

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
SCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

TEZĂ DE DOCTORAT - REZUMAT

**CONTRIBUȚII ÎN TEORIA PROBLEMELOR CU
VALORI PE FRONTIERĂ ELIPTICEȘI APLICAȚIILE
ACESTORA ÎN MECANICA FLUIDELOR**

Coordonator Științific
Prof. Univ. Dr. Mirela Kohr

Student Doctorand
Andrei-Florin Albișoru

Cluj-Napoca, 2024



Cuprins

Introducere	6
1 Metode de Teoria Potențialului pentru sistemele Stokes și Brinkman în domenii Lipschitz	14
1.1 Cadrul funcțional	14
1.1.1 Domenii Lipschitz	15
1.1.2 Despre spații Sobolev pe domenii Lipschitz	16
1.1.3 Spații Sobolev pe frontiere Lipschitz boundaries	20
1.1.4 Spații Sobolev ponderate	20
1.1.5 Operatorul Urmă pe Spații Sobolev	21
1.2 Operatorii Stokes, Brinkman classic și Brinkman generalizat	22
1.2.1 Operatorul de derivare conormală asociat sistemelor Stokes și Brinkman	23
1.2.2 Sistemul Brinkman generalizat și rezultate aferente	25
1.3 Potențialele de strat Stokes și proprietățile acestora	26
1.3.1 Sistemul Stokes și soluția sa fundamentală	27
1.3.2 Potențialul de volum asociat sistemului Stokes și proprietățile acestuia	27
1.3.3 Potențialele de strat asociate sistemului Stokes și rezultate aferente	28
1.4 Potențialele de strat Brinkman și proprietățile acestora	30
1.4.1 Sistemul Brinkman și soluția sa fundamentală	31
1.4.2 Potențialul de volum asociat sistemului Brinkman și proprietățile acestuia	32
1.4.3 Potențialele de strat asociate sistemului Brinkman și rezultate aferente	33
2 Probleme cu valori pe frontieră liniare de tip transmisie legate de sistemele Stokes și Brinkman	36
2.1 Problema de tip Dirichlet pentru sistemul Brinkman într-un domeniu exterior	38
2.2 Problema de transmisie pentru un sistem de tip Brinkman și sistemul Stokes în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3	39
2.2.1 Problema de transmisie pentru sistemul Stokes în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3	40
2.3 Problema de transmisie pentru sistemele Brinkman generalizat și Brinkman clasic în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3	41
2.3.1 Problema de transmisie pentru sistemele Stokes și Brinkman în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3	42
2.4 Asupra unei probleme de tip Robin-transmisie pentru sistemul Brinkman	43
2.4.1 Sistemul Brinkman și o problemă Robin-transmisie de tip limită asociată, în cazul $\lambda = 0$	50

2.4.2	Sistemul Brinkman și o problemă Robin-Dirichlet asociată	51
3	Probleme cu valori pe frontieră neliniare de tip transmisie legate de sistemele Navier-Stokes și Darcy-Forchheimer-Brinkman	53
3.1	Sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat și rezultate asociate	54
3.2	Problema de transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat și sistemul Stokes clasic în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3	54
3.3	Problema de transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat și sistemul Brinkman clasic în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3	56
3.4	Asupra unei probleme de tip Robin-transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman	57
3.4.1	Sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman și o problemă Robin-transmisie de tip limită asociată, în cazul $\lambda = 0$	61
3.4.2	Sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman și o problemă Robin-Dirichlet asociată	62
4	O abordare numerică legată de sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman cu condiții Robin-Dirichlet	63
4.1	Studiul numeric al problemei mișcării fluide într-o cavitate bidimensională antrenată de un perete cu condiția de alunecare pe frontieră de tip Navier, în prezența unui corp solid	64
4.1.1	Enunțarea problemei și observații	64
4.1.2	Modelul matematic al problemei	64
4.1.3	Metoda numerică și validarea modelului	65
4.1.4	Rezultate și discuții	66
	Further research directions	69
	Concluzii	71
	Bibliografie - Listă Selectivă	73

Mulțumiri

În primul rând, aș dori să-mi exprim cea mai sinceră și profundă recunoștință doamnei **Prof. Univ. Dr. Mirela Kohr**. Aș dori să-i mulțumesc pentru îndrumarea ei continuă, încurajarea constantă de-a lungul acestor ani și apreciez profund încrederea ei neclintită în mine. Fără răbdarea ei nesfârșită și grija ei nemărginită, această teză nu ar fi fost posibilă. Sunt recunoscător că m-a introdus în acest domeniu și pentru faptul de a împărtăși cu mine experiența și expertiza dumneaei.

În al doilea rând, îi sunt recunoscător doamnei **Prof. Univ. Dr. Gabriela Kohr**. Am avut onoarea de a asista la cursurile dumneaei și am avut ocazia unică să o ajut ca profesor de seminar în activităților didactice desfășurate în cadrul Analizei Complexe în timpul studiilor mele. Datorită dânselor și doamnei **Prof. Univ. Dr. Mirela Kohr**, am putut să învăț cele mai importante principii pentru a fi un adevărat profesor și am învățat de la dumnealor ceea ce este important pentru a fi un adevărat cercetător. Simțim lipsa doamnei **Prof. Univ. Dr. Gabriela Kohr**.

În al treilea rând, aș dori să ofer mulțumiri sincere domnilor **Prof. Univ. Dr. Radu Precup**, **Prof. Univ. Dr. Teodor Groșan** și **Conf. Univ. Dr. Cornel Pinte** pentru cunoștințele pe care mi le-au transmis pe parcursul studiilor mele.

Aș dori să-mi exprim recunoștința față de domnul **Prof. Massimo Lanza de Cristoforis** pentru oportunitatea de a vizita și de a studia în cadrul Departamentului de Matematică "Tullio Levi-Civita" la Universita degli Studi di Padova, Italia. De asemenea, îi sunt recunoscător domnului **Prof. Wolfgang L. Wendland** pentru discuțiile valoroase și pentru asistență.

De asemenea, îi sunt recunoscător domnului **Prof. Univ. Dr. Ioan Pop** pentru suportul pe care l-am primit în calitate de asistent de cercetare științifică în primii doi ani de studii, în cadrul proiectului PN-III-P4-ID-PCE-2016-0036.

Îmi face plăcere să mulțumesc **Stud. Drd. Ioan Papuc** pentru ajutorul pe care l-a oferit cu simularea numerică cuprinsă în această teză. Mulțumirile mele se mai îndreaptă către **Emanuela Paul** pentru ajutorul acordat cu unele figuri incluse în această teză.

Pe parcursul studiilor am fost susținut de familia și prietenii mei. M-au ajutat de multe ori și sunt recunoscător pentru ajutorul lor. De asemenea, doresc să-mi exprim recunoștința celor mai mari susținători ai mei, părinții mei, care au crezut mereu în mine și au fost alături de mine, atât cu gândul, cât și cu fapta.

Introducere

Scopul acestei teze de doctorat este tratarea de probleme importante cu valori pe frontieră eliptice pentru sisteme de ecuații cu derivate parțiale (EDP) care apar în mecanica fluidelor, cu ajutorul metodelor teoriei potențialului și a unei teoreme de punct fix. Am tratat diverse probleme cu valori pe frontieră precum probleme Dirichlet, Robin-Dirichlet, transmisie, Robin-transmisie în cazul liniar, precum și în cazul neliniar. Am oferit exemple numerice sugestive pentru o problemă practică cu aplicații multiple, cu scopul de a completa studiul teoretic, prezentat în primele trei capitole.

În cele ce urmează, fie $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ un domeniu Lipschitz mărginit și notăm frontiera acestui domeniu cu Γ . Considerăm \mathcal{P} , o funcție cu valori matriceale, ale cărei componente sunt funcții esențial mărginite. Introducem sistemul Brinkman

$$\Delta \mathbf{v} - \mathcal{P}\mathbf{v} - \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{în } D, \quad (0.0.1)$$

unde perechea (\mathbf{v}, p) reprezintă câmpurile viteză, respectiv presiune ale fluxului de fluid considerat și \mathbf{f} este o forță externă, dată, care acționează asupra curgerii fluidului. În cazul special $\mathcal{P} = \alpha \mathbb{I}$, în care $\alpha > 0$ este o constantă dată, sistemul (0.0.1) devine sistemul Brinkman clasic,

$$\Delta \mathbf{v} - \alpha \mathbf{v} - \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \text{în } D. \quad (0.0.2)$$

Dacă considerăm $\mathcal{P} = 0$ în sistemul (0.0.1), obținem renumitul sistem Stokes,

$$\Delta \mathbf{v} - \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \text{în } D. \quad (0.0.3)$$

Acum, să considerăm sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat

$$\Delta \mathbf{v} - \mathcal{P}\mathbf{v} - k|\mathbf{v}|\mathbf{v} - \beta(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \text{în } D, \quad (0.0.4)$$

unde k, β sunt funcții pozitive, esențial mărginite, definite pe D . În cazul special $\mathcal{P} = \alpha \mathbb{I}$, în care $\alpha > 0$ este o constantă dată și $k, \beta > 0$ sunt constante date, sistemul (0.0.4) devine sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman clasic

$$\Delta \mathbf{v} - \alpha \mathbf{v} - k|\mathbf{v}|\mathbf{v} - \beta(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \text{în } D. \quad (0.0.5)$$

Să menționăm faptul că sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman este utilizat în probleme în care inerția fluidului nu este neglijabilă. (a se vedea, de exemplu, [86]).

În cele din urmă, pentru $\mathcal{P} = 0$, $k = 0$ și $\beta > 0$ o constantă dată, sistemul (0.0.4) devine sistemul Navier-Stokes

$$\Delta \mathbf{v} - \beta(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \text{în } D. \quad (0.0.6)$$

Pentru detalii suplimentare cu privire la ecuațiile Navier-Stokes a se vedea [38], [100], [97], [102].

În această teză, ne vom ocupa de cuplarea acestor sisteme de ecuații cu derivate parțiale (EDP) menționate anterior. În aceste probleme de transmisie, ne vom ocupa în mod specific de două tipuri de configurații. Geometria acestor configurații este specificată în detaliu în Capitolul 1. Mai mult, în aceste probleme, luăm în considerare următoarele condiții pe frontieră

$$\text{Tr}_{D_+} \mathbf{v}_+ - \text{Tr}_{D_-} \mathbf{v}_- = \mathbf{g}, \quad \mathbf{t}_{\mathcal{P}, D_+}(\mathbf{v}_+, p_+, \mathbf{f}_+) - \mathbf{t}_{D_-}(\mathbf{v}_-, p_-, \mathbf{f}_-) + \mathbf{L} \text{Tr}_{D_+} \mathbf{v}_+ = \mathbf{h}, \quad \text{pe } \Gamma, \quad (0.0.7)$$

care vor fi denumite *condiții de transmisie*, unde operatorul urmă Tr , operatorul de derivare conormală \mathbf{t} și funcția cu valori matriceale \mathbf{L} sunt descrise ulterior.

În această teză, am luat în considerare sistemul Brinkman generalizat (0.0.1), pe care l-am obținut prin înlocuirea constantei $\alpha > 0$ (în sistemul (0.0.2)) cu o funcție cu valori matriceale, \mathcal{P} , ale cărei intrări sunt funcții esențial mărginite. În acest caz, prin generalizarea menționată mai sus, ne îndreptăm către conceptul de sistem Brinkman anizotrop. Scopul pe care îl avem în vedere este acela de a investiga fluxul de fluid în medii poroase, în cazul în care mediul nostru poros are porozitate sau permeabilitate variabilă. Pentru mai multe detalii, vezi, spre exemplu, [58], [59], [60].

Să oferim câteva perspective pentru motivația practică pentru studiul problemelor de transmisie. Să menționăm faptul că, problemele de transmisie apar ca un model matematic pentru studiul problemelor de mediu în care fluxul de aer liber interacționează cu evaporarea din sol și/sau schimbul transvascular dintre fluxul sanguin din vase și țesutul înconjurător (pentru detalii adiționale, vezi, [52] și referințele din acesta). Sistemul Stokes anizotrop este folosit pentru a descrie anumite procese (de exemplu, procese din fizică, inginerie, industrie) în care apar diferite fluxuri de fluide, spre exemplu, fluxul de fluide imiscibile sau fluxul de fluide neomogene cu vâscozitate care depinde de densitate (cf. [18], a se vedea, de asemenea, [60]).

Pentru a studia astfel de probleme, pot fi folosite multe tehnici. Pentru problemele cu valori pe frontieră liniare, subliniem două abordări, și anume, metodele teoriei potențialului și, respectiv, metodele variaționale. De asemenea, pentru studiul problemelor neliniare cu valori pe frontieră, se poate folosi fie teoria punctului fix, fie teoria gradului topologic.

În cele ce urmează, vom oferi o scurtă imagine de ansamblu asupra a literaturii științifice care se referă la problemele cu valori pe frontieră.

Să explorăm lucrări anterioare care se ocupă de studiul problemelor cu valori pe frontieră în context euclidian. Să începem cu lucrarea lui Verchota [107], care a stabilit proprietatea de inversabilitate a potențialelor de strat clasice asociate ecuației lui Laplace, în $L^2(\partial\Omega)$ și în subspații ale spațiului $L^2(\partial\Omega)$, în cazul unui domeniu Lipschitz mărginit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Dahlberg, Kenig și Verchota [21] au obținut rezultate de bine-punere pentru problema Dirichlet pentru sistemul Lamé într-un domeniu Lipschitz arbitrar în \mathbb{R}^n cu date pe frontieră din L^2 . Aceștia au investigat, de asemenea, „condiția de alunecare” pentru ecuațiile Stokes, în cazul în care datele pe frontieră aparțin spațiului L^2 (vezi și [22]). Amrouche, Girault și Girore [12] au rezolvat probleme cu valori pe frontieră de tip Dirichlet și Neumann pentru Laplacian în domenii exterioare din \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, în cadrul spațiilor Sobolev ponderate. Fabes, Mendez și Mitrea [32] au folosit metode integrale pe frontieră pentru investigarea problemelor cu valori pe frontieră neomogene pentru Laplacian în domenii arbitrare Lipschitz cu date în spații Besov. Escauriaza și Mitrea [30] au stabilit rezultate de existență și unicitate pentru problema de transmisie pentru Laplacian în cadrul domeniilor Lipschitz complementare în \mathbb{R}^n pentru $n \geq 2$, în timp ce datele pe frontieră au considerare în spații Lebesgue și Hardy.

În cele ce urmează, să numim câteva lucrări în care au fost efectuate studiile asupra sistemului Stokes (0.0.3). Cu toate acestea, lista publicațiilor în care se discută acest subiect este mult mai lungă. Studiul efectuat de Fabes, Kenig și Verchota [31] este o contribuție importantă în domeniul

teoriei potențialului. Autorii au folosit potențiale de strat pentru a obține rezultate de existență și unicitate pentru problema Dirichlet pentru sistemul Stokes într-un domeniu Lipschitz arbitrar în \mathbb{R}^n , în cazul în care datele pe frontieră aparțin spațiului L^2 . Dauge [24] a studiat H^s -regularitatea soluțiilor sistemului Stokes în domenii cu colțuri. Girault și Sequeira [40] au investigat problema Dirichlet pentru sistemul Stokes în domeniile exterioare Lipschitz în \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$. Power [89] a extins metoda folosită în [90] la cea a problemei fluxului Stokes în cilindri multipli, într-un cadru bidimensional, domenii mărginite și nemărginite. Shen [98] a considerat problema L^p Dirichlet pentru sistemul Stokes în domenii Lipschitz mărginite în \mathbb{R}^n , $n \geq 3$ și a furnizat rezultate de bine-punere pentru o astfel de problemă. Alliot și Amrouche [9] au dedicat un studiu problemei Stokes în \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, în spații Sobolev ponderate. Această abordare permite autorilor să discute despre condițiile de creștere ale soluțiilor la infinit. Alliot și Amrouche [11] au investigat problema neomogenă Dirichlet pentru sistemul Stokes într-un domeniu Lipschitz exterior, conex, în \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ în spații Sobolev ponderate, pentru a lua în considerare comportamentul soluției la infinit. Russo și Tartaglione [94] au furnizat rezultate de existență și unicitate pentru problema de tip Robin asociată sistemului Stokes și, de asemenea, pentru sistemul Navier-Stokes, într-un domeniu Lipschitz mărginit în cadrul euclidian.

Sistemul liniar, eliptic Brinkman (0.0.2) a fost, de asemenea, investigat de o mulțime de cercetători. McCracken [72] a studiat problema Dirichlet pentru sistemul Stokes rezolvent în semi-spațiu în \mathbb{R}^3 și a furnizat rezultatul de bine-punere al problemei Dirichlet în spații L^p . Deuring [25] a construit soluții în spații L^p pentru problema Dirichlet pentru sistemul Stokes rezolvent în exteriorul unui domeniu mărginit cu frontieră de clasă C^2 , în \mathbb{R}^3 . Farwig și Sohr [33] au arătat că problema Dirichlet pentru sistemul Stokes rezolvent admite o soluție unică în spații Sobolev ponderate, în cadrul unui domeniu exterior de clasă $C^{1,1}$ în \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Shen [99] a obținut estimări în L^p pentru sistemul Stokes rezolvent în cadrul domeniilor Lipschitz în \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, prin utilizarea metodelor potențialelor de strat în studiul său. Kohr, Lanza de Cristoforis și Wendland [53] au investigat probleme cu valori pe frontieră de tip Robin pentru sistemul Brinkman, respectiv, sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman în domenii Lipschitz, în context euclidian. Autorii tratează, de asemenea, problemele mixte de tip Dirichlet-Robin și probleme de transmisie pentru sistemele Brinkman în cadrul domeniilor Lipschitz încrețite, mărginite, în \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, precum și problema Navier pentru sistem Brinkman într-un domeniu Lipschitz mărginit, în \mathbb{R}^3 . Kohr, Lanza de Cristoforis și Wendland [55] au obținut un rezultat de existență pentru problema Poisson pentru un sistem Brinkman semiliniar pe un domeniu Lipschitz mărginit în \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, cu condiții Dirichlet sau Robin pe frontieră. Medkova [76] a investigat problema Dirichlet pentru sistemul Stokes rezolvent în cadrul domeniilor mărginite și nemărginite cu frontieră Lyapunov compactă.

Acum, să ne concentrăm asupra studiilor anterioare care au urmărit investigarea problemelor cu valori pe frontieră pentru ecuații neliniare, cum ar fi ecuațiile Navier-Stokes (0.0.6) sau ecuațiile Darcy-Forchheimer-Brinkman (0.0.5). Menționăm contribuția lui Alliot și Amrouche [10], care au studiat proprietățile de regularitate ale soluțiilor slabe ale sistemului Navier-Stokes staționar în domeniile exterioare din \mathbb{R}^3 . Russo și Tartaglione [95] au studiat problema Robin pentru sistemele Oseen și Navier-Stokes într-un domeniu exterior de clasă C^1 din \mathbb{R}^3 . Autorii au folosit o abordare bazată pe potențiale de strat pentru a arăta existența unei soluții pentru problema Robin pentru sistemul Oseen, iar pentru rezultatul de existență asociat problemei Robin pentru sistemul Navier-Stokes, au folosit o metodă de punct fix. Amrouche și Nguyen [13] au investigat problema exterioară, omogenă, Dirichlet, pentru sistemul Navier-Stokes într-un domeniu Lipschitz exterior în \mathbb{R}^3 , în cadrul spațiilor Sobolev ponderate. Russo și Tartaglione [96] au folosit o abordare variațională și teoreme de punct fix pentru a obține rezultate de existență pentru problema Navier pentru sistemul Navier-Stokes în domenii Lipschitz mărginite și domenii Lipschitz exterioare în \mathbb{R}^3 . Kohr, Lanza de

Cristoforis și Wendland [55] a obținut un rezultat de existență și unicitate pentru problema Dirichlet pentru sistemul semiliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman în cazul unor date "mici" pe frontieră.

Cercetătorii s-au dedicat, de asemenea, investigării problemelor cu valori pe frontieră în contextul varietăților. Evidențiem câteva lucrări în cele ce urmează. Să începem prin a remarca faptul că Mitrea, Mitrea, Mitrea și Taylor [80] au tratat probleme pe frontieră pentru operatorul Hodge-Laplacian în cadrul varietăților riemanniene. De asemenea, Dindos și Mitrea [26] au folosit metoda ecuațiilor integrale pe frontieră pentru a obține rezultatul de existență și unicitate pentru problema Poisson pentru sistemul Stokes în domenii Lipschitz în cadrul unor varietăți riemanniene netede și compacte. În [63], Kohr, Pinteș și Wendland au folosit o abordare bazată pe potențiale de strat pentru a investiga un anumit tip de operatori matriceali, pseudodiferențiali, generali, definiți pe domenii Lipschitz pe varietăți compacte riemanniene. Autorii au propus o abordare utilă, prin care, rezultatele de existență și unicitate ale anumitor probleme cu valori pe frontieră pot fi obținute prin utilizarea rezultatelor de bine-punere pentru probleme de tip transmisie. Kohr, Mikhailov și Wendland [57] au investigat problemele cu valori pe frontieră de tip transmisie pentru sistemele Navier-Stokes și Darcy-Forchheimer-Brinkman în domenii Lipschitz complementare într-o varietate riemanniană compactă de dimensiune m , $m = 2, 3$. Abordarea lor se bazează pe tehnici de teoria potențialului, combinate cu argumente de punct fix.

Să subliniem câteva lucrări care tratează probleme de tip transmisie. Mitrea și Taylor [83] au dezvoltat metode de potențial strat pentru ecuații cu derivate parțiale pe domenii Lipschitz în varietăți riemanniene netede, conexe și compacte de dimensiune $m \geq 3$. Mitrea și Taylor [84] au oferit rezultate de existență și unicitate pentru problema Dirichlet pentru sistemul Stokes și pentru problema inițială cu valori pe frontieră pentru sistemul Navier-Stokes cu condiție Dirichlet pe frontieră. Kohr, Lanza de Cristoforis și Wendland au [54] investigat existența unei soluții pentru problema neliniară de transmisie Neumann pentru sistemele Stokes și Brinkman în domeniile Lipschitz în cadru euclidian. Medkova [74] a folosit metoda ecuațiilor integrale pentru a oferi rezultate de bine-punere ale problemelor de transmisie, problema Robin-transmisie și problema Dirichlet-transmisie pentru sistemul Brinkman în cadrul domeniilor Lipschitz complementare în \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Autorul lucrării [75] a folosit metoda ecuațiilor integrale pentru a găsi rezultate de bine-punere pentru problemele de transmisie asociate ecuațiilor Stokes în domenii complementare din \mathbb{R}^3 cu frontieră Lipschitz. Kohr, Lanza de Cristoforis, Mikhailov și Wendland [52] au obținut rezultate de bine-punere pentru o problemă de transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman și Stokes în domenii complementare Lipschitz în \mathbb{R}^3 . Abordarea lor propune o tehnică de teoria potențialului combinată cu o teoremă de punct fix. Kohr, Lanza și Wendland [56] au investigat o problemă de tip Robin-transmisie pentru sistemele Darcy-Forchheimer-Brinkman și Navier-Stokes în două domenii Lipschitz adiacente și mărginite din \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$. Autorii lucrării [56] au studiat o problemă de tip Robin-transmisie pentru sistemele Darcy-Forchheimer-Brinkman și Navier-Stokes în două domenii Lipschitz adiacente în \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, cu condiții liniare de transmisie și condiții Robin liniare pe frontieră.

Să menționăm, de asemenea, lucrări importante care se referă la investigarea sistemelor de EDP cu coeficienți variabili și a problemelor cu valori pe frontieră pentru astfel de sisteme. Duffy [29] a furnizat un model pentru un fluid vâscos incompresibil anizotrop. În acest caz, ecuațiile de stare ale unui astfel de fluid implică apariția unui tensor fizic, anizotrop, constant. Mitrea, Mitrea și Shi [81] au investigat probleme cu valori pe frontieră de tip transmisie cu coeficienți variabili în contextul domeniilor Lipschitz mărginite definite pe varietăți nenetede de dimensiune $n \geq 2$. Choi și Yang [19] au studiat soluția fundamentală a sistemului Stokes staționar cu coeficienți măsurabili în \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Choi, Dong și Kim [18] au investigat problema derivatei conormale pentru ecuațiile Stokes staționare cu coeficienți neregulați în spații Sobolev definite pe domenii plate Reifenberg. Dong și Kim [28] au

studiat sistemul staționar Stokes cu coeficienți variabili, care sunt măsurabili într-o direcție, într-un domeniu plat Reifenberg. În plus, ei stabilesc rezultate de bine-punere în spațiile Sobolev standard și, de asemenea, în spațiile Sobolev ponderate de tip Muckenhoupt. Dong și Kim [27] au investigat soluții ale sistemului staționar Stokes cu coeficienți variabili în domenii Lipschitz mărginite. Kohr și Wendland [67] au obținut, în contextul domeniilor Lipschitz pe varietăți riemanniene compacte, rezultate de bine-punere pentru problemele cu valori de frontieră de tip Dirichlet pentru sistemele Stokes și Navier-Stokes cu coeficienți variabili din L^∞ .

Kohr, Mikhailov și Wendland [59] au investigat probleme de transmisie pentru sistemele anizotrope Stokes și Navier-Stokes cu un tensor puternic eliptic cu coeficienți din L^∞ în contextul domeniilor complementare Lipschitz în \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Bine-punerea acestor probleme de tip transmisie care implică sistemul Stokes anizotrop a fost obținută printr-o metodă variațională și, în consecință, autorii au introdus potențiale de volum și potențiale de strat pentru sistemul Stokes anizotrop cu un tensor puternic eliptic cu coeficienți din L^∞ . De asemenea, au fost enunțate și proprietăți de mapare pentru acești operatori. Aceste potențiale menționate mai sus au fost folosite pentru a stabili rezultate de bine-punere a anumitor probleme de transmisie de tip liniar. Rezultatele de existență și unicitate în cazul liniar, împreună cu un argument de punct fix, au determinat autorii să obțină rezultate de bine-punere și în cazul neliniar. Kohr, Mikhailov și Wendland [60] au studiat sistemul Stokes anizotrop cu tensor de vâscozitate cu coeficienți din L^∞ care satisface o condiție de elipticitate pentru matrici simetrice, ale căror urmă este nulă. Ei au furnizat o teorie a potențialelor de strat pentru acest sistem de EDP, în spații Sobolev ponderate cu bază în L^2 , în domenii Lipschitz în \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Abordarea acestora se bazează pe investigarea unor probleme speciale de transmisie pentru sistemul anizotrop Stokes. După introducerea potențialelor de strat și a potențialului de volum, autorii folosesc aceste potențiale pentru a analiza problemele cu valori pe frontieră de tip Dirichlet și de tip Neumann pentru sistemul anizotrop Stokes.

Kohr, Mikhailov și Wendland [58] au investigat sistemul Stokes anizotrop cu un tensor de vâscozitate cu coeficienți din L^∞ care satisface o condiție de elipticitate pentru matrici simetrice care au urma nulă. Pentru un astfel de sistem, ei au obținut rezultate de bine-punere pentru problema Dirichlet și probleme de transmisie în domenii Lipschitz în \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, cu date în spații Sobolev standard și ponderate. Mai mult, autorii tratează, de asemenea, probleme Dirichlet și problemele de transmisie pentru sistemul anizotrop Navier-Stokes în domenii Lipschitz mărginite în \mathbb{R}^3 . Kohr și Precup [65] au furnizat o analiză teoretică pentru sistemele cuplate de tip Navier-Stokes cu termeni neomogeni de tip reacție. Kohr și Precup [66] au folosit o abordare variațională și teoria indexului punctului fix pentru a analiza o problemă cu valori pe frontieră de tip Dirichlet pentru un sistem general cuplat de ecuații staționare de tip Navier-Stokes cu coeficienți variabili și termeni de tip reacție neomogeni într-un domeniu mărginit din \mathbb{R}^n , $n \leq 3$.

Problemele cu valori pe frontieră pot fi investigate și din punct de vedere numeric. Acest lucru a condus la dezvoltarea unor metode numerice diverse (diferențe finite, volume finite, element finit) al căror scop este găsirea de soluții numerice pentru diferite probleme cu valori pe frontieră (vezi și [93]). În cele ce urmează, discutăm despre câteva studii care se preocupă de tratarea numerică a acestor probleme. Ghia, Ghia și Shin [39] au folosit formularea funcției vorticitate-funcție de curent pentru ecuațiile incompresibile Navier-Stokes în dimensiune $n = 2$. Problema investigată de către autori este problema fluxului într-o cavitate pătrată. Vafai [104] a analizat efectele care apar în cazul porozității variabile și al forțelor inerțiale asupra fluxului convectiv și transferului de căldură în medii poroase. Guo și Zhao [43] au propus un model de tip latic-Boltzmann pentru un flux izoterm incompresibil în medii poroase și au inclus porozitatea în distribuția de echilibru și un termen de forță în ecuația de evoluție (pentru a lua în considerare forțele de rezistență ale mediului), adică termenul Darcy și termenul Forchheimer. Yang, Xue și Mahias [109] s-au

preocupat de investigarea cavității dreptunghiulare antrenate de capac care conține un mediu poros Brinkman-Forchheimer. AlAmiri [3] a investigat un transfer de căldură incompresibil, laminar cu convecție mixtă, în cavitatea pătrată antrenată de un perete, în prezența unui bloc poros. Gutt și Groșan [44] au studiat fluxul unui fluid vâcos incompresibil printr-un mediu poros într-o cavitate pătrată de dimensiune $n = 2$. Ei analizează această problemă, de asemenea, teoretic și numeric. Groșan, Pătrulescu și Pop [42] au propus un model matematic care conține sistemul Brinkman pentru a discuta despre convecția liberă constantă într-o cavitate pătrată încălzită diferențial care este umplută de un mediu poros bidispers.

Teza este alcătuită din patru capitole.

- **Capitolul 1** conține o privire de ansamblu asupra noțiunilor care sunt utilizate în această teză. Definim conceptul de domeniu Lipschitz, discutăm câteva notații pe care le folosim în această teză. De asemenea, oferim două ipoteze (vezi Ipoteza 1.1.6 și Ipoteza 1.1.7, respectiv) care descriu cadrul geometric în care investigăm problemele noastre cu valori pe frontieră. Aceste probleme sunt analizate în capitolele următoare. În continuare, prezentăm spațiile de funcții pe care le folosim în această teză, și anume spații Sobolev în domenii Lipschitz în context euclidian, spații Sobolev pe frontiere Lipschitz în context euclidian, spații Sobolev ponderate în \mathbb{R}^3 (vezi [47]). Discutăm operatorul urmă (Gagliardo) în cazul spațiilor Sobolev clasice și, de asemenea, în cazul spațiilor Sobolev ponderate. În continuare, descriem operatorul Stokes și operatorul Brinkman. Pentru fiecare dintre acești operatori, dăm operatorii lor de derivare conormală corespunzătorii fiecăruia dintre aceste sisteme. De asemenea, introducem o versiune generalizată a sistemului Brinkman și dăm operatorul de derivare conormală asociat (vezi Definiția 1.2.14 și Lema 1.2.15). În plus, oferim soluția fundamentală a sistemului Stokes, potențialele Newtoniene și potențialele de strat pentru sistemul Stokes, împreună cu proprietățile lor de mapare, proprietățile de salt la frontieră și condițiile de creștere. Procedăm similar și în cazul sistemului Brinkman, dăm soluția fundamentală a sistemului Brinkman, oferim potențialele Newtoniene și potențialele de strat pentru sistemul Brinkman, proprietățile lor de mapare, proprietățile lor de salt la frontieră și condițiile lor de creștere.
- **Capitolul 2** se preocupă de rezultate de existență și unicitatea pentru problemelor de tip transmisie pentru sistemele de EDP liniare. Începem acest capitol prin a oferi un rezultat de bine-punere pentru problema de tip Dirichlet pentru sistemul Brinkman într-un domeniu Lipschitz exterior în \mathbb{R}^3 (vezi Teorema 2.1.2). În continuare, furnizăm un rezultat de existență și unicitate pentru problema de tip transmisie pentru ecuațiile Brinkman generalizate și ecuațiile Stokes în \mathbb{R}^3 (vezi Teorema 2.2.2 și Teorema 2.2.3). Continuăm cu un rezultat de bine-punere pentru problema de tip transmisie pentru ecuațiile Brinkman clasice și generalizate în \mathbb{R}^3 (vezi Teorema 2.3.1). În ultima secțiune a acestui capitol, avem un rezultat de bine-punere pentru o problemă de tip Robin-transmisie pentru ecuațiile Brinkman în \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ (vezi Teorema 2.4.1). În plus, prin utilizarea unei proceduri similare precum în cazul Teoremei 2.4.1, oferim un rezultat de existență și unicitate pentru o problemă Robin-transmisie de tip limită pentru ecuațiile Brinkman în \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ (vezi Teorema 2.4.2). Ca o consecință Teoremei 2.4.2, suntem capabili să obținem un rezultat de existență și unicitate pentru problema Robin-Dirichlet pentru sistemul Brinkman (vezi Corolarul 2.4.3). Conținutul acestui capitol se bazează pe lucrările [6], [7], [8].
- În **Capitolul 3** discutăm despre o generalizare a ecuațiilor Darcy-Forchheimer-Brinkman (vezi Relația (3.1.1)). De asemenea, oferim o lemă utilă (vezi Lema 3.1.3). Apoi, oferim un rezultat de existență și unicitate pentru problema de tip transmisie pentru ecuațiile generalizate Darcy-Forchheimer-Brinkman și Stokes în \mathbb{R}^3 (vezi Teorema 3.2.1). În continuare,

prezentăm un rezultat de existență și unicitate pentru problema de tip transmisie pentru ecuațiile generalizate Darcy-Forchheimer-Brinkman și Brinkman în \mathbb{R}^3 (vezi Teorema 3.3.1). Avem, de asemenea, un rezultat de existență și unicitate pentru problema Robin-transmisie pentru ecuațiile Darcy-Forchheimer-Brinkman în \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$ (vezi Teorema 3.4.1). Argumente similare sunt folosite pentru a obține un rezultat de bine-punere pentru o problemă Robin-transmisie de tip limită pentru ecuațiile Darcy-Forchheimer-Brinkman în \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$ (vezi Teorema 3.4.2). În cele din urmă, datorită Teoremei 3.4.2, putem obține un rezultat de existență pentru problema Robin-Dirichlet pentru ecuațiile Darcy-Forchheimer-Brinkman în \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$ (vezi Corolarul 3.4.3). Conținutul acestui capitol se bazează pe lucrările [4], [5], [8].

- În sfârșit, scopul **Capitolului 4** este de a oferi o analiză numerică pentru a determina o soluție numerică pentru problema Robin-Dirichlet pentru ecuațiile Darcy-Forchheimer-Brinkman. Acest studiu numeric se referă la problema cavității poroase antrenată de un perete cu condiție de alunecare pe frontieră de tip Navier, în prezența unui obstacol solid. Cadrul geometric al acestei probleme poate fi văzut în Figura 4.1. Pentru a rezolva această problemă, mai întâi scriem modelul nostru matematic (vezi Relația (4.1.1)), efectuăm o analiză non-dimensională (vezi Relația (4.1.2)). Pentru a obține o soluție numerică, folosim un software numeric, și anume COMSOL Multiphysics. Apoi, determinăm grid-ul optim pentru analiza noastră (vezi Tabelul 4.1) și ne validăm modelul prin comparație cu rezultatele existente (vezi Figura 4.2). În cele din urmă, investigăm impactul lungimii de alunecare adimensională (vezi Subsecțiunea 4.1.4). Conținutul acestui capitol se bazează pe lucrarea [8].

Următoarea listă conține lucrările în care am inclus rezultatele originale care apar în această teză. Acestea sunt:

- **Albișoru, A.F.**, *A note on a transmission problem for the Brinkman system and the generalized Darcy-Forchheimer-Brinkman system in Lipschitz domains in \mathbb{R}^3* , **Studia Universitatis Babeș-Bolyai, Series Mathematica**, **64**(3), 2019, 399-412. **WOS-ESCI**.
- **Albișoru, A.F.**, *On transmission-type problems for the generalized Darcy-Forchheimer-Brinkman and Stokes systems in complementary Lipschitz domains in \mathbb{R}^3* , **Filomat**, **33**(11), 2019, 3361-3373. **ISI, IF**(November 2022): **0.988**.
- **Albișoru, A.F.**, *A layer potential analysis for transmission problems for Brinkman-type systems in Lipschitz domains in \mathbb{R}^3* , **Mathematische Nachrichten**, **292**(9), 2019, 1876-1896. **ISI, IF**(November 2022): **1.199**.
- **Albișoru, A.F.**, *A Poisson Problem of Transmission-type for the Stokes and Generalized Brinkman Systems in Complementary Lipschitz Domains in \mathbb{R}^3* , **Taiwanese Journal of Mathematics**, **24**(2), 2020, 331-354. **ISI, IF**(November 2022): **0.87**.
- **Albișoru, A.F.**, Kohr, M., Papuc, I., Wendland, W.L., *On some Robin-transmission problems for the Brinkman system and a Navier-Stokes type system*, **Mathematical Methods in Applied Sciences**, DOI:<https://doi.org/10.1002/mma.10170>, 2024, published online: May 2024. **ISI, IF**(June 2023): **2.9**.

Cuvinte cheie: probleme de transmisie, probleme cu valori pe frontieră eliptice, spații Sobolev, spații Sobolev ponderate, soluție fundamentală, teoria potențialului, domenii Lipschitz, operator urmă, operator de derivare conormală, sistemul Stokes, sistemul Brinkman, sistemul Navier-Stokes,

sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman, metoda elementului finit, problema de curgere în cavitatea antrenată de un perete.

MSC: Primary 35J25, 35Q35, 42B20, 46E35; Secondary 76D, 76M.

Metode de Teoria Potențialului pentru sistemele Stokes și Brinkman în domenii Lipschitz

Acest capitol stabilește cadrul funcțional în care vom analiza problemele noastre cu valori pe frontieră pentru ecuațiile Stokes, Brinkman, Navier-Stokes și Darcy-Forchheimer-Brinkman. În acest scop, amintim definiții, notații și proprietăți pe care le vom folosi pe parcursul acestei lucrări.

Prin urmare, vom introduce conceptele de domeniu Lipschitz mărginit și de domeniu Lipschitz nemărginit (sau exterior) în (cadrul euclidian al lui) \mathbb{R}^n , pentru $n \geq 2$. Vom pune, de asemenea, accent pe cazul $n = 3$ în cadrul căruia, am obținut multe dintre rezultatele noastre de bine-punere (în sens Hadamard). În continuare, vom aminti definițiile spațiilor Sobolev în context euclidian și proprietățile acestora, proprietăți care sunt cele mai relevante pentru studiul nostru. În plus, vom discuta despre Lema Operatorului Urmă Gagliardo, ce ne permite să definim operatorul urmă în cadrul spațiilor Sobolev. Acest operator urmă este implicat în condițiile pe frontieră ale problemelor cu valori pe frontieră pe care le studiem.

În continuare, vom studia sistemele Stokes și Brinkman. În cazul acestor două sisteme, vom discuta despre operatorii lor de derivare conormală asociați. Acești operatori vor apărea în condițiile pe frontieră ale problemelor cu valori pe frontieră pe care le tratăm ulterior.

Un aspect important pe care dorim să-l subliniem este că, în acest capitol, ne ocupăm de o versiune generalizată a sistemului Brinkman. Rezultatele noastre originale implică acest sistem specific de ecuații cu derivate parțiale (EDP).

Capitolul acesta se încheie cu două secțiuni. Aceste secțiuni conțin potențialele de strat asociate ecuațiilor Stokes, respectiv, Brinkman. Acești operatori sunt utilizați în dovedirea rezultatelor noastre de existență și unicitate, datorită faptului că, cu ajutorul acestor potențiale, suntem capabili să construim soluții pentru problemele noastre cu valori pe frontieră. Sursele care au fost folosite în pregătirea acestui capitol sunt [1], [2], [45], [49], [51], [73], [91], [101], [103], [108].

1.1 Cadrul funcțional

Această secțiune este dedicată descrierii principalelor noțiuni care sunt utilizate pe tot parcursul acestei lucrări. În primul rând, definim conceptul de domeniu Lipschitz și descriem notații importante pe care le folosim pe parcursul acestei teze. De asemenea, descriem geometria domeniilor Lipschitz care apar în problemele cu valori pe frontieră pe care le vom studia în cele ce urmează. În continuare, oferim o prezentare generală a spațiilor Sobolev în \mathbb{R}^n , pe domenii Lipschitz și frontiere Lipschitz. Sunt date și unele proprietăți ale acestor spații Sobolev. Mai mult, ne amintim de conceptul de spațiu Sobolev ponderat în exteriorul unui domeniu Lipschitz mărginit în \mathbb{R}^3 . Încheiem

această secțiune cu o lemă (operatorul urmă - Gagliardo) utilă.

1.1.1 Domenii Lipschitz

Vom revizui definiția unui domeniu Lipschitz mărginit și vom introduce spațiile în care căutăm soluțiile noastre pentru problemele noastre cu valori pe frontieră. De asemenea, vom discuta despre sistemele care sunt întâlnite în studiul nostru și vom descrie operatorii care apar în condițiile noastre pe frontieră. Să oferim în cele de mai jos definiția conceptului de domeniu Lipschitz (vezi, spre exemplu, [46, Def. 2.1]).

Definiția 1.1.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ o mulțime nevidă, deschisă și mărginită. Notăm cu Γ frontiera mulțimii D . Spunem că D este un domeniu Lipschitz mărginit dacă pentru orice $\mathbf{x} \in \Gamma$, există constantele $r_1, r_2 > 0$, un sistem de coordonate $(y_1, \dots, y_n) = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ izometric cu cel canonic, cu originea în \mathbf{x} , și o funcție Lipschitz $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât

$$D \cap \mathcal{C}(r_1, r_2) = \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |y'| < r_1 \text{ și } \psi(y') < y_n < r_2\},$$

unde

$$\mathcal{C}(r_1, r_2) := \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |y'| < r_1, |y_n| < r_2\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

În continuare, formulăm câteva observații utile.

Observația 1.1.2. În această teză, vom folosi convenția de însumare a indicelui ce se repetă.

Observația 1.1.3. În această teză, folosim notația a.p.t. în loc de aproape peste tot.

Observația 1.1.4. Dacă X este un spațiu Banach, atunci dualul său topologic va fi notat cu X' .

Observația 1.1.5. Dacă Y este o submulțime deschisă a lui \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, atunci dualitatea între două spații duale definite pe Y este notată cu $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$.

În aceasta din urmă, vom enunța câteva ipoteze care ne permit să reprezentăm geometria domeniilor Lipschitz, adică contextele în care vor fi formulate problemele noastre.

Ipoteza 1.1.6. Fie $D_+ := D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un domeniu Lipschitz mărginit cu o frontieră conexă Γ . Notăm cu $D_- := \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}$ domeniul Lipschitz (exterior) complementar (vezi Figura 1.1).

Ipoteza 1.1.7. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un domeniu Lipschitz mărginit cu o frontieră conexă Γ_- . Presupunem că D_+ este un domeniu Lipschitz mărginit, cu o frontieră conexă notată cu Γ_+ , astfel încât $\bar{D}_+ \subset D$ și fie $D_- := D \setminus \bar{D}_+$. În consecință, frontiera lui D_- are două componente conexe, adică, Γ_+ și Γ_- (vezi Figura 1.2).

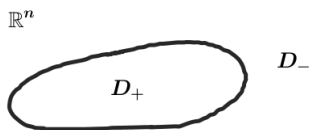
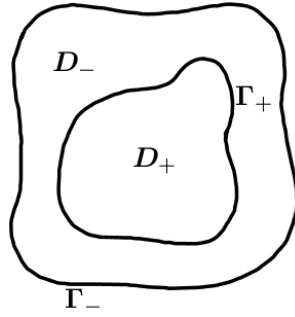


Figura 1.1: Domeniile Lipschitz complementare D_+ și D_- în \mathbb{R}^n .


 Figura 1.2: Un domeniu Lipschitz mărginit $D = \bar{D}_+ \cup D_-$ care satisface Ipoteza 1.1.7

1.1.2 Despre spații Sobolev pe domenii Lipschitz

Scopul acestei secțiuni este de a oferi o privire de ansamblu asupra spațiilor Sobolev într-un cadru euclidian în \mathbb{R}^n . Aceste spații sunt utilizate în investigarea soluțiilor (slabe) ale anumitor EDP, pentru care nu se poate găsi o soluție clasică. Vom folosi aceste spații pe parcursul acestei teze.

În cea din urmă, \mathbb{Z}_+ denotă mulțimea numerelor întregi nenegative și vectorul $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ se numește multi-indice. Să fixăm $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_j$. Introducem operatorul diferențial

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (1.1.1)$$

Mai mult, introducem de asemenea și operatorul diferențial

$$D_k := \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad i^2 = -1. \quad (1.1.2)$$

Acum, fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un domeniu Lipschitz mărginit sau un domeniu Lipschitz exterior sau \mathbb{R}^n . În cazul unui domeniu Lipschitz mărginit sau un domeniu Lipschitz exterior D , notăm frontiera acestor domenii cu Γ .

Fie $\mathcal{C}(\bar{D})$ spațiul funcțiilor continue pe \bar{D} și este înzestrat cu norma supremum.

Pentru o funcție $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, definim suportul funcției g astfel

$$\text{supp } g := \overline{\{x \in D \mid g(x) \neq 0\}}. \quad (1.1.3)$$

Fie $\mathcal{C}^\infty(D)$ spațiul funcțiilor infinit diferențiabile definite pe D . Notăm cu $\mathcal{C}_0^\infty(D)$ spațiul funcțiilor infinit diferențiabile, care dispar într-o vecinătate a lui Γ . Ținem cont că pentru o funcție $g \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$ avem $g|_\Gamma = 0$. De asemenea, dacă $g \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$ atunci mulțimea (1.1.3) este compactă în D . De asemenea introducem spațiile cu valori vectoriale $\mathcal{C}^\infty(D)^n$ și $\mathcal{C}_0^\infty(D)^n$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(D)^n &:= \{\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), u_i \in \mathcal{C}^\infty(D), i = \overline{1, n}\}, \\ \mathcal{C}_0^\infty(D)^n &:= \{\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), u_i \in \mathcal{C}_0^\infty(D), i = \overline{1, n}\}. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Pentru $p \in [1, \infty)$, spațiul Lebesgue $L^p(D)$ al (claselor de echivalență ale) funcțiilor măsurabile, de puterea p , integrabile Lebesgue în modul pe D , este dat de

$$L^p(D) := \left\{ u : D \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_D |u(x)|^p dx < \infty \right\} \quad (1.1.5)$$

iar norma asociată este

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{D})} := \left(\int_{\mathbb{D}} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.1.6)$$

pentru $1 \leq p < \infty$. De asemenea, definim spațiul de funcții cu valori vectoriale $L^p(\mathbb{D})^n$

$$L^p(\mathbb{D})^n := \{\mathbf{u} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), u_i \in L^p(\mathbb{D}), i = \overline{1, n}\}. \quad (1.1.7)$$

Spațiul $L^\infty(\mathbb{D})$ este spațiul (claselor de echivalență al) funcțiilor esențial mărginite pe \mathbb{D} . Norma pe acest spațiu este

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{D})} := \text{esssup}_{x \in \mathbb{D}} |u(x)|. \quad (1.1.8)$$

Cantitatea din membrul drept al relației (1.1.8) este denumită supremul esențial al lui u . Acesta este cel mai mic număr ϵ cu proprietatea că mulțimea $\{x \in \mathbb{D} \mid u(x) > \epsilon\}$ are măsură Lebesgue nulă. Mai mult, definim spațiul $L^\infty(\mathbb{D})^n$

$$L^\infty(\mathbb{D})^n := \{\mathbf{u} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), u_i \in L^\infty(\mathbb{D}), i = \overline{1, n}\}. \quad (1.1.9)$$

În cele ce urmează, vom folosi și spațiul

$$L^\infty(\mathbb{D})^{n \times n} := \{\mathbf{U} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \mathbf{U} = (u_{ij}), u_{ij} \in L^\infty(\mathbb{D}), i, j = \overline{1, n}\} \quad (1.1.10)$$

Mai mult, pentru $p \in (1, \infty)$, dualul topologic al spațiului $L^p(\mathbb{D})$ este spațiul $L^q(\mathbb{D})$, pentru $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dualul spațiului $L^1(\mathbb{D})$ este spațiul $L^\infty(\mathbb{D})$. Să ținem cont că, pentru $1 \leq p \leq \infty$, spațiul $L^p(\mathbb{D})$ este un spațiu Banach. Mai mult, $L^2(\mathbb{D})$ este un spațiu Hilbert.

În cele de mai jos, să privim spațiul $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{D})$ ca un spațiu vectorial topologic. Atunci, să introducem spațiile $\mathcal{D}(\mathbb{D})$ și $\mathcal{D}'(\mathbb{D})$.

Definiția 1.1.8. *Spațiul Schwarz al funcțiilor de test $\mathcal{D}(\mathbb{D})$ este spațiul $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{D})$ înzestrat cu topologia limitei inductive.*

Spațiul $\mathcal{D}(\mathbb{D})^n$ poate fi definit similar, anume,

$$\mathcal{D}(\mathbb{D})^n := \{\boldsymbol{\psi} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n), \psi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{D}), i = \overline{1, n}\}. \quad (1.1.11)$$

Definiția 1.1.9. *Spațiul distribuțiilor $\mathcal{D}'(\mathbb{D})$ este spațiul funcționalelor liniare și continue definite pe $\mathcal{D}(\mathbb{D})$.*

Spațiul $\mathcal{D}'(\mathbb{D})^n$ de funcții cu valori vectoriale este dat de

$$\mathcal{D}'(\mathbb{D})^n := \{\boldsymbol{\Psi} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \dots, \Psi_n), \Psi_i \in \mathcal{D}'(\mathbb{D}), i = \overline{1, n}\}. \quad (1.1.12)$$

În continuare, descriem noțiunea de spațiu Sobolev. Rețineți că, în această teză, folosim spații Sobolev cu bază în L^2 , definite pe \mathbb{D} . În consecință, introducem spațiile Sobolev cu index întreg nenegativ, cu bază în L^2 , după cum urmează.

Definiția 1.1.10. *Fie $k \in \mathbb{Z}_+$. Atunci, spațiul Sobolev $H^k(\mathbb{D})$ este definit de*

$$H^k(\mathbb{D}) := \{u \in L^2(\mathbb{D}) \mid D^\alpha u \in L^2(\mathbb{D}), \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| \leq k\}, \quad (1.1.13)$$

și norma pe acest spațiu este dată de

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{D})} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{D})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1.14)$$

Introducem spațiul Sobolev $H^k(\mathbb{D})^n$ prin

$$H^k(\mathbb{D})^n := \{\mathbf{u} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), u_i \in H^k(\mathbb{D}), i = \overline{1, n}\}. \quad (1.1.15)$$

Să introducem, de asemenea, spațiul $H_0^k(\mathbb{D}) \equiv \mathring{H}^k(\mathbb{D})$, care este închiderea spațiului $\mathcal{D}(\mathbb{D})$ în $H^k(\mathbb{D})$ raport cu norma $\|\cdot\|_{H^k(\mathbb{D})}$. Similar, introducem spațiul $H_0^k(\mathbb{D})^n \equiv \mathring{H}^k(\mathbb{D})^n$. Mai mult, $\mathring{H}^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^n)$ și $\mathring{H}^k(\mathbb{R}^n)^n = H^k(\mathbb{R}^n)^n$.

Spațiile $H^k(\mathbb{D})$ și $\mathring{H}^k(\mathbb{D})$ sunt spații Hilbert. De asemenea, să menționăm că spațiul Hilbert $H^k(\mathbb{D})$ este înzestrat cu produsul scalar

$$(u, v)_{H^k(\mathbb{D})} := \sum_{|\alpha| \geq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\mathbb{D})}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1.16)$$

În următoarele definiții introducem spațiile Sobolev cu bază în L^2 , cu indice fracționar.

Definiția 1.1.11. Fie $0 < s < 1$. Spațiul Sobolev space $H^s(\mathbb{D})$ cu indice fracționar este dat de

$$H^s(\mathbb{D}) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{D}) \mid \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy < \infty \right\} \quad (1.1.17)$$

și norma acestuia este dată de

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{D})} = \left(\int_{\mathbb{D}} |u(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1.18)$$

Definiția 1.1.12. Fie $0 < s < 1$ și $k \in \mathbb{Z}_+$. Fie $\sigma = k + s$. Spațiul Sobolev cu indice fracționar $H^\sigma(\mathbb{D})$ este definit de

$$H^\sigma(\mathbb{D}) := \{u \in H^k(\mathbb{D}) \mid D^\alpha u \in H^s(\mathbb{D}), \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, 0 \leq |\alpha| \leq k\} \quad (1.1.19)$$

și norma acestui spațiu este dată de

$$\|u\|_{H^\sigma(\mathbb{D})} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{H^s(\mathbb{D})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1.20)$$

Ținând cont de Definiția 1.1.11 și Definiția 1.1.12, putem introduce spațiile $H^s(\mathbb{D})^n$ și $H^\sigma(\mathbb{D})^n$ de funcții cu valori vectoriale pe componente. Mai mult, spațiul Sobolev cu indice fracționar $H^\sigma(\mathbb{D})$ este un spațiu Hilbert.

Să discutăm despre spațiile L^2 -Sobolev cu indice negativ. Fie $k \in \mathbb{Z}_+$. Pentru a introduce aceste spații Sobolev, avem că spațiul $H_0^k(\mathbb{D})$ este închiderea spațiului $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{D})$ în spațiul $H^k(\mathbb{D})$. Mai mult,

$$H_0^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^n). \quad (1.1.21)$$

Similar, putem defini spațiul de funcții cu valori vectoriale $H_0^k(\mathbb{D})^n$ pe componente și relația (1.1.21) pot fi scrise și în cazul spațiului $H_0^k(\mathbb{R}^n)^n$ de funcții cu valori vectoriale.

Să definim spațiile L^2 -Sobolev cu indice negativ.

Definiția 1.1.13. Fie $k \in \mathbb{Z}_+$. Atunci, spațiul Sobolev cu indice negativ $H^{-k}(\mathbf{D})$ este dualul spațiului $H_0^k(\mathbf{D})$, adică,

$$H^{-k}(\mathbf{D}) := (H_0^k(\mathbf{D}))', \quad (1.1.22)$$

și norma pe acest spațiu este dată de

$$\|h\|_{H^{-k}(\mathbf{D})} := \sup_{u \in H_0^k(\mathbf{D}), u \neq 0} \frac{|\langle h, u \rangle|}{\|u\|_{H_0^k(\mathbf{D})}}. \quad (1.1.23)$$

Să remarcăm faptul că spațiul de funcții cu valori vectoriale $H^{-k}(\mathbf{D})^n$ este definit pe componente. Mai mult, avem $H^{-k}(\mathbf{D})^n = (H_0^k(\mathbf{D})^n)'$. Datorită densității spațiului $C_0^\infty(\mathbf{D})$ în $H_0^k(\mathbf{D})$ are loc incluziunea $H^{-k}(\mathbf{D}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{D})$. Să remarcăm faptul că spațiul $H^{-k}(\mathbf{D})$ este un spațiu Hilbert.

Deoarece $C_0^\infty(\mathbf{D})$ nu este dens în spațiul $H^k(\mathbf{D})$, pentru $k \in \mathbb{Z}_+$, dualul spațiului $H^k(\mathbf{D})$ nu poate fi scufundat într-un subspațiu al spațiului de distribuții $\mathcal{D}'(\mathbf{D})$.

Definiția 1.1.14. Fie $s \in \mathbb{R}$. Fie \mathbf{D} un domeniu Lipschitz în \mathbb{R}^n . Spațiul $\tilde{H}^s(\mathbf{D})$ este închiderea spațiului $\mathcal{D}(\mathbf{D})$ în $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Mai mult, spațiul de funcții cu valori vectoriale $\tilde{H}^s(\mathbf{D})^n$ este dat de

$$\tilde{H}^s(\mathbf{D})^n := \{\mathbf{u} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), u_i \in \tilde{H}^s(\mathbf{D}), i = \overline{1, n}\}. \quad (1.1.24)$$

Spațiul $\tilde{H}^s(\mathbf{D})$ admite următoarea caracterizare

$$\tilde{H}^s(\mathbf{D}) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp } u \subseteq \mathbf{D}\}. \quad (1.1.25)$$

Mai mult, $\tilde{H}^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$.

Avem, de asemenea, următoarele relații de dualitate

$$(H_0^k(\mathbf{D}))' = H^{-k}(\mathbf{D}), \quad (H^k(\mathbf{D}))' = \tilde{H}^{-k}(\mathbf{D}), \quad (1.1.26)$$

pentru $k \in \mathbb{Z}_+$. Să menționăm faptul că relațiile de dualitate descrise în (1.1.26), au loc de asemenea și în cazul spațiilor Sobolev de funcții cu valori vectoriale.

Mai departe, furnizăm teorema de scufundare a lui Sobolev (vezi, spre exemplu, [1, Teorema 4.12], [2]).

Teorema 1.1.15. Fie $k \in \mathbb{Z}_+$. Fie $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu Lipschitz mărginit. Atunci

- (i) scufundarea $H^k(\mathbf{D}) \hookrightarrow C(\overline{\mathbf{D}})$ este continuă, dacă $k > \frac{n}{2}$.
- (ii) scufundarea $H^k(\mathbf{D}) \hookrightarrow L^q(\mathbf{D})$ este continuă și compactă, pentru orice $q \in [1, \infty)$, dacă $k = \frac{n}{2}$.
- (iii) scufundarea $H^k(\mathbf{D}) \hookrightarrow L^q(\mathbf{D})$ este continuă pentru $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{k}{n}$, dacă $k < \frac{n}{2}$.
- (iv) scufundarea $H^k(\mathbf{D}) \hookrightarrow L^r(\mathbf{D})$ este compactă pentru $1 < r < q$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{k}{n}$, dacă $k < \frac{n}{2}$.

1.1.3 Spații Sobolev pe frontiere Lipschitz boundaries

Să definim spațiul $L^2(\Gamma)$ (claselor de echivalență al) funcțiilor care sunt la pătrat integrabile pe Γ ca completatul spațiului $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ în raport cu norma

$$\|g\|_{L^2(\Gamma)} := \left(\int_{\Gamma} |g(y)|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Fie $s \in (0, 1)$. Definim spațiul Sobolev pe frontieră $H^s(\Gamma)$ ca completatul spațiului

$$\mathcal{C}_2^0 := \{f \in \mathcal{C}^0(\Gamma) \mid \|f\|_{H^s(\Gamma)} < \infty\},$$

în raport cu norma

$$\|f\|_{H^s(\Gamma)} := \left\{ \|f\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n-1+2s}} d\sigma_x d\sigma_y \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Să încheiem această secțiune, ținând cont de faptul că, pentru $s \in (-1, 0)$, definim spațiile Sobolev cu indice negativ prin dualitate, adică, $H^{-s}(\Gamma) = (H^s(\Gamma))'$. De asemenea, avem $H^0(\Gamma) = L^2(\Gamma)$. Versiunile cu valori vectoriale ale spațiilor anterior prezentate sunt definite pe componente.

1.1.4 Spații Sobolev ponderate

În această subsecțiune, vom lua în considerare cadrul oferit de Ipoteza 1.1.6 în cazul $n = 3$. Subliniem că, în acest caz particular, lucrăm cu un domeniu Lipschitz exterior (sau complementar) D_- în \mathbb{R}^3 . Acest fapt aduce o problemă în prim plan. Unele dintre problemele noastre de transmisie considerate conțin sistemul Stokes în acest domeniu Lipschitz complementar D_- . Scopul nostru va fi acela de a lua în considerare comportamentul la infinit al soluțiilor problemelor noastre cu valori pe frontieră studiate. Ca atare, comportamentul acestor soluții trebuie inclus în spațiile care vor fi folosite în analiza noastră și acest lucru se poate cu ajutorul ponderilor. Prin urmare, în cadrul spațiului \mathbb{R}^3 , introducem spațiile Sobolev ponderate, ca în lucrarea lui Hanouzet (vezi [47]).

Să presupunem că Ipoteza 1.1.6 are loc pentru $n = 3$. Să considerăm funcția pondere

$$\rho(\mathbf{x}) := (1 + |\mathbf{x}|)^{\frac{1}{2}}, \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Introducem spațiul Lebesgue ponderat

$$L^2(\rho^{-1}; D) := \{f : D_- \rightarrow \mathbb{R} \mid \rho^{-1}f \in L^2(D_-)\}$$

și cu ajutorul acestuia, putem defini spațiul Sobolev ponderat

$$\mathcal{H}^1(D_-) := \{f \in \mathcal{D}(D_-) \mid \rho^{-1}f \in L^2(D_-), \nabla f \in L^2(D_-)^3\},$$

în care spațiul de funcții cu valori vectoriale $L^2(D_-)^3$ poate fi definit pe componente (precum în (1.1.7)). Spațiul Sobolev ponderat $\mathcal{H}^1(D_-)$ este un spațiu Hilbert în raport cu norma

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(D_-)} := \left(\|\rho^{-1}f\|_{L^2(D_-)}^2 + \|\nabla f\|_{L^2(D_-)^3}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1.27)$$

De asemenea, să introducem spațiul

$$\tilde{\mathcal{H}}^1(D_-) \text{ as the closure of } \mathcal{D}(D_-) \text{ in } \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3).$$

Introducem spațiile

$$\mathcal{H}^{-1}(\mathbb{D}_-) = (\tilde{\mathcal{H}}^1(\mathbb{D}_-))', \quad \tilde{\mathcal{H}}^{-1}(\mathbb{D}_-) = (\mathcal{H}^1(\mathbb{D}_-))'.$$

Ținem cont că spațiul $\mathcal{D}(\mathbb{D}_-)$ este dens în spațiul $\mathcal{H}^1(\mathbb{D}_-)$ și spațiul $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{D}}_-)$ este dens în spațiul $\tilde{\mathcal{H}}^1(\mathbb{D}_-)$. Folosind faptul că seminorma

$$|g|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{D}_-)} := \|\nabla g\|_{L^2(\mathbb{D}_-)^3}$$

este echivalentă cu norma (1.1.27) și cu ajutorul inegalității Sobolev (vezi [1, Teorema 4.31]), avem scufundarea

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{D}_-) \hookrightarrow L^6(\mathbb{D}_-).$$

Spațiile Sobolev ponderate de funcții cu valori vectoriale $\mathcal{H}^1(\mathbb{D}_-)^3$ și $\tilde{\mathcal{H}}^{-1}(\mathbb{D}_-)^3$ sunt date de

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\mathbb{D}_-)^3 &:= \{\mathbf{u} : \mathbb{D}_- \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), u_i \in \mathcal{H}^1(\mathbb{D}_-), i = \overline{1, 3}\}, \\ \tilde{\mathcal{H}}^{-1}(\mathbb{D}_-)^3 &:= \{\mathbf{u} : \mathbb{D}_- \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), u_i \in \tilde{\mathcal{H}}^{-1}(\mathbb{D}_-), i = \overline{1, 3}\}. \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

Finalmente, să descriem noțiunea de funcție care tinde spre o constantă la infinit în sensul lui Leray și un rezultat particular. Aceste concepte vor fi folosite în capitolele următoare (a se vedea, de exemplu, [52, Definiția 2.3 și Corolarul 2.4] și referințele din interiorul acesteia).

Definiția 1.1.16. *O funcție \mathbf{u} tinde spre o constantă \mathbf{u}_∞ la ∞ , în sensul lui Leray dacă*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}^2} |\mathbf{u}(ry) - \mathbf{u}_\infty| d\sigma_y = 0,$$

unde \mathcal{S}^2 este sfera unitate în \mathbb{R}^3 .

Corolar 1.1.17. *Dacă $u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{D}_-)$, atunci u tinde la zero la ∞ în sensul lui Leray.*

1.1.5 Operatorul Urmă pe Spații Sobolev

În această subsecțiune, scopul nostru este de a introduce un operator care apare în condițiile pe frontieră ale problemelor noastre de tip transmisie ce sunt studiate în această teză.

Legătura dintre spațiile Sobolev definite pe domeniile Lipschitz și spațiile Sobolev definite pe frontiere Lipschitz este dată de următorul rezultat cunoscut sub numele de Lema Urmă Gagliardo (a se vedea, de exemplu, [20], [36], [50, Propoziția 3.3], [77, Lema 2.6]).

Lema 1.1.18. *(Lema Operatorului Urmă Gagliardo) Fie Ipoteza 1.1.6 satisfăcută. Atunci, există operatori liniar și continui*

$$\text{Tr}_{\mathbb{D}_\pm} : H^1(\mathbb{D}_\pm) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (1.1.29)$$

ce se numesc operatori (Gagliardo) urmă, cu proprietatea că

$$\text{Tr}_{\mathbb{D}_\pm} v = v|_\Gamma, \quad (1.1.30)$$

pentru orice $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{D}}_\pm)$. Mai mult, acești operatori sunt surjectivi și admit inverse la dreapta (ne-unice) liniare și continue

$$\text{Tr}_{\mathbb{D}_\pm}^{-1} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^1(\mathbb{D}_\pm), \quad (1.1.31)$$

adică $\text{Tr}_{\mathbb{D}_\pm} \circ \text{Tr}_{\mathbb{D}_\pm}^{-1} = \mathbb{I}$.

Înceiem această subsecțiune subliniind câteva observații utile.

Observația 1.1.19. *Similar lemei 1.1.18, se poate defini operatorul urmă exterior pe spațiul Sobolev ponderat $\mathcal{H}^1(D_-)$, adică, $\text{Tr}_{D_-} : \mathcal{H}^1(D_-) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (pentru detalii adiționale, a se vedea, de exemplu, [77, Teorema 2.3, Lema 2.6], [52, Lema 2.2]).*

Observația 1.1.20. *Lema 1.1.18 rămâne validă și în cazul spațiilor de funcții cu valori vectoriale sau valori matriceale. Pentru a păstra concizia prezentării, păstrăm notațiile $\text{Tr}_{D_{\pm}}$ și $\text{Tr}_{D_{\pm}}^{-1}$ în cazul funcțiilor cu valori vectoriale sau valori matriceale.*

1.2 Operatorii Stokes, Brinkman classic și Brinkman generalizat

În această secțiune vom discuta despre operatorii care apar în această lucrare. Acești operatori sunt implicați în problemele de transmisie pe care le studiem. Reamintim faptul că $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ este spațiul Schwartz al funcțiilor rapid descrescătoare, iar dualul acestuia, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, este spațiul distribuțiilor temperate. Spațiile de funcții cu valori vectoriale $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^n$ și $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)^n$ sunt definite pe componente.

Operatorul Stokes este dat de

$$\mathbb{S} := \begin{bmatrix} \Delta & -\nabla \\ \text{div} & 0 \end{bmatrix} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^n \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^n \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (1.2.1)$$

și operatorul

$$\mathbb{L}_0 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^n \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^n, \quad \mathbb{L}_0(\mathbf{v}, p) := \Delta \mathbf{v} - \nabla p. \quad (1.2.2)$$

Ținem cont că operatorul \mathbb{S} introdus în relația (1.2.1) este Agmon-Douglis-Nirenberg eliptic (vezi [49], [108]) și acest operator \mathbb{S} împreună cu operatorul \mathbb{L}_0 pot fi extinși la operatori liniari și continui,

$$\mathbb{S} : H^1(\mathbb{R}^n)^n \times L^2(\mathbb{R}^n)^n \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)^n \times L^2(\mathbb{R}^n), \quad \mathbb{L}_0 : H^1(\mathbb{R}^n)^n \times L^2(\mathbb{R}^n)^n \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)^n. \quad (1.2.3)$$

Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Să introducem operatorul Brinkman

$$\mathbb{B}_{\alpha} := \begin{bmatrix} (\Delta - \alpha \mathbb{I}) & -\nabla \\ \text{div} & 0 \end{bmatrix} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^n \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^n \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (1.2.4)$$

și operatorul asociat

$$\mathbb{L}_{\alpha} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^n \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^n, \quad \mathbb{L}_{\alpha}(\mathbf{v}, p) := (\Delta - \alpha \mathbb{I})\mathbf{v} - \nabla p. \quad (1.2.5)$$

Operatorul \mathbb{B}_{α} introdus în relația (1.2.4) este Agmon-Douglis-Nirenberg eliptic (vezi [49], [108]) și operatorul său asociat \mathbb{L}_{α} pot fi extinși la operatori liniari și continui,

$$\mathbb{B}_{\alpha} : H^1(\mathbb{R}^n)^n \times L^2(\mathbb{R}^n)^n \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)^n \times L^2(\mathbb{R}^n), \quad \mathbb{L}_{\alpha} : H^1(\mathbb{R}^n)^n \times L^2(\mathbb{R}^n)^n \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)^n. \quad (1.2.6)$$

În final, oferim câteva notații pe care le vom folosi de acum înainte, pe parcursul acestei teze

Notația 1.2.1. *Considerăm spațiile de vectori cu divergență nulă*

$$H_{\text{div}}^1(D)^n = \{\mathbf{u} \in H^1(D)^n \mid \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ în } D\}, \quad (1.2.7)$$

și

$$\mathcal{H}_{\text{div}}^1(D_-)^3 := \{\mathbf{u} \in \mathcal{H}^1(D_-)^3 \mid \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ în } D_-\}. \quad (1.2.8)$$

Notația 1.2.2. *Pe parcursul acestei teze, introducem operatorul $\mathring{\mathbb{E}}_{\pm}$, care reprezintă operatorul de extensie cu zero în exteriorul mulțimii D_{\pm} . Mai precis, ne permite să extindem funcțiile din $\mathring{H}^1(D_{\pm})$ cu zero, la mulțimea $\mathbb{R}^n \setminus D_{\pm}$. Păstrăm notația $\mathring{\mathbb{E}}_{\pm}$ în cazul spațiilor de funcții cu valori vectoriale.*

1.2.1 Operatorul de derivare conormală asociat sistemelor Stokes și Brinkman

Această subsecțiune este dedicată introducerii operatorilor de derivare conormală asociați sistemelor Stokes și Brinkman. Discutăm operatorul de derivare conormală clasic și operatorul de derivare conormală generalizat asociat acestor sisteme. În cele ce urmează, fie $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un domeniu Lipschitz mărginit cu frontieră conexă Γ .

Vom introduce operatorul de derivare conormală clasic după cum urmează. Pentru o pereche $(\mathbf{v}, p) \in C^1(\overline{D}_\pm)^n \times C^0(\overline{D}_\pm)$ cu proprietatea $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ în D_\pm avem că operatorul clasic de derivare conormală asociat operatorului Stokes sau operatorului Brinkman este dat de ecuația constitutivă a fluidului vâscos incompresibil Newtonian,

$$\mathbf{t}^\pm(\mathbf{v}, p) := \operatorname{Tr}_D \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, p) \boldsymbol{\nu}, \quad (1.2.9)$$

unde

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, p) := -p\mathbb{I} + 2\mathbb{E}(\mathbf{v}) \quad (1.2.10)$$

este tensorul tensiune și $\mathbb{E}(\mathbf{v})$ este partea simetrică a lui $\nabla \mathbf{v}$, adică $\mathbb{E}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t)$, unde superscript-ul t notează transpusa. Simbolul $\boldsymbol{\nu}$ reprezintă normala unitate exterioară la D , care este definită a.p.t. pe Γ .

Pentru $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^n$, avem următoarea identitate Green pentru sistemul Brinkman,

$$\pm \langle \mathbf{t}_\alpha^\pm(\mathbf{v}, p), \boldsymbol{\phi} \rangle_\Gamma = 2\langle \mathbb{E}(\mathbf{v}), \mathbb{E}(\boldsymbol{\phi}) \rangle_{D_\pm} + \alpha \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi} \rangle_{D_\pm} - \langle p, \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} \rangle_{D_\pm} + \langle L_\alpha(\mathbf{v}, p), \boldsymbol{\phi} \rangle_{D_\pm}, \quad (1.2.11)$$

unde $\alpha > 0$ este o constantă dată. În particular, pentru $\alpha = 0$, obținem identitatea Green pentru sistemul Stokes,

$$\pm \langle \mathbf{t}^\pm(\mathbf{v}, p), \boldsymbol{\phi} \rangle_\Gamma = 2\langle \mathbb{E}(\mathbf{v}), \mathbb{E}(\boldsymbol{\phi}) \rangle_{D_\pm} - \langle p, \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} \rangle_{D_\pm} + \langle L_0(\mathbf{v}, p), \boldsymbol{\phi} \rangle_{D_\pm}. \quad (1.2.12)$$

Formulele (1.2.11) și (1.2.12) rezultă după aplicarea repetată a integrării prin părți.

Formula (1.2.12) sugerează definiția operatorului de derivare conormală generalizat asociat sistemului Stokes și formula Green aferentă, în cadrul spațiilor Sobolev (a se vedea, de exemplu, [85, Teorema 10.4.1], [20, Lema 3.2], [77, Definiția 3.1, Teorema 3.2]).

Definiția 1.2.3. Fie $D_+ := D \subset \mathbb{R}^n$, un domeniu Lipschitz mărginit și fie $D_- := \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$. Definim spațiul $\mathbf{H}^1(D_\pm, L_0)$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^1(D_\pm, L_0) := \{(\mathbf{v}_\pm, p_\pm, \mathbf{g}_\pm) \in H^1(D_\pm)^n \times L^2(D_\pm) \times \tilde{H}^{-1}(D_\pm)^n : L_0(\mathbf{v}_\pm, p_\pm) = \mathbf{g}_\pm|_{D_\pm} \\ \text{și } \operatorname{div} \mathbf{v}_\pm = 0 \text{ în } D_\pm\}. \end{aligned}$$

Atunci, operatorii de derivare conormală generalizați \mathbf{t}_{D_\pm} pentru sistemul Stokes în D_\pm sunt definiți pe fiecare $(\mathbf{v}_\pm, p_\pm, \mathbf{g}_\pm) \in \mathbf{H}^1(D_\pm, L_0)$ prin intermediul relației

$$\begin{aligned} \pm \langle \mathbf{t}_{D_\pm}(\mathbf{v}_\pm, p_\pm, \mathbf{g}_\pm), \boldsymbol{\phi} \rangle_\Gamma := 2\langle \mathbb{E}(\mathbf{v}_\pm), \mathbb{E}(\operatorname{Tr}_{D_\pm}^{-1} \boldsymbol{\phi}) \rangle_{D_\pm} - \langle p_\pm, \operatorname{div}(\operatorname{Tr}_{D_\pm}^{-1} \boldsymbol{\phi}) \rangle_{D_\pm} \\ + \langle \mathbf{g}_\pm, \operatorname{Tr}_{D_\pm}^{-1} \boldsymbol{\phi} \rangle_{D_\pm}, \forall \boldsymbol{\phi} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Lema 1.2.4. În contextul Definiției 1.2.3, operatorii de derivare conormală generalizați

$$\mathbf{t}_{D_\pm} : \mathbf{H}^1(D_\pm, L_0) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \quad (1.2.14)$$

sunt liniari și mărginiți și Definiția 1.2.3 nu depinde de alegerea unei inverse la dreapta $\text{Tr}_{\mathbb{D}_{\pm}}^{-1} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^1(\mathbb{D}_+)^n$ a operatorului urmă $\text{Tr}_{\mathbb{D}_{\pm}} : H^1(\mathbb{D}_+)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$. Mai mult, următoarele formule Green

$$\begin{aligned} \pm \langle \mathbf{t}_{\mathbb{D}_{\pm}}(\mathbf{v}_{\pm}, p_{\pm}, \mathbf{g}_{\pm}), \text{Tr}_{\mathbb{D}_{\pm}} \boldsymbol{\psi}_{\pm} \rangle_{\Gamma} := & 2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{v}_{\pm}), \mathbb{E}(\boldsymbol{\psi}_{\pm}) \rangle_{\mathbb{D}_{\pm}} - \langle p_{\pm}, \text{div } \boldsymbol{\psi}_{\pm} \rangle_{\mathbb{D}_{\pm}} \\ & + \langle \mathbf{g}_{\pm}, \boldsymbol{\psi}_{\pm} \rangle_{\mathbb{D}_{\pm}}, \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

au loc pentru orice $(\mathbf{v}_{\pm}, p_{\pm}, \mathbf{g}_{\pm}) \in \mathbf{H}^1(\mathbb{D}_{\pm}, \mathbf{L}_0)$ și pentru orice $\boldsymbol{\psi}_{\pm} \in H^1(\mathbb{D}_{\pm})^n$.

Similar, formula (1.2.11) sugerează definiția operatorului de derivare conormală generalizat asociat sistemului Brinkman, (a se vedea, de exemplu, [20, Lema 3.2], [56, Lema 2.2], [52, Lema 2.5]).

Definiția 1.2.5. Fie $\mathbb{D}_+ := \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, un domeniu Lipschitz mărginit și fie $\mathbb{D}_- := \mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathbb{D}}$. Definim spațiul $\mathbf{H}^1(\mathbb{D}_{\pm}, \mathbf{L}_{\alpha})$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^1(\mathbb{D}_{\pm}, \mathbf{L}_{\alpha}) := \{ & (\mathbf{v}_{\pm}, p_{\pm}, \mathbf{g}_{\pm}) \in H^1(\mathbb{D}_{\pm})^n \times L^2(\mathbb{D}_{\pm}) \times \tilde{H}^{-1}(\mathbb{D}_{\pm})^n : \mathbf{L}_{\alpha}(\mathbf{v}_{\pm}, p_{\pm}) = \mathbf{g}_{\pm}|_{\mathbb{D}_{\pm}} \\ & \text{și } \text{div } \mathbf{v}_{\pm} = 0 \text{ în } \mathbb{D}_{\pm}\}. \end{aligned}$$

Atunci, operatorii de derivare conormală generalizați $\mathbf{t}_{\alpha, \mathbb{D}_{\pm}}$ pentru sistemul Brinkman în \mathbb{D}_{\pm} sunt definiți pe fiecare $(\mathbf{v}_{\pm}, p_{\pm}, \mathbf{g}_{\pm}) \in \mathbf{H}^1(\mathbb{D}_{\pm}, \mathbf{L}_{\alpha})$ prin intermediul relației

$$\begin{aligned} \pm \langle \mathbf{t}_{\alpha, \mathbb{D}_{\pm}}(\mathbf{v}_{\pm}, p_{\pm}, \mathbf{g}_{\pm}), \phi \rangle_{\Gamma} := & 2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{v}_{\pm}), \mathbb{E}(\text{Tr}_{\mathbb{D}_{\pm}}^{-1} \phi) \rangle_{\mathbb{D}_{\pm}} + \alpha \langle \mathbf{v}_{\pm}, \text{Tr}_{\mathbb{D}_{\pm}}^{-1} \phi \rangle_{\mathbb{D}_{\pm}} \\ & - \langle p_{\pm}, \text{div } (\text{Tr}_{\mathbb{D}_{\pm}}^{-1} \phi) \rangle_{\mathbb{D}_{\pm}} + \langle \mathbf{g}_{\pm}, \text{Tr}_{\mathbb{D}_{\pm}}^{-1} \phi \rangle_{\mathbb{D}_{\pm}}, \forall \phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Lema 1.2.6. In contextul Definiției 1.2.5, operatorii de derivare conormală generalizați

$$\mathbf{t}_{\alpha, \mathbb{D}_{\pm}} : \mathbf{H}^1(\mathbb{D}_{\pm}, \mathbf{L}_{\alpha}) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \quad (1.2.17)$$

sunt liniari și mărginiți și Definiția 1.2.5 nu depinde de alegerea unei inverse la dreapta $\text{Tr}_{\mathbb{D}_{\pm}}^{-1} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^1(\mathbb{D}_+)^n$ a operatorului urmă $\text{Tr}_{\mathbb{D}_{\pm}} : H^1(\mathbb{D}_+)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$. Mai mult, următoarele formule Green

$$\begin{aligned} \pm \langle \mathbf{t}_{\alpha, \mathbb{D}_{\pm}}(\mathbf{v}_{\pm}, p_{\pm}, \mathbf{g}_{\pm}), \text{Tr}_{\mathbb{D}_{\pm}} \boldsymbol{\psi}_{\pm} \rangle_{\Gamma} := & 2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{v}_{\pm}), \mathbb{E}(\boldsymbol{\psi}_{\pm}) \rangle_{\mathbb{D}_{\pm}} + \alpha \langle \mathbf{v}_{\pm}, \boldsymbol{\psi}_{\pm} \rangle_{\mathbb{D}_{\pm}} \\ & - \langle p_{\pm}, \text{div } \boldsymbol{\psi}_{\pm} \rangle_{\mathbb{D}_{\pm}} + \langle \mathbf{g}_{\pm}, \boldsymbol{\psi}_{\pm} \rangle_{\mathbb{D}_{\pm}}, \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

au loc pentru orice $(\mathbf{v}_{\pm}, p_{\pm}, \mathbf{g}_{\pm}) \in \mathbf{H}^1(\mathbb{D}_{\pm}, \mathbf{L}_{\alpha})$ și pentru orice $\boldsymbol{\psi}_{\pm} \in H^1(\mathbb{D}_{\pm})^n$.

Să încheiem această subsecțiune subliniind câteva remarci utile (vezi de asemenea [52, Observația 2.6, Lema 2.9], [56, Observația 2.4]).

Observația 1.2.7. Pentru $\alpha = 0$, derivata conormală pentru sistemul Brinkman (vezi Definiția 1.2.5) devine derivata conormală pentru sistemul Stokes (vezi Definiția 1.2.3).

Observația 1.2.8. Fie $\mathbb{D}_+ := \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$, un domeniu Lipschitz mărginit și fie $\mathbb{D}_- := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathbb{D}}$. Pentru $(\mathbf{v}_-, p_-, \mathbf{g}_-) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{D}_-)^3 \times L^2(\mathbb{D}_-) \times \tilde{\mathcal{H}}^{-1}(\mathbb{D}_-)^3$ cu proprietatea că $\mathbf{L}_0(\mathbf{v}_-, p_-) = \mathbf{g}_-|_{\mathbb{D}_-}$, operatorul de derivare conormală $\mathbf{t}_{\mathbb{D}_-}(\mathbf{v}_-, p_-, \mathbf{g}_-)$ este bine-definit de relația (1.2.13) și o formulă Green asociată, similară relației (1.2.15), este adevărată în \mathbb{D}_- .

Observația 1.2.9. Fie $\mathbb{D}_+ := \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$, un domeniu Lipschitz mărginit și fie $\mathbb{D}_- := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathbb{D}}$. Atunci, pentru $(\mathbf{v}_-, p_-, \mathbf{g}_-) \in H^1(\mathbb{D}_-)^3 \times \mathfrak{M}(\mathbb{D}_-) \times \tilde{H}^{-1}(\mathbb{D}_-)^3$, such that $\mathbf{L}_{\alpha}(\mathbf{v}_-, p_-) = \mathbf{g}_-|_{\mathbb{D}_-}$, derivata conormală $\mathbf{t}_{\alpha, \mathbb{D}_-}(\mathbf{v}_-, p_-, \mathbf{g}_-)$ este bine definită de relația (1.2.16). Mai mult, în acest caz, formula Green (1.2.18) este adevărată, în \mathbb{D}_- . Spațiul $\mathfrak{M}(\mathbb{D}_-)$ este furnizat în Definiția 2.1.1.

Observația 1.2.10. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un domeniu Lipschitz mărginit și fie Γ frontiera acestuia. În cazul $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, unde Γ_1 și Γ_2 sunt componente conexe ale lui Γ cu proprietatea că $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, definim operatorul

$$(\mathbf{t}_{\alpha, D}(\cdot, \cdot, \cdot))|_{\Gamma_1} : \mathbf{H}^1(D, L_\alpha) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)^n, \quad (1.2.19)$$

cu ajutorul relației

$$\langle \mathbf{t}_{\alpha, D}(\mathbf{v}, p, \mathbf{g})|_{\Gamma_1}, \Phi \rangle_{\Gamma_1} := \langle \mathbf{t}_{\alpha, D}(\mathbf{v}, p, \mathbf{g}), \Phi \rangle_{\Gamma}, \quad (1.2.20)$$

pentru orice $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)^n$ care sunt nule într-o vecinătate deschisă a lui Γ_2 .

Observația 1.2.11. Pe parcursul acestei teze vom scrie $\mathbf{t}_{\alpha, D}(\mathbf{v}, p)$ în loc de $\mathbf{t}_{\alpha, D}(\mathbf{v}, p, \mathbf{0})$.

1.2.2 Sistemul Brinkman generalizat și rezultate aferente

În această teză considerăm un sistem Brinkman generalizat. Într-adevăr, termenul $\alpha \mathbb{I}$ care apare în operatorul clasic Brinkman (vezi relațiile (1.2.4) și (1.2.5)) a fost înlocuit cu un alt termen, mult mai general. O parte din rezultatele originale care sunt incluse în teză sunt probleme de transmisie în care este implicată această versiune generalizată a sistemului Brinkman. Mai recent, acest sistem Brinkman generalizat a fost tratat și în cadrul mult mai general al sistemelor de EDP cu coeficienți variabili. (a se vedea, de exemplu, [58], [59], [60], [67]).

Prin urmare, pentru introducerea acestei versiuni generalizate a sistemului Brinkman, considerăm un domeniu Lipschitz mărginit. $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Sistemul Brinkman generalizat este dat de

$$\mathbf{L}_{\mathcal{P}}(\mathbf{v}, p) := \Delta \mathbf{v} - \mathcal{P}\mathbf{v} - \nabla p = \mathbf{g} \text{ in } D, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ in } D, \quad (1.2.21)$$

unde $\mathcal{P} \in L^\infty(D)^{3 \times 3}$ astfel încat \mathcal{P} satisface următoarea condiție de ne-negativitate

$$\langle \mathcal{P}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_D \geq c_{\mathcal{P}} \|\mathbf{v}\|_{L^2(D)^3}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(D)^3, \quad (1.2.22)$$

unde $c_{\mathcal{P}} > 0$ este o constantă.

Sistemul (1.2.21) este privit în sens distribuțional, adică pentru $(\mathbf{v}, p) \in H^1(D)^3 \times L^2(D)$, avem

$$\langle \mathbf{L}_{\mathcal{P}}(\mathbf{v}, p), \boldsymbol{\psi} \rangle_{D_+} = \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle_D, \quad \langle \operatorname{div} \mathbf{v}, g_0 \rangle_D = 0, \quad (1.2.23)$$

pentru fiecare $(\boldsymbol{\psi}, g_0) \in \mathcal{D}(D)^3 \times \mathcal{D}(D)$, unde

$$\langle \mathbf{L}_{\mathcal{P}}(\mathbf{v}, p), \boldsymbol{\psi} \rangle_D := \langle \Delta \mathbf{v} - \mathcal{P}\mathbf{v} - \nabla p, \boldsymbol{\psi} \rangle_D = -\langle \nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\psi} \rangle_D - \langle \mathcal{P}\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi} \rangle_D + \langle p, \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \rangle_D.$$

De asemenea, scufundarea continuă $L^2(D) \hookrightarrow H^{-1}(D)$ implică liniaritatea și mărginirea operatorului

$$\mathbf{L}_{\mathcal{P}} : H^1(D)^3 \times L^2(D) \rightarrow H^{-1}(D)^3 = (\dot{H}^1(D)^3)'. \quad (1.2.24)$$

Rețineți că, din această versiune generalizată a sistemului Brinkman, putem extrage sistemele clasice Stokes sau Brinkman. Acest fapt este subliniat în observațiile următoare.

Observația 1.2.12. Pentru $\mathcal{P} \equiv 0$, sistemul (1.2.21) este sistemul Stokes clasic.

Observația 1.2.13. Pentru $\mathcal{P} \equiv \alpha \mathbb{I}$, unde $\alpha > 0$ este o constantă, sistemul (1.2.21) este sistemul Brinkman clasic.

Pentru această versiune generalizată a sistemului Brinkman, introducem operatorul de derivare conormală asociat (a se vedea, de exemplu, [6, Lema 2.4]).

Definiția 1.2.14. Fie $D_+ := D \subset \mathbb{R}^3$, un domeniu Lipschitz mărginit și fie Γ frontiera acestuia. Fie $\mathcal{P} \in L^\infty(D_+)^{3 \times 3}$ care satisface condiția (1.2.22). Definim spațiul $\mathbf{H}^1(D_+, \mathcal{L}_{\mathcal{P}})$

$$\mathbf{H}^1(D_+, \mathcal{L}_{\mathcal{P}}) := \{(\mathbf{v}_+, p_+, \mathbf{g}_+) \in H^1(D_+)^3 \times L^2(D_+) \times \tilde{H}^{-1}(D_+)^3 : \mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbf{v}_+, p_+) = \mathbf{g}_+|_{D_+} \text{ și } \operatorname{div} \mathbf{v}_+ = 0 \text{ în } D_+\}.$$

Atunci, operatorul de derivare conormală

$$\mathbf{t}_{\mathcal{P}, D_+} : \mathbf{H}^1(D_+, \mathcal{L}_{\mathcal{P}}) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \quad (1.2.25)$$

pentru sistemul Brinkman generalizat în D_+ este definit pentru fiecare $(\mathbf{v}_+, p_+, \mathbf{g}_+) \in \mathbf{H}^1(D_+, \mathcal{L}_{\mathcal{P}})$ prin relația

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}_{\mathcal{P}, D_+}(\mathbf{v}_+, p_+, \mathbf{g}_+), \phi \rangle_{\Gamma} &:= 2\langle \mathbb{E}(\mathbf{v}_+), \mathbb{E}(\operatorname{Tr}_{D_+}^{-1} \phi) \rangle_{D_+} + \langle \mathcal{P}\mathbf{v}_+, \operatorname{Tr}_{D_+}^{-1} \phi \rangle_{D_+} \\ &- \langle p_+, \operatorname{div}(\operatorname{Tr}_{D_+}^{-1} \phi) \rangle_{D_+} + \langle \mathbf{g}_+, \operatorname{Tr}_{D_+}^{-1} \phi \rangle_{D_+}, \forall \phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3. \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

Lema 1.2.15. În cadrul Definiției 1.2.14, operatorul de derivare conormală pentru sistemul Brinkman generalizat,

$$\mathbf{t}_{\mathcal{P}, D_+} : \mathbf{H}^1(D_+, \mathcal{L}_{\mathcal{P}}) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \quad (1.2.27)$$

este liniar și mărginit, și Definiția 1.2.14 nu depinde de alegerea unei inverse la dreapta $\operatorname{Tr}_{D_+}^{-1} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \rightarrow H^1(D_+)^3$ a operatorului urmă $\operatorname{Tr}_{D_+} : H^1(D_+)^3 \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$. Mai mult, următoarea formulă Green

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}_{\mathcal{P}, D_+}(\mathbf{v}_+, p_+, \mathbf{g}_+), \operatorname{Tr}_{D_+} \psi_+ \rangle_{\Gamma} &:= 2\langle \mathbb{E}(\mathbf{v}_+), \mathbb{E}(\psi_+) \rangle_{D_+} + \langle \mathcal{P}\mathbf{v}_+, \psi_+ \rangle_{D_+} \\ &- \langle p_+, \operatorname{div} \psi_+ \rangle_{D_+} + \langle \mathbf{g}_+, \psi_+ \rangle_{D_+}, \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

are loc pentru orice $(\mathbf{v}_+, p_+, \mathbf{g}_+) \in \mathbf{H}^1(D_+, \mathcal{L}_{\mathcal{P}})$ și pentru orice $\psi_+ \in H_{\operatorname{div}}^1(D_+)^n$.

Demonstrația Lemei 1.2.15 urmează idei similare cu cele folosite în demonstrația Lemei 1.2.6, adică, cazul special $\mathcal{P} = \alpha \mathbb{I}$, în care $\alpha > 0$ este o constantă dată. Pentru mai multe detalii, a se vedea [56, Lema 2.2].

Observația 1.2.16. Ținând cont de definițiile operatorilor de derivare conormală sistemele Stokes, respectiv Brinkman generalizat, furnizate de (1.2.13) și (1.2.26), avem că

$$\mathbf{t}_{\mathcal{P}, D_+}(\mathbf{v}, p, \mathbf{g}) = \mathbf{t}_{D_+}(\mathbf{v}, p, \mathbf{g} + \mathring{\mathbb{E}}_+(\mathcal{P}\mathbf{v})), \quad (1.2.29)$$

unde $\mathring{\mathbb{E}}_+$ notează operatorul de extensie cu zero în afara mulțimii D_+ .

1.3 Potențialele de strat Stokes și proprietățile acestora

În această secțiune oferim soluția fundamentală pentru sistemul Stokes în \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ și, cu ajutorul ei, definim operatorii de strat care sunt implicați în soluționarea problemelor noastre de transmisie. Sursele pe care le-am folosit pentru pregătirea acestei secțiuni sunt [49], [52], [64], [85].

1.3.1 Sistemul Stokes și soluția sa fundamentală

Fie $(\mathbf{G}(\cdot, \cdot), \mathbf{P}(\cdot, \cdot)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^{n \times n} \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^n$ soluția fundamentală a sistemului Stokes. Notăm cu $\mathbf{G}(\cdot, \cdot)$ tensorul viteză fundamental și cu $\mathbf{P}(\cdot, \cdot)$ vectorul presiune fundamental pentru sistemul Stokes în \mathbb{R}^n .

Reținem că soluția fundamentală a sistemului Stokes satisface ecuațiile

$$\Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \mathbb{I}, \quad \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (1.3.1)$$

unde simbolul $\delta_{\mathbf{y}}$ reprezintă distribuția lui Dirac distribution cu masă în \mathbf{y} . De asemenea, operatorii diferențiali $\Delta_{\mathbf{x}}$, $\nabla_{\mathbf{x}}$ și $\operatorname{div}_{\mathbf{x}}$ acționează în raport cu variabila \mathbf{x} .

Componentele soluției fundamentale $(\mathbf{G}(\mathbf{G}_{jk}), \mathbf{P}(\mathbf{P}_k))$ sunt date de (a se vedea, de exemplu, [64, p. 38-39], [85, Relația (4.19), Relația (4.20), Relația (4.21)], [106])

$$\mathbf{G}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{2\omega_n} \left\{ \frac{\delta_{jk}}{(n-2)|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{n-2}} + \frac{x_j x_k}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^n} \right\}, \quad \mathbf{P}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\omega_n} \frac{x_k}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^n}, \quad (1.3.2)$$

pentru $n \geq 3$, și

$$\mathbf{G}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{x_j x_k}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2} - \delta_{jk} \log |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{n-2} \right\}, \quad \mathbf{P}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \frac{x_k}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}, \quad (1.3.3)$$

pentru $n \geq 2$. Simbolul δ_{jk} este simbolul lui Kronecher și ω_n este măsura sferei unitate \mathcal{S}^{n-1} în \mathbb{R}^n .

De asemenea, fie $\mathbf{S}(\mathbf{S}_{jkl})$, $\mathbf{R}(\mathbf{R}_{jk})$ tensori tensiune și presiune asociați sistemului Stokes. Componentele acestora sunt (a se vedea, de exemplu, [64, Capitolul 2], [85])

$$\mathbf{S}_{jkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{n}{\omega_n} \frac{x_i x_j x_k}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{n+2}}, \quad \mathbf{R}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := -\frac{2}{\omega_n} \left\{ -\frac{\delta_{jk}}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^n} + n \frac{x_j x_k}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{n+2}} \right\}, \quad (1.3.4)$$

pentru $n \geq 2$.

Pentru $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, perechea $(\mathbf{S}(\mathbf{S}_{jkl}), \mathbf{R}(\mathbf{R}_{jk}))$ satisface sistemul Stokes,

$$\Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{S}_{jkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{\partial \mathbf{R}_{jk}(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{S}_{jkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_k} = 0. \quad (1.3.5)$$

1.3.2 Potențialul de volum asociat sistemului Stokes și proprietățile acestuia

Scopul acestei subsecțiuni este de a introduce operatorii potențiali newtonieni (de volum) asociați sistemului Stokes și de a oferi proprietățile lor de mapare. În acest scop, luăm în considerare domeniile Lipschitz D_{\pm} așa cum sunt descrise în Ipoteza 1.1.6 și vom ține cont de soluția fundamentală a sistemului Stokes, adică perechea $(\mathbf{G}(\cdot, \cdot), \mathbf{P}(\cdot, \cdot)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^{n \times n} \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^n$ dată de formula (1.3.2) sau (1.3.3).

Definiția 1.3.1. Pentru $\mathbf{f} \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)^n$, definim potențialele newtoniene (de volum) viteză și presiune pentru sistemul Stokes, prin

$$(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f})(\mathbf{x}) := -\langle \mathbf{G}(\mathbf{x}, \cdot), \mathbf{f} \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad (\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f})(\mathbf{x}) := -\langle \mathbf{P}(\mathbf{x}, \cdot), \mathbf{f} \rangle_{\mathbb{R}^n}. \quad (1.3.6)$$

n plus, potențialele newtoniene (de volum) viteză și presiune pentru sistemul Stokes corespunzătoare mulțimilor D_{\pm} , sunt date de

$$\mathcal{N}_{D_{\pm}} \mathbf{f} := (\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f})|_{D_{\pm}}, \quad \mathcal{Q}_{D_{\pm}} \mathbf{f} := (\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f})|_{D_{\pm}}, \quad (1.3.7)$$

unde $|_{D_{\pm}}$ este operatorul de restricție la D_{\pm} , care acționează asupra funcțiilor cu valori vectoriale sau scalare în \mathbb{R}^n .

Următoarea leamnă descrie proprietățile de mapare ale operatorilor potențiali de strat newtonieni (de volum) în contextul spațiilor Sobolev (a se vedea, de exemplu, [52, Lema A.3]).

Teorema 1.3.2. *Operatorii potențiali newtonieni (de volum) viteză și presiune pentru sistemul Stokes, introduși în relația (1.3.6),*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n} : H^{-1}(\mathbb{R}^n)^n &\rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)^n, \quad \mathcal{Q}_{\mathbb{R}^n} : H^{-1}(\mathbb{R}^n)^n \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \\ \mathcal{N}_{\mathbb{R}^3} : \mathcal{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)^3 &\rightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)^3, \quad \mathcal{Q}_{\mathbb{R}^3} : \mathcal{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)^3 \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

sunt operatori liniari și continui. Mai mult, potențialele newtoniene (de volum) viteză și presiune pentru sistemul Stokes, introduse în relația (1.3.7),

$$\mathcal{N}_{D_+} : \tilde{H}^{-1}(D_+)^n \rightarrow H^1(D_+)^n, \quad \mathcal{Q}_{D_+} : \tilde{H}^{-1}(D_+)^n \rightarrow L^2(D_+), \quad (1.3.9)$$

și

$$\mathcal{N}_{D_-} : \tilde{\mathcal{H}}^{-1}(D_-)^3 \rightarrow \mathcal{H}^1(D_-)^3, \quad \mathcal{Q}_{D_-} : \tilde{\mathcal{H}}^{-1}(D_-)^3 \rightarrow L^2(D_-), \quad (1.3.10)$$

în cazul $n = 3$, sunt, de asemenea, operatori liniari și continui.

În cele din urmă, luând în considerare relația (1.3.1), avem că potențialele newtoniene satisfac următoarele ecuații (în sensul distribuțiilor)

$$\Delta(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}) - \nabla(\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}) = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}) = 0, \quad \text{în } \mathbb{R}^n, \quad (1.3.11)$$

și

$$\Delta(\mathcal{N}_{D_{\pm}} \mathbf{f}) - \nabla(\mathcal{Q}_{D_{\pm}} \mathbf{f}) = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}(\mathcal{N}_{D_{\pm}} \mathbf{f}) = 0, \quad \text{în } D_{\pm}. \quad (1.3.12)$$

1.3.3 Potențialele de strat asociate sistemului Stokes și rezultate aferente

În această subsecțiune, ne preocupăm de operatori de potențial de simplu strat și de dublu strat asociați sistemului Stokes. Scopul nostru este să le oferim definițiile, proprietățile lor de mapare relațiile lor de salt și să le specificăm comportamentul acestora la infinit. În cele ce urmează lucrăm în cadrul Ipotezei 1.1.6 și în plus, presupunem că domeniul Lipschitz mărginit D_+ are o frontieră conexă Γ .

În primul rând, să ne concentrăm asupra potențialelor de viteză și presiune de simplu strat, asociate sistemului Stokes (a se vedea, de exemplu, [85, Relația (4.24), Relația (4.27)]).

Definiția 1.3.3. *Considerăm Ipoteza 1.1.6 satisfăcută. Fie $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$. Definim potențialul viteză de simplu strat $\mathbf{V}_{\Gamma} \varphi$ și potențialul presiune asociat acestuia $\mathcal{Q}_{\Gamma}^s \varphi$ pentru sistemul Stokes astfel*

$$(\mathbf{V}_{\Gamma} \varphi) := \langle \mathbf{G}(\mathbf{x}, \cdot), \varphi \rangle_{\Gamma}, \quad (\mathcal{Q}_{\Gamma}^s \varphi) := \langle \mathbf{P}(\mathbf{x}, \cdot), \varphi \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma. \quad (1.3.13)$$

Ținând cont de relația (1.3.1), avem faptul că perechea $(\mathbf{V}_{\Gamma} \varphi, \mathcal{Q}_{\Gamma}^s \varphi)$ satisface sistemul Stokes omogen

$$\Delta(\mathbf{V}_{\Gamma} \varphi) - \nabla(\mathcal{Q}_{\Gamma}^s \varphi) = 0, \quad \operatorname{div}(\mathbf{V}_{\Gamma} \varphi) = 0 \quad (1.3.14)$$

în $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$.

Următoarea teoremă oferă câteva proprietăți de mapare utile pentru operatorii potențiali de simplu strat asociați sistemului Stokes (a se vedea, de exemplu, [52, Lema A.4]).

Teorema 1.3.4. *Considerăm ipoteza 1.1.6 satisfăcută. Atunci operatorii*

$$(\mathbf{V}_\Gamma)|_{\mathbb{D}_+} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^1(\mathbb{D}_+)^n, \quad (\mathcal{Q}_\Gamma^s)|_{\mathbb{D}_+} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow L^2(\mathbb{D}_+) \quad (1.3.15)$$

sunt liniari și mărginiți. Mai mult, pentru $n = 3$, avem că operatorii

$$(\mathbf{V}_\Gamma)|_{\mathbb{D}_-} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{D}_-)^3, \quad (\mathcal{Q}_\Gamma^d)|_{\mathbb{D}_-} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \rightarrow L^2(\mathbb{D}_-) \quad (1.3.16)$$

sunt liniari și mărginiți, unde spațiul Sobolev ponderat $\mathcal{H}^1(\mathbb{D}_-)^3$ este dat de relația (1.1.28).

În al doilea rând, ne concentrăm pe potențialele vitează și presiune de dublu strat, asociate sistemului Stokes (a se vedea, de exemplu, [85, Relația (4.25), Relația (4.28)]).

Definiția 1.3.5. *Considerăm Ipoteza 1.1.6 satisfăcută. Fie $\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$. Atunci, potențialul vitează de dublu strat $\mathbf{W}_\Gamma\phi$ și potențialul presiune asociat $\mathcal{Q}_\Gamma^d\phi$ pentru sistemul Stokes sunt date de*

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_\Gamma\phi)_k(\mathbf{x}) &:= \int_\Gamma \mathcal{S}_{jkl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \nu_l(\mathbf{y}) \phi_j(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma, \\ (\mathcal{Q}_\Gamma^d\phi)(\mathbf{x}) &:= \int_\Gamma \mathcal{R}_{jl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nu_l(\mathbf{y}) \phi_j(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma, \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

unde $\nu_l(\nu_l)_{l=1,\dots,n}$ este vectorul normal unitar la \mathbb{D}_+ , definit a.p.t. pe Γ .

Folosit relația (1.3.5), avem că perechea $(\mathbf{W}_\Gamma\phi, \mathcal{Q}_\Gamma^d\phi)$ satisface sistemul Stokes omogen

$$\Delta(\mathbf{W}_\Gamma\phi) - \nabla(\mathcal{Q}_\Gamma^d\phi) = 0, \quad \operatorname{div}(\mathbf{W}_\Gamma\phi) = 0 \quad (1.3.18)$$

în $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$.

Mai mult, să introducem versiunea pe frontieră a potențialului vitează de dublu strat al sistemului Stokes în sensul valorii principale (a se vedea, de exemplu, [85, Relația (4.44)]).

Definiția 1.3.6. *Definim valoarea principală a lui $\mathbf{W}_\Gamma\phi$, notată cu $\mathbb{K}_\Gamma\phi$ astfel*

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}_\Gamma\phi)_k(\mathbf{x}) &:= \text{p.v.} \int_\Gamma \mathcal{S}_{jkl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \nu_l(\mathbf{y}) \phi_j(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus (\Gamma \cap \overline{B}(x, \varepsilon))} \mathcal{S}_{jkl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \nu_l(\mathbf{y}) \phi_j(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

pentru $\mathbf{x} \in \Gamma$, în care această limită este definită.

De asemenea, următorul rezultat ne oferă proprietăți utile de mapare ale operatorilor potențiali dublu strat pentru sistemul Stokes (a se vedea, de exemplu, [52, Lema A.4]).

Teorema 1.3.7. *Considerăm Ipoteza 1.1.6 satisfăcută. Atunci operatorii*

$$(\mathbf{W}_\Gamma)|_{\mathbb{D}_+} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^1(\mathbb{D}_+)^n, \quad (\mathcal{Q}_\Gamma^d)|_{\mathbb{D}_+} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow L^2(\mathbb{D}_+), \quad (1.3.20)$$

sunt liniari și mărginiți. Mai mult, pentru $n = 3$, avem că operatorii

$$(\mathbf{W}_\Gamma)|_{\mathbb{D}_-} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{D}_-)^3, \quad (\mathcal{Q}_\Gamma^d)|_{\mathbb{D}_-} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \rightarrow L^2(\mathbb{D}_-) \quad (1.3.21)$$

sunt de asemenea liniari și mărginiți.

Să oferim, de asemenea, lema care descrie relațiile de salt ale potențialelor de simplu și dublu strat pentru sistemul Stokes, în cadrul spațiilor Sobolev (a se vedea, de exemplu, [52, Lema A.4], [85, Propoziția 4.2.2, Propoziția 4.2.5, Propoziția 4.2.9, Corolar 4.3.2, Teorema 5.3.6, Teorema 5.4.1]).

Lema 1.3.8. *Considerăm Ipoteza 1.1.6 satisfăcută.*

(i) Pentru $\boldsymbol{\varphi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$ și $\boldsymbol{\phi} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$, relațiile de salt

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{D_+}(\mathbf{V}_\Gamma \boldsymbol{\varphi}) &= \text{Tr}_{D_-}(\mathbf{V}_\Gamma \boldsymbol{\varphi}) =: \mathcal{V}_\Gamma \boldsymbol{\varphi}, \\ \text{Tr}_{D_\pm}(\mathbf{W}_\Gamma \boldsymbol{\phi}) &= \left(\mp \frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_\Gamma \right) \boldsymbol{\phi}, \\ \mathbf{t}_{D_\pm}(\mathbf{V}_\Gamma \boldsymbol{\varphi}, \mathcal{Q}_\Gamma^s \boldsymbol{\varphi}) &= \left(\pm \frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_\Gamma^* \right) \boldsymbol{\varphi}, \\ \mathbf{t}_{D_+}(\mathbf{W}_\Gamma \boldsymbol{\phi}, \mathcal{Q}_\Gamma^d \boldsymbol{\phi}) &= \mathbf{t}_{D_-}(\mathbf{W}_\Gamma \boldsymbol{\phi}, \mathcal{Q}_\Gamma^d \boldsymbol{\phi}) =: \mathbb{D}_\Gamma \boldsymbol{\phi} \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

au loc a.p.t. pe Γ , unde $\mathbb{K}_\Gamma^* : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$ este adjunctul operatorului potențial de dublu strat $\mathbb{K}_\Gamma : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$.

(ii) Operatorii de potențial de strat Stokes

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\Gamma : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n, \quad \mathbb{K}_\Gamma : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n, \\ \mathbb{K}_\Gamma^* : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n, \quad \mathbb{D}_\Gamma : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n, \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

sunt liniari și mărginiți. Mai mult, operatorul $\mathcal{V}_\Gamma : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$ este un operator Fredholm de index zero și nucleul acestuia, $\text{Ker } \mathcal{V}_\Gamma$, este

$$\text{Ker } \{ \mathcal{V}_\Gamma : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \} = \mathbb{R}\boldsymbol{\nu}. \quad (1.3.24)$$

Avem următoarea observație utilă.

Observația 1.3.9. *Dacă f și g sunt două funcții definite într-o vecinătate a unui punct \mathbf{x} (care poate fi și ∞), atunci*

$$f(\mathbf{x}) = O(g(\mathbf{x})) \Leftrightarrow \frac{|f(\mathbf{x})|}{|g(\mathbf{x})|} \text{ este mărginit.} \quad (1.3.25)$$

Să încheiem această subsecțiune precizând formulele asimptotice care sunt satisfăcute de potențialele de strat asociate sistemului Stokes la infinit (a se vedea, de exemplu, [54, Relația (3.14)])

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_\Gamma \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) &= O(\ln|\mathbf{x}|), \quad (\mathcal{Q}_\Gamma^s \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}) \text{ pentru } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad n = 2 \\ (\mathbf{V}_\Gamma \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) &= O(|\mathbf{x}|^{2-n}), \quad (\mathcal{Q}_\Gamma^s \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{1-n}) \text{ pentru } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad n \geq 3 \\ (\mathbf{W}_\Gamma \boldsymbol{\phi})(\mathbf{x}) &= O(|\mathbf{x}|^{1-n}), \quad (\mathcal{Q}_\Gamma^d \boldsymbol{\phi})(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-n}) \text{ pentru } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

1.4 Potențialele de strat Brinkman și proprietățile acestora

În această secțiune considerăm soluția fundamentală pentru sistemul Brinkman în \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, iar apoi definim operatori potențiali de strat care sunt utili în analiza problemelor de transmisie ce apar în capitolele următoare. Sursele utilizate în pregătirea acestei secțiuni sunt [49], [54], [56], [52].

1.4.1 Sistemul Brinkman și soluția sa fundamentală

Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Fie $(\mathbf{G}^\alpha(\cdot, \cdot), \mathbf{P}^\alpha(\cdot, \cdot)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^{n \times n} \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^n$ soluția fundamentală a sistemului Brinkman, unde $\mathbf{G}^\alpha(\cdot, \cdot)$ este tensorul viteză fundamental și $\mathbf{P}^\alpha(\cdot, \cdot)$ este vectorul presiune fundamental asociate sistemului Brinkman system în \mathbb{R}^n . Atunci, perechea $(\mathbf{G}^\alpha(\cdot, \cdot), \mathbf{P}^\alpha(\cdot, \cdot))$ satisface ecuațiile

$$\Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{G}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha \mathbf{G}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{P}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \mathbb{I}, \quad \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{G}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (1.4.1)$$

Reamintim că $\delta_{\mathbf{y}}$ este distribuția lui Dirac cu masă în \mathbf{y} și operatorii diferențiali $\Delta_{\mathbf{x}}$, $\nabla_{\mathbf{x}}$ și $\operatorname{div}_{\mathbf{x}}$ acționează în raport cu variabila \mathbf{x} .

Componențele soluției fundamentale $(\mathbf{G}^\alpha(\mathbf{G}_{jk}^\alpha), \mathbf{P}^\alpha(\mathbf{P}_k^\alpha))$ sunt date de (a se vedea, de exemplu, [54, Relația (2.29)], [106])

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{jk}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= \frac{1}{2\omega_n} \left\{ \frac{\delta_{jk}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n-2}} E_1(\alpha|\mathbf{y} - \mathbf{x}|) + \frac{x_j x_k}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} E_2(\alpha|\mathbf{y} - \mathbf{x}|) \right\}, \\ \mathbf{P}_k^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{\omega_n} \frac{x_k}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n}, \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

unde

$$\begin{aligned} E_1(s) &:= \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} K_{\frac{n}{2}-1}(s)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + 2 \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}}(s)}{s^2 \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} - \frac{1}{s^2}, \\ E_2(s) &:= \frac{n}{s^2} - 4 \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1} K_{\frac{n}{2}+1}(s)}{s^2 \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

și K_β este funcția Bessel de speța a doua de ordin $\beta \geq 0$, $\Gamma(\cdot)$ este funcția Gamma a lui Euler. Reamintim că δ_{jk} este simbolul lui Kronecher și ω_n este măsura sferei unitate S^{n-1} în \mathbb{R}^n , $n \geq 2$.

Mai mult, fie $\mathbf{S}^\alpha(\mathbf{S}_{jkl}^\alpha)$ și $\mathbf{R}^\alpha(\mathbf{R}_{jk}^\alpha)$ tensorii tensiune și presiune asociați sistemului Brinkman. Componentele acestora sunt (a se vedea, de exemplu, [54, Relația (2.31) și Relația (2.32)])

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{jkl}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= \frac{1}{\omega_n} \left\{ \delta_{jl} \frac{x_j}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} E_1(\alpha|\mathbf{y} - \mathbf{x}|) + \frac{\delta_{jl} x_i + \delta_{ij} x_l}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} E_2(\alpha|\mathbf{y} - \mathbf{x}|) + \frac{x_i x_j x_l}{|\mathbf{x}|^{n+2}} E_3(\alpha|\mathbf{y} - \mathbf{x}|) \right\}, \\ \mathbf{R}_{jk}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= \frac{1}{2\pi} \left\{ -(y_i - x_i) \frac{4(y_k - x_k)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^4} - (\alpha|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 \log|\mathbf{y} - \mathbf{x}| + 2) \frac{\delta_{ik}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2} \right\}, \quad n = 2, \\ \mathbf{R}_{jk}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= \frac{1}{\omega_n} \left\{ -(y_i - x_i) \frac{2n(y_k - x_k)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n+2}} + \frac{2\delta_{ik}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} - \alpha \frac{1}{n-2} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n-2}} \delta_{ik} \right\}, \quad n \geq 3, \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

unde

$$\begin{aligned} E_1(s) &:= 8 \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1} K_{\frac{n}{2}+1}(s)}{s^2 \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} - \frac{2n}{z^2} + 1 \\ E_2(s) &:= 8 \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1} K_{\frac{n}{2}+1}(s)}{s^2 \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + 2 \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}}(s)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} - \frac{2n}{s^2} \\ E_3(s) &:= -16 \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{n}{2}+2} K_{\frac{n}{2}+2}(s)}{s^2 \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + \frac{2n(n+2)}{s^2}. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Pentru $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, perechea $(\mathbf{S}^\alpha(\mathbf{S}_{jkl}^\alpha), \mathbf{R}^\alpha(\mathbf{R}_{jk}^\alpha))$ satisface sistemul Brinkman

$$\Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{S}_{jkl}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha \mathbf{S}_{jkl}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{\partial \mathbf{R}_{jk}^\alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{S}_{jkl}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_k} = 0. \quad (1.4.6)$$

1.4.2 Potențialul de volum asociat sistemului Brinkman și proprietățile acestuia

Scopul acestei subsecțiuni este de a introduce operatorii potențiali newtonieni (de volum) asociați sistemului Brinkman și de a oferi proprietățile lor de mapare. În acest scop, luăm în considerare domeniile Lipschitz D_{\pm} descrise în Ipoteza 1.1.6 și vom lua în considerare soluția fundamentală a sistemului Brinkman, adică perechea $(\mathbf{G}^{\alpha}(\cdot, \cdot), \mathbf{P}^{\alpha}(\cdot, \cdot)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^{n \times n} \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^n$ dată de relația (1.4.2).

Definiția 1.4.1. *Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Pentru $\mathbf{f} \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)^n$, definim potențialele newtoniene (de volum) viteză și presiune pentru sistemul Brinkman astfel*

$$(\mathcal{N}_{\alpha, \mathbb{R}^n} \mathbf{f})(\mathbf{x}) := -\langle \mathbf{G}^{\alpha}(\mathbf{x}, \cdot), \mathbf{f} \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad (\mathcal{Q}_{\alpha, \mathbb{R}^n} \mathbf{f})(\mathbf{x}) := -\langle \mathbf{P}^{\alpha}(\mathbf{x}, \cdot), \mathbf{f} \rangle_{\mathbb{R}^n}. \quad (1.4.7)$$

Mai mult, potențialele newtoniene (de volum) viteză și presiune asociate sistemului Brinkman în D_{\pm} , sunt date de

$$\mathcal{N}_{\alpha, D_{\pm}} \mathbf{f} := (\mathcal{N}_{\alpha, \mathbb{R}^n} \mathbf{f})|_{D_{\pm}}, \quad \mathcal{Q}_{\alpha, D_{\pm}} \mathbf{f} := (\mathcal{Q}_{\alpha, \mathbb{R}^n} \mathbf{f})|_{D_{\pm}}. \quad (1.4.8)$$

Reamintim faptul că $|_{D_{\pm}}$ este operatorul de restricție la D_{\pm} , care acționează asupra distribuțiilor cu valori vectoriale sau cu valori scalare în \mathbb{R}^n .

Următorul rezultat descrie proprietățile de mapare ale operatorilor potențiali newtonieni (de volum) în cadrul spațiilor Sobolev (a se vedea, de exemplu, [52, Lema A.3]).

Teorema 1.4.2. *Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Operatorii potențiali newtonieni (de volum) viteză și presiune asociați sistemului Brinkman, dați de relația (1.4.7),*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\alpha, \mathbb{R}^n} : H^{-1}(\mathbb{R}^n)^n &\rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)^n, & \mathcal{Q}_{\alpha, \mathbb{R}^n} : H^{-1}(\mathbb{R}^n)^n &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \\ \mathcal{Q}_{\alpha, \mathbb{R}^3} : H^{-1}(\mathbb{R}^3)^3 &\rightarrow \mathfrak{M}(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

sunt operatori liniari și continui. Mai mult, operatorii potențiali newtonieni (de volum) viteză și presiune asociați sistemului Brinkman, introduși de relația (1.4.8),

$$\mathcal{N}_{\alpha, D_{+}} : \tilde{H}^{-1}(D_{+})^n \rightarrow H^1(D_{+})^n, \quad \mathcal{Q}_{\alpha, D_{+}} : \tilde{H}^{-1}(D_{+})^n \rightarrow L^2(D_{+}) \quad (1.4.10)$$

și

$$\mathcal{N}_{\alpha, D_{-}} : \tilde{H}^{-1}(D_{-})^3 \rightarrow H^1(D_{-})^3, \quad \mathcal{Q}_{\alpha, D_{-}} : \tilde{H}^{-1}(D_{-})^3 \rightarrow \mathfrak{M}(D_{-}), \quad (1.4.11)$$

în cazul $n = 3$, sunt operatori liniari și continui, iar spațiile $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^3)$ și $\mathfrak{M}(D_{-})$ sunt date de Definiția 2.1.1.

Finalmente, luând în considerare relația (1.4.1), avem că potențialele newtoniene (de volum) asociate sistemului Brinkman, introduse în Definiția 1.4.1 satisfac ecuațiile (în sens distribuțional)

$$\Delta(\mathcal{N}_{\alpha, \mathbb{R}^n} \mathbf{f}) - \alpha(\mathcal{N}_{\alpha, \mathbb{R}^n} \mathbf{f}) - \nabla(\mathcal{Q}_{\alpha, \mathbb{R}^n} \mathbf{f}) = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}(\mathcal{N}_{\alpha, \mathbb{R}^n} \mathbf{f}) = 0, \quad \text{în } \mathbb{R}^n, \quad (1.4.12)$$

respectiv

$$\Delta(\mathcal{N}_{\alpha, D_{\pm}} \mathbf{f}) - \alpha(\mathcal{N}_{\alpha, D_{\pm}} \mathbf{f}) - \nabla(\mathcal{Q}_{\alpha, D_{\pm}} \mathbf{f}) = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}(\mathcal{N}_{\alpha, D_{\pm}} \mathbf{f}) = 0, \quad \text{în } D_{\pm}. \quad (1.4.13)$$

1.4.3 Potențialele de strat asociate sistemului Brinkman și rezultate aferente

În această subsecțiune, luăm în considerare operatorii potențiali de simplu strat, respectiv de dublu strat asociați sistemului Brinkman. Le oferim definițiile, proprietățile lor de mapare, relațiile lor de salt și le descriem comportamentul la infinit. Ca și în secțiunea anterioară, considerăm cadrul oferit de Ipoteza 1.1.6 și fie D_+ un domeniu Lipschitz mărginit cu granița conexă Γ .

În primul rând, să ne concentrăm pe potențialele de viteză și presiune de simplu strat, asociate sistemului Brinkman (a se vedea, de exemplu, [56, Relația (3.6)], [54, Relația (3.1)]).

Definiția 1.4.3. *Considerăm Ipoteza 1.1.6 satisfăcută. Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Fie $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$. Definim potențialul viteză de simplu strat $\mathbf{V}_{\alpha,\Gamma}\varphi$ și potențialul presiune asociat acestuia $\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^s\varphi$ pentru sistemul Brinkman, astfel*

$$(\mathbf{V}_{\alpha,\Gamma}\varphi) := \langle \mathbf{G}^\alpha(\mathbf{x}, \cdot), \varphi \rangle_\Gamma, \quad (\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^s\varphi) := \langle \mathbf{P}^\alpha(\mathbf{x}, \cdot), \varphi \rangle_\Gamma, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma. \quad (1.4.14)$$

Ținând cont de relația (1.4.1), avem că perechea $(\mathbf{V}_{\alpha,\Gamma}\varphi, \mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^s\varphi)$ satisface sistemul Brinkman omogen

$$\Delta(\mathbf{V}_{\alpha,\Gamma}\varphi) - \alpha(\mathbf{V}_{\alpha,\Gamma}\varphi) - \nabla(\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^s\varphi) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{V}_{\alpha,\Gamma}\varphi = 0 \quad (1.4.15)$$

în $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$.

Următoarea teoremă oferă câteva proprietăți utile de mapare ale potențialelor de simplu strat asociate sistemului Brinkman (a se vedea, de exemplu, [54, Lema 3.1], [52, Lema A.8]).

Teorema 1.4.4. *Considerăm Ipoteza 1.1.6 satisfăcută. Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Atunci operatorii*

$$(\mathbf{V}_{\alpha,\Gamma})|_{D_+} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^1(D_+)^n, \quad (\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^s)|_{D_+} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow L^2(D_+), \quad (1.4.16)$$

sunt liniari și mărginiți. Mai mult, pentru $n = 3$, avem că operatorii

$$(\mathbf{V}_{\alpha,\Gamma})|_{D_-} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \rightarrow H^1(D_-)^3, \quad (\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^s)|_{D_-} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \rightarrow L^2(D_-) \quad (1.4.17)$$

sunt de asemenea liniari și mărginiți.

În al doilea rând, ne concentrăm pe potențialele de viteză și presiune de dublu strat, asociate sistemului Brinkman (a se vedea, de exemplu, [56, Relația (3.7)]).

Definiția 1.4.5. *Considerăm Ipoteza 1.1.6 satisfăcută. Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Fie $\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$. Definim potențialul de dublu strat $\mathbf{W}_{\alpha,\Gamma}\phi$ și potențialul presiune asociat acestuia $\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^d\phi$ pentru sistemul Brinkman, astfel*

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_{\alpha,\Gamma}\phi)_k(\mathbf{x}) &:= \int_\Gamma S_{jkl}^\alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \nu_l(\mathbf{y}) \phi_j(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma, \\ (\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^d\phi)(\mathbf{x}) &:= \int_\Gamma R_{jl}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nu_l(\mathbf{y}) \phi_j(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma. \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

Reamintim faptul că $\boldsymbol{\nu}(\nu_l)_{l=1,\dots,n}$ este vectorul normal unitate la D_+ , definit a.p.t. pe Γ .

Datorită relației (1.4.6), perechea $(\mathbf{W}_{\alpha,\Gamma}\phi, \mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^d\phi)$ satisface sistemul Brinkman omogen

$$\Delta(\mathbf{W}_{\alpha,\Gamma}\phi) - \alpha(\mathbf{W}_{\alpha,\Gamma}\phi) - \nabla(\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^d\phi) = 0, \quad \operatorname{div}(\mathbf{W}_{\alpha,\Gamma}\phi) = 0 \quad (1.4.19)$$

în $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$.

Mai mult, introducem versiunea pe frontieră a potențialului viteză de dublu strat asociat sistemului Brinkman cu ajutorul valorii principale (a se vedea, de exemplu, [56, Relația (3.8)]).

Definiția 1.4.6. Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Definim valoarea principală a $\mathbf{W}_{\alpha,\Gamma}\phi$, notată cu $\mathbb{K}_{\alpha,\Gamma}\phi$ astfel

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}_{\alpha,\Gamma}\phi)_k(\mathbf{x}) &:= \text{p.v.} \int_{\Gamma} \mathcal{S}_{jkl}^{\alpha}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \nu_l(\mathbf{y}) \phi_j(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus (\Gamma \cap \overline{B}(x, \varepsilon))} \mathcal{S}_{jkl}^{\alpha}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \nu_l(\mathbf{y}) \phi_j(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

pentru $\mathbf{x} \in \Gamma$, unde limita aceasta este definită.

De asemenea, menționăm câteva proprietăți utile de mapare ale potențialelor de dublu strat în următoarea afirmație (a se vedea, de exemplu, [54, Lema 3.1], [52, Lema A.8]).

Teorema 1.4.7. Considerăm Ipoteza 1.1.6 satisfăcută. Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Atunci operatorii

$$(\mathbf{W}_{\alpha,\Gamma})|_{\mathbb{D}_+} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^1(\mathbb{D}_+)^n, \quad (\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^d)|_{\mathbb{D}_+} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow L^2(\mathbb{D}_+) \quad (1.4.21)$$

sunt liniari și mărginiți. Mai mult, pentru $n = 3$, avem că operatorii

$$(\mathbf{W}_{\alpha,\Gamma})|_{\mathbb{D}_-} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \rightarrow H^1(\mathbb{D}_-)^3, \quad (\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^d)|_{\mathbb{D}_-} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \rightarrow \mathfrak{M}(\mathbb{D}_-) \quad (1.4.22)$$

sunt de asemenea liniari și mărginiți și spațiul $\mathfrak{M}(\mathbb{D}_-)$ este dat de Definiția 2.1.1.

În continuare, ne preocupăm de relațiile de salt pentru potențialele de simplu și dublu strat asociate sistemului Brinkman, în cadrul spațiilor Sobolev (a se vedea, de exemplu, [54, Lema 3.1], [52, Lema A.4]).

Lema 1.4.8. Considerăm Ipoteza 1.1.6 satisfăcută. Fie $\alpha > 0$ o constantă dată.

(i) Fie $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$ și $\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$. Atunci formulele de salt

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathbb{D}_+}(\mathbf{V}_{\alpha,\Gamma}\varphi) &= \text{Tr}_{\mathbb{D}_-}(\mathbf{V}_{\alpha,\Gamma}\varphi) := \mathcal{V}_{\alpha,\Gamma}\varphi, \\ \text{Tr}_{\mathbb{D}_{\pm}}(\mathbf{W}_{\alpha,\Gamma}\phi) &= \left(\mp \frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\alpha,\Gamma} \right) \phi, \\ \mathbf{t}_{\alpha,\mathbb{D}_{\pm}}(\mathbf{V}_{\alpha,\Gamma}\varphi, \mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^s\varphi) &= \left(\pm \frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\alpha,\Gamma}^* \right) \varphi, \\ \mathbf{t}_{\alpha,\mathbb{D}_+}(\mathbf{W}_{\alpha,\Gamma}\phi, \mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^d\phi) &= \mathbf{t}_{\alpha,\mathbb{D}_-}(\mathbf{W}_{\alpha,\Gamma}\phi, \mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^d\phi) = \mathbb{D}_{\alpha,\Gamma}\phi \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

au loc a.p.t. pe Γ , unde $\mathbb{K}_{\alpha,\Gamma}^* : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$ este adjunctul operatorului de dublu strat $\mathbb{K}_{\alpha,\Gamma} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$.

(ii) Operatorii

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\alpha,\Gamma} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n, \quad \mathbb{K}_{\alpha,\Gamma} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n, \\ \mathbb{K}_{\alpha,\Gamma}^* : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n, \quad \mathbb{D}_{\alpha,\Gamma} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

sunt liniari și mărginiți. Mai mult, operatorul $\mathcal{V}_{\alpha,\Gamma} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$ este un operator Fredholm de index zero și spațiul nul al acestuia, $\text{Ker } \mathcal{V}_{\alpha,\Gamma}$, este

$$\text{Ker } \{ \mathcal{V}_{\alpha,\Gamma} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \} = \mathbb{R}\nu. \quad (1.4.25)$$

Să introducem operatorii

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\alpha,0,\Gamma} &:= \mathcal{V}_{\alpha,\Gamma} - \mathcal{V}_{\Gamma}, & \mathbb{K}_{\alpha,0,\Gamma} &:= \mathbb{K}_{\alpha,\Gamma} - \mathbb{K}_{\Gamma}, \\ \mathbb{K}_{\alpha,0,\Gamma}^* &:= \mathbb{K}_{\alpha,\Gamma}^* - \mathbb{K}_{\Gamma}^*, & \mathbb{D}_{\alpha,0,\Gamma} &:= \mathbb{D}_{\alpha,\Gamma} - \mathbb{D}_{\Gamma},\end{aligned}\tag{1.4.26}$$

operatori ce vor fi denumiți operatori potențiali de strat complementari. Reamintim faptul că operatorii \mathcal{V}_{Γ} , \mathbb{K}_{Γ} , \mathbb{K}_{Γ}^* și \mathbb{D}_{Γ} sunt introduși în Lema 1.3.8 care conține relațiile de salt ale potențialelor de strat asociate sistemului Stokes. Avem următoarea leamnă (a se vedea, de exemplu, [54, Teorema 3.1]).

Lema 1.4.9. *Operatorii potențiali de strat complementari*

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\alpha,0,\Gamma} &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n, & \mathbb{K}_{\alpha,0,\Gamma} &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n, \\ \mathbb{K}_{\alpha,0,\Gamma}^* &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n, & \mathbb{D}_{\alpha,0,\Gamma} &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^n,\end{aligned}\tag{1.4.27}$$

sunt compacți a.p.t. pe Γ .

Acum, oferim formulele asimptotice (vezi Observația 1.3.9) care specifică comportamentul la infinit al potențialelor de strat asociate sistemului Brinkman (a se vedea, de exemplu, [54, Relația (3.12)])

$$\begin{aligned}(\mathbf{V}_{\alpha,\Gamma}\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) &= O(|\mathbf{x}|^{-n}), & (\mathbf{W}_{\alpha,\Gamma}\boldsymbol{\phi})(\mathbf{x}) &= O(|\mathbf{x}|^{1-n}) \text{ pentru } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad n \geq 2 \\ (\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^s\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) &= O(|\mathbf{x}|^{-1}), & (\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^d\boldsymbol{\phi})(\mathbf{x}) &= O(\ln|\mathbf{x}|) \text{ pentru } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad n = 2 \\ (\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^s\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) &= O(|\mathbf{x}|^{1-n}), & (\mathcal{Q}_{\alpha,\Gamma}^d\boldsymbol{\phi})(\mathbf{x}) &= O(|\mathbf{x}|^{2-n}) \text{ pentru } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad n \geq 3.\end{aligned}\tag{1.4.28}$$

Observația 1.4.10. *Rezultatele prezentate în Secțiunea 1.3 și în Secțiunea 1.4, inclusiv definițiile potențialelor de strat, pot fi extinse la cazul sistemului Stokes (sau Brinkman) cu coeficienți variabili (care aparțin spațiului L^∞) utilizând o abordare variațională (a se vedea, de exemplu, [58], [59], [60], [67]).*

Probleme cu valori pe frontieră liniare de tip transmisie legate de sistemele Stokes și Brinkman

Acest capitol tratează anumite probleme liniară de tip transmisie în care sunt implicate sistemul Stokes, sistemul Brinkman și o versiune generalizată a sistemului Brinkman (vezi relația (1.2.21)) în domeniul Lipschitz în cadrul euclidian (vezi Ipoteza 1.1.6 și Ipoteza 1.1.7). Conținutul acestui capitol urmărește rezultatele obținute în lucrările [6], [7], [8].

Prezentăm și demonstrăm rezultate de bine-punere pentru următoarele probleme cu valori pe frontieră. În primul rând, tratăm problema Poisson de tip transmisie pentru sistemele Brinkman generalizat și Stokes în domeniul Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3 . În al doilea rând, analizăm problema Poisson de tip de transmisie pentru sistemul Brinkman generalizat și sistemul Brinkman clasic în domeniul complementare Lipschitz în \mathbb{R}^3 . În continuare, investigăm problema Poisson de tip Robin-transmisie pentru sistemul Brinkman în cadrul euclidian furnizat de Ipoteza 1.1.7.

Să remarcăm faptul că sistemul Stokes poate fi văzut ca un caz particular al sistemului Brinkman. Chiar și în acest caz, am separat studiul problemelor de transmisie care implică sistemul Brinkman și Stokes de problemele de transmisie care implică doar sistemul Brinkman. O astfel de distincție poate fi justificată prin prisma diferitelor aplicații practice ale acestor probleme (a se vedea, de exemplu, [15], [52]). Mai mult, spațiile în care căutăm soluțiile pentru fiecare dintre problemele de transmisie studiate sunt diferite. Anume, dacă lucrăm cu sistemul Stokes într-un domeniu exterior (nemărginit), folosim spațiile Sobolev ponderate. În schimb, dacă lucrăm cu sistemul Brinkman într-un domeniu exterior nemărginit, folosim spațiile Sobolev clasice.

Pentru a obține rezultatele prezentate în acest capitol, principalele instrumente de investigație pe care le-am folosit sunt teoria potențialului și teoria operatorilor Fredholm. Într-adevăr, utilizând potențialele de strat Stokes, potențialele de strat Brinkman, rezultate privind operatorii Fredholm și formule Green, construim soluții unice pentru problemele noastre cu valori pe frontieră considerate.

În cele ce urmează, să menționăm câteva lucrări anterioare care au contribuit la investigarea problemelor cu valori pe frontieră eliptice. În primul rând, să reamintim lucrarea autorilor Fabes, Kenig și Verchota [31] care se referă la investigarea problemei Dirichlet pentru sistemul Stokes într-un domeniu Lipschitz în \mathbb{R}^n . Aceștia au oferit formule de reprezentare în termeni de potențial de strat pentru soluție. Costabel [20] a studiat potențialele de simplu și dublu strat pentru operatori diferențiali eliptici de ordinul doi pe domenii Lipschitz, în context euclidian și a furnizat rezultate de continuitate și regularitate. Dalla Riva, Lanza de Cristoforis și Musolino [23] au analizat problemele cu valori pe frontieră pentru ecuația lui Laplace în domenii perturbate singular, cu accent pe domeniile cu găuri mici.

Varnhorn [105] a folosit teoria potențialului pentru a construi o soluție explicită a sistemului Stokes rezolvent într-un domeniu mărginit în \mathbb{R}^3 cu frontieră de clasă C^2 . De asemenea, Varnhorn

[106] a furnizat o teorie a solvabilității pentru sistemul Stokes în domenii exterioare și a analizat existența unor soluții tari în spații Sobolev și alte proprietăți. Medkova [74] a folosit metoda ecuațiilor integrale pentru a obține soluții în L^2 pentru problema de transmisie, problema Robin-transmisie și problema Dirichlet-transmisie pentru sistemul Brinkman, în timp ce în [75], dumneaei a folosit aceeași metodă pentru a studia problema de transmisie pentru sistemul Stokes, în spații Sobolev omogene în domenii Lipschitz în \mathbb{R}^3 . Medkova [76] a studiat, de asemenea, problema Dirichlet pentru sistemul Stokes rezolvent cu date mărginite pe frontieră în cadrul domeniilor mărginite și nemărginite cu frontieră Lyapunov compactă. Chkadua, Mikhailov și Natroshvili [16] au folosit potențiale integrale localizate asociate operatorului Laplace pentru a reduce problemele cu valori pe frontieră pentru ecuații cu derivate parțiale (EDP) cu coeficienți variabili, în formă de divergență, eliptice de ordinul doi, la sisteme de ecuații integrale singulare localizate domeniu-frontieră. Escauriaza și Mitrea [30] au folosit metode de potențiale de strat pentru a obține rezultatul de bine-punere a problemei de transmisie pentru Laplacian în prezența unei interfețe Lipschitz cu date pe frontieră care aparțin spațiilor Lebesgue și Hardy. Lucrarea lui Mitrea și Wright [85] se referă și la problemele cu valori pe frontieră de tip transmisie pentru sistemul Stokes în domenii Lipschitz în context euclidian, pentru $n \geq 2$.

Autorii lucrării [56] au obținut un rezultat de bine-punere pentru o problemă liniară de tip Robin-transmisie pentru sistemele Stokes și Brinkman în domenii Lipschitz adiacente în \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ cu condiții de transmisie liniară pe interfața Lipschitz și condiții Robin pe frontiera rămasă. Kohr, Wendland și Lanza de Cristoforis [54] au analizat o problemă neliniară de tip Neumann-transmisie pentru sistemele Stokes și Brinkman în domenii Lipschitz euclidiene cu date pe frontieră în spații L^p , Sobolev și Besov. Fericean, Groșan, Kohr și Wendland [34] au tratat probleme pe interfață cu valori pe frontieră de tip Robin-transmisie pentru sistemele Stokes și Brinkman în domenii Lipschitz în \mathbb{R}^n pentru $n \geq 3$ și cu date pe frontieră în L^p sau spații Sobolev. Fericean și Wendland [35] au folosit teoria potențialului pentru a obține rezultate de bine-punere pentru o problemă de tip Dirichlet-transmisie pentru sistemele Stokes și Brinkman în domenii Lipschitz în \mathbb{R}^n pentru $n \geq 3$. Autorii lucrării [52] au obținut de bine-punere pentru o problemă de transmisie pentru sistemele Stokes și Brinkman în domenii complementare Lipschitz în \mathbb{R}^3 în spații Sobolev ponderate prin utilizarea tehnicilor de potențial de strat. În [78], Mikhailov și Portillo au studiat o problemă cu valori pe frontieră mixtă pentru sistemul Stokes compresibil staționar cu vâscozitate variabilă într-un domeniu exterior din \mathbb{R}^3 prin intermediul ecuațiilor integrale domeniu-frontieră (BDIE). Mitrea, Mitrea și Mitrea [79] au demonstrat rezultate de bine-punere și de solvabilitate Fredholm pentru problemele cu valori pe frontieră pentru sisteme eliptice omogene cu coeficienți constanți, de ordinul doi, în domenii generale.

În ceea ce privește setarea colectoarelor, să menționăm că Kohr, Pinteș și Wendland [63] au dezvoltat o analiză potențială pentru anumiți operatori matriceali pseudodiferențiali pe domeniile Lipschitz în varietăți Riemmaniene compacte și au studiat problemele Dirichlet-transmisie pentru operatori Brinkman în domenii Lipschitz în varietăți Riemmaniene compacte. De asemenea, Kohr, Mikhailov și Wendland [57] au investigat o problemă de transmisie liniară pentru Stokes și sistemul Brinkman generalizat în două domenii Lipschitz complementare într-o varietate compactă Riemanniană de dimensiune $m \geq 2$.

Mai recent, o mare atenție a fost îndreptată către EDP cu coeficienți variabili. Rețineți că lucrările lui Kohr, Mikhailov și Wendland [58], [59], [60] se referă la analiza sistemului Stokes anizotrop cu tensor cu coeficienți în L^∞ . Ei investighează diverse probleme cu valori pe frontieră, de tip Dirichlet, de tip transmisie și au discutat, de asemenea, potențiale pentru acest sistem anizotrop.

2.1 Problema de tip Dirichlet pentru sistemul Brinkman într-un domeniu exterior

Scopul acestei secțiuni este unul dublu. În primul rând, introducem un spațiu funcțional special, care este implicat în proprietățile de mapare ale potențialelor Newtoniene pentru sistemul Brinkman (vezi relația (1.4.10) a Teoremei 1.4.2). În al doilea rând, studiem o problemă exterioară cu valori pe frontieră de tip Dirichlet pentru sistemul Brinkman, problemă care este implicată în demonstrarea rezultatelor noastre de bine-punere (vezi Teorema 2.3.1, Teorema 2.3.3, Teorema 3.3.1).

În cele ce urmează, notăm cu D fie \mathbb{R}^3 , D_+ fie D_- , domenii ce sunt descrise în Ipoteza 1.1.6, pentru $n = 3$. Să introducem spațiul $H_{\text{curl}}^{-1}(D)^3$ astfel

$$H_{\text{curl}}^{-1}(D)^3 := \{\mathbf{h} \in H^{-1}(D)^3 : \text{curl } \mathbf{h} = 0\}.$$

Definiția 2.1.1. Fie D unul din domeniile descrise în Ipoteza 1.1.6, pentru $n = 3$. Definim spațiul $\mathfrak{M}(D)$ prin

$$\mathfrak{M}(D) := \{g \in L^2(\rho^{-1}, D) : \nabla g \in H_{\text{curl}}^{-1}(D)^3\}. \quad (2.1.1)$$

Acum, să notăm cu $\mathfrak{M}'(D)$ dualul spațiului $\mathfrak{M}(D)$, avem următorul lanț de scufundări continue (a se vedea, de exemplu, [52, (A.24)])

$$L^2(\rho, D) \subset \mathfrak{M}'(D) \subset L^2(D) \subset \mathfrak{M}(D) \subset L^2(\rho^{-1}, D) \subset L_{\text{loc}}^2(D). \quad (2.1.2)$$

Mai departe, ne preocupăm de doua rezultate importante. În primul rând, analizăm problema Dirichlet exterioară pentru sistemul clasic Brinkman în $H^1(D_-)^3 \times \mathfrak{M}(D_-)$, unde D_- este domeniul Lipschitz exterior introdus în Ipoteza 1.1.6, în cazul $n = 3$. Avem următorul rezultat de bine-punere (vezi, [6, Teorema A.1], [52, Lema A.2], și [105, Prop. 4.5] în cazul unui domeniu exterior cu frontieră de clasă \mathcal{C}^2).

Teorema 2.1.2. Considerăm Ipoteza 1.1.6 satisfăcută pentru $n = 3$. Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Atunci, problema Dirichlet exterioară pentru sistemul Brinkman

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \nabla \pi = 0 \text{ în } D_-, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ în } D_-, \\ \text{Tr}_{D_-} \mathbf{u} = \mathbf{h} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \text{ pe } \Gamma, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-2}), \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \pi(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}) \text{ pentru } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

are o soluție unică în $H^1(D_-)^3 \times \mathfrak{M}(D_-)$.

Încheiem această secțiune cu un rezultat, care arată că dacă avem o pereche $(\mathbf{v}, p) \in H^1(D_-)^3 \times \mathfrak{M}(D_-)$ satisface sistemul Brinkman într-un domeniu Lipschitz exterior, atunci condiții de creștere descrise în problema (2.1.3) sunt de asemenea satisfăcute (vezi [6, Lema A.2], [52, Lema A.2]).

Lema 2.1.3. Considerăm Ipoteza 1.1.6 satisfăcută pentru $n = 3$. Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Dacă perechea $(\mathbf{v}, p) \in H^1(D_-)^3 \times \mathfrak{M}(D_-)$ satisface

$$\Delta \mathbf{v} - \alpha \mathbf{v} - \nabla p = 0, \text{ div } \mathbf{v} = 0 \text{ în } D_-, \quad (2.1.4)$$

atunci

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-2}), \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), p(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}) \text{ pentru } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.1.5)$$

2.2 Problema de transmisie pentru un sistem de tip Brinkman și sistemul Stokes în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3

În această secțiune, ne propunem să enunțăm și să demonstrăm un rezultat de bine-punere, pentru o problemă de tip transmisie, care a fost obținută în contextul Ipotezei 1.1.6 pentru $n = 3$, adică, domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3 . Considerăm o versiune generalizată a sistemului Brinkman în domeniul Lipschitz mărginit D_+ și sistemul Stokes în domeniul Lipschitz complementar D_- . De asemenea, avem următoarea ipoteză pe care o vom folosi ulterior.

Ipoteza 2.2.1. Fie $n \geq 2$. Fie $\mathfrak{L} \in L^\infty(\Gamma)^{n \times n}$ o funcție cu valori în mulțimea matricilor simetrice, care satisface următoarea condiție de nenegativitate

$$\langle \mathfrak{L}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_\Gamma \geq 0, \quad (2.2.1)$$

pentru orice $\mathbf{u} \in L^2(\Gamma)^n$.

Să considerăm spațiul în care căutăm soluțiile noastre,

$$\mathbf{X}_w := H_{\text{div}}^1(D_+)^3 \times L^2(D_+) \times \mathcal{H}_{\text{div}}^1(D_-)^3 \times L^2(D_-) \quad (2.2.2)$$

respectiv, spațiul datelor problemei,

$$\mathbf{Y}_w := \tilde{H}^{-1}(D_+)^3 \times \tilde{\mathcal{H}}^{-1}(D_-)^3 \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3. \quad (2.2.3)$$

Problema Poisson de tip transmisie, pentru sistemele Stokes și Brinkman generalizat, considerată este

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_+ - \mathcal{P}\mathbf{u}_+ - \nabla \pi_+ = \mathbf{f}_+|_{D_+} \text{ în } D_+, \\ \Delta \mathbf{u}_- - \nabla \pi_- = \mathbf{f}_-|_{D_-} \text{ în } D_-, \\ \text{div } \mathbf{u}_\pm = 0 \text{ în } D_\pm, \\ \text{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+ - \text{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_- = \mathbf{g} \text{ on } \Gamma, \\ \mathbf{t}_{\mathcal{P}, D_+}(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{f}_+) - \mathbf{t}_{D_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_-) + \mathfrak{L} \text{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+ = \mathbf{h} \text{ on } \Gamma, \end{cases} \quad (2.2.4)$$

în care necunoscuta este $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_w$. Rețineți că, prezența sistemului Stokes în domeniul nemărginit Lipschitz D_- justifică includerea spațiului $\mathcal{H}_{\text{div}}^1(D_-)^3$ în spațiul soluțiilor \mathbf{X}_w furnizat de relația (2.2.2).

În consecință, începem cu rezultatul de bine-punere care a fost obținut pentru problema de transmisie (2.2.4), în cazul $\mathbf{u}_\infty = 0$ (vezi [7, Teorema 4.5], [52, Teorema 4.2], [57, Teorema 4.4]).

Teorema 2.2.2. Considerăm Ipotezele 1.1.6 și 2.2.1 satisfăcute, pentru $n = 3$. Fie $\mathcal{P} \in L^\infty(D_+)^{3 \times 3}$ astfel încât condiția (1.2.22) este satisfăcută. Atunci, pentru $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}) \in \mathbf{Y}_w$ date, problema Poisson de tip transmisie pentru sistemele Stokes și Brinkman generalizat (2.2.4) are o soluție unică $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_w$. În plus, există o constantă $C \equiv C(D_+, D_-, \mathcal{P}, \mathfrak{L}) > 0$ astfel încât

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)\|_{\mathbf{X}_w} \leq C \|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h})\|_{\mathbf{Y}_w}, \quad (2.2.5)$$

și \mathbf{u}_- tinde către zero la infinit, în sens Leray.

Acum, furnizăm rezultatul de bine-punere pentru problem de transmisie (2.2.4), în cazul $\mathbf{u}_\infty \neq 0$ (vezi, [7, Observația 4.6], [52, Teorema 4.4]).

Teorema 2.2.3. *Considerăm Ipotezele 1.1.6 și 2.2.1 satisfăcute, pentru $n = 3$. Fie $\mathcal{P} \in L^\infty(D_+)^{3 \times 3}$ astfel încât condiția (1.2.22) este satisfăcută. Atunci, pentru $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{u}_\infty) \in Y_w \times \mathbb{R}^3$, problema Poisson de tip transmisie pentru sistemele Stokes și Brinkman generalizat (2.2.4) are o soluție unică*

$$(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \quad (2.2.6)$$

care satisface condiția

$$(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_- - \mathbf{u}_\infty, \pi_-) \in X_w. \quad (2.2.7)$$

Mai mult, operatorul soluție asociat,

$$\mathbb{T} : Y_w \times \mathbb{R}^3 \rightarrow X_w, \quad (2.2.8)$$

este liniar și mărginit, și avem că există o constantă $C \equiv C(D_+, D_-, \mathcal{P}, \mathfrak{L}) > 0$ astfel încât soluția unică a problemei (2.2.4) satisface inegalitatea

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_- - \mathbf{u}_\infty, \pi_-)\|_{X_w} \leq C \|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{u}_\infty)\|_{Y_w \times \mathbb{R}^3}, \quad (2.2.9)$$

și $\mathbf{u}_- - \mathbf{u}_\infty$ tinde către zero la infinit, în sens Leray.

2.2.1 Problema de transmisie pentru sistemul Stokes în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3

Această subsecțiune este dedicată studiului problemei de transmisie pentru sistemul Stokes în domenii complementare Lipschitz în \mathbb{R}^3 , adică, cadrul Ipotezei 1.1.6 for $n = 3$. Mai mult, considerăm Ipoteza 2.2.1 satisfăcută, pentru $n = 3$. Problema de tip transmisie pentru sistemul Stokes considerată este

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_+ - \nabla \pi_+ = \mathbf{f}_+|_{D_+} \text{ in } D_+, \\ \Delta \mathbf{u}_- - \nabla \pi_- = \mathbf{f}_-|_{D_-} \text{ in } D_-, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\pm = 0 \text{ in } D_\pm, \\ \operatorname{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+ - \operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_- = \mathbf{g} \text{ on } \Gamma, \\ \mathbf{t}_{D_+}(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{f}_+) - \mathbf{t}_{D_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_-) + \mathfrak{L} \operatorname{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+ = \mathbf{h} \text{ on } \Gamma. \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Să descriem pașii pe care îi urmăm pentru a arăta că problema de transmisie (2.2.10), este bine-pusă. În primul rând, enunțăm și demonstrăm următoarea lemă (vezi, [7, Lema 4.1, Corolar 4.2]).

Lema 2.2.4. *Considerăm Ipotezele 1.1.6 și 2.2.1 satisfăcute, pentru $n = 3$. Atunci, operatorii*

$$\begin{aligned} \mathbb{I} + \mathcal{V}_\Gamma \mathfrak{L} &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, \\ \mathbb{I} + \mathfrak{L} \mathcal{V}_\Gamma &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

sunt izomorfisme.

În al doilea rând, enunțăm și demonstrăm lema care arată că problema de transmisie (2.2.10) are cel mult o soluție $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_- - \mathbf{u}_\infty, \pi_-) \in X_w$, unde $\mathbf{u}_\infty \in \mathbb{R}^3$ este o constantă (vezi [7, Lema 4.1], [52, Lema 4.1]).

Lema 2.2.5. *Considerăm Ipotezele 1.1.6 și 2.2.1 satisfăcute, pentru $n = 3$. Atunci, pentru $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{u}_\infty) \in \mathbf{Y}_w \times \mathbb{R}^3$, problema de tip transmisie pentru sistemul Stokes (2.2.10) are cel mult o soluție $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)$ care satisface $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_- - \mathbf{u}_\infty, \pi_-) \in \mathbf{X}_w$.*

Să enunțăm și să demonstrăm rezultatul de bine-punere, pe care l-am obținut, pentru problema de transmisie pentru sistemul Stokes în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3 în cazul $\mathbf{u}_\infty = 0$ (vezi [7, Teorema 4.3], [52, Teorema 4.2], [75, Teorema 5.1]).

Teorema 2.2.6. *Considerăm Ipotezele 1.1.6 și 2.2.1 satisfăcute, pentru $n = 3$. Atunci, pentru $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}) \in \mathbf{Y}_w$, problema Poisson de tip transmisie pentru sistemul Stokes (2.2.10) are o soluție unică $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}$. În plus, există un operator liniar și continuu,*

$$\mathbf{S} : \mathbf{Y}_w \rightarrow \mathbf{X}_w, \quad (2.2.12)$$

care asociază datelor $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}) \in \mathbf{Y}_w$ soluția unică $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_w$ a problemei (2.2.10), adică, există o constantă $C \equiv C(\mathbf{D}_+, \mathbf{D}_-, \mathfrak{L}) > 0$ cu proprietatea că

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)\|_{\mathbf{X}_w} \leq C \|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h})\|_{\mathbf{Y}_w}. \quad (2.2.13)$$

Mai mult, \mathbf{u}_- tinde către zero la infinit, în sens Leray.

În cele din urmă, să furnizăm rezultatul de bine-punere pentru problema de transmisie (2.2.10) în cazul $\mathbf{u}_\infty \neq 0$ (a se vedea, de exemplu, [7, Teorema 4.4], [52, Teorema 4.4]).

Teorema 2.2.7. *Considerăm Ipotezele 1.1.6 și 2.2.1 satisfăcute, pentru $n = 3$. Atunci, pentru $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{u}_\infty) \in \mathbf{Y}_w \times \mathbb{R}^3$, problema Poisson de tip transmisie pentru sistemul Stokes (2.2.10) are o soluție unică $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)$ ce satisface condiția $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_- - \mathbf{u}_\infty, \pi_-) \in \mathbf{X}_w$. Mai mult, există o constantă $C \equiv C(\mathbf{D}_+, \mathbf{D}_-, \mathfrak{L}) > 0$ cu proprietatea că*

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_- - \mathbf{u}_\infty, \pi_-)\|_{\mathbf{X}_w} \leq C \|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{u}_\infty)\|_{\mathbf{Y}_w \times \mathbb{R}^3}, \quad (2.2.14)$$

și $\mathbf{u}_- - \mathbf{u}_\infty$ tinde către zero la infinit, în sens Leray.

2.3 Problema de transmisie pentru sistemele Brinkman generalizat și Brinkman clasic în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3

În această secțiune vom afirma și demonstra un rezultat de bine-punere, pentru o problemă de tip transmisie, care a fost obținut în contextul Ipotezei 1.1.6 pentru $n = 3$, adică, domenii Lipschitz Lipschitz în \mathbb{R}^3 . Am luat în considerare o versiune generalizată a lui Brinkman în domeniul Lipschitz mărginit \mathbf{D}_+ și sistemul Brinkman în mulțimea Lipschitz complementară \mathbf{D}_- . De asemenea, considerăm Ipoteza 2.2.1 satisfăcută, pentru $n = 3$.

Să introducem următoarele spații, anume spațiul soluțiilor,

$$\mathbf{X}_B := H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^3 \times L^2(\mathbf{D}_+) \times H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^3 \times \mathfrak{M}(\mathbf{D}_-) \quad (2.3.1)$$

și, respectiv, spațiul datelor,

$$\mathbf{Y}_B := \tilde{H}^{-1}(\mathbf{D}_+)^3 \times \tilde{H}^{-1}(\mathbf{D}_-)^3 \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3. \quad (2.3.2)$$

Subliniem faptul că spațiul $\mathfrak{M}(D_-)$ este introdus în Definiția 2.1.1.

Să evidențiem faptul că prezența sistemului Brinkman în domeniul exterior Lipschitz D_- , dat de Ipoteza 1.1.6, $n = 3$, conduce la *utilizarea spațiilor Sobolev clasice, în locul spațiilor Sobolev ponderate* (precum în cazul sistemului Stokes în domeniile exterioare Lipschitz), pentru a găsi câmpul de viteză în D_- . Aceasta este o consecință a comportării soluției fundamentale a sistemului Brinkman la infinit, în cazul $n = 3$.

Né îndreptăm atenția către problema de tip transmisie pentru sistemul Brinkman generalizat și sistemul Brinkman clasic, anume,

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_+ - \mathcal{P} \mathbf{u}_+ - \nabla \pi_+ = \mathbf{f}_+|_{D_+} \text{ în } D_+, \\ \Delta \mathbf{u}_- - \alpha \mathbf{u}_- - \nabla \pi_- = \mathbf{f}_-|_{D_-} \text{ în } D_-, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\pm = 0 \text{ în } D_\pm, \\ \operatorname{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+ - \operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_- = \mathbf{g} \text{ pe } \Gamma, \\ \mathbf{t}_{\mathcal{P}, D_+}(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{f}_+) - \mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_-) + \mathfrak{L} \operatorname{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+ = \mathbf{h} \text{ pe } \Gamma, \end{cases} \quad (2.3.3)$$

în necunoscuta $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathfrak{X}_B$.

Să afirmăm și să demonstrăm rezultatul de bine-punere pe care l-am obținut pentru problema (2.3.3) (a se vedea, de asemenea, [6, Teorema 3.3] și [57, Teorema 4.4] în cazul varietăților Riemanniene compacte). În plus, următorul rezultat de bine-punere oferă și condițiile de creștere pe care le satisface soluția noastră (vezi Observația 1.3.9).

Teorema 2.3.1. *Considerăm Ipotezele 1.1.6 și 2.2.1 satisfăcute, pentru $n = 3$. Fie $\alpha > 0$ o constantă. Fie $\mathcal{P} \in L^\infty(D_+)^{3 \times 3}$ astfel încat condiția (1.2.22) este satisfăcută. Atunci, pentru datele $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}) \in \mathfrak{Y}_B$, problema Poisson de tip transmisie pentru sistemele Brinkman generalizat și clasic (2.3.3) are o soluție unică*

$$(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathfrak{X}_B. \quad (2.3.4)$$

În plus, operatorul soluție asociat,

$$\mathfrak{T}_B : \mathfrak{Y}_B \rightarrow \mathfrak{X}_B, \quad (2.3.5)$$

este liniar și mărginit, și ca urmare, există o constantă $C \equiv C(D_+, D_-, \mathcal{P}, \mathfrak{L}) > 0$ astfel încat soluția unică a problemei (2.3.3) satisface

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)\|_{\mathfrak{X}_B} \leq C \|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h})\|_{\mathfrak{Y}_B}. \quad (2.3.6)$$

Mai mult, perechea (\mathbf{u}_-, π_-) satisface următoarele condiții de creștere,

$$\mathbf{u}_-(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-2}), \quad \nabla \mathbf{u}_-(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \pi_-(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad (2.3.7)$$

pentru $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

2.3.1 Problema de transmisie pentru sistemele Stokes și Brinkman în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3

Această subsecțiune este dedicată studiului problemei de tip transmisie pentru sistemele Stokes și Brinkman în domenii complementare Lipschitz în \mathbb{R}^3 , adică, cadrul Ipotezei 1.1.6 pentru $n = 3$.

În plus, considerăm Ipoteza 2.2.1 satisfăcută, pentru $n = 3$. Problema de tip transmisie considerată pentru sistemele Stokes și Brinkman este

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_+ - \nabla \pi_+ = \mathbf{f}_+|_{D_+} \text{ în } D_+, \\ \Delta \mathbf{u}_- - \alpha \mathbf{u}_- - \nabla \pi_- = \mathbf{f}_-|_{D_-} \text{ în } D_-, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\pm = 0 \text{ în } D_\pm, \\ \operatorname{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+ - \operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_- = \mathbf{g} \text{ pe } \Gamma, \\ \mathbf{t}_{D_+}(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{f}_+) - \mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_-) + \mathfrak{L} \operatorname{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+ = \mathbf{h} \text{ pe } \Gamma. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

În primul rând, avem un rezultat preliminar în care vom arăta că problema de transmisie (2.3.8) are cel mult o soluție (vezi [6, Lema 3.1], [52, Lema 4.1]).

Lema 2.3.2. *Considerăm Ipotezele 1.1.6 și 2.2.1 satisfăcute, pentru $n = 3$. Fie $\alpha > 0$ o constantă. Atunci, pentru datele $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}) \in \mathbf{Y}_B$, problema Poisson de tip transmisie pentru sistemele Stokes și Brinkman (2.3.8) are cel mult o soluție $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_B$.*

Enunțăm și demonstrăm rezultatul de bine-punere pentru problema de transmisie (2.3.8) (vezi, [6, Teorema 3.2], [52, Teorema 4.2]).

Teorema 2.3.3. *Considerăm Ipotezele 1.1.6 și 2.2.1 satisfăcute, pentru $n = 3$. Fie $\alpha > 0$ o constantă. Atunci, pentru datele $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}) \in \mathbf{Y}_B$, problema Poisson de tip transmisie pentru sistemele Stokes și Brinkman (2.3.8) are o soluție unică $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_B$. În plus, operatorul*

$$\mathbf{S} : \mathbf{Y}_B \rightarrow \mathbf{X}_B, \quad (2.3.9)$$

care asociază datelor $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}) \in \mathbf{Y}_B$ soluția $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_B$ problemei de transmisie (2.3.8) este liniar și continuu. Prin urmare, există o constantă $C \equiv C(D_+, D_-, \mathfrak{L}) > 0$ cu proprietatea că

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)\|_{\mathbf{X}_B} \leq C \|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h})\|_{\mathbf{Y}_B}. \quad (2.3.10)$$

Mai mult, \mathbf{u}_-, π_- satisfac următoarele condiții de creștere

$$\mathbf{u}_-(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-2}), \quad \nabla \mathbf{u}_-(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \pi_-(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad (2.3.11)$$

pentru $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

2.4 Asupra unei probleme de tip Robin-transmisie pentru sistemul Brinkman

În această secțiune, ne propunem să enunțăm și să demonstrăm un rezultat de existență și unicitate, pentru o problemă de tip transmisie, care a fost obținută în contextul Ipotezei 1.1.7. Înainte de analiza problema de transmisie, să menționăm că astfel de probleme sunt folosite pentru modelarea fluxului de fluid în exteriorul unei cavități sau în cavitățile umplute cu medii poroase, în cazul saltului tensiunilor sau vitezelor pe interfață. O altă idee este aceea de a analiza fluxul de fluid într-un mediu poros în rezervoare a căror frontieră are două părți, prima cea a unei suprafețe solide și a doua, o interfață între fluid și un alt material fluid sau vâscoelastic. (pentru mai multe detalii, a se vedea, de exemplu, [53]). Din punct de vedere practic, Baber [15] a analizat aplicații

ale problemelor de transmisie, precum managementul apei în celulele de combustie sau procesarea nutrienților între două domenii, unul care conține sânge și celălalt care conține țesut poros.

Problema de tip transmisie pe care dorim să o tratăm se va numi problema Robin-transmisie pentru sistemul Brinkman (vezi problema (2.4.3)). În plus, considerăm Ipoteza 2.2.1 satisfăcută.

Considerăm următoarele spații, anume, spațiul soluțiilor,

$$\mathbf{X}_{RT} := H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n \times L^2(\mathbf{D}_+) \times H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n \times L^2(\mathbf{D}_-), \quad (2.4.1)$$

respectiv, spațiul datelor

$$\mathbf{Y}_{RT} := \tilde{H}^{-1}(\mathbf{D}_+)^n \times \tilde{H}^{-1}(\mathbf{D}_-)^n \times H_{\nu}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n. \quad (2.4.2)$$

Vom studia problema Robin-transmisie pentru sistemul Brinkman, anume,

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_{\pm} - \alpha \mathbf{u}_{\pm} - \nabla \pi_{\pm} = \mathbf{f}_{\pm}|_{\mathbf{D}_{\pm}} \text{ în } \mathbf{D}_{\pm}, \\ \text{div } \mathbf{u}_{\pm} = 0 \text{ în } \mathbf{D}_{\pm}, \\ \lambda(\text{Tr}_{\mathbf{D}_+} \mathbf{u}_+) - (\text{Tr}_{\mathbf{D}_-} \mathbf{u}_-)|_{\Gamma_+} = \mathbf{g}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ \mathbf{t}_{\alpha, \mathbf{D}_+}(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{f}_+) - (\mathbf{t}_{\alpha, \mathbf{D}_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_-))|_{\Gamma_+} = \mathbf{h}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ (\mathbf{t}_{\alpha, \mathbf{D}_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_-))|_{\Gamma_-} + \mathfrak{L}(\text{Tr}_{\mathbf{D}_-} \mathbf{u}_-)|_{\Gamma_-} = \mathbf{g}_2 \text{ pe } \Gamma_-, \end{cases} \quad (2.4.3)$$

unde $\alpha > 0$ și $\lambda \in (0, 1]$ sunt constante date. Ne propunem să determinăm necunoscuta $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_{RT}$.

Enunțăm și demonstrăm rezultatul de existență și unicitate obținut pentru problema Robin-transmisie (2.4.3) (a se vedea, de asemenea, [8, Teorema 1], [56, Teorema 4.1], [63, Teorema 5.8]).

Teorema 2.4.1. *Fie $\alpha > 0$ și $\lambda \in (0, 1]$ sunt constante date. Considerăm Ipotezele 1.1.7 și Assumption 2.2.1 satisfăcute. Atunci, pentru orice $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2) \in \mathbf{Y}_{RT}$, problema Poisson de tip Robin-transmisie pentru sistemul Brinkman (2.4.3) are o soluție unică*

$$(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_{RT}. \quad (2.4.4)$$

În plus, operatorul soluție asociat,

$$\mathbf{T}_{RT} : \mathbf{Y}_{RT} \rightarrow \mathbf{X}_{RT}, \quad (2.4.5)$$

este liniar și mărginit, și în consecință, există o constantă $C \equiv C(\mathbf{D}_+, \mathbf{D}_-, \alpha, \mathfrak{L}, \lambda) > 0$ astfel încât soluția unică a problemei (2.4.3) satisface inegalitatea

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)\|_{\mathbf{X}_{RT}} \leq C \|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2)\|_{\mathbf{Y}_{RT}}. \quad (2.4.6)$$

Demonstrație. Demonstrăm acest rezultat într-un mod similar cu cel folosit în demonstrarea Teoremei 4.1 din [56] și Teoremei 5.8 din [63]. Acest mod folosește metode de teoria potențialului. Pentru expunerea clară a raționamentului nostru, introducem spațiul

$$\mathbb{Y} := H_{\nu}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n, \quad (2.4.7)$$

pe care îl vom folosi în această demonstrație.

Ne împărțim argumentele în două cazuri separate. Primul caz se referă la $\lambda \in (0, 1)$ iar al doilea caz se referă la $\lambda = 1$.

Cazul 1: Presupunem că $\lambda \in (0, 1)$. În primul rând, arătam că problema noastră admite o soluție, (adică, existența unei soluții) și ne propunem să o construim, folosind o abordare specifică teoriei potențialului. În acest scop, să căutăm o soluție în forma

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_+ &= \mathcal{N}_{\alpha, D_+} \mathbf{f}_+ + \mathbf{W}_{\alpha, \Gamma_+} \Phi + \mathbf{V}_{\alpha, \Gamma_+} \varphi, \\ \pi_+ &= \mathcal{Q}_{\alpha, D_+} \mathbf{f}_+ + \mathbf{Q}_{\alpha, \Gamma_+}^d \Phi + \mathbf{Q}_{\alpha, \Gamma_+}^s \varphi, \\ \mathbf{u}_- &= \mathcal{N}_{\alpha, D_-} \mathbf{f}_- + \mathbf{W}_{\alpha, \Gamma_+} \Phi + \mathbf{V}_{\alpha, \Gamma_+} \varphi + \mathbf{V}_{\alpha, \Gamma_-} \psi, \\ \pi_- &= \mathcal{Q}_{\alpha, D_-} \mathbf{f}_- + \mathbf{Q}_{\alpha, \Gamma_+}^d \Phi + \mathbf{Q}_{\alpha, \Gamma_+}^s \varphi + \mathbf{Q}_{\alpha, \Gamma_-}^s \psi, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

unde $(\Phi, \varphi, \psi) \in \mathbb{Y}$ sunt densități necunoscute și spațiul \mathbb{Y} este dat de relația (2.4.7).

Să observăm că, proprietățile de mapare ale potențialelor asociate sistemului Brinkman (vezi Teorema 1.4.2, Teorema 1.4.4, Teorema 1.4.7) implică faptul că $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_{RT}$.

În continuare, dacă ținem cont de formulele de salt la frontieră (vezi relația (1.4.23) din Lema 1.4.8) și prin înlocuire în relația (2.4.3)₃, obținem

$$\left(\lambda \left(-\frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\alpha, \Gamma_+} \right) - \left(\frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\alpha, \Gamma_+} \right) \right) \Phi + (\lambda \mathcal{V}_{\alpha, \Gamma_+} - \mathcal{V}_{\alpha, \Gamma_+}) \varphi - \mathcal{V}_{\Gamma_-, \Gamma_+} \psi = \mathbf{g}_{01}, \quad (2.4.9)$$

și \mathbf{g}_{01} este dat de

$$\mathbf{g}_{01} = \mathbf{g}_1 - \lambda (\text{Tr}_{D_+} (\mathcal{N}_{\alpha, D_+} \mathbf{f}_+)) + (\text{Tr}_{D_-} (\mathcal{N}_{\alpha, D_-} \mathbf{f}_-))|_{\Gamma_+}. \quad (2.4.10)$$

Operatorul

$$\mathcal{V}_{\Gamma_-, \Gamma_+} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n, \quad \mathcal{V}_{\Gamma_-, \Gamma_+} \psi := (\text{Tr}_{D_-} (\mathbf{V}_{\alpha, \Gamma_-} \psi))|_{\Gamma_+}, \quad (2.4.11)$$

este compact, ținând cont că acesta este un operator integral cu nucleu real-analitic (vezi [23, Teorema A.28 (ii)] referitor la proprietățile operatorilor integrali cu nuclee real-analitice) și datorită compactității scufundării $H^1(\Gamma_+)^n \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n$. De asemenea, avem că $\mathbf{g}_{01} \in H_{\nu}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n$. Afirmatia precedentă are loc odată cu aplicarea Teoremei Divergenței și pe baza relației (1.4.13).

Să ținem cont de formulele de salt pentru potențialele de strat și prin înlocuire în relația (2.4.3)₄, avvem

$$\varphi - \mathbb{K}_{\Gamma_-, \Gamma_+}^* \psi = \mathbf{h}_{01}, \quad (2.4.12)$$

iar \mathbf{h}_{01} este dat de

$$\mathbf{h}_{01} := \mathbf{h}_1 - \mathbf{t}_{\alpha, D_+} (\mathcal{N}_{\alpha, D_+} \mathbf{f}_+, \mathcal{Q}_{\alpha, D_+} \mathbf{f}_+, \mathbf{f}_+) + (\mathbf{t}_{\alpha, D_-} (\mathcal{N}_{\alpha, D_-} \mathbf{f}_-, \mathcal{Q}_{\alpha, D_-} \mathbf{f}_-, \mathbf{f}_-))|_{\Gamma_+}. \quad (2.4.13)$$

Să avem în vedere faptul că operatorul

$$\mathbb{K}_{\Gamma_-, \Gamma_+}^* : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n, \quad \mathbb{K}_{\Gamma_-, \Gamma_+}^* \psi := (\mathbf{t}_{\alpha, D_-} (\mathbf{V}_{\alpha, \Gamma_-} \psi, \mathbf{Q}_{\alpha, \Gamma_-} \psi))|_{\Gamma_+}, \quad (2.4.14)$$

este compact, fapt bazat pe [23, Teorema A.28 (ii)] și pe compactitatea scufundării $L^2(\Gamma_+)^n \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n$.

Aplicăm iarăși formulele de salt pentru potențialele de strat asociate sistemului Brinkman (vezi Lema 1.4.8) și prin înlocuire în relația (2.4.3)₅ (adică, condiția Robin), obținem ecuația

$$(\mathbb{D}_{\Gamma_+, \Gamma_-} + \mathfrak{L} \mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-}) \Phi + (\mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-}^* + \mathfrak{L} \mathcal{V}_{\Gamma_+, \Gamma_-}) \varphi + \left(\frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\alpha, \Gamma_-}^* + \mathfrak{L} \mathcal{V}_{\alpha, \Gamma_-} \right) \psi = \mathbf{g}_{02}, \quad (2.4.15)$$

iar \mathbf{g}_{02} este dat de

$$\mathbf{g}_{02} := \mathbf{g}_2 - (\mathbf{t}_{\alpha, D_-} (\mathcal{N}_{\alpha, D_-} \mathbf{f}_-, \mathcal{Q}_{\alpha, D_-} \mathbf{f}_-, \mathbf{f}_-))|_{\Gamma_-} - \mathfrak{L} (\text{Tr}_{D_-} (\mathcal{N}_{\alpha, D_-} \mathbf{f}_-))|_{\Gamma_-}. \quad (2.4.16)$$

Să subliniem faptul că operatorii

$$\begin{aligned}
 \mathbb{D}_{\Gamma_+, \Gamma_-} &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n, \quad \mathbb{D}_{\Gamma_+, \Gamma_-} \Phi := (\mathbf{t}_{\alpha, \mathbb{D}_-}(\mathbf{W}_{\alpha, \Gamma_+} \Phi, \mathbf{Q}_{\alpha, \Gamma_+}^d \Phi))|_{\Gamma_-}, \\
 \mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-} &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n, \quad \mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-} \Phi := (\text{Tr}_{\mathbb{D}_-}(\mathbf{W}_{\alpha, \Gamma_+} \Phi))|_{\Gamma_-}, \\
 \mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-}^* &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n, \quad \mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-}^* \varphi := (\mathbf{t}_{\alpha, \mathbb{D}_-}(\mathbf{V}_{\alpha, \Gamma_+} \varphi, \mathbf{Q}_{\alpha, \Gamma_+}^s \varphi))|_{\Gamma_-}, \\
 \mathcal{V}_{\Gamma_+, \Gamma_-} &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n, \quad \mathcal{V}_{\Gamma_+, \Gamma_-} \varphi := (\text{Tr}_{\mathbb{D}_-}(\mathbf{V}_{\alpha, \Gamma_+} \varphi))|_{\Gamma_-},
 \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

ce intervin în relația (2.4.15) sunt compacți. Afirmatia este adevărată dacă aplicăm [23, Teorema A.28 (ii)] și dacă ținem cont de compactitatea scufundărilor $H^1(\Gamma_+)^n \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n$ și $L^2(\Gamma_+)^n \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n$.

Astfel, problema Robin-transmisie (2.4.3) se reduce la ecuațiile descrise în relațiile (2.4.9), (2.4.12), (2.4.15). Să scriem aceste ecuații în forma matriceală

$$\mathbf{A}(\Phi, \varphi, \psi)^t = (\mathbf{g}_{01}, \mathbf{h}_{01}, \mathbf{g}_{02}) \text{ în } \mathbb{Y}, \tag{2.4.18}$$

în necunoscuta $(\Phi, \varphi, \psi)^t \in \mathbb{Y}$. Operatorul matriceal $\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ ce apare în relația (2.4.18) este dat de

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \lambda \left(-\frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\alpha, \Gamma_+} \right) - \left(\frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\alpha, \Gamma_+} \right) & \lambda \mathcal{V}_{\alpha, \Gamma_+} - \mathcal{V}_{\alpha, \Gamma_+} & -\mathcal{V}_{\Gamma_-, \Gamma_+} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & -\mathbb{K}_{\Gamma_-, \Gamma_+}^* \\ \mathbb{D}_{\Gamma_+, \Gamma_-} + \mathfrak{L} \mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-} & \mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-}^* + \mathfrak{L} \mathcal{V}_{\Gamma_+, \Gamma_-} & \frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\alpha, \Gamma_-}^* + \mathfrak{L} \mathcal{V}_{\alpha, \Gamma_-} \end{bmatrix}. \tag{2.4.19}$$

Să scriem operatorul matriceal (2.4.19) în următoarea formă echivalentă

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} -\frac{\lambda+1}{2} \mathbb{I} + (\lambda-1) \mathbb{K}_{\alpha, \Gamma_+} & (\lambda-1) \mathcal{V}_{\alpha, \Gamma_+} & -\mathcal{V}_{\Gamma_-, \Gamma_+} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & -\mathbb{K}_{\Gamma_-, \Gamma_+}^* \\ \mathbb{D}_{\Gamma_+, \Gamma_-} + \mathfrak{L} \mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-} & \mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-}^* + \mathfrak{L} \mathcal{V}_{\Gamma_+, \Gamma_-} & \frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\alpha, \Gamma_-}^* + \mathfrak{L} \mathcal{V}_{\alpha, \Gamma_-} \end{bmatrix}. \tag{2.4.20}$$

Afirmăm faptul că operatorul $\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ este un izomorfism. Pentru a justifica această afirmație, vom arăta că operatorul $\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ este Fredholm de index zero, pentru $\lambda \in (0, 1]$ și este un operator injectiv.

Să arătăm, mai întâi, că $\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ este un operator Fredholm de index zero. O simplă rearanjare ne permite să rescriem operatorul (2.4.20) în forma

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} (\lambda-1) \left(\frac{1+\lambda}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\alpha, \Gamma_+} \right) & (\lambda-1) \mathcal{V}_{\alpha, \Gamma_+} & -\mathcal{V}_{\Gamma_-, \Gamma_+} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & -\mathbb{K}_{\Gamma_-, \Gamma_+}^* \\ \mathbb{D}_{\Gamma_+, \Gamma_-} + \mathfrak{L} \mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-} & \mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-}^* + \mathfrak{L} \mathcal{V}_{\Gamma_+, \Gamma_-} & \frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\alpha, \Gamma_-}^* + \mathfrak{L} \mathcal{V}_{\alpha, \Gamma_-} \end{bmatrix}. \tag{2.4.21}$$

Se verifică imediat faptul că operatorul matriceal $\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ este bine definit, liniar și continuu.

Să ne reamintim definiția operatorilor complementari de strat (vezi relația (1.4.26)) și cu ajutorul acestora descompunem operatorul matriceal (2.4.21) astfel

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_C : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}, \tag{2.4.22}$$

unde operatorii $\mathbf{A}_0 : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ și $\mathbf{A}_C : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ sunt definiți astfel

$$\mathbf{A}_0 := \begin{bmatrix} (\lambda-1) \left(\frac{1+\lambda}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\Gamma_+} \right) & (\lambda-1) \mathcal{V}_{\Gamma_+} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\Gamma_-}^* + \mathfrak{L} \mathcal{V}_{\Gamma_-} \end{bmatrix} \tag{2.4.23}$$

și

$$\mathbf{A}_C := \begin{bmatrix} (\lambda - 1)\mathbb{K}_{\alpha,0,\Gamma_+} & (\lambda - 1)\mathcal{V}_{\alpha,0,\Gamma_+} & -\mathcal{V}_{\Gamma_-, \Gamma_+} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbb{K}_{\Gamma_-, \Gamma}^* \\ \mathbb{D}_{\Gamma_+, \Gamma_-} + \mathfrak{L}\mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-} & \mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-}^* + \mathfrak{L}\mathcal{V}_{\Gamma_+, \Gamma_-} & \mathbb{K}_{\alpha,0,\Gamma_-}^* + \mathfrak{L}\mathcal{V}_{\alpha,0,\Gamma_-} \end{bmatrix}. \quad (2.4.24)$$

Să analizăm proprietățile operatorului $\mathbf{A}_0 : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ dat de relația (2.4.23). Ținem cont de faptul că operatorul

$$\frac{1}{2} \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\Gamma_+} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n, \quad (2.4.25)$$

este un operator Fredholm de index zero (a se vedea, de exemplu, [85, Corolar 9.1.2], [63, Lema 5.3]). În continuare, datorită Lemei 1.3.8, operatorul

$$\mathcal{V}_{\Gamma_+} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n, \quad (2.4.26)$$

este operator Fredholm de index zero. Mai mult, operatorul

$$\frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\Gamma_-}^* + \mathfrak{L}\mathcal{V}_{\Gamma_-} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n, \quad (2.4.27)$$

este un alt operator de tip Fredholm de index zero, deoarece

$$\frac{1}{2} \mathbb{I} + \mathbb{K}_{\Gamma_-}^* : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n \quad (2.4.28)$$

este un operator Fredholm de index zero și operatorul

$$\mathfrak{L}\mathcal{V}_{\Gamma_-} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n \quad (2.4.29)$$

este compact datorită compactității scufundărilor $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n \hookrightarrow L^2(\Gamma_-)^n$ și $L^2(\Gamma_-)^n \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n$ (pentru mai multe detalii, a se vedea, spre exemplu, [56, Teorema 4.1]).

Datorită argumentelor anterioare, am arătat ca operatorii (2.4.25), (2.4.26) și (2.4.27) sunt operatori Fredholm de index zero și deducem faptul că operatorul $\mathbf{A}_0 : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ este Fredholm de index zero.

Să ne concentrăm asupra operatorului $\mathbf{A}_C : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ dat de relația (2.4.24). Datorită compactității operatorilor complementari de strat $\mathbb{K}_{\alpha,0,\Gamma_+}$, $\mathcal{V}_{\alpha,0,\Gamma_+}$, $\mathbb{K}_{\alpha,0,\Gamma_-}^*$, $\mathcal{V}_{\alpha,0,\Gamma_-}$ (vezi relația (1.4.27) din Lema 1.4.9) și de asemenea compactitatea operatorilor (2.4.11), (2.4.14) și (2.4.17), obținem compactitatea operatorului $\mathbf{A}_C : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$.

Deoarece operatorul $\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ este suma dintre un operator Fredholm de index zero și un operator compact, avem că $\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ este un operator Fredholm de index zero, pentru $\lambda \in (0, 1)$.

Acum, arătăm că operatorul $\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ este injectiv, sau echivalent, arătăm că nucleul operatorului $\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ este spațiul nul, adică,

$$\text{Ker}\{\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}\} = \{\mathbf{0}\}. \quad (2.4.30)$$

Așadar, să considerăm $(\Phi_0, \varphi_0, \psi_0)^t \in \text{Ker}\{\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}\}$. Atunci, să construim câmpurile $(\mathbf{u}_+^0, \pi_+^0)$ și $(\mathbf{u}_-^0, \pi_-^0)$ după cum urmează,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_+^0 &:= \mathbf{W}_{\alpha,\Gamma_+} \Phi_0 + \mathbf{V}_{\alpha,\Gamma_+} \varphi_0 & \pi_+^0 &:= \mathbf{Q}_{\alpha,\Gamma_+}^d \Phi_0 + \mathbf{Q}_{\alpha,\Gamma_+}^s \varphi_0 \\ \mathbf{u}_-^0 &:= \mathbf{W}_{\alpha,\Gamma_+} \Phi_0 + \mathbf{V}_{\alpha,\Gamma_+} \varphi_0 + \mathbf{V}_{\alpha,\Gamma_-} \psi_0 & \pi_-^0 &:= \mathbf{Q}_{\alpha,\Gamma_+}^d \Phi_0 + \mathbf{Q}_{\alpha,\Gamma_+}^s \varphi_0 + \mathbf{Q}_{\alpha,\Gamma_-}^s \psi_0. \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

Să observăm că câmpurile $(\mathbf{u}_+^0, \pi_+^0)$ și $(\mathbf{u}_-^0, \pi_-^0)$ satisfac

$$\begin{aligned} \lambda(\mathrm{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+^0) &= (\mathrm{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-^0)|_{\Gamma_+} \text{ a.p.t. pe } \Gamma_+, \\ \mathbf{t}_{\alpha, D_+}(\mathbf{u}_+^0, \pi_+^0) &= (\mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_-^0, \pi_-^0))|_{\Gamma_+} \text{ a.p.t. pe } \Gamma_+, \\ (\mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_-^0, \pi_-^0))|_{\Gamma_-} + \mathfrak{L}(\mathrm{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-^0)|_{\Gamma_-} &= 0, \text{ a.p.t. pe } \Gamma_-. \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

Acum, să aplicăm formula Green (1.2.18) câmpurilor date de relația (2.4.31) și obținem

$$\begin{aligned} 2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{u}_+^0), \mathbb{E}(\mathbf{u}_+^0) \rangle_{D_+} + \alpha \langle \mathbf{u}_+^0, \mathbf{u}_+^0 \rangle_{D_+} &= \langle \mathbf{t}_{\alpha, D_+}(\mathbf{u}_+^0, \pi_+^0), \mathrm{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+^0 \rangle_{\Gamma_+}, \\ 2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{u}_-^0), \mathbb{E}(\mathbf{u}_-^0) \rangle_{D_-} + \alpha \langle \mathbf{u}_-^0, \mathbf{u}_-^0 \rangle_{D_-} &= - \langle (\mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_-^0, \pi_-^0))|_{\Gamma_+}, (\mathrm{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-^0)|_{\Gamma_+} \rangle_{\Gamma_+} \\ &\quad + \langle (\mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_-^0, \pi_-^0))|_{\Gamma_-}, (\mathrm{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-^0)|_{\Gamma_-} \rangle_{\Gamma_-}. \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

Să înmulțim relația (2.4.33)₁ cu λ și adunăm rezultatul la relația (2.4.33)₂ și cu ajutorul relațiilor (2.4.32)₁, (2.4.32)₂ și (2.4.32)₃ avem că

$$\begin{aligned} \lambda \left(2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{u}_+^0), \mathbb{E}(\mathbf{u}_+^0) \rangle_{D_+} + \alpha \langle \mathbf{u}_+^0, \mathbf{u}_+^0 \rangle_{D_+} \right) + 2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{u}_-^0), \mathbb{E}(\mathbf{u}_-^0) \rangle_{D_-} + \alpha \langle \mathbf{u}_-^0, \mathbf{u}_-^0 \rangle_{D_-} \\ = - \langle \mathfrak{L}(\mathrm{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-^0)|_{\Gamma_-}, (\mathrm{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-^0)|_{\Gamma_-} \rangle_{\Gamma_-}. \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

Să observăm că, membrul stâng al egalității (2.4.34) este ne-negativ și membrul drept al egalității (2.4.34) este non-pozitiv (datorită faptului că \mathfrak{L} satisface condiția (2.2.1)). Așadar, obținem

$$\lambda \left(2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{u}_+^0), \mathbb{E}(\mathbf{u}_+^0) \rangle_{D_+} + \alpha \langle \mathbf{u}_+^0, \mathbf{u}_+^0 \rangle_{D_+} \right) + 2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{u}_-^0), \mathbb{E}(\mathbf{u}_-^0) \rangle_{D_-} + \alpha \langle \mathbf{u}_-^0, \mathbf{u}_-^0 \rangle_{D_-} = 0. \quad (2.4.35)$$

În consecință, obținem $\mathbf{u}_\pm^0 = \mathbf{0}$ în D_\pm , care, implică faptul că $\pi_\pm^0 = c_\pm^0$, unde $c_\pm^0 \in \mathbb{R}$ sunt constante. De asemenea, relațiile (2.4.32)₂ și (2.4.32)₃ implică faptul că $c_+^0 = c_-^0 = 0$. Așadar, avem

$$\mathbf{u}_\pm^0 = \mathbf{0}, \text{ în } D_\pm, \pi_\pm^0 = 0 \text{ în } D_\pm. \quad (2.4.36)$$

Să aplicăm relația (1.4.23) a Lemei 1.4.8 pentru a obține

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_+^0 &= \Phi_0, \quad \mathrm{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_-^0 = -\Phi_0, \text{ a.p.t. pe } \Gamma_+, \\ \mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_+^0, \pi_+^0) &= -\varphi_0, \quad \mathbf{t}_{\alpha, D_+}(\mathbf{u}_-^0, \pi_-^0) = \varphi_0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_+. \end{aligned} \quad (2.4.37)$$

În plus, apartenența $\Phi_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n$ ne conduce la $(\mathbf{W}_{\alpha, \Gamma_+} \Phi_0)(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-n})$ pentru $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, (vezi [106, Lema 2.12]). Să menționăm că potențialul de simplu strat $\mathbf{V}_{\alpha, \Gamma_+} \varphi_0$ se comportă într-un mod similar la infinit (vezi [106, Lema 2.12]). În consecință, $\mathbf{u}_+^0(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-n})$ pentru $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Așadar, câmpurile $(\mathbf{u}_+^0, \pi_+^0)$ satisfac formula Green (1.2.18) corespunzătoare domeniului $\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+$. Să aplicăm formula Green (1.2.18) câmpurilor $(\mathbf{u}_+^0, \pi_+^0)$ în $\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+$, și ținem cont de relația (2.4.37). Obținem

$$\begin{aligned} 2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{u}_+^0), \mathbb{E}(\mathbf{u}_+^0) \rangle_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+} + \alpha \langle \mathbf{u}_+^0, \mathbf{u}_+^0 \rangle_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+} \\ = - \left\langle \mathbf{t}_{\alpha, \nu, \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+}(\mathbf{u}_+^0, \pi_+^0), \mathrm{Tr}_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+} \mathbf{u}_+^0 \right\rangle_{\Gamma_+} = \langle \varphi_0, \Phi_0 \rangle_{\Gamma_+}. \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

Mai mult, aplicăm formula Green (1.2.18) pentru $(\mathbf{u}_-^0, \pi_-^0)$ în D_+ , ținem cont de relația (2.4.37) și găsim

$$2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{u}_-^0), \mathbb{E}(\mathbf{u}_-^0) \rangle_{D_+} + \alpha \langle \mathbf{u}_-^0, \mathbf{u}_-^0 \rangle_{D_+} = \langle \mathbf{t}_{\alpha, D_+}(\mathbf{u}_-^0, \pi_-^0), \mathrm{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_-^0 \rangle_{\Gamma_+} = - \langle \varphi_0, \Phi_0 \rangle_{\Gamma_+}. \quad (2.4.39)$$

Să adunăm relațiile (2.4.38) și (2.4.39). Obținem

$$2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{u}_+^0), \mathbb{E}(\mathbf{u}_+^0) \rangle_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+} + \alpha \langle \mathbf{u}_+^0, \mathbf{u}_+^0 \rangle_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+} + 2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{u}_-^0), \mathbb{E}(\mathbf{u}_-^0) \rangle_{D_+} + \alpha \langle \mathbf{u}_-^0, \mathbf{u}_-^0 \rangle_{D_+} = 0, \quad (2.4.40)$$

ceea ce arată că

$$\mathbf{u}_+^0 = \mathbf{0}, \pi_+^0 = 0 \text{ în } \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+, \quad \mathbf{u}_-^0 = \mathbf{0}, \pi_-^0 = 0 \text{ în } D_+. \quad (2.4.41)$$

Să subliniem faptul că $\pi_+^0 = 0$ în $\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+$ este o consecință a faptului că perechea $(\mathbf{u}_+^0, \pi_+^0)$ satisface sistemul Brinkman omogen în $\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+$ și de asemenea datorită faptului că $\pi_+^0(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{1-n})$ pentru $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ (vezi [54, Relațiile (3.12), (3.13)]).

Acum, cu ajutorul relațiilor (2.4.37) și (2.4.41) deducem faptul că

$$\Phi_0 = \mathbf{0}, \varphi_0 = \mathbf{0}. \quad (2.4.42)$$

Relația (2.4.42), împreună cu faptul că $\mathbf{u}_-^0 = \mathbf{0}$ în D_+ , conduc la faptul că $\mathbf{V}_{\alpha, \Gamma_-} \psi_0 = \mathbf{0}$ în D_+ . Continuitatea potențialului de simplu strat pentru sistemul Brinkman pe Γ_- (vezi Teorema 1.4.4) implică faptul că

$$\mathbf{V}_{\alpha, \Gamma_-} \psi_0 = \mathbf{0} \text{ în } \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+, \quad (2.4.43)$$

iar comportamentul la infinit al potențialului presiune de simplu strat (anume, că $\mathbf{Q}_{\alpha, \Gamma_-}^s \psi_0 = O(|\mathbf{x}|^{1-n})$ pentru $n \geq 2$, precum în relația (3.12) din [54]) conduce la faptul că

$$\mathbf{Q}_{\alpha, \Gamma_-}^s \psi_0 = 0 \text{ în } \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+. \quad (2.4.44)$$

În consecință, relațiile (2.4.43) și (2.4.44) conduc la

$$\mathbf{t}_{\alpha, D_+}(\mathbf{V}_{\alpha, \Gamma_-} \psi_0, \mathbf{Q}_{\alpha, \Gamma_-}^s \psi_0) = \mathbf{0}, \text{ pe } \Gamma_-, \quad \mathbf{t}_{\alpha, \nu, \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}_+}(\mathbf{V}_{\alpha, \Gamma_-} \psi_0, \mathbf{Q}_{\alpha, \Gamma_-}^s \psi_0) = \mathbf{0}, \text{ pe } \Gamma_-. \quad (2.4.45)$$

Să scădem relația (2.4.45)₂ din relația (2.4.45)₁ și cu ajutorul formulelor de salt (1.4.23) din Lema 1.4.8 obținem

$$\psi_0 = \mathbf{0}. \quad (2.4.46)$$

Pentru a încheia argumentul nostru, având în vedere relațiile (2.4.42) și (2.4.46), avem că proprietatea (2.4.30) este satisfăcută, adică nucleul operatorului matriceal $\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ este spațiul nul, sau echivalent, $\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ este injectiv.

Așadar, operatorul matriceal $\mathbf{A} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ este un izomorfism și ecuația (2.4.18) are o soluție unică $(\Phi, \varphi, \psi)^t \in \mathbb{Y}$. Soluția unică a ecuației (2.4.18) împreună cu reprezentările date de relația (2.4.8) furnizează o soluție a problemei Robin-transmisie (2.4.3) în spațiul \mathbf{X}_{RT} .

Mai departe, ne ocupăm de *unicitatea soluției problemei* (2.4.3). Pentru a demonstra această proprietate, să presupunem că problema (2.4.3) admite două soluții și notă diferența celor două soluții cu $(\mathbf{v}_\pm^0, \pi_\pm^0)$. Ca atare, câmpurile $(\mathbf{v}_+^0, \pi_+^0, \mathbf{v}_-^0, \pi_-^0) \in \mathbf{X}_{RT}$ verifică

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{v}_\pm^0 + \alpha \mathbf{v}_\pm^0 - \nabla p_\pm^0 = 0 \text{ în } D_\pm, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_\pm^0 = 0 \text{ în } D_\pm, \\ \lambda(\operatorname{Tr}_{D_+} \mathbf{v}_+^0) - (\operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{v}_-^0)|_{\Gamma_+} = 0 \text{ pe } \Gamma_+, \\ \mathbf{t}_{\alpha, D_+}(\mathbf{v}_+^0, \pi_+^0) - (\mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{v}_-^0, \pi_-^0))|_{\Gamma_+} = 0 \text{ pe } \Gamma_+, \\ (\mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{v}_-^0, \pi_-^0))|_{\Gamma_-} + \mathfrak{L}(\operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{v}_-^0)|_{\Gamma_-} = 0 \text{ pe } \Gamma_-, \end{cases} \quad (2.4.47)$$

adică, versiunea omogenă a problemei (2.4.3).

Acum, să folosim formula lui Green (1.2.18) în domeniile D_{\pm} și obținem relațiile

$$\begin{aligned} 2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{v}_+^0), \mathbb{E}(\mathbf{v}_+^0) \rangle_{D_+} + \alpha \langle \mathbf{v}_+^0, \mathbf{v}_+^0 \rangle_{D_+} &= \langle \mathbf{t}_{\alpha, D_+}(\mathbf{v}_+^0, \pi_+^0), \text{Tr}_{D_+} \mathbf{v}_+^0 \rangle_{\Gamma_+} \\ 2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{v}_-^0), \mathbb{E}(\mathbf{v}_-^0) \rangle_{D_-} + \alpha \langle \mathbf{v}_-^0, \mathbf{v}_-^0 \rangle_{D_-} &= - \langle \mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{v}_-^0, \pi_-^0)|_{\Gamma_+}, (\text{Tr}_{D_-} \mathbf{v}_-^0)|_{\Gamma_+} \rangle_{\Gamma_+} \\ &\quad + \langle (\mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{v}_-^0, \pi_-^0))|_{\Gamma_-}, (\text{Tr}_{D_-} \mathbf{v}_-^0)|_{\Gamma_-} \rangle_{\Gamma_-}. \end{aligned} \quad (2.4.48)$$

Să înmulțim relația (2.4.48)₁ cu λ și să adunăm la rezultat relația (2.4.48)₂ și ținem cont de condițiile pe frontieră specificate în problema (2.4.47). După calcule, obținem

$$\begin{aligned} \lambda \left(2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{v}_+^0), \mathbb{E}(\mathbf{v}_+^0) \rangle_{D_+} + \alpha \langle \mathbf{v}_+^0, \mathbf{v}_+^0 \rangle_{D_+} \right) + 2 \langle \mathbb{E}(\mathbf{v}_-^0), \mathbb{E}(\mathbf{v}_-^0) \rangle_{D_-} + \alpha \langle \mathbf{v}_-^0, \mathbf{v}_-^0 \rangle_{D_-} \\ = - \langle \mathfrak{L}(\text{Tr}_{D_-} \mathbf{v}_-^0)|_{\Gamma_-}, (\text{Tr}_{D_-} \mathbf{v}_-^0)|_{\Gamma_-} \rangle_{\Gamma_-}. \end{aligned} \quad (2.4.49)$$

Remarcă faptul că membrul stâng al relației (2.4.49) este non-negativ și cum \mathfrak{L} satisface condiția (2.2.1), membrul drept al relației (2.4.49) este non-positiv. Așadar,

$$\mathbf{v}_{\pm}^0 = \mathbf{0}, \quad \pi_{\pm}^0 = c_{\pm}^0 \in \mathbb{R} \text{ în } D_{\pm}. \quad (2.4.50)$$

Acum, datorită relației (2.4.50) și condițiilor pe frontieră din problema (2.4.47), avem că $c_{\pm}^0 = 0$ în D_{\pm} . Așadar proprietatea de unicitate a soluției problemei (2.4.3) este dovedită.

În cele din urmă, continuitatea potențialelor ce apar în relația (2.4.8) implică existența unei constante $C \equiv C(D_+, D_-, \alpha, \mathfrak{L}, \lambda) > 0$, cu proprietatea că soluția $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_{RT}$ problemei (2.4.3) satisface inegalitatea (2.4.6).

Cazul 2: Presupunem că $\lambda = 1$. În acest caz, operatorul matriceal \mathbf{A} din (2.4.20) devine

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbb{I} & \mathbf{0} & -\mathcal{V}_{\Gamma_-, \Gamma_+} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} & -\mathbb{K}_{\Gamma_-, \Gamma_+}^* \\ \mathbb{D}_{\Gamma_+, \Gamma_-} + \mathfrak{L}\mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-} & \mathbb{K}_{\Gamma_+, \Gamma_-}^* + \mathfrak{L}\mathcal{V}_{\Gamma_+, \Gamma_-} & \frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{K}_{\alpha, \Gamma_-}^* + \mathfrak{L}\mathcal{V}_{\alpha, \Gamma_-} \end{bmatrix}. \quad (2.4.51)$$

Folosind pași similari celor din cazul $\lambda \in (0, 1)$, se poate arăta că problema Robin-transmisie (2.4.3) admite o soluție unică care depinde continuu de datele problemei, pentru $\lambda = 1$. Aceasta încheie demonstrația noastră. \square

2.4.1 Sistemul Brinkman și o problemă Robin-transmisie de tip limită asociată, în cazul $\lambda = 0$

În cele ce urmează, considerăm Ipoteza 1.1.7 satisfăcută. Ne concentrăm asupra investigării problemei Robin-transmisie pentru sistemul Brinkman (2.4.3) în cazul special $\lambda = 0$. Această alegere specială duce la problema (2.4.52), care conține o condiție specială de transmisie pe frontiera Γ_+ , anume, că conține doar urma câmpului de viteză necunoscut \mathbf{u}_- pe Γ_+ . Așadar, vom numi problem (2.4.52) problema Robin-transmisie de tip limită pentru sistemul Brinkman. Tratăm acest caz separat datorită faptului că problema Robin-transmisie (2.4.3) nu este aceeași problemă cu problema Robin-transmisie de tip limită (2.4.52). Aceste probleme sunt diferite deoarece au condiții de transmisie diferite pe frontiera interioară. Analiza problemei Robin-transmisie de tip limită pentru sistemul Brinkman (2.4.52) este foarte utilă, deoarece rezultatul de existență și unicitate obținut pentru aceasta oferă un rezultat de existență și unicitate pentru problema Robin-Dirichlet pentru același sistem. Această analiză provine din ideea de a găsi rezultate de bine-punere pentru

problemele Dirichlet, Neumann, Robin și combinații ale acestora, din rezultatele de bine-punere pentru probleme de transmisie (vezi [63]).

Să considerăm $\lambda = 0$ în problema Robin-transmisie (2.4.3) și obținem problema de transmisie de tip limită

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_\pm - \alpha \mathbf{u}_\pm - \nabla \pi_\pm = \mathbf{f}_\pm|_{D_\pm} \text{ în } D_\pm, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\pm = 0 \text{ în } D_\pm, \\ (\operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-) |_{\Gamma_+} = -\mathbf{g}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ \mathbf{t}_{\alpha, D_+}(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{f}_+) - (\mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_-)) |_{\Gamma_+} = \mathbf{h}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ (\mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_-)) |_{\Gamma_-} + \mathfrak{L}(\operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-) |_{\Gamma_-} = \mathbf{g}_2 \text{ pe } \Gamma_-, \end{cases} \quad (2.4.52)$$

unde $\alpha > 0$ este o constantă dată. Ne propunem să determinăm necunoscuta $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_{RT}$.

În acest caz special, am obținut următorul rezultat de existență și unicitate (a se vedea [8, Theorem 2], [56, Theorem 4.1], [63, Theorem 6.1]).

Teorema 2.4.2. *Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Considerăm Ipotezele 1.1.7 și 2.2.1 satisfăcute. Atunci, pentru orice $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2) \in \mathbf{Y}_{RT}$, problema Poisson de tip Robin-transmisie de tip limită (2.4.52) are o soluție unică*

$$(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_{RT}. \quad (2.4.53)$$

În plus, operatorul soluție asociat,

$$\mathbf{T}_{lim} : \mathbf{Y}_{RT} \rightarrow \mathbf{X}_{RT}, \quad (2.4.54)$$

este liniar și mărginit, și prin urmare, există o constantă $C \equiv C(D_+, D_-, \alpha, \mathfrak{L}, \lambda) > 0$ astfel încat soluția unică a problemei (2.4.52) satisface inegalitatea

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)\|_{\mathbf{X}_{RT}} \leq C \|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2)\|_{\mathbf{Y}_{RT}}. \quad (2.4.55)$$

2.4.2 Sistemul Brinkman și o problemă Robin-Dirichlet asociată

În această subsecțiune, ne propunem să subliniem rolul special pe care îl îndeplinește o problemă de tip transmisie. În continuare, fie $\alpha > 0$ o constantă dată și considerăm Ipoteza 1.1.7 satisfăcută. Să menționăm că, ne vom concentra pe domeniul Lipschitz D_- și folosim argumente similare cu cele prezentate în [63, p. 4581]. Subliniem faptul că problema (2.4.52) este bine-pusă, așa cum a fost stabilit în Teorema 2.4.2. Aceasta înseamnă că obținem o soluție unică $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_{RT}$ a problemei (2.4.52). Această soluție conține câmpurile $(\mathbf{u}_-, \pi_-) \in H_{\operatorname{div}}^1(D_-)^n \times L^2(D_-)$ care satisfac o altă problemă cu valori pe frontieră, anume, următoarea problemă Robin-Dirichlet pentru sistemul Brinkman,

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_- - \alpha \mathbf{u}_- - \nabla \pi_- = \mathbf{f}_-|_{D_-} \text{ în } D_-, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_- = 0 \text{ în } D_-, \\ (\operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-) |_{\Gamma_+} = -\mathbf{g}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ (\mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_-)) |_{\Gamma_-} + \mathfrak{L}(\operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-) |_{\Gamma_-} = \mathbf{g}_2 \text{ pe } \Gamma_-. \end{cases} \quad (2.4.56)$$

Cu alte cuvinte, suntem capabili să determinăm soluția unei probleme cu valori pe frontieră (adică, problema (2.4.56)) prin extragerea ei din soluția unei probleme de tip transmisie (adică, problema (2.4.52)). Așadar, perechea (\mathbf{u}_-, π_-) este o soluție a problemei Robin-Dirichlet (2.4.56).

Mai mult, pentru proprietatea de unicitate, similar cu pașii prezentați în demonstrația Teoremei 2.4.2, conduc la faptul că problema Robin-Dirichlet pentru sistemul Brinkman (2.4.56) este, la rândul acesteia, bine-pusă. În cadrul ipotezelor Teoremei 2.4.2, am obținut următorul rezultat (vezi [8, Corolar 1], [63, p. 4581]).

Corolar 2.4.3. *Problema Robin-Dirichlet pentru sistemul Brinkman (2.4.56) are o soluție unică $(\mathbf{u}_-, \pi_-) \in H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n \times L^2(\mathbf{D}_-)$, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*

Probleme cu valori pe frontieră neliniare de tip transmisie legate de sistemele Navier-Stokes și Darcy-Forchheimer-Brinkman

Scopul acestui capitol este de a trata probleme neliniare de tip transmisie care conțin o versiune generalizată a sistemului Darcy-Forchheimer-Brinkman sau a sistemului clasic Darcy-Forchheimer-Brinkman (vezi relația (3.1.1) în domeniul Lipschitz în cadrul Euclidian (vezi Ipotezele 1.1.6 și 1.1.7). Toate aceste probleme sunt importante pentru aplicațiile lor practice (a se vedea, de exemplu, [37], [86]). Conținutul acestui capitol urmărește rezultatele obținute în lucrările [4], [5], [8].

Să descriem pe scurt conținutul acestui capitol. Oferim rezultate de existență și unicitate pentru următoarele probleme cu valori pe frontieră. În primul rând, analizăm problema Poisson de tip transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat și sistemul Stokes în domeniul Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3 . În continuare, investigăm problema Poisson de tip transmisie pentru sistemele Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat și Brinkman în domeniul Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3 . În cele din urmă, avem problema Poisson de tip Robin-transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman în context euclidian, furnizat de Ipoteza 1.1.7.

Rezultatele de bine-punere pentru problemele liniare analizate în Capitolul 2 introduc operatori soluție asociați acestor probleme, care sunt liniari și continui. Luându-le în considerare, împreună cu neliniaritățile ecuațiilor cu derivate parțiale considerate în acest capitol (ecuațiile Navier-Stokes, ecuațiile Darcy-Forchheimer-Brinkman), reducem analiza problemelor cu valori pe frontieră pentru astfel de ecuații cu derivate neliniare, la studiul anumitor operatori neliniari și studiul punctelor fixe ale acestora, în unele cazuri speciale. Astfel de operatori neliniari apar din compunerea operatorilor liniari menționați mai sus și a operatorilor care descriu neliniaritățile ecuațiilor cu derivate parțiale neliniare. Punctele lor fixe vor oferi soluțiile problemelor noastre neliniare cu valori pe frontieră (a se vedea, de asemenea [70]).

Să luăm, de asemenea, act de unele lucrări care se referă la investigarea problemelor limită care implică sisteme de ecuații cu derivate parțiale neliniare. Spre exemplu, Choe și Kim [17] au obținut existența și regularitatea soluțiilor pentru problema Dirichlet neomogenă pentru sistemul Navier-Stokes într-un domeniu Lipschitz mărginit în \mathbb{R}^3 , ale cărei date pe frontieră posedă o regularitate minimă. Kohr, Lanza de Cristoforis și Wendland [55] au obținut un rezultat de existență și unicitate pentru problema Dirichlet pentru sistemul semiliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman într-un domeniu Lipschitz mărginit în \mathbb{R}^n , $n \leq 4$. Autorii lucrării [52] au obținut un rezultat de existență și unicitate pentru o problemă de tip transmisie pentru sistemele Darcy-Forchheimer-Brinkman și Stokes în \mathbb{R}^3 . De asemenea, în [61], autorii au obținut existența unor soluții ale unei probleme Dirichlet-transmisie pentru sistemul anizotrop Navier-Stokes în domeniul Lipschitz în \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$ (vezi de asemenea [14],

[68], [71]).

3.1 Sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat și rezultate asociate

În această secțiune, să luăm în considerare $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu Lipschitz mărginit, dacă nu este specificat altfel. Prezentăm o versiune generalizată a sistemului Darcy-Forchheimer-Brinkman, care este dată de

$$\Delta \mathbf{v} - \mathcal{P}\mathbf{v} - k|\mathbf{v}|\mathbf{v} - \beta(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nabla p = \mathbf{g} \text{ în } D, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ în } D, \quad (3.1.1)$$

unde $\mathcal{P} \in L^\infty(D)^{3 \times 3}$ satisface condiția (1.2.22) și $k, \beta : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ sunt funcții date, cu proprietatea că $k, \beta \in L^\infty(D, \mathbb{R}_+)$, adică, funcții esențial mărginite, nenegative, definite pe D (pentru mai multe detalii, vezi de asemenea [41]). Avem următoarele observații utile.

Observația 3.1.1. Pentru $\mathcal{P} \equiv \alpha \mathbb{I}$ și $\alpha, k, \beta > 0$ constante date, sistemul (3.1.1) devine sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman clasic.

Observația 3.1.2. Pentru $\mathcal{P} \equiv 0$, $k = 0$ și pentru $\beta > 0$ o constantă dată, sistemul (3.1.1) devine sistemul Navier-Stokes.

Acum, oferim o lemă pe care o vom folosi în demonstrațiile rezultatelor de bine-punere din acest capitol (vezi de asemenea, [52, Lemma 5.1]).

Lema 3.1.3. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, un domeniu Lipschitz mărginit și fie $k, \beta : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ cu proprietatea că $k, \beta \in L^\infty(D, \mathbb{R}_+)$. Fie

$$J_{k,\beta,D}(\mathbf{u}) := \mathring{E}(k|\mathbf{u}|\mathbf{u} + \beta(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}), \quad (3.1.2)$$

unde \mathring{E} este operatorul de extensie cu zero în afara domeniului D . Atunci, operatorul nelinear

$$J_{k,\beta,D} : H_{\operatorname{div}}^1(D)^n \rightarrow \tilde{H}^{-1}(D)^n, \quad (3.1.3)$$

este continuu și mărginit, adică există o constantă $c_0 = c_0(D, k, \beta) > 0$ astfel încât

$$\|J_{k,\beta,D}(\mathbf{u})\|_{\tilde{H}^{-1}(D)^n} \leq c_0 \|\mathbf{u}\|_{H^1(D)^n}^2. \quad (3.1.4)$$

În plus, are loc următoarea relație

$$\|J_{k,\beta,D}(\mathbf{u}) - J_{k,\beta,D}(\mathbf{v})\| \leq c_0 (\|\mathbf{u}\|_{H^1(D)^n} + \|\mathbf{v}\|_{H^1(D)^n}) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{H^1(D)^n}, \quad (3.1.5)$$

unde $c_0 = c_0(D, k, \beta) > 0$ este constanta ce apare în relația (3.1.4).

3.2 Problema de transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat și sistemul Stokes clasic în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3

Scopul acestei secțiuni este de a oferi un rezultat de bine-punere, pentru o problemă de tip transmisie, care a fost obținută în contextul Ipotezei 1.1.6 pentru $n = 3$, adică, domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3 . Am luat în considerare o versiune generalizată a sistemului Darcy-Forchheimer-Brinkman în domeniul Lipschitz mărginit D_+ și sistemul Stokes în mulțimea complementară Lipschitz D_- . De asemenea considerăm Ipoteza 2.2.1 satisfăcută, pentru $n = 3$.

Să reaminitim spațiul în care căutăm soluții

$$\mathbf{X}_w := H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^3 \times L^2(\mathbf{D}_+) \times \mathcal{H}_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^3 \times L^2(\mathbf{D}_-) \quad (3.2.1)$$

și spațiul datelor,

$$\mathbf{Y}_w := \tilde{H}^{-1}(\mathbf{D}_+)^3 \times \tilde{\mathcal{H}}^{-1}(\mathbf{D}_-)^3 \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3. \quad (3.2.2)$$

Studiem următoarea problemă Poisson de tip transmisie pentru sistemele Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat și Stokes,

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_+ - \mathcal{P} \mathbf{u}_+ - k|\mathbf{u}_+| \mathbf{u}_+ - \beta(\mathbf{u}_+ \cdot \nabla) \mathbf{u}_+ - \nabla \pi_+ = \mathbf{f}_+|_{\mathbf{D}_+} \text{ în } \mathbf{D}_+, \\ \Delta \mathbf{u}_- - \nabla \pi_- = \mathbf{f}_-|_{\mathbf{D}_-} \text{ în } \mathbf{D}_-, \\ \text{div } \mathbf{u}_{\pm} = 0 \text{ în } \mathbf{D}_{\pm}, \\ \text{Tr}_{\mathbf{D}_+} \mathbf{u}_+ - \text{Tr}_{\mathbf{D}_-} \mathbf{u}_- = \mathbf{g} \text{ pe } \Gamma, \\ \mathbf{t}_{\mathcal{P}, \mathbf{D}_+}(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{f}_+ + \mathring{\mathbf{E}}_+(k|\mathbf{u}_+| \mathbf{u}_+ + \beta(\mathbf{u}_+ \cdot \nabla) \mathbf{u}_+)) \\ - \mathbf{t}_{\mathbf{D}_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_-) + \mathfrak{L} \text{Tr}_{\mathbf{D}_+} \mathbf{u}_+ = \mathbf{h} \text{ pe } \Gamma, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

și determinăm necunoscuta $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_w$. Încă o dată, deoarece sistemul Stokes apare în domeniul Lipschitz nemărginit \mathbf{D}_- , trebuie să lucrăm cu spațiul ponderat $\mathcal{H}_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^3$, care este inclus în spațiul de soluții \mathbf{X}_w .

Următorul rezultat referitor la bine-punerea problemei de transmisie (3.2.3) a fost obținut, pentru $\mathbf{u}_{\infty} \in \mathbb{R}^3$ o constantă dată (vezi [5, Theorem 3.3] vezi de asemenea [52, Theorem 5.2] în cazul $k, \beta > 0$, $\mathcal{P} \equiv \alpha \mathbb{I}$, unde $\alpha > 0$ este o constantă).

Teorema 3.2.1. *Considerăm Ipotezele 1.1.6 și 2.2.1 satisfăcute, pentru $n = 3$. Fie $\mathcal{P} \in L^{\infty}(\mathbf{D}_+)^{3 \times 3}$ cu proprietatea (1.2.22). Fie $\mathbf{u}_{\infty} \in \mathbb{R}^3$ un vector constant. Atunci, există două constante*

$$\xi = \xi(\mathbf{D}_+, \mathbf{D}_-, \mathcal{P}, k, \beta, \mathfrak{L}) > 0, \quad \eta = \eta(\mathbf{D}_+, \mathbf{D}_-, \mathcal{P}, k, \beta, \mathfrak{L}) > 0, \quad (3.2.4)$$

cu proprietatea că pentru orice $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{u}_{\infty}) \in \mathbf{Y}_w \times \mathbb{R}^3$ care satisface

$$\|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{u}_{\infty})\|_{\mathbf{Y}_w \times \mathbb{R}^3} \leq \xi, \quad (3.2.5)$$

problema Poisson de tip transmisie pentru sisteme Darcy-Forchheimer-Brinkman și Stokes (3.2.3) admite o soluție unică $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_w$ și

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_- - \mathbf{u}_{\infty}, \pi_-)\|_{\mathbf{X}_w} \leq \eta. \quad (3.2.6)$$

În plus, soluția depinde continuu de date și satisface inegalitatea

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_- - \mathbf{u}_{\infty}, \pi_-)\|_{\mathbf{X}_w} \leq C_0 \|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{u}_{\infty})\|_{\mathbf{Y}_w \times \mathbb{R}^3}, \quad (3.2.7)$$

unde $C_0 = C_0(\mathbf{D}_+, \mathbf{D}_-, \mathcal{P}, \mathfrak{L}) > 0$ este o constantă și $\mathbf{u}_- - \mathbf{u}_{\infty}$ tinde către zero la infinit în sens Leray.

Încheiem această secțiune enunțând câteva remarci importante care arată situațiile particulare care sunt, de asemenea, tratate de Teorema 3.2.1.

Observația 3.2.2. *În cazul $k = 0$ și $\beta : \mathbf{D}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ cu proprietatea că $\beta \in L^{\infty}(\mathbf{D}_+, \mathbb{R}_+)$, Teorema 3.2.1 furnizează un rezultat de bine-punere pentru problema neliniară de tip transmisie pentru sistemul Navier-Stokes generalizat și sistemul Stokes.*

Observația 3.2.3. *În cazul $k : \mathbf{D}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ cu proprietatea $k \in L^{\infty}(\mathbf{D}_+, \mathbb{R}_+)$ și $\beta = 0$, Teorema 3.2.1 furnizează un rezultat de bine-punere pentru problema semilineară de tip transmisie pentru sistemul semilinear Darcy-Forchheimer-Brinkman și sistemul Stokes.*

3.3 Problema de transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat și sistemul Brinkman clasic în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3

În această secțiune, scopul nostru este de a oferi un rezultat de bine-punere pentru o problemă de tip transmisie, care a fost obținut în cadrul Ipotezei 1.1.6 pentru $n = 3$, adică, domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3 . Am considerat o versiune generalizată a sistemului Darcy-Forchheimer-Brinkman în domeniul Lipschitz mărginit D_+ și sistemul Brinkman în mulțimea complementară Lipschitz D_- . De asemenea, considerăm Ipoteza 2.2.1 satisfăcută, pentru $n = 3$.

Să ne amintim spațiul de soluții

$$\mathbf{X}_B := H_{\text{div}}^1(D_+)^3 \times L^2(D_+) \times H_{\text{div}}^1(D_-)^3 \times \mathfrak{M}(D_-) \quad (3.3.1)$$

și

$$\mathbf{Y}_B := \tilde{H}^{-1}(D_+)^3 \times \tilde{H}^{-1}(D_-)^3 \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, \quad (3.3.2)$$

spațiul datelor. Să observăm că $\mathfrak{M}(D_-)$ este spațiul dat de Definiția 2.1.1.

Din moment ce avem de-a face cu sistemul Brinkman din domeniul Lipschitz exterior D_- (vezi Ipoteza 1.1.6 în cazul $n = 3$), rezultă că putem folosi spațiul Sobolev clasic $H_{\text{div}}^1(D_-)^3$, în locul spațiului Sobolev ponderat $\mathcal{H}_{\text{div}}^1(D_-)^3$, ca spațiul în care căutăm câmpul de viteză în D_- . Acest lucru se datorează comportării soluției fundamentale a sistemului Brinkman la infinit, în cazul $n = 3$.

Acum, luăm în considerare problema de tip transmisie pentru sistemele Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat și Brinkman clasic, care este dată de

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_+ - \mathcal{P} \mathbf{u}_+ - k|\mathbf{u}_+| \mathbf{u}_+ - \beta(\mathbf{u}_+ \cdot \nabla) \mathbf{u}_+ - \nabla \pi_+ = \mathbf{f}_+|_{D_+} \text{ in } D_+, \\ \Delta \mathbf{u}_- - \alpha \mathbf{u}_- - \nabla \pi_- = \mathbf{f}_-|_{D_-} \text{ in } D_-, \\ \text{div } \mathbf{u}_\pm = 0 \text{ in } D_\pm, \\ \text{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+ - \text{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_- = \mathbf{g} \text{ on } \Gamma, \\ \mathbf{t}_{\mathcal{P}, D_+}(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{f}_+ + \mathring{\mathbf{E}}_+(k|\mathbf{u}_+| \mathbf{u}_+ + \beta(\mathbf{u}_+ \cdot \nabla) \mathbf{u}_+)) - \mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_-) \\ + \mathfrak{L} \text{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+ = \mathbf{h} \text{ on } \Gamma, \end{cases} \quad (3.3.3)$$

cu necunoscuta $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_B$.

Rezultatul de bine-punere obținut este următorul (vezi de exemplu, [4, Teorema 3.2], și [52, Teorema 5.2] în cazul $\mathcal{P} = \alpha \mathbb{I}$, unde $\alpha, k, \beta > 0$ sunt constante).

Teorema 3.3.1. *Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Considerăm Ipotezele 1.1.6 și 2.2.1 satisfăcute, pentru $n = 3$. Fie $\mathcal{P} \in L^\infty(D_+)^{3 \times 3}$ cu proprietatea (1.2.22). Atunci, există două constante,*

$$\xi = \xi(D_+, D_-, \mathcal{P}, k, \beta, \mathfrak{L}) > 0 \quad \eta = \eta(D_+, D_-, \mathcal{P}, k, \beta, \mathfrak{L}) > 0 \quad (3.3.4)$$

cu proprietatea că pentru orice $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h}) \in \mathbf{Y}_B$ care satisfac

$$\|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h})\|_{\mathbf{Y}_B} \leq \xi, \quad (3.3.5)$$

problema Poisson de tip transmisie pentru sistemele Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat și Brinkman (3.3.3) are o soluție unică $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_B$ astfel încât

$$\|\mathbf{u}_+\|_{H_{\text{div}}^1(D_+)^3} \leq \eta. \quad (3.3.6)$$

În plus, soluția depinde continuu de date, adică există o constantă $C_0 = C_0(\mathbf{D}_+, \mathbf{D}_-, \mathcal{P}, \mathfrak{L}) > 0$ astfel încât

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)\|_{\mathbf{X}_B} \leq C_0 \|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}, \mathbf{h})\|_{\mathbf{Y}_B}. \quad (3.3.7)$$

Încheiem această secțiune enunțând câteva remarci utile care sunt derivate din rezultatul nostru de bine-punere, adică Teorema 3.3.1.

Observația 3.3.2. Dacă $k = 0$ și $\beta : \mathbf{D}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisface $\beta \in L^\infty(\mathbf{D}_+, \mathbb{R}_+)$ în Teorema 3.3.1, obținem rezultatul de bine-punere pentru problema de transmisie neliniară pentru sistemele Navier-Stokes generalizat și Brinkman în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3 .

Observația 3.3.3. Dacă $k : \mathbf{D}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisface $k \in L^\infty(\mathbf{D}_+, \mathbb{R}_+)$ și $\beta = 0$ în Teorema 3.3.1, obținem rezultatul de bine-punere pentru problema de transmisie semiliniară pentru un sistem Darcy-Forchheimer-Brinkman semiliniar și sistemul Brinkman în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3 .

3.4 Asupra unei probleme de tip Robin-transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman

În această secțiune, oferim un rezultat de existență și unicitate pentru o problemă de tip transmisie, care a fost obținută în contextul Ipotezei 1.1.7. Această problemă specială de tip transmisie pe care o studiem va fi numită problema Robin-transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman (vezi problema (3.4.3)). În plus, fie $\lambda \in (0, 1]$ o constantă și considerăm Ipoteza 2.2.1 satisfăcută, pentru $n = 2, 3$.

Să ne reamintim spațiul soluțiilor

$$\mathbf{X}_{RT} := H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n \times L^2(\mathbf{D}_+) \times H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n \times L^2(\mathbf{D}_-), \quad (3.4.1)$$

și spațiul datelor,

$$\mathbf{Y}_{RT} := \tilde{H}^{-1}(\mathbf{D}_+)^n \times \tilde{H}^{-1}(\mathbf{D}_-)^n \times H_{\nu}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n. \quad (3.4.2)$$

Problema Robin-transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman este dată de

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{u}_\pm - \alpha \mathbf{u}_\pm - k |\mathbf{u}_\pm| \mathbf{u}_\pm - \beta (\mathbf{u}_\pm \cdot \nabla) \mathbf{u}_\pm - \nabla \pi_\pm = \mathbf{f}_\pm |_{\mathbf{D}_\pm} \text{ în } \mathbf{D}_\pm, \\ \text{div } \mathbf{u}_\pm = 0 \text{ în } \mathbf{D}_\pm, \\ \lambda (\text{Tr}_{\mathbf{D}_+} \mathbf{u}_+) - (\text{Tr}_{\mathbf{D}_-} \mathbf{u}_-) |_{\Gamma_+} = \mathbf{g}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ \mathbf{t}_{\alpha, \mathbf{D}_+}(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{f}_+ + \mathring{\mathbf{E}}_+(k |\mathbf{u}_+| \mathbf{u}_+ + \beta (\mathbf{u}_+ \cdot \nabla) \mathbf{u}_+)) \\ - \left(\mathbf{t}_{\alpha, \mathbf{D}_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_- + \mathring{\mathbf{E}}_-(k |\mathbf{u}_-| \mathbf{u}_- + \beta (\mathbf{u}_- \cdot \nabla) \mathbf{u}_-)) \right) |_{\Gamma_+} = \mathbf{h}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ \left(\mathbf{t}_{\alpha, \mathbf{D}_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_- + \mathring{\mathbf{E}}_-(k |\mathbf{u}_-| \mathbf{u}_- + \beta (\mathbf{u}_- \cdot \nabla) \mathbf{u}_-)) \right) |_{\Gamma_-} \\ + \mathfrak{L} (\text{Tr}_{\mathbf{D}_-} \mathbf{u}_-) |_{\Gamma_-} = \mathbf{g}_2 \text{ pe } \Gamma_-, \end{array} \right. \quad (3.4.3)$$

cu necunoscuta $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in \mathbf{X}_{RT}$. Să observăm că $\mathring{\mathbf{E}}_\pm$ este operatorul de extensie cu zero în exteriorul mulțimii $\bar{\mathbf{D}}_\pm$.

Am obținut următorul rezultat de bine-punere (vezi de asemenea, [52, Teorema 5.2]).

Teorema 3.4.1. *Fie $\alpha > 0$, $k, \beta \in \mathbb{R}^*$ și $\lambda \in (0, 1]$ sunt constante date. Considerăm Ipotezele 1.1.7 și 2.2.1 satisfăcute, pentru $n = 2, 3$. Atunci, există două constante,*

$$\xi \equiv \xi(D_+, D_-, \alpha, k, \beta, \lambda, \mathfrak{L}) > 0, \quad \eta \equiv \eta(D_+, D_-, \alpha, k, \beta, \lambda, \mathfrak{L}) > 0, \quad (3.4.4)$$

cu proprietatea că pentru orice $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2) \in Y_{RT}$, care satisface

$$\|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2)\|_{Y_{RT}} \leq \xi, \quad (3.4.5)$$

problema Poisson de tip Robin-transmisie (3.4.3) pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman are o soluție unică $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in X_{RT}$ cu proprietatea

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)\|_{X_{RT}} \leq \eta. \quad (3.4.6)$$

Mai mult, există o constantă $C_0 \equiv C_0(D_+, D_-, \alpha, \mathfrak{L}, \lambda) > 0$ astfel încât soluția unică satisface

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)\|_{X_{RT}} \leq C_0 \|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2)\|_{Y_{RT}}. \quad (3.4.7)$$

Demonstrație. Demonstrăm acest rezultat cu ajutorul unor argumente similare cu cele prezentate în demonstrația [52, Teorema 5.2]. Ne împărțim argumentele în trei pași.

Pasul 1. Arătăm că o soluție a problemei (3.4.3) există. Rescriem problema de transmisie neliniară (3.4.3) astfel

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_\pm - \alpha \mathbf{u}_\pm - \nabla \pi_\pm = \mathbf{f}_\pm|_{D_\pm} + \mathbf{J}_{k,\beta,D_\pm}(\mathbf{u}_\pm)|_{D_\pm} \text{ în } D_\pm, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\pm = 0 \text{ în } D_\pm, \\ \lambda (\operatorname{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+) - (\operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-) |_{\Gamma_+} = \mathbf{g}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ \mathbf{t}_{\alpha,D_+}(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{f}_+ + \mathbf{J}_{k,\beta,D_\pm}(\mathbf{u}_+)) - (\mathbf{t}_{\alpha,D_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_- + \mathbf{J}_{k,\beta,D_\pm}(\mathbf{u}_-))) |_{\Gamma_+} \\ = \mathbf{h}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ (\mathbf{t}_{\alpha,D_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_- + \mathbf{J}_{k,\beta,D_\pm}(\mathbf{u}_-))) |_{\Gamma_-} + \mathfrak{L} (\operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-) |_{\Gamma_-} = \mathbf{g}_2 \text{ pe } \Gamma_-. \end{cases} \quad (3.4.8)$$

În continuare, ne propunem să construim un operator neliniar \mathbf{H} care mapează o bilă închisă \mathbf{B}_η a spațiului $H_{\operatorname{div}}^1(D_+)^n \times H_{\operatorname{div}}^1(D_-)^n$ în aceasta, și, de asemenea, este o contracție pe \mathbf{B}_η . Prin urmare, punctul fix unic al \mathbf{H} va oferi o soluție a problemei (3.4.8).

Să construim operatorul nostru neliniar în felul următor. Să ne amintim că datele noastre $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2) \in Y_{RT}$ care intervin în (3.4.8) sunt fixate. În plus, să fixăm

$$(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) \in H_{\operatorname{div}}^1(D_+)^n \times H_{\operatorname{div}}^1(D_-)^n. \quad (3.4.9)$$

Să luăm în considerare următoarea problemă liniară Poisson de tip de transmisie pentru sistemul Brinkman cu necunoscutele $(\mathbf{u}_+^0, \pi_+^0, \mathbf{u}_-^0, \pi_-^0)$

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_\pm^0 - \alpha \mathbf{u}_\pm^0 - \nabla \pi_\pm^0 = \mathbf{f}_\pm|_{D_\pm} + \mathbf{J}_{k,\beta,D_\pm}(\mathbf{u}_\pm^0)|_{D_\pm} \text{ în } D_\pm, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\pm^0 = 0 \text{ în } D_\pm, \\ \lambda (\operatorname{Tr}_{D_+} \mathbf{u}_+^0) - (\operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-^0) |_{\Gamma_+} = \mathbf{g}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ \mathbf{t}_{\alpha,D_+}(\mathbf{u}_+^0, \pi_+^0, \mathbf{f}_+ + \mathbf{J}_{k,\beta,D_\pm}(\mathbf{u}_+^0)) - (\mathbf{t}_{\alpha,D_-}(\mathbf{u}_-^0, \pi_-^0, \mathbf{f}_- + \mathbf{J}_{k,\beta,D_\pm}(\mathbf{u}_-^0))) |_{\Gamma_+} \\ = \mathbf{h}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ (\mathbf{t}_{\alpha,D_-}(\mathbf{u}_-^0, \pi_-^0, \mathbf{f}_- + \mathbf{J}_{k,\beta,D_\pm}(\mathbf{u}_-^0))) |_{\Gamma_-} + \mathfrak{L} (\operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-^0) |_{\Gamma_-} = \mathbf{g}_2 \text{ pe } \Gamma_-. \end{cases} \quad (3.4.10)$$

În plus, apartenența $\mathring{\mathbf{E}}(k|\mathbf{u}_\pm|_{D_\pm} + \beta(\mathbf{u}_\pm \cdot \nabla)\mathbf{u}_\pm) \in \tilde{H}^{-1}(D_\pm)^n$ are loc pe baza Lemei 3.1.3.

Să aplicăm Teorema 2.4.1. Prin urmare, deducem că probema (3.4.10) are o soluție unică

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_+^0, \pi_+^0, \mathbf{u}_-^0, \pi_-^0) &:= \mathbb{T}_{RT}(\mathbf{f}_+|_{D_+} + \mathbf{J}_{k,\beta,D_+}(\mathbf{u}_+)|_{D_+}, \mathbf{f}_-|_{D_-} + \mathbf{J}_{k,\beta,D_-}(\mathbf{u}_-)|_{D_-}, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2) \in \mathbf{X}_{RT} \\ &= (\mathbf{U}_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{R}_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{U}_-(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{R}_-(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)). \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Să remarcăm că, operatorul $\mathbb{T}_{RT} : \mathbf{Y}_{RT} \rightarrow \mathbf{X}_{RT}$ care apare în relația (3.4.11) este operatorul soluție dat de relația (2.4.5). Să ținem cont că $\mathbb{T}_{RT} : \mathbf{Y}_{RT} \rightarrow \mathbf{X}_{RT}$ este bine-definit, liniar și continuu, care pun în corespondență datelor (ce aparțin spațiului \mathbf{Y}_{RT}) soluția unică a problemei Poisson de tip Robin-transmisie (2.4.3) pentru sistemul Brinkman în cadrul Ipotezei 1.1.7, pentru $n = 2, 3$. De asemenea, $\mathbb{T}_{RT} : \mathbf{Y}_{RT} \rightarrow \mathbf{X}_{RT}$ satisface inegalitatea (2.4.6) din Teorema 2.4.1.

Mai mult, datorită Lemei 3.1.3 și Teoremei 2.4.1 și pentru $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2) \in \mathbf{Y}_{RT}$, operatorii neliniari furnizați de relația (3.4.11),

$$(\mathbf{U}_+, \mathbf{R}_+, \mathbf{U}_-, \mathbf{R}_-) : H_{\text{div}}^1(D_+)^n \times H_{\text{div}}^1(D_-)^n \rightarrow \mathbf{X}_{RT}, \quad (3.4.12)$$

sunt continui și există o constantă $C \equiv C(D_+, D_-, \alpha, \lambda, \mathfrak{L}) > 0$ astfel încât

$$\begin{aligned} &\|(\mathbf{U}_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{R}_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{U}_-(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{R}_-(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-))\|_{\mathbf{X}_{RT}} \\ &\leq C \|(\mathbf{f}_+|_{D_+} + \mathbf{J}_{k,\beta,D_+}(\mathbf{u}_+)|_{D_+}, \mathbf{f}_- + \mathbf{J}_{k,\beta,D_-}(\mathbf{u}_-)|_{D_-}, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2)\|_{\mathbf{Y}_{RT}} \\ &\leq C \|(\mathbf{f}_+|_{D_+}, \mathbf{f}_-|_{D_-}, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2)\|_{\mathbf{Y}_{RT}} + \|\mathbf{J}_{k,\beta,D_+}(\mathbf{u}_+)\|_{\tilde{H}^{-1}(D_+)^n} + \|\mathbf{J}_{k,\beta,D_-}(\mathbf{u}_-)\|_{\tilde{H}^{-1}(D_-)^n} \\ &\leq C \|(\mathbf{f}_+|_{D_+}, \mathbf{f}_-|_{D_-}, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2)\|_{\mathbf{Y}_{RT}} + c_1^+ C \|\mathbf{u}_+\|_{H_{\text{div}}^1(D_+)^n}^2 + c_1^- C \|\mathbf{u}_-\|_{H_{\text{div}}^1(D_-)^n}^2, \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

pentru orice $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) \in H_{\text{div}}^1(D_+)^n \times H_{\text{div}}^1(D_-)^n$, unde c_1^+ și c_1^- sunt constantele din Lema 3.1.3, ce corespund domeniilor D_+ , respectiv, D_- .

Ținând cont de (3.4.10), avem

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{U}_\pm(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) - \alpha \mathbf{U}_\pm(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) - \nabla \mathbf{R}_\pm(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) \\ \quad = \mathbf{f}_\pm|_{D_\pm} + \mathbf{J}_{k,\beta,D_\pm}(\mathbf{u}_\pm)|_{D_\pm} \text{ în } D_\pm, \\ \text{div } \mathbf{U}_\pm(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) = 0 \text{ în } D_\pm, \\ \lambda (\text{Tr}_{D_+} \mathbf{U}_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) - (\text{Tr}_{D_-} \mathbf{U}_-(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)) |_{\Gamma_+} = \mathbf{g}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ \mathbf{t}_{\alpha,D_+}(\mathbf{U}_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{R}_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{f}_+ + \mathbf{J}_{k,\beta,D_\pm}(\mathbf{u}_+)) \\ \quad - (\mathbf{t}_{\alpha,D_-}(\mathbf{U}_-(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{R}_-(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{f}_- + \mathbf{J}_{k,\beta,D_\pm}(\mathbf{u}_-))) |_{\Gamma_+} \\ \quad = \mathbf{h}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ (\mathbf{t}_{\alpha,D_-}(\mathbf{U}_-(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{R}_-(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{f}_- + \mathbf{J}_{k,\beta,D_\pm}(\mathbf{u}_-))) |_{\Gamma_-} \\ \quad + \mathfrak{L} (\text{Tr}_{D_-} \mathbf{U}_-(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)) |_{\Gamma_-} = \mathbf{g}_2 \text{ pe } \Gamma_-. \end{array} \right. \quad (3.4.14)$$

Să introducem operatorul neliniar

$$\mathbf{H} : H_{\text{div}}^1(D_+)^n \times H_{\text{div}}^1(D_-)^n \rightarrow H_{\text{div}}^1(D_+)^n \times H_{\text{div}}^1(D_-)^n$$

prin

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) := (\mathbf{U}_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{U}_-(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)). \quad (3.4.15)$$

Acum, dacă arătăm că operatorul neliniar \mathbf{H} are un punct fix $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) \in H_{\text{div}}^1(D_+)^n \times H_{\text{div}}^1(D_-)^n$, acest punct fix va fi soluția ecuației $\mathbf{H}(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) = (\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)$ și împreună cu $\pi_\pm = \mathbf{R}_\pm(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)$ furnizează o soluție a problemei (3.4.8) în \mathbf{X}_{RT} .

Pentru a justifica afirmația noastră, arătăm că \mathbf{H} mapează o bilă închisă $\mathbf{B}_\eta \subseteq H_{\text{div}}^1(D_+)^n \times H_{\text{div}}^1(D_-)^n$ în aceasta și de asemenea este o contrație pe bila \mathbf{B}_η .

Să introducem constantele

$$\xi := \frac{3}{16C^2 \max\{c_1^+, c_1^-\}} > 0, \quad \eta := \frac{1}{4C \max\{c_1^+, c_1^-\}} > 0, \quad (3.4.16)$$

și bila închisă

$$\mathbf{B}_\eta := \{(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) \in H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n \times H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n : \|(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n \times H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n} \leq \eta\}, \quad (3.4.17)$$

iar constantele c_1^+ și c_1^- sunt aceleași constante care apar în relația (3.4.13). În plus, presupunem că datele noastre satisfac

$$\|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2)\|_{\mathbf{Y}_{RT}} \leq \xi. \quad (3.4.18)$$

Datorită relațiilor (3.4.13), (3.4.16), (3.4.17), (3.4.18), obținem

$$\|(\mathbf{U}_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-), \mathbf{U}_-(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-))\|_{\mathbf{X}_{RT}} \leq \eta, \quad (3.4.19)$$

pentru orice $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) \in \mathbf{B}_\eta$, ceea ce arată că $\|\mathbf{H}(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n \times H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n} \leq \eta$. În consecință \mathbf{H} mapează \mathbf{B}_η în \mathbf{B}_η .

Să arătăm că \mathbf{H} este o contracție pe \mathbf{B}_η . În acest scop, să fixăm datele $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2) \in \mathbf{Y}_{RT}$. Dacă $(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-), (\mathbf{w}_+, \mathbf{w}_-) \in \mathbf{B}_\eta$ sunt câmpuri arbitrare, obținem

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{H}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-) - \mathbf{H}(\mathbf{w}_+, \mathbf{w}_-)\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n \times H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n} \\ & \leq C \|(\mathbf{J}_{k,\beta,\mathbf{D}_+}(\mathbf{v}_+) - \mathbf{J}_{k,\beta,\mathbf{D}_+}(\mathbf{w}_+), \mathbf{J}_{k,\beta,\mathbf{D}_+}(\mathbf{v}_-) - \mathbf{J}_{k,\beta,\mathbf{D}_+}(\mathbf{w}_-))\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{D}_+)^n \times \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{D}_-)^n} \\ & \leq C c_1^+ (\|\mathbf{v}_+\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n} + \|\mathbf{w}_+\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n}) \|\mathbf{v}_+ - \mathbf{w}_+\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n} \\ & \quad + C c_1^- (\|\mathbf{v}_-\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n} + \|\mathbf{w}_-\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n}) \|\mathbf{v}_- - \mathbf{w}_-\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n} \\ & \leq 2\eta C \max\{c_1^+, c_1^-\} \|(\mathbf{v}_+ - \mathbf{w}_+, \mathbf{v}_- - \mathbf{w}_-)\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n \times H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n} \\ & = \frac{1}{2} \|(\mathbf{v}_+ - \mathbf{w}_+, \mathbf{v}_- - \mathbf{w}_-)\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n \times H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n}. \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

În (3.4.20) am utilizat linearitatea și continuitatea operatorului $\mathbf{T}_{RT} : \mathbf{Y}_{RT} \rightarrow \mathbf{X}_{RT}$ (vezi relația (2.4.5)) împreună cu relația (3.1.5) din Lema 3.1.3. Așadar, operatorul $\mathbf{H} : \mathbf{B}_\eta \rightarrow \mathbf{B}_\eta$ este $\frac{1}{2}$ -contracție.

Datorită teoremei de punct fix a lui Banach, obținem existența unui unic punct fix $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) \in \mathbf{B}_\eta$ al operatorului \mathbf{H} , anume, $\mathbf{H}(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) = (\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)$. Perechea $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)$ împreună cu funcțiile $\pi_\pm = \mathbf{R}_\pm(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)$ date de (3.4.11), determină o soluție a problemei neliniare (3.4.8) în spațiul \mathbf{X}_{RT} . În consecință, $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)$ este o soluție a problemei de transmisie neliniară (3.4.3) în \mathbf{X}_{RT} .

Datorită apartenenței $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) \in \mathbf{B}_\eta$, avem

$$C c_1^+ \|\mathbf{u}_+\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n} \leq C c_1^+ \eta \leq \frac{1}{4}, \quad C c_1^- \|\mathbf{u}_-\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n} \leq C c_1^- \eta \leq \frac{1}{4}. \quad (3.4.21)$$

Atunci, aplicăm inegalitatea (3.4.13) pentru a obține

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_+\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n} + \|\pi_+\|_{L^2(\mathbf{D}_+)} + \|\mathbf{u}_-\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n} + \|\pi_-\|_{L^2(\mathbf{D}_-)} = \|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)\|_{\mathbf{X}_{RT}} \\ & \leq C \|(\mathbf{f}_+|_{\mathbf{D}_+}, \mathbf{f}_-|_{\mathbf{D}_-}, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2)\|_{\mathbf{Y}_{RT}} + \frac{1}{4} \|\mathbf{u}_+\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n} + \frac{1}{4} \|\mathbf{u}_-\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n}, \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

și avem

$$\|\mathbf{u}_+\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_+)^n} + \|\mathbf{u}_-\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbf{D}_-)^n} \leq \frac{4}{3} C \|(\mathbf{f}_+|_{\mathbf{D}_+}, \mathbf{f}_-|_{\mathbf{D}_-}, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2)\|_{\mathbf{Y}_{RT}}. \quad (3.4.23)$$

Prin înlocuirea relației (3.4.23) în relația (3.4.22), obținem inegalitatea (3.4.7) cu $C_0 = \frac{4}{3}C$.

Step 2. Dorim să arătăm *proprietatea de unicitate a soluției problemei de transmisie neliniare* (3.4.3). Teorema de punct fix a lui Banach asigură proprietatea de unicitate a soluției problemei (3.4.3) înăuntrul bilei B_η . Deoarece argumentele care sunt implicate în demonstrarea acestui pas sunt similare cu cele din demonstrația Teoremei 3.2.1, le omitem pentru a păstra concizia prezentării.

Step 3. Rămâne să arătăm că *soluția problemei noastre* (3.4.3) *depinde continuu de date*. În acest scop, continuitatea operatorului neliniar $H : B_\eta \rightarrow B_\eta$ și continuitatea operatorului soluție $T_{RT} : Y_{RT} \rightarrow X_{RT}$ (vezi relația (2.4.5)) arată că soluția unică $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in X_{RT}$ depinde continuu de date și inegalitatea (3.4.7) are loc pentru constanta $C_0 = \frac{4}{3}C$. Aceasta încheie demonstrația noastră. \square

3.4.1 Sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman și o problemă Robin-transmisie de tip limită asociată, în cazul $\lambda = 0$

În această subsecțiune, vom lucra în cadrul Ipotezei 1.1.7. Dorim să discutăm o problemă specială de tip Robin-transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman. Această nouă problemă de tip transmisie se obține prin a alege $\lambda = 0$ în problema de transmisie (3.4.3). În consecință, obținem problema (3.4.24) care include o anumită condiție de transmisie pe frontieră Γ_+ , anume, conține doar urma vitezei necunoscute \mathbf{u}_- pe Γ_+ . Datorită acestui fapt, problemă (3.4.24) va fi denumită problema Robin-transmisie de tip limită pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman. Să remarcăm că, această problemă Robin-transmisie de tip limită conține o problemă Robin-Dirichlet pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman D_- . Scopul nostru este de a arăta bine-punerea problemei Robin-transmisie de tip limită pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman și, în consecință, obținem un rezultat de bine-punere pentru problema Robin-Dirichlet pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman. În mod echivalent, izolăm soluția problemei Robin-Dirichlet din soluția problemei Robin-transmisie de tip limită. Această metodă originală subliniază faptul că soluțiile anumitor probleme cu valori pe frontieră pot fi determinate luând în considerare, în primul rând, anumite probleme de transmisie.

Să considerăm $\lambda = 0$ în problema Robin-transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman (3.4.3). Obținem problema Robin-transmission de tip limită pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{u}_\pm - \alpha \mathbf{u}_\pm - k|\mathbf{u}_\pm| \mathbf{u}_\pm - \beta(\mathbf{u}_\pm \cdot \nabla) \mathbf{u}_\pm - \nabla \pi_\pm = \mathbf{f}_\pm|_{D_\pm} \text{ în } D_\pm, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\pm = 0 \text{ în } D_\pm, \\ (\operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-) |_{\Gamma_+} = -\mathbf{g}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ \mathbf{t}_{\alpha, D_+}(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{f}_+ + \mathring{\mathbf{E}}_+(k|\mathbf{u}_+| \mathbf{u}_+ + \beta(\mathbf{u}_+ \cdot \nabla) \mathbf{u}_+)) \\ - (\mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_- + \mathring{\mathbf{E}}_-(k|\mathbf{u}_-| \mathbf{u}_- + \beta(\mathbf{u}_- \cdot \nabla) \mathbf{u}_-)) |_{\Gamma_+} \\ = \mathbf{h}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ (\mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_- + \mathring{\mathbf{E}}_-(k|\mathbf{u}_-| \mathbf{u}_- + \beta(\mathbf{u}_- \cdot \nabla) \mathbf{u}_-)) |_{\Gamma_-} \\ + \mathfrak{L}(\operatorname{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-) |_{\Gamma_-} = \mathbf{g}_2 \text{ pe } \Gamma_-, \end{array} \right. \quad (3.4.24)$$

cu necunoscuta $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in X_{XT}$. Să ținem cont că, $\mathring{\mathbf{E}}_\pm$ este operatorul de extensie cu zero în exteriorul mulțimii D_\pm . Mai mult, considerăm Ipoteza 2.2.1 satisfăcută, pentru $n = 2, 3$.

Rezultatul de bine-punere care a fost obținut, este următorul (a se vedea, de exemplu, [52, Teorema 5.2]).

Teorema 3.4.2. *Fie $\alpha > 0$, $k, \beta \in \mathbb{R}^*$ constante date. Considerăm Ipotezele 1.1.7 și 2.2.1 satisfăcute pentru $n = 2, 3$. Atunci, există două constante,*

$$\xi \equiv \xi(D_+, D_-, \alpha, k, \beta, \mathfrak{L}) > 0, \quad \eta \equiv \eta(D_+, D_-, \alpha, k, \beta, \mathfrak{L}) > 0, \quad (3.4.25)$$

astfel încât, pentru orice $(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2) \in Y_{RT}$, care satisface

$$\|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2)\|_{Y_{RT}} \leq \xi, \quad (3.4.26)$$

problema Poisson de tip Robin-transmisie de tip limită (3.4.24) pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman are o soluție unică $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in X_{RT}$ cu proprietatea

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)\|_{X_{RT}} \leq \eta. \quad (3.4.27)$$

Mai mult, există o constantă $C_0 \equiv C_0(D_+, D_-, \alpha, \mathfrak{L}, \lambda) > 0$ astfel încât soluția unică satisface inegalitatea

$$\|(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-)\|_{X_{RT}} \leq C_0 \|(\mathbf{f}_+, \mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2)\|_{Y_{RT}}. \quad (3.4.28)$$

3.4.2 Sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman și o problemă Robin-Dirichlet asociată

Scopul acestei subsecțiuni este de a evidenția rolul particular pe care îl satisface o problemă de tip transmisie. În cele ce urmează, fie $\alpha, k, \beta > 0$ constante date și considerăm Ipoteza 1.1.7 satisfăcută. Considerăm domeniul Lipschitz D_- și folosim argumente similare celor descrise în [63, p. 4581]. Să continuăm prin a afirma faptul că problema (3.4.24) este bine-pusă (vezi Teorema 3.4.2). În consecință, obținem o soluție unică $(\mathbf{u}_+, \pi_+, \mathbf{u}_-, \pi_-) \in X_{RT}$ a problemei (3.4.24). Din aceasta, extragem perechea $(\mathbf{u}_-, \pi_-) \in H_{\text{div}}^1(D_-)^n \times L^2(D_-)$ și observăm că această pereche particulară satisface o altă problemă cu valori pe frontieră, și anume, următoarea problemă Robin-Dirichlet pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman în D_- ,

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_- - \alpha \mathbf{u}_- - k|\mathbf{u}_-|\mathbf{u}_- - \beta(\mathbf{u}_- \cdot \nabla)\mathbf{u}_- - \nabla \pi_- = \mathbf{f}_-|_{D_-} \text{ în } D_-, \\ \text{div } \mathbf{u}_- = 0 \text{ în } D_-, \\ (\text{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-)|_{\Gamma_+} = -\mathbf{g}_1 \text{ pe } \Gamma_+, \\ (\mathbf{t}_{\alpha, D_-}(\mathbf{u}_-, \pi_-, \mathbf{f}_- + \mathring{\mathbf{E}}_-(k|\mathbf{u}_-|\mathbf{u}_- + \beta(\mathbf{u}_- \cdot \nabla)\mathbf{u}_-))|_{\Gamma_-} + \mathfrak{L}(\text{Tr}_{D_-} \mathbf{u}_-)|_{\Gamma_-} = \mathbf{g}_2, \text{ pe } \Gamma_-. \end{cases} \quad (3.4.29)$$

Pentru a rezuma, putem obține soluția pentru o problemă cu valori pe frontieră (anume, problema (3.4.29)) prin extragerea acesteia din soluția unei probleme de tip transmisie (anume, problema (3.4.24)). Rezultă că perechea (\mathbf{u}_-, π_-) este o soluție a problemei Robin-Dirichlet (3.4.29) pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman.

Fie $(\mathbf{f}_-, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) \in \tilde{H}^{-1}(D_-)^n \times H_{\nu}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+)^n \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^n$ care satisface (3.4.26) din Teorema 3.4.2. Atunci, avem următoarea consecință (vezi [63, p. 4581]).

Corolar 3.4.3. *Problema Robin-Dirichlet pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman (3.4.29) are o soluție în spațiul $H_{\text{div}}^1(D_-)^n \times L^2(D_-)$, unde $n = 2, 3$.*

O abordare numerică legată de sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman cu condiții Robin-Dirichlet

Scopul acestui capitol este de a studia, numeric, problema Robin-Dirichlet pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman, problema (3.4.29). În plus, avem rezultatul de existență pentru problema (3.4.29), care este Corolarul 3.4.3. Rezolvăm numeric problema cavității antrenată de un perete. Această problemă constă dintr-o cavitate pătrată care conține un pătrat solid. În consecință, avem o frontieră interioară (anume, frontiera pătratului solid intern) și o frontieră exterioară (anume, pereții exteriori ai cavității). Pereții interiori sunt considerați fixați. Pereții exteriori alunecă cu viteze constante diferite. Mai mult, domeniul delimitat de frontiera exterioară și interioară este umplut cu un mediu poros și saturat de un fluid vâscos incompresibil Newtonian, ce este modelat de sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman (vezi Relația (4.1.1)). Configurația este furnizată în Figura 4.1. Conținutul acestui capitol urmărește rezultatele obținute în lucrarea [8].

Remarcăm că abordările noastre anterioare din Capitolul 2 și Capitolul 3 s-au concentrat pe obținerea unei soluții unice pentru problemele noastre de tip transmisie. Într-adevăr, am folosit teoria potențialului pentru a construi o soluție pentru problemele liniare. Am folosit și teorema punctului fix de Banach pentru a obține o soluție în cadrul neliniar. În plus, am văzut că putem obține o soluție la unele probleme cu valori pe frontieră prin extragerea acesteia dintr-o problemă de transmisie. Prezentăm o altă abordare pentru găsirea unei soluții pentru o problemă cu valori pe frontieră care are rădăcini în unele metode care provin din analiza numerică.

În acest paragraf, să menționăm câteva lucrări care se ocupă de problema fluxului într-o cavitate antrenată de un perete. În primul rând, să subliniem contribuția lui Ghia, Ghia și Shin [39]. Autorii au obținut rezultate numerice pentru fluxul antrenat într-o cavitate pătrată. Aceste rezultate oferă un caz de testare util prin care pot fi verificate alte metode numerice. În [69], autorii remarcă faptul că problema fluxului într-o cavitate antrenată de un perete este o problemă de test, în două sau trei dimensiuni, prin care pot fi validate sau invalidate diverse scheme numerice. Atractivitatea unei astfel de probleme constă în geometria ei simplă și structura sa percepută a fluxului. Gutt și Groșan [44] au investigat numeric o problemă mixtă cu valori pe frontieră Dirichlet-Robin pentru sistemul Darcy-Brinkman cadrul problemei fluxului antrenat de un perete într-o cavitate poroasă. De asemenea, ei analizează influența diferiților parametri asupra fluxului fluidului.

4.1 Studiul numeric al problemei mișcării fluide într-o cavitate bidimensională antrenată de un perete cu condiția de alunecare pe frontieră de tip Navier, în prezența unui corp solid

4.1.1 Enunțarea problemei și observații

Să descriem modelul matematic pentru problema noastră, a fluxului de fluid într-o cavitate în dimensiune doi, antrenată de un perete, cu condiție de alunecare Navier pe frontieră, în prezența unui obstacol solid. Scopul nostru este acela de a studia fluxul unui fluid vâscos incompresibil Newtonian într-un mediu poros într-un domeniu Lipschitz special, notat cu D_- , precum cel din Figura 4.1. Considerăm condiții Dirichlet pe frontiera interioară și condiții Robin pe frontiera exterioară. Să descriem geometria problemei noastre. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o cavitate pătrată de lungime L care conține un obstacol solid, notat cu D_+ , de lungime l astfel încât $l < L$. Să definim $D_- := D \setminus D_+$. Frontiera interioară, notată cu Γ_+ este considerată fixă, iar frontiera exterioară Γ_- , constă din patru pereți $\Gamma_-^t, \Gamma_-^l, \Gamma_-^b, \Gamma_-^r$ care alunecă cu viteze constante, dar diferite (vezi Figura 4.1).

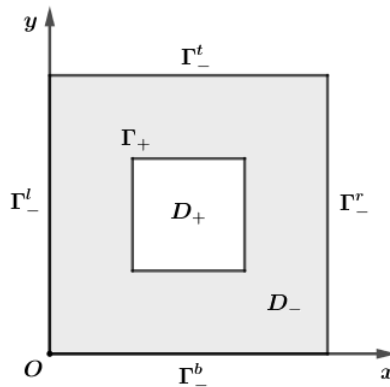


Figura 4.1: Cavitatea poroasă cu un bloc intern solid

4.1.2 Modelul matematic al problemei

Înăuntrul cavității poroase, anume, Fig. 4.1, fluxul fluidului este descris de sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman (a se vedea, de exemplu, [3], [43], [109]). Pe frontiera exterioară Γ_- , impunem condiția de alunecare Navier care este o condiție de tip Robin pe frontieră (vezi, [48], [92]) și pe frontiera interioară Γ_+ , impunem condiții Dirichlet pe frontieră. Modelul matematic al problemei noastre este

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_- - \frac{\kappa}{K} \mathbf{u}_- - \frac{\kappa}{\nu \rho} \nabla \pi_- = \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}_- \cdot \nabla) \frac{\mathbf{u}_-}{\kappa} + \frac{\kappa C_f}{\nu \sqrt{K}} |\mathbf{u}_-| \mathbf{u}_- & \text{în } D_- \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_- = 0 & \text{în } D_- \\ \mathbf{u}_- = \mathbf{g}_1 & \text{pe } \Gamma_+ \\ \mathbf{u}_- + s_l \frac{\partial \mathbf{u}_-}{\partial \mathbf{n}_-} = \mathbf{g}_2 & \text{pe } \Gamma_- \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Pentru a efectua analiza adimensională, să înlocuim variabilele dimensionale din (4.1.1) cu variabilele adimensionale

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad S_l = \frac{s_l}{L}, \quad U_x = \frac{u_x}{u^t}, \quad U_y = \frac{u_y}{u^t}, \quad \Pi = \frac{\pi}{\rho(u^t)^2}.$$

. Ca urmare, obținem

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U}_- - \frac{\kappa}{Da} \mathbf{U}_- - Re \kappa \nabla \Pi = Re (\mathbf{U}_- \cdot \nabla) \frac{\mathbf{U}_-}{\kappa} + \frac{Re \kappa C_f}{\sqrt{Da}} |\mathbf{U}_-| \mathbf{U}_- & \text{în } D_- \\ \operatorname{div} \mathbf{U}_- = 0 & \text{în } D_- \\ \mathbf{U}_- = (0, 0) & \text{pe } \Gamma_+ \\ \mathbf{U}_- + S_l \frac{\partial \mathbf{U}_-}{\partial \mathbf{n}_-} = \mathbf{G}_2 & \text{pe } \Gamma_- \end{cases} \quad (4.1.2)$$

și

$$\mathbf{G}_2 = \begin{cases} (1, 0) & \text{pe } \Gamma_-^t \\ (0, U^r) & \text{pe } \Gamma_-^r \\ (U^b, 0) & \text{pe } \Gamma_-^b \\ (0, U^l) & \text{pe } \Gamma_-^l. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

În analiza noastră, considerăm funcția de curent Ψ , care este dată de

$$U_x = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad U_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}. \quad (4.1.4)$$

Folosim această funcție pentru a calcula valoarea maximă a funcției de curent atinsă în interiorul cavității, Ψ_{max} . De asemenea, utilizăm funcția de curent Ψ pentru a vizualiza fluxul fluidului, care se observă în forma liniilor de curent.

4.1.3 Metoda numerică și validarea modelului

Folosim software-ul COMSOL Multiphysics bazat pe element finit (vezi [110]) pentru a rezolva sistemul (4.1.2) împreună cu ecuația

$$\Delta \Psi = \frac{\partial U_x}{\partial Y} - \frac{\partial U_y}{\partial X}, \quad (4.1.5)$$

Să observăm că ecuația (4.1.5) este obținută din relația (4.1.4).

Pentru a discretiza domeniul din Figura 4.1, considerăm un free quad mesh. Mesh-ul a fost construit astfel. Începem cu un număr fix de elemente, N , care sunt de fiecare parte a lui Γ_- .

Pe partea frontierei Γ_+ avem $N \frac{L}{l}$ elemente. Dimensiunea maximă a unui element din interiorul cavității este egală cu $\frac{1}{N}$. Pentru a obține o soluție numerică, rezolvitorul nelinier iterează până când eroarea relativă este mai mică decât $\epsilon = 10^{-6}$.

În continuare, efectuăm un test de convergență pentru valoarea maximă a funcției de curent, Ψ_{max} , în funcție de nivelul de rafinare a mesh-ului. Atunci, pentru problema noastră (4.1.2) împreună cu (4.1.5) avem următoarele setări implicite

$$L = 1, \quad l = 0.4, \quad \kappa = 0.3, \quad Re = 100, \quad Da = 0.01, \quad U^r = U^b = -0.1, \quad U^l = 0.1. \quad (4.1.6)$$

În vederea setărilor din (4.1.6) am obținut Tabela 4.1, care conține valorile calculate pentru Ψ_{max} pentru diferite valori ale lui N . Din Tabela 4.1 reiese că alegerea mesh-ului care conține 80 elemente pe fiecare parte a lui Γ_- din Figura 4.1 este potrivit pentru simulările noastre.

N (elemente pe partea exterioară)	Ψ_{max}	Eroarea Ψ_{max}
20	0.04366673	
40	0.04358508	0.000081465
60	0.04358398	0.0000011
80	0.04358332	0.00000066

Tabela 4.1: Dependența de mesh

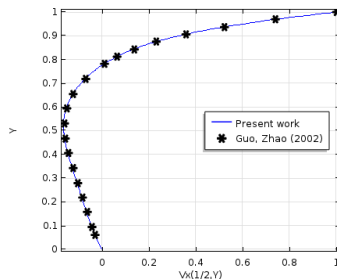
Să comparăm soluțiile noastre numerice cu rezultate stabilite anterior pentru a valida abordarea noastră. În acest scop, avem următoarele setări

$$U^r = U^b = U^l = 0, \quad \mu = 1, \quad l = 0, \quad S_l = 0, \quad (4.1.7)$$

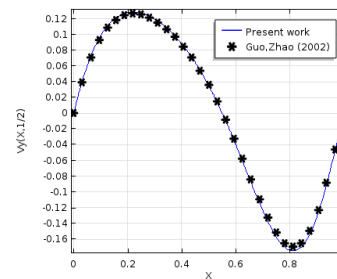
care este cazul cavității poroase pătrate, antrenată de un perete, fără obstacol și cu condiție "no-slip" pe frontieră. În continuare, pentru valorile

$$\kappa = 0.1, \quad Re = 10, \quad Da = 0.01, \quad (4.1.8)$$

reprezentăm componenta x a vitezei, U_x , de-a lungul liniei verticale ce trece prin centrul cavității și componenta y a vitezei, U_y , de-a lungul liniei orizontale ce trece prin centrul cavității. Comparăm profilele de viteză obținute pe care le-am determinat cu datele obținute în [43]. Ambele grafice din Figura 4.2 arată un acord bun al rezultatelor obținute.



(a) U_x de-a lungul liniei centrale verticale



(b) U_y de-a lungul liniei centrale orizontale

Figura 4.2: Componentele vitezei de-a lungul liniilor centrale, verticală și orizontală, ale cavității pătrate, comparate cu [43].

4.1.4 Rezultate și discuții

Ne propunem să determinăm impactul lungimii de alunecare adimensională, S_l , asupra fluxului fluidului înăuntrul cavității poroase. În acest scop, setăm parametrii

$$l = 0.4, \quad \kappa = 0.3, \quad Re = 100, \quad Da = 0.01, \quad U^r = U^b = -0.1, \quad U^l = 0.1 \quad (4.1.9)$$

și studiem proprietățile fluxului pentru $S_l \in (0, 0.003)$.

S_l	Ψ_{max}
0	0.04371041
0.0005	0.04317579
0.001	0.04290319
0.0015	0.04262631
0.002	0.04234790
0.0025	0.04206969
0.003	0.04179283

Tabela 4.2: Valorile maxime ale funcției de curent pentru diferite valori S_l

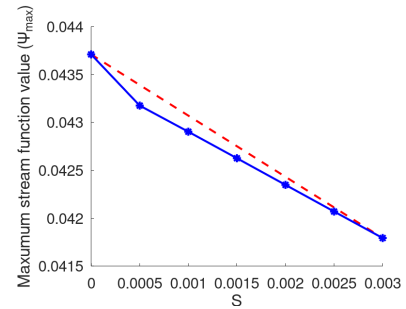


Figura 4.3: Efectul lungimii de alunecare adimensională

Valorile lui Ψ_{max} calculate în interiorul cavității pentru diferite valori ale parametrului adimensional $S_l \in (0, 0.003)$ sunt afișate în Tabela 4.2. Aceste valori sunt de asemenea reprezentate în Figura 4.3. Figura 4.3 arată scăderea liniară a funcției Ψ_{max} între $S_l = 0.0005$ și $S_l = 0.003$. Deplasarea fluidului în interiorul cavității poroase este evidențiată în Figura 4.4. O remarcă importantă care poate fi făcută aici este că variația parametrului de alunecare adimensională S_l nu schimbă brusc fluxul de curgere. Acest lucru poate fi văzut în similaritatea tuturor celor trei imagini din figura 4.4. Chiar dacă liniile de curent și profilul de viteză sunt diferite în fiecare caz, aceste diferențe sunt neglijabile și nu atât de evidente.

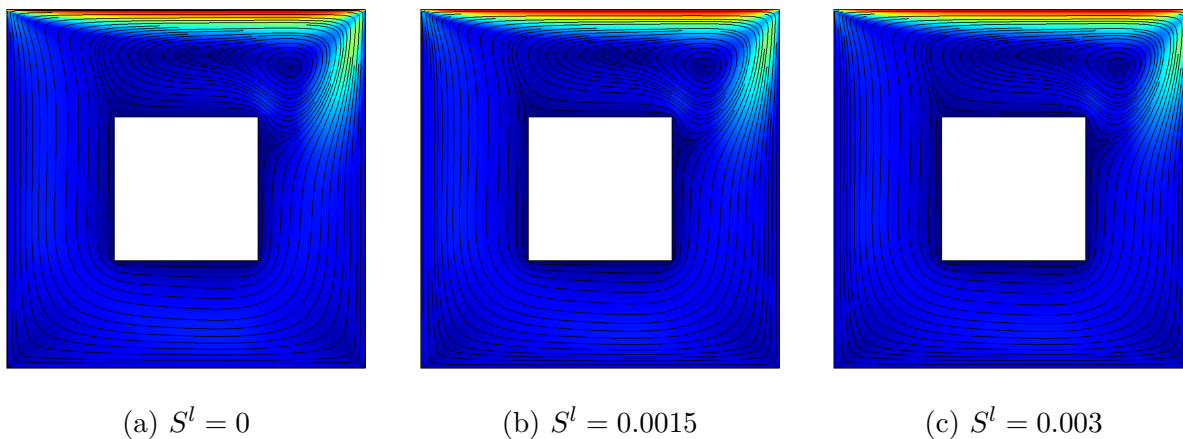


Figura 4.4: Liniile de curent și profilele de viteză pentru valori diferite ale parametrului de alunecare S_l .

Continuăm analiza noastră și setăm $S_l = 0.0005$. Considerăm

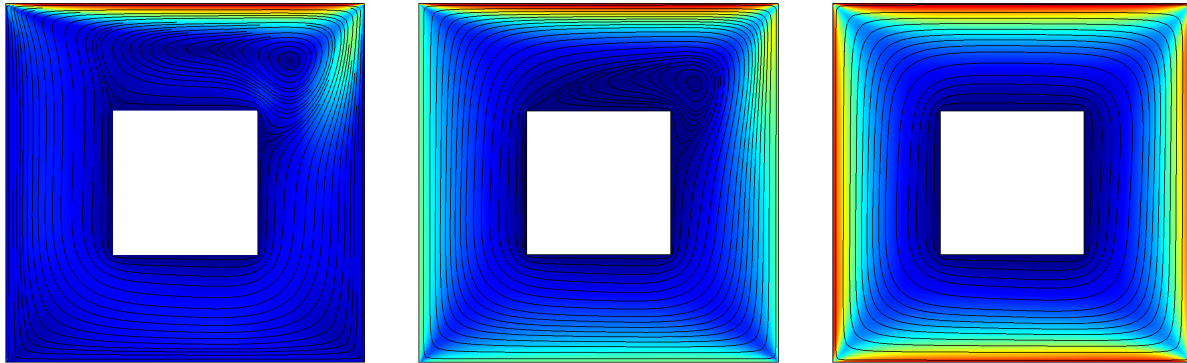
$$U^r = U^b = U, \quad U^l = -U, \quad (4.1.10)$$

unde U este o constantă care ia valorile

$$U = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, \quad (4.1.11)$$

respectiv. Prin urmare, dorim să vedem cum se comportă fluxul de fluid în interiorul cavității, dacă viteza pereților verticali și a celui de jos crește față de viteza peretelui superior. Ceilalți parametri rămân la fel ca în relația (4.1.9). În această situație, liniile de curent și profilele de viteză pentru particulele de fluid pentru $U = 0.1, 0.5, 0.9$ sunt date în Figura 4.5. Să remarcăm că, pentru valori

crescătoare ale lui U , centrul vortexului secundar, care este inițial aproape de partea superioară, tinde să se apropie de centrul cavității, fiind în cele din urmă asimilat de vortexul principal care se rotește în jurul obstacolului. Acest lucru se datorează echilibrului de forțe generat de cei patru pereți dispuși simetric. În Tabela 4.3 observăm variația lui Ψ_{max} , în timp ce minimumul său este atins pentru $U = 0.3$. După $U = 0.3$, Ψ_{max} tinde să crească pe măsură ce U se apropie de viteza peretelui superior, atingând o valoare maximă pentru $U = 0.9$.



(a) $U = 0.1$

(b) $U = 0.5$

(c) $U = 0.9$

Figura 4.5: Liniile de curent și profilele de viteză pentru $S_l = 0.0005$ și $U = 0.1, 0.5, 0.9$.

U	Ψ_{max}
0.1	0.04317579
0.3	0.04286458
0.5	0.04294202
0.7	0.04330634
0.9	0.04392932

Tabela 4.3: Valorile maxime ale funcției de curent pentru variația lui U

Direcții de cercetare ulterioare

Dorim să evidențiem câteva direcții de cercetare care ar putea fi explorate în urma acestei teze.

Extinderea rezultatelor obținute

Ca o primă direcție, ne propunem să extindem rezultatele inițiale care au fost prezentate în această teză la spații de funcții mai generale precum spații Sobolev cu bază în L^p , $p \in (1, \infty)$, spații Besov, spații Bessel potențiale, spații Triebel-Lizorkin. De asemenea, putem lua în considerare problemele noastre cu valori pe frontieră în anumite domenii, a căror geometrie este mai generală sau mai complexă, de exemplu, domenii poliedrale. În plus, intenționăm să obținem astfel de rezultate utilizând alte tehnici, cum ar fi metode variaționale și teoria indexului punctului fix. Mai mult, putem urmări un studiu practic precum investigarea corelației dintre parametri fizici (de exemplu, numărul lui Reynolds) și existența vortexurilor în unele curgeri de fluide vâscoase în prezența obstacolelor solide. Într-un astfel de studiu, putem formula probleme cu valori pe frontieră similare cu cele tratate în această teză.

Coeficienți variabili

În ultimii ani, au fost dedicate multe studii (vezi, spre exemplu, [59], [60], [67]) generalizării ecuațiilor Stokes. Anume, în loc de operatorul lui Laplace, se poate lua în considerare un alt operator diferențial, eliptic de ordinul doi, în formă de divergență. În consecință, această abordare conduce la sistemul Stokes anizotrop și, respectiv, la sistemul Navier-Stokes anizotrop. Aceste generalizări țin cont de posibilitatea modelării unui fluid incompresibil cu vâscozitate variabilă.

Această nouă perspectivă conduce la ideea viitoare de a studia probleme cu valori pe frontieră pentru ecuații mai generale Brinkman sau Darcy-Forchheimer-Brinkman, în diverse configurații, în timp ce toți coeficienții care apar în aceste sisteme sunt variabili (a se vedea, de exemplu, [66]).

Modele de medii poroase bidisperse (multidisperse)

O altă posibilă direcție care poate fi urmărită este studiul teoretic și/sau numeric al mediilor poroase bidisperse.

Autorii lucrării [65] au dezvoltat o analiză teoretică pentru un sistem general de ecuații de tip Navier-Stokes cuplate, în cazul incompresibil, într-un domeniu mărginit. Autorii au considerat o condiție Dirichlet omogenă pe frontiera domeniului. Abordarea acestora se bazează pe modelul propus de Nield și Kuznetsov în lucrările [87] și [88]. Kohr și Precup [66] au studiat o clasă generală de ecuații de tip Navier-Stokes anizotrope cuplate cu coeficienți variabili care descriu fluxurile de fluide vâscoase în medii poroase anizotrope multidisperse. Mai mult, autorii au luat în considerare

și termeni neomogeni de tip reacție în cazul incompresibil. Aceștia au folosit o tehnică variațională și teoria indexului punctului fix pentru a obține rezultate de existență.

Lucrările [65] și [66] sugerează o posibilă direcție de cercetare, aceea de investigare a altor modele care apar în studiul fluxurilor în medii poroase anizotrope bidisperse (sau multidisperse) cu scopul de a obține rezultate de existență pentru alte probleme cu valori pe frontieră asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale corespunzătoare.

Mai mult, un alt punct de explorare poate fi diversificarea metodelor numerice care pot fi folosite în studiul problemelor cu valori pe frontieră sugerate de aplicațiile în mecanica fluidelor și medii poroase. Să menționăm că, pe lângă abordările clasice ca metode cu diferențe finite (spre exemplu, folosite în [42]), metoda volumelor finite, există rezolvitoare puternice de ecuații cu derivate parțiale, cum ar fi FreeFem++, Ansys, Comsol, ce pot fi folosite pentru a obține rezultate numerice pentru studiile viitoare pentru diferite probleme cu valori pe frontieră.

Probleme cu valori pe frontieră pe varietăți

În cele din urmă, dorim să precizăm că rezultatele incluse în teză au fost toate obținute în cadrul euclidian \mathbb{R}^n . Există, de asemenea, multe lucrări dedicate investigării problemelor cu valori pe frontieră pe varietăți compacte (vezi, spre exemplu, [57], [63], [67], [83], [84]). Un pas firesc ar fi să luăm în considerare probleme cu valori pe frontieră, similare cu cele tratate în această teză, în cadrul varietăților riemanniene compacte sau a varietăților riemanniene necompacte.

Mai recent, a fost dezvoltat un nou concept. Dorim să evidențiem contribuția autorilor Kohr, Nistor și Wendland în [62], în care au obținut rezultatele necesare pentru a introduce și investiga potențiale de strat pe varietăți cu capete conice sau cilindrice. Autorii au introdus clase de operatori pseudodiferențiali, care sunt definiți pe aceste varietăți, anume operatori „invarianti la translație la infinit” și „esențiali invarianti la translație” și au studiat proprietățile acestor clase, urmărind aplicațiile acestora pentru sistemul Stokes. Ca o direcție viitoare de cercetare care poate fi urmată, lucrarea [62] (see also [82]) oferă o deschidere pentru analiza unor probleme cu valori pe frontieră pentru alte sisteme de ecuații cu derivate parțiale eliptice în cadrul varietăților cu capete cilindrice.

Concluzii

Scopul acestei teze este de a furniza rezultate de existență și unicitate pentru probleme cu valori pe frontieră de tip transmisie pentru anumite sisteme eliptice cu coeficienți constanți și coeficienți variabili. Astfel de sisteme pot fi găsite în domeniul mecanicii fluidelor, în timp ce altele sunt implicate în anumite modele de medii poroase. Problemele de tip transmisie menționate mai sus sunt investigate în context euclidian folosind mijloacele teoriei potențialului și metodele punctului fix și completăm rezultatele teoretice cu o investigație numerică a unei probleme de valoare la limită.

Începem prin a descrie toate noțiunile pe care le folosim de-a lungul acestei teze. Introducem operatorul urmă (Gagliardo) în spațiile Sobolev clasice, precum și în spațiile Sobolev ponderate. Analizăm ecuațiile Stokes, Brinkman și Brinkman generalizate și introducem operatorii de derivare conormală asociați acestor ecuații. Pentru sistemele Stokes și Brinkman, furnizăm soluțiile lor fundamentale, introducem potențialele de simplu strat, de dublu strat și de volum asociate acestora. Pentru fiecare dintre aceste potențiale am furnizat proprietățile lor de mapare, relațiile lor de salt și condițiile lor de creștere la infinit.

Următorul capitol se referă la rezultatele de bine-punere pentru problema de transmisie pentru sisteme de ecuații cu derivate parțiale liniare. În primul rând, avem un rezultat de bine-punere pentru problema Dirichlet exterioară pentru sistemul Brinkman în \mathbb{R}^3 (vezi Teorema 2.1.2). În continuare, avem un rezultat de bine-punere pentru problema de transmisie pentru sistemele Brinkman generalizat și Stokes în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3 (vezi Teorema 2.2.2). Un alt rezultat de bine-punere pentru problema de transmisie pentru sistemele Brinkman generalizat și Brinkman clasic este, de asemenea, obținut în domenii Lipschitz complementare în \mathbb{R}^3 (vezi Teorema 2.3.1). Mai mult, avem un rezultat de bine-punere pentru problema Robin-transmisie pentru sistemul Brinkman clasic (vezi Teorema 2.4.1). De asemenea, arătăm că, problema de tip limită Robin-transmisie pentru sistemul Brinkman clasic este, de asemenea, bine-pusă (vezi Teorema 2.4.2) și, în consecință, obținem un rezultat de existență și unicitate pentru problemei Robin-Dirichlet pentru sistemul Brinkman (vezi Corolar 2.4.3).

Următorul capitol conține generalizarea sistemului Darcy-Forchheimer-Brinkman și o lemă utilă. Aici, avem un rezultat de bine-punere pentru problema de transmisie pentru sistemele Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat și Stokes în spații Sobolev ponderate în \mathbb{R}^3 (vezi Teorema 3.2.1). În continuare, avem un rezultat de bine-punere pentru problema de transmisie pentru sistemele Darcy-Forchheimer-Brinkman generalizat și Brinkman în \mathbb{R}^3 (vezi Teorema 3.3.1). De asemenea, obținem un alt rezultat de bine-punere pentru problema Robin-transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman clasic (vezi Teorema 3.4.1). În plus, problema de tip limită Robin-transmisie pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman clasic este de asemenea bine-pusă (vezi teorema 3.4.2) și acest rezultat oferă, de asemenea, un rezultat de existență pentru problema Robin-Dirichlet pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman (vezi Corolarul 3.4.3).

Ultimul capitol constă într-o investigație numerică pentru problema fluxului într-o cavitate anenată de un perete mișcător în două dimensiuni pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman.

Considerăm condiții de tip Dirichlet pe peretele interior și condiții de tip Robin pe peretele exterior. Analizăm impactul lungimii de alunecare adimensională asupra comportamentului fluxului de fluid în interiorul cavității poroase.

Bibliografie - Lista Selectivă

- [1] Adams, R.A., Fournier, J.J.F., *Sobolev Spaces*, Academic Press, 2003. 14, 19, 21
- [2] Agranovich, M.S., *Sobolev Spaces, Their Generalizations and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains*, Springer International Publishing, Cham, 2015. 14, 19
- [3] AlAmiri, A.M., *Implication of placing a porous block in a mixed-convection heat-transfer, lid-driven cavity heated from below*, Journal of Porous Media, **16**(4), 2013, 367–380. 11, 64
- [4] Albişoru, A.F., *A note on a transmission problem for the Brinkman system and the generalized Darcy-Forchheimer-Brinkman system in Lipschitz domains in \mathbb{R}^3* , Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **64**(3), 2019, 399-412. **WOS-ESCI**. 12, 53, 56
- [5] Albişoru, A.F., *On transmission-type problems for the generalized Darcy-Forchheimer-Brinkman and Stokes systems in complementary Lipschitz domains in \mathbb{R}^3* , Filomat, **33**(11), 2019, 3361-3373. **ISI**, **IF**(November 2022): **0.988**. 12, 53, 55
- [6] Albişoru, A.F., *A layer potential analysis for transmission problems for Brinkman-type systems in Lipschitz domains in \mathbb{R}^3* , Mathematische Nachrichten, **292**(9), 2019, 1876-1896. **ISI**, **IF**(November 2022): **1.199**. 11, 25, 36, 38, 42, 43
- [7] Albişoru, A.F., *A Poisson Problem of Transmission-type for the Stokes and Generalized Brinkman Systems in Complementary Lipschitz Domains in \mathbb{R}^3* , Taiwanese Journal of Mathematics, **24**(2), 2020, 331-354. **ISI**, **IF**(November 2022): **0.87**. 11, 36, 39, 40, 41
- [8] Albişoru, A.F., Kohr, M., Papuc, I., Wendland, W.L., *On some Robin-transmission problems for the Brinkman system and a Navier-Stokes type system*, Mathematical Methods in Applied Sciences, DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.10170>, 2024, published online: May 2024. **ISI**, **IF**(June 2023): **2.9**. 11, 12, 36, 44, 51, 53, 63
- [9] Alliot, F., Amrouche, C., *The Stokes problem in \mathbb{R}^n : An approach in weighted Sobolev spaces*, Math. Models Meth. Appl. Sci., **9**, 1999, 723-754. 8
- [10] Alliot, F., Amrouche, C., *On the regularity and decay of the weak solutions to the steady-state Navier-Stokes equations in exterior domains*, in Applied Nonlinear Analysis (Sequeira, A., da Veiga, H.B., Videman, J.H. (eds)), Springer, Boston, MA, 2002. 8
- [11] Alliot, F., Amrouche, C., *Weak solutions for the exterior Stokes problem in weighted Sobolev spaces*, Math. Meth. Appl. Sci., **23**, 2000, 575-600. 8

- [12] Amrouche, C., Girault, V., Giroire, J., *Dirichlet and Neumann exterior problems for the n -dimensional Laplace operator. An approach in weighted Sobolev spaces*, J. Math. Pures Appl., **76**, 1997, 55-81. 7
- [13] Amrouche, C., Nguyen, H., *L^p -weighted theory for Navier-Stokes equations in exterior domains*, Commun. Math. Anal., **8**(1), 2010, 41-69. 8
- [14] Amrouche, C., Rodríguez-Bellido, M.A., *The Oseen and Navier-Stokes equations in a non-solenoidal framework*, Math. Meth. Appl. Sci., **39**, 2016, 5066–5090. 53
- [15] Baber, K.I., *Coupling Free Flow and Flow in Porous Media in Biological and Technical Applications: From a Simple to a Complex Interface Description*, PhD Thesis, 2014, Department of Hydromechanics and Modelling of Hydrosystems, University Stuttgart, Germany. 36, 43
- [16] Chkadua, O., Mikhailov, S.E., Natroshvili, D., *Localized Boundary-Domain Singular Integral Equations Based on Harmonic Parametrix for Divergence-Form Elliptic PDEs with Variable Matrix Coefficients*, Integr. Equ. Oper. Theory, **76**, 2013, 509-547. 37
- [17] Choe, H.J., Kim, H., *Dirichlet problem for the stationary Navier-Stokes system on Lipschitz domains*, Commun. Partial Differ. Equ. **36**, 2011, 1919-1944. 53
- [18] Choi, J., Dong, H., Kim, D., *Conormal derivative problems for stationary Stokes system in Sobolev spaces*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **38**, 2018, 2349-2374. 7, 9
- [19] Choi, J., Yang, M., *Fundamental solutions for stationary Stokes systems with measurable coefficients*, J. Diff. Equ., **263**, 2017, 3854-3893. 9
- [20] Costabel, M., *Boundary Integral operators on Lipschitz domains: elementary results*, SIAM J. Math. Anal. **19**, 1998, 613-626. 21, 23, 24, 36
- [21] Dahlberg, B.E.J., Kenig, C.E., Verchota, G.C., *Boundary value problems for the systems of elastostatics in Lipschitz domains*, Duke Math. J., **57**(3), 1988, 795-818. 7
- [22] Dahlberg, B.E.J., Kenig, C.E., *L^p estimates for the three-dimensional systems of elastostatics on Lipschitz domains*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics (Cora Sadoesky, ed.), vol. 122, Dekker, New York, 1990, 631-634. 7
- [23] Dalla Riva, M., Lanza de Cristoforis, M., Musolino, P., *Singularly Perturbed Boundary Value Problems. A Functional Analytic Approach*, Springer, Cham, Switzerland, 2021. 36, 45, 46
- [24] Dauge, M., *Stationary Stokes and Navier-Stokes systems on two- or three-dimensional domains with corners. Part I: Linearized equations*, SIAM J. Math. Anal., **20**(1), 1989, 74-97. 8
- [25] Deuring, P., *The resolvent problem for the Stokes system in exterior domains: an elementary approach*, Math. Meth. Appl. Sci., **13**, 1990, 335-349. 8
- [26] Dindoš, M., Mitrea, M., *The Stationary Navier-Stokes System in Nonsmooth Manifolds: The Poisson Problem in Lipschitz and C^1 Domains*, Arch. Ration. Mech. Anal., **174**, 2004, 1-47. 9
- [27] Dong, H., Kim, D., *L_q -Estimates for stationary Stokes system with coefficients measurable in one direction*, Bulletin of Mathematical Sciences, **9**(1), 2019, 1950004, 30 pages. 10

- [28] Dong, H., Kim, D., *Weighted L_q -estimates for stationary Stokes system with partially BMO coefficients*, Journal of Differential Equations, **264**(7), 2018, 4603-4649. 9
- [29] Duffy, B.R., *Flow of a liquid with an anisotropic viscosity tensor*, J. Nonnewton. Fluid Mech., **4**, 1978, 177-193. 9
- [30] Escauriaza, L., Mitrea, M., *Transmission problems and spectral theory for singular integral operators on Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **216**, 2004, 141-171. 7, 37
- [31] Fabes, E., Kenig, C., Verchota, G., *The Dirichlet problem for the Stokes system on Lipschitz domain*, Duke Math-J. **57**, 1988, 769-793. 7, 36
- [32] Fabes, E., Mendez, O., Mitrea, M., *Boundary layers on Sobolev–Besov spaces and Poisson’s equation for the Laplacian in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. **159**, 1998, 323-368. 7
- [33] Farwig, R., Sohr, H., *Weighted L^q -theory for the Stokes resolvent in exterior domains*, J. Math. Soc. Jpn., **49**, 1997, 251-288. 8
- [34] Fericean, D., Groșan, T., Kohr, M., Wendland, W.L., *Interface boundary value problems of Robin-transmission type for the Stokes and Brinkman systems on n -dimensional Lipschitz domains: applications*, Math. Meth. Appl. Sci., **36**, 2013, DOI: 10.1002/mma.2716. 37
- [35] Fericean, D., Wendland, W.L., *Layer potential analysis for a Dirichlet-transmission problem in Lipschitz domains in \mathbb{R}^n* , Z. Angew. Math. Mech., **93**(10-11), 2013, 762-776. 37
- [36] Gagliardo, E., *Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili*, Ricerche mat, **7**(1), 1958, 102-137. 21
- [37] Galdi, G.P., *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, Vol. I, II, Springer, Berlin, 1998. 53
- [38] Galdi, G.P., *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Steady-State Problems, Second Edition*, Springer, New York, 2011. 6
- [39] Ghia, U., Ghia, K.N., Shin, C.T., *High-Re Solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method*, Journal of Computational Physics, **48**, 1982, 387-411. 10, 63
- [40] Girault, V., Sequeira, A., *A well-posed problem for the exterior Stokes equations in two and three dimensions*, Arch. Ration. Mech. Anal., **114**, 1991, 313-333. 8
- [41] Groșan, T., Kohr, M., Wendland, W.L., *Dirichlet problem for a nonlinear generalized Darcy-Forchheimer-Brinkman system in Lipschitz domains*, Math. Meth. Appl. Sci. **38**, 2015, 3615-3628. 54
- [42] Groșan, T., Pătrulescu, F.O., Pop, I., *Natural convection in a differentially heated cavity filled with a Brinkman bidisperse porous medium*, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, **33**(10), 2023, 3309-3326. 11, 70
- [43] Guo, Z., Zhao S.H., *Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media*, Physical Review E, **66**, 2002, 036304. 10, 64, 66

- [44] Gutt, R., Grosan, T., *On the lid-driven problem in a porous cavity. A theoretical and numerical approach*, Applied Mathematics and Computation, **266**, 2015, 1070–1082. 11, 63
- [45] Gutt, R., *Mixed Boundary Value Problems for Nonlinear Systems in Fluid Mechanics and Porous Media*, PhD Thesis, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, 2019. 14
- [46] Gutt, R., Kohr, M., Mikhailov, S.E., Wendland, W.L., *On the mixed problem for the semilinear Darcy-Forchheimer-Brinkman PDE system in Besov spaces on creased Lipschitz domains*, Math. Meth. Appl. Sci., **40**, 2017, 7780-7829. 15
- [47] Hanouzet, B., *Espaces de Sobolev avec poids - application au probleme de Dirichlet dans un demi-espace*, Rend. Ser. Math. Univ. Padova, **46**, 1971, 227-272. 11, 20
- [48] He, Q., Wang, X.P., *Numerical study of the effect of Navier slip on the driven cavity flow*, Z. Angew. Math. Mech, **89**(10), 2009, 857–868. 64
- [49] Hsiao, G.C., Wendland, W.L., *Boundary Integral Equations: Variational Methods*, Springer, Heidelberg, 2008. 14, 22, 26, 30
- [50] Jerison, D.S., Kenig, C., *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **130**, 1995, 161-219. 21
- [51] Kohr, M., *Mathematical Methods in Fluid Mechanics*, Lecture notes, 2023-2024. 14
- [52] Kohr, M., Lanza de Cristoforis, M., Mikhailov, S.E., Wendland, W.L., *Integral potential method for a transmission problem with Lipschitz interface in \mathbb{R}^3 for the Stokes and Darcy-Forchheimer-Brinkman PDE Systems*, Z. Angew. Math. Phys. **5**, 2016, 1-30. 7, 9, 21, 22, 24, 26, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 61
- [53] Kohr, M., Lanza de Cristoforis, M., Wendland, W.L., *Boundary Value Problems of Robin Type for the Brinkman and Darcy-Forchheimer-Brinkman Systems in Lipschitz Domains*, J. Math. Fluid Mech. **16**, 2014, 595-630. 8, 43
- [54] Kohr, M., Lanza de Cristoforis, M., Wendland, W.L., *Nonlinear Neumann-Transmission Problems for Stokes and Brinkman Equations on Euclidean Lipschitz Domains*, Potential Anal. **38**, 2013, 1123-1171. 9, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 49
- [55] Kohr, M., Lanza de Cristoforis, M., Wendland, W.L., *Poisson problems for semilinear Brinkman systems on Lipschitz domains in \mathbb{R}^n* , Z. Angew. Math. Phys. **66**, 2015, 833-864. 8, 9, 53
- [56] Kohr, M., Lanza de Cristoforis, M., Wendland, W.L., *On the Robin-Transmission Boundary Value Problems for the Darcy-Forchheimer-Brinkman and Navier-Stokes Systems*, J. Math. Fluid Mech., **18**, 2016, 293-329. 9, 24, 26, 30, 33, 37, 44, 47, 51
- [57] Kohr, M., Mikhailov, S.E., Wendland, W.L., *Transmission Problems for the Navier-Stokes and Darcy-Forchheimer-Brinkman Systems in Lipschitz Domains on Compact Riemannian Manifolds*, J. Math. Fluid Mech. **19**, 2017, 203–238. 9, 37, 39, 42, 70
- [58] Kohr, M., Mikhailov, S.E., Wendland, W.L., *Dirichlet and transmission problems for anisotropic Stokes and Navier-Stokes systems with L_∞ tensor coefficient under relaxed ellipticity condition*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **41**, 2021, 4421-4460. 7, 10, 25, 35, 37

- [59] Kohr, M., Mikhailov, S.E., Wendland, W.L., *Potentials and transmission problems in weighted Sobolev spaces for anisotropic Stokes and Navier-Stokes systems with L_∞ strongly elliptic coefficient tensor*, Complex Var. Elliptic Equ., **65**, 2020, 109-140. 7, 10, 25, 35, 37, 69
- [60] Kohr, M., Mikhailov, S.E., Wendland, W.L., *Layer potential theory for the anisotropic Stokes system with variable L_∞ symmetrically elliptic tensor coefficient*, Math. Meth. Appl. Sci., **44**, 2021, 9641-9674. 7, 10, 25, 35, 37, 69
- [61] Kohr, M., Mikhailov, S.E., Wendland, W.L., *Non-homogeneous Dirichlet-transmission problems for the anisotropic Stokes and Navier-Stokes systems in Lipschitz domains with transversal interfaces*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, **61**(198), 2022, 47 pages. 53
- [62] Kohr, M., Nistor, V., Wendland, W.L., *The Stokes operator on manifolds with cylindrical ends*, Journal of Differential Equations, <https://doi.org/10.1016/j.jde.2024.06.017>, 2024. 70
- [63] Kohr, M., Pinteá, C., Wendland, W.L., *Layer Potential Analysis for Pseudodifferential Matrix Operators*, International Mathematics Research Notices, **19**, 2013, 4499-4588. 9, 37, 44, 47, 51, 62, 70
- [64] Kohr, M., Pop, I., *Viscous Incompressible Flow for Low Reynolds Numbers*, WIT Press, Southampton, 2004. 26, 27
- [65] Kohr, M., Precup, R., *Analysis of Navier-Stokes Models for Flows in Bidisperse Porous Media*, J. Math. Fluid Mech., **25**(2), 2023, 38. 10, 69, 70
- [66] Kohr, M., Precup, R., *Localization of energies in Navier-Stokes models with reaction terms*, Analysis and Applications, <https://doi.org/10.1142/S0219530524500118>, 2024. 10, 69, 70
- [67] Kohr, M., Wendland, W.L., *Variational approach for the Stokes and Navier-Stokes systems with nonsmooth coefficients in Lipschitz domains on compact Riemannian manifolds*, Calc. Var. Partial Differ. Equ., **57**, 2018, Paper No. 165, 41 pp. 10, 25, 35, 69, 70
- [68] Korobkov, M.V., Pileckas, K., Russo, R., *On the flux problem in the theory of steady Navier-Stokes equations with non-homogeneous boundary conditions*, Arch. Rational Mech. Anal., **207**, 2013, 185–213. 54
- [69] Koseff, J.R., Street, R.L., *The lid-driven cavity flow: A synthesis of qualitative and quantitative observations*, ASME J. Fluid Eng., **106**, 1984, 390-398. 63
- [70] Leray, J., *Étude de diverses équations intégrales non linéaire et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, J. Math. Pures Appl., **12**, 1933, 1–82. 53
- [71] Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., *Some problems of vector analysis and generalized formulations of boundary value problems for Navier-Stokes equations*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov, **59**, 1976, 81(116). 54
- [72] McCracken, M., *The resolvent problem for the Stokes equations on halfspace in L_p* , SIAM J. Math. Anal., **12**, 03 1981. 8
- [73] McLean, W., *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, New York, 2000. 14

- [74] Medkova, D., *Transmission problem for the Brinkman system*, Complex Var. Elliptic Equ. **59**, 2014, 1664-1678. 9, 37
- [75] Medkova, D., *Integral equations method and the transmission problem for the Stokes system*, Kragujevac J. Math. **39**, 2015, no. 1, 53-71. 9, 37, 41
- [76] Medkova, D., *Bounded solutions of the Dirichlet problem for the Stokes resolvent system*, Complex Var. Elliptic Equ., **61**, 2016, 1689-1715. 8, 37
- [77] Mikhailov, S. E., *Traces, extensions and co-normal derivatives for elliptic systems on Lipschitz domains*, J. Math. Anal. Appl. **378**, 2011, 324-342. 21, 22, 23
- [78] Mikhailov, S.E., Portillo, C.F., *Boundary-domain integral equations equivalent to an exterior mixed BVP for the variable-viscosity compressible Stokes PDEs*, Comm. Pure and Applied Analysis, **20**(3), 2021, 1103-1133. 37
- [79] Mitrea, D., Mitrea I., Mitrea M., *Geometric Harmonic Analysis V: Fredholm Theory and Finer Estimates for Integral Operators, with Applications to Boundary Problems*, Springer, Cham, Switzerland, 2023. 37
- [80] Mitrea, D., Mitrea, I., Mitrea, M., Taylor, M., *The Hodge-Laplacian: Boundary Value Problems on Riemannian Manifolds*, de Gruyter Studies in Mathematics, 2016. 9
- [81] Mitrea, D., Mitrea, M., Shi, Q., *Variable coefficient transmission problems and singular integral operators on non-smooth manifolds*, J. Integral Equations Appl., **18**, 2006, 361-397. 9
- [82] Mitrea, M., Nistor, V., *Boundary value problems and layer potentials on manifolds with cylindrical ends*, Czechoslovak Math. J., **57**(132), 4, 2007, 1151-1197. 70
- [83] Mitrea, M., Taylor, M., *Potential Theory on Lipschitz Domains in Riemannian Manifolds: Sobolev-Besov Space Results and the Poisson Problem*, J. Funct. Anal., **176**(1), 2000, 1-79. 9, 70
- [84] Mitrea, M., Taylor, M., *Navier-Stokes equations on Lipschitz domains in Riemannian manifolds*, Math. Ann., **321**, 2001, 955-987. 9, 70
- [85] Mitrea, M., Wright, M., *Boundary value problems for the Stokes system in arbitrary Lipschitz domains*, Asterisque **344** 2012, viii+241. 23, 26, 27, 28, 29, 30, 37, 47
- [86] Nield, D.A., Bejan, A., *Convection in Porous Media*, 3rd edn., Springer, New York, 2013. 6, 53
- [87] Nield, D.A., Kuznetsov, A.V., *A two-velocity two-temperature model for a bi-dispersed porous medium: forced convection in a channel*, Transp. Porous Media, **59**, 2005, 325-339. 69
- [88] Nield, D.A., Kuznetsov, A.V., *A note on modeling high speed flow in a bidisperse porous medium*, Transp. Porous Media, **96**, 2013, 495-499. 69
- [89] Power, H., *The completed double layer boundary integral equation method for two-dimensional Stokes flow*, IMA J. Appl. Math., **51**(2), 1993, 123-145. 8
- [90] Power, H., Miranda, G., *Second kind integral equation formulation of Stokes flow pas a particle of arbitrary shape*, SIAM J. Appl. Math., **47**(4), 1987, 689-698. 8

- [91] Precup, R., *Linear and semilinear partial differential equations. An introduction*, De Gruyter Textbook, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 2013. 14
- [92] Qian, T., Wang, X.P., *Driven cavity flow: from molecular dynamics to continuum hydrodynamics*, Multiscale Model. Simul., **3**(4), 2005, 749–763. 64
- [93] Rapp, B.E., *Microfluidics: Modeling, Mechanics and Mathematics*, Elsevier, Cambridge, 2017. 10
- [94] Russo, R., Tartaglione, A., *On the Robin problem for Stokes and Navier-Stokes systems*, Math. Methods Appl. Sci., **19**, 2006, 701-716. 8
- [95] Russo, R., Tartaglione, A., *On the Oseen and Navier-Stokes systems with a slip boundary condition*, Appl. Math. Letters, **29**, 2009, 674-678. 8
- [96] Russo, R., Tartaglione, A., *On the Navier problem for stationary Navier-Stokes equations*, J. Diff. Equ., **251**, 2011, 2387-2408. 8
- [97] Seregin, G., *Lecture Notes on Regularity Theory for the Navier-Stokes Equations*, World Scientific, London, 2015. 6
- [98] Shen, Z.W., *A note on the Dirichlet problem for the Stokes system in Lipschitz domains*, Proc. Amer. Math. Soc., **123**(3), 1995, 801-811. 8
- [99] Shen, Z., *Resolvent estimates in L^p for the Stokes operator in Lipschitz domains*, Arch. Ration. Mech. Anal., **205**, 2012, 395-424. 8
- [100] Sohr, H., *The Navier-Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. 6
- [101] Taylor, M., *Partial Differential Equations I, Volume 1*, Springer-Verlag New York, 1996. 14
- [102] Temam, R., *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, AMS Chelsea Publishing, Providence, 2001. 6
- [103] Triebel, H., *Interpolation Theory, Function spaces, Differential Operators*, North-Holland Mathematical Library 18, Elsevier Science, 1978. 14
- [104] Vafai, K., *Convective flow and heat transfer in variable-porosity media*, J. Fluid Mech., **147**, 1984, 233-259. 10
- [105] Varnhorn, W., *An explicit potential theory for the Stokes resolvent boundary value problems in three dimensions*, Manuscr. Math., **70**, 1991, 339-361. 36, 38
- [106] Varnhorn, W., *The Stokes equations*, Akademie Verlag, Berlin, 1994. 27, 31, 37, 48
- [107] Verchota, G., *Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **59**(3), 1984, 572-611. 7
- [108] Wloka, J.T., Rowley, B., Lawruk, B., *Boundary Value Problems for Elliptic Systems*, Cambridge University Press, 1995. 14, 22

- [109] Yang, D., Xue, Z., Mathias, S.A., *Analysis of momentum transfer in a lid-driven cavity containing a Brinkman–Forchheimer medium*, *Transport in Porous Media*, **92**, 2012, 101–118. 10, 64
- [110] COMSOL Multiphysics® v. 6.1. www.comsol.com, COMSOL AB, Stockholm, Sweden. 65