

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI, CLUJ-NAPOCA  
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ  
ȘCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ



## **METODE DE APROXIMARE A FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABLE**

**Teză de doctorat - Rezumat**

Coordonator științific:

Conf. dr. habil. Teodora CĂȚINAȘ

Student doctorand:

Andra Teodora MALINA

CLUJ-NAPOCA, 2025

# Cuprins

|                                                                                                         |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introducere</b>                                                                                      | <b>6</b>  |
| <b>1 Preliminarii</b>                                                                                   | <b>10</b> |
| 1.1 Notății și noțiuni fundamentale . . . . .                                                           | 10        |
| 1.2 Funcții radiale . . . . .                                                                           | 11        |
| 1.3 Operatori Shepard univariați . . . . .                                                              | 13        |
| 1.3.1 Operatori Shepard-Lagrange univariați . . . . .                                                   | 13        |
| 1.3.2 Operatori Shepard-Taylor univariați . . . . .                                                     | 14        |
| 1.3.3 Operatori Shepard-Hermite univariați . . . . .                                                    | 14        |
| 1.3.4 Operatori Shepard-Birkhoff univariați . . . . .                                                   | 14        |
| 1.3.5 Operatori Shepard-Abel-Goncharov univariați . . . . .                                             | 15        |
| 1.3.6 Operatori Shepard-Bernoulli univariați . . . . .                                                  | 15        |
| 1.3.7 Operatori Shepard modificați de tip univariat . . . . .                                           | 16        |
| 1.4 Operatori Shepard bivariați . . . . .                                                               | 16        |
| 1.4.1 Operatori Shepard-Lagrange bivariați . . . . .                                                    | 17        |
| 1.4.2 Operatori Shepard-Taylor bivariați . . . . .                                                      | 18        |
| 1.4.3 Operatori Shepard-Hermite bivariați . . . . .                                                     | 18        |
| 1.4.4 Operatori Shepard-Birkhoff bivariați . . . . .                                                    | 19        |
| 1.4.5 Operatori Shepard bivariați de tipul Hermite-Birkhoff complet . . . . .                           | 20        |
| 1.4.6 Operatori Shepard-Lidstone bivariați . . . . .                                                    | 21        |
| 1.4.7 Operatori Shepard-Bernoulli bivariați . . . . .                                                   | 23        |
| 1.5 Interpolare sferică cu ajutorul operatorului Shepard . . . . .                                      | 24        |
| 1.5.1 Funcții radiale sferice . . . . .                                                                 | 25        |
| 1.5.2 Operatori Shepard combinați cu funcții radiale sferice . . . . .                                  | 27        |
| 1.5.3 Operatori Shepard sferici de tipul Hermite-Birkhoff . . . . .                                     | 29        |
| <b>2 Operatori Shepard univariați obținuți cu ajutorul polinoamelor de tipul celor mai mici pătrate</b> | <b>30</b> |
| 2.1 Construcția și proprietățile polinoamelor univariate de tipul celor mai mici pătrate                | 30        |
| 2.2 Operatori Shepard univariați combinați cu polinoame de tipul celor mai mici pătrate                 | 31        |

|          |                                                                                                                                   |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3</b> | <b>Operatori Shepard bivariați obținuți cu ajutorul funcțiilor radiale</b>                                                        | <b>33</b> |
| 3.1      | Operatorul Shepard combinat cu funcția radială de tipul <i>thin-plate spline</i> . . . .                                          | 33        |
| 3.2      | Operatorul Shepard combinat cu funcțiile radiale de tipul <i>inverse quadratic</i> și <i>inverse multiquadric</i> . . . . .       | 36        |
| 3.3      | Aplicație în reconstrucția de imagini . . . . .                                                                                   | 37        |
| 3.3.1    | Reconstrucția imaginilor alb-negru . . . . .                                                                                      | 37        |
| 3.3.2    | Reconstrucția imaginilor color . . . . .                                                                                          | 38        |
| <b>4</b> | <b>Interpolare sferică folosind noi operatori Shepard</b>                                                                         | <b>40</b> |
| 4.1      | Operatori Shepard sferici combinați cu funcții radiale . . . . .                                                                  | 40        |
| 4.1.1    | Operatori Shepard sferici combinați cu funcții radiale de tipul <i>thin-plate spline</i> și <i>inverse multiquadric</i> . . . . . | 40        |
| 4.2      | Operatori sferici Shepard-Bernoulli . . . . .                                                                                     | 42        |
| 4.2.1    | Triangularizarea Delaunay a sferei . . . . .                                                                                      | 42        |
| 4.2.2    | Operatori Shepard de tipul Bernoulli . . . . .                                                                                    | 43        |
| 4.3      | Aplicație în predicția temperaturilor medii . . . . .                                                                             | 44        |
| 4.4      | Aplicație în probleme de tip topografic . . . . .                                                                                 | 45        |
|          | <b>Concluzii</b>                                                                                                                  | <b>46</b> |
|          | <b>Bibliografie</b>                                                                                                               | <b>54</b> |

# Lista publicațiilor și a participărilor la conferințe

Rezultatele originale au fost incluse în următoarele articole:

1. T. Căținaș, **A. Malina**, *Spherical Shepard-Bernoulli operator*, J. Appl. Math. Comput. (2024), DOI: 10.1007/s12190-024-02285-z, **WoS-SCIE, IF** (Iunie 2024): **2.4** (cuartila Q1).
2. **A. Malina**, *Univariate Shepard operators combined with least squares fitting polynomials*, Filomat **38**:15 (2024), pp. 5507–5516, DOI: 10.2298/FIL2415507M, **WoS-SCIE, IF** (Iunie 2024): **0.8** (cuartila Q2).
3. T. Căținaș, **A. Malina**, *Spherical interpolation of scattered data using least squares thin-plate spline and inverse multiquadric functions*, Numer. Algor. **97** (2024), pp. 1397–1414, DOI: 10.1007/s11075-024-01755-6, **WoS-SCIE, IF** (Iunie 2024): **1.7** (cuartila Q2).
4. **A. Malina**, *An application of the Shepard operator in image reconstruction*, In: 2024 26th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC), to appear.
5. **A. Malina**, *Iterative Shepard operator of least squares thin-plate spline type*, Dolomites Res. Notes Approx. **16** (2023), pp. 54–59, DOI: 10.14658/PUPJ-DRNA-2023-3-8, **WoS-ESCI, IF** (Iunie 2024): **0.6**.
6. T. Căținaș, **A. Malina**, *The combined Shepard operator of inverse quadratic and inverse multiquadric type*, Stud. Univ. Babeș-Bolyai Math. **67** (2022), pp. 579–589, DOI: 10.24193/subbmth.2022.3.09, **WoS-ESCI, IF** (Iunie 2024): **0.3**.
7. T. Căținaș, **A. Malina**, *Shepard operator of least squares thin-plate spline type*, Stud. Univ. Babeș-Bolyai Math. **66** (2021), pp. 257–265, DOI: 10.24193/subbmth.2021.2.02, **WoS-ESCI, IF** (Iunie 2024): **0.3**.

Rezultatele originale au fost prezentate în cadrul următoarelor conferințe:

1. *Numerical Analysis, Numerical Modeling, Approximation Theory (NA-NM-AT)*, Zilele Academice Clujene, Cluj-Napoca (04-07.11.2024), “Spherical interpolation of scattered data by means of combined Shepard operators”.

2. *26th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC)*, Timișoara (16-19.09.2024), "An application of the Shepard operator in image reconstruction".
3. *Le 16ème Colloque Franco-Roumain, Bucharest* (26-30.08.2024), "Spherical interpolation of scattered data using least squares thin-plate spline and inverse multiquadric functions".
4. *Sesiunea de Comunicări Științifice ale Studenților – Matematică, Facultatea de Matematică și Informatică, UBB Cluj-Napoca* (25.05.2024), "Spherical interpolation of scattered data using least squares thin-plate spline and inverse multiquadric functions".
5. *Numerical Analysis, Numerical Modeling, Approximation Theory (NA-NM-AT), Zilele Academice Clujene, Cluj-Napoca* (06-09.11.2023), "Combined Shepard operators applied in image reconstruction".
6. *9th International Conference on Mathematics and Informatics (MathInfo), Târgu Mureș* (07-08.09.2023), "An application of the Shepard operator in image reconstruction".
7. *14th Joint Conference on Mathematics and Computer Science (MaCS), Cluj-Napoca* (24-27.11.2022), "New Shepard operators in the univariate case".
8. *Numerical Analysis, Numerical Modeling, Approximation Theory (NA-NM-AT), Zilele Academice Clujene, Cluj-Napoca* (26-28.10.2022), "New Shepard operators in the univariate case".
9. *International Conference on Approximation Theory and its Applications (ICATA), Sibiu* (12-14.09.2022), "Univariate Shepard operators combined with least squares fitting polynomials".
10. *Functional Analysis, Approximation Theory and Numerical Analysis (FAATNA), Matera, Italy* (05-08.07.2022), "Iterative Shepard operator of least squares thin-plate spline type".
11. *Sesiunea de Comunicări Științifice ale Studenților – Matematică, Facultatea de Matematică și Informatică, UBB Cluj-Napoca* (21.05.2022), "Univariate Shepard operators combined with least squares fitting polynomials".
12. *International Student Conference StudMath-IT, Arad* (18-19.11.2021), "Iterative Shepard operator of least squares thin-plate spline type".
13. *Zilele Academice Clujene, 70 de ani de la înființarea Institutului de Calcul „Tiberiu Popoviciu”, Cluj-Napoca* (28.10.2021), "Shepard operator of least squares thin-plate spline type".

Participări la alte conferințe:

- *Machine Learning Prague 2024, Cehia* (22-24.04.2024).

# Introducere

Scopul acestei teze este acela de a introduce și a studia noi operatori de interpolare univariați, bivariați și sferici. Interpolarea este o ramură importantă a Teoriei Aproximării, des întâlnită în aplicațiile practice în care este necesară reconstruirea unei suprafețe pe baza unor date cunoscute. Datorită structurii iregulare a acestor date, ele se numesc date dispersate.

Acest tip de probleme poate fi reformulat astfel: cunoscându-se o mulțime de date formate din coordonatele punctelor  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, K\}$  și valorile acestora  $f_i = f(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, K$ , să se găsească  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $s$  să interpoleze mulțimea de date, i.e.,  $s(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i)$ , sau să o aproximeze, i.e.,  $s(\mathbf{x}_i) \approx f(\mathbf{x}_i)$ .

Aplicațiile acestui tip de probleme se regăsesc în multe domenii, precum matematică, informatică, biologie, geologie sau inginerie, acesta fiind motivul pentru care aproximarea datelor dispersate a devenit un domeniu atât de studiat și important. Câteva exemple concrete ale acestora, menționate de M. D. Buhmann [7], G. E. Fasshauer [44] și H. Wendland [93], includ aplicații precum reconstruirea suprafețelor (artefacte arheologice, sculpturi, părți ale mașinăriilor), restaurarea de imagini și *inpainting*, modelarea terenurilor, măsurători pentru fenomene fizice (presiune, temperatura solului sau la nivelul mării, precipitații, forțe gravitaționale), modelarea suprafețelor închise în CAGD, soluții pentru ecuațiile cu derivate parțiale și probleme geofizice (topografie, intensitatea câmpului magnetic, potențial gravitațional), aproximarea nucleului și a mașinilor cu suport vectorial în rețelele neuronale sau extragerea datelor.

Unul dintre principalele instrumente folosite în interpolarea datelor dispersate este operatorul introdus de D. Shepard în 1968, în [82], considerat a fi una dintre cele mai potrivite metode pentru a aproxima mulțimi mari de date. În forma sa originală, operatorul se obține pe baza valorilor cunoscute ale datelor și a unor ponderi globale construite cu ajutorul distanței dintre puncte și al unui parametru de control pozitiv. În ciuda avantajelor precum spațiul mic de stocare și generalizarea ușoară după adăugarea de date noi, operatorul prezintă și dezavantaje precum reproducerea slabă a datelor, acuratețe scăzută și un cost computațional ridicat. Acestea au fost motivele pentru care mulți autori au propus diverse alternative cu ajutorul cărora eficiența operatorului să fie îmbunătățită, iar acuratețea să crească. Printre pionierii cu numeroase rezultate în acest domeniu se numără R. Franke și G. Nielson (vezi, e.g., [46], [47]), R. J. Renka și A. K. Cline (vezi, e.g., [72], [74], [76], [77]), R. Farwig (vezi, e.g., [43]), R. E. Barnhill, R. P. Dube și F. F. Little (vezi, e.g., [4]).

Scoala clujeană de Teoria Aproximării a obținut rezultate semnificative în studiul acestui operator, atât în cazul univariat, cât și în cel bivariat. Autorii care s-au remarcat în acest

domeniu sunt Gh. Coman, T. Cătiuaș și R. Trîmbițaș (vezi, e.g., [10]–[13], [24]–[31], [90]). De asemenea, școala italiană a adus contribuții semnificative. În cazul univariat și bivariat îi menționăm pe R. Caira, F. Dell’Accio și F. Di Tomasso (vezi, e.g. [8], [9], [37]–[39]), iar în cazul sferic, multe îmbunătățiri au fost realizate de către G. Allasia, R. Cavoretto și A. De Rossi (vezi, e.g., [2], [18]–[21], [35], [36]).

Teza este împărțită în patru capitole, fiecare conținând numeroase secțiuni și subsecțiuni.

Capitolul 1 se concentrează în primul rând pe trecerea în revistă a unor rezultate și noțiuni privind operatorul Shepard. Secțiunea 1.1 introduce notații cheie și rezultate fundamentale esențiale pe parcursul tezei. Secțiunea 1.2 discută pe scurt funcțiile radiale, un alt instrument important în aproximarea datelor dispersate, instrument ce va fi utilizat pentru a îmbunătăți operatorul Shepard. Secțiunea 1.3 prezintă rezultate fundamentale pentru operatorii Shepard univariați îmbunătățiți, obținuți prin combinarea cu diverse polinoame de interpolare, precum Lagrange [29], Taylor [29], Hermite [29], Birkhoff [29], [31], Abel-Goncharov [12] și Bernoulli [8]. Secțiunea 1.4 revizuieste contribuții importante din teoria operatorului Shepard bivariat. Detaliem aici varianta locală a acestui interpolant, metodă care asigură o influență scăzută a punctelor depărtate de punctul pentru care se face aproximarea, obținând în acest mod o acuratețe mai ridicată comparativ cu metoda clasică, care este de tip global. Varianta locală a fost propusă inițial de R. Franke și G. Nielson în [47], iar mai apoi studiată și îmbunătățită de R. Franke în [46] și de R. J. Renka în [76]. Ca și în cazul anterior, pentru a crește gradul de exactitate și a micșora erorile de aproximare, au fost propuse numeroase combinații cu polinoame de interpolare precum Lagrange [30], Taylor [28], Hermite [24], Birkhoff [25], Hermite-Birkhoff complet [38], Lidstone [9], [13] și Bernoulli [11], [37]. În final, în Secțiunea 1.5 prezentăm operatorul Shepard sferic. Mai întâi amintim câteva rezultate din teoria funcțiilor radiale sferice (vezi, e.g. [5], [54], [58], [84]), cu scopul de a prezenta ulterior operatorii Shepard sferici combinați cu funcții radiale (vezi, e.g., [18]–[21], [35], [36]). Cazul care cuprinde informații privind derivatele parțiale ale funcției este prezentat în [2], unde este studiat operatorul Shepard de tip Hermite-Birkhoff.

Scopul Capitolului 2 este acela de a introduce un nou tip de operator Shepard în cazul univariat, obținut cu ajutorul polinoamelor construite pe baza metodei celor mai mici pătrate ponderate. În Secțiunea 2.1 detaliem construirea acestor polinoame, iar ulterior studiem câteva dintre proprietățile acestora. În Teorema 2.1.1 demonstrăm proprietățile de interpolare ale funcției polinomiale introduse pe mulțimea de noduri date. Teorema 2.1.2 arată că gradul de exactitate al acestor operatori coincide cu cel al polinoamelor folosite. În ultimul rezultat din această secțiune, Teorema 2.1.3, demonstrăm liniaritatea operatorilor. Secțiunea 2.2 se axează pe combinația dintre operatorul Shepard și polinoamele introduse anterior. În Teoremele 2.2.2, 2.2.3, respectiv 2.2.4, demonstrăm că noii operatori Shepard introduși moștenesc proprietățile referitoare la interpolare, grad de exactitate, respectiv liniaritate. Pe baza Teoremei lui Peano, studiem restul formulei de interpolare în Teorema 2.2.5. Încheiem acest capitol cu câteva exemple numerice realizate pe două mulțimi de date (noduri echidistante și noduri Cebâșev) și patru funcții de test, comparând rezultatele obținute cu ajutorul noilor operatori introduși cu cele obținute cu ajutorul operatorilor Shepard de tip Lagrange, Taylor și Bernoulli. Toate rezultatele

din acest capitol sunt originale și sunt incluse în articolul A. Malina [62].

Obiectivul Capitolului 3 este acela de a prezenta noi operatori Shepard bidimensionali combinați cu trei funcții radiale: *thin-plate spline*, *inverse quadratic* și *inverse multiquadric*. Metodele propuse urmăresc îmbunătățirea celei inițiale, datorită eficienței dovedite a funcțiilor radiale atât în context teoretic, cât și practic. Pe lângă forma clasică (globală) și cea modificată (locală), vom folosi de asemenea și o metodă iterativă, comparabilă cu cea locală, propusă de A. V. Masjukov și V. V. Masjukov în [63]. Pentru a crește acuratețea metodelor, vom urmări câteva dintre ideile propuse de J. R. McMahon (vezi, e.g., [64], [65]) și vom construi mulțimi de noduri reprezentative pentru cele inițiale. Folosirea acestor noi noduri reduce costul computațional și de asemenea crește acuratețea metodelor, lucru demonstrat prin numeroase experimente numerice realizate cu ajutorul a trei funcții test. Pașii pentru obținerea noilor noduri sunt detaliați în Algoritmul 1. Rezultatele obținute în cazul utilizării funcției de tipul *thin-plate spline*, prezentate în Secțiunea 3.1, au fost structurate și publicate în două articole: T. Căținaș și A. Malina [14] și A. Malina [61], în timp ce rezultatele obținute prin utilizarea funcțiilor de tipul *inverse quadratic* și *inverse multiquadric* au fost publicate în lucrarea T. Căținaș și A. Malina [17]. În final, Secțiunea 3.3 prezintă o aplicație practică a operatorilor menționați anterior în procesarea de imagini, anume în reconstrucția imaginilor alb-negru (Subsecțiunea 3.3.1) și a celor color (Subsecțiunea 3.3.2). Detaliem două metode, una globală (Algoritmul 2) și una locală (Algoritmul 3), realizând numeroase experimente pe trei imagini având diverse rezoluții. Necesitatea reconstrucției de imagini poate apărea în cazuri de *inpainting* sau reducere a zgomotului. Deoarece ne concentrăm pe restaurarea imaginii și nu pe detectarea deteriorării, considerăm că porțiunea imaginii ce trebuie reconstruită se cunoaște. Rezultatele prezentate în această secțiune sunt incluse în lucrarea A. Malina [60].

Capitolul 4 este dedicat interpolării sferice a datelor dispersate cu ajutorul unor noi operatori Shepard combinați. Precum este menționat în [19] și [84], acest tip de probleme, în care domeniul este o sferă, poate apărea în multe arii, deoarece, în general, sfera se consideră a fi un model al Pământului. Secțiunea 4.1 prezintă noi operatori Shepard locali combinați cu funcțiile radiale de tipul *thin-plate spline* și *inverse multiquadric*. Aproximările obținute folosind combinații între polinoame și funcții radiale au fost des studiate în cazul funcțiilor radiale construite pe baza nucleelor condițional pozitiv definite, caz în care partea polinomială e necesară pentru ca teoria să funcționeze. Ne oprim aici asupra cazului nucleelor (condițional) strict pozitiv definite, considerând de asemenea includerea unei componente polinomiale, motivată de faptul că acest tip de aproximări oferă avantaje reale, practice. În Teorema 4.1.3 studiem eroarea de interpolare, în timp ce în Teorema 4.1.4 demonstrăm că operatorii introduși sunt de clasă  $C^1$ . În final, în Teorema 4.1.5, oferim o limită a erorii pe baza modulului de continuitate. Rezultatele noi obținute în această secțiune sunt cuprinse în articolul T. Căținaș și A. Malina [15]. În Secțiunea 4.2 introducem o nouă metodă de tip Shepard, cu ajutorul operatorului Bernoulli, potrivit atunci când se cunosc informații cu privire la derivatele funcției. După efectuarea triangularizării Delaunay a sferei, considerăm două metode pentru a aplica acest operator. Prima, bazată pe operatorul Shepard global, implică construirea operatorului Bernoulli pentru fiecare nod  $\mathbf{x}_i$ ,



după selectarea ca triunghi reprezentativ a celui care are nodul  $\mathbf{x}_i$  ca vârf și pentru care eroarea de aproximare Bernoulli este minimă. În Teorema 4.2.6 studiem eroarea de interpolare. A doua metodă, propusă în [97] și [98], implică construirea operatorului Bernoulli pe fiecare triunghi obținut în urma triangularizării sferei. În Teorema 4.2.8 demonstrăm proprietățile de interpolare ale operatorului Shepard-Bernoulli rezultat. Rezultatele originale din această secțiune sunt cuprinse în lucrarea T. Căținaș și A. Malina [16]. Ambele secțiuni se încheie cu exemple numerice realizate pe numeroase funcții test și seturi de date (puncte de evaluare aleatoare, noduri spirală, noduri Halton), demonstrând eficiența metodelor propuse. În plus, în finalul capitoului sunt investigate două fenomene fizice. Secțiunile 4.3 și 4.4 prezintă aplicații practice ale noilor operatori Shepard sferici introduși în predicția temperaturilor la nivelul Pământului și în aproximarea datelor topografice. Rezultatele obținute demonstrează că acești interpolanți oferă avantaje semnificative în rezolvarea problemelor ce modelează fenomene practice concrete.

## Mulțumiri

Aș dori să îmi exprim cea mai profundă recunoștință doamnei Conf. dr. Teodora Căținaș pentru suportul constant și îndrumarea din toți acești ani. Expertiza, răbdarea și sfaturile dumneaei au fost esențiale în realizarea acestei teze. Aș dori să îi mulțumesc pentru toată grija pe care mi-a purtat-o și toate încurajările pe care mi le-a oferit, fără de care nu aș fi reușit să obțin aceste rezultate.

Aș dori de asemenea să le mulțumesc colegilor de la „Institutul de Calcul Tiberiu Popoviciu, Academia Română”, în special domnului CSI dr. Emil Căținaș, pentru crearea unei atmosfere prielnice învățării de lucruri noi în acest domeniu. Înțelegerea, suportul și discuțiile fructuoase purtate au contribuit semnificativ la dezvoltarea mea.

Sunt recunoscătoare membrilor din comisia de îndrumare și tuturor profesorilor pe care i-am avut pentru asistența și expertiza pe care mi le-au oferit.

Mulțumirile mele din suflet sunt adresate familiei și celor mai apropiați prieteni, care au crezut mereu în mine și m-au susținut necondiționat pe parcursul acestei călătorii, cu dragoste și gânduri sincere.

**Cuvinte cheie:** operator Shepard, interpolarea datelor dispersate, metoda celor mai mici pătrate ponderate, *thin-plate spline*, *inverse quadratic*, *inverse multiquadric*, grad de exactitate, termenul rest, estimări ale erorilor, metodă iterativă multiscalară, interpolare univariată, interpolare bivariată, interpolare sferică, noduri, puncte spirală, noduri Halton, operator Bernoulli, polinoame armonice sferice, reconstrucția imaginilor.

**MSC:** 41A05, 41A25, 41A80, 65D05, 65D12, 65D15, 33C55.

# Capitolul 1

## Preliminarii

Primul capitol este dedicat unor rezultate și noțiuni existente din Analiza Numerică, în special din teoria aproximării și a interpolării. După enumerarea în Secțiunea 1.1 a câtorva notații și concepte fundamentale pe care le vom folosi pe parcursul tezei și după o scurtă introducere în teoria funcțiilor radiale în Secțiunea 1.2, ne îndreptăm atenția către obiectivul principal al acestei teze, anume studiul operatorului Shepard, introdus în [82]. Printre pionierii acestei metode se numără Franke și Nielson [46], [47], Renka și Cline [72], [74], [76], [77], Farwig [43], Barnhill, Dube și Little [4]. Secțiunea 1.3 reamintește rezultatele fundamentale din cazul univariat, în timp ce Secțiunea 1.4 le prezintă pe cele din cazul bivariat. Referințe notabile în cele două cazuri cuprind studiile realizate de Caira, Dell’Accio și Di Tommaso [8], [9], [37], [38], [39], Coman, Cătinaș și Trîmbițaș [10]–[13], [24]–[31], [90]. În final, Secțiunea 1.5 prezintă operatorul Shepard construit pe sfera unitate. Rezultate importante în acest caz au fost obținute de către Allasia, Cavoretto și De Rossi [2], [18], [19], [20], [21], [35], [36].

### 1.1 Notatii și noțiuni fundamentale

**Teorema 1.1.1.** [79] (Teorema lui Peano în  $\mathbb{R}$ )

Fie  $L : H^n[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcțională liniară care comută cu operatorul integrală definită. Dacă  $\ker L = \mathbb{P}_{n-1}$ , atunci

$$L[f] = \int_a^b \phi_n(t) f^{(n)}(t) dt,$$

cu

$$\phi_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} L^x [(x-t)_+^{n-1}],$$

$L^x[f]$  reprezentând faptul că  $L$  este aplicat lui  $f$  relativ la variabila  $x$ .

**Teorema 1.1.2.** [79] (Teorema lui Peano în  $\mathbb{R}^2$ )

Se consideră  $X = [a, b] \times [c, d]$  și  $L : B_{\alpha, \beta}(a, c) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcțională liniară. Dacă  $\ker L = \mathbb{P}_{n-1}^2$ ,

atunci

$$\begin{aligned} L[f] = & \sum_{j < \beta} \int_a^b \phi_{n-j,j}(s) \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(s, c) ds \\ & + \sum_{i < \alpha} \int_c^d \phi_{i,n-i}(t) \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a, t) dt \\ & + \iint_X \phi_{\alpha,\beta}(s, t) \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(s, t) ds dt, \end{aligned}$$

cu

$$\begin{aligned} \phi_{n-j,j}(s) &= \frac{1}{j! \cdot (n-j-1)!} L^{x,y} \left[ (x-s)_+^{n-j-1} \cdot (y-c)^j \right], \\ \phi_{i,n-i}(t) &= \frac{1}{i! \cdot (n-i-1)!} L^{x,y} \left[ (x-a)^i \cdot (y-t)_+^{n-i-1} \right], \\ \phi_{\alpha,\beta}(s, t) &= \frac{1}{(\alpha-1)! \cdot (\beta-1)!} L^{x,y} \left[ (x-s)_+^{\alpha-1} \cdot (y-t)_+^{\beta-1} \right]. \end{aligned}$$

## 1.2 Funcții radiale

**Definiția 1.2.1.** [44] Funcția  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este *radială* dacă există o funcție  $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $\Psi(\mathbf{x}) = \psi(\|\mathbf{x}\|)$ , cu  $\|\cdot\|$  reprezentând, de obicei, norma Euclideană.

În cazul funcțiilor radiale (RBF), interpolantul  $s$  se consideră a fi de forma [44]

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K a_i \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i), \quad (1.2.1)$$

pentru  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_i \in X$ ,  $i = 1, \dots, K$ , și  $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \psi(d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i))$ , cu  $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Condițiile de interpolare ce trebuie satisfăcute [44]

$$s(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, K, \quad (1.2.2)$$

ne conduc la sistemul de ecuații liniare

$$Ma = f, \quad (1.2.3)$$

unde

$$\begin{aligned} M &\in \mathbb{R}^{K \times K}, \quad M_{ij} = \psi(d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)), \quad i, j = 1, \dots, K, \\ a &= (a_1, \dots, a_K)^T, \quad f = (f_1, \dots, f_K)^T. \end{aligned}$$

Pentru a obține o soluție unică a sistemului (1.2.3), matricea de interpolare  $M$  trebuie să fie inversabilă. Precum a fost menționat în [93], din punct de vedere numeric, o cerință ce apare natural este aceea ca  $M$  să fie strict pozitiv definită.

Deseori, în loc de a studia dacă matricea  $M$  este strict pozitiv definită, se aplică același studiu funcției  $\Psi$ , metodă pe care o vom folosi în continuare.

**Teorema 1.2.2.** [93] Fie  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Atunci,  $\Psi$  este strict pozitiv definită dacă și numai dacă ea este pară și oricare ar fi  $K \in \mathbb{N}$  și oricare ar fi  $a = (a_1, \dots, a_K)^T \in \mathbb{R}^K \setminus \{\mathbf{0}\}$ , avem

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K a_i a_j \Psi(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) > 0,$$

cu  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K \in \mathbb{R}^n$  distincte.

Dacă mai sus considerăm  $a \in \mathbb{R}^K$  și semnul " $>$ " este înlocuit de " $\geq$ ", atunci termenul strict pozitiv definit devine pozitiv definit.

Deoarece lucrăm cu funcții radiale, este des întâlnit în literatură faptul de a ne referi la funcția univariată  $\psi$  ca funcție radială (strict) pozitiv definită, precum a fost evidențiat în [44].

**Lema 1.2.3.** [44] Deoarece  $\Psi = \psi \circ d$ , spunem că  $\psi$  este radială (strict) pozitiv definită în  $\mathbb{R}^m$ , oricare ar fi  $m \leq n$ , dacă  $\Psi$  este radială (strict) pozitiv definită în  $\mathbb{R}^n$ .

Deseori, un polinom este adăugat interpolantului  $s$  dat în (1.2.1), devenind astfel [44]

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K a_i \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + \sum_{i=1}^D A_i y_i(\mathbf{x}), \quad (1.2.4)$$

unde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  și  $\{y_1, \dots, y_D\}$  formează o bază pentru  $\mathbb{P}_{m-1}^n$ , cu  $D = \dim \mathbb{P}_{m-1}^n = \binom{m+n-1}{m-1}$ .

Pe lângă condițiile de interpolare (1.2.2), apar de obicei  $D$  constrângeri de forma

$$\sum_{i=1}^K a_i y_j(\mathbf{x}_i) = 0, \quad j = 1, \dots, D, \quad (1.2.5)$$

pentru a obține soluție unică. Precizia polinomială este strâns legată de condiția ca  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K\}$  să formeze o mulțime  $(m-1)$ -unisolventă.

**Definiția 1.2.4.** [44] Spunem că  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K\} \subset \mathbb{R}^n$  este  $m$ -unisolventă dacă singurul polinom de grad total cel mult  $m$  care se anulează pe  $\mathcal{X}$  este polinomul nul.

Problema se reduce la a rezolva următorul sistem liniar [44]

$$\begin{pmatrix} M & Y \\ Y^T & O_D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (1.2.6)$$

unde

$$\begin{aligned} M &\in \mathbb{R}^{K \times K}, \quad M_{ij} = \psi(d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)), \quad i, j = 1, \dots, K, \\ Y &\in \mathbb{R}^{K \times D}, \quad Y_{ij} = y_j(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, K, \quad j = 1, \dots, D, \\ a &= (a_1, \dots, a_K)^T, \quad A = (A_1, \dots, A_D)^T, \\ f &= (f_1, \dots, f_K)^T, \quad \text{cu } f_i = f(\mathbf{x}_i). \end{aligned}$$

**Teorema 1.2.5.** [93] Fie  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă și pară. Atunci,  $\Psi$  este strict condițional pozitiv definită de ordinul  $m$  dacă și numai dacă pentru orice  $K \in \mathbb{N}$  și pentru orice  $a = (a_1, \dots, a_K)^T \in \mathbb{R}^K \setminus \{\mathbf{0}\}$  cu

$$\sum_{i=1}^K a_i y(\mathbf{x}_i) = 0,$$

unde  $y$  este orice polinom real de grad mai mic decât  $m$ , avem

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K a_i a_j \Psi(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) > 0,$$

cu  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K \in \mathbb{R}^n$  distincte.

Dacă în teorema de mai sus considerăm  $a \in \mathbb{R}^K$  și înlocuim semnul " $>$ " cu " $\geq$ ", obținem cazul funcțiilor care sunt condițional pozitiv definite de ordinul  $m$ .

**Lema 1.2.6.** [44] Deoarece  $\Psi = \psi \circ d$ , spunem că  $\psi$  este radială (strict) condițional pozitiv definită în  $\mathbb{R}^m$ , oricare ar fi  $m \leq n$ , dacă  $\Psi$  este radială (strict) condițional pozitiv definită în  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.2.7.** [44] Dacă  $\Psi = \psi \circ d$  este o funcție pară, radială, strict condițional pozitiv definită de ordinul  $m$  în  $\mathbb{R}^n$  și nodurile distincte  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K\}$  formează o mulțime  $(m-1)$ -unisolventă, atunci sistemul liniar dat în (1.2.6) are soluție unică.

### 1.3 Operatori Shepard univariați

Această secțiune este dedicată revizurii anumitor operatori Shepard univariați, combinați cu diverse polinoame de interpolare precum Lagrange [29], Taylor [29], Hermite [29], Birkhoff [29], [31], Abel-Goncharov [12] și Bernoulli [8].

Se consideră  $X \subseteq \mathbb{R}$  și  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu valori reale astfel încât pentru  $K$  noduri de interpolare date,  $x_i \in X$ ,  $i = 1, \dots, K$ , valorile lui  $f$  se cunosc. Atunci, pentru  $x \in X$ , definim operatorul Shepard univariat, clasic ca [82]

$$S_\mu f(x) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x) f(x_i), \quad (1.3.1)$$

cu funcțiile de bază  $A_{i,\mu}$  date de

$$A_{i,\mu}(x) = \frac{|x - x_i|^{-\mu}}{\sum_{j=1}^K |x - x_j|^{-\mu}}, \quad i = 1, \dots, K, \quad x_i \neq x_j, \text{ pentru } i \neq j, \quad j = 1, \dots, K, \quad (1.3.2)$$

și  $\mu > 0$  un parametru arbitrar.

#### 1.3.1 Operatori Shepard-Lagrange univariați

Acest operator a fost studiat de Coman și Trîmbițaș în [29]. Operatorul Shepard-Lagrange univariat este dat de [29]

$$SL_k[f](x) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x) L_k^i[f](x), \quad (1.3.3)$$

cu

$$L_k^i[f](x) = \sum_{j=0}^k \prod_{\alpha=0, \alpha \neq j}^k \frac{(x - x_{i+\alpha})}{(x_{i+j} - x_{i+\alpha})} f(x_{i+j}), \quad (1.3.4)$$

$x_{K+j} = x_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ .

### 1.3.2 Operatori Shepard-Taylor univariați

Acest operator a fost studiat de către Coman și Trîmbițaș în [29]. Se consideră mulțimile

$$\Delta = \{\eta_{i,j}(f) = f^{(j)}(x_i) : i = 1, \dots, K, j = 0, \dots, k, k \in \mathbb{N}^*\},$$

și

$$\Delta_i = \{\eta_{i,p}(f) : p = 0, \dots, k\},$$

astfel încât  $\Delta_i$  este o submulțime a lui  $\Delta$  asociată lui  $\eta_i$ , având  $\eta_i \in \Delta_i$ , pentru orice  $i = 1, \dots, K$ .

În această ipoteză, *operatorul Shepard-Taylor univariat* este definit ca [29]

$$ST_k[f](x) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x) T_k^i[f](x), \quad (1.3.5)$$

cu

$$T_k^i[f](x) = \sum_{j=0}^k \frac{(x - x_i)^j}{j!} f^{(j)}(x_i). \quad (1.3.6)$$

### 1.3.3 Operatori Shepard-Hermite univariați

*Interpolantul Shepard-Hermite univariat* este definit ca [29]

$$SH_k[f](x) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x) H_k^i[f](x), \quad (1.3.7)$$

$H_k^i[f]$  fiind un operator de tipul Hermite, de forma

$$H_k^i[f](x) = \sum_{j=i}^{i+k} \sum_{p=0}^{r_j} h_{jp}(x) f^{(p)}(x_j),$$

$h_{jp}$  reprezentând polinoamele fundamentale Hermite, cu  $x_{K+i} = x_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $i \leq k$  și  $1 \leq k \leq K$ .

### 1.3.4 Operatori Shepard-Birkhoff univariați

Coman și Trîmbițaș au studiat *operatorul Shepard-Birkhoff în cazul univariat* în [29] și [31].

Acesta este definit ca

$$SBH_k[f](x) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x) BH_k^i[f](x), \quad (1.3.8)$$

cu  $BH_k^i[f]$ ,  $1 \leq k \leq K$ , reprezentând polinomul Birkhoff de grad  $k$

$$BH_k^i[f](x) = \sum_{j=i}^{i+k} \sum_{p \in I_j} b_{jp}(x) f^{(p)}(x_j),$$

considerând  $x_{K+i} = x_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

În contrast cu cazul Hermite, acest polinom nu există întotdeauna și de asemenea, nu este întotdeauna unic.

### 1.3.5 Operatori Shepard-Abel-Goncharov univariați

Operatorul Abel-Goncharov are avantajul de a exista și a fi unic întotdeauna, spre deosebire de operatorul anterior. Considerăm o mulțime de  $K + 1$  noduri de interpolare,  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, K$ . Problema care apare în acest caz este aceea de a găsi un polinom de interpolare  $P_K[f]$ , de grad  $K$ , astfel încât

$$f^{(i)}(x_i) = P_K^{(i)}[f](x_i), \quad i = 0, \dots, K.$$

Acest polinom poate fi exprimat ca [42]

$$P_K[f](x) = \sum_{i=0}^K g_i(x) f^{(i)}(x_i),$$

$g_i$  reprezentând polinoamele de tip Goncharov [42].

Operatorul Shepard-Abel-Goncharov univariat a fost studiat de Cătinaș în [12]. Fie  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq K$  și pentru fiecare nod  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, K$ , considerăm mulțimea [12]

$$\mathcal{X}_{i,k} = \{x_i, \dots, x_{i+k}\},$$

cu  $x_{K+i+1} = x_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ , și operatorul Abel-Goncharov asociat

$$P_k^i[f](x) = \sum_{j=i}^{i+k} g_{j-i}^i(x) f^{(j-i)}(x_j), \quad i = 0, \dots, K,$$

unde

$$\begin{aligned} g_0^i(x) &= 1, \\ g_1^i(x) &= x - x_i, \\ g_j^i(x) &= \frac{1}{j!} \left[ x^j - \sum_{p=0}^{j-1} g_p(x) \binom{j}{p} x_{p+i}^{j-p} \right], \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Putem defini *operatorul Shepard-Abel-Goncharov univariat* ca [12]

$$SAG_k[f](x) = \sum_{i=0}^K A_{i,\mu}(x) P_k^i[f](x). \quad (1.3.9)$$

### 1.3.6 Operatori Shepard-Bernoulli univariați

Se consideră  $X = [a, b]$ ,  $f \in C^k[a, b]$ ,  $k \geq 1$  și  $K$  noduri de interpolare distincte  $x_i \in X$ ,  $i \in \{1, \dots, K\}$ , aranjate în ordine crescătoare. Caira și Dell'Accio au definit *operatorul Shepard-Bernoulli univariat* ca [8]

$$SB_k[f](x) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x) B_k[f; x_i, x_{i+1}](x), \quad (1.3.10)$$

cu operatorii de tip Bernoulli  $B_k[f; x_i, x_{i+1}]$  exprimați sub forma

$$B_k[f; x_i, x_{i+1}](x) = f(x_i) + \sum_{j=1}^k \frac{h^{j-1}}{j!} \left( B_j \left( \frac{x - x_i}{h} \right) - B_j \right) \left( f^{(j-1)}(x_{i+1}) - f^{(j-1)}(x_i) \right),$$

pentru  $h = x_{i+1} - x_i$  și  $x_{K+1} = x_{K-1}$ .

În general, pentru  $n \in \mathbb{N}$ , polinoamele Bernoulli  $B_n(\cdot)$  se definesc recursiv ca [55]

$$\begin{cases} B_0(x) = 1, \\ B'_n(x) = nB_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \\ \int_0^1 B_n(x) dx = 0, \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (1.3.11)$$

Pentru  $x = 0$ , obținem numerele Bernoulli  $B_n$ , i.e.,  $B_n = B_n(0)$ .

### 1.3.7 Operatori Shepard modifițați de tip univariat

Franke și Nielson au propus în [47] o metodă locală de obținere a operatorului, metodă ce se bazează pe înlocuirea ponderilor  $A_{i,\mu}$  cu

$$w_{i,\mu}(x) = \left( \frac{R_w - |x - x_i|}{R_w |x - x_i|} \right)_+^\mu, \quad (1.3.12)$$

unde  $R_w$  reprezintă o rază de influență ce variază în funcție de  $i$ , rezultând în acest mod așa-numitul *operator Shepard univariat, modificat* [47]

$$S_W f(x) = \frac{\sum_{i=1}^K w_{i,\mu}(x) f(x_i)}{\sum_{i=1}^K w_{i,\mu}(x)}. \quad (1.3.13)$$

## 1.4 Operatori Shepard bivariați

În această secțiune ne îndreptăm atenția către cazul bidimensional pe care Shepard l-a studiat în [82]. Ne vom concentra asupra prezentării acestei metode în forma sa clasică (globală), alături de câteva variante modificate (locale) dezvoltate în [46], [47], [76]. Mai apoi, vom discuta câteva cazuri de interpolanți de tip Shepard bine-cunoscuți, combinați cu diverși operatori, precum Lagrange [30], Taylor [28], Hermite [24], Birkhoff [25], Hermite-Birkhoff complet [38], Lidstone [9], [13] și Bernoulli [11], [37].

Considerăm o funcție obiectiv  $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ale cărei valori  $f_i = f(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , se cunosc pe o mulțime de date dispersate  $\mathcal{X} = \{(x_i, y_i), i = 1, \dots, K\} \subset X$ . În forma clasică, așa cum a fost propus de către Shepard, acest interpolant este definit ca [82]

$$S_\mu f(x, y) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x, y) f(x_i, y_i), \quad (1.4.1)$$

cu ponderile  $A_{i,\mu}$  date de

$$A_{i,\mu}(x, y) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K d_j^\mu(x, y)}{\sum_{k=1}^K \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K d_j^\mu(x, y)}, \quad (1.4.2)$$



considerând parametrul de control  $\mu > 0$  și  $d_i(x, y)$  distanța dintre  $(x, y) \in X$  și nodurile  $(x_i, y_i) \in \mathcal{X}$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Ca și în cazurile anterioare discutate în această teză, vom considera norma Euclidiană.

Pentru a îmbunătăți acuratețea acestei metode globale, Franke și Nielson au propus o variantă locală în [47], ulterior discutată și dezvoltată de către Franke în [46] și Renka în [76]. Cunoscut ca *operatorul Shepard modificat*, el este definit ca [47]

$$S_W f(x, y) = \sum_{i=1}^K \bar{w}_{i,\mu}(x, y) f(x_i, y_i), \quad (1.4.3)$$

cu funcțiile cu suport compact  $\bar{w}_{i,\mu}$  de forma

$$\bar{w}_{i,\mu}(x, y) = \frac{w_{i,\mu}(x, y)}{\sum_{j=1}^K w_{j,\mu}(x, y)}, \quad (1.4.4)$$

unde

$$w_{i,\mu}(x, y) = \left[ \frac{(R_w - d_i(x, y))_+}{R_w d_i(x, y)} \right]^\mu, \quad \mu > 0,$$

considerând  $d_i(x, y)$  distanța Euclidiană dintre nodul  $i$  și punctul  $(x, y)$  și  $R_w$  o rază de influență ce variază în funcție de indexul  $i$ .

Chiar Shepard a considerat în [82] o îmbunătățire a metodei inițiale prin adăugarea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$ , obținând

$$S'_\mu f(x, y) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x, y) \left[ f(x_i, y_i) + (x - x_i) \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + (y - y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) \right]. \quad (1.4.5)$$

Astfel, gradul de exactitate este 1 și proprietățile de interpolare au loc de asemenea și pentru derivatele parțiale de ordinul întâi.

### 1.4.1 Operatori Shepard-Lagrange bivariați

Acest tip de operator a fost studiat de Coman și Trîmbițaș în [30]. Pentru simplificarea notațiilor, notăm nodul  $(x_i, y_i)$  cu  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Dacă îi asociem fiecărui nod  $\mathbf{x}_i$  o mulțime de  $m$  puncte

$$\mathcal{X}_{i,m} = \{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+m-1}\}, \quad i = 1, \dots, K, \quad m < K,$$

unde  $\mathbf{x}_{K+i} = \mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ , putem introduce polinomul Lagrange bivariat de grad  $n$ ,  $L_n^i[f]$ , ca [30]

$$L_n^i[f](x, y) = \sum_{j=i}^{i+m-1} l_j(x, y) f(x_j, y_j), \quad \text{pentru fiecare } i = 1, \dots, K, \quad (1.4.6)$$

cu  $l_j$  reprezentând polinoamele cardinale corespunzătoare, i.e.,

$$l_j(\mathbf{x}_k) = \delta_{jk}, \quad \text{pentru fiecare } j, k = i, \dots, i+m-1.$$

Existența și unicitatea lui  $L_n^i[f]$ ,  $i = 1, \dots, K$ , sunt condiționate de cerința ca nodurile  $\mathbf{x}_j$ ,  $j = i, \dots, i+m-1$ , să nu se afle pe aceeași curbă algebrică de grad  $n$ , dată ca

$\sum_{\alpha+\beta \leq n} \lambda_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta = 0$ . În plus, gradul  $n$  al polinomului Lagrange  $L_n^i[f]$  trebuie ales astfel încât  $m = (n+1)(n+2)/2 < K$ .

În aceste ipoteze, operatorul *Shepard-Lagrange bivariat* se scrie ca [30]

$$SL_n[f](x, y) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x, y) L_n^i[f](x, y). \quad (1.4.7)$$

#### 1.4.2 Operatori Shepard-Taylor bivariați

Atunci când anumite informații referitoare la derivatele parțiale ale lui  $f$  se cunosc, operatorul Shepard bivariat poate fi îmbunătățit combinându-l cu un polinom Taylor de grad  $n$ ,  $T_n^i[f]$ , atașat unui nod  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , definit ca [28]

$$T_n^i[f](x, y) = \sum_{\alpha+\beta \leq n} \frac{(x-x_i)^\alpha (y-y_i)^\beta}{\alpha! \beta!} \cdot \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x_i, y_i). \quad (1.4.8)$$

Astfel, *interpolantul Shepard de tip Taylor* care se obține are forma [28]

$$ST_n[f](x, y) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x, y) T_n^i[f](x, y). \quad (1.4.9)$$

#### 1.4.3 Operatori Shepard-Hermite bivariați

În această subsecțiune vom prezenta rezultatele principale cu privire la operatorul Shepard combinat cu un polinom de tip Hermite, publicate în [24] de către Coman. Se consideră următoarele date cunoscute pentru funcția  $f$ :

$$\Delta_H(f) = \left\{ \eta_i^{(\alpha,\beta)} f : \eta_i^{(\alpha,\beta)} f = \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x_i, y_i), \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \alpha + \beta \leq r_i, i = 1, \dots, K \right\}.$$

Fiecărui nod  $\mathbf{x}_i$  îi atașăm o mulțime  $\mathcal{X}_{i,m_i}$  de  $m_i$  puncte,  $i = 1, \dots, K$ , definită ca

$$\mathcal{X}_{i,m_i} = \{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+m_i-1}\}, m_i \in \mathbb{N}^*, m_i < K-1,$$

considerând  $\mathbf{x}_{K+i} = \mathbf{x}_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Fie

$$\Delta_i(f) = \{\eta_i^{(\alpha,\beta)} f : \alpha + \beta \leq r_i\}$$

informația cunoscută relativ la nodul  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , și

$$\Delta_{i,m_i}(f) = \bigcup_{j=0}^{m_i-1} \Delta_{i+j}(f)$$

reuniunea mulțumilor ce conțin informații despre nodurile din  $\mathcal{X}_{i,m_i}$ . Polinomul Hermite bivariat de grad  $n_i$ ,  $H_{n_i}^i[f]$ ,  $i = 1, \dots, K$ , este polinomul care satisface condițiile

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} H_{n_i}^i[f]}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x_j, y_j) = \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x_j, y_j) \quad (1.4.10)$$

pentru fiecare  $(x_j, y_j) \in \mathcal{X}_{i,m_i}$  cu  $\alpha + \beta \leq r_j$ .

Gradul  $n_i$  trebuie ales astfel încât  $\text{card}(\Delta_{i,m_i}(f)) = \frac{(n_i+1)(n_i+2)}{2}$ , pentru fiecare  $i = 1, \dots, K$ .

Dacă polinomul Hermite  $H_{n_i}^i$  există, în ipotezele de mai sus, putem defini *operatorul Shepard-Hermite combinat* ca [24]

$$SH_{n_1, \dots, n_K}[f](x, y) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x, y) H_{n_i}^i[f](x, y).$$

#### 1.4.4 Operatori Shepard-Birkhoff bivariați

Un caz mai general care extinde operatorii prezentați anterior este dat de problema de tip Birkhoff, studiată de către Coman în [25].

Considerăm următoarele date de tip Birkhoff referitoare la o funcție cu valori reale  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta_B(f) = \left\{ \eta_i^{(\alpha, \beta)} f : \eta_i^{(\alpha, \beta)} f = \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x_i, y_i), (\alpha, \beta) \in I_i \subseteq \mathbb{N}^2, i = 1, \dots, K \right\}.$$

Ca și în cazul Hermite, fiecărui nod  $\mathbf{x}_i$  îi asociem o mulțime  $\mathcal{X}_{i,m_i}$  de  $m_i$  noduri,  $m_i \in \mathbb{N}^*$ ,  $m_i < K - 1$ ,  $i = 1, \dots, K$ , de forma

$$\mathcal{X}_{i,m_i} = \{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{i+m_i-1}\},$$

și, având în vedere faptul că  $\Delta_i(f)$  reprezintă informația cunoscută relativ la  $f$  în  $\mathbf{x}_i$ , i.e.,

$$\Delta_i(f) = \left\{ \eta_i^{(\alpha, \beta)} f : (\alpha, \beta) \in I_i \right\},$$

definim de asemenea următoarea mulțime de informații pentru nodurile din  $\mathcal{X}_{i,m_i}$

$$\Delta_{i,m_i}(f) = \bigcup_{j=0}^{m_i-1} \Delta_{i+j}(f),$$

cu convenția  $\mathbf{x}_{K+i} = \mathbf{x}_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

Generalizarea problemelor de tip Lagrange, Taylor și Hermite se reduce la găsirea polinomului  $BH_{n_i}^i$  de grad total  $n_i$  care satisface următoarele condiții de interpolare

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} BH_{n_i}^i[f]}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x_j, y_j) = \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x_j, y_j), \quad (1.4.11)$$

pentru fiecare  $(x_j, y_j) \in \mathcal{X}_{i,m_i}$ , cu  $(\alpha, \beta) \in I_j$ .

Atunci când  $r_i := \text{card}(\Delta_{i,m_i}(f)) = \frac{(n_i+1)(n_i+2)}{2}$ , matricea sistemului ce rezultă din (1.4.11) este pătratică, astfel că sistemul are soluție unică atunci când determinantul este nenul. *Operatorul Shepard de tip Birkhoff* în acest caz este definit ca [25]

$$SBH_{n_1, \dots, n_K}[f](x, y) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x, y) BH_{n_i}^i[f](x, y). \quad (1.4.12)$$

Ca și în cazul Hermite, dificultatea ce apare este aceea de a selecta în mod convenabil submulțimile  $\mathcal{X}_{i,m_i}$  astfel încât  $\text{card}(\Delta_{i,m_i}(f)) = r_i$  și, de asemenea, matricea asociată sistemului (1.4.11) să aibă determinantul nenul, pentru fiecare  $i = 1, \dots, K$ .

**Definiția 1.4.1.** [25] O succesiune de submulțimi  $\mathcal{X}_{i,m_i}$ ,  $i = 1, \dots, K$ , se numește *admisibilă* dacă  $\text{card}(\Delta_{i,m_i}(f)) = r_i$  și matricea asociată sistemului dat de condițiile de interpolare corespunzătoare are determinantul nenul.

### 1.4.5 Operatori Shepard bivariați de tipul Hermite-Birkhoff complet

O altă abordare pentru a obține operatori Shepard combinați implică utilizarea polinoamelor Hermite-Birkhoff complete, precum au propus Dell'Accio și Di Tommaso în [38]. Pentru o mulțime  $X$  deschisă, convexă și mărginită și nodurile  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, K\} \subset X$ , cei doi au considerat varianta locală, i.e., forma modificată introdusă în (1.4.3).

Presupunem că pentru fiecare nod  $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, K$ , următoarele date de tip Hermite-Birkhoff se cunosc

$$\Delta_i(f) = \left\{ \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial^\alpha \partial^\beta}(\mathbf{x}_i) : (\alpha, \beta) \in I_i \subset \mathbb{N}^2, \alpha + \beta \leq r_i \right\},$$

impunând ca, dacă valoarea unei derivate parțiale de ordinul  $\gamma$  a lui  $f$  se cunoaște pentru  $\mathbf{x}_i$ , atunci toate celelalte derivate parțiale de ordinul  $\gamma$  să fie de asemenea cunoscute.

Conform [38], reuniunea acestor mulțimi  $\Delta(f) = \bigcup_{i=1}^K \Delta_i(f)$  se numește mulțime *Hermite-Birkhoff completă*.

În continuare, vom introduce o serie de notații din [38]. În primul rând, considerăm  $T(i)$  triunghiul cu un vârf în  $\mathbf{x}_i$  și celelalte două în  $\mathbf{x}_j$  și  $\mathbf{x}_k$ , astfel încât acestea să se afle în interiorul bilei închise de rază  $R_i$ , centrată în  $\mathbf{x}_i$ . Punctul  $\mathbf{x}_i$  se numește *vârful de referință* al lui  $T(i)$ . În sens trigonometric, pentru simplificarea notațiilor, notăm cele trei vârfuri astfel:  $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_2 := \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_3 := \mathbf{x}_k$ .

Considerând  $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  aria cu semn a triunghiului cu vârfurile  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ , definim coordonatele baricentrice referitoare la triunghiul  $T(i)$  ca

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)}{\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)}, \quad \lambda_2(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, \mathbf{x}_3)}{\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)}, \quad \lambda_3(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x})}{\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)}. \quad (1.4.13)$$

În plus, vom utiliza derivatele direcționale de-a lungul laturilor triunghiului  $T(i)$ . Considerând  $\cdot \cdot$  produsul scalar, ele se definesc ca

$$\begin{aligned} D_{ij}f(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) \\ &= (x_i - x_j) \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) + (y_i - y_j) \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Compunerea acestor derivate direcționale se exprimă ca

$$D_1^{(\gamma_1, \gamma_2)} = D_{21}^{\gamma_1} D_{31}^{\gamma_2}, \quad D_2^{(\gamma_1, \gamma_2)} = D_{12}^{\gamma_1} D_{32}^{\gamma_2}, \quad D_3^{(\gamma_1, \gamma_2)} = D_{13}^{\gamma_1} D_{23}^{\gamma_2}, \quad (1.4.15)$$

pentru  $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{N}^2$ .

Astfel, putem defini polinomul Hermite-Birkhoff complet  $HB^{T(i)}[f]$  ca o combinație între valorile derivatelor direcționale și ale unor polinoame în variabila  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de forma [38]

$$\begin{aligned} HB^{T(i)}[f](\boldsymbol{\lambda}) &= \sum_m q_{1,m}(\boldsymbol{\lambda}) D_1^{(\alpha_m^1, \alpha_m^2)} f(\mathbf{x}_1) + \sum_p q_{2,p}(\boldsymbol{\lambda}) D_2^{(\beta_p^1, \beta_p^2)} f(\mathbf{x}_2) \\ &\quad + \sum_s q_{3,s}(\boldsymbol{\lambda}) D_3^{(\gamma_s^1, \gamma_s^2)} f(\mathbf{x}_3), \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

cu

$$\{(\alpha_m^1, \alpha_m^2)\}_m = I_i, \quad \{(\beta_p^1, \beta_p^2)\}_p \subset I_j, \quad \{(\gamma_s^1, \gamma_s^2)\}_s \subset I_k,$$

și

$$\text{card}(\{m\}) + \text{card}(\{p\}) + \text{card}(\{s\}) = \frac{(n_i + 1)(n_i + 2)}{2}.$$

**Observația 1.4.2.** Avem că  $BH^{T(i)}[f] \in \mathbb{P}_{n_i}^2$ .

După finalizarea pașilor algoritmului de determinare a lui  $HB^{T(i)}[f]$ , *operatorul Shepard modificat de tipul Hermite-Birkhoff* poate fi scris ca [38]

$$S_{HB}[f](x, y) = \sum_{i=1}^K \bar{w}_{i,\mu}(x, y) HB^{T(i)}[f](x, y). \quad (1.4.17)$$

#### 1.4.6 Operatori Shepard-Lidstone bivariați

Operatorul Lidstone este construit pe baza polinoamelor Lidstone [1]

$$\begin{cases} \Lambda_0(x) = x, \\ \Lambda_n''(x) = \Lambda_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \\ \Lambda_n(0) = \Lambda_n(1), \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (1.4.18)$$

În această subsecțiune vom prezenta două abordări pentru a construi operatori Shepard-Lidstone. Prima abordare, propusă de Cătinaș în [13], extinde polinoamele Lidstone de-a lungul unui domeniu dreptunghiular. Cea de-a doua, dezvoltată de Caira, Dell'Accio și Di Tommaso în [9], se bazează pe o formulă de aproximare de-a lungul unui domeniu triunghiular obținută cu ajutorul acestor polinoame, așa cum a fost prezentată în [34].

Pentru cazul dreptunghiular, vom defini mai întâi interpolanții de tip Lidstone univariați, pe care îi vom extinde ulterior la cazul bidimensional. Fie  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  două intervale de numere reale și notăm cu  $\Delta_1 : a = x_1 < x_2 < \dots < x_{K_1} = b$  și  $\Delta_2 : c = y_1 < y_2 < \dots < y_{K_2} = d$ , partițiile uniforme ale lui  $[a, b]$  și  $[c, d]$ , cu pașii  $h_1 = \frac{b-a}{K_1-1}$  și respectiv  $h_2 = \frac{d-c}{K_2-1}$ . Considerăm de asemenea

$$L_n(\Delta_1) = \{p \in C[a, b] : p \in \mathbb{P}_{2n-1} \text{ pentru fiecare subinterval } [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, K_1 - 1\}.$$

Pentru  $f \in C^{2n-2}[a, b]$ , interpolantul Lidstone poate fi scris ca [1]

$$L_n^{\Delta_1}[f](x) = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=0}^{n-1} l_{i,j}^n(x) f^{(2j)}(x_i), \quad (1.4.19)$$

cu

$$l_{i,j}^n(x) = \begin{cases} \Lambda_j\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_1}\right) h_1^{2j}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 2, \dots, K_1, \\ \Lambda_j\left(\frac{x_{i+1}-x}{h_1}\right) h_1^{2j}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, K_1 - 1, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Operatorul (1.4.19) satisface următoarele condiții de interpolare [1]

$$L_n^{\Delta_1}[f]^{(2j)}(x_i) = f^{(2j)}(x_i), \quad j = 0, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, K_1.$$

În cazul bivariat, pentru  $f \in C^{2n-2, 2n-2}([a, b] \times [c, d])$  și partiția dreptunghiulară  $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$  a lui  $[a, b] \times [c, d]$ , unicul interpolant de tip Lidstone se exprimă ca [1]

$$L_n^\Delta[f](x, y) = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{K_2} \sum_{\beta=0}^{n-1} l_{i,\alpha}^n(x) l_{j,\beta}^n(y) \frac{\partial^{2\alpha+2\beta} f}{\partial x^{2\alpha} \partial y^{2\beta}}(x_i, y_j), \quad (1.4.20)$$

având aceleași proprietăți de interpolare precum în cazul univariat

$$\frac{\partial^{2\alpha+2\beta} L_n^\Delta[f]}{\partial x^{2\alpha} \partial y^{2\beta}}(x_i, y_j) = \frac{\partial^{2\alpha+2\beta} f}{\partial x^{2\alpha} \partial y^{2\beta}}(x_i, y_j),$$

$$\alpha, \beta = 0, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, K_1, \quad j = 1, \dots, K_2. \quad (1.4.21)$$

Ne vom opri asupra cazului  $K_1 = K_2 =: K$  și considerăm pe fiecare dreptunghi  $\Delta_i = [x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}] \subseteq [a, b] \times [c, d]$ ,  $i = 1, \dots, K$ , următoarele date de tip Lidstone

$$\mathcal{L}_i(f) = \left\{ \frac{\partial^{4\alpha} f}{\partial x^{2\alpha} \partial y^{2\alpha}}(x_i, y_i), \frac{\partial^{4\alpha} f}{\partial x^{2\alpha} \partial y^{2\alpha}}(x_{i+1}, y_{i+1}), \alpha = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Considerând  $L_n^\Delta[f]$  restricția operatorului din (1.4.20) la dreptunghiul  $\Delta_i$ , definim *operatorul Shepard-Lidstone bivariat* ca [13]

$$SL_n^\Delta[f](x, y) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x, y) L_n^\Delta[f](x, y). \quad (1.4.22)$$

În ultima parte a acestei secțiuni vom discuta o metodă diferită de a construi operatori Shepard-Lidstone combinați, propusă în [9]. Ca și în secțiunea precedentă, abordarea se bazează pe a considera extensia polinomului univariat Lidstone la triunghiul  $T(i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , având ca vârf de referință pe  $\mathbf{x}_i$  și ca alte două vârfuri  $\mathbf{x}_j$ ,  $\mathbf{x}_k$ , situate în interiorul bilei închise  $B_i$  de centru  $\mathbf{x}_i$  și rază  $R_i$ , notate prin  $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{x}_2 := \mathbf{x}_j$ ,  $\mathbf{x}_3 := \mathbf{x}_k$ . Vom folosi coordonatele baricentrice  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  ale lui  $\mathbf{x} = (x, y)$  relativ la vârfurile triunghiului  $T(i)$ , definite ca în (1.4.13). În plus, notăm

$$\mathbf{v}_1 = (x_2 - x_3, y_2 - y_3), \quad v_1 = \frac{\|\mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_1\|},$$

$$\mathbf{v}_2 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1), \quad v_2 = \frac{\|\mathbf{v}_2\|}{\|\mathbf{v}_2\|},$$

$$\mathbf{v}_3 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \quad v_3 = \frac{\|\mathbf{v}_3\|}{\|\mathbf{v}_3\|}.$$

Interpolantul Lidstone corespunzător triunghiului  $T(i)$  este de forma [9]

$$\begin{aligned} \tilde{L}_n^{T(i)}[f](x, y) = & \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left[ \sum_{\beta=0}^{n-1-\alpha} \|\mathbf{v}_2\|^{2\beta} \left( \Lambda_\beta(1 - \lambda_2 - \lambda_3) \frac{\partial^{2\alpha+2\beta} f}{\partial v_2^{2\beta} \partial v_1^{2\alpha}}(\mathbf{x}_1) \right. \right. \\ & + \Lambda_\beta(\lambda_2 + \lambda_3) \frac{\partial^{2\alpha+2\beta} f}{\partial v_2^{2\beta} \partial v_1^{2\alpha}}(\mathbf{x}_3) \Big) \cdot \Lambda_\alpha \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} \right) \\ & + \sum_{\beta=0}^{n-1-\alpha} \|\mathbf{v}_3\|^{2\beta} \left( \Lambda_\beta(1 - \lambda_2 - \lambda_3) \frac{\partial^{2\alpha+2\beta} f}{\partial v_3^{2\beta} \partial v_1^{2\alpha}}(\mathbf{x}_1) \right. \\ & + \Lambda_\beta(\lambda_2 + \lambda_3) \frac{\partial^{2\alpha+2\beta} f}{\partial v_3^{2\beta} \partial v_1^{2\alpha}}(\mathbf{x}_2) \Big) \cdot \Lambda_\alpha \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} \right) \Big] \cdot \|\mathbf{v}_1\|^{2\alpha} (\lambda_2 + \lambda_3)^{2\alpha}, \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

pentru  $f \in C^{2n}(X)$ ,  $X$  domeniu convex,  $(x, y) \in X$ .

Forma modificată a operatorului Shepard-Lidstone în acest caz este dată de [9]

$$S\tilde{L}_n[f](x, y) = \sum_{i=1}^K \bar{w}_{i,\mu}(x, y) \tilde{L}_n^{T(i)}[f](x, y). \quad (1.4.24)$$

Pentru fiecare nod  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , triunghiul  $T(i)$  corespunzător este ales astfel încât să fie situat în interiorul bilei închise de centru  $\mathbf{x}_i$  și rază  $R_i$  și în plus, să minimizeze cantitatea  $e_{\max}^{2n}(i) [e_{\max}^2(i)A(i)]^{2n-1}$ , unde  $e_{\max}(i) = \max\{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3\|, \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|\}$  și  $A(i) = |2\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)|^{-1}$ .

### 1.4.7 Operatori Shepard-Bernoulli bivariați

O extensie a funcțiilor reale cu ajutorul polinoamelor Bernoulli de-a lungul unei dreptunghi a fost propusă de către Costabile și Dell'Accio în [32]. Cu ajutorul acestor operatori, Căținaș a introdus interpolantul Shepard-Bernoulli bivariat în [11]. Vom prezenta rezultatele principale din cele două articole în prima parte a secțiunii curente.

Considerăm dreptunghiul  $X = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$  și  $f \in C^{m,n}(X)$ . În aceste ipoteze, putem defini interpolantul de tip Bernoulli ca [32]

$$\begin{aligned} B_{m,n}[f](x, y) = & f(a, c) + \sum_{i=1}^m \frac{h^{i-1}}{i!} S_i \left( \frac{x-a}{h} \right) \Delta_{(h,0)} \frac{\partial^{i-1} f}{\partial x^{i-1}}(a, c) \\ & + \sum_{j=1}^n \frac{k^{j-1}}{j!} S_j \left( \frac{y-c}{k} \right) \Delta_{(0,k)} \frac{\partial^{j-1} f}{\partial y^{j-1}}(a, c) \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{h^{i-1} k^{j-1}}{i! j!} S_i \left( \frac{x-a}{h} \right) S_j \left( \frac{y-c}{k} \right) \Delta_{(h,k)} \frac{\partial^{i+j-2} f}{\partial x^{i-1} \partial y^{j-1}}(a, c), \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

considerând notațiile

$$\begin{aligned} \Delta_{(h,0)} f(x, y) &= f(x+h, y) - f(x, y), \\ \Delta_{(0,k)} f(x, y) &= f(x, y+k) - f(x, y), \\ \Delta_{(h,k)} f(x, y) &= f(x, y) - f(x+h, y) + f(x+h, y+k) - f(x, y+k), \end{aligned}$$

pentru  $h = b - a$  și  $k = d - c$ .

Avem de asemenea că

$$S_i \left( \frac{x-a}{h} \right) = B_i \left( \frac{x-a}{h} \right) - B_i,$$

cu  $B_i(\cdot)$  reprezentând polinoamele Bernoulli și  $B_i = B_i(0)$  numerele Bernoulli, date de (1.3.11).

Pentru simplificarea notațiilor, vom nota operatorul introdus în (1.4.25) prin  $B_{m,n}[f; (a, c), (h, k)]$ . Considerând cele de mai sus, pentru o mulțime de  $K$  noduri  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i) \in X$ ,  $i = 1, \dots, K$ , definim operatorul Shepard combinat de tip Bernoulli în cazul bivariat ca [11]

$$SB_{m,n}[f](x, y) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x, y) B_{m,n}^i[f](x, y), \quad (1.4.26)$$

$$B_{m,n}^i[f](x, y) = B_{m,n}[f; (x_i, y_i), (h_i, k_i)], \quad i = 1, \dots, K,$$

considerând dreptunghiul  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$ , cu  $h_i = x_{i+1} - x_i$  și  $k_i = y_{i+1} - y_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , unde  $\mathbf{x}_{K+1} = \mathbf{x}_{K-1}$ .

Operatorul Bernoulli triunghiular se obține prin atribuirea fiecărui nod  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , a unui triunghi  $T(i)$  cu alte două noduri  $\mathbf{x}_j$  și  $\mathbf{x}_k$  ca vârfuri, astfel încât ele să fie situate în interiorul bilei închise centrată în  $\mathbf{x}_i$ , de rază  $R_i$ . Pentru simplificarea notațiilor, în fiecare triunghi  $T(i)$  facem din nou convenția ca  $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{x}_2 := \mathbf{x}_j$ ,  $\mathbf{x}_3 := \mathbf{x}_k$ . Considerăm  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  coordonatele baricentrice ale unui punct  $\mathbf{x} \in X$  relativ la triunghiul  $T(i)$ , obținute precum în (1.4.13). În plus, impunem ca  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  să fie un domeniu compact și convex.

În ipotezele de mai sus, pentru o funcție  $f$  cu valori reale, de clasă  $C^n(X)$ , operatorul Bernoulli de ordinul  $n$  introdus în [37] are forma

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n^{T(i)}[f](x, y) = & f(\mathbf{x}_1) + \sum_{i=1}^n \frac{S_i(\lambda_2 + \lambda_3)}{i!} \left( D_1^{(0, i-1)} f(\mathbf{x}_3) - D_1^{(0, j-1)} f(\mathbf{x}_1) \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-i+1} \frac{(\lambda_2 + \lambda_3)^{i-1} S_i\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3}\right) S_j(\lambda_2 + \lambda_3)}{i! j!} \\ & \cdot \left[ (-1)^{i+j} \left( D_2^{(j-1, i-1)} f(\mathbf{x}_2) - D_2^{(j-1, i-1)} f(\mathbf{x}_1) \right) \right. \\ & \left. + (-1)^j \left( D_3^{(j-1, i-1)} f(\mathbf{x}_3) - D_3^{(j-1, i-1)} f(\mathbf{x}_1) \right) \right], \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

cu derivatele direcționale și compunerile lor  $D_i^{(\gamma_1, \gamma_2)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , date de (1.4.14) și (1.4.15).

Pentru fiecare nod  $\mathbf{x}_i$ , alegerea triunghiului  $T(i)$  corespunzător este realizată similar cu celelalte două cazuri prezentate.

Definim *operatorul Shepard-Bernoulli bivariat de ordinul  $n$*  ca [37]

$$S\tilde{B}_n[f](x, y) = \sum_{i=1}^K \bar{w}_{i,\mu}(x, y) \tilde{B}_n^{T(i)}[f](x, y). \quad (1.4.28)$$

## 1.5 Interpolare sferică cu ajutorul operatorului Shepard

Această secțiune are intenția de a prezenta rezultate din literatură referitoare la problema interpolării pe sfera unitate  $d$ -dimensională  $S^d$ . Cazul pe care îl vom studia este cel în care  $d = 2$ , deoarece acest tip de probleme apare în multe domenii practice în care datele provin, de exemplu, din măsurătorile unor fenomene fizice la nivelul Pământului, caz în care sfera  $S^2$  reprezintă un model potrivit pentru Pământ, precum a fost punctat în [19], [53], [84].

Alte domenii care folosesc interpolarea sferică includ modelarea suprafețelor închise din CAGD, precum a fost menționat în [36], sau în rezolvarea unor probleme geofizice (topografie, intensitatea câmpului magnetic, potențialul gravitațional [53]).

Aproximarea sferică a funcțiilor a reprezentat subiectul lucrărilor multor autori. O temă des abordată s-a bazat pe teoria funcțiilor radiale (vezi, e.g., [5], [54], [58], [84]). Alți autori s-au concentrat asupra metodelor de tip Shepard combinate cu funcții radiale (vezi, e.g., [18], [19], [20], [21], [35], [36]) sau, atunci când date referitoare la derivatele parțiale au fost disponibile, combinate, de exemplu cu polinoame Hermite-Birkhoff [2]. În plus, metode de tip Shepard construite cu ajutorul triangularizării sferice au fost propuse în [97], [98].



### 1.5.1 Funcții radiale sferice

Sfera unitate  $S^2$  este definită ca

$$S^2 = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\},$$

cu  $\|\cdot\|$  reprezentând norma Euclideană. Aria suprafeței lui  $S^2$  este  $\omega_2 = 4\pi$ .

Distanța geodezică dintre  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^2$ , notată cu  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , este calculată ca [54]

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}), \quad (1.5.1)$$

cu  $\cdot$  reprezentând produsul scalar. Această distanță măsoară lungimea arcului celui mai scurt drum dintre  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$ .

Cazul analog pe sferă al problemei funcțiilor radiale folosește în loc de distanța Euclideană pe cea geodezică  $g$  și o funcție radială sferică (SBF)  $\psi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . Pentru o mulțime de date dispersate  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i \in S^2 : i = 1, \dots, K\}$  cu valori cunoscute ale unei funcții  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  pe  $\mathcal{X}$ , obiectivul este acela de a găsi un interpolant  $s$  de forma [54]

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K a_i \psi(g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)), \quad (1.5.2)$$

astfel încât  $s(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ .

Sistemul liniar ce rezultă are forma [54]

$$Ma = f, \quad (1.5.3)$$

unde

$$M \in \mathbb{R}^{K \times K}, \quad M_{ij} = \psi(g(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)), \quad i, j = 1, \dots, K,$$

$$a = (a_1, \dots, a_K)^T, \quad f = (f_1, \dots, f_K)^T, \quad \text{cu } f_i = f(\mathbf{x}_i).$$

Deseori, așa cum este menționat în [84], se consideră aproximarea prin funcții radiale sferice plus un polinom armonic sferic. În această situație, interpolantul are forma [54]

$$s_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K a_i \psi(g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)) + y(\mathbf{x}), \quad (1.5.4)$$

cu  $y$  reprezentând un polinom armonic sferic.

**Definiția 1.5.1.** [54] Un polinom  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de grad  $d$ ,  $d \geq 0$ , este *omogen de gradul  $d$*  dacă  $p(t\mathbf{x}) = t^d p(\mathbf{x})$ , pentru orice  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  și  $t > 0$ .

**Definiția 1.5.2.** [54] Un polinom  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  este *armonic* dacă  $\Delta p(\mathbf{x}) = 0$ , pentru orice  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , unde  $\Delta$  reprezintă operatorul Laplace, i.e.,

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}.$$

**Definiția 1.5.3.** [54] Dacă  $\mathcal{P}_d$  este mulțimea polinoamelor de grad  $d$  în  $\mathbb{R}^3$  armonice și omogene de grad  $d$ , mulțimea *polinoamelor armonice sferice de ordin exact  $d$*  este dată de spațiul liniar

$$\mathcal{H}_d^*(S^2) = \{p|_{S^2} : p \in \mathcal{P}_d\}.$$

**Definiția 1.5.4.** [54] Spațiul *polinoamelor armonice sferice de ordin cel mult  $d$* , notat cu  $\mathcal{H}_d(S^2)$ , este definit ca

$$\mathcal{H}_d(S^2) = \bigoplus_{j=0}^d \mathcal{H}_j^*(S^2).$$

Dacă  $y$  din (1.5.4) este un polinom armonic sferic de gradul  $d$ , după dezvoltarea sa, obținem următoarea formă a interpolantului  $s_h$  [54]

$$s_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K a_i \psi(g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)) + \sum_{i=1}^D A_i y_i(\mathbf{x}), \quad (1.5.5)$$

cu  $D = \dim \mathcal{H}_d(S^2)$  și  $\{y_1, \dots, y_D\}$  bază pentru  $\mathcal{H}_d(S^2)$ .

Pe lângă condițiile de interpolare

$$s_h(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, K, \quad (1.5.6)$$

următoarele constrângeri liniare trebuie satisfăcute [54]

$$\sum_{k=1}^K a_k y_i(\mathbf{x}_k) = 0, \quad i = 1, \dots, D. \quad (1.5.7)$$

Astfel obținem un sistem liniar augmentat cu  $K + D$  necunoscute și  $K + D$  ecuații, ce poate fi scris sub formă matriceală ca [54]

$$\begin{pmatrix} M & Y \\ Y^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (1.5.8)$$

unde

$$\begin{aligned} M &\in \mathbb{R}^{K \times K}, \quad M_{ij} = \psi(g(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)), \quad i, j = 1, \dots, K, \\ Y &\in \mathbb{R}^{K \times D}, \quad Y_{ij} = y_j(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, K, \quad j = 1, \dots, D, \\ a &= (a_1, \dots, a_K)^T, \quad A = (A_1, \dots, A_D)^T, \\ f &= (f_1, \dots, f_K)^T, \quad \text{cu } f_i = f(\mathbf{x}_i). \end{aligned}$$

Conform [54], interpolanții  $s$  și  $s_h$  există și sunt unici dacă și numai dacă matricele (1.5.3) și (1.5.8) sunt nesingulare. Similar cazului RBF, acest lucru are loc pentru funcții strict pozitiv definite și condițional strict pozitiv definite pe sferă.

**Definiția 1.5.5.** [54] Fie  $\psi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Spunem că  $\psi$  este *strict pozitiv definită* pe  $S^2$  ( $\psi \in \text{SPD}$ ) dacă, pentru orice mulțime de  $K$  noduri distincte  $\mathbf{x}_i \in S^2$ ,  $i = 1, \dots, K$ , forma quadratică

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K a_i a_j \psi(g(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)) \quad (1.5.9)$$

este pozitivă pe  $\mathbb{R}^K \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

**Teorema 1.5.6.** [54] Orice funcție  $\psi \in SPD$  oferă un interpolant unic  $s$  precum în (1.5.2).

**Definiția 1.5.7.** [54] Fie  $\psi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă și  $m \in \mathbb{N}$ . Spunem că  $\psi$  este *condițional strict pozitiv definită* pe  $S^2$  de ordinul  $m$  ( $\psi \in CSPD(m)$ ) dacă, pentru orice mulțime de  $K$  noduri distincte  $\mathbf{x}_i \in S^2$ ,  $i = 1, \dots, K$ , forma quadratică (1.5.9) este pozitivă pe

$$W_{m-1} = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^K \setminus \{\mathbf{0}\} : \sum_{i=1}^K a_i y(\mathbf{x}_i) = 0, \text{ oricare ar fi } y \in \mathcal{H}_{m-1}(S^2) \right\}.$$

**Definiția 1.5.8.** [54] Se consideră  $m \in \mathbb{N}$  și  $D = \dim \mathcal{H}_{m-1}(S^2)$ . O mulțime de noduri distincte  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i \in S^2 : i = 1, \dots, D\}$  se numește *unisolventă* relativ la  $\mathcal{H}_{m-1}(S^2)$  dacă singurul element care se anulează pentru fiecare  $\mathbf{x}_i$  este polinomul armonic sferic nul.

**Teorema 1.5.9.** [54] Orice funcție  $\psi \in CSPD(m)$  oferă un interpolant unic  $s_h$  precum în (1.5.5) dacă condiția de unisolvență pe sferă are loc.

## 1.5.2 Operatori Shepard combinați cu funcții radiale sferice

Interpolarea sferică a datelor cu ajutorul operatorilor de tip Shepard combinați cu funcții radiale a fost intensiv studiată de către Cavoretto și De Rossi (vezi, e.g., [18], [19], [20], [21], [35], [36]).

Se consideră o mulțime de noduri distincte  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, K\}$ , aflate pe sfera  $S^2$  împreună cu valorile  $f_i = f(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , ale unei funcții  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Pentru  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in S^2$  operatorul Shepard sferic modificat este dat de [36]

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^K \bar{w}_j(\mathbf{x}) f_j, \quad (1.5.10)$$

cu

$$\bar{w}_j(\mathbf{x}) = \frac{w_j(\mathbf{x})}{\sum_{k=1}^K w_k(\mathbf{x})}. \quad (1.5.11)$$

Ponderile  $w_j$  se definesc ca

$$w_j(\mathbf{x}) = \left[ \frac{(R_j^w - g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j))_+}{R_j^w g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)} \right]^\mu, \quad (1.5.12)$$

considerând  $R_j^w$  o rază de influență a nodului  $j$  și  $g$  distanța geodezică (1.5.1) dintre  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{x}_j$ .

**Definiția 1.5.10.** [36] Interpolantul de tipul funcție de bază zonală  $s^{(1)} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  asociat lui  $\mathcal{X}$  și valorilor corespunzătoare ale funcției  $f$  pe  $\mathcal{X}$  este definit ca

$$s^{(1)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^K a_j \psi(g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)), \quad (1.5.13)$$

cu coeficienții  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, K$ , obținuți din relațiile de interpolare

$$s^{(1)}(\mathbf{x}_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, K,$$

unde  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$  reprezintă distanța geodezică dintre  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{x}_j$  și  $\psi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție radială sferică.

**Definiția 1.5.11.** [35] *Interpolantul augmentat de tipul funcție de bază zonală*  $s^{(2)} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  asociat lui  $\mathcal{X}$  și valorilor corespunzătoare ale funcției  $f$  pe  $\mathcal{X}$  este definit ca

$$s^{(2)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^K a_j \psi(g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)) + \sum_{k=1}^D A_k y_k(\mathbf{x}), \quad (1.5.14)$$

unde  $y_k \in \mathcal{H}_d(S^2)$ ,  $k = 1, \dots, D$ , sunt polinoamele armonice sferice de ordin cel mult  $d$ ,  $D = \dim \mathcal{H}_d(S^2)$  și  $\{y_1, \dots, y_D\}$  formează o bază pentru  $\mathcal{H}_d(S^2)$ .

Coeficienții  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, K$  și  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, D$  se obțin din

$$s^{(2)}(\mathbf{x}_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, K,$$

și impunând constrângerile

$$\sum_{i=1}^K a_i y_k(\mathbf{x}_i) = 0, \quad k = 1, \dots, D.$$

**Definiția 1.5.12.** [36] Atașând fiecărui punct  $\mathbf{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, K$ , o mulțime  $I_j$  de indici ai  $n_Z$  vecini ai lui  $\mathbf{x}_j$ , definim *interpolantul local de tipul funcție de bază zonală*  $s_j^{(1)} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ca

$$s_j^{(1)}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_j} a_i^j \psi(g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)), \quad (1.5.15)$$

unde  $a_i^j$ ,  $i \in I_j$ ,  $j = 1, \dots, K$ , rezultă din

$$s_j^{(1)}(\mathbf{x}_i) = f_i, \quad i \in I_j, \quad j = 1, \dots, K.$$

**Definiția 1.5.13.** [35] Atașând fiecărui punct  $\mathbf{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, K$ , o mulțime  $I_j$  de indici ai  $n_Z$  vecini ai lui  $\mathbf{x}_j$ , definim *interpolantul augmentat local de tipul funcție de bază zonală*  $s_j^{(2)} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ca

$$s_j^{(2)}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_j} a_i^j \psi(g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)) + \sum_{k=1}^D A_k^j y_k(\mathbf{x}), \quad (1.5.16)$$

unde  $D = \dim \mathcal{H}_d(S^2)$ ,  $D \leq n_Z$ , iar  $\{y_1, \dots, y_D\}$  este o bază a lui  $\mathcal{H}_d(S^2)$ .

Coeficienții  $a_i^j$ ,  $i \in I_j$ ,  $j = 1, \dots, K$  și  $A_k^j$ ,  $k = 1, \dots, D$ , se obțin prin impunerea condițiilor

$$s_j^{(2)}(\mathbf{x}_i) = f_i, \quad i \in I_j, \quad j = 1, \dots, K,$$

și

$$\sum_{i \in I_j} a_i^j y_k(\mathbf{x}_i) = 0, \quad j = 1, \dots, K, \quad k = 1, \dots, D.$$

**Definiția 1.5.14.** [35, 36] Pentru o mulțime de noduri distincte  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i \in S^2, i = 1, \dots, K\}$  și valorile  $f_i = f(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , ale funcției  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , *operatorul Shepard sferic modificat, combinat cu o funcție de bază zonală* este dat de

$$S^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^K \bar{w}_j(\mathbf{x}) s_j^{(k)}(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2. \quad (1.5.17)$$

### 1.5.3 Operatori Shepard sferici de tipul Hermite-Birkhoff

Allasia, Cavoretto și De Rossi au propus în [2] o metodă de interpolare sferică a datelor dispersate cu ajutorul funcțiilor de bază de tip Shepard și al operatorilor Hermite-Birkhoff.

Operatorul Shepard combinat de tipul Hermite-Birkhoff este definit ca [2]

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K A_i(\mathbf{x}) T[f](\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \Delta_i), \quad (1.5.18)$$

unde

$$T[f](\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \Delta_i) = \sum_{\gamma \in \Delta_i} \frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial x^{\gamma_1} \partial y^{\gamma_2} \partial z^{\gamma_3}}(\mathbf{x}_i) \cdot \prod_{j=1}^3 \frac{(u_j - u_j(\mathbf{x}_i))^{\gamma_j}}{\gamma_j!}, \quad (1.5.19)$$

iar  $A_i$  sunt funcții de bază cardinale ce satisfac condițiile

$$A_i \in C^k(X), A_i(\mathbf{x}) \geq 0, \sum_{i=1}^K A_i(\mathbf{x}) = 1, A_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}, \quad (1.5.20)$$

și, în plus,

$$\frac{\partial^{|\gamma|} A_i}{\partial x^{\gamma_1} \partial y^{\gamma_2} \partial z^{\gamma_3}}(\mathbf{x}_j) = 0, \gamma \in \Delta_i, |\gamma| \in \{1, \dots, k\}, j = 1, \dots, K.$$

Pentru a obține o metodă de tip Shepard, funcțiile de bază cardinale pot fi exprimate sub forma [2]

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{(\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i))^{-1}}{\sum_{j=1}^K (\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j))^{-1}}, A_i(\mathbf{x}_i) = 1, i = 1, \dots, K. \quad (1.5.21)$$

Funcția  $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  trebuie să fie continuă și mărginită, cu  $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) > 0, \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i$  și  $\alpha(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 0, \forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ . În plus,  $\alpha$  trebuie să fie continuă și diferențiabilă de ordinul  $k$  pe  $X$  cu

$$\left. \frac{\partial^{|\gamma|} \alpha}{\partial x^{\gamma_1} \partial y^{\gamma_2} \partial z^{\gamma_3}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} = 0, 0 < |\gamma| \leq k, i = 1, \dots, K.$$

Folosind distanța geodezică  $g$  definită în (1.5.1),  $\alpha$  poate fi scrisă ca

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (g(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^\mu, \mu \in \mathbb{R}_+, \mu \geq k, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X. \quad (1.5.22)$$

O altă metodă dezvoltată în [2] implică utilizarea unei abordări locale pentru a construi funcțiile de bază cardinale, de forma

$$\bar{w}_i(\mathbf{x}) = \frac{\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) (g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i))^{-\mu}}{\sum_{k=1}^K \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) (g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k))^{-\mu}}, \quad (1.5.23)$$

astfel încât  $\bar{w}_i$  să se anuleze în exteriorul vecinătății lui  $\mathbf{x}_i$ , cu

$$\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \left(1 - \frac{g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)}{R}\right)_+^{k+1}, \mathbf{x} \in X, i = 1, \dots, K.$$

Cu această alegere, funcția  $\tau : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  este de clasă  $C^k$  pe  $X$  și, pentru o valoare potrivită a lui  $R > 0$ , se anulează în exteriorul bilei de centru  $\mathbf{x}_i$  și rază  $R$ .

Astfel, noul operator de interpolare local de tipul Hermite-Birkhoff poate fi scris ca [2]

$$\tilde{H}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K \bar{w}_i(\mathbf{x}) T[f](\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \Delta_i). \quad (1.5.24)$$

## Capitolul 2

# Operatori Shepard univariați obținuți cu ajutorul polinoamelor de tipul celor mai mici pătrate

Acest capitol introduce un nou operator Shepard univariat, combinat cu polinoame construite prin metoda celor mai mici pătrate ponderate. Secțiunea 2.1 prezintă construirea acestor polinoame, alături de câteva dintre proprietățile lor, precum proprietățile de interpolare, gradul de exactitate și liniaritatea. Secțiunea 2.2 se concentrează asupra operatorului Shepard rezultat, demonstrând că moștenește proprietățile amintite anterior. În final, este analizată eroarea de interpolare pe baza Teoremei lui Peano și sunt oferite exemple numerice care demonstrează beneficiile utilizării acestor operatori. Rezultatele obținute în acest capitol au fost publicate în lucrarea Malina [62].

### 2.1 Construcția și proprietățile polinoamelor univariate de tipul celor mai mici pătrate

Renka a introdus în [72], în 1988, un algoritm de îmbunătățire a operatorului Shepard bivariat, considerând un polinom quadratic care interpolează funcția  $f$  pe o mulțime de noduri date și care, de asemenea, aproximează datele prin metoda celor mai mici pătrate ponderate. Ulterior, în 1999, în [74], a îmbunătățit metoda prin substituirea polinomului de gradul al doilea cu unul cubic. În 2010, W. I. Thacker et al. [89] au prezentat principalele dezavantaje ale celor două metode și au sugerat combinarea operatorului Shepard cu un polinom liniar care păstrează aproximarea datelor prin metoda celor mai mici pătrate ponderate.

Se consideră  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  și  $K$  noduri reale date, notate prin  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, K$ . Valorile funcției  $f$  pe noduri se cunosc și se notează cu  $f_j = f(x_j)$ ,  $j = 1, \dots, K$ .

În aceste ipoteze, pentru un punct  $x \in X$ , definim funcția polinomială de grad  $n$ ,  $C_j^n[f]$ ,  $j = 1, \dots, K$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ca

$$C_j^n[f](x) = f_j + \sum_{k=1}^n a_{j,k}(x - x_j)^k, \quad (2.1.1)$$

unde coeficienții  $a_{j,k}$  se determină astfel încât să minimizeze

$$E_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^K \lambda_{i,j} [C_j^n[f](x_i) - f_i]^2, \quad (2.1.2)$$

cu

$$\lambda_{i,j} = \frac{|x_i - x_j|^{-\mu}}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K |x_i - x_k|^{-\mu}}, \quad (2.1.3)$$

pentru  $i, j = 1, \dots, K$  și  $\mu > 0$ .

Pentru a determina coeficienții  $a_{j,k}$  (i.e., a obține minimul expresiei (2.1.2)), vom rezolva sistemul

$$\frac{\partial E_j}{\partial a_{j,k}} = 0, \text{ pentru fiecare } k = 1, \dots, n, \text{ și } j = 1, \dots, K.$$

Ulterior, pentru fiecare  $j = 1, \dots, K$ , se obține

$$\frac{\partial E_j}{\partial a_{j,k}} = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^K \lambda_{i,j} \left[ \sum_{p=1}^n a_{j,p} (x_i - x_j)^p + (f_j - f_i) \right] (x_i - x_j)^k = 0, \text{ pentru orice } k = 1, \dots, n.$$

Pentru fiecare  $j = 1, \dots, K$ , putem scrie ecuațiile normale ce rezultă mai sus sub formă matriceală ca

$$M_j \cdot a_j = b_j, \quad (2.1.4)$$

unde  $M_j$  este matricea de dimensiune  $n \times n$  ce are pe poziția  $(r, s)$  elementul  $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^K \lambda_{i,j} (x_i - x_j)^{r+s}$ ,

$b_j$  este un vector coloană cu  $n$  elemente cu  $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^K \lambda_{i,j} (x_i - x_j)^k (f_i - f_j)$  pe poziția  $k$  și  $a_j = (a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,n})^T$  este vectorul de necunoscute.

**Teorema 2.1.1.** Operatorul  $C_j^n[f]$  definit în (2.1.1) satisface următoarele proprietăți de interpolare

$$C_j^n[f](x_j) = f_j, \quad j = 1, \dots, K.$$

**Teorema 2.1.2.** Operatorul  $C_j^n[f]$ ,  $j = 1, \dots, K$ , are gradul de exactitate  $n$ , i.e.,

$$\text{dex}(C_j^n[f]) = n, \quad j = 1, \dots, K.$$

**Teorema 2.1.3.** Operatorul  $C_j^n[f]$  este liniar.

## 2.2 Operatori Shepard univariați combinați cu polinoame de tipul celor mai mici pătrate

**Definiția 2.2.1.** Pentru  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și o mulțime  $\mathcal{X} = \{x_j : j = 1, \dots, K\} \subset X$  de  $K$  noduri de interpolare, astfel încât valorile lui  $f$  sunt cunoscute pe  $\mathcal{X}$ , putem defini operatorul Shepard univariat combinat cu un polinom de grad  $n$  ca

$$SP_n[f](x) = \sum_{j=1}^K A_{j,\mu}(x) C_j^n[f](x), \quad (2.2.1)$$

cu  $C_j^n[f]$  definit în (2.1.1),  $A_{j,\mu}$  date de (1.3.2) și  $\mu > 0$ .

**Teorema 2.2.2.** *Următoarele proprietăți de interpolare au loc*

$$SP_n[f](x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, K.$$

**Teorema 2.2.3.** *Operatorul  $SP_n$  este liniar.*

**Teorema 2.2.4.** *Operatorul Shepard  $SP_n$  are gradul de exactitate  $n$ .*

Formula de interpolare pentru operatorul Shepard univariat, combinat cu un polinom de grad  $n$  este dată de

$$f = SP_n[f] + R_n[f],$$

cu  $R_n[f]$  reprezentând termenul rest.

**Teorema 2.2.5.** *Dacă  $f \in H^{n+1}[a, b]$ , atunci*

$$R_n[f](x) = \int_a^b \phi_n(x, t) f^{(n+1)}(t) dt,$$

unde

$$\phi_n(x, t) = \frac{(x-t)_+^n}{n!} - \sum_{j=1}^K A_{j,\mu}(x) \left[ \frac{(x_j-t)_+^n}{n!} + \sum_{k=1}^n a_{j,k}(x-x_j)^k \right], \quad (2.2.2)$$

cu  $a_{j,k}$  reprezentând soluțiile ecuațiilor  $\frac{\partial E_j}{\partial a_{j,k}} = 0$ , pentru fiecare  $k = 1, \dots, n$ , unde

$$E_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^K \lambda_{i,j} \left[ \frac{(x_j-t)_+^n}{n!} + \sum_{k=1}^n a_{j,k}(x_i-x_j)^k - \frac{(x_i-t)_+^n}{n!} \right]^2,$$

și  $\lambda_{i,j}$  sunt date în (2.1.3),  $j = 1, \dots, K$ .



## Capitolul 3

# Operatori Shepard bivariați obținuți cu ajutorul funcțiilor radiale

Acest capitol introduce noi operatori Shepard combinați în cazul bidimensional, cu ajutorul al trei funcții radiale: *least squares thin-plate spline*, *inverse quadratic* și *inverse multiquadric*. Această abordare are ca scop obținerea unor rezultate de aproximare mai bune, datorită eficienței dovedite a funcțiilor radiale, atât în contexte teoretice, cât și în contexte practice. Pe lângă forma clasică și cea modificată, vom utiliza și o metodă iterativă, comparabilă cu cea de-a doua menționată. Rezultatele originale prezentate în Secțiunile 3.1 și 3.2 au fost publicate în lucrările Cătinaș și Malina [14], [17] și Malina [61].

La finalul capitolului, în Secțiunea 3.3, vom considera o aplicație practică a acestor operatori în reconstrucția de imagini alb-negru și color. Rezultatele obținute în această secțiune se regăsesc în articolul Malina [60].

### 3.1 Operatorul Shepard combinat cu funcția radială de tipul *thin-plate spline*

Se consideră  $f$  o funcție cu valori reale definită pe  $X \subset \mathbb{R}^2$  și  $(x_i, y_i) \in X$  noduri distincte, astfel încât  $f(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , sunt cunoscute.

**Definiția 3.1.1.** Operatorul Shepard clasic de tipul *thin-plate spline* se exprimă ca

$$S_\mu^m[f](x, y) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(x, y) F_i(x, y), \quad (3.1.1)$$

unde  $A_{i,\mu}$ ,  $i = 1, \dots, K$ , sunt date de (1.4.2), pentru un parametru  $\mu > 0$  dat, iar funcțiile de tipul *least squares thin-plate spline* sunt definite ca

$$F_i(x, y) = \sum_{j=1}^i \alpha_j d_j^2 \log(d_j) + ax + by + c, \quad i = 1, \dots, K, \quad (3.1.2)$$

cu  $d_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$ .

Coeficienții  $\alpha_j$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  of  $F_i$  se determină astfel încât să minimizeze expresia

$$E = \sum_{i=1}^K [F_i(x_i, y_i) - f(x_i, y_i)]^2,$$

deci, ca soluții ale unor sisteme de forma (vezi, e.g., [64])

$$\begin{pmatrix} 0 & d_{12}^2 \log d_{12} & \cdots & d_{1K}^2 \log d_{1K} & x_1 & y_1 & 1 \\ d_{21}^2 \log d_{21} & 0 & \cdots & d_{2K}^2 \log d_{2K} & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{K1}^2 \log d_{K1} & d_{K2}^2 \log d_{K2} & \cdots & 0 & x_K & y_K & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_K & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_K & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_K \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.3)$$

cu  $d_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$ ,  $f_i = f(x_i, y_i)$ ,  $i, j = 1, \dots, K$ .

**Definiția 3.1.2.** Definim *operatorul Shepard modificat de tipul least squares thin-plate spline* ca

$$S_W^m[f](x, y) = \sum_{i=1}^K \bar{w}_{i,\mu}(x, y) F_i(x, y), \quad (3.1.4)$$

cu  $\bar{w}_{i,\mu}$  date de (1.4.4) și  $F_i$  definite în (3.1.2), pentru  $i = 1, \dots, K$ .

Pentru a îmbunătăți metodele descrise mai sus, vom considera o mulțime mai mică de  $k \in \mathbb{N}^*$  noduri  $(\hat{x}_j, \hat{y}_j)$ ,  $j = 1, \dots, k$ , reprezentativă pentru mulțimea inițială de  $K$  noduri de interpolare. Această mulțime se obține utilizând ideea propusă de J. R. McMahon în 1986. Pașii algoritmului sunt următorii (vezi, e.g., [64], [65]):

1. Se generează  $k$  noduri aleatoare, cu  $k < K$  ;
2. Fiecărui punct  $i$  se atribuie cel mai apropiat nod, pe baza distanței Euclidiene ;
3. Dacă există noduri cărora nu le-a fost atribuit niciun punct, se înlocuiesc prin cel mai apropiat punct ;
4. Se construiește următoarea mulțime de noduri ca media aritmetică a tuturor punctelor corespunzătoare ;
5. Se repetă pașii 2-4 până când mulțimea de noduri rămâne neschimbată timp de două iterații.

**Algoritm 1:** *Generarea nodurilor reprezentative pentru o mulțime de puncte date.*

**Observația 3.1.3.** Utilizarea mulțimii de  $K$  noduri de interpolare este indicată prin setarea  $m = 1$ , în timp ce utilizarea celor  $k$  noduri reprezentative este indicată prin  $m = 2$ .

Operatorul Shepard modificat, introdus de Franke și Nielson [47], necesită utilizarea unor parametri artificiali precum numărul celor mai apropiați vecini sau raza de influență. O abordare diferită propusă în [63] constă într-o metodă iterativă care nu folosește acești parametri și reduce reziduul de interpolare la fiecare iterație. Acuratețea acestei metode este comparabilă cu cea a

variantei locale precum a fost demonstrat în [63], deși există cazuri în care una dintre metode este preferată celeilalte.

Pentru  $(x, y) \in X$ , operatorul Shepard iterativ introdus în [63] este de forma

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^K \left[ u_j^{(k)} \omega((x - x_j, y - y_j)/\tau_i) / \sum_{p=1}^K \omega((x_p - x_j, y_p - y_j)/\tau_i) \right], \quad (3.1.5)$$

unde  $(x_i, y_i) \in X$ ,  $i = 1, \dots, K$ , reprezintă nodurile de interpolare și  $\omega$  este o funcție pondere, continuă și diferențiabilă, ce satisface următoarele proprietăți:

$$\omega(x, y) \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \omega(0, 0) > 0 \text{ și } \omega(x, y) = 0 \text{ dacă } \|(x, y)\| > 1.$$

În ecuația de mai sus,  $u_j^{(k)}$  reprezintă reziduul de la pasul  $k$ , cu  $u_j^{(0)} \equiv u_j$ .

Folosind ideile și metoda descrise în [63], introducem în cele ce urmează un nou operator Shepard de tipul *least squares thin-plate spline*.

**Definiția 3.1.4.** Operatorul Shepard iterativ de tipul *least squares thin-plate spline* este dat de

$$u_L^m[f](x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^K \left[ u_{F_j}^{(i)} \omega((x - x_j, y - y_j)/\tau_i) / \sum_{p=1}^K \omega((x_p - x_j, y_p - y_j)/\tau_i) \right], \quad (3.1.6)$$

cu reziduurile de interpolare de la pasul  $i$ ,  $u_{F_j}^{(i)}$ , definite prin

$$u_{F_j}^{(0)} = F_j(x_j, y_j), \quad (x_j, y_j) \in X, \quad j = 1, \dots, K,$$

și

$$u_{F_j}^{(i+1)} = u_{F_j}^{(i)} - \sum_{q=1}^K \left[ u_{F_q}^{(i)} \omega((x_j - x_q, y_j - y_q)/\tau_i) / \sum_{p=1}^K \omega((x_p - x_q, y_p - y_q)/\tau_i) \right].$$

Ponderea  $\omega$  este de forma

$$\omega(x, y) = \omega(x)\omega(y),$$

cu

$$\omega(x) = \begin{cases} 5(1 - |x|)^4 - 4(1 - |x|)^5, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

$F_j$  sunt funcțiile de tipul *least squares thin-plate splines* date de (3.1.2). Parametrul  $\tau_i$  se alege precum în [63] și scade de la o valoare  $\tau_0$ , ce poate fi, de exemplu,

$$\tau_0 > \sup_{(x,y) \in X} \max_{1 \leq j \leq K} \|(x - x_j, y - y_j)\|$$

la

$$\tau_M < \min_{k \neq j} \|(x_k - x_j, y_k - y_j)\|.$$

Șirul  $\{\tau_i\}$  de factori de scalare este dat de

$$\tau_i = \tau_0 \cdot \gamma^i, \quad \gamma \in (0, 1).$$

Aplicând conceptul de analiză multiscalară, a fost demonstrat în [63] că interpolantul rămâne stabil pentru  $\gamma \in [0.6, 0.95]$ . Valori mai mici ale lui  $\gamma$  pot fi de asemenea selectate pentru a reduce timpul computațional, în special în cazul nodurilor de interpolare dispersate.

### 3.2 Operatorul Shepard combinat cu funcțiile radiale de tipul *inverse quadratic* și *inverse multiquadric*

Pentru o funcție  $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , cu valori cunoscute pe o mulțime de  $K$  noduri de interpolare  $(x_i, y_i) \in X$ ,  $i = 1, \dots, K$ , se consideră funcția

$$\phi_i^\beta(x, y) = \sum_{j=1}^i \alpha_j \left[ 1 + (\epsilon d_j)^2 \right]^\beta + ax + by + c, \quad i = 1, \dots, K, \quad (3.2.1)$$

cu  $\epsilon$  un parametru de formă și  $d_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$ .

Pentru  $\beta = -1$ , obținem cazul funcției de tip *inverse quadratic* și pentru  $\beta = -1/2$  cel al funcției de tip *inverse multiquadric*.

Coeficienții  $\alpha_j$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sunt obținuți ca soluții ale sistemelor ce au o formă similară celor din (3.1.3). Pe scurt, ele pot fi scrise ca

$$\begin{pmatrix} A & X^T \\ X & O_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.2.2)$$

considerând următoarele notații:

$$\begin{aligned} A &\in \mathbb{R}^{K \times K}, \quad a_{ij} = \left[ 1 + (\epsilon d_{ij})^2 \right]^\beta, \quad j = 1, \dots, K, \quad \beta \in \{-1, -1/2\}; \\ X &\in \mathbb{R}^{3 \times K}(\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_K \\ y_1 & \dots & y_K \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{u} &= (a, b, c)^T, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)^T, \quad \mathbf{0} = (0, 0, 0)^T; \\ \mathbf{f} &= (f_1, \dots, f_K)^T, \quad f_i = f(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Precum în cazul *thin-plate spline*, vom considera două mulțimi de date: una inițială cu  $K$  noduri de interpolare ( $m = 1$ ) și o a doua cu  $k$  noduri reprezentative, obținută folosind Algoritmul 1 ( $m = 2$ ).

**Definiția 3.2.1.** *Operatorii Shepard clasici, combinați cu funcțiile de tip inverse quadratic și inverse multiquadric se definesc ca*

$$S_\mu^{\beta, m}[f](x, y) = \sum_{i=1}^K A_{i, \mu}(x, y) \phi_i^\beta(x, y), \quad (3.2.3)$$

cu  $A_{i, \mu}$ ,  $i = 1, \dots, K$ , definite în (1.4.2), pentru parametrul  $\mu > 0$ , iar  $\phi_i^\beta$  date de (3.2.1), pentru  $\beta \in \{-1, -1/2\}$ .

**Definiția 3.2.2.** *Definim operatorii Shepard modificați, combinați cu funcțiile de tip inverse quadratic și inverse multiquadric ca*

$$S_W^{\beta, m}[f](x, y) = \sum_{i=1}^K \bar{w}_{i, \mu}(x, y) \phi_i^\beta(x, y), \quad (3.2.4)$$

cu  $\bar{w}_{i, \mu}$ ,  $i = 1, \dots, K$ , date de (1.4.4) și  $\phi_i^\beta$  definite în (3.2.1), pentru  $\beta \in \{-1, -1/2\}$ .

**Definiția 3.2.3.** Operatorii Shepard iterativi, combinați cu funcțiile de tip inverse quadratic și inverse multiquadric se exprimă ca

$$u_{\phi}^{\beta,m}[f](x,y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^K \left[ u_{\phi_j}^{(i)\beta} \omega((x-x_j, y-y_j)/\tau_i) / \sum_{p=1}^K \omega((x_p-x_j, y_p-y_j)/\tau_i) \right], \quad (3.2.5)$$

cu  $\beta \in \{-1, -1/2\}$  și  $u_{\phi_j}^{(i)\beta}$  reziduul de interpolare de la pasul  $i$  dat de

$$u_{\phi_j}^{(0)\beta} = \phi_j^{\beta}(x_j, y_j), \quad (x_j, y_j) \in X, \quad j = 1, \dots, K,$$

și

$$u_{\phi_j}^{(i+1)\beta} = u_{\phi_j}^{(i)\beta} - \sum_{q=1}^K \left[ u_{\phi_q}^{(i)\beta} \omega((x_j-x_q, y_j-y_q)/\tau_i) / \sum_{p=1}^K \omega((x_p-x_q, y_p-y_q)/\tau_i) \right].$$

Funcțiile  $\phi_i^{\beta}$  sunt definite în (3.2.1). Alegerea parametrilor din varianta iterativă se face conform ideilor din [63], prezentate în secțiunea precedentă.

### 3.3 Aplicație în reconstrucția de imagini

În ceea ce urmează, ne îndreptăm atenția asupra unei aplicații a operatorului Shepard bivariat în reconstrucția imaginilor. Această problemă a fost investigată cu ajutorul funcțiilor radiale (vezi, e.g., [69], [80], [83], [91], [92], [95], [96]), însă în cazul operatorului Shepard nu au fost raportate foarte multe rezultate. Obiectivul nostru este acela de a reconstrui imagini alb-negru și color cu ajutorul operatorilor Shepard combinați de tipul *inverse quadratic* și *inverse multiquadric*. Reconstrucția imaginilor este necesară în cazurile ce implică *inpainting* sau existența zgomotului. Deoarece ne concentrăm asupra restaurării imaginilor, nu pe detectarea defectelor, vom considera că suprafața ce trebuie reconstruită a fost deja identificată.

#### 3.3.1 Reconstrucția imaginilor alb-negru

Se consideră o imagine originală, necoruptă, alb-negru a cărei reprezentare matriceală se notează cu  $M$ , fiecare poziție  $M(x,y)$  stocând valoarea unui pixel al imaginii. Vom nota reprezentarea matriceală a imaginii corupte cu  $\widehat{M}$ . Coordonatele unui pixel valid  $\mathbf{f}_i$  se notează cu  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ , i.e.,  $\mathbf{f}_i = \widehat{M}(x_i, y_i)$ , iar cele ale unui pixel corupt  $\widehat{\mathbf{f}}_i$  cu  $\widehat{\mathbf{x}}_i = (\widehat{x}_i, \widehat{y}_i)$ , i.e.,  $\widehat{\mathbf{f}}_i = \widehat{M}(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i)$ . În abordarea noastră, vom corupe în mod deliberat pixelii cu ajutorul zgomotului de tip *Salt-and-Pepper*. Acesta constă în schimbarea valorilor unui anumit procent de pixeli în 0 (negru = "pepper") sau 255 (alb = "salt").

##### • Cazul global

Folosind câteva dintre ideile prezentate în [69], considerăm reconstrucția unei imagini alb-negru deteriorate folosind operatorii Shepard bivariați  $S_{\mu}^{\beta}[f]$  introduși în (3.2.3), mai exact de tipul *inverse quadratic* ( $\beta = -1$ ) și *inverse multiquadric* ( $\beta = -1/2$ ). Pentru reconstrucție, vom folosi metoda globală, unde valoarea unui pixel corupt este calculată pe baza informațiilor oferite

de mulțimea pixelilor corecți. Se consideră matricea  $\widehat{M}$  asociată unei imagini cu rezoluția  $m \times n$  ce conține un procent de  $p\%$  pixeli deteriorați. Fie  $K$  numărul de pixeli valizi și  $\widehat{K}$  numărul celor corupți.

Fie  $\mathcal{X}$  mulțimea nodurilor de interpolare,  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, K\}$ , unde  $x_i$  și  $y_i$  reprezintă coordonatele matriceale ale pixelilor corecți  $\mathbf{f}_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Vom aplica operatorul Shepard dat de (3.2.3) pentru a reconstrui mulțimea pixelilor corupți,  $\widehat{\mathcal{X}} = \{\widehat{\mathbf{x}}_i = (\widehat{x}_i, \widehat{y}_i), i = 1, \dots, \widehat{K}\}$ . Valorile reconstruite ale pixelilor corupți se obțin ca  $\widehat{\mathbf{f}}_i = S_{\mu}^{\beta}[\mathbf{f}](\widehat{\mathbf{x}}_i)$ ,  $i = 1, \dots, \widehat{K}$ . Pseudocodul acestei metode este dat în Algoritmul 2.

```

Data: matrice deteriorată  $\widehat{M}$ 
Result: matrice reconstruită  $M'$ 
 $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, K\};$  /* coordonatele pixelilor corecți */
 $\widehat{\mathcal{X}} = \{\widehat{\mathbf{x}}_i = (\widehat{x}_i, \widehat{y}_i), i = 1, \dots, \widehat{K}\};$  /* coordonatele pixelilor corupți */
 $\mathbf{f} = \{\widehat{M}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}, i = 1, \dots, K\};$  /* valorile pixelilor corecți */
 $M' = \widehat{M};$ 
for  $i = 1 \dots \widehat{K}$  do
    |  $M'(\widehat{\mathbf{x}}_i) = S_{\mu}^{\beta}[\mathbf{f}](\widehat{\mathbf{x}}_i);$  /* reconstruirea pixelilor deteriorați */
end

```

**Algoritmul 2:** *Reconstrucție globală a imaginilor alb-negru.*

### • Cazul local

În cazul global, valoarea unui pixel incorect se calculează pe baza tuturor informațiilor provenite de la pixelii corecți. Această abordare nu oferă întotdeauna cele mai bune rezultate pentru imaginea reconstruită, deoarece pixelii unei imagini au proprietăți locale puternice, așa cum a fost subliniat în [83]. Mai eficient ar fi ca valoarea unui pixel incorect să fie aproximată folosind o variantă locală a algoritmului. Această abordare conduce la un timp computațional scăzut, comparativ cu cazul global, în special în cazul imaginilor cu rezoluție mare, deoarece sistemele (3.2.2) au o dimensiune mult mai mică. Pseudocodul este prezentat în Algoritmul 3.

### 3.3.2 Reconstrucția imaginilor color

Se consideră o funcție vectorială  $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  și o mulțime de  $K$  noduri de interpolare  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i) \in X$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Somogyi și Soos au introdus în [88] operatorul Shepard vectorial ca

$$\bigcup_{k=1}^m S_{\mu,k}[f](\mathbf{x}) = \bigcup_{k=1}^m \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{x}_i), \quad (3.3.1)$$

pentru  $\mathbf{x} \in X$ ,  $\mu > 0$ ,  $A_{i,\mu}$  date de (1.4.2).

Pe baza celor de mai sus, putem defini operatorul Shepard vectorial, combinat cu funcțiile radiale de bază de tipul *inverse quadratic* și *inverse multiquadric* ca

$$\bigcup_{k=1}^m S_{\mu,k}^{\beta}[f](\mathbf{x}) = \bigcup_{k=1}^m \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(\mathbf{x}) \phi_{i,k}^{\beta}(\mathbf{x}), \quad (3.3.2)$$

**Data:** matrice deteriorată  $\widehat{M}$ , toleranță inițială  $\varepsilon$

**Result:** matrice reconstruită  $M'$

```

 $\widehat{\mathcal{X}} = \{\widehat{\mathbf{x}}_i = (\widehat{x}_i, \widehat{y}_i), i = 1, \dots, \widehat{K}\};$                                 /* coordonatele pixelilor corupți */
 $M = \widehat{M};$ 
while  $\widehat{\mathcal{X}}$  not empty do
     $\widehat{K} = \text{size}(\widehat{\mathcal{X}});$ 
    for  $i = 1 \dots \widehat{K}$  do
        Define  $\mathcal{X}_i = \text{neighborhood of } \widehat{\mathbf{x}}_i;$ 
         $X_i = \{\mathbf{x}_j \in \mathcal{X}_i, j = 1, \dots, K_i\};$                                 /* pixeli corecți în  $\mathcal{X}_i$  */
        if  $\text{nr\_wrong\_pixels\_neighborhood} / \text{nr\_pixels\_neighborhood} < \varepsilon$  then
             $\mathbf{f}_i = \{\widehat{M}(\mathbf{x}_j), \mathbf{x}_j \in X_i, j = 1, \dots, K_i\};$ 
             $M(\widehat{\mathbf{x}}_i) = S_\mu^\beta[\mathbf{f}_i](\widehat{\mathbf{x}}_i);$                                 /* reconstrucția pixelilor incorecți */
        end
    end
    end
    Update  $\widehat{\mathcal{X}};$ 
     $\varepsilon = \varepsilon + 0.01;$ 
end

```

**Algoritmul 3:** *Reconstrucție locală a imaginilor alb-negru.*

pentru  $\mathbf{x} \in X$ ,  $\mu > 0$ ,  $A_{i,\mu}$  date de (1.4.2) și

$$\phi_{i,k}^\beta(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^i \alpha_{j,k} [1 + (\epsilon d_j)^2]^\beta + a_k x + b_k y + c_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.3.3)$$

Coeficienții  $\alpha_{j,k}$ ,  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  se determină prin rezolvarea unor sisteme similare celor din (3.2.2).

O imagine color este reprezentată ca o structură de dimensiune  $m \times n \times 3$ , cu fiecare componentă definind culorile roșu, verde și albastru ale unui pixel. Cu ajutorul operatorului Shepard vectorial (3.3.2), considerând  $m = 3$ , putem reconstrui imagini color folosind idei similare celor din cazul alb-negru. Computațional, aplicăm metoda locală descrisă în Algoritmul 3 pentru fiecare dintre cele trei componente: roșu, verde și albastru. Deoarece reconstruirile celor trei componente sunt independente, considerăm calculul paralel, realizat în Matlab.

## Capitolul 4

# Interpolare sferică folosind noi operatori Shepard

Ultimul capitol al tezei este dedicat interpolării sferice a datelor dispersate prin intermediul operatorilor Shepard combinați. Precum a fost menționat în Secțiunea 1.5, această problemă de interpolare este importantă deoarece apare în rezolvarea unor aplicații ce modelează fenomene fizice. Noile rezultate obținute în Secțiunea 4.1 și publicate în lucrarea Cătinaș și Malina [15] au fost obținute pe baza a două funcții radiale sferice: *least squares thin-plate spline* și *inverse multiquadric*.

A doua metodă de tip Shepard se obține folosind operatori de tip Bernoulli, utili când se cunosc informații referitoare la derivatele parțiale ale funcției. După determinarea triangularizării Delaunay a sferei, vom considera două abordări în aplicarea acestui operator, detaliate în Secțiunea 4.2. Rezultatele originale au fost incluse în lucrarea Cătinaș și Malina [16].

Două fenomene fizice sunt investigate în Secțiunile 4.3 și 4.4: predicția temperaturilor la suprafața Pământului și aproximarea de date topografice. Rezultatele demonstrează că metodele introduse sunt un instrument puternic pentru rezolvarea unor probleme ce modelează fenomene practice.

### 4.1 Operatori Shepard sferici combinați cu funcții radiale

#### 4.1.1 Operatori Shepard sferici combinați cu funcții radiale de tipul *thin-plate spline* și *inverse multiquadric*

Considerăm  $S^2$  sfera unitate din  $\mathbb{R}^3$  centrată în origine și o mulțime de noduri de interpolare  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i) \in S^2 : i = 1, \dots, K\}$  împreună cu valorile corespunzătoare  $f_i = f(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , ale funcției  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Cu ajutorul funcțiilor de bază zonale, locale (1.5.15) și (1.5.16), construite cu ajutorul funcțiilor de tipul *thin-plate spline* și *inverse multiquadric*, intenționăm să îmbunătățim operatorul Shepard modificat (1.5.10), considerând  $\mu = 2$ .

**Definiția 4.1.1.** Fie  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, K\} \subset S^2$  o mulțime de noduri date și  $I_j$  o mulțime



ce conține indicii corespunzători pentru  $n_Z$  vecini ai lui  $\mathbf{x}_j$ . Definim noii *interpolanți Shepard locali de tipul thin-plate spline* ca

$$S_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^K \bar{w}_j(\mathbf{x}) Z_j^{(1)}(\mathbf{x}), \quad (4.1.1)$$

cu funcția de bază zonală, locală dată de

$$Z_j^{(1)}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_j} a_i^j \psi_1(g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)),$$

și

$$S_2(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^K \bar{w}_j(\mathbf{x}) Z_j^{(2)}(\mathbf{x}), \quad (4.1.2)$$

cu funcția de bază zonală, locală, augmentată dată de

$$Z_j^{(2)}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_j} a_i^j \psi_1(g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)) + \sum_{k=1}^D A_k^j y_k(\mathbf{x}),$$

considerând funcția radială sferică de tipul *thin-plate spline* (vezi, e.g., [5])

$$\psi_1(r) = r^2 \log r, \quad r = 2 \sin \frac{g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2}, \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

În ambele cazuri, coeficienții ce apar se determină din

$$Z_j^{(k)}(\mathbf{x}_i) = f_i, \quad i \in I_j, \quad j = 1, \dots, K, \quad k = 1, 2, \quad (4.1.3)$$

împreună cu constrângerile adiționale pentru  $Z_j^{(2)}$ , impuse pentru mulțimea ce conține polinoamele armonice sferice de ordin cel mult  $d$  pe  $S^2$ ,  $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_D\}$ . În acest caz,  $\mathcal{Y}$  constituie o bază pentru  $\mathcal{H}_d(S^2)$  și  $D = \dim \mathcal{H}_d(S^2) \leq n_Z$ . Aceste condiții sunt

$$\sum_{i \in I_j} a_i^j y_k(\mathbf{x}_i) = 0, \quad k = 1, \dots, D, \quad j = 1, \dots, K. \quad (4.1.4)$$

**Definiția 4.1.2.** Fie  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, K\} \subset S^2$  o mulțime de noduri date și  $I_j$  o mulțime ce conține indicii corespunzători pentru  $n_Z$  vecini ai lui  $\mathbf{x}_j$ . Definim noii *interpolanți Shepard locali de tipul inverse multiquadric* ca

$$S_3(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^K \bar{w}_j(\mathbf{x}) Z_j^{(3)}(\mathbf{x}), \quad (4.1.5)$$

cu funcția de bază zonală, locală dată de

$$Z_j^{(3)}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_j} a_i^j \psi_2(g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)),$$

și

$$S_4(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^K \bar{w}_j(\mathbf{x}) Z_j^{(4)}(\mathbf{x}), \quad (4.1.6)$$

cu funcția de bază zonală, locală, augmentată dată de

$$Z_j^{(4)}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_j} a_i^j \psi_2(g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)) + \sum_{k=1}^D A_k^j y_k(\mathbf{x}), \quad (4.1.7)$$

considerând funcția radială sferică de tipul *inverse multiquadric* (vezi, e.g., [5])

$$\psi_2(r) = (r^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad r = 2 \sin \frac{g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2}, \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

Ca și în cazul precedent, coeficienții lui  $Z_j^{(3)}$  și  $Z_j^{(4)}$  sunt obținuți din condițiile de interpolare (4.1.3), împreună cu constrângerile suplimentare (4.1.4) pentru  $Z_j^{(4)}$ .

**Teorema 4.1.3.** *Se consideră o mulțime de noduri distincte  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, K\}$ , situate pe  $S^2$  și valorile corespunzătoare  $f_i, i = 1, \dots, K$ , ale funcției  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Pentru fiecare  $\mathbf{x} \in S^2$ , obținem următoarea estimare a erorii de interpolare pentru operatorii Shepard  $S_i, i = 1, \dots, 4$ , definiți în (4.1.1), (4.1.2), (4.1.5) și (4.1.6):*

$$E_i(x) = |f(\mathbf{x}) - S_i(\mathbf{x})| \leq \sum_{j=1}^K \bar{w}_j(\mathbf{x}) e_j(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

unde  $e_j(\mathbf{x}) = \left| f(\mathbf{x}) - Z_j^{(i)}(\mathbf{x}) \right|$  reprezintă eroarea de interpolare a funcțiilor de bază locale  $Z_j^{(i)}, i = 1, \dots, 4$ , pe mulțimea de noduri  $\mathbf{x}_k, k \in I_j, I_j$  conținând indicii nodurilor ai  $n_Z$  vecini pentru  $\mathbf{x}_j, j = 1, \dots, K$ . În plus, avem

$$E_i(\mathbf{x}) \leq \max_{j=1, \dots, K} e_j(\mathbf{x}), \quad \text{pentru } i = 1, \dots, 4 \text{ și } \mathbf{x} \in S^2.$$

**Teorema 4.1.4.** *Se consideră o mulțime de noduri distincte  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, K\}$ , situate pe  $S^2$  și valorile corespunzătoare  $f_i, i = 1, \dots, K$ , ale funcției  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Pentru operatorii Shepard  $S_1, S_3$  dați de (4.1.1) și (4.1.5) avem că  $S_i(\mathbf{x}) \in C^1(S^2), i = 1, 3$ .*

**Teorema 4.1.5.** *Pentru  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, K\}$  o mulțime de noduri distincte din  $S^2$  și  $f \in C(S^2)$ , următoarea estimare are loc*

$$|S_i(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq \sum_{j=1}^K \bar{w}_j(\mathbf{x}) |Z_j^{(i)}(\mathbf{x}) - Z_j^{(i)}(\mathbf{x}_j)| + \omega(f, h_{\mathcal{X}}), \quad \text{pentru } i = 1, \dots, 4,$$

unde  $\omega(f, h_{\mathcal{X}}) = \sup_{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq h_{\mathcal{X}}} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|$  reprezintă modulul de continuitate al funcției  $f$  și  $h_{\mathcal{X}}$  norma mesh, i.e.,  $h_{\mathcal{X}} = \sup_{\mathbf{x} \in S^2} g(\mathbf{x}, \mathcal{X})$ .

## 4.2 Operatori sferici Shepard-Bernoulli

### 4.2.1 Triangularizarea Delaunay a sferei

Problema interpolării datelor sferice cu ajutorul unor metode de triangularizare a fost adresată și tratată, de exemplu, în [68], [75].

**Definiția 4.2.1.** [73] O triangularizare  $T$  a lui  $\mathcal{X}$  reprezintă o mulțime de triunghiuri ce satisfac următoarele proprietăți:

1. Vârfurile triunghiurilor din  $T$  sunt reprezentate de nodurile din  $\mathcal{X}$ ;
2. Singurele noduri aflate într-un triunghi sunt cele care îi formează vârfurile;

3. Interioarele triunghiurilor sunt disjuncte două câte două;
4. Reuniunea tuturor triunghiurilor acoperă învelitoarea convexă a lui  $\mathcal{X}$ .

**Observația 4.2.2.** Vârfurile  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  ale unui triunghi sunt specificate în sens trigonometric (i.e, determinantul ale cărui linii/coloane sunt  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ , în această ordine, este pozitiv).

**Definiția 4.2.3.** [73] Spunem că o triangularizare  $T$  are *proprietatea interiorului gol al cercului circumscris* dacă cercul circumscris corespunzător fiecărui triunghi din  $T$  nu conține niciun alt nod în interiorul său. Acest tip de triangularizare se numește *triangularizare Delaunay*.

#### 4.2.2 Operatori Shepard de tipul Bernoulli

Pentru a obține noi operatori Shepard de tipul Bernoulli, vom utiliza coordonatele sferice  $(\phi, \theta)$  corespunzătoare punctului  $\mathbf{x} \in S^2$ , ale cărui coordonate carteziene sunt  $(x, y, z)$ .

Similar cazului plan (1.4.14), pot fi obținute derivatele direcționale ale unei funcții  $f$  relativ la  $\phi$  și  $\theta$  (vezi, e.g., [68]), așadar,  $B_m^{T(i)}[\tilde{f}](\phi, \theta)$  poate fi scris similar lui (1.4.27), considerând  $\tilde{f}(\phi, \theta) = f(x, y, z)$ .

În plus, în acest caz, coordonatele baricentrice  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  date de (1.4.13) sunt calculate pe baza ariei cu semn  $\mathcal{A}$  a triunghiului sferic cu vârfuri în  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in S^2$ , mai exact

$$\tan\left(\frac{\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)}{2}\right) = \frac{\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3)}{1 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_3},$$

cu  $\cdot$  reprezentând produsul scalar și  $\times$  produsul vectorial.

**Observația 4.2.4.** Coordonatele baricentrice  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  satisfac relația  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ .

**Definiția 4.2.5.** Fie  $T$  triangularizarea Delaunay a unei mulțimi  $\mathcal{X}$  ce conține  $K$  noduri  $\mathbf{x}_i \in S^2$ ,  $i = 1, \dots, K$ , și  $\mathcal{T}_i$  mulțimea tuturor triunghiurilor ce au un vârf în  $\mathbf{x}_i$ , pentru fiecare  $i = 1, \dots, K$ . Alegând ca triunghi reprezentativ pentru construcția operatorului  $B_m^{T(i)}[\tilde{f}]$  triunghiul  $T(i) \subset \mathcal{T}_i$  pentru care eroarea de aproximare este minimă, definim *operatorul Shepard-Bernoulli sferic* ca

$$S_{B_m}^1[f](\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(\mathbf{x}) B_m^{T(i)}[\tilde{f}](\phi, \theta), \quad \mathbf{x} \in S^2, \quad (4.2.1)$$

cu  $B_m^{T(i)}[\tilde{f}](\phi, \theta)$  dat în (1.4.27),  $\tilde{f}(\phi, \theta) = f(x, y, z)$  și  $A_{i,\mu}$  reprezentate în formă baricentrică ca

$$A_{i,\mu}(\mathbf{x}) = \frac{(g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i))^{-\mu}}{\sum_{k=1}^K (g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k))^{-\mu}}, \quad (4.2.2)$$

pentru  $\mu \in \mathbb{R}_+$  un parametru de control și  $g$  distanța geodezică (1.5.1).

**Teorema 4.2.6.** Se consideră o mulțime de noduri distincte  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , pe sfera unitate  $S^2$  și  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Pentru orice  $\mathbf{x} \in S^2$ , obținem următoarea estimare a erorii a operatorului Shepard  $S_{B_m}^1$  definit în (4.2.1)

$$E(\mathbf{x}) = |f(\mathbf{x}) - S_{B_m}^1[f](\mathbf{x})| \leq \sum_{i=1}^K A_{i,\mu}(\mathbf{x}) e_i(\mathbf{x}),$$

cu  $e_i(\mathbf{x}) = \left| f(\mathbf{x}) - B_m^{T(i)}[f](\phi, \theta) \right|$ ,  $i = 1, \dots, K$ . În plus, avem

$$E(\mathbf{x}) \leq \max_{i=1, \dots, K} e_i(\mathbf{x}), \text{ pentru orice } \mathbf{x} \in S^2.$$

În continuare considerăm o altă abordare, propusă în [97] și [98], ce constă în construirea operatorului Bernoulli pe fiecare triunghi al triangularizării  $T$  a lui  $S^2$ . În cazul nostru, vom considera triangularizarea Delaunay. Fie  $N$  numărul de triunghiuri din triangularizare. În această parte,  $\mathcal{T}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , va reprezenta un triunghi din triangularizare, cu vârfurile  $\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \mathbf{x}_{i_3}$ , astfel încât fiecare nod  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , să reprezinte vârful cel puțin al unui triunghi, i.e.,

$$\bigcup_i \{i_1, i_2, i_3\} = \{1, \dots, K\}.$$

Fiecare funcție de bază  $\Phi_{i,\mu}$  corespunzătoare triunghiului  $\mathcal{T}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , va fi de forma [97]

$$\Phi_{i,\mu}(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{j=1}^3 (g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{i_j}))^{-\mu}}{\sum_{k=1}^N \prod_{j=1}^3 (g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{k_j}))^{-\mu}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.2.3)$$

pentru  $\mu \in \mathbb{R}_+$  un parametru de control.

**Definiția 4.2.7.** Fie  $T$  triangularizarea Delaunay a sferei unitate  $S^2$  și  $\mathcal{T}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , un triunghi din  $T$ , astfel încât fiecare punct dintr-o mulțime de  $K$  noduri distincte  $\mathbf{x}_i \in S^2$ ,  $i = 1, \dots, K$ , reprezintă vârful cel puțin al unui triunghi din  $T$ . Cu ajutorul funcțiilor de bază  $\Phi_{i,\mu}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , date de (4.2.3), definim *operatorul Shepard-Bernoulli sferic modificat* ca

$$S_{B_m}^2[f](\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \Phi_{i,\mu}(\mathbf{x}) B_m^{\mathcal{T}_i}[\tilde{f}](\phi, \theta), \text{ oricare ar fi } \mathbf{x} \in S^2, \quad (4.2.4)$$

cu  $B_m^{\mathcal{T}_i}[\tilde{f}](\phi, \theta)$  dat de (1.4.27) și  $\tilde{f}(\phi, \theta) = f(x, y, z)$ .

**Teorema 4.2.8.** Considerând  $\mathbf{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, K$ , vârfurile cel puțin ale unui triunghi  $\mathcal{T}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , obținem următoarele proprietăți de interpolare pentru  $S_{B_m}^2[f]$ ,

$$S_{B_m}^2[f](\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}_j), \quad j = 1, \dots, K. \quad (4.2.5)$$

### 4.3 Aplicație în predicția temperaturilor medii

Vom considera un exemplu de aproximare a datelor reale folosind operatorii introduși în secțiunile precedente, mai exact predicția temperaturilor medii pe glob din ianuarie 2010 și iunie 2010. Setul de date a fost extras din [https://www.kaggle.com/datasets/shishu1421/global-temperature?select=air\\_temp.2010](https://www.kaggle.com/datasets/shishu1421/global-temperature?select=air_temp.2010). Pentru experimentele numerice, am considerat 1073 noduri și am reconstruit 21449 de valori ale temperaturii. Pentru operatorul Shepard combinat cu cele două funcții radiale sferice, am folosit cazul funcțiilor de bază zonale combinate cu un polinom armonic sferic,  $S_2$  și  $S_4$ , date în (4.1.2) și (4.1.6). În cazul operatorului Shepard-Bernoulli, am considerat a doua sa variantă, descrisă în (4.2.4), folosind operatorul Bernoulli de ordinul 1, i.e.,  $S_{B_1}^2$ . Valorile corespunzătoare lunii ianuarie sunt prezentate în Figura 4.1, iar cele din luna iunie în Figura 4.2.

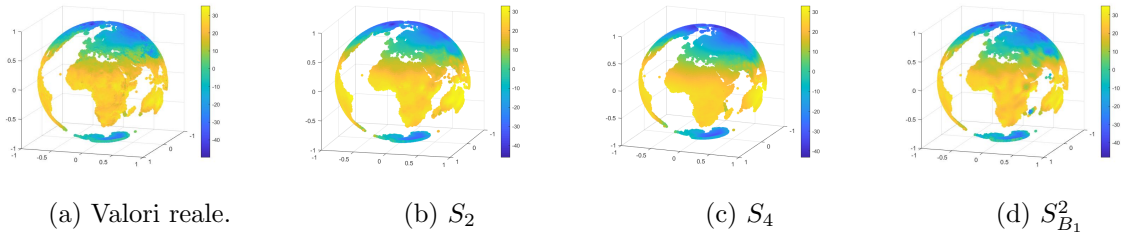


Figura 4.1: Temperaturile din ianuarie 2010.

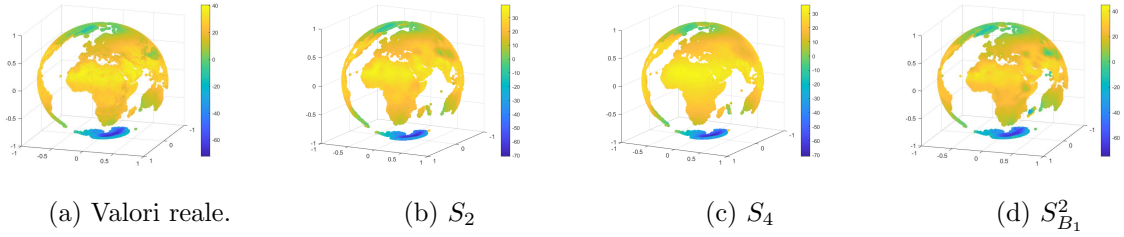


Figura 4.2: Temperaturile din iunie 2010.

#### 4.4 Aplicație în probleme de tip topografic

Pentru a ilustra alte beneficii practice ale acestor operatori, vom folosi date topografice provenite din Centrul Național de Date Geofizice, Departamentul de Comerț al SUA NOAA, disponibile în Matlab prin comanda `load topo`. Pentru reconstrucția a 21600 de date cu ajutorul operatorilor  $S_2$ ,  $S_4$  și  $S^2_{B_1}$ , definiți în (4.1.2), (4.1.6) și (4.2.4) am considerat 1063 de noduri. Rezultatele grafice sunt ilustrate în Figura 4.3.

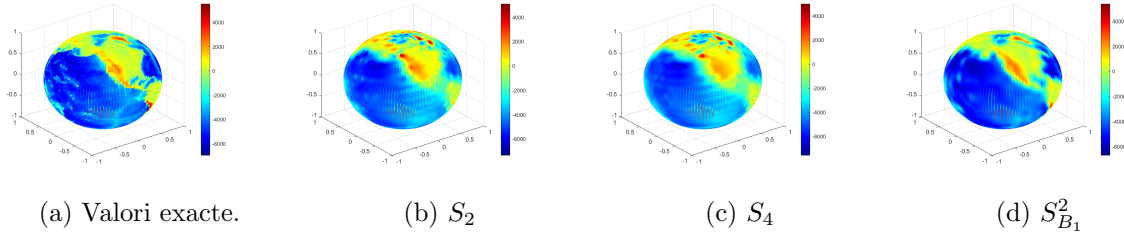


Figura 4.3: Valorile datelor topografice.

# Concluzii

Principalul scop al acestei teze a fost acela de a introduce și a studia noi operatori Shepard de tipul univariat, bivariat și sferic. Dată fiind importanța problemelor de interpolare a datelor dispersate, datorită numeroaselor aplicații practice, necesitatea găsirii unor metode pentru a îmbunătăți acest operator este de la sine înțeleasă.

Primul obiectiv a fost acela de a introduce un nou operator Shepard în cazul univariat, obținut cu ajutorul unor polinoame construite prin metoda celor mai mici pătrate ponderate. Am detaliat modul de construire al acestora și am investigat câteva dintre proprietățile lor precum cele de interpolare, gradul de exactitate și liniaritatea. Ulterior, cu ajutorul funcțiilor polinomiale construite, am obținut noii operatori Shepard și am demonstrat că aceștia moștenesc proprietățile menționate anterior. În final, am studiat restul formulei de interpolare pe baza Teoremei lui Peano.

A doua direcție de cercetare a cuprins cazul bivariat. Cu ajutorul a trei funcții radiale (*thin-plate spline*, *inverse quadratic* și *inverse multiquadric*), am introdus noi metode de aproximare folosind formele clasică, modificată și iterativă ale operatorului Shepard. Prima formă [82] este o metodă globală, așa cum a fost propusă inițial în 1968. Cea de-a doua [47] este una locală care asigură faptul că doar nodurile din vecinătatea punctului de aproximare au o influență semnificativă asupra datelor de reconstruit. Ultima metodă menționată [63] nu conține parametri artificiali pe care îi au primele două metode și asigură la fiecare iterație reducerea reziduuului de interpolare. Am demonstrat că acești operatori pot fi aplicați cu succes în reconstrucția de imagini alb-negru și color.

Ultima parte a acestei teze s-a concentrat asupra interpolării sferice a datelor dispersate, introducând doi noi operatori Shepard. Primul a fost construit folosind metoda locală și două funcții radiale sferice: *thin-plate spline* și *inverse multiquadric*. În plus, am considerat și o altă abordare, anume adăugarea unei componente polinomiale, mai precis un polinom armonic sferic, motivată de faptul că aceste aproximări oferă avantaje reale. Am studiat eroarea de interpolare, am arătat că operatorii sunt de clasă  $C^1$  și am oferit o limită a erorii pe baza modulului de continuitate. În cazul celui de-al doilea tip al operatorului Shepard, am considerat combinația dintre acesta și operatorul Bernoulli, potrivit atunci când se cunosc informații referitoare la derivatele parțiale ale funcției. Noii interpolanți au fost obținuți după triangularizarea de tip Delaunay a sferei, folosind două tipuri de funcții de bază în construcția lor. Am investigat eroarea de interpolare și proprietățile de interpolare. În final, am prezentat două aplicații practice ale operatorilor introduși în acest capitol, mai precis predicția temperaturilor de la

suprafața Pământului și aproximarea datelor de tip topografic.

Acuratețea metodelor propuse a fost investigată în toate cele trei capitole cu ajutorul numeroaselor funcții de test și mulțimi de date propuse.

Ca și direcții de cercetare viitoare menționăm, de exemplu, îmbunătățiri ale operatorului Shepard sferic, acesta fiind un subiect destul de recent în literatura de specialitate. Combinații cu operatori precum Lagrange sau Lidstone pot fi studiate. În plus, optimizarea implementării algoritmilor este necesară, deoarece problemele practice implică mulțimi foarte mari de date, necesitând astfel viteză, eficiență și paralelizarea algoritmilor în toate cazurile studiate pe parcursul tezei. Totodată, dată fiind cererea actuală privind cercetarea în inteligență artificială și învățare automată, ne propunem explorarea în detaliu a potențialului pe care operatorul Shepard îl are în aceste domenii. Recent, noi tehnici bazate pe interpolarea Shepard au fost dezvoltate pentru rețelele neuronale. Acestea au fost testate cu succes în probleme precum clasificarea seriilor de timp și a imaginilor, recunoașterea imaginilor sau probleme de *inpainting*, demonstrând astfel potențialul operatorului Shepard în aceste aplicații.

# Bibliografie

- [1] R. Agarwal and P. J. Y. Wong. *Error Inequalities in Polynomial Interpolation and their Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [2] G. Allasia, R. Cavoretto, and A. De Rossi. “Hermite-Birkhoff interpolation on scattered data on the sphere and other manifolds”. In: *Appl. Math. Comput.* 318 (2018), pp. 35–50.
- [3] K. Atkinson and W. Han. *Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction*. Springer Berlin, Heidelberg, 2012.
- [4] R. E. Barnhill, R. P. Dube, and F. F. Little. “Properties of Shepard’s surfaces”. In: *Rocky Mountain J. Math.* 13 (1983), pp. 365–382.
- [5] B.J.C. Baxter and S. Hubbert. “Radial basis functions for the sphere”. In: *Recent Progress in Multivariate Approximation*. Ed. by W. Haussmann, K. Jetter, and M. Reimer. Vol. 137. Basel: Birkhäuser Basel, 2001, pp. 33–47.
- [6] M.D. Buhmann. “New Developments in the Theory of Radial Basis Function Interpolation”. In: *Multivariate Approximation: From CAGD to Wavelets*. World Scientific Publishing, Singapore, 1993, pp. 35–75.
- [7] M.D. Buhmann. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Vol. 12. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [8] R. Caira and F. Dell’Accio. “Shepard-Bernoulli operators”. In: *Math. Comp.* 76 (2007), pp. 299–321.
- [9] R. Caira, F. Dell’Accio, and F. Di Tommaso. “On the bivariate Shepard–Lidstone operators”. In: *J. Comput. Appl. Math.* 236 (2012), pp. 1691–1707.
- [10] T. Căţinaş. “Bivariate interpolation by combined Shepard operators”. In: *Proceedings of 17<sup>th</sup> IMACS World Congress, Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation*. Ed. by P. Borne et al. Paris, 2005, 7 pp.
- [11] T. Căţinaş. “The bivariate Shepard operator of Bernoulli type”. In: *Calcolo* 44.4 (2007), pp. 189–202.
- [12] T. Căţinaş. “The combined Shepard-Abel-Goncharov univariate operator”. In: *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.* 32 (2003), pp. 11–20.



- [13] T. Cătiņaş. “The combined Shepard-Lidstone bivariate operator”. In: *Trends and Applications in Constructive Approximation*. Ed. by D.H. Mache, J. Szabados, and M.G. de Bruin. Vol. 151. Basel: Birkhäuser Basel, 2005, pp. 77–89.
- [14] T. Cătiņaş and A. Malina. “Shepard operator of least squares thin-plate spline type”. In: *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 66 (2021), pp. 257–265. DOI: 10.24193/subbmath.2021.2.02.
- [15] T. Cătiņaş and A. Malina. “Spherical interpolation of scattered data using least squares thin-plate spline and inverse multiquadric functions”. In: *Numer. Algor.* 97 (2024), pp. 1397–1414. DOI: 10.1007/s11075-024-01755-6.
- [16] T. Cătiņaş and A. Malina. “Spherical Shepard-Bernoulli operator”. In: *J. Appl. Math. Comput.* (2024). DOI: 10.1007/s12190-024-02285-z.
- [17] T. Cătiņaş and A. Malina. “The combined Shepard operator of inverse quadratic and inverse multiquadric type”. In: *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 67 (2022), pp. 579–589. DOI: 10.24193/subbmath.2022.3.09.
- [18] R. Cavoretto and A. De Rossi. “Achieving accuracy and efficiency in spherical modelling of real data”. In: *Math. Methods Appl. Sci.* 37 (2014), pp. 1449–1459.
- [19] R. Cavoretto and A. De Rossi. “Fast and accurate interpolation of large scattered data sets on the sphere”. In: *J. Comput. Appl. Math.* 234 (2010), pp. 1505–1521.
- [20] R. Cavoretto and A. De Rossi. “Numerical comparison of different weights in Shepard’s interpolants on the sphere”. In: *Appl. Math. Sci.* 4 (2010), pp. 3425–3435.
- [21] R. Cavoretto and A. De Rossi. “Spherical interpolation using the partition of unity method: An efficient and flexible algorithm”. In: *Appl. Math. Lett.* 25 (2012), pp. 1251–1256.
- [22] R. Cavoretto et al. “An efficient trivariate algorithm for tetrahedral Shepard interpolation”. In: *J. Sci. Comput.* 57 (2020).
- [23] R. Cavoretto et al. “Fast computation of triangular Shepard interpolants”. In: *J. Comput. Appl. Math.* 354 (2019), pp. 457–470.
- [24] Gh. Coman. “Hermite-type Shepard operators”. In: *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.* 26 (1997), pp. 33–38.
- [25] Gh. Coman. “Shepard operators of Birkhoff type”. In: *Calcolo* 35 (1998), pp. 197–203.
- [26] Gh. Coman. “The remainder of certain Shepard type interpolation formulas”. In: *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 32.4 (1987), pp. 24–32.
- [27] Gh. Coman, I. Chiorean, and T. Cătiņaş. *Numerical Analysis. An Advanced Course*. Ed. Presa Univ. Clujeană, 2007.
- [28] Gh. Coman and L. Țâmbulea. “A Shepard Taylor approximation formula”. In: *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 33 (1988), pp. 65–73.
- [29] Gh. Coman and R. Trîmbițaş. “Combined Shepard univariate operators”. In: *East J. Approx.* 7 (2001), pp. 471–483.

- [30] Gh. Coman and R. Trîmbițaș. “Shepard operator of Lagrange type”. In: *Stud. Univ. Babeș-Bolyai Math.* 42.1 (1997), pp. 75–83.
- [31] Gh. Coman and R. Trîmbițaș. “Univariate Shepard-Birkhoff interpolation”. In: *J. Numer. Anal. Approx. Theory* 30 (2001), pp. 15–24.
- [32] F. A. Costabile and F. Dell’Accio. “Expansion over a rectangle of real functions in Bernoulli polynomials and applications”. In: *BIT* 41 (2001), pp. 451–464.
- [33] F. A. Costabile and F. Dell’Accio. “Expansion over a simplex of real functions by means of Bernoulli polynomials”. In: *Numer. Algorithms* 28 (2001), pp. 63–86.
- [34] F.A. Costabile and F. Dell’Accio. “Lidstone approximation on the triangle”. In: *Appl. Numer. Math.* 52 (2005), pp. 339–361.
- [35] A. De Rossi. “Hybrid spherical approximation”. In: (2014). arXiv: 1404.1475.
- [36] A. De Rossi. “Spherical interpolation of large scattered data sets using zonal basis functions”. In: *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*. Ed. by M. Daehlen, K. Morken, and L. Schumaker. Trømsø: Nashboro Press, 2005, pp. 125–134.
- [37] F. Dell’Accio and F. Di Tommaso. “Bivariate Shepard-Bernoulli operators”. In: *Math. Comput. Simulation* 141 (2017), pp. 65–82.
- [38] F. Dell’Accio and F. Di Tommaso. “Complete Hermite–Birkhoff interpolation on scattered data by combined Shepard operators”. In: *J. Comput. Appl. Math.* 300 (2016), pp. 192–206.
- [39] F. Dell’Accio and F. Di Tommaso. “Scattered data interpolation by Shepard’s like methods: classical results and recent advances”. In: *Dolomites Res. Notes Approx.* 9 (2016), pp. 32–44.
- [40] F. Dell’Accio et al. “Increasing the approximation order of the triangular Shepard method”. In: *Appl. Numer. Math.* 126 (2018), pp. 78–91.
- [41] F. Dell’Accio, F. Di Tommaso, and K. Hormann. “On the approximation order of triangular Shepard interpolation”. In: *IMA J. Numer. Anal.* 36 (2016), pp. 359–379.
- [42] K. Dzharidze and R. H. P. Janssen. “A stochastic approach to an interpolation problem with applications to Hellinger integrals and arithmetic-geometric mean relationship”. In: *CWI Report, Amsterdam* 3 (1994).
- [43] R. Farwig. “Rate of convergence of Shepard’s global interpolation formula”. In: *Math. Comp.* 46 (1986), pp. 1577–590.
- [44] G.E. Fasshauer. *Meshfree Approximation Methods with MATLAB, Interdisciplinary Mathematical Sciences*. World Scientific Publishing Co Pte. Ltd., Hackensack, 2007.
- [45] G.E. Fasshauer and Zhang J.G. “On choosing “optimal” shape parameters for RBF approximation”. In: *Numer. Algor.* 45 (2007), pp. 345–368.
- [46] R. Franke. “Scattered data interpolation: tests of some methods”. In: *Math. Comp.* 385 (1982), pp. 181–200.

- [47] R. Franke and G. Nielson. “Smooth interpolation of large sets of scattered data”. In: *Int. J. Numer. Meths. Engrg.* 15 (1980), pp. 1691–1704.
- [48] K. Guo and S. Hu nd X. Sun. “Conditionally positive definite functions and Laplace-Stieltjes integrals”. In: *J. Approx. Theory* 74 (1993), pp. 249–265.
- [49] R. Harder and R. Desmarais. “Interpolation using surface splines”. In: *J. Aircr.* 9 (1972), pp. 189–191.
- [50] R. Hardy. “Geodetic applications of multiquadric analysis”. In: *AVN Allg. Vermess. Nachr.* 79 (1972), pp. 389–406.
- [51] R. Hardy. “Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces”. In: *J. Geophys. Res.* 76 (1971), pp. 1905–1915.
- [52] R. Hardy. “Research results in the application of multiquadric equations to surveying and mapping problems”. In: *Surv. Mapp.* 35 (1975), pp. 321–332.
- [53] K. Hesse, I. Sloan, and R. Womersley. “Radial basis function approximation of noisy scattered data on the sphere”. In: *Numer. Math.* 137 (2017), pp. 1–27.
- [54] S. Hubbert, Q.T. Le Gia, and T. Morton. *Spherical Radial Basis Functions. Theory and Applications*. Springer, 2015.
- [55] R. Jordan. *Calculus of Finite Differences*. Chelsea Publishing Co., New York, 1960.
- [56] P. Lancaster and K. Salkauskas. “Surfaces generated by moving least squares methods”. In: *Math. Comp.* 37 (1981), pp. 141–158.
- [57] D. Lazzaro and L.B. Montefusco. “Radial basis functions for multivariate interpolation of large scattered data sets”. In: *J. Comput. Appl. Math.* 140 (2002), pp. 521–536.
- [58] Q.T. Le Gia, I. H. Sloan, and H. Wendland. “Multiscale analysis in Sobolev spaces on the sphere”. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 48.6 (2010), pp. 2065–2090.
- [59] F. Little. “Convex combination surfaces”. In: *Surfaces in Computer Aided Geometric Design (Barnhill, R.E., Boehm, W. (eds))*. Amsterdam: North-Holland, 1983, pp. 99–107.
- [60] A. Malina. “An application of the Shepard operator in image reconstruction”. In: *2024 26th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC)*. To appear. 2024.
- [61] A. Malina. “Iterative Shepard operator of least squares thin-plate spline type”. In: *Dolomites Res. Notes Approx.* 16 (2023), pp. 54–59. DOI: 10.14658/PUPJ-DRNA-2023-3-8.
- [62] A. Malina. “Univariate Shepard operators combined with least squares fitting polynomials”. In: *Filomat* 38.15 (2024), pp. 5507–5516. DOI: 10.2298/FIL2415507M.
- [63] A.V. Masjukov and V.V. Masjukov. “Multiscale modification of Shepard’s method for interpolation of multivariate scattered data”. In: *Mathematical Modelling and Analysis, Proceeding of the 10th International Conference MMA2005 & CMAM2*. 2005, pp. 467–472.

- [64] J. R. McMahon. “Knot selection for least squares approximation using thin plate splines”. In: *M.S. Thesis*. Naval Postgraduate School, 1986.
- [65] J. R. McMahon and R. Franke. “Knot selection for least squares thin plate splines”. In: *Technical Report*. Naval Postgraduate School, Monterey, 1987.
- [66] C.A. Micchelli. “Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions”. In: *Constr. Approx* 2 (1986), pp. 11–22.
- [67] C. Müller. *Spherical Harmonics. Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 17. Springer, Berlin, 1966.
- [68] G. Nielson and R. Ramaraj. “Interpolation over a sphere based upon a minimum norm network”. In: *Comput. Aided Geom. Design* 4 (1987), pp. 41–57.
- [69] P. Paewpolsong et al. “Image reconstruction by shapefree radial basis function neural networks (RBFNs)”. In: *Journal of Physics: Conference Series* 2312.1 (2022).
- [70] W. Phillip. “SINN: Shepard Interpolation Neural Networks”. In: *Advances in Visual Computing*. Springer International Publishing, 2016, pp. 349–358.
- [71] S.J. Ren et al. “Shepard Convolutional Neural Networks”. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. Vol. 28. Curran Associates, Inc., 2015.
- [72] R.J. Renka. “Algorithm 660: QSHEP2D: Quadratic method for bivariate interpolation of scattered data”. In: *ACM Trans. Math. Software* 14 (1988), pp. 149–150.
- [73] R.J. Renka. “Algorithm 772: STRIPACK, Delaunay Triangulation and Voronoi Diagram on the Surface of a Sphere”. In: *ACM Trans. Math. Software* 23 (1997), pp. 416–434.
- [74] R.J. Renka. “Algorithm 790: CSHEP2D: Cubic method for bivariate interpolation of scattered data”. In: *ACM Trans. Math. Software* 25 (1999), pp. 70–73.
- [75] R.J. Renka. “Interpolation of data on the surface of a sphere”. In: *ACM Trans. Math. Software* 10 (1984), pp. 417–436.
- [76] R.J. Renka. “Multivariate interpolation of large sets of scattered data”. In: *ACM Trans. Math. Software* 14 (1988), pp. 139–148.
- [77] R.J. Renka and A.K. Cline. “A triangle-based  $C^1$  interpolation method”. In: *Rocky Mountain J. Math.* 14 (1984), pp. 223–237.
- [78] E.B. Saff and A.B.J. Kuijlaars. “Distributing many points on a sphere”. In: *Math. Intelligencer* 19 (1997), pp. 5–11.
- [79] A. Sard. *Linear approximation*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1963.
- [80] V. Savchenko, N. Kojekine, and H. Unno. “A practical image retouching method”. In: *CW ’02: Proceedings of the First International Symposium on Cyber Worlds*. 2002, pp. 480–487.
- [81] I.J. Schoenberg. “Metric spaces and completely monotone functions”. In: *Ann. of Math.* 39 (1938), pp. 811–841.

- [82] D. Shepard. “A two dimensional interpolation function for irregularly spaced data”. In: *Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference*. ACM, 1968, pp. 517–523.
- [83] V. Skala. “Fast Reconstruction of Corrupted Images and Videos by Radial Basis Functions”. In: *ICCAIS 2013 Conf.* 2013, pp. 267–271.
- [84] I.H. Sloan and A. Sommariva. “Approximation on the sphere using radial basis functions plus polynomials”. In: *Adv. Comput. Math.* 29 (2008), pp. 147–177.
- [85] K. Smith and P. Williams. “Time Series Classification with Shallow Learning Shepard Interpolation Neural Networks”. In: *Image and Signal Processing*. Springer International Publishing, 2018, pp. 329–338.
- [86] K. Smith et al. “Deep Convolutional-Shepard Interpolation Neural Networks for Image Classification Tasks”. In: *Image Analysis and Recognition*. Springer International Publishing, 2018, pp. 185–192.
- [87] K. Smith et al. “Shepard Interpolation Neural Networks with K-Means: A Shallow Learning Method for Time Series Classification”. In: *2018 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*. 2018, pp. 1–6.
- [88] I. Somogyi and A. Soos. “Interpolation methods for multivalued functions”. In: *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 61 (2016), pp. 377–382.
- [89] W. Thacker et al. “Algorithm 905: SHEPPACK: Modified Shepard algorithm for interpolation of scattered multivariate data”. In: *ACM Trans. Math. Software.* 37 (2010), pp. 1–20.
- [90] R. Trîmbiţaş. “Univariate Shepard-Lagrange interpolation”. In: *Kragujevac J. Math.* 24 (2002), pp. 85–94.
- [91] K. Uhler and V. Skala. “Reconstruction of damaged images using Radial Basis Functions”. In: *2005 13th European Signal Processing Conference*. 2005, pp. 1–4.
- [92] P. Wen, X. Wu, and C. Wu. “An interactive image inpainting method based on RBF networks”. In: *Advances in Neural Networks* 3972 (2006), pp. 629–637.
- [93] H. Wendland. *Scattered Data Approximation, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Vol. 17. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [94] T.T. Wong, W.S. Luk, and P.A. Heng. “Sampling with Hammersley and Halton Points”. In: *J. Graph. Tools* 2.2 (1997), pp. 9–24.
- [95] J. Zapletal, P. Vanecek, and V. Skala. “Influence of essential parameters on the RBF based image reconstruction”. In: *Proceedings of SCCG 2008*. 2008, pp. 178–185.
- [96] J. Zapletal, P. Vanecek, and V. Skala. “RBF-based image restoration utilising auxiliary points”. In: *Computer Graphics International Conference, ACM*. 2009, pp. 39–44.
- [97] B. Zerroudi, H. Tayeq, and A. El Harrak. “Effective interpolation of scattered data on a sphere through a Shepard-like method”. In: *Math. Model. Comput.* 10 (2023), pp. 1174–1186.

- [98] B. Zerroudi, H. Tayeq, and A. El Harrak. “Scattered data interpolation on the 2-dimensional surface through Shepard-like technique”. In: *Math. Model. Comput.* 11 (2024), pp. 277–289.
- [99] C. Zuppa. “Error estimates for moving least square approximations”. In: *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S)* 34.2 (2003), pp. 231–249.