice aplicaţii Schwarz biolomorfe $v = v(\cdot, s, t)$ astfel încât

$$f(x, s) = f(v(x, s, t), t), \quad x \in \mathbb{B}_X, \quad 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Aplicaţia $v = v(\cdot, s, t)$ se numește *aplicaţia (funcţia) de tranziție* asociată lui $f(x, t)$. Aplicaţia v satisface proprietatea semigrupurilor (a se vedea de exemplu [34])

$$v(x, s, t) = v\big(v(x, s, u), u, t\big), \quad x \in \mathbb{B}_X, \quad 0 \leq s \leq u \leq t < \infty.$$

Definiţia 5.3.3. O aplicaţie $h = h(x, t) : \mathbb{B}_X \times [0, \infty) \to X$ este un *câmp vectorial generator* (sau *câmp vectorial Herglotz*) dacă:

a) $h(\cdot, t)$ aparține clasei $\mathcal{M}(\mathbb{B}_X)$, pentru orice $t \geq 0$;

b) $h(x, \cdot)$ aparține clasei de funcții măsurabile pe $[0, \infty)$, pentru orice $x \in \mathbb{B}_X$.

Conform definițiilor anterioare, avem următorul rezultat de existență și unicitate obținut în [69] (a se vedea și [31], [109]). Acest rezultat este analogul rezultatelor prezentate în $\mathbb{C}$ (a se vedea Teorema 1.6.4), respectiv în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea Teoremele 3.5.4 și 3.5.6) .

Lema 5.3.4. *Fie X un spațiu Banach complex reflexiv și fie $h = h(x, t) : \mathbb{B}_X \times [0, \infty) \to X$ un câmp vectorial Herglotz. Atunci, pentru fiecare $s \geq 0$ și $x \in \mathbb{B}_X$, problema Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = -h(v, t), \quad a.e. \quad t \geq s \\ v(x, s, s) = x \end{cases} \tag{5.3.1}$$

are o soluție unică $v = v(x, s, t)$ astfel încât

- *$v(\cdot, s, t)$ aparține familiei de aplicaţii Schwarz univalente;*

- *$v(x, s, \cdot)$ aparține clasei de funcții Lipschitz uniform continue pe $[s, \infty)$ față de $x \in \overline{\mathbb{B}}_X(0, \rho)$, unde $\rho \in (0, 1)$;*

- $Dv(0,s,t) = e^{s-t}I_X$, *pentru* $0 \leq s \leq t$.

În plus, pentru orice $\rho \in (0,1)$ *și* $s \geq 0$, *limita* $\lim_{t\to\infty} e^t v(x,s,t) = f(x,s)$ *există uniform în* $\overline{\mathbb{B}}_X(0,\rho)$. *Atunci* $f(x,t)$ *este un lanț Loewner și pentru fiecare* $\rho \in (0,1)$, *există* $M_\rho \leq \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$ *astfel încât*

$$\|e^{-t}f(x,t)\| \leq M_\rho, \quad \|x\| \leq \rho, \quad t \geq 0. \tag{5.3.2}$$

Având în vedere rezultatele obținute de Poreda (a se vedea [118]), avem că dacă $h(x,t)$ este continuă pe $\mathbb{B}_X \times [0,\infty)$, atunci concluzia lemei anterioare este adevărată în cazul spațiilor Banach complexe, nu neapărat reflexive (a se vedea de exemplu [34]). Alte rezultate importante legate de teoria lanțurilor Loewner în spații Banach complexe pot fi găsite în lucrările recente ale lui Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea [34], [39], [40], [41], [72]).

5.3.2 Reprezentare parametrică şi g-reprezentare parametrică

În continuare, prezentăm noțiunea de reprezentare parametrică în caz infinit dimensional. Această noțiune se datorează lui Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea [38]) și reprezintă generalizarea ideii prezentate în Definiția 3.5.11. De asemenea, discutăm în această parte despre g-reprezentare parametrică și g-lanțuri Loewner. Pentru detalii, se pot consulta lucrările [34], [45], [61], [74].

Reprezentare parametrică

Fie X un spațiu Banach complex reflexiv. Reamintim că notăm cu $\mathcal{H}_0(\mathbb{B}_X)$ mulţimea aplicaţiilor olomorfe normate pe $\mathbb{B}_X$.

Definiţia 5.3.5. O aplicaţie $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{B}_X)$ are *reprezentare parametrică* dacă există un câmp vectorial Herglotz $h(x,t) : \mathbb{B}_X \times [0,\infty) \to X$ astfel încât $f(x) = \lim_{t\to\infty} e^t v(x,t)$ uniform pe $\overline{\mathbb{B}}_X(0,\rho)$, pentru orice $\rho \in (0,1)$, unde $v(x,t)$ este unica soluție Lipschitz continuă a problemei (5.3.1) pe $[0,\infty)$ pentru $s = 0$. Notăm cu $S^0(\mathbb{B}_X)$ familia aplicaţiilor care admit reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}_X$.

g-reprezentare parametrică

Înainte de a prezenta definiția g-reprezentării parametrice, considerăm următoarea ipoteză ce va juca un rol cheie în acest capitol (a se vedea de exemplu [34], [45]):

Ipoteza 5.3.6. Fie $g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ o funcție univalentă olomorfă cu $g(0) = 1$ și $\mathfrak{Re}\, g(\zeta) > 0$, pentru orice $\zeta \in \mathbb{U}$.

Un pas important este extinderea clasei $\mathcal{M}_g$ în caz infinit dimensional (a se vedea Definiția 3.5.16 pentru $X = \mathbb{C}^n$). Pentru detalii, se pot consulta lucrările [34], [45], [61], [74].

Definiţia 5.3.7. Fie $g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ o funcţie ce satisface Ipoteza 5.3.6 și fie $h \in \mathcal{H}_0(\mathbb{B}_X)$. Spunem că $h \in \mathcal{M}_g(\mathbb{B}_X)$ dacă $\frac{1}{\|x\|}l_x\big(h(x)\big) \in g(\mathbb{U})$, pentru orice $x \in \mathbb{B}_X \setminus \{0\}$ și $l_x \in T(x)$.

Având în vedere rezultatele anterioare, putem prezenta noțiunea de g-reprezentare parametrică, respectiv g-lanț Loewner în dimensiuni infinite (a se vedea de exemplu [32], [34], [40]).

Definiţia 5.3.8. Fie X un spațiu Banach complex reflex și fie $f \in S^0(\mathbb{B}_X)$. Spunem că f are *g-reprezentare parametrică* dacă $h(\cdot,t) \in \mathcal{M}_g(\mathbb{B}_X)$ și notăm cu $S_g^0(\mathbb{B}_X)$ familia aplicaţiilor care admit g-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}_X$.

Definiţia 5.3.9. Fie $g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ o funcţie care satisface Ipoteza 5.3.6 și fie $f = f(x,t) : \mathbb{B}_X \times [0,\infty) \to X$ o aplicaţie. Spunem că $f(x,t)$ este un *g-lanț Loewner* dacă

a) $f(x,t)$ este un lanț Loewner astfel încât familia $\big\{e^{-t}f(\cdot,t)\big\}_{t\geq 0}$ este uniform mărginită pe $\rho\mathbb{B}_X$, pentru $\rho \in (0,1)$;

b) $\exists A \subseteq [0,\infty)$ o mulţime de măsură nulă astfel încât $\exists \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ pentru $t \in [0,\infty) \setminus A$ și pentru orice $x \in \mathbb{B}_X$ și $\exists h = h(x,t) : \mathbb{B}_X \times [0,\infty) \to X$ un câmp vectorial Herglotz cu proprietatea că $h(\cdot,t)$ aparține clasei $\mathcal{M}_g(\mathbb{B}_X)$ pentru orice $t \in [0,\infty) \setminus A$ și

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = Df(x,t)h(x,t), \quad t \in [0,\infty) \setminus A, \quad \forall x \in \mathbb{B}_X. \tag{5.3.3}$$

Observaţia 5.3.10. Este important de subliniat aici că în [39] (a se vedea și [40]) autorii menționează că, în general, dacă X este un spațiu Banach complex și dacă $f(x,t)$ satisface prima condiție din Definiția 5.3.9, atunci nu se știe exact dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ pentru orice $x \in \mathbb{B}_X$ și $t \in [0,\infty) \setminus A$, unde $A \subset [0,\infty)$ este o mulţime de măsură nulă. De asemenea, dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ în aceeași ipoteză, nu se știe dacă $\exists h(x,t)$ un câmp vectorial generator astfel încât ecuația diferențială Loewner (5.3.3) este adevărată. Cu toate acestea, în cazul spațiilor Banach complexe reflexive separabile, obținem răspunsuri pozitive la aceste întrebări (a se vedea de exemplu [39], [40]).

5.3.3 Aplicaţi biolomorfe asociate cu g-lanţuri Loewner

Ultima parte a acestei secţiuni este dedicată unor familii particulare de aplicaţii biolomorfe asociate g-lanţurilor Loewner. Aceste noţiuni au fost studiate atât în dimensiuni finite, cât şi în caz infinit dimensional de mai mulţi autori (a se vedea [32], [45], [60], [61], [62], [74]). În cele ce urmează, fie $g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ o funcție care satisface Ipoteza 5.3.6.

Definiţia 5.3.11. Fie $d \in (0,1]$ și $\mu \in [0,1)$. O aplicaţie $f \in \mathcal{LS}(\mathbb{B}_X)$ este

a) *g-stelată* pe $\mathbb{B}_X$ dacă $h \in \mathcal{M}_g(\mathbb{B}_X)$, unde

$$h(x) = \left[Df(x)\right]^{-1} f(x), \quad x \in \mathbb{B}_X. \tag{5.3.4}$$

Notăm cu $S_g^*(\mathbb{B}_X)$ familia aplicaţiilor g-stelate normate pe $\mathbb{B}_X$.

b) *tare stelată de ordin d* dacă $h \in \mathcal{M}_g(\mathbb{B}_X)$, unde h este definită de (5.3.4) şi

$$g(\zeta) = \left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^d, \quad \zeta \in \mathbb{U}. \tag{5.3.5}$$

Ramura funcției putere este aleasă astfel încât $\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^d\Big|_{\zeta=0} = 1$.

c) *aproape stelată de ordin μ* dacă $h \in \mathcal{M}_g(\mathbb{B}_X)$, unde h este definită de (5.3.4) și

$$g(\zeta) = (1-\mu)\frac{1-\zeta}{1+\zeta} + \mu, \quad \zeta \in \mathbb{U}. \tag{5.3.6}$$

d) *stelată parabolic de ordin μ* dacă $h \in \mathcal{M}_g(\mathbb{B}_X)$, unde h este definită de (5.3.4), $g = 1/q_\mu$ și

$$q_\mu(\zeta) = 1 + \frac{4(1-\mu)}{\pi^2}\left(\log\frac{1+\sqrt{\zeta}}{1-\sqrt{\zeta}}\right)^2, \quad \zeta \in \mathbb{U}$$

Alegem ramura funcției logaritm astfel încât $\log 1 = 0$.

Teorema 5.3.12. *Fie $f \in \mathcal{LS}(\mathbb{B}_X)$ și fie $g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ o funcție univalentă care îndeplinește condițiile din Ipoteza 5.3.6. Atunci $f \in S_g^*(\mathbb{B}_X)$ dacă și numai dacă $f(x,t) = e^t f(x)$ este un g-lanț Loewner pe $\mathbb{B}_X \times [0,\infty)$.*

Pentru detalii și rezultate legate de alte subclase de aplicaţii biolomorfe asociate g-lanțurilor Loewner, se pot consulta lucrările [39], [40], [74]. Pentru cazul finit dimensional, a se vedea [32], [34], [60], [61], [62], [98].

Capitolul 6

Noi rezultate privind lanţuri Loewner şi operatori de extensie în spaţii Banach complexe

Ultimul capitol al tezei conține rezultate originale legate de lanțuri Loewner și operatori de extensie în spații Banach complexe. Ideile din acest capitol se bazează pe rezultatele obţiunute de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [39] și [40]. Parte din rezultatele originale au fost obținute de Grigoriciuc în [55].

În prima secţiune vom considera operatorul de extensie Graham-Kohr Ψ_α pe domeniul $\Omega_{p,r} = \big\{(z_1, w) \in \mathcal{Y} = \mathbb{C} \times X \,:\, |z_1|^p + \|w\|_X^r < 1\big\}$, unde X este un spațiu Banach complex, $\alpha \in [0, 1]$ și $p, r \geq 1$. Pe baza rezultatelor obținute de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [39] pentru $p = 2$ (a se vedea și [40]), vom încerca să obținem proprietăți de extensie pentru cazul general $p \in [1, \infty)$.

A doua secțiune este dedicată studiului consevării lanțurilor Loewner prin operatorul de extensie definit de Pfaltzgraff şi Suffridge. Recent, Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea de exemplu [40]) au arătat că operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge păstrează primele elemente ale lanțurilor Loewner din bila unitate deschisă $\mathbb{B}_X$ a unui JB*-triple X de dimensiune n într-un domeniu $\mathbb{D}_\alpha \subseteq \mathbb{B}_X \times \mathbb{B}_Y$, unde Y este un spațiu Banach complex (pentru rezultate complete și demonstrațiile acestora, se poate consulta [33], [35] și [40]). Inspiraţi de aceste idei, vom demonstra că operatorul de extensie de tip Pfaltzgraff-Suffridge păstrează primele elemente ale lanțurilor Loewner din bila unitate B^n a $\mathbb{C}^n$ (în raport cu diferite norme, adică norma Euclidiană, norma supremum) pe bila unitate a spaţiului $\mathcal{W} = \mathbb{C}^n \times Y$, unde Y este un spațiu Banach complex.

Capitolul se bazează pe lucrările recente [34], [38], [39], [40], [41], [131], [131], [131], [133], [134].

6.1 g-lanţuri Loewner şi operatorul de extensie Graham-Kohr

Fie X un spațiu Banach complex și fie $p, r \geq 1$. De asemenea, fie

$$\Omega_{p,r} = \big\{(z_1, w) \in \mathcal{Y} = \mathbb{C} \times X \,:\, |z_1|^p + \|w\|_X^r < 1\big\}. \tag{6.1.1}$$

unde $z_1 \in \mathbb{C}$ și $w \in X$. Atunci funcționala Minkowski pe $\Omega_{p,r}$ este o normă completă $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ pe $\mathcal{Y}$ și $\Omega_{p,r}$ este bila unitate a lui $\mathcal{Y} = \mathbb{C} \times X$ în raport cu această normă, unde

- funcționala Minkowski pe $\Omega_{p,r}$ este dată de $\rho(z) = \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}z \in \Omega_{p,r}\}$, pentru $z \in \Omega_{p,r}$;
- norma $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ pe $\mathcal{Y}$ este dată de $\|z\|_{\mathcal{Y}} = |z_1|^p + \|w\|_X^r$, pentru $z = (z_1, w) \in \mathcal{Y} = \mathbb{C} \times X$.

Fie $\alpha \geq 0$ și fie $\Psi_\alpha : \mathcal{LS} \to \mathcal{LS}(\Omega_{p,r})$ operatorul de extensie Graham-Kohr definit prin

$$\Psi_\alpha(f)(z_1, w) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^\alpha w\right), \quad z = (z_1, w) \in \Omega_{p,r}, \tag{6.1.2}$$

unde ramura funcției putere are proprietatea că $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^\alpha\big|_{z_1=0} = 1$. Reamintim că pentru $\alpha, \beta \geq 0$, notăm cu

$$\Phi_{\alpha,\beta}(f)(z_1, w) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^\alpha \left(f'(z_1)\right)^\beta w\right), \quad z = (z_1, w) \in \Omega_{p,r} \tag{6.1.3}$$

operatorul de extensie de tip Roper-Suffridge. Aici, considerăm ramurile funcțiilor putere astfel încât $\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^\alpha\big|_{z_1=0} = 1$ și $\left(f'(z_1)\right)^\beta\big|_{z_1=0} = 1$.

Recent, Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea de exemplu [39], [40]) au demonstrat că operatorul de extensie de tip Roper-Suffridge $\Phi_{\alpha,\beta}$ duce primul element al unui g-lanţ Loewner pe $\mathbb{U}$ în primul element al unui g-lanţ Loewner pe $\Omega_{2,r}$ cu $r \geq 1$, unde $\alpha \in [0,1]$ și $\beta \in [0, 1/r]$ astfel încât $\alpha + \beta \leq 1$ și g este o funcție convexă pe $\mathbb{U}$ care satisface Ipoteza 5.3.6. Ca urmare a acestui rezultat, autorii au demonstrat că $\Phi_{\alpha,\beta}$ păstrează noțiunile de g-stealaritate, tare stelaritatea de ordin $d \in (0, 1]$ și aproape stelaritatea de ordin $\mu \in [0, 1)$ (a se vedea [39], [40]).

Dacă $\beta = 0$ și $g \in \mathcal{H}_u(\mathbb{U})$ satisface Ipoteza 5.3.6 astfel încât $g(\mathbb{U})$ este stelat în raport cu 1, atunci obținem păstrarea primelor elemente ale g-lanțurilor Loewner și a noțiunii de stelaritate parabolică de ordin $\mu \in [0, 1)$ prin operatorul de extensie $\Phi_{\alpha,0} = \Psi_\alpha$ pe $\Omega_{2,r}$, pentru $\alpha \in [0, 1]$ și $r \geq 1$ (a se vedea de exemplu [39], [40]). Pentru cazul finit dimensional, se pot consulta [33], [42], [47].

6.1.1 Preliminarii

În această secțiune considerăm operatorul de extensie Graham-Kohr Ψ_α pe domeniul $\Omega_{p,r}$, cu $\alpha \geq 0$ și $p, r \geq 1$. Pe baza rezultatelor obţinute de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [39] (a se vedea și [40]) vom încerca să obținem proprietăți de extensie pentru cazul $p \in [1, \infty)$. Rezultatele originale prezentate în această secțiune au fost obținute de Grigoriciuc în [55].

Pentru aceasta, fie X un spațiu Banach complex și să fie $\Omega_{p,r}$ dat de (6.1.1) bila unitate a lui $\mathcal{Y} = \mathbb{C} \times X$, pentru $p, r \geq 1$. Pentru a demonstra principalele rezultate, vom folosi următoarea lemă (care este o generalizare a Lemei 2.15 demonstrată de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [39] în cazul $p = 2$). Foarte recent, J. Wang a demonstrat același rezultat (a se vedea [131]) pe domeniul $\Omega_{p,r}$, unde $p, r \geq 1$. Prezentăm aici demonstrația detaliată a rezultatului (în cazul general) pe baza ideilor date de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [39].

Lema 6.1.1. *Fie X un spațiu Banach complex și fie $\Omega_{p,r}$ dat de (6.1.1) bila unitate a lui $\mathcal{Y} = \mathbb{C} \times X$, unde $p, r \geq 1$. Fie $z = (z_1, w) \neq 0$. Atunci*

$$l_z\big((z_1, 0)\big) = \frac{p|z_1|^p \|z\|_{\mathcal{Y}}}{p|z_1|^p + r(\|z\|^p_{\mathcal{Y}} - |z_1|^p)} \tag{6.1.4}$$

şi

$$l_z\big((0, w)\big) = \frac{r(\|z\|^p_{\mathcal{Y}} - |z_1|^p)\|z\|_{\mathcal{Y}}}{p|z_1|^p + r(\|z\|^p_{\mathcal{Y}} - |z_1|^p)}, \tag{6.1.5}$$

pentru orice $l_z \in T(z)$.

Al doilea rezultat obţinut în această secțiune este legat de olomorfia aplicaţiei $\Psi_\alpha(f)$ pe domeniul $\Omega_{p,r}$.

Lema 6.1.2. *Fie $\alpha \in [0, 1]$ și $p, r \geq 1$. De asemenea, fie $f \in \mathcal{H}_u(\mathbb{U})$ astfel încât $f(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$ și $f(0) = 0$. Atunci*

$$F(z) = \Psi_\alpha(f)(z) = \left(f(z_1), \left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^\alpha w\right), \quad z = (z_1, w) \in \Omega_{p,r}$$

este o aplicaţie olomorfă de la $\Omega_{p,r}$ la $\Omega_{p,r}$.

Ultimul rezultat al acestei subsecțiuni este legat de principiul subordonării pe $\Omega_{p,r}$. Demonstraţia urmează ideile principale prezentate de Wang și Zhang în [134] (a se vedea Teorema 3.6) pentru $p \in [1, 2]$ și $r \geq 1$.

Propoziţia 6.1.3. *Fie $f, g \in S$ și fie $\Omega_{p,r}$ domeniul dat de (6.1.1), unde $p, r \geq 1$. Dacă $\alpha \in (0, \infty)$, atunci $f \prec g$ pe $\mathbb{U}$ dacă și numai dacă $\Psi_\alpha(f) \prec \Psi_\alpha(g)$ pe $\Omega_{p,r}$.*

6.1.2 Rezultate de extensie pe $\Omega_{p,r}$

Continuăm această secțiune cu studiul conservării primelor elemente ale g-lanţurilor Loewner prin operatorul de extensie Graham-Kohr Ψ_α dat de (6.1.2) pe domeniul $\Omega_{p,r}$, unde $p, r \geq 1$. Fie $g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ o funcție univalentă convexă care satisface Ipoteza 5.3.6. Menţionăm aici că în demonstrarea următorului rezultat vom urma argumente similare cu cele pentru Teorema 3.1 din [39]. Este de asemenea important că pentru $X = \mathbb{C}^{n-1}$, $r = 2$ și $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, se pot consulta [33, Corolarul 2.9], [42, Teorema 2.1] și [47, Teorema 2.1].

Mai mult, pentru rezultate similare legate de operatorul de extensie de tip Roper-Suffridge $\Phi_{\alpha,\beta}$, a se vedea [39] pentru $p = 2$ și $r \geq 1$, respectiv [131] pentru $p, r \geq 1$. Următoarele rezultate au fost obținute de Grigoriciuc în [55].

Teorema 6.1.4. *Fie X un spațiu Banach complex și fie $\Omega_{p,r}$ domeniul dat de (6.1.1), unde $p, r \geq 1$. Fie, de asemenea, g o funcție convexă pe $\mathbb{U}$ care satisface Ipoteza 5.3.6. Dacă $f \in S$ este primul element al g-lanțului Loewner $f(\cdot, t)$ pe $\mathbb{U}$ și $F(\cdot, t)$ este un g-lanţ Loewner pe $\Omega_{p,r}$, pentru orice $t \geq 0$, atunci $F(\cdot, 0) = \Psi_\alpha(f)$, pentru orice $\alpha \in [0, 1]$.*

În particular, din rezultatul anterior, obținem că primele elemente ale lanțurilor Loewner sunt păstrate de pe discul unitate $\mathbb{U}$ în domeniul $\Omega_{p,r}$, pentru $p, r \geq 1$, prin operatorul de extensie Graham-Kohr (pentru cazul $p = 2$ și operatorul dat de (6.1.3), a se vedea Corolarul 3.2 din [39]). De asemenea, a se vedea Teorema 2.1 în [42] și Teorema 2.1 în [47] pentru cazul $X = \mathbb{C}^{n-1}$ și $p = r = 2$.

Corolarul 6.1.5. *Fie $\Omega_{p,r}$ și g ca în Teorema 6.1.4, unde $p, r \geq 1$. Dacă $f \in S$ și $F(\cdot, t)$ este un lanț Loewner pe $\Omega_{p,r}$, pentru orice $t \geq 0$, atunci $F(\cdot, 0) = \Psi_\alpha(f)$, pentru orice $\alpha \in [0, 1]$.*

În a doua consecință a Teoremei 6.1.4 obținem că operatorul de extensie Graham-Kohr Ψ_α păstrează aplicaţiile g-steale din $\mathbb{U}$ în $\Omega_{p,r}$ pentru $p, r \geq 1$. Demonstraţia acestui rezultat se bazează pe idei similare cu cele folosite în Corolarul 3.3 din [39], unde autorii au considerat $p = 2$ și operatorul de extensie dat de (6.1.3). Pentru cazul $X = \mathbb{C}^{n-1}$, $p = r = 2$ și $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, unde $\zeta \in \mathbb{U}$, se poate consulta [43, Teorema 2.2]; a se vedea și [11, Corolarul 2.3] în cazul $X = \mathbb{C}^{n-1}$, $p = r = 2$ și $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$ pentru $\zeta \in \mathbb{U}$ și $\gamma \in (0, 1)$.

Corolarul 6.1.6. *Fie $\Omega_{p,r}$ și g ca în Teorema 6.1.4, unde $p, r \geq 1$. Dacă $f \in S_g^*(\mathbb{U})$, atunci $F = \Psi_\alpha(f) \in S_g^*(\Omega_{p,r})$, pentru toate $\alpha \in [0, 1]$, unde $S_g^*(\Omega_{p,r})$ este familia aplicaţiilor g-stelate pe $\Omega_{p,r}$.*

Corolarul 6.1.7. *Fie $\Omega_{p,r}$ și g ca în Teorema 6.1.4, unde $p, r \geq 1$. Dacă $f \in sS_d^*(\mathbb{U})$, pentru $d \in (0, 1]$, atunci $F = \Psi_\alpha(f) \in sS_d^*(\Omega_{p,r})$, pentru $\alpha \in [0, 1]$, unde $sS_d^*(\Omega_{p,r})$ este familia aplicaţiilor tare stelate de ordin d pe $\Omega_{p,r}$.*

Un alt rezultat important este legat de conservarea primelor elemente ale g-lanţurilor Loewner de către operatorul de extensie Graham-Kohr, unde g este o funcție stelată (univalentă) în raport cu 1 şi care satisface Ipoteza 5.3.6. Acest rezultat este o extensie a [39, Teorema 3.4] și demonstrația sa urmează argumente similare cu cele folosite de autori în [39] pentru $p = 2$.

Teorema 6.1.8. *Fie X un spațiu Banach complex și fie $\Omega_{p,r}$ domeniul dat de (6.1.1), unde $p, r \geq 1$. Fie, de asemenea, g o funcție care satisface Ipoteza 5.3.6 astfel încât $g(\mathbb{U})$ este stelat în raport cu 1. Dacă $f \in S$ este primul element al g-lanțului Loewner $f(\cdot, t)$ pe $\mathbb{U}$ și $F(\cdot, t)$ este un g-lanţ Loewner pe $\Omega_{p,r}$, pentru orice $t \geq 0$, atunci $F(\cdot, 0) = \Psi_\alpha(f)$, pentru orice $\alpha \in [0, 1]$.*

Din teorema anterioară obținem o consecință (a se vedea [39, Corolarul 3.5] pentru cazul $p = 2$) legată de stelaritatea parabolică de ordin $\mu \in [0, 1)$. Demonstraţia acestui rezultat urmează ideile prezentate de autori în [60, Teorema 5.1] și [62, Teorema 5.3].

Corolarul 6.1.9. *Fie $\Omega_{p,r}$ și g ca în Teorema 6.1.8, unde $p, r \geq 1$. Dacă $f \in \mathcal{P}S^*(\mathbb{U})$, pentru $\mu \in [0, 1)$, atunci $F = \Psi_\alpha(f) \in \mathcal{P}S^*(\Omega_{p,r})$, pentru orice $\alpha \in [0, 1]$, unde $\mathcal{P}S^*(\Omega_{p,r})$ este familia aplicaţiilor stelate parabolic de ordin μ pe $\Omega_{p,r}$.*

A treia teoremă importantă este dedicată conservării stelarităţii de ordin complex λ, unde $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $\mathfrak{Re}\lambda \leq 0$, prin operatorul de extensie Graham-Kohr. Putem arăta că Ψ_α păstrează aproape stelaritatea de ordin complex λ de la $\mathbb{U}$ la $\Omega_{p,r}$ pentru orice $p, r \geq 1$ și $\alpha \in [0, 1]$. În demonstrarea acestei teoreme urmăm ideile principale din demonstrația [134, Teorema 3.8] dată de Wang și Zhang pentru $p \in [1, 2]$ și pentru operatorul de extensie $\Phi_{\alpha,\beta}$ dat de relația (6.1.3). În rezultatul următor considerăm $\alpha \in [0, 1]$, $\beta = 0$ și $p, r \in [1, \infty)$.

Observaţia 6.1.10. Reamintim că aproape stelaritatea de ordin complex $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $\mathfrak{Re}\lambda \leq 0$ poate fi caracterizată cu lanțuri Loewner (a se vedea de exemplu [134, Lema 3.5]) astfel: $f \in \mathcal{LS}(\mathbb{B}_X)$ este o aplicaţie aproape stelată de ordin complex λ pe $\mathbb{B}_X$ dacă și numai dacă $F(z, t)$ este un lanț Loewner, unde

$$F(z, t) = e^{(1-\lambda)t} f(e^{\lambda t} z), \quad z \in \mathbb{B}_X, t \in [0, \infty). \tag{6.1.6}$$

Teorema 6.1.11. *Fie X un spațiu Banach complex și fie $\Omega_{p,r}$ domeniul dat de (6.1.1), unde $p, r \geq 1$. Fie de asemenea $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $\mathfrak{Re}\lambda \leq 0$. Dacă $f \in \mathcal{A}sc^*_\lambda(\mathbb{U})$, atunci $F = \Psi_\alpha(f) \in \mathcal{A}sc^*_\lambda(\Omega_{p,r})$ pentru orice $\alpha \in [0, 1]$, unde notăm cu $\mathcal{A}sc^*_\lambda(\Omega_{p,r})$ familia aplicaţiilor aproape stelate de ordin complex λ pe $\Omega_{p,r}$.*

Observaţia 6.1.12. Dacă $p \in [1, 2]$, atunci Teorema 6.1.11 se reduce la [134, Teorema 3.8]. În plus, dacă $X = \mathbb{C}^{n-1}$ și $p = r = 2$, atunci $\Omega_{p,r}$ este bila unitate Euclidiană $\mathbb{B}^n$. Pentru $\lambda = 0$ obținem că $F(z, t) = e^t \Psi_\alpha(f)(z)$ este un lanț Loewner și, prin urmare, $\Psi_\alpha(f)$ este o aplicaţie stelată pe $\mathbb{B}^n$. Acest rezultat binecunoscut a fost demonstrat de Graham și Kohr în [44] (a se vedea și [45] sau [133]).

În final, prezentăm două consecințe ale Teoremei 6.1.11 legate de păstrarea aproape stelarităţii de ordin $\mu \in [0, 1)$, respectiv spiralităţii de ordin $\delta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ prin operatorul de extensie Graham-Kohr Ψ_α de la discul unitate $\mathbb{U}$ la domeniul $\Omega_{p,r}$, pentru $p, r \geq 1$ și $\alpha \in [0, 1]$.

Observaţia 6.1.13. Conform [134, Definiția 2.1] dacă $\lambda = \frac{\mu}{\mu-1}$ pentru $\mu \in [0, 1)$, atunci aproape stelaritatea de ordin complex λ se reduce la aproape stelaritate de ordin $\mu \in [0, 1)$. Pe de altă parte, dacă $\lambda = i \tan \delta$, pentru $\delta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, atunci aproape stelaritatea de ording complex λ se reduce la spiralitate de ordin δ.

Pe baza Teoremei 6.1.11 și a Observației 6.1.13 obținem imediat următoarele rezultate:

Corolarul 6.1.14. *Fie $\Omega_{p,r}$ cu $p, r \geq 1$ ca în Teorema 6.1.11. Dacă $f \in \mathcal{AS}^*_\mu(\mathbb{U})$, unde $\mu \in [0, 1)$, atunci $F = \Psi_\alpha(f) \in \mathcal{AS}^*_\mu(\Omega_{p,r})$, pentru orice $\alpha \in [0, 1]$.*

Corolarul 6.1.15. *Fie $\Omega_{p,r}$ cu $p, r \geq 1$ ca în Teorema 6.1.11. Dacă $f \in \hat{S}_\delta(\mathbb{U})$, unde $\delta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, atunci $F = \Psi_\alpha(f) \in \hat{S}_\delta(\Omega_{p,r})$, pentru orice $\alpha \in [0, 1]$.*

6.2 Lanţuri Loewner şi operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge

Secțiunea 6.2 este dedicată studiului conservării lanțurilor Loewner prin operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge de la cazul uni-dimensional la spații Banach complexe infinit dimensionale. Recent, Graham, Hamada, Kohr și Kohr (a se vedea de exemplu [40]) au arătat că operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge păstrează primele elemente ale lanțurilor Loewner din bila unitate deschisă $\mathbb{B}_X$ a unui JB*-triple X de dimensiune n într-un domeniu $\mathbb{D}_\alpha \subseteq \mathbb{B}_X \times \mathbb{B}_Y$, unde Y este un spațiu Banach complex (pentru rezultate complete și demonstrațiile acestora, se poate consulta [33], [35] și [40]). Alte rezultate importante demonstrate în acest cadru general sunt legate de păstrarea stelarităţii şi a spiralită ţii de ordin $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ de la $\mathbb{B}_X$ în $\mathbb{D}_\alpha$ prin operatorul de extensie de tip Pfaltzgraff-Suffridge. Rezultate similare au fost obținute pentru cazul cu finit dimensional în [21], [33], [43], [49].

6.2.1 Preliminarii

În această secțiune vom considera două cazuri particulare ale operatorului studiat de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [40] pe domenii particulare în spații Banach complexe (asemănătoare cu cele din [55], [131] și [134]). Rezultatele prezentate în această secţiune sunt originale.

Ideea principală este de a demonstra că operatorul de extensie de tip Pfaltzgraff-Suffridge păstrează primele elemente ale lanțurilor Loewner din bila unitate B^n din $\mathbb{C}^n$ (în raport cu diferite norme) în bila unitate a spaţiului $\mathcal{W} = \mathbb{C}^n \times Y$, unde Y este un spațiu Banach complex.

Este important de menționat aici că pe parcursul acestei secțiuni vom folosi diferite norme pe spațiul $\mathbb{C}^n$ (de exemplu, norma Euclidiană $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$, norma supremum $\|x\|_\infty = \max\{|x_j| : j = \overline{1,n}\}$, p-norma $\|x\|_p = \big(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\big)^{1/p}$, pentru orice $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$, $p \geq 1$; a se vedea şi §3.1.1) care sunt echivalente deoarece spațiul $\mathbb{C}^n$ este finit dimensional.

Observaţia 6.2.1. Fie $p, r \geq 1$ și fie Y un spațiu Banach complex cu norma $\|\cdot\|_Y$. Dacă spațiul $\mathbb{C}^n$ este echipat cu norma Euclidiană $\|\cdot\|$, atunci notăm cu

$$\Omega_{n,p,r} = \big\{(x, y) \in \mathcal{W} = \mathbb{C}^n \times Y : \|x\|^p + \|y\|_Y^r < 1\big\} \tag{6.2.1}$$

bila unitate în $\mathbb{C}^n \times Y$, pentru orice $p, r \geq 1$, respectiv operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge definit prin

$$\Psi_{n,r}(f)(z) = \Big(f(x), \big[J_f(x)\big]^{\frac{2}{r(n+1)}} y\Big), \quad z = (x, y) \in \Omega_{n,p,r}, \tag{6.2.2}$$

unde ramura funcției putere are proprietatea $\big[J_f(x)\big]^{\frac{2}{r(n+1)}}\big|_{x=0} = 1$. În particular, dacă $p = 2$, atunci notăm $\Omega_{n,2,r}$ cu $\Omega_{n,r}$, unde

$$\Omega_{n,r} = \big\{(x, y) \in \mathcal{W} = \mathbb{C}^n \times Y : \|x\|^2 + \|y\|_Y^r < 1\big\}, \quad r \geq 1.$$

Observaţia 6.2.2. Fie $p, r \geq 1$, fie Y un spațiu Banach complex cu norma $\|\cdot\|_Y$ și fie $\mathbb{B}_Y$ bilă unitate a lui Y. Dacă spațiul $\mathbb{C}^n$ este înzestrat cu norma supremum $\|\cdot\|_\infty$, atunci notăm cu

$$\Delta_{n,p,r} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{U}^n \times \mathbb{B}_Y : \|y\|_Y < \prod_{j=1}^n (1 - |x_j|^p)^{\frac{1}{rn}}\Big\} \tag{6.2.3}$$

bila unitate în $\mathcal{W} = \mathbb{C}^n \times Y$, pentru orice $p, r \geq 1$, respectiv operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge definit prin

$$\Gamma_{n,r}(f)(z) = \Big(f(x), \big[J_f(x)\big]^{\frac{1}{rn}} y\Big), \quad z = (x, y) \in \Delta_{n,p,r}, \tag{6.2.4}$$

unde ramura funcției putere este aleasă astfel încât $\big[J_f(x)\big]^{\frac{1}{rn}}\big|_{x=0} = 1$. În particular, dacă $p = 2$, atunci notăm $\Delta_{n,2,r}$ pur și simplu cu $\Delta_{n,r}$, unde

$$\Delta_{n,r} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{U}^n \times \mathbb{B}_Y : \|y\|_Y < \prod_{j=1}^n (1 - |x_j|^2)^{\frac{1}{rn}}\Big\}, \quad r \geq 1.$$

Menţionăm aici că definiția domeniului $\Delta_{n,p,r}$ dată în relaţia (6.2.3) se bazează pe ideile prezentate de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [40] (a se vedea de asemenea [63]). Pornind de la un spaţiu n-dimensional JB*-triple X și un spațiu Banach complex Y, aceştia au definit mulțimea $\mathbb{D}_r = \{(x, y) \in \mathbb{B}_X \times Y : \|y\|_Y < [\det B(x, x)]^{1/(2rc(\mathbb{B}_X))}\}$, unde $r \geq 1$, $\mathbb{B}_X$ este bila unitate a lui X, $B(x, y) \in L(X)$ este operatorul Bergman, $x, y \in X$ și $c(\mathbb{B}_X)$ este o constantă care depinde de metrica Bergman pe X (pentru detalii, a se vedea [40], [63]). Dacă X este spațiul $\mathbb{C}^n$ cu norma supremum $\|\cdot\|_\infty$, atunci $\mathbb{B}_X = \mathbb{U}^n$, $c(\mathbb{U}^n) = n$ și $\det B(x, x) = \prod_{j=1}^n (1 - |x_j|^2)^2$, pentru orice $x \in \mathbb{U}^n$ (a se vedea [63]). Prin urmare, simple calcule ne conduc la domeniul $\mathbb{D}_r = \Delta_{n,r}$. În cele din urmă, considerând $p \in [1, 2]$, obținem domeniul mai general $\Delta_{n,p,r}$ definit în (6.2.3).

Observaţia 6.2.3. Fie $p \in [1, 2]$ și $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definită prin $\phi(t) = \frac{1-t^2}{1-t^p}$, pentru $t \in [0, 1]$. Atunci ϕ este crescătoare pe $[0, 1]$, pentru orice $p \in [1, 2]$. Acest rezultat (considerat mai întâi de Wang în [131, Lema 3.2] și [134]) va fi folosit în demonstrarea principalelor rezultate din această secțiune.

Pentru operatorii de extensie prezentați mai sus putem demonstra următoarele două leme legate de olomorfia lui $\Psi_{n,r}(f)$ (respectiv $\Gamma_{n,r}(f)$) pe $\Omega_{n,p,r}$ (respectiv pe $\Delta_{n,r,p}$), unde $p \in [1,2]$ și $r \geq 1$.

Lema 6.2.4. *Fie $p \in [1,2]$ și $r \geq 1$. Fie, de asemenea, $f \in \mathcal{H}_u(\mathbb{B}^n)$ astfel încât $f(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^n$ și $f(0) = 0$. Atunci*

$$F(z) = \Psi_{n,r}(f)(z) = \left(f(x), [J_f(x)]^{\frac{2}{r(n+1)}} y\right), \quad z = (x,y) \in \Omega_{n,p,r}$$

este o aplicaţie olomorfă de la $\Omega_{n,p,r}$ la $\Omega_{n,p,r}$.

Lema 6.2.5. *Fie $p \in [1,2]$ și $r \geq 1$. Fie, de asemenea, $f \in \mathcal{H}_u(\mathbb{U}^n)$ astfel încât $f(\mathbb{U}^n) \subseteq \mathbb{U}^n$ și $f(0) = 0$. Atunci*

$$\Gamma_{n,r}(f)(z) = \left(f(x), [J_f(x)]^{\frac{1}{rn}} y\right), \quad z = (x,y) \in \Delta_{n,p,r}$$

este o aplicaţie olomorfă de la $\Delta_{n,p,r}$ la $\Delta_{n,p,r}$.

6.2.2 Rezultate de extensie pe $\Omega_{n,p,r}$

În continuare prezentăm principalul rezultat al acestei subsecțiuni privind conservarea primelor elemente ale unui lanț Loewner din bila unitate euclidiană $\mathbb{B}^n$ în domeniul $\Omega_{n,p,r}$ prin operatorul de extensie de tip Pfaltzgraff-Suffridge $\Psi_{n,r}$, unde $p \in [1,2]$ și $r \geq 1$. Acest rezultat este strâns legat de [35, Teorema 3.1] și [49, Teorema 2.1], unde autorii au tratat aceeași problemă pe domenii diferite. Rezultatele prezentate aici sunt originale și au fost obţinute de autor.

Teorema 6.2.6. *Fie $r \geq \frac{2n}{n+1}$, $p \in [1,2]$ și fie $f \in S$ primul element al lanțului Loewner $f(\cdot,t)$ pe $\mathbb{B}^n$. Fie $F(\cdot,t)$ un lanț Loewner pe $\Omega_{n,p,r}$, pentru orice $t \geq 0$. Atunci $F(\cdot,0) = \Psi_{n,r}(f)$.*

Din teorema anterioară obținem următoarele consecințe legate de stelaritatea de ordin complex λ, aproape stelaritatea de ording α, spiralitatea de ordin γ şi stelaritatea pe $\Omega_{n,p,r}$ pentru $p \in [1,2]$. Se observă că dacă $p = 2$, atunci rezultatele obţinute se reduc la cele demonstrate de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [40, Corolar 5.4], Graham, Kohr și Pfaltzgraff în [49, Corolar 2.4], respectiv de Wang și Zhang în [134, Teorema 3.12, Corolare 3.13 și 3.14].

Corolarul 6.2.7. *Fie $r \geq \frac{2n}{n+1}$, $p \in [1,2]$ și $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $\mathfrak{Re}\lambda \leq 0$. Dacă $f \in \mathcal{A}sc^*_\lambda(\mathbb{B}^n)$, atunci $F = \Psi_{n,r}(f) \in \mathcal{A}sc^*_\lambda(\Omega_{n,p,r})$, unde notăm cu $\mathcal{A}sc^*_\lambda(\Omega_{n,p,r})$ familia aplicaţiilor aproape stelate de ordin complex λ pe $\Omega_{n,p,r}$.*

Corolarul 6.2.8. *Fie $r \geq \frac{2n}{n+1}$, $p \in [1,2]$ și $\alpha \in [0,1)$. Dacă $f \in \mathcal{AS}^*_\alpha(\mathbb{B}^n)$, atunci $F = \Psi_{n,r}(f) \in \mathcal{AS}^*_\alpha(\Omega_{n,p,r})$, unde $\mathcal{AS}^*_\alpha(\Omega_{n,p,r})$ este familia aplicaţiilor aproape stelate de ordin α pe $\Omega_{n,p,r}$.*

Corolarul 6.2.9. *Fie $r \geq \frac{2n}{n+1}$, $p \in [1,2]$ și $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$. Dacă f aparține familiei $\hat{S}_\gamma(\mathbb{B}^n)$, atunci $F = \Psi_{n,r}(f) \in \hat{S}_\gamma(\Omega_{n,p,r})$, unde $\hat{S}_\gamma(\Omega_{n,p,r})$ este familia aplicaţiilor spiralate de ordin γ pe $\Omega_{n,p,r}$.*

Corolarul 6.2.10. *Fie $r \geq \frac{2n}{n+1}$, $p \in [1,2]$ și $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$. Dacă f aparține familiei $S^*(\mathbb{B}^n)$, atunci $F = \Psi_{n,r}(f) \in S^*(\Omega_{n,p,r})$.*

6.2.3 Asupra proprietăţii de ε-stelaritate

O altă proprietate importantă a operatorului $\Psi_{n,r}$ este legată de păstrarea ε-stelarităţii pe domeniul $\Omega_{n,2,r}$. Primul rezultat din această subsecțiune este o generalizare a Teoremei 2.6 demonstrată de Wang și Wang în [133]. Menţionăm că în următorul rezultat se consideră $p = 2$.

Teorema 6.2.11. *Fie $r \geq \frac{2n}{n+1}$. Dacă $f \in S(\mathbb{B}^n)$ este o aplicaţie ε-stelată pe $\mathbb{B}^n$, atunci $F = \Psi_{n,r}(f) \in S(\Omega_{n,2,r})$ este o aplicaţie ε-stelată pe $\Omega_{n,2,r}$.*

Observaţia 6.2.12. Dacă $Y = \mathbb{C}$ și $r = 2$, atunci pentru $\varepsilon = 0$, Teorema 6.2.11 se reduce la [49, Corolarul 2.4]. Pe de altă parte, dacă $\varepsilon = 1$, atunci Teorema 6.2.11 tratează cazul aplicaţiilor convexe asociate cu operatorul $\Psi_{n,r}$ propus de Pfaltzgraff și Suffridge în [111] (a se vedea și [49]).

6.2.4 Asupra proprietăţii de convexitate

Fie Y un spațiu Banach complex. Pentru $a \in (0,1]$ și $r \geq 1$, notăm

$$D_{a,r} = \{(x,y) \in \mathcal{W} = \mathbb{C}^n \times Y : \|y\|_Y^r < a^{\frac{2n}{n+1}}(1 - \|x\|^2)\}. \tag{6.2.5}$$

Atunci $D_{a,r} \subseteq \Omega_{n,p,r}$ și $D_{1,r} = \Omega_{n,2,r}$, unde $\Omega_{n,2,r}$ este un caz particular al domeniului definit prin formula (6.2.1) pentru $p = 2$. Urmând argumentele prezentate de Graham, Kohr și Pfaltzgraff în [49], putem extinde o parte din rezultatele lor, după cum urmează:

Teorema 6.2.13. *Fie $r \geq \frac{2n}{n+1}$, $f \in K(\mathbb{B}^n)$ și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+^*$ fie astfel încât $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$. De asemenea, fie $F = \Psi_{n,r}(f)$ operatorul de extensie dat de (6.2.2). Atunci $(1-\lambda)F(x,y) + \lambda F(\tilde{x},\tilde{y}) \in F(D_{\alpha_1+\alpha_2,r})$, unde $(x,y) \in D_{\alpha_1,r}$, $(\tilde{x},\tilde{y}) \in D_{\alpha_2,r}$ și $\lambda \in [0,1]$.*

Corolarul 6.2.14. *Fie $r \geq \frac{2n}{n+1}$, $f \in K(\mathbb{B}^n)$ și $F = \Psi_{n,r}(f)$. Atunci $(1-\lambda)F(x,y) + \lambda F(\tilde{x},\tilde{y}) \in F(\Omega_{n,2,r})$, unde $(x,y), (\tilde{x},\tilde{y}) \in D_{1/2,r}$ și $\lambda \in [0,1]$.*

Observaţia 6.2.15. După cum am menționat mai sus, în cazul particular $Y = \mathbb{C}$ și $r = 2$, Teorema 6.2.13 și Corolarul 6.2.14 se reduc la rezultatele obţinute de Graham, Kohr și Pfaltzgraff în [49, Teorema 2.2], respectiv în [49, Corolar 2.5].

6.2.5 Rezultate de extensie pe $\Delta_{n,p,r}$

Ultima parte a acestei secțiuni este dedicată studiului operatorului de extensie de tip Pfaltzgraff-Suffridge $\Gamma_{n,r}$ pe domeniul $\Delta_{n,p,r}$ (pentru detalii, se poate consulta [35] și [40]). Să considerăm din nou Y un spațiu Banach complex, $p \in [1,2]$ și $r \geq 1$. Reamintim că dacă $X = \mathbb{C}^n$ este înzestrat cu norma supremum $\|\cdot\|_\infty$, atunci notăm cu

$$\Delta_{n,p,r} = \left\{(x,y) \in \mathbb{U}^n \times \mathbb{B}_Y : \|y\|_Y < \prod_{j=1}^n (1 - |x_j|^p)^{\frac{1}{rn}}\right\},$$

unde $\mathbb{U}^n$ este polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$ și $\mathbb{B}_Y$ este bila unitate deschisă în spațiul complex Banach Y. Mai mult, operatorul de extensie de tip Pfaltzgraff-Suffridge $\Gamma_{n,r}$ este definit prin

$$\Gamma_{n,r}(f)(z) = \Big(f(x), \big[J_f(x)\big]^{\frac{1}{rn}} y\Big), \quad z = (x,y) \in \Delta_{n,p,r},$$

unde ramura funcției putere are proprietatea $\big[J_f(x)\big]^{\frac{1}{rn}}\big|_{x=0} = 1$.

Pe baza ideilor prezentate de Graham, Hamada și Kohr în [35] obținem un rezultat similar cu cel din Teorema 6.2.6 care descrie conservarea lanțurilor Loewner prin operatorul $\Gamma_{n,r}$ pe domeniul $\Delta_{n,p,r}$ (a se vedea [35, Corolar 3.4] pentru cazul $p = 2$ a se vedea și [33, Teorema 2.1], [35, Teorema 3.1] și [49, Teorema 2.1]).

Teorema 6.2.16. *Fie $r \geq 1$, $p \in [1,2]$ și $f \in S$ primul element al lanțului Loewner $f(\cdot,t)$ pe $\mathbb{U}^n$. Fie $G(\cdot,t)$ un lanț Loewner pe $\Delta_{n,p,r}$, pentru orice $t \geq 0$. Atunci $G(\cdot,0) = \Gamma_{n,r}(f)$.*

În final, prezentăm două rezultate care derivă din Teorema 6.2.16 ce descriu păstrarea spiralităţii, respectiv a stelarităţii prin operatorul de extensie $\Gamma_{n,r}$ pe domeniul $\Delta_{n,p,r}$ pentru $r \geq 1$ și $p \in [1,2]$. În demonstrarea acestor rezultate urmăm ideile principale din demonstrația [35, Corolarul 3.2] dată de Graham, Hamada și Kohr. Pentru cazul $p = 2$, a se vedea [35, Corolarul 3.4].

Corolarul 6.2.17. *Fie $r \geq 1$, $p \in [1,2]$ și $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$. Dacă $f \in \hat{S}_\gamma(\mathbb{U}^n)$, atunci $\Gamma_{n,r}(f) \in \hat{S}_\gamma(\Delta_{n,p,r})$.*

Corolarul 6.2.18. *Fie $r \geq 1$ și $p \in [1,2]$. Dacă $f \in S^*(\mathbb{U}^n)$, atunci $\Gamma_{n,r}(f) \in S^*(\Delta_{n,p,r})$.*

Menţionăm în final că studiul operatorului de extensie de tip Pfaltzgraff-Suffridge pe domeniul $\Omega_{n,p,r}$ ar putea fi extins şi în cazul $p, r \geq 1$ (a se vedea, de exemplu, rezultatele prezentate în [55] pentru operatorul de extensie Graham-Kohr sau în [131] pentru operatorul de extensie Roper-Sufridge). Aceste extinderi ar putea constitui probleme de interes pentru specialiştii în domeniu. Pe de altă parte, o altă problemă interesantă ar fi studierea unor rezultate similare pentru operatorul de extensie Muir (a se vedea [39], [40], [103]).

Concluzii

Pe parcursul acestei teze am prezentat mai multe rezultate legate de teoria geometrică a funcţiilor de una şi mai multe variabile complexe. În această ultimă parte dorim să reamintim și să evidențiem principalele rezultate originale pe care le-am obținut în fiecare capitol.

Prima parte a tezei a fost dedicată studiului rezultatelor clasice și familiilor de funcții univalente de o variabilă complexă. Principalele surse bibliografice utilizate pentru pregătirea acestei părți au fost [19], [29], [45], [77], [85], [87], [102], [114]. Cu toate că **Capitolul 1** este unul introductiv, acesta conține și rezultate originale obținute de autor în [50] și [51]. Mai întâi, în secțiunea §1.4 am demonstrat două teoreme generale de distorsiune pentru funcţii stelate (a se vedea Teorema 1.4.9), respectiv funcții convexe de ordin α (a se vedea Teorema 1.4.19). Aceste rezultate au fost obținute de Grigoriciuc în [51].

O altă familie importantă de funcții univalente în $\mathbb{C}$ a fost studiată în §1.5. Aici, am extins clasa $\mathcal{R}$ a funcțiilor cu partea reală a derivatei pozitivă introdusă de MacGregor în [96]. Pornind de la $\mathcal{R}$ am definit două noi subclase $\mathcal{R}_p$ și $\mathcal{R}_p(\alpha)$, studiind mai apoi proprietățile lor. Rezultatele originale au fost obținute în [50].

În **Capitolul 2** am introdus un nou operator diferenţial care a fost folosit pentru a defini două noi subclase de funcţii univalente pe discul unitate în $\mathbb{C}$. În §2.1 am obținut proprietăți generale ale operatorului $\mathcal{G}_k$ legate de liniaritate, convoluție și condiții suficiente de univalență (a se vedea Propozițiile 2.1.3 − 2.1.6).

A doua secțiune a acestui capitol a fost dedicată studiului subclaselor $E_k(\alpha)$ și $E_k^*(\alpha)$, unde $k \in \mathbb{N}$ și $\alpha \in [0, 1)$. Împreună cu proprietățile generale ale acestor subclase (teoreme de deformare și distorsiune, estimări ale coeficienților, caracterizări analitice sau cu lanțuri Loewner) am studiat și cazuri particulare (de ex. $k = 1$ și $\alpha = 0$) care au fost de interes, fiind în strânsă legătură cu clasele de funcții univalente menționate în primul capitol (a se vedea de exemplu Propozițiile 2.2.25 și 2.2.26 în §2.2.2). Toate rezultatele din acest capitol sunt originale și au fost obținute de autor în [54].

A doua parte a acestei teze începe cu **Capitolul 3** și a fost dedicată studiului aplicaţiilor univalente de mai multe variabile complexe în $\mathbb{C}^n$, unde $n \geq 2$. Această parte se bazează pe mai multe monografii importante (de exemplu, [45], [83], [107], [119], [123]) și lucrări ale acestor autori (de exemplu, [32], [37], [44], [128]). Pe lângă rezultatele clasice din teoria geometrică a funcţiilor univalente de mai multe variabile complexe, în acest capitol am abordat şi o nouă problemă: biolomorfia combinațiilor convexe de aplicaţii biolomorfe pe bila unitate Euclidiana în $\mathbb{C}^n$. Se știe că dacă $f, g \in S(\mathbb{B}^n)$, atunci $(1 - \lambda)f + \lambda g$ nu este necesar biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$, unde $\lambda \in (0, 1)$. Totuși, în §3.6 am obţinut câteva rezultate (a se vedea de exemplu Proposition 3.6.6 și Teorema 3.6.8) care rezolvă parțial această problemă (pe baza ideii propuse de Chichra și Singh în [9]). Rezultatele originale prezentate aici au fost obținute în [52].

O extensie naturală a rezultatelor de mai sus considerată în acest capitol (a se vedea §3.8) este legată de combinația convexă a doi operatori de extensie de tip Graham-Kohr (a se vedea Definiţia 3.8.3). Operatorul de extensie menționat aici a fost definit de I. Graham și G. Kohr în [44] (a se vedea și [43]). Aceştia au demonstrat, de asemenea, că operatorul păstrează noțiunile de stelaritate, spiralitate şi reprezentare parametrică (a se vedea de exemplu [44], [60], [62]). Acest tip de operator de extensie a fost folosit pentru a demonstra câteva proprietăți ale unui nou operator de extensie în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea teoremele 3.8.6 − 3.8.9) . Rezultatele prezentate în §3.8 sunt de asemenea originale și au fost obținute de autor.

În **Capitolul 4** am introdus forma n-dimensională a operatorului diferenţial $\mathcal{G}_k$ definit în capitolul 2. Folosind acest operator am generalizat subclasele E_k^*, respectiv E_k de la discul unitate $\mathbb{U}$ la bila unitate $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. În §4.2 am demonstrat câteva rezultate importante referitoare la legătura dintre subclasele E_1^*

(respectiv E_1) pe $\mathbb{U}$ și clasa aplicaţiilor convexe $K(\mathbb{B}^n)$ în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea Teoremele 4.2.1, 4.2.3 și 4.2.5). Reamintim că rezultatele din cazul $n = 1$ nu sunt adevărate în cazul mai multor variabile complexe (a se vedea de exemplu Teorema 4.2.1). Toate rezultatele obținute în această secțiune sunt originale și au fost obținute de autor în [53].

A doua parte a acestui capitol a fost dedicată studiului conservării clasei $E_1^* = K$ prin operatorul de extensie Graham-Kohr $\Psi_{n,\alpha}$ menționat mai sus. Deși operatorul $\Psi_{n,\alpha}$ nu păstrează noțiunea de convexitate (a se vedea de exemplu [44]), am reușit să demonstrăm că $\Psi_{n,\alpha}(K) \subseteq E_1^*(\mathbb{B}^n)$ pentru $\alpha \in \{0, 1\}$. Rezultatele prezentate în Propoziția 4.3.1 și Teorema 4.3.4 sunt originale și răspund parțial la întrebarea propusă în [53].

Ultima parte a tezei conține rezultate legate de aplicaţii biolomorfe și operatori de extensie în spații Banach complexe. În **Capitolul 5** am inclus o scurtă prezentare a principalelor rezultate care au fost utilizate în ultimul capitol (de exemplu, familii de aplicaţii biolomorfe, operatori de extensie și teoria Loewner în cazul infinit dimensional). Această parte se bazează în principal pe lucrările [39], [40], [41], [45], [106], [117], [127].

În **Capitolul 6** am demonstrat rezultate legate de conservarea lanțurilor Loewner prin operatorul de extensie Graham-Kohr, respectiv Pfaltzgraff-Suffridge pe domenii particulare în caz infinit dimensional. În §6.1 am obținut extensii (a se vedea de exemplu Lema 6.1.1, Teoremele 6.1.4, 6.1.8 și 6.1.11) ale rezultatelor prezentate de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [39] și [40]. Pornind de la rezultatele acestora, am demonstrat că g-lanțurile Loewner sunt păstrate prin operatorul de extensie Graham-Kohr de la discul unitate $\mathbb{U}$ la bila unitate $\Omega_{p,r}$ definită de (6.1.1) pentru $p, r \geq 1$ (pentru cazul $p = 2$, a se vedea [39], [40]).

În §6.2 am obținut rezultate legate de conservarea primelor elemente ale lanțurilor Loewner din bila unitate Euclidiană $\mathbb{B}^n$ în domeniul $\Omega_{n,p,r}$ prin operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge $\Psi_{n,r}$ pentru $p \in [1, 2]$ și $r \geq 1$ (pentru detalii, a se vedea §6.2.1). Rezultatele originale prezentate aici au fost obținute folosind argumente similare cu cele folosite de autori în [35] și [49]. În Teorema 6.2.11 am obținut conservarea ε-stelarităţii pe domeniul $\Omega_{n,2,r}$ prin operatorul de extensie de tip Pfaltzgraff-Suffridge. Acest rezultat este o generalizare a Teoremei 2.6 demonstrată de Wang și Wang în [133]. Secţiunea se încheie cu câteva rezultate legate de convexitate (a se vedea de exemplu Teorema 6.2.13), respectiv păstrarea primelor elemente ale lanțurilor Loewner din polidiscul unitate $\mathbb{U}^n$ în domeniul $\Delta_{n,p,r}$ prin operatorul de extensie de tip Pfaltzgraff-Suffridge $\Gamma_{n,r}$ pentru $p \in [1, 2]$ și $r \geq 1$ (a se vedea Teorema 6.2.16, Corolariile 6.2.17 și 6.2.18). O parte din rezultatele prezentate în acest capitol sunt originale și au fost obținute de autor în [55].

În final, menționăm că toate rezultatele originale prezentate în această teză au fost obținute folosind metode clasice și moderne din teoria geoemtrică a funcțiilor de una şi mai multe variabile complexe, cu un accent deosebit pe teoria lanțurilor Loewner și a operatorilor de extensie. Reamintim că I. Graham, H. Hamada, G. Kohr și M. Kohr au avut contribuții deosebite și extrem de importante în acest domeniu modern și dinamic cu multiple aplicații în mecanica fluidelor (de exemplu, probleme de curgere Hele-Shaw), teoria probabilității (de exemplu, probleme de evoluţie de tip Schramm-Loewner, probabilităţi necomutative) sau control optimal.

Direcţii de cercetare

În finalul acestei teze prezentăm câteva direcţii de cercetare ce ar putea fi explorate pentru a îmbunătăți sau extinde rezultatele prezentate în fiecare capitol.

- Referitor la noțiunile definite în **Capitolul 2** ar fi de interes să studiem compactitatea noilor subclase E_k și E_k^* (a se vedea Întrebarea 2.2.35), relația dintre două familii consecutive, adică $E_{k+1} \subset E_k$, pentru $k \in \mathbb{N}$ (a se vedea Întrebarea 2.2.34), raze de stelaritate, respectiv convexitate pentru aceste clase și extensii ale rezultatelor prezentate în cazul n-dimensional și în spații Banach complexe.

- În **Capitolul 3** am discutat despre combinațiile convexe de aplicaţii biolomorfe (cu coeficienți reali) în caz multi-dimensional. O extensie naturală a rezultatelor prezentate este problema combinațiilor convexe cu coeficienți complecşi.

  O problemă interesantă referitoare la combinațiile convexe a doi operatori de extensie de tip Graham-Kohr este păstrarea noțiunii de reprezentare parametrică prin operatorii $\mathcal{K}_\lambda^\beta$, respectiv $\mathcal{K}_\lambda^{\alpha,\beta}$, pentru $0 \le \alpha < \beta \le 1$ și $\lambda \in (0,1)$. Ca o consecință a acestui rezultat, putem studia păstrarea stelarităţii prin aceşti operatori.

  Mai mult, operatorii de extensie introduşi ($\mathcal{K}_\lambda^\beta$ și $\mathcal{K}_\lambda^{\alpha,\beta}$) pot fi studiaţi şi în caz infinit dimensional.

- **Capitolul 4** este dedicat studiului familiilor de aplicaţii biolomorfe care generalizează subclasele introduse în capitolul 2. De interes ar fi studiul proprietăților subclaselor $E_k(\mathbb{B}^n)$ și $E_k^*(\mathbb{B}^n)$ în $\mathbb{C}^n$ și spatii Banach complexe. Pe lângă acestea, problema păstrării clasei $K = E_1^*$ prin operatorul de extensie Graham-Kohr rămâne o problemă deschisă, după cum se poate observa în Întrebarea 4.3.7 (cazul n-dimensional) și Întrebarea 4.3.8 (cazul infinit dimensional). Cu siguranță, alți operatori de extensie importanți (de exemplu, Roper-Suffridge generalizat, Pfaltzgraff-Suffridge, Muir) pot fi luați în considerare pentru aceeași problemă.

  Având în vedere rezultatele obținute de Hamada, Iancu și Kohr în [65] și [66] (a se vedea și [59], [64]) putem considera probleme de aproximare și densitate pentru subclasele de aplicaţii biolomorfe definite în $\mathbb{C}^n$.

- Ținând cont de rezultatele obținute în §6.2 din **Capitolul 6**, ar de interes studiul rezultatelor de extensie prin operatorul Pfaltzgraff-Suffridge pe domeniul $\Omega_{n,p,r}$ pentru $r \ge 1$ și $p > 2$.

  O altă problemă legată de operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge este păstrarea g-reprezentării parametrice de la $\mathbb{B}_X$ la $\mathbb{D}_\alpha$ (a se vedea de exemplu [40]). În acest caz, $\mathbb{B}_X$ este bilă unitate a unui JB*-triple n-dimensional X, $\mathbb{B}_Y$ este bila unitate a spațiului Banach complex Y și $\mathbb{D}_\alpha \subseteq \mathbb{B}_X \times \mathbb{B}_Y$ este un domeniu astfel încât $\mathbb{B}_X \times \{0\} \subset \mathbb{D}_\alpha$ pentru $\alpha > 0$. Rezultatele obţinute pentru operatorul de extensie de tip Pfaltzgraff-Suffridge în aceast context au fost obținute de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [40] (a se vedea și [132], [134]).

- Împreună cu operatorii introduși de Roper și Suffridge, Graham și Kohr, Pfaltzgraff și Suffridge, respectiv generalizări ale acestor operatori, putem studia și operatorul de extensie Muir $\Phi_{n,Q}$. Operatorul $\Phi_{n,Q}$ a fost introdus de Muir Jr. (a se vedea [103]) ca o generalizare diferită a operatorului de extensie Roper-Suffridge. Aici, $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ este un polinom omogen de gradul 2 și

$\Phi_{n,Q} : \mathcal{LS} \to \ mathcalLS_n(\mathbb{B}^n)$ este dat de

$$\Phi_{n,Q}(f)(z) = \Big(f(z_1) + Q(\tilde{z})f'(z_1), \tilde{z}\sqrt{f'(z_1)}\Big), \quad z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n,$$

unde ramura funcţiei radical este considerată astfel încât $\sqrt{f'(z_1)}\big|_{z_1=0} = 1$. Operatorul de extensie Muir și generalizările sale au fost studiate de mai mulți autori (a se vedea de exemplu [11], [39], [76], [84], [98], [139]) în caz finit și infinit dimensional. O problemă interesantă este studierea păstrării noțiunii de g-reprezentare parametrică de către operatorul de extensie Muir generalizat (definit de Graham, Hamada, Kohr și Kohr în [39]) prin

$$\Phi_{P_k}(f)(z) = \Big(f(x) + P_k(y)f'(x), \big(f'(x)\big)^{\frac{1}{k}} y\Big), \quad z = (x, y) \in \Omega_{p,k},$$

unde $P_k : Y \to \mathbb{C}$ este un polinom omogen de grad $k \geq 2$, pe domeniul $\Omega_{p,k} = \big\{(x, y) \in \mathbb{C} \times Y : |x|^p + \|y\|_Y^k < 1\big\}$, unde $p \geq 1$, $k \geq 2$ și Y este un spațiu Banach complex. Reamintim că pentru $p = 2$ s-a demonstrat în [39] că Φ_{P_k} păstrează g-reprezentarea parametrică și funcțiile Bloch, unde g satisface Ipotezele 5.3.6.

Recent, Muir (a se vedea [104], [105]) a studiat lanțuri Loewner ce au proprietatea de L^p-continuitate local uniformă t. Acest tip de aplicaţii au fost considerate de Muir pentru a defini un nou concept de spiralitate în raport cu o aplicaţie local integrabilă pe $[0, \infty)$. În acest context, o problemă de interes ar fi construcţia unor aplicaţii de acest tip folosind şi alţi operatori de extensie (de exemplu, operatorul de extensie Graham-Kohr sau operatorul de extensie de tip Roper-Suffridge generalizat).

- Un instrument important pentru generarea operatorilor de extensie este teoria semigrupurilor studiată de Elin (a se vedea de exemplu [21]). Această nouă abordare poate fi utilizată și în cazul operatorilor de extensie enumerați mai sus.

- O altă direcţie de cercetare puternic legată de lanțurile Loewner este prezentată de Arosio, Bracci, Hamada și Kohr în [3]. Aceştia au considerat teoria Loewner în cadrul varietăților hiperbolice complete complexe, generând o echivalență între L^d-lanțurile Loewner și L^d-familiile de evoluție. Mai mult, au folosit operatorul de extensie Roper-Suffridge pentru a construi L^d-lanțuri Loewner. Un studiu similar poate fi considerat şi în cazul altor operatori de extensie (de exemplu, operatorul de extensie Graham-Kohr).

- Cea mai recentă abordare a teoriei Loewner a fost introdusă de Hamada și Kohr în [72]. Aceştia au studiat un nou concept, și anume inversul unui lanț Loewner, în cazul infinit dimensional. Lucrarea prezintă o nouă modalitate de a studia teoria lanțurilor Loewner și a operatorilor de extensie (de exemplu, operatorul de extensie Graham-Kohr).

Bibliografie - listă selectivă

[1] Alexander J.W., *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. of Math. **17** (1915), 12–22.

[2] Arosio L., *Resonances in Loewner equations*, Adv. Math. **227** (2011), 1413–1435.

[3] Arosio L., Bracci F., Hamada H., Kohr G., *An abstract approach to Loewner's chains*, J. Anal. Math. **119** (2013), 89–114.

[4] Bieberbach L., *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsb. **138** (1916), 940–955.

[5] Bracci F., Contreras M.D., Diaz-Madrigal S., *Evolution families and the Loewner equation I: the unit disk*, J. Reine Angew. Math. **672** (2012), 1–37.

[6] Bracci F., Elin M., Shoikhet D., *Growth estimates for pseudo-dissipative holomorphic maps in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **15** (2014), 191–198.

[7] Cartan H., *Sur la posibilité d'étendre aux fonctions de plusiers varibales complexes la théorie des fonctions univalentes*, Note added to P. Montel, Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes, 129–155, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[8] Chabat B., *Introduction á l'Analyse Complexe*, I-II, Ed. MIR, Moscow, 1990.

[9] Chichra P., Singh R., *Convex sum of univalent functions*, J. Austral. Math. Soc. **14** (1972), 503–507.

[10] Chirilă T., *An extension operator and Loewner chains on the Euclidean unit ball in* $\mathbb{C}^n$, Mathematica (Cluj) **54**(77) (2012), 116–125.

[11] Chirilă T., *Analytic and geometric properties associated with some extension operators*, Complex Var. Elliptic Equ. **59**(3) (2014), 427–442.

[12] Conway J.B., *Functions of One Complex Variable II*, Springer-Verlag, New-York, 1995.

[13] Curt P., *A Marx-Strohhäcker theorem in several complex variables*, Mathematica (Cluj) **39**(62) (1997), 59–70.

[14] Curt P., *Capitole Speciale de Teoria Geometrică a Funcţiilor de mai multe Variabile Complexe*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2001.

[15] Curt P., Kohr G., *Subordination chains and Loewner differential equation in several complex variables*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skl. Sect. A **57** (2003), 35–43.

[16] Cristea M., *Univalence criteria starting from the method of Loewner chains*, Complex. Anal. Oper. Theory **5**(3) (2011), 863–880.

[17] Cristea M., *The method of Loewner chains in the study of univalence of* C^2 *mappings*, Mathematica (Cluj) **55**(78) (2013), 22–38.

[18] de Branges L., *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta. Math. **154**(1-2) (1985), 137–152.

[19] Duren P.L., *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[20] Duren P.L., Graham I., Hamada H., Kohr G., *Solutions for the generalized Loewner differential equation in several complex variables*, Math. Ann. **347** (2010), 411–435.

[21] Elin M., *Extension operators via semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **377** (2011), 239–250.

[22] Feng S.X., *Some classes of holomorphic mappings in several complex variables*, University of Science and Technology of China, Doctoral Thesis, 2004.

[23] Goluzim G.M., *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, Moscow, 1952.

[24] Gong S., *Convex and Starlike Mappings in Several Complex Variables*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[25] Gong S., Liu T.S., *On the Roper-Suffridge extension operator*, J. Anal. Math. **88** (2002), 397–404.

[26] Gong S., Liu T.S., *Criterion for the family of ε starlike mappings*, J. Math. Anal. Appl. **274** (2002), 696–704.

[27] Gong S., Liu T.S., *The generalized Roper-Suffridge extension operator*, J. Math. Anal. Appl. **284** (2003), 425–434.

[28] Gong S., Wang S., Yu Q., *Biholomorphic convex mappings of ball in $\mathbb{C}^n$*, Pacif. J. Math. **161** (1993), 287–306.

[29] Goodman A.W., *Univalent Functions*, Mariner Publ. Comp., Tampa, Florida, 1984.

[30] Graham I., *Growth and covering theorems associated with the Roper-Suffridge extension operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 3215–3220.

[31] Graham I., Hamada H., Honda T., Kohr G., Shon K.H., *Growth, distortion and coefficient bounds for Carathéodory families in $\mathbb{C}^n$ and complex Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **416** (2014), 449–469.

[32] Graham I., Hamada H., Kohr G., *Parametric representation of univalent mappings in several complex variables*, Canadian J. Math. **54** (2002), 324–351.

[33] Graham I., Hamada H., Kohr G., *Extension operators and subordination chains*, J. Math. Anal. Appl. **386** (2012), 278–289.

[34] Graham I., Hamada H., Kohr G., *Extremal problems and g-Loewner chains in $\mathbb{C}^n$ and reflexive complex Banach spaces*, In: Topics in Mathematical Analysis and Applications (eds. T.M. Rassias and L. Toth), Springer **94** (2014), 387–418.

[35] Graham I., Hamada H., Kohr G., *Loewner chains, Bloch mappings and Pfaltzgraff-Suffridge extension operators on bounded symmetric domains*, Complex Var. Elliptic Equ. **65** (2020), 57–73.

[36] Graham I., Hamada H., Kohr G., Kohr M., *Parametric representation and asymptotic starlikeness in $\mathbb{C}^n$*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 3963–3973.

[37] Graham I., Hamada H., Kohr G., Kohr M., *Spirallike mappings and univalent subordination chains in $\mathbb{C}^n$*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pissa Cl. Sci. (5) **7**(4) (2008), 717–740.

[38] Graham I., Hamada H., Kohr G., Kohr M., *Univalent subordination chains in reflexive complex Banach spaces*, Contemp. Math. (AMS) **591** (2013), 83–111.

[39] Graham I., Hamada H., Kohr G., Kohr M., *g-Loewner chains, Bloch functions and extension operators in complex Banach spaces*, Anal. Math. Phys. **10**(1) (2020), Art. 5, 28 pp.

[40] Graham I., Hamada H., Kohr G., Kohr M., *g-Loewner chains, Bloch functions and extension operators into the family of locally biholomorphic mappings in infinite dimensional spaces*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **67**(2) (2022), 219–236.

[41] Graham I., Hamada H., Kohr G., Kohr M., *Loewner PDE in Infinite Dimensions*, Comput. Methods Funct. Theory (2024). `https://doi.org/10.1007/s40315-024-00536-5`

[42] Graham I., Hamada H., Kohr G., Suffridge T.J., *Extension Operators for Locally Univalent Mappings*, Michigan Math. **50** (2002), 37–55.

[43] Graham I., Kohr G., *Univalent mappings associated with the Roper-Suffridge extension operator*, J. Anal. Math. **81** (2000), 331–342.

[44] Graham I., Kohr G., *An Extension Theorem and Subclasses of Univalent Mappings in Several Complex Variables*, Complex Variables Theory Appl. **47** (2002), 59–72.

[45] Graham I., Kohr G., *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Deker Inc., New York, 2003.

[46] Graham I., Kohr G., *The Roper-Suffridge extension operator and classes of biholomorphic mappings*, Sci. China Ser. A **49** (2006), 1539–1552.

[47] Graham I., Kohr G., Kohr M., *Loewner chains and the Roper-Suffridge Extension Operator*, J. Math. Anal. Appl. **247** (2000), 448–465.

[48] Graham I., Kohr G., Kohr M., *Loewner chains and parametric representation in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl. **281** (2003), 425–438.

[49] Graham I., Kohr G., Pfaltzgarff J.A., *Parametric representation and linear functionals associated with extension operators for biholomorphic mappings*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **52** (2007), 47–68.

[50] **Grigoriciuc E.S.**, *On some classes of holomorphic functions whose derivatives have positive real part*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **66**(3) (2021), 479–490.

[51] **Grigoriciuc E.S.**, *Some general distortion results for* $K(\alpha)$ *and* $S^*(\alpha)$, Mathematica **64**(87) (2022), 222–232.

[52] **Grigoriciuc E.S.**, *On some convex combinations of biholomorphic mappings in several complex variables*, Filomat **36**(16) (2022), 5503–5519.

[53] **Grigoriciuc E.S.**, *New subclasses of univalent mappings in several complex cariables: Extension operators and applications*, Comput. Methods Funct. Theory **23**(3) (2023), 533–555.

[54] **Grigoriciuc E.S.**, *New subclasses of univalent functions on the unit disc in* $\mathbb{C}$, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **69**(4) (2024), 769–787.

[55] **Grigoriciuc E.S.**, *g-Loewner chains and the Graham-Kohr extension operator in complex Banach spaces*, Comput. Methods Funct. Theory, accepted

[56] Gronwall T., *Some remarks on conformal representation*, Ann. Math. **16** (1914-1915), 72–76.

[57] Gurganus K., Φ*-like holomorphic functions in* $\mathbb{C}^n$ *and Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **205** (1975), 389–406.

[58] Hallenbeck D.J., MacGregor T.H., *Linear Problems and Convexity Techniques In Geometric Function Theory*, Pitman, Boston, 1984.

[59] Hamada H., *Approximation properties on spirallike domains of* $\mathbb{C}^n$, Adv. Math. **268** (2015), 467–477.

[60] Hamada H., Honda T., *Sharp growth theorems and coefficient bounds for starlike mappings in several complex variables*, Chin. Ann. Math. Ser. B. **29** (2008), 353–368.

[61] Hamada H., Honda T., Kohr G., *Growth theorems and coefficient bounds for univalent holomorphic mappings which have parametric representation*, J. Math. Anal. Appl. **317** (2006), 302–319.

[62] Hamada H., Honda T., Kohr G., *Parabolic starlike mappings in several complex variables*, Manuscripta Math. **123** (2007), 301–324.

[63] Hamada H., Honda T., Kohr G., *Trace-order and a distortion theorem for linearly invariant families on the unit ball of a finite dimensional JB***-triple*, J. Math. Anal. Appl. **396** (2012), 829–843.

[64] Hamada H., Iancu M., Kohr G., Schleißinger S., *Approximation properties of univalent mappings on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$, J. Approx. Theory **226** (2018), 14–33.

[65] Hamada H., Iancu M., Kohr G., *Approximation of univalent mappings by automorphisms and quasiconformal diffeomorphisms in* $\mathbb{C}^n$, J. Approx. Theory **240** (2019), 129–144.

[66] Hamada H., Iancu M., Kohr G., *A survey on Loewner chains, approximation results, and related problems for univalent mappings on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **66** (2021), 709–723.

[67] Hamada H., Kohr G., *Subordination chains and the growth theorem of spirallike mappings*, Mathematica (Cluj) **42**(65) (2000), 153–161.

[68] Hamada H., Kohr G., Φ*-like and convex mappings in infinite dimensional spaces*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **47** (2002), 315–328.

[69] Hamada H., Kohr G., *Roper-Suffridge extension operator and the lower bound for the distortion*, J. Math. Anal. Appl. **300** (2004), 454–463.

[70] Hamada H., Kohr G., *Loewner chains and the Loewner differential equation in reflexive complex Banach spaces*, Rev. Roumanie Math. Pures Appl. **49** (2004), 247–264.

[71] Hamada H., Kohr G., *Quasiconformal extension of biholomorphic mappings in several complex variables*, J. Anal. Math. **96** (2005), 269–282.

[72] Hamada H., Kohr G., *The Loewner PDE, inverse Loewner chains and nonlinear resolvents of the Carathéodory family in infinite dimensions*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pissa Cl. Sci. (5) **24**(4) (2023), 2431–2475.

[73] Hamada H., Kohr G., Kohr M., *Parametric representation and extension operators for biholomorphic mappings on some Reinhardt domains*, Complex Var. **50** (2005), 507–519.

[74] Hamada H., Kohr G., Kohr M., *The Fekete-Szegö problem for starlike mappings and nonlinear resolvents of the Carathéodory family on the unit balls of complex Banach spaces*, Anal. Math. Phys. **11**(3) (2021), 115–137.

[75] Hamada H., Kohr G., Liczberski P., *Starlike mappings of order* α *on the unit ball in complex Banach spaces*, Glasnik Matematiki **36**(56) (2001), 39–48.

[76] Hamada H., Kohr G., Muir Jr. J.R., *Extensions of* L^d*-Loewner chains to higher dimensions*, J. Anal. Math. **120** (2013), 357–392.

[77] Hamburg P., Mocanu P.T., Negoescu N., *Analiză Matematică (Funcţii Complexe)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982 (in romanian).

[78] Harris L.A., *Schwarz's lemma in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **62** (1969), 1014–1017.

[79] Hille E., Phillips R.S., *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **31**, Providence, R.I., 1957.

[80] Kikuchi K., *Starlike and convex mappings in several complex varibales*, Pacif. J. Math. **44** (1973), 569–580.

[81] Kohr G., *Certain partial differential inequalities and applications for holomorphic mappings defined on the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Ann. Univ. Mariae Curie-Skl. Sect. A **50** (1996), 87–94.

[82] Kohr G., *Using the method of Löwner chains to introduce some subclasses of biholomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **46** (2001), 743–760.

[83] Kohr G., *Basic Topics in Holomorphic Functions of Several Complex Variables*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2003.

[84] Kohr G., *Loewner chains and a modification of the Roper-Suffridge extension operator*, Mathematica (Cluj) **48**(71) (2006), 41–48.

[85] Kohr G., Mocanu P.T., *Capitole speciale de Analiză Complexă*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2003 (in romanian).

[86] Kubicka E., Poreda T., *On the parametric representation of starlike maps of the unit ball in* $\mathbb{C}^n$ *into* $\mathbb{C}^n$, Demonstratio Math. **21** (1988), 345–355.

[87] Krantz S.G., *Handbook of Complex Variables*, Birkhäuser Verlag, Boston, 1999.

[88] Krantz S.G., *Function Theory of Several Complex Variables*, Reprint of the 1992 Edition, AMS Chelsea Publishing, Providence, 2001.

[89] Krishna D.V., RamReddy T., *Coefficient inequality for a function whose derivative has a positive real part of order* α, Math. Bohem. **140** (2015), 43–52.

[90] Krishna D.V., Venkateswarlu B., RamReddy T., *Third Hankel determinant for bounded turning functions of order alpha*, J. Nigerian Math. Soc. **34** (2015), 121–127.

[91] Liu T., *The growth theorems and covering theorems for biholomorphic mappings on classical domains*, University of Science and Technology of China, Doctoral Thesis, 1989.

[92] Liu X., *The generalized Roper-Suffridge extension operator for some biholomorphic mappings*, J. Math. Anal. Appl. **324**(1) (2006), 604–614.

[93] Liu X., Liu T., *The generalized Roper-Suffridge extension operator for locally biholomorphic mappings*, Chin. Quart. J. Math. **18** (2003), 221–229.

[94] Liu X.S., Liu T.S., *The generalized Roper-Suffridge extension operator for spirallike mappings of type* β *and order* α, Chin. Ann. Math. Ser. A **27** (2006), 789–798.

[95] Loewner K., *Untersuchungen über schlichte Abbildungen des Einheritskkreises*, Math. Ann. **89** (1923), 103–121.

[96] MacGregor T.H., *Functions whose derivative has a positive real part*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 532–537.

[97] MacGregor T.H., *The univalence of a linear combination of convex mappings*, J. London Math. Soc. **44** (1969), 210–212.

[98] Manu A., *Contributions in the theory of univalent functions of one and several complex variables*, Babeş-Bolyai University of Cluj-Napoca, Doctoral Thesis, 2022.

[99] Matsuno T., *Star-like theorems and convex-like theorems in the complex vector space*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A **5** (1955), 88–95.

[100] Merkes E.P., *On the convex sum of certain univalent functions and the identity function*, Rev. Colombiana Math. **21** (1987), 5–12.

[101] Merkes E.P., Robertson M.S., Scott W.T., *On products of starlike functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 960–964.

[102] Mocanu P.T., Bulboacă T., Sălăgean G.Ş., *Teoria geometrică a funcţiilor univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2006 (in romanian).

[103] Muir Jr. J.R., *A modification of the Roper-Suffridge extension operator*, Comput. Methods Funct. Theory **5** (2005), 237–251.

[104] Muir Jr. J.R., *Extensions of Abstract Loewner Chains and Spirallikeness*, J. Geom. Anal. **32**(7) (2022), no. 192, 46 pp.

[105] Muir Jr. J.R., *Generalized parametric representation and extension operators*, J. Math. Anal. Appl. **531** (2024), 127767.

[106] Mujica J., *Complex Analysis in Banach Spaces. Holomorphic Functions and Domains of Holomorphy in Finite and Infinite Dimensions*, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[107] Narasimhan R., *Several Complex Variables*, The University of Chicago Press, Chicago, 1971.

[108] Noshiro K., *On the theory of schlicht functions*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. **2** (1934-1935), 129–155.

[109] Pfaltzgraff J.A., *Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. **210** (1974), 55–68.

[110] Pfaltzgraff J.A., Suffridge T.J., *Close-to-starlike holomorphic functions of several complex variables*, Pacif. J. Math. **57** (1975), 271–279.

[111] Pfaltzgraff J.A., Suffridge T.J., *An extension theorem and linear invariant families generated by starlike maps*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skl. Sect. A **53** (1999), 193–207.

[112] Poincaré H., *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme*, Rend. Circ. Mat. Palermo **23** (1907), 185–220.

[113] Pommereneke C., *Über die Subordination analytischer Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **218** (1965), 159–173.

[114] Pommerenke C., *Univalent Functions*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.

[115] Poreda T., *On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc in* $\mathbb{C}^n$ *which have the parametric representation, I - the geometrical properties*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skl. Sect. A **41** (1987), 105–113.

[116] Poreda T., *On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc in* $\mathbb{C}^n$ *which have the parametric representation, II - necessary and sufficient conditions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skl. Sect. A **41** (1987), 114–121.

[117] Poreda T., *On the univalent subordination chains of holomorphic mappings in Banach spaces*, Comment. Math. Prace Mat. **28** (1989), 295–304.

[118] Poreda T., *On generalized differential equations in Banach spaces*, Dissertationes Math. **310** (1991), 1–50.

[119] Range M., *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer-Verlag, New-York, 1986.

[120] Robertson M.S., *On the theory of univalent functions*, Ann. Math. **37** (1936), 374–408.

[121] Roper K., Suffridge T.J., *Convex mappings on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$, J. Analyse Math. **65** (1995), 333–347.

[122] Roper K., Suffridge T.J., *Convexity properties of holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 1803–1833.

[123] Rudin W., *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, New-York, 1980.

[124] Sălăgean G.Ş., *Subclasses of univalent functions*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, **1013** (1983), 362–372.

[125] Špaček L., *Contribution á la theorie des functions univalentes*, Časopia Pěst. Mat. **62** (1932), 12–19.

[126] Suffridge T.J., *The principle of subordination applied to functions of several complex variables*, Pacif. J. Math. **33** (1970), 241–248.

[127] Suffridge T.J., *Starlike and convex maps in Banach spaces*, Pacif. J. Math. **46** (1973), 575–589.

[128] Suffridge T.J., *Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, New York, **599** (1976), 146–159.

[129] Thomas D.K., *On functions whose derivative has positive real part*, Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986), 68–70.

[130] Vodă M., *Solution of a Loewner chain equation in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl. **375** (2011), 58–74.

[131] Wang J., *Extension operators and support points associated with g-Loewner chains on complex Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **527**(1) (2023), 127411.

[132] Wang J., Liu T., Zhang Y., *Geometric and Analytic Properties Associated With Extension Operators*, J. Geom. Anal. **34** (2024), no. 156, 40 pp.

[133] Wang J., Wang J., *Generalized Roper-Suffridge operator for* ϵ *starlike and boundary starlike mappings*, Acta Math. Sci. Ser. B **40**(6) (2020), 1753–1764.

[134] Wang J., Zhang X., *The subordination principle and its application to the generalized Roper-Suffridge extension operator*, Acta Math. Sci. Ser. B **42** (2022), 611–622.

[135] Warschawksi S.E., *On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), 310–340.

[136] Wolff J., *L'intégrale d'une fonction holomorphe et à partie réelle positive dans un demiplan est univalente*, C.R. Acad. Sci. Paris **198** (1934), 1209-1210.

[137] Xu Q.H., Liu T.S., *Löwner chains and a subclass of biholomorphic mappings*, J. Math. Appl. **334** (2007), 1096–1105.

[138] Zhang X., Feng S., Li Y., *Loewner Chain Associated with the Modified Roper-Suffridge Extension Operator*, Comput. Methods Funct. Theory. **16**(2) (2016), 265–281.

[139] Zhang X., Tang Y., *g-Loewner chain associated with Muir-type extension operator*, Complex Var. Elliptic Equ. **69**(4) (2024), 641–654.