Universitatea Babeş–Bolyai din Cluj-Napoca

O NOUĂ ABORDARE PENTRU INEGALITĂȚILE DE TIP HARDY ȘI RELLICH

Teza de doctorat – rezumat

Candidat: Sándor Kajántó
Supervizor: Prof. Dr. Alexandru Kristály

2024

Cuprins

Rezumat și Publicații relevante

Rezumat

Această teză de doctorat prezintă abordări alternative ale inegalităților de tip Hardy și Rellich pe varietăți riemanniene. În ceea ce privește inegalitățile de tip Hardy, stabilim o inegalitate funcțională generică, atât în formă *aditivă* cât și *multiplicativă*, care generează inegalități bine cunoscute cât și unele cu adevărat noi. Pentru versiunea aditivă, introducem noțiunea de *perechi Riccati*, cu ajutorul cărora demonstrațiile devin mai scurte și elegante pentru mai multe inegalități funcționale celebre pe varietăți riemanniene cu curbură secțională mărginită superior, prin simpla rezolvare a unei ecuaţii diferenţiale ordinare de tip Riccati. Versiunea multiplicativă ne permite să investigăm și *principiile de incertitudine*. În ceea ce privește inegalitățile de tip Rellich, stabilim două inegalități funcționale generice pe varietăți riemanniene de același tip ca înainte. Ca aplicații, pe de o parte, demonstrăm estimări optime ale decalajului spectral pentru diverse probleme de valori proprii de ordin superior. Pe de altă parte, furnizăm extensii pentru unele inegalități de tip Rellich bine cunoscute. Aceste metode diferă de abordarea perechilor Riccati, astfel că, în final, discutăm aplicabilitatea perechilor Riccati în contextul inegalităților de tip Rellich. Eleganța abordărilor noastre constă în simplitatea lor: demonstrațiile se bazează pe argumente de convexitate și pe aplicații ale teoremelor de divergență/comparare; în plus, acestea nu necesită simetrizare. În consecință, nu este necesară validitatea conjecturei Cartan–Hadamard generalizate, ceea ce extinde aria de aplicabilitate a rezultatelor noastre.

Cuvinte cheie

Inegalități de tip Hardy, Inegalități de tip Rellich, Varietăți riemanniene,
Perechi Riccati, Estimări ale decalajului spectral, Abordare fără simetrizare.

Clasificarea pe domenii ale Matematicii (MSC 2020)

26D10, 35A23, 35P15, 35R01, 46E35, 49R05, 58C40, 58J05, 58J60.

Publicații relevante

Prezenta teză de doctorat se bazează pe următoarele articole:

[56] **S. Kajántó**, A. Kristály, I. R. Peter și W. Zhao. A generic functional inequality and Riccati pairs: an alternative approach to Hardy-type inequalities.
Math. Ann., 2024. acceptat. (a se vedea capitolul 3).
https://doi.org/10.1007/s00208-024-02827-7
Journal metrics (JCR 2022): RIS: **2.710**, AIS: **1.671**, IF: **1.4**.

[38] C. Farkas, **S. Kajántó** și A. Kristály. Sharp spectral gap estimates for higher-order operators on Cartan–Hadamard manifolds.
Commun. Contemp. Math., 2024. acceptat. (a se vedea capitolul 4).
https://doi.org/10.1142/S0219199724500135
Journal metrics (JCR 2022): RIS: **1.990**, AIS: **1.227**, IF: **1.6**.

[55] **S. Kajántó**. Rellich inequalities via Riccati pairs on model space forms.
J. Math. Anal. Appl., 531(2, Part 1):13, Paper No. 127870, 2024. (a se vedea capitolul 5).
https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127870
Journal metrics (JCR 2022): RIS: **1.088**, AIS: **0.671**, IF: **1.3**.

Următoarele articole sunt tangențial legate de teză:

[57] **S. Kajántó** și A. Kristály. Unexpected Behaviour of Flag and S-Curvatures on the Interpolated Poincaré Metric.
J. Geom. Anal., 31:10246–10262, 2021.
https://doi.org/10.1007/s12220-021-00644-x
Journal metrics (JCR 2022): RIS: **1.385**, AIS: **0.854**, IF: **1.1**.

[58] **S. Kajántó** și A. Kristály. Saturation phenomena of a nonlocal eigenvalue problem: the Riemannian case.
Optimization, 1–24, 2023.
https://doi.org/10.1080/02331934.2023.2239881
Journal metrics (JCR 2022): RIS: **1.097**, AIS: **0.708**, IF: **2.2**.

[39] C. Farkas, **S. Kajántó** și C. Varga. Lower semicontinuity of Kirchhoff-type energy functionals and spectral gaps on (sub)Riemannian manifolds.
Topol. Methods Nonlinear Anal., 61(2):743–760, 2023.
https://doi.org/10.12775/TMNA.2022.034
Journal metrics (JCR 2022): RIS: **0.685**, AIS: **0.422**, IF: **0.7**.

Convenții privind citările

Rezultatele principale ale tezei sunt *inegalități funcționale generice* care furnizează inegalități de tip Hardy și Rellich. Aceste rezultate sunt, de asemenea, prezentate în una dintre lucrările de mai sus. În aceste cazuri, furnizăm citări în următorul format:

Teorema X.Y (a se vedea [REF]).

Rezultatele secundare ale tezei sunt *aplicații* ale rezultatelor principale. Acestea implică în mod tipic extinderi și demonstrații alternative ale unor inegalități de tip Hardy și Rellich formal bine-cunoscute. Aceste rezultate sunt, de asemenea, prezentate în unul dintre articolele de mai sus; indicăm acest fapt folosind următorul format:

Teorema X.Y (a se vedea [REF])**.**

Menționăm că anumite versiuni ale rezultatelor secundare pot fi găsite și în alte publicații în afara celor menționate mai sus; referințele suplimentare sunt furnizate în textul corespunzător în următorul mod:

a se vedea Autor1, Autor2 [REF].

Citările rezultatelor auxiliare preluate din alte publicații decât cele menționate mai sus sunt furnizate în textul corespunzător, utilizând formatul din urmă. Datorită rolului lor explicativ, sunt omise citatele observațiilor, care sunt prezente parțial sau în întregime în lucrările de mai sus.

Mulțumiri

Aș dori să îmi exprim recunoștința sinceră față de Prof. dr. Alexandru Kristály pentru îndrumarea și sprijinul acordat pe parcursul studiilor mele de doctorat. Expertiza, încurajarea și implicarea sa altruistă au fost de neprețuit pentru mine și sunt recunoscător pentru oportunitatea de a învăța și de a mă dezvolta sub îndrumarea sa. De asemenea, aș dori să le mulțumesc profesorilor dr. Farkas Csaba, dr. Ioan Radu Peter și dr. Wei Zhao pentru contribuțiile lor deosebite la cercetare. Sunt, de asemenea, recunoscător membrilor comisiei de îndrumare și ai comisiei de doctorat, ajutorul lor util și constructiv au îmbunătățit semnificativ prezentarea tezei. În cele din urmă, le mulțumesc profund familiei, prietenilor și colegilor mei, al căror sprijin de încredere a fost o sursă constantă de putere și încurajare în timpul studiilor doctorale.

Cu stimă,
autorul.

Capitolul 1

Introducere

Au trecut mai mult de o sută de ani de când a apărut celebra inegalitate (unidimensională) a lui Hardy (a se vedea Hardy [52]). O versiune multidimensională a rezultatului inițial poate fi enunțată după cum urmează: Dată fiind o funcție u netedă, cu suport compact, pe $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, norma L^2 a termenului singular $u(x)/|x|$ este controlată de norma L^2 a termenului ∇u astfel

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} \, \mathrm{d}x, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Mai multe extensii și ajustări ale acestei inegalități pot fi găsite în literatura de specialitate, implicând ponderi mai generale, termeni de corecție suplimentari și/sau diverse contexte geometrice de bază; uneori în formulări alternative, denumite şi *principii de incertitudine*. În general, acestea pot fi scrise astfel:

$$\int_\Omega V |\nabla u|^p \, \mathsf{dm} \geq \int_\Omega W |u|^p \, \mathsf{dm}, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{\textbf{H}}$$

$$\left(\int_\Omega V |\nabla u|^p \, \mathsf{dm} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \overline{W} |u|^p \, \mathsf{dm} \right)^{\frac{1}{p'}} \geq \int_\Omega \widetilde{W} |u|^p \, \mathsf{dm}, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{\textbf{UP}}$$

unde $p > 1$ și $p' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p}{p-1}$ este *conjugatul* lui p; Ω este o submulţime deschisă a unui spațiu ambiant M, care ar putea fi spațiul euclidian $\mathbb{R}^n$, orice varietate riemanniană/Finsler, sau un grup stratificat; m este o măsură pe M, în timp ce $V, W, \overline{W}, \widetilde{W} \colon \Omega \to (0, \infty)$ sunt anumite potențiale, care pot conține termeni singulari.

Aceste inegalități au devenit indispensabile din punctul de vedere al aplicațiilor. Pe de o parte, soluțiile unei clase largi de probleme eliptice care implică termeni singulari se bazează pe validitatea inegalităților de tip Hardy corespunzătoare; prin urmare, ele apar în mai multe domenii ale matematicii. În special, ele joacă un rol crucial în teoria spectrală a *problemei membranei fixe*, descriind tonurile fundamentale.

Pe de altă parte, principiile de incertitudine au un rol deosebit de important în mecanica cuantică, enunţând unul dintre principiile fundamentale, și totuși surprinzătoare, ale acesteia: Dată fiind o particulă arbitrară din Univers, nu se poate determina cu precizie atât poziția, cât și impulsul acesteia, adică, cu cât îi cunoaștem cu mai multă precizie poziția, cu atât îi cunoaștem cu mai puțină precizie impulsul, și invers. În acest studiu ne vom limita la punctul de vedere matematic al acestor principii de incertitudine.

Observațiii cheie legate de inegalitățile de tip Hardy au fost făcute (în principal pentru $p = 2$ și pentru contextul euclidian), de exemplu, de către Adimurthi, Chaudhuri și Ramaswamy [1], Brezis și Marcus [16], Brezis și Vázquez [17], Devyver, Fraas și Pinchover [33], Fefferman [40], Filippas, Maz'ya și Tertikas [41, 42], Filippas și Tertikas [43], Muckenhoupt [81], Ruzhansky și Suragan [91] și Tertikas și Zographopoulos [94].

Variantele de ordin superior ale inegalității (**H**) sunt următoarele două inegalități de tip Rellich:

$$\int_\Omega U|\Delta u|^p \, \mathsf{dm} \geq \int_\Omega W|u|^p \, \mathsf{dm}, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{$\mathbf{R}_1$}$$

$$\int_\Omega U|\Delta u|^p \, \mathsf{dm} \geq \int_\Omega V|\nabla u|^p \, \mathsf{dm}, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{$\mathbf{R}_2$}$$

unde $p > 1$ și U, V, W sunt potențiale pozitive date pe Ω. Ambele inegalități de tipul ($\mathbf{R}_1$) și ($\mathbf{R}_2$) au numeroase aplicații; aici evidențiem teoria spectrală a *problemei plăcii fixate* și respectiv a *problemei deformării*. Prima problemă descrie vibrațiile dintr-o placă elastică subțire cu o margine fixată. A doua problemă studiază o placă similară care este supusă unei sarcini de compresiune. Observăm, de asemenea, că inegalitatea ($\mathbf{R}_1$) poate fi obținută prin combinarea fie ($\mathbf{R}_2$) și (**H**), fie versiunile lor alternative, în care gradientul clasic ∇u este înlocuit cu derivata radială $\nabla^{\mathrm{rad}} u = \langle \nabla u, \nabla d_{x_0} \rangle$ și d_{x_0} este distanța față de un punct fix $x_0 \in \Omega$.

În literatura de specialitate ambele probleme sunt considerate în principal în contextul euclidian pentru $p = 2$. Versiunea clasică a inegalității ($\mathbf{R}_1$) datează din anii 1950 și se datorează lui Rellich [90]. În mod surprinzător, după cum susțin autorii, versiunea corespunzătoare a inegalității ($\mathbf{R}_2$) a apărut relativ recent (în anii 2000) în lucrarea lui Tertikas și Zographopoulos [94], sugerând faptul că inegalitatea ($\mathbf{R}_2$) este mai problematică. Alte rezultate de pionierat în contextul euclidian pot fi găsite, de exemplu, în lucrările lui Davies și Hinz [31] și Mitidieri [78]. Pentru rezultate referitoare la structuri mai generale, a se vedea, de exemplu Kombe și Özaydin [61, 62] și Kristály și Repovš [70]. Discuții cuprinzătoare despre inegalitățile de tip Hardy și Rellich pot fi găsite, de asemenea, în monografiile lui Balinsky, Evans și Lewis [7], Ghoussoub și Moradifam [50] și Ruzhansky și Suragan [92].

Un rezultat de referință – referitor la problemele (**H**) și ($\mathbf{R}_2$) – a fost furnizat de Ghoussoub și Moradifam, din nou pentru $p = 2$ și în context euclidian. Pe de o parte, autorii au arătat că inegalitatea (**H**) este valabilă dacă și numai dacă (V, W) este o *pereche Bessel*. Această noțiune se bazează pe rezolvabilitatea unei ecuații diferențiale ordinare (pe scurt, EDO) liniare de tip Bessel de ordinul al doilea care conține potențialele V și W. Pe de altă parte, autorii au arătat că, în anumite condiții, inegalitatea ($\mathbf{R}_2$) este valabilă dacă și numai dacă $(U, \widetilde{V})$ este o pereche Bessel, unde $\widetilde{V}$ este un potențial care conține pe V și un termen de corecție suplimentar. Demonstrațiile se bazează în mare parte pe tehnica *descompunerii armonicilor sferice*, care funcționează perfect în cazul spațiilor cu curbură constantă (spațiul euclidian, spațiul hiperbolic și sfera), dar nu poate fi aplicată la varietăți riemanniene generale. Conceptul de perechi Bessel a fost extins pentru $p > 1$ (a se vedea Duy, Lam și Lu [35]), și are aplicații în contextul varietăților riemanniene cu curbură non-pozitivă (a se vedea Flynn, Lam, Lu și Mazumdar [45] și Berchio, Ganguly și Grillo [10]), unde se utilizează în continuare noțiunea obișnuită de perechi Bessel și argumente de comparație fină.

În această lucrare, prezentăm o abordare alternativă a inegalităților de tip Hardy și Rellich, care evită complet utilizarea descompunerii armonicilor sferice. După cum vom vedea, demonstrațiile noastre se bazează pe argumente simple de convexitate, pe utilizări multiple ale teoremelor de divergență și pe teoreme de comparație care codifică informații despre curbura varietății ambiante. În continuare, prezentăm rezultatele noastre simultan cu structura acestui studiu.

În Capitolul 2 reamintim câteva definiții și rezultate preliminare care sunt relevante pentru prezentarea noastră. În Secțiunea 2.1 enumerăm mai multe concepte și notațiile corespunzătoare acestora referitoare la varietăți riemanniene generale. În Secțiunea 2.2 prezentăm diverse noțiuni referitoare la varietăți cu curbură constantă și rezultate de comparație relevante. În Secțiunea 2.3 abordăm anumite probleme de valori proprii și estimările lor de decalaj spectral, și anume: *problema membranei fixe* (Secțiunea 2.3.1), *problema plăcii fixate* (Secțiunea 2.3.2) și *problema deformării* (Secțiunea 2.3.3). În cele din urmă, în Secțiunea 2.4 rezumăm metoda perechilor Bessel menționată anterior, şi discutăm, de asemenea, relația dintre perechile Bessel și metoda clasică a *supersoluțiilor*, cunoscută și sub numele de *abordarea Allegretto–Moss–Piepenbrink*, care derivă din lucrările lui Allegretto [4] și Moss și Piepenbrink [80].

În Capitolul 3 studiem inegalitățile lui Hardy; abordarea noastră pentru acestea este prezentată în Secțiunea 3.1: În primul rând, în Teorema 3.1, prezentăm o inegalitate funcțională generală pe varietăți riemanniene atât în formă *aditivă* cât și *multiplicativă* care se dovedesc a fi *echivalente* între ele. Ambele forme includ mai mulți parametri în afară de funcția necunoscută u; substituind parametrii concreți se obțin inegalități de tip (**H**) și, respectiv, (**UP**).

În continuare, în Secțiunea 3.1.1, facem o observație cheie: Ambele forme conțin Laplacianul unui potențial dat (codificând implicit informații despre curbura varietății), ceea ce sugerează aplicarea unui argument de comparație adecvat. Această comparație furnizează – în forma aditivă – o inegalitate diferențială ordinară (IDO) de tip Riccati, care conduce la noțiunea de *perechi Riccati* pentru anumite potențiale (a se vedea Definiția 3.2). Încorporând această noțiune în forma aditivă se obține Teorema 3.3, care se dovedește a fi extrem de eficientă în demonstrarea inegalităților de tip (**H**). Într-adevăr, pentru a demonstra o inegalitate de acest tip, este suficient să se rezolve o IDO de tip Riccati și să se aplice Teorema 3.3. În cele din urmă, în Propoziția 3.4 și Observația 3.5 arătăm că perechile Riccati extind perechile Bessel (ușor în cazul euclidian); cu toate acestea, diferența constă în principal în tehnica de bază, nu în EDO/IDO.

În Secțiunea 3.2 prezentăm demonstrații alternative simple pentru diverse inegalități funcționale de tip (**H**), folosind Teorema 3.1/(i) și Teorema 3.3. Subliniem că o parte din aceste rezultate sunt cunoscute formal în contextul euclidian. Cu toate acestea, metoda noastră le extinde şi pentru cazul *varietăților Cartan–Hadamard*, care sunt varietăți riemanniene complete, simplu conectate, cu curbură secțională non-pozitivă. Acest lucru demonstrează eficiența rezultatelor noastre principale, bazate în special pe perechi Riccati. Vom lua în considerare următoarele inegalități:

- În Secțiunea 3.2.1 prezentăm două *inegalități de tip L^p-Caccioppoli* pe varietăți riemanniene, care furnizează demonstrații alternative pentru rezultatele obținute de D'Ambrosio și Dipierro [29] (a se vedea Teorema 3.6 şi Teorema 3.8). Îmbunătățiri originale sunt, de asemenea, stabilite în cazul $p \in (1, 2]$.

- În Secțiunea 3.2.2 discutăm o serie de *inegalități de tip Hardy îmbunătățite* pe varietăți Cartan-Hadamard, inclusiv rezultatele lui Carron [19] și Kombe și Özaydin [61, 62] (a se vedea Teorema 3.9), Edmunds și Triebel [36] (a se vedea Teorema 3.12), Adimurthi, Chaudhuri și Ramaswamy [1] (a se vedea Teorema 3.13) și Brezis și Vázquez [17] (a se vedea Teorema 3.14).

- În Secțiunea 3.2.3 prezentăm *estimări spectrale* pe varietăți riemanniene. În primul rând, stabilim o demonstrație alternativă simplă a celebrului rezultat de comparație al lui Cheng pe varietăți riemanniene cu curbura secțională mărginită superior (a se vedea Teorema 3.15). În continuare, luăm în considerare binecunoscuta inegalitate Faber–Krahn și estimarea decalajului spectral McKean (a se vedea Teorema 3.16 şi Teorema 3.17). În plus, furnizăm o scurtă demonstrație a principalului rezultat spectral al lui Carvalho și Cavalcante [20] (a se vedea Teorema 3.18).

- În Secțiunea 3.2.4 stabilim o *inegalitate de interpolare* care face legătura între inegalitatea de tip Hardy și estimarea spectrală a lui McKean privind decalajul spectral pe varietăți Cartan–Hadamard, în spiritul lui Berchio, Ganguly, Grillo și Pinchover [11] (a se vedea Teorema 3.19). O modificare simplă a acestui argument furnizează, de asemenea, o scurtă demonstrație alternativă a inegalității lui Akutagawa și Kumura [3] (a se vedea Teorema 3.22).

- În Secțiunea 3.2.5 considerăm, în cazul euclidian, două *inegalități de tip Ghoussoub–Moradifam*, care depind de parametri (cf. [49]), în care ponderile sunt de tip nesingular (a se vedea Teorema 3.23). Pentru un anumit interval de parametri, extindem aceste inegalități şi pentru cazul unor varietăți Cartan–Hadamard (a se vedea Teorema 3.25).

În Secțiunea 3.3 furnizăm demonstrații alternative pentru diverse inegalități multiplicative de tip Hardy, care sunt consecințe simple ale Teoremei 3.1/(ii). Procedăm după cum urmează:

- În Secțiunea 3.3.1 stabilim un *principiu de incertitudine* optim, dependent de un parametru, pe varietăți Cartan–Hadamard, care implică principiul de incertitudine Heisenberg–Pauli–Weyl și principiul hidrogenului (a se vedea Teorema 3.27). De asemenea, stabilim un rezultat de rigiditate: Dacă principiul de incertitudine cantitativ este valabil pe o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională cu curbura Ricci mărginită inferior, atunci această varietate este izometrică cu o varietate cu curbură constantă corespunzătoare (a se vedea Teorema 3.29).

- În Secțiunea 3.3.2 prezentăm două inegalități *Caffarelli–Kohn–Nirenberg* optime pe varietăți Cartan–Hadamard (a se vedea Teoremele 3.30 & 3.31).

În Capitolul 4 ne concentrăm asupra inegalităților lui Rellich. În Secțiunea 4.1 prezentăm două inegalități funcționale generale pe varietăți riemanniene, construite pe baza argumentelor de convexitate și a teoremelor de divergență/comparare. Prima inegalitate implică un IDO de ordinul al doilea și furnizează inegalități de tipul ($\mathbf{R}_1$), pentru $p > 1$ (a se vedea Teorema 4.1). A doua inegalitate implică o inegalitate diferențială *parțială* (IDP) de ordinul al doilea și implică inegalități de tipul ($\mathbf{R}_2$), pentru $p = 2$ (a se vedea Teorema 4.2). Observăm că, pentru alegeri speciale ale parametrilor, ultima IDP se reduce la o IDO, devenind mai ușor de tratat.

În restul capitolului, sunt prezentate câteva aplicații pe varietăți Cartan–Hadamard. Aici subliniem faptul că demonstrațiile noastre *nu implică simetrizare*, prin urmare nu necesită valabilitatea *conjecturii generalizate Cartan–Hadamard*, adică valabilitatea *inegalității isoperimetrice optime* în acest context geometric. Observăm că conjectura este valabilă pentru varietăți generale Cartan–Hadamard de dimensiune $n \in \{2, 3\}$ (a se vedea Bol [14] și Kleiner [59]) și pentru varietăți cu curbură constantă în orice dimensiune (a se vedea Dinghas [34]).

În Secțiunea 4.2 stabilim variante de ordinul patru ale celebrului rezultat al decalajului spectral al lui McKean [75]. Acest rezultat afirmă că o curbură negativă puternică (atunci când curbura este mai mică sau egală decât un număr negativ) produce un decalaj spectral universal, independent de domeniu, pentru prima/principala valoare proprie a problemei membranei fixe, ceea ce este în contrast radical cu cazul euclidian.

- În Secțiunea 4.2.1 demonstrăm o estimare a decalajului spectral și *optimalitatea* sa pentru problema plăcii fixate pe varietăți Cartan–Hadamard cu curbură negativă puternică, pentru $p > 1$ (a se vedea Teorema 4.3). Observăm că aceeași estimare a fost stabilită și de Kristály [65] (pe varietăți Cartan–Hadamard care satisfac conjectura Cartan–Hadamard generalizată) și Ngô și Nguyen [83] (pe varietăți cu curbură constantă) folosind simetrizarea. În acest caz, rezultatul nostru completează cercetările existente.

- În Secțiunea 4.2.2 furnizăm o estimare *optimă* a decalajului spectral pentru problema deformării pe varietăți Cartan–Hadamard cu curbură puternic negativă, pentru $p = 2$ (a se vedea Teorema 4.4). Aceeași estimare este cunoscută pe varietăți cu curbură constantă datorită lui Ngô și Nguyen [83]. În acest caz, rezultatul nostru adaugă o nouă piesă de puzzle la imaginea de ansamblu; cu toate acestea, piesele corespunzătoare cazului general $p > 1$ lipsesc încă.

- În Secțiunea 4.2.3 stabilim estimări *optime* de ordin superior ale decalajului spectral prin simpla combinare a inegalităților noastre anterioare. Rezultatele sunt valabile pe varietăți Cartan–Hadamard cu curbură negativă puternică. Rezultatele de tip placă fixată sunt valabile pentru $p > 1$, în timp ce rezultatele de tip deformare sunt valabile pentru $p = 2$ (a se vedea Teorema 4.5 şi Teorema 4.6).

În Secțiunea 4.3 considerăm inegalități suplimentare de tip Rellich pe varietăți Cartan–Hadamard, și anume:

- În Secțiunea 4.3.1 extindem inegalitățile Rellich clasice și ponderate la varietățile Cartan–Hadamard (a se vedea Teorema 4.7 și Corolarul 4.8). Aceste rezultate sunt bine cunoscute în context euclidian (a se vedea, de exemplu, Mitidieri [79]).

- În Secțiunea 4.3.2 furnizăm variante de ordin superior ale inegalității clasice a lui Rellich pe varietăți Cartan–Hadamard (a se vedea Teorema 4.9).

- În Secțiunea 4.3.3 furnizăm alte inegalități de tip Rellich pe varietăți generale Cartan–Hadamard: Teorema 4.10 şi Teorema 4.11 sunt îmbunătățiri de tipul (**R**$_1$), al doilea rezultat este valabil pentru cazul curburii negative puternice. În cele din urmă, în Teorema 4.12 extindem inegalitatea clasică a lui Rellich de tip (**R**$_2$) la varietăți Cartan–Hadamard manifolds, dar numai în dimensiuni $n \geq 8$. Această constrângere rezultă din condiții tehnice; pentru un fenomen similar, a se vedea Kristály și Repovš [70].

În Capitolul 5 prezentăm o a doua abordare alternativă pentru stabilirea inegalităților lui Rellich pe varietăți cu curbură constantă, folosind perechile Riccati. În paralel cu prezentarea structurii acestui capitol, care conține versiunile finale ale acestei abordări și aplicațiile sale, vom descrie pe scurt procesul de dezvoltare și observațiile intermediare. Aceste informații suplimentare sunt destinate să motiveze alegerea modului de prezentare a rezultatelor noastre.

Scopul nostru inițial a fost de a dezvolta o inegalitate funcțională generală construită pe perechile Riccati, care furnizează inegalități Rellich de tip (**R**$_2$). Având o astfel de inegalitate și combinând-o cu rezultatele din Capitolul 3, care furnizează inegalități de tip (**H**), ar produce automat inegalități de tip (**R**$_1$). În mod evident, am intenționat să formulăm inegalitatea noastră în cel mai general context posibil. Ținând cont de necesitatea comparației Laplace în argumentul nostru, varietățile cu curbură secțională limitată superior păreau a fi candidați buni și în acest caz.

În timpul studiului, s-a dovedit că argumentul de convexitate adecvat necesită atât o comparație Laplace, cât și o comparație Hessiană, având direcții „opuse” una față de cealaltă. Astfel, fie se impune și o limită inferioară pentru curbura secțională, fie se iau în considerare pur și simplu varietățile cu curbură constantă. Am optat pentru cea de-a doua variantă deoarece mai multe aplicații sunt, de asemenea, formulate în acest context. În plus, în acest caz particular, rezultatele pot fi prezentate într-o modalitate mai simplă și mai accesibilă.

În Secțiunea 5.1 prezentăm abordarea noastră pentru inegalitățile lui Rellich pe varietățile cu curbură constantă. În Secțiunea 5.1.1 începem cu două definiții. În primul rând, motivați de simplitatea contextului geometric ambiant, în Definiția 5.1 introducem *perechi Riccati simplificate* incluzând același IDO, dar condiții mai simple asupra parametrilor. Apoi, în Definiția 5.2 introducem *perechi Riccati duale* care includ un IDO, care este forța motrice reală din spatele inegalităților Rellich. Observăm că ultimul IDO diferă de primul printr-o schimbare de funcție, introducerea celui de-al doilea concept este o decizie personală care sperăm că îmbunătățește prezentarea rezultatelor.

Folosind aceste concepte simplificate, am stabilit o inegalitate funcțională generală care furnizează inegalități de tipul (**R**$_2$) (a se vedea Teorema 5.3/(ii)). Din nefericire, s-a dovedit că condițiile tehnice care rezultă din argumentul de convexitate implică de obicei o constrângere de dimensiune, în mod similar cu Teorema 4.12. În acest moment, ideea derivatelor radiale a părut utilă. În primul rând, în Teorema 5.3/(i) am dezvoltat o inegalitate funcțională generală, care furnizează versiuni radiale ale inegalității ($\mathbf{R}_2$), în care gradientul este înlocuit cu derivata radială. Aici, condițiile tehnice sunt mai puțin restrictive, cel puțin nu necesită constrângeri dimensionale. În continuare, în Teorema 5.4 am stabilit o inegalitate funcțională generală care furnizează versiuni radiale ale inegalității (**H**). Observăm că, datorită inegalității Cauchy–Schwarz, această din urmă inegalitate este mai puternică decât varianta sa non-radială, adică reformularea Teoremei 3.3 în aceste contexte geometrice. De asemenea, observăm că această inegalitate nu necesită condiții suplimentare. În restul capitolului, prezentăm aplicații de tipul ($\mathbf{R}_1$) exploatând ideea de derivate radiale. Observăm că fiecare dintre inegalitățile radiale intermediare obținute admite un corespondent non-radial, a cărui condiție tehnică este de obicei mai restrictivă; pentru simplificarea prezentării, aceste inegalități sunt omise.

În Secțiunea 5.2 furnizăm aplicații ale metodei noastre în spații euclidiene; aici intenționăm să prezentăm atât punctele forte, cât și limitările abordării noastre. Pentru a face aceasta, testăm rezultatul nostru față de două inegalități demonstrate de Adimurthi, Grossi și Santra [2]. În primul rând, combinăm Teorema 5.3/(i) și Teorema 5.4 pentru a furniza o inegalitate funcțională generală (a se vedea Teorema 5.5) formulată în termeni de potențiale Bessel (o noțiune legată de perechile Bessel), care ne permite o prezentare mai simplă. În continuare, arătăm că prima inegalitate îndeplinește condițiile ultimului rezultat (a se vedea Corolarul 5.6), în timp ce a doua nu (a se vedea Observația 5.7).

În Secțiunea 5.3 aplicăm abordarea noastră la spațiile hiperbolice. În Teorema 5.8 furnizăm o inegalitate radială ca o consecință a Teoremei 5.3/(i), interpolând între inegalitățile de tip Rellich și inegalitățile de tip estimare a decalajului spectral. Pentru valorile extreme ale parametrului, obținem inegalități cunoscute (a se vedea Corolarele 5.9 şi 5.10). În Teorema 5.11 se prezintă corespondenți de ordin inferior ai Teoremei 5.8, care sunt consecințe simple ale Teoremei 5.4. În cele din urmă, în Teorema 5.13 combinăm cele două rezultate anterioare și furnizăm o inegalitate sofisticată de tip ($\mathbf{R}_1$) pe spații hiperbolice.

Capitolul 2

Preliminariile și notațiile

2.1 Varietăți generale

2.2 Varietăți cu curbură constantă

2.3 Probleme de valori proprii

2.3.1 Problema membranei fixe

2.3.2 Problema plăcii fixate

2.3.3 Problema deformării

2.4 Abordarea perechilor Bessel

Capitolul 3

Inegalități de tip Hardy pe varietăți riemanniene generale

În acest capitol, vom lua în considerare inegalitățile de tip Hardy. În § 3.1 prezentăm abordarea noastră abstractă, iar în § 3.2 & 3.3 furnizăm aplicații de tip (**H**) & (**UP**).

3.1 Inegalități funcționale generale

Primul rezultat este o inegalitate funcțională formulată în două forme *equivalente*.

Teorema 3.1 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate riemanniană completă, necompactă $n \geq 2$-dimensională. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu, $p > 1$ și fie $\rho \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ neconstant și pozitiv cu $\mathcal{H}^n_g(\rho^{-1}(\sup_\Omega \rho)) = 0$. Să presupunem că $w\colon (0, \sup_\Omega \rho) \to (0, \infty)$, $G\colon (0, \sup_\Omega \rho) \to \mathbb{R}$ și $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcții C^1 astfel încât*

$$(\mathbf{G})_{\rho,w} \ : \ G(\rho)w(\rho)^{\frac{1}{p'}}|\nabla_g \rho|^{p-1} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ și } (G(\rho)w(\rho))'|\nabla_g\rho|^p, w(\rho) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

și $H(0) = H'(0) = 0$. Inegalitățile următoare sunt valabile:

(i) (Forma aditivă) *Pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ avem*

$$\int_\Omega w(\rho)|\nabla_g u|^p \,\mathrm{d}v_g \geq p \int_\Omega \left[(G(\rho)w(\rho))'|\nabla_g\rho|^p + G(\rho)w(\rho)\Delta_{g,p}\rho\right] H(u)\,\mathrm{d}v_g + (1-p)\int_\Omega |G(\rho)|^{p'}|\nabla_g\rho|^p w(\rho)|H'(u)|^{p'}\,\mathrm{d}v_g. \tag{3.1}$$

(ii) (Forma multiplicativă) *Pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ avem*

$$\int_\Omega w(\rho)|\nabla_g u|^p \,\mathrm{d}v_g \geq \frac{\left|\displaystyle\int_\Omega \left[(G(\rho)w(\rho))'|\nabla_g\rho|^p + G(\rho)w(\rho)\Delta_{g,p}\rho\right] H(u)\,\mathrm{d}v_g\right|^p}{\left(\displaystyle\int_\Omega |G(\rho)|^{p'}|\nabla_g\rho|^p w(\rho)|H'(u)|^{p'}\,\mathrm{d}v_g\right)^{p-1}}, \tag{3.2}$$

cu condiția să existe o vecinătate a lui zero $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}$, care să satisfacă

$$H'(s) \neq 0, \forall s \in \mathcal{V}\setminus\{0\},\ \ G(t) \neq 0, \forall t \in (0, \sup_\Omega \rho) \text{ și } \mathcal{H}^n_g(|\nabla_g\rho|^{-1}(0)) = 0. \tag{3.3}$$

După cum se va vedea, ambele inegalități din Teorema 3.1 sunt *generice*, adică, pentru alegeri adecvate ale parametrilor, ele produc diverse inegalități funcționale. În continuare vom arăta că această procedură poate fi inversată: Pentru o serie de inegalități de tip Hardy se pot găsi alegeri adecvate ale parametrilor care să furnizeze demonstrații scurte/elegante pentru acestea.

3.1.1 Perechi Riccati

Să ne concentrăm asupra formei aditive (i) a Teoremei 3.1. Fie $p > 1$, observăm că dacă $H(s) = \frac{|s|^p}{p}$, pentru orice $s \in \mathbb{R}$, atunci $pH(s) = |H'(s)|^{p'} = |s|^p$. Această observație, împreună cu comparația Laplace, sugerează următoarea noțiune.

Definiția 3.2 (a se vedea [56]). Fie (M, g) o varietate riemanniană completă, necompactă $n \geq 2$-dimensională. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu, $p > 1$ și fie $\rho \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ neconstant și pozitiv cu $|\nabla_g \rho| = 1$ dv_g-a.p.t. în Ω. Se fixează funcțiile continue $L, W \colon (0, \sup_\Omega \rho) \to (0, \infty)$ și funcția $w \colon (0, \sup_\Omega \rho) \to (0, \infty)$ de clasă C^1. (L, W) este o *pereche* (p, ρ, w)*-Riccati* în $(0, \sup_\Omega \rho)$ dacă există o funcție $G \colon (0, \sup_\Omega \rho) \to \mathbb{R}$ astfel încât

(c1) $(\mathbf{G})_{\rho,w}$ are loc (a se vedea Teorema 3.1);

(c2) $\Delta_g \rho \geq L(\rho)$ în sens distribuțional în Ω, și

$$G \geq 0, \quad \text{dacă} \quad \mathcal{H}^n_g(\{x \in \Omega : \Delta_g \rho(x) > L(\rho(x))\}) \neq 0;$$

(c3) pentru fiecare $t \in (0, \sup_\Omega \rho)$ avem

$$(G(t)w(t))' + G(t)w(t)L(t) + (1-p)|G(t)|^{p'} w(t) \geq W(t)w(t). \tag{3.4}$$

O funcție G, care îndeplinește condițiile de mai sus, este *admisibilă* pentru (L, W).

O aplicație eficientă a Teoremei 3.1/(i) bazată pe conceptul de pereche Riccati poate fi enunțată după cum urmează.

Teorema 3.3 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate riemanniană completă, necompactă $n \geq 2$-dimensională. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu, $p > 1$ și fie $\rho \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ neconstant și pozitiv cu $|\nabla_g \rho| = 1$ dv_g-a.p.t. în Ω. Să presupunem că $L, W \colon (0, \sup_\Omega \rho) \to (0, \infty)$ sunt funcții continue și $w \colon (0, \sup_\Omega \rho) \to (0, \infty)$ este de clasă C^1 astfel încât (L, W) este o pereche (p, ρ, w)-Riccati în $(0, \sup_\Omega \rho)$. Atunci, pentru fiecare $u \in C^\infty_0(\Omega)$ are loc*

$$\int_\Omega w(\rho)|\nabla_g u|^p \, dv_g \geq \int_\Omega W(\rho)w(\rho)|u|^p \, dv_g. \tag{3.5}$$

Pentru a prezenta eficiența Teoremei 3.3, schițăm o scurtă demonstrație a celebrei *estimări spectrale optime a lui McKean*: Dacă (M, g) este o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională cu $n \geq 2$ și curbura secțională $\mathbf{K} \leq \kappa$ pentru un anumit $\kappa < 0$, atunci *spectrul esențial* al operatorului Laplace-Beltrami pe (M, g) este $[K_{\kappa,n}, \infty)$, unde

$$K_{\kappa,n} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{(n-1)\sqrt{-\kappa}}{2} \right)^2.$$

Într-adevăr, fixăm $x_0 \in M$ și alegem $\rho = d_{g,x_0}$, adică distanța de la x_0, precum și

$$w \equiv 1, \quad L \equiv (n-1)\sqrt{-\kappa}, \quad W \equiv (n-1)c\sqrt{-\kappa} - c^2, \quad \text{și} \quad G \equiv c,$$

pentru un anumit $c > 0$, care va fi definit ulterior. Obținem că IDO din (3.4) se verifică cu egalitate, astfel, condițiile **(c1)** și **(c3)** sunt valabile. Comparația Laplace implică $\Delta_g \rho \geq L$, prin urmare **(c2)** este de asemenea valabilă. Am obținut că (L, W) este o pereche (p, ρ, w)-Riccati, iar G este admisibilă pentru (L, W). În baza unui calcul simplu rezultă

$$\max_{c>0} \left((n-1)\sqrt{-\kappa}c - c^2 \right) = K_{\kappa,n},$$

astfel, Teorema 3.3 implică imediat estimarea spectrală necesară:

$$\int_M |\nabla_g u|^2 \,\mathrm{d}v_g \geq K_{\kappa,n} \int_M |u|^2 \,\mathrm{d}v_g, \qquad \forall u \in C_0^\infty(M).$$

În continuare, vom stabili legătura dintre perechile Riccati și Bessel. Definiția acesteia din urmă este următoarea: Fie $p > 1$, $R > 0$ și $A, B \colon (0, R) \to \mathbb{R}$ funcții, astfel încât A este de clasă C^1. (A, B) este o *pereche p-Bessel* în $(0, R)$, dacă ecuația

$$\left(t^{n-1} A(t) |y'(t)|^{p-2} y'(t) \right)' + t^{n-1} B(t) |y(t)|^{p-2} y(t) = 0 \tag{3.6}$$

are o soluție pozitivă în $(0, R)$. Acest concept este legat de perechile Riccati după cum urmează.

Propoziția 3.4 (a se vedea [56]). *Fie $R > 0$ și $w, W \colon (0, R) \to (0, \infty)$ două potențiale astfel încât w să fie de clasă C^1. Funcția $y > 0$ este o soluție a ecuației (3.6) pe $(0, R)$ pentru perechea*

$$(A, B) = (w, wW)$$

dacă și numai dacă

$$G(t) = -\frac{|y'(t)|^{p-2} y'(t)}{y(t)^{p-1}} \tag{3.7}$$

este o soluție a ecuației

$$(G(t)w(t))' + G(t)w(t)L_0(t) + (1-p)|G(t)|^{p'} w(t) = W(t)w(t), \tag{3.8}$$

în $(0, R)$, care este exact (3.4) cu egalitate și

$$L(t) = \frac{n-1}{t} = L_0(t).$$

Observația 3.5. Într-o varietate riemanniană (M, g) cu curbura secțională $\mathbf{K} \leq \kappa$ pentru un anumit $\kappa \in \mathbb{R}$, o EDO mai adecvată în definiția unei perechi p-Bessel (A, B) este, în loc de (3.6), următoarea:

$$\left(\mathbf{s}_\kappa^{n-1}(t) A(t) |y'(t)|^{p-2} y'(t) \right)' + \mathbf{s}_\kappa^{n-1}(t) B(t) |y(t)|^{p-2} y(t) = 0, \qquad \forall t \in (0, R). \tag{3.9}$$

Într-adevăr, când $\kappa = 0$, ecuația (3.9) se reduce la (3.6), în timp ce pentru $\kappa \neq 0$, densitatea $\mathbf{s}_\kappa$ codifică curbura și explică alegerea lui

$$L(t) = (n-1)\mathbf{ct}_\kappa(t) = L_\kappa(t), \qquad \forall t \in (0, R).$$

Această observație va fi crucială în unele inegalități funcționale din secțiunile următoare, care vor fi obținute prin intermediul perechilor Riccati; a se vedea, de exemplu, principiul de comparație al lui Cheng pentru prima valoare proprie din Teorema 3.15.

3.2 Aplicații I: Inegalități aditive de tip Hardy

3.2.1 Inegalități de tip Caccioppoli

Prima consecință simplă a Teoremei 3.1 este o inegalitate de tip Caccioppoli, demonstrată de D'Ambrosio și Dipierro [29, Theorems 2.1 & 3.1; Corollary 2.3].

Teorema 3.6 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate riemanniană completă, necompactă, $n \geq 2$-dimensională. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu, $p > 1$ și fie $\rho \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ neconstant și pozitiv. Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $-(p-1-\alpha)\Delta_{g,p}\rho \geq 0$ în sens distribuțional în Ω și $|\nabla_g \rho|^p \rho^{\alpha-p}, \rho^\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ avem*

$$\int_\Omega \rho^\alpha |\nabla_g u|^p \,\mathrm{d}v_g \geq \left(\frac{|p-1-\alpha|}{p}\right)^p \int_\Omega \rho^\alpha \frac{|u|^p}{\rho^p} |\nabla_g \rho|^p \,\mathrm{d}v_g. \tag{3.10}$$

O consecință imediată a Teoremei 3.6 este estimarea primei valori proprii Dirichlet a operatorului p-Laplace–Beltrami, adică a problemei membranei fixe (pentru $p > 1$). Din motive de simplitate considerăm cazul fără ponderi ($\alpha = 0$):

Corolarul 3.7 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate riemanniană completă, necompactă, $n \geq 2$-dimensională. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu mărginit, $p > 1$ și $\rho(x) = d_{g,\partial\Omega}(x)$ pentru fiecare $x \in \Omega$. Dacă $-\Delta_g \rho \geq 0$ în sens distribuțional în Ω, atunci prima valoare proprie Dirichlet a p-Laplacianului riemannian poate fi estimată astfel:*

$$\Lambda_{\mathrm{m},p}(\Omega) = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla_g u|^p \,\mathrm{d}v_g}{\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}v_g} \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \frac{1}{R_\Omega^p},$$

unde $R_\Omega = \sup_{x\in\Omega} \rho(x)$.

Folosind notația $R_\Omega = \sup_{x\in\Omega} \rho(x)$ din Corolarul 3.7, în spiritul lui Brezis și Marcus [16] și Barbatis, Filippas și Tertikas [8], furnizăm o extensie a Teoremei 3.6 cu un termen rezidual adecvat, atunci când $1 < p \leq 2$, după cum urmează.

Teorema 3.8 (a se vedea [56]). *În ipotezele din Corolarul 3.7, dacă $1 < p \leq 2$, atunci avem*

$$\int_\Omega |\nabla_g u|^p \,\mathrm{d}v_g \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{|u|^p}{\rho^p}(1 + \mathcal{R}_p(\rho)) \,\mathrm{d}v_g, \tag{3.11}$$

pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$, unde

$$\mathcal{R}_p(t) = \left(1 + \log^{-1}\left(\frac{t}{eR_\Omega}\right)\right)^{p-2} \left(1 + (2-p)\log^{-1}\left(\frac{t}{eR_\Omega}\right) + \log^{-2}\left(\frac{t}{eR_\Omega}\right)\right) - 1 \geq 0,$$

pentru fiecare $t \in (0, R_\Omega)$. În special, dacă $p = 2$, atunci avem

$$\int_\Omega |\nabla_g u|^2 \,\mathrm{d}v_g \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\rho^2} \,\mathrm{d}v_g + \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\rho^2} \log^{-2}\left(\frac{\rho}{eR_\Omega}\right) \mathrm{d}v_g. \tag{3.12}$$

3.2.2 Inegalități de tip Hardy îmbunătățite pe varietăți Cartan–Hadamard

Prezentăm următoarea inegalitate de tip L^p-Hardy, care a fost stabilită pentru prima dată de Kombe și Özaydin [61, Theorem 2.1] pentru $p > 1$; versiunea inițială pentru $p = 2$ este celebrul rezultat al lui Carron [19, Theorem 1.4].

Teorema 3.9 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate riemanniană completă, necompactă, $n \geq 2$-dimensională. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $p > 1$ și $\rho\colon M \to [0, \infty)$ o funcție astfel încât $\rho^{-1}(0) \subseteq M$ este compactă, $|\nabla_g \rho| = 1$ și $\Delta_g \rho \geq \frac{C}{\rho}$ în sens distribuţional pentru un anumit $C > 0$ cu proprietatea că $C + 1 + \alpha > p > 1$. Atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(M \setminus \rho^{-1}(0))$ avem*

$$\int_M \rho^\alpha |\nabla_g u|^p \,\mathrm{d}v_g \geq \left(\frac{C + 1 + \alpha - p}{p}\right)^p \int_M \rho^\alpha \frac{|u|^p}{\rho^p} \,\mathrm{d}v_g. \tag{3.13}$$

Observația 3.10. Dacă p-capacitatea mulțimii compacte $\rho^{-1}(0) \subseteq M$ este zero, atunci inegalitatea (3.13) este valabilă nu numai în $C_0^\infty(M \setminus \rho^{-1}(0))$, ci și în $C_0^\infty(M)$; a se vedea de exemplu, Carron [19] și D'Ambrosio și Dipierro [29]. În particular, dacă $n \geq p$ și $\mathcal{H}_g^{n-p}(\rho^{-1}(0)) < \infty$, atunci p-capacitatea lui $\rho^{-1}(0) \subseteq M$ este zero (a se vedea Heinonen, Kilpeläinen și Martio [54]).

O consecință simplă a Teoremei 3.9 este următoarea inegalitate de tip Hardy ponderată.

Corolarul 3.11 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard $n \geq 2$-dimensională. Fie $x_0 \in M$ fixat și $p, \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $1 < p < n + \alpha$. Atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(M \setminus \{x_0\})$ avem*

$$\int_M d_{g,x_0}^\alpha |\nabla_g u|^p \,\mathrm{d}v_g \geq \left(\frac{n + \alpha - p}{p}\right)^p \int_M d_{g,x_0}^\alpha \frac{|u|^p}{d_{g,x_0}^p} \,\mathrm{d}v_g. \tag{3.14}$$

În plus, constanta $\left(\frac{n+\alpha-p}{p}\right)^p$ este optimă.

Când $\alpha = 0$ în Corolarul 3.11, cazul limită $p = n$ nu furnizează nicio inegalitate rezonabilă similară cu (3.14). În următorul rezultat demonstrăm o inegalitate de tip Hardy dependentă de parametru cu ponderi logaritmice, care este valabilă și în cazul limită $p = n$; rezultate similare au fost stabilite de Edmunds și Triebel [36] în cazul euclidian, precum și de D'Ambrosio și Dipierro [29, Theorem 6.5], Nguyen [84] și Zhao [100, Theorem 1.3] în cazul varietăților riemanniene/Finsler.

Teorema 3.12 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard $n \geq 2$-dimensională, $x_0 \in M$ fixat, $\Omega = B_{g,x_0}(1)$ și $\alpha, p \in \mathbb{R}$ astfel încât $1 < p \leq n$ și $\alpha + 1 < p$. Atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{x_0\})$ avem*

$$\int_\Omega \log^\alpha(1/d_{g,x_0}) |\nabla_g u|^p \,\mathrm{d}v_g \geq \left(\frac{p - \alpha - 1}{p}\right)^p \int_\Omega \log^{\alpha - p}(1/d_{g,x_0}) \frac{|u|^p}{d_{g,x_0}^p} \,\mathrm{d}v_g. \tag{3.15}$$

În plus, constanta $\left(\frac{p-\alpha-1}{p}\right)^p$ este optimă.

În continuare, furnizăm o abordare alternativă pentru a stabili inegalități de tip Hardy îmbunătățite pe varietăți Cartan–Hadamard. Pentru simplitatea prezentării, vom lua în considerare cazul în care $p = 2$ și $\alpha = 0$. Primul astfel de rezultat „interpolează” rezultatele din Corolarul 3.11 și Teorema 3.12 (a se vedea Adimurthi, Chaudhuri și Ramaswamy [1]).

Teorema 3.13 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard $n \geq 3$-dimensională și $\Omega \subseteq M$ un domeniu mărginit. Fie $x_0 \in \Omega$ și $D_\Omega = \sup_{x\in\Omega} d_g(x_0, x)$. Atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ avem*

$$\int_\Omega |\nabla_g u|^2 \,\mathrm{d}v_g \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_\Omega \frac{u^2}{d_{g,x_0}^2} \,\mathrm{d}v_g + \frac{1}{4} \int_\Omega \log^{-2}\left(\frac{d_{g,x_0}}{eD_\Omega}\right) \frac{u^2}{d_{g,x_0}^2} \,\mathrm{d}v_g. \tag{3.16}$$

O altă îmbunătățire relevantă a inegalității lui Hardy în $\mathbb{R}^n$ se datorează lui Brezis și Vázquez [17, Theorem 4.1]; mai precis, dacă $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ este un domeniu mărginit $(n \geq 2)$, atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ avem

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \,\mathrm{d}x + j_{0,1}^2 \left(\frac{\omega_n}{\mathrm{Vol}(\Omega)}\right)^{\frac{2}{n}} \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x, \tag{3.17}$$

unde $j_{0,1} \approx 2.4048$ este prima rădăcină pozitivă a funcției Bessel J_0, iar ω_n este volumul bilei unitate euclidiene. Inegalitatea (3.17) a fost obținută prin simetrizare Schwarz și o analiză ingenioasă unidimensională. În continuare, prin utilizarea abordării noastre, furnizăm o versiune riemanniană a rezultatului lui Brezis și Vázquez [17], care ne oferă o nouă lumină asupra apariției lui $j_{0,1}$ în inegalitatea (3.17). Fie $j_{\nu,k}$ a k-a rădăcină pozitivă a funcției Bessel J_ν de speța I-a și de ordinul $\nu \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.14 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard $n \geq 2$-dimensională și $\Omega \subseteq M$ un domeniu mărginit. Fie $x_0 \in \Omega$ și $D_\Omega = \sup_{x\in\Omega} d_{g,x_0}(x)$. Atunci pentru fiecare $\nu \in \left[0, \frac{n-2}{2}\right]$ și $u \in C_0^\infty(\Omega)$ avem*

$$\int_\Omega |\nabla_g u|^2 \,\mathrm{d}v_g \geq \left(\frac{(n-2)^2}{4} - \nu^2\right) \int_\Omega \frac{u^2}{d_{g,x_0}^2} \,\mathrm{d}v_g + \frac{j_{\nu,1}^2}{D_\Omega^2} \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}v_g. \tag{3.18}$$

3.2.3 Estimări spectrale pe varietăți riemanniene

Fie (M, g) o varietate riemanniană n-dimensională cu $n \geq 2$. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu și $p > 1$. *Prima valoare proprie Dirichlet* a lui Ω pentru operatorul p-Laplace–Beltrami $-\Delta_{g,p}$ pe (M, g) este dată de

$$\Lambda_{\mathrm{m},p}(\Omega) = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla_g u|^p \,\mathrm{d}v_g}{\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}v_g}.$$

Primul rezultat din această secțiune este *principiul de comparație al lui Cheng* (a se vedea Cheng [27]), a cărui demonstrație originală se bazează pe argumentul lui Barta.

Teorema 3.15 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate riemanniană n-dimensională cu $n \geq 2$ și curbura secțională $\mathbf{K} \leq \kappa$ pentru un anumit $\kappa \in \mathbb{R}$. Fixăm $x_0 \in M$ și presupunem că $0 < R < \min(\mathrm{inj}_{x_0}, \pi/\sqrt{\kappa})$ cu convenția $\pi/\sqrt{\kappa} \stackrel{def}{=} \infty$, dacă $\kappa \leq 0$. Atunci avem*

$$\Lambda_{\mathrm{m},2}(B_{g,x_0}(R)) \geq \Lambda_{\mathrm{m},2}(B_\kappa(R)), \tag{3.19}$$

unde $B_\kappa(R)$ este o bilă arbitrară de rază R in varietatea cu curbură constantă $\mathbf{M}^n_\kappa$.

În cazul în care domeniul nu este o bilă, ca în cazul rezultatului lui Cheng, este nevoie de un argument mai puternic. Vom lua în considerare doar cazul în care $\kappa = 0$, care corespunde faimoasei inegalități Faber–Krahn pe varietăți Cartan–Hadamard:

Teorema 3.16 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard $n \geq 2$-dimensională, care satisface conjectura Cartan–Hadamard și fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu mărginit. Atunci avem*

$$\Lambda_{\mathrm{m},2}(\Omega) \geq \Lambda_{\mathrm{m},2}(\Omega^*) = j^2_{\frac{n}{2}-1,1}\left(\frac{\omega_n}{\mathrm{Vol}_g(\Omega)}\right)^{2/n}, \tag{3.20}$$

unde $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^n$ este o bilă cu $\mathrm{Vol}(\Omega^*) = \mathrm{Vol}_g(\Omega)$.

Următorul rezultat este estimarea decalajului spectral al lui McKean, stabilit de McKean [75] pentru $p = 2$ prin utilizarea unor proprietăți fine ale câmpurilor Jacobi; argumentul nostru se bazează pe perechile Riccati.

Teorema 3.17 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard $n \geq 2$-dimensională, cu curbură secțională $\mathbf{K} \leq \kappa < 0$. Dacă $p > 1$, atunci*

$$\Lambda_{\mathrm{m},p}(M) \geq \left(\frac{n-1}{p}\sqrt{-\kappa}\right)^p. \tag{3.21}$$

Următorul rezultat al lui Carvalho și Cavalcante [20, Theorem 1.1] încheie această secțiune.

Teorema 3.18 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate riemanniană n-dimensională, $n \geq 2$ și $\Omega \subseteq M$ un domeniu. Dat fiind $p > 1$, presupunem că există o funcție $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}$ astfel încât $|\nabla_g \rho| \leq a$ și $\Delta_{g,p}\rho \geq b$ pentru anumite valori $a, b > 0$. Atunci*

$$\Lambda_{\mathrm{m},p}(\Omega) \geq \frac{b^p}{p^p a^{p(p-1)}}. \tag{3.22}$$

3.2.4 Interpolare: Inegalitatea de tip Hardy versus decalajul spectral

Rezultatul principal al acestei secțiuni se referă la o „interpolare” între inegalitatea clasică a lui Hardy și decalajul spectral al lui McKean, stabilit pentru prima dată în literatura de specialitate de Berchio, Ganguly, Grillo și Pinchover [11, Theorem 2.1] în spațiul hiperbolic $\mathbb{H}^n_{-1}$.

Teorema 3.19 (a se vedea [56]). *Fie (M,g) o varietate Cartan–Hadamard $n \geq 3$-dimensională, cu curbură secțională $\mathbf{K} \leq \kappa < 0$ și fie $x_0 \in M$ fixat. Atunci, pentru fiecare $\lambda \in [n-2, \frac{(n-1)^2}{4}]$ și $u \in C_0^\infty(M \setminus \{x_0\})$ avem*

$$\int_M |\nabla_g u|^2 \, \mathrm{d}v_g \geq \lambda|\kappa| \int_M u^2 \, \mathrm{d}v_g + h_n^2(\lambda) \int_M \frac{u^2}{d_{g,x_0}^2} \, \mathrm{d}v_g + |\kappa| \left(\frac{(n-2)^2}{4} - h_n^2(\lambda) \right) \int_M \frac{u^2}{\sinh^2(\sqrt{-\kappa} d_{g,x_0})} \, \mathrm{d}v_g + h_n(\lambda)\gamma_n(\lambda) \int_M \frac{\mathbf{D}_\kappa(d_{g,x_0})}{d_{g,x_0}^2} u^2 \, \mathrm{d}v_g, \tag{3.23}$$

unde $\gamma_n(\lambda) = \sqrt{(n-1)^2 - 4\lambda}$ și $h_n(\lambda) = \frac{\gamma_n(\lambda)+1}{2}$.

O consecință directă a Teoremei 3.19 poate fi enunțată după cum urmează pentru cele două valori marginale ale lui λ.

Corolarul 3.20 (a se vedea [56]). *Fie (M,g) o varietate Cartan–Hadamard $n \geq 3$-dimensională, cu curbură secțională $\mathbf{K} \leq \kappa < 0$. Dacă $x_0 \in M$ este fixat, atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(M \setminus \{x_0\})$ avem următoarele inegalități:*

(i) (Îmbunătățirea inegalitţii de tip Hardy)

$$\int_M |\nabla_g u|^2 \, \mathrm{d}v_g \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_M \frac{u^2}{d_{g,x_0}^2} \, \mathrm{d}v_g + (n-2)|\kappa| \int_M u^2 \, \mathrm{d}v_g + \frac{(n-2)(n-3)}{2} \int_M \frac{\mathbf{D}_\kappa(d_{g,x_0})}{d_{g,x_0}^2} u^2 \, \mathrm{d}v_g. \tag{3.24}$$

(ii) (Îmbunătățirea decalajului spectral de tip McKean)

$$\int_M |\nabla_g u|^2 \, \mathrm{d}v_g \geq \frac{(n-1)^2}{4}|\kappa| \int_M u^2 \, \mathrm{d}v_g + \frac{1}{4} \int_M \frac{u^2}{d_{g,x_0}^2} \, \mathrm{d}v_g + |\kappa| \frac{(n-1)(n-3)}{4} \int_M \frac{u^2}{\sinh^2(\sqrt{-\kappa} d_{g,x_0})} \, \mathrm{d}v_g. \tag{3.25}$$

Observația 3.21. (a) Este de menționat că inegalitățile din Teorema 3.19 și Corolarul 3.20 sunt cunoscute ca fiind *critice* pe $\mathbb{H}^n_{-1}$ (a se vedea Devyver, Fraas și Pinchover [33, Definition 2.1]). Demonstrațiile clasice ale criticalităţii (acestor inegalităţi) sunt de obicei formulate utilizând abordarea supersoluțiilor; cu toate acestea, ele pot fi adaptate la perechile Riccati.

(b) Menționăm că Berchio, Ganguly și Grillo [10, Theorem 2.5] au furnizat o versiune mai generală a inegalității (3.25), folosind o ipoteză de curbură punctuală. Inegalități similare pot fi, de asemenea, obținute în termeni de perechi Riccati prin utilizarea unei comparații Laplace punctuale corespunzătoare (a se vedea, de exemplu, Greene și Wu [51]).

Următorul rezultat al lui Akutagawa și Kumura [3, Theorem 1.3/(5)] încheie această secțiune.

Teorema 3.22 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard $n \geq 2$-dimensională cu curbură secțională $\mathbf{K} \leq \kappa < 0$. Fie $x_0 \in M$ fixat, $R > 0$ și $\Omega = M \setminus B_{g,x_0}(R)$. Atunci, pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ avem*

$$\int_\Omega |\nabla_g u|^2 \, \mathrm{d}v_g \geq \int_\Omega \frac{(n-1)^2}{4} |\kappa| u^2 \, \mathrm{d}v_g + \int_\Omega \frac{u^2}{4\left(d_{g,x_0} - R + \frac{1}{(n-1)\mathbf{ct}_\kappa(R)}\right)^2} \, \mathrm{d}v_g$$
$$+ \int_\Omega |\kappa| \frac{(n-1)(n-3)}{4\sinh^2(\sqrt{-\kappa} d_{g,x_0})} u^2 \, \mathrm{d}v_g.$$

3.2.5 Inegalități de tip Ghoussoub–Moradifam

În această secțiune, luăm în considerare unele inegalități stabilite de Ghoussoub și Moradifam [49, Theorem 2.12] (a se vedea și [50]), unde ponderile sunt de forma

$$(a + b|x|^\alpha)^\beta / |x|^{2m}$$

pentru anumiți parametri $a, b > 0$. Se indică, de asemenea, posibilele extinderi ale acestor inegalități pentru cazul unor varietăți Cartan–Hadamard; a se vedea Observația 3.24 și Teorema 3.25, unde sunt discutate unele dificultăți tehnice.

Teorema 3.23 (a se vedea [56]). *Să presupunem că $a, b > 0$ și $\alpha, \beta, m \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt valabile:*

(i) *Dacă $\alpha\beta > 0$ și $m \leq \frac{n-2}{2}$, atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avem*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(a + b|x|^\alpha)^\beta}{|x|^{2m}} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \geq \left(\frac{n - 2m - 2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(a + b|x|^\alpha)^\beta}{|x|^{2m+2}} u^2 \, \mathrm{d}x. \tag{3.26}$$

(ii) *Dacă $\alpha\beta < 0$ și $2m - \alpha\beta \leq n - 2$, atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avem*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(a + b|x|^\alpha)^\beta}{|x|^{2m}} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \geq \left(\frac{n - 2m + \alpha\beta - 2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(a + b|x|^\alpha)^\beta}{|x|^{2m+2}} u^2 \, \mathrm{d}x. \tag{3.27}$$

Observația 3.24. Am putea să ne așteptăm la o demonstrație similară pe varietățile Cartan–Hadamard ca în Teorema 3.23. Cu toate acestea, apare o dificultate tehnică subtilă care provine din faptul că – în ciuda mai multor teste numerice de confirmare – nu există nicio dovadă privind *pozitivitatea* funcției G pentru toate valorile admisibile ale parametrilor.

Teorema 3.25 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard $n \geq 2$-dimensională și fie $x_0 \in M$ un punct. Fie $a, b, \alpha, \beta > 0$ și $m \in \mathbb{R}$, cu $m \leq \frac{n-2}{2}$ și*

$$\alpha\beta + \sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta + 2(n - 2m - 2))} \leq 2. \tag{3.28}$$

Atunci, pentru fiecare $u \in C_0^\infty(M)$ avem următoarea inegalitate:

$$\int_M \frac{(a+bd_{g,x_0}^\alpha)^\beta}{d_{g,x_0}^{2m}}|\nabla_g u|^2 \,\mathrm{d}v_g \geq \left(\frac{n-2m-2}{2}\right)^2 \int_M \frac{(a+bd_{g,x_0}^\alpha)^\beta}{d_{g,x_0}^{2m+2}} u^2 \,\mathrm{d}v_g. \tag{3.29}$$

Observația 3.26. Așa cum am subliniat deja în Observația 3.24, testele numerice confirmă pozitivitatea lui G pentru orice $a, b > 0$ și $\alpha, \beta, m \in \mathbb{R}$, iar demonstrarea acestui fapt necesită argumente specifice din Teoria funcțiilor speciale. În acest moment, o astfel de abordare nu este disponibilă. În particular, ne asteptăm ca in viitor să fie eliminată ipoteza suplimentară din Teorema 3.25.

3.3 Aplicații II: Inegalități multiplicative de tip Hardy

3.3.1 Principii de incertitudine optime

Fie (M, g) o varietate riemanniană completă, necompactă, n-dimensională ($n \geq 2$), și fie $x_0 \in M$ fixat. Presupunem că $p, \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$n > p > 1 \quad \text{și} \quad -p+1 < \alpha \leq 1. \tag{3.30}$$

Investigăm următorul *principiu de incertitudine*: pentru orice $u \in C_0^\infty(M)$, avem

$$\left(\int_M |\nabla_g u|^p \,\mathrm{d}v_g\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_M d_{g,x_0}^{p'\alpha}|u|^p \,\mathrm{d}v_g\right)^{\frac{1}{p'}} \geq \frac{n+\alpha-1}{p}\int_M \left(1+\frac{n-1}{n+\alpha-1}\mathbf{D}_\kappa(d_{g,x_0})\right) d_{g,x_0}^{\alpha-1}|u|^p \,\mathrm{d}v_g. \tag{$\mathbf{UP}_\kappa$}$$

Observăm că ($\mathbf{UP}_\kappa$) se reduce formal la:

- *principiul de incertitudine Heisenberg–Pauli–Weyl*, când $\alpha = 1$ (a se vedea Kombe și Özaydin [61, 62] pentru $p = 2$ și $\kappa = 0$, Kristály [64] pentru $p = 2$ și $\kappa \leq 0$ și Nguyen [85] pentru $p > 1$ și $\kappa \leq 0$ generice);
- *Principiul de incertitudine al hidrogenului*, când $\alpha = 0$ (a se vedea Cazacu, Flynn și Lam [22] și Frank [46] în $\mathbb{R}^n$, deci, pentru $\kappa = 0$);
- *Inegalitatea lui Hardy* în cazul limită când $\alpha \to -p+1$ (a se vedea Corolarul 3.11).

Primul nostru rezultat arată validitatea principiului ($\mathbf{UP}_\kappa$) pe varietăți Cartan–Hadamard, care poate fi formulat după cum urmează.

Teorema 3.27 (a se vedea [56]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională ($n \geq 2$), astfel încât $\mathbf{K} \leq \kappa \leq 0$. Dacă condițiile din (3.30) sunt valabile, atunci și principiul ($\mathbf{UP}_\kappa$) este valabil; în plus, constanta $\frac{n+\alpha-1}{p}$ este optimă.*

Observația 3.28. Dacă are loc egalitatea în (**UP**$_\kappa$) pentru o anumită funcție pozitivă $u \in W^{1,p}(M)$, atunci egalitatea $\Delta_g d_{g,x_0} = (n-1)\mathbf{ct}_\kappa(d_{g,x_0})$ este de asemenea valabilă, ceea ce implică faptul că varietatea (M, g) este izometrică cu varietate cu curbură constantă $\mathbf{M}^n_\kappa$. Acest rezultat de rigiditate este cunoscut pentru $\kappa = 0$ de la Kristály [64] pentru $p = 2$, și de la Nguyen [85] pentru $p > 1$.

Următorul rezultat este un complement al Teoremei 3.27, care furnizează *rigiditatea* unor varietăți riemanniene cu $\mathbf{Ric} \geq \kappa(n-1)g$ pentru un anumit $\kappa \leq 0$ care validează principiul incertitudinii (**UP**$_\kappa$). Rezultate similare au fost obținute mai întâi de Kristály [64] pentru $p = 2$ și $\alpha = 1$, iar apoi de Nguyen [85] pentru $p > 1$ generic, ambele articole considerând doar cazul $\kappa = 0$. Acum, avem un rezultat mai general, valabil pentru orice $\kappa \leq 0$:

Teorema 3.29 (a se vedea [56])**.** *Fie (M, g) o varietate riemanniană completă, necompactă, $n \geq 2$-dimensională, cu $\mathbf{Ric} \geq \kappa(n-1)g$, pentru un anumit $\kappa \leq 0$. Să presupunem că (**UP**$_\kappa$) este valabil pentru un anumit $x_0 \in M$ și că parametrii α, p, n verifică fie $-p+1 < \alpha \leq 1 < p < n$, când $\kappa = 0$, fie $0 < \alpha \leq 1 < p < n$, când $\kappa < 0$. Atunci (M, g) este izometrică cu varietate cu curbură constantă $\mathbf{M}^n_\kappa$.*

3.3.2 Inegalitățile Caffarelli–Kohn–Nirenberg

În această secțiune, demonstrăm o versiune a *inegalității Caffarelli–Kohn–Nirenberg* (a se vedea [18]), care rezultă din inegalitatea multiplicativă din Teorema 3.1/(ii).

Teorema 3.30 (a se vedea [56])**.** *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională cu $n \geq 2$ astfel încât $\mathbf{K} \leq \kappa$ pentru un anumit $\kappa \leq 0$. Se fixează $x_0 \in M$ și se presupune că $p, \alpha, r \in \mathbb{R}$ satisfac*

$$r > p > 1, \quad \alpha + p > 1 \quad \textit{și} \quad p(n+\alpha-1) > r(n-p) > 0.$$

Atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(M)$ are loc

$$\left(\int_M |\nabla_g u|^p \, \mathrm{d}v_g\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_M d_{g,x_0}^{p'\alpha} |u|^{p'(r-1)} \, \mathrm{d}v_g\right)^{\frac{1}{p'}} \geq \frac{n+\alpha-1}{r} \int_M \left(1 + \frac{n-1}{n+\alpha-1}\mathbf{D}_\kappa(d_{g,x_0})\right) d_{g,x_0}^{\alpha-1} |u|^r \, \mathrm{d}v_g.$$

În plus, constanta $\frac{n+\alpha-1}{r}$ este optimă.

După cum am arătat deja, diferite alegeri ale lui H și G din Teorema 3.1 produc inegalități funcționale cunoscute sau chiar noi în literatura de specialitate. În acest spirit, încheiem secțiunea cu o inegalitate neobișnuită de tip Caffarelli–Kohn–Nirenberg, care poate fi punctul de plecare pentru construirea altor inegalități funcționale cu ajutorul Teoremei 3.1.

Teorema 3.31 (a se vedea [56])**.** *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională cu $n \geq 2$ și $\mathbf{K} \leq \kappa < 0$. Atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(M) \setminus \{0\}$ și $c \in \mathbb{R}$, are loc*

$$\int_M |\nabla_g u|^2 \, \mathrm{d}v_g \geq \frac{\left(\int_M \mathbf{s}_c^2(u) \, \mathrm{d}v_g\right)^2}{\int_M \mathbf{s}_c^2(2u) \, \mathrm{d}v_g} (n-1)^2 |\kappa|. \tag{3.31}$$

În particular, are loc și estimarea decalajului spectral al lui McKean:

$$\lambda_{\mathrm{m}}(M) \geq \frac{(n-1)^2}{4} |\kappa|.$$

Capitolul 4

Inegalități de tip Rellich pe varietăți riemanniene generale

În acest capitol, prezentăm prima noastră abordare a inegalităților de tip Rellich. În § 4.1 prezentăm abordarea abstractă. În § 4.2 stabilim estimări ale decalajului spectral pentru diverse probleme de valori proprii de ordin superior pe varietăți riemanniene generale. În § 4.3 furnizăm demonstrații alternative pentru diferite inegalități suplimentare de tip Rellich.

4.1 Inegalități funcționale generale

În această secțiune, prezentăm două inegalități funcționale generale. Prima inegalitate leagă $|\Delta_g u|^p$ și $|u|^p$, pentru $p > 1$, şi este formulată în teorema următoare.

Teorema 4.1 (a se vedea [38]). *Fie (M, g)o varietate riemanniană completă, necompactă, $n \geq 2$-dimensională. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu, $x_0 \in \Omega$ și $\rho = d_{g,x_0}$. Fie $p > 1$ și se presupune că $L, W, w, G, H\colon (0, \sup_\Omega \rho) \to (0, \infty)$ satisfac următoarele condiții:*

(C1) *L, W sunt continue, w, G sunt de clasă C^2 și H este de clasă C^1;*

(C2) *$\Delta_g \rho \geq L(\rho)$ în sens distribuțional și $(wG)' \leq 0$;*

(C3) *inegalitatea diferențială ordinară*

$$(p-1)\left[2(wGH)' + 2wGHL - pwGH^2 - w|G|^{p'}\right] - (wG)'' - (wG)'L \geq W \quad (4.1)$$

este valabilă pentru funcțiile $L(t), W(t), w(t), G(t), H(t)$, unde $t \in (0, \sup_\Omega \rho)$.

Atunci, pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc

$$\int_\Omega w(\rho)|\Delta_g u|^p \, \mathrm{d}v_g \geq \int_\Omega W(\rho)|u|^p \, \mathrm{d}v_g.$$

A doua inegalitate funcțională leagă $|\Delta_g u|^2$ și $|\nabla_g u|^2$ şi este enunţată în teorema următoare.

Teorema 4.2 (a se vedea [38]). *Fie (M, g) o varietate riemanniană completă, necompactă, $n \geq 2$-dimensională. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu, $x_0 \in \Omega$ și $\rho = d_{g,x_0}$. Să presupune că $L, W, G, H \colon (0, \sup_\Omega \rho) \to (0, \infty)$ satisfac următoarele condiții:*

(C1') *L, W sunt continue, G este de clasă C^2 și H este de clasă C^1;*

(C2') *$\Delta_g \rho \geq L(\rho)$ în sens distribuțional;*

(C3') *următoarea IDP este valabilă pentru $\rho = d_{g,x_0}(x)$ și pentru fiecare $x \in \Omega$:*

$$(W(\rho)H(\rho))' + W(\rho)H(\rho)L(\rho) - W(\rho)H(\rho)^2 \geq \Delta_g G(\rho) + G(\rho)^2. \tag{4.2}$$

Atunci, pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc

$$\int_\Omega |\Delta_g u|^2 \, \mathrm{d}v_g \geq \int_\Omega (2G(\rho) - W(\rho)) |\nabla_g u|^2 \, \mathrm{d}v_g.$$

4.2 Aplicații I: Estimări ale decalajului spectral

În această secțiune, stabilim estimări spectrale optime pe varietățile Cartan–Hadamard pentru problema plăcii fixate (pentru $p > 1$), pentru problema deformării (pentru $p = 2$) și pentru variantele lor de ordin superior. Toate demonstrațiile se bazează pe argumente de convexitate și de comparație; în plus, ele nu necesită simetrizare.

4.2.1 Problema plăcii fixate

Rezultatul nostru de decalaj spectral cu privire la problema plăcii fixate este următorul.

Teorema 4.3 (a se vedea [38]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională cu $n \geq 2$ și curbură secțională $\mathbf{K} \leq \kappa$, pentru un anumit $\kappa < 0$. Fie $p > 1$ și $\Omega \subseteq M$ un domeniu. Atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc*

$$\int_\Omega |\Delta_g u|^p \, \mathrm{d}v_g \geq \left(\frac{(n-1)^2 |\kappa| (p-1)}{p^2} \right)^p \int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}v_g. \tag{4.3}$$

În plus, constanta din (4.3) este optimă.

Subliniem că estimarea din Teorema 4.3 este un rezultat nou, care nu a fost încă stabilit într-un context atât de general.

4.2.2 Problema deformării

Rezultatul nostru spectral cu privire la problema deformării este următorul.

Teorema 4.4 (a se vedea [38]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională cu $n \geq 2$ și curbură secțională $\mathbf{K} \leq \kappa$, pentru un anumit $\kappa < 0$. Dacă $\Omega \subseteq M$ este un domeniu, atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc*

$$\int_\Omega |\Delta_g u|^2 \, \mathrm{d}v_g \geq \frac{(n-1)^2 |\kappa|}{4} \int_\Omega |\nabla_g u|^2 \, \mathrm{d}v_g. \tag{4.4}$$

În plus, constanta din (4.4) este optimă.

Observăm că Teorema 4.4 este un rezultat nou, care oferă estimarea decalajului spectral pe varietăți generale Cartan–Hadamard pentru $p = 2$.

4.2.3 Estimări de ordin superior

În continuare, prezentăm estimări de ordin superior referitoare atât la problema plăcii fixate, cât și la problema deformării.

Teorema 4.5 (a se vedea [38]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională cu $n \geq 2$ și curbură secțională $\mathbf{K} \leq \kappa$, pentru un anumit $\kappa < 0$. Fie $p > 1$ și $\Omega \subseteq M$ un domeniu. Atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ și $k \geq 1$ cu $k \in \mathbb{N}$, au loc*

$$\int_\Omega |\Delta_g^k u|^p \,\mathrm{d}v_g \geq \left(\frac{(n-1)^2(p-1)\kappa^2}{p^2}\right)^{kp} \int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}v_g, \tag{4.5}$$

$$\int_\Omega |\nabla_g \Delta_g^k u|^p \,\mathrm{d}v_g \geq \left(\frac{(n-1)\kappa}{p}\right)^p \left(\frac{(n-1)^2(p-1)\kappa^2}{p^2}\right)^{kp} \int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}v_g. \tag{4.6}$$

În plus, constantele din (4.5) și (4.6) sunt optime.

Teorema 4.6 (a se vedea [38]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională cu $n \geq 2$ și curbură secțională $\mathbf{K} \leq \kappa$, pentru un anumit $\kappa < 0$. Dacă $\Omega \subseteq M$ este un domeniu, atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ și $k \geq 1$ au loc*

$$\int_\Omega |\Delta_g^k u|^2 \,\mathrm{d}v_g \geq \left(\frac{(n-1)\kappa}{2}\right)^{4k-2} \int_\Omega |\nabla_g u|^2 \,\mathrm{d}v_g, \tag{4.7}$$

$$\int_\Omega |\nabla_g \Delta_g^k u|^2 \,\mathrm{d}v_g \geq \left(\frac{(n-1)\kappa}{2}\right)^{4k} \int_\Omega |\nabla_g u|^2 \,\mathrm{d}v_g. \tag{4.8}$$

4.3 Aplicații II: Inegalități de tip Rellich

În această secțiune, prezentăm alte aplicații suplimentare ale inegalităților noastre funcționale generale.

4.3.1 Inegalități Rellich clasice și ponderate

Extinderea inegalității Rellich ponderate este următoarea; pentru versiunea euclidiană, a se vedea Mitidieri [79, Theorem 3.1].

Teorema 4.7 (a se vedea [38]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională cu $n \geq 5$. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu și $p, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$1 < p < n/2 \quad \text{și} \quad 2 - \frac{n}{p} < \gamma < \frac{n(p-1)}{p}.$$

Se fixează $x_0 \in \Omega$ și fie $\rho = d_{g,x_0}$. Atunci, pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc

$$\int_\Omega \rho^{\gamma p} |\Delta_g u|^p \,\mathrm{d}v_g \geq \left(\frac{n}{p} - 2 + \gamma\right)^p \left(\frac{n(p-1)}{p} - \gamma\right)^p \int_\Omega \frac{|u|^p}{\rho^{(2-\gamma)p}} \,\mathrm{d}v_g. \tag{4.9}$$

Corolarul 4.8 (a se vedea [38]). *Alegând $\gamma = 0$ în Teorema 4.7, se obține extinderea inegalității clasice a lui Rellich; adică, pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc*

$$\int_\Omega |\Delta_g u|^p \, dv_g \geq \left(\frac{n}{p} - 2\right)^p \left(\frac{n(p-1)}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{|u|^p}{\rho^{2p}} \, dv_g.$$

În particular, dacă $p = 2$ pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc

$$\int_\Omega |\Delta_g u|^2 \, dv_g \geq \frac{n^2(n-4)^2}{16} \int_\Omega \frac{|u|^2}{\rho^4} \, dv_g. \tag{4.10}$$

4.3.2 Variante de ordin superior ale inegalității clasice a lui Rellich

Extinderea inegalităților de tip Rellich de ordin superior este indicată in teorema următoare; pentru versiunile euclidiene, a se vedea Mitidieri [79, Theorem 3.3].

Teorema 4.9 (a se vedea [38]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională cu $n \geq 5$. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu, se fixează $x_0 \in \Omega$ și se definește $\rho = d_{g,x_0}$. Următoarele inegalități sunt valabile:*

(i) *Dacă $k \geq 1$ și $n > 2kp$, atunci*

$$\int_\Omega |\Delta_g^k u|^p \, dv_g \geq \Lambda_{r;1}(k,p) \int_\Omega \frac{|u|^p}{\rho^{2kp}} \, dv_g, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega),$$

unde

$$\Lambda_{r;1}(k,p) = \prod_{s=1}^{k} \left(\frac{n}{p} - 2s\right)^p \left(\frac{n(p-1)}{p} + 2s - 2\right)^p.$$

(ii) *Dacă $k \geq 1$ și $n > (2k+1)p$, atunci*

$$\int_\Omega |\nabla_g \Delta_g^k u|^p \, dv_g \geq \Lambda_{r;2}(k,p) \int_\Omega \frac{|u|^p}{\rho^{(2k+1)p}} \, dv_g, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$$

unde

$$\Lambda_{r;2}(k,p) = \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \prod_{s=1}^{k} \left(\frac{n}{p} - 2s - 1\right)^p \left(\frac{n(p-1)}{p} + 2s - 1\right)^p.$$

4.3.3 Inegalități Rellich suplimentare

În această secțiune prezentăm alte aplicații ale inegalităților noastre funcționale generale, furnizând demonstrații scurte pentru inegalități suplimentare de tip Rellich.

Teorema 4.10 (a se vedea [38]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională cu $n \geq 5$. Fie $\Omega = B_{g,x_0}(1) \subseteq M$ o bilă unitate centrată în $x_0 \in M$. Se definește $\rho = d_{g,x_0}$. Atunci, pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc*

$$\int_\Omega |\Delta_g u|^2 \, dv_g \geq \frac{n^2(n-4)^4}{16} \int_\Omega \frac{u^2}{\rho^4} \, dv_g + \frac{n(n-4)j_{0,1}^2}{2} \int_\Omega \frac{u^2}{\rho^2} \, dv_g,$$

unde $j_{0,1}$ reprezintă primul zero pozitiv al funcției Bessel J_0.

Al doilea rezultat se referă la cazul în care $\mathbf{K} \leq \kappa$ pentru un anumit $\kappa < 0$ și poate fi formulat după cum urmează.

Teorema 4.11 (a se vedea [38]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională cu $n \geq 5$ și curbură secțională $\mathbf{K} \leq \kappa$ pentru un anumit $\kappa < 0$. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu, se fixează $x_0 \in \Omega$ și se definește $\rho = d_{g,x_0}$. Atunci, pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc*

$$\int_\Omega |\Delta_g u|^2 \, \mathrm{d}v_g \geq \frac{(n-1)^4|\kappa|^2}{16} \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}v_g + \frac{(n-1)^2|\kappa|}{8} \int_\Omega \frac{u^2}{\rho^2} \, \mathrm{d}v_g + \frac{(n-1)^3(n-3)|\kappa|^2}{8} \int_\Omega \frac{u^2}{\sinh^2(\kappa\rho)} \, \mathrm{d}v_g.$$

Al treilea rezultat al secțiunii este o aplicație simplă a Teoremei 4.2.

Teorema 4.12 (a se vedea [38]). *Fie (M, g) o varietate Cartan–Hadamard n-dimensională ($n \geq 8$), $\Omega \subseteq M$ un domeniu, $x_0 \in M$ fixat și se definește $\rho = d_{g,x_0}$. Atunci, pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc*

$$\int_\Omega |\Delta_g u|^2 \, \mathrm{d}v_g \geq \frac{n^2}{4} \int_\Omega \frac{|\nabla_g u|^2}{\rho^2} \, \mathrm{d}v_g.$$

Observația 4.13. Teorema 4.12 este așteptată să fie valabilă pentru orice $n \geq 5$; cu toate acestea, condiția tehnică $n \geq 8$ este necesară pentru a garanta aplicabilitatea Teoremei 4.2 ($W > 0$ atunci când $n \geq 9$, iar dacă $n = 8$, atunci $W = 0$, caz în care demonstrarea Teoremei 4.2 este evidentă). O restricție similară a apărut și în contextul Finsler la demonstrarea inegalităților cantitative de tip Rellich; a se vedea Kristály și Repovš [70], unde s-a aplicat o altă abordare.

Capitolul 5

Inegalități de tip Rellich pe varietăți cu curbură constantă

În acest capitol, folosind ideea perechilor Riccati, prezentăm o a doua abordare pentru a demonstra inegalitățile lui Rellich pe varietăți cu curbură constantă: În § 5.1 prezentăm abordarea noastră abstractă, în timp ce în § 5.2 & 5.3 furnizăm aplicații în spațiile euclidiene și, respectiv, în spațiile hiperbolice.

5.1 Inegalități funcționale generale

În această secțiune, prezentăm abordarea noastră abstractă. Motivată de simplitatea contextului geometric, reformulăm definiția perechilor Riccati.

5.1.1 Perechi Riccati simplificate și perechi Riccati duale

Fie $\kappa \leq 0$ și definim $L_\kappa\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, prin

$$L_\kappa(t) = (n-1)\mathbf{ct}_\kappa(t).$$

O definiție simplificată a perechilor Riccati reformulată pentru varietăți cu curbură constantă este următoarea (pentru versiunea originală, a se vedea Definiția 3.2).

Definiția 5.1 (a se vedea [55]). Fie $\kappa \leq 0$ și $\Omega \subseteq \mathbf{M}^n_\kappa$ un domeniu. Se fixează $x_0 \in \Omega$ și se consideră $\rho = d_{\kappa,x_0}$ distanța de la x_0. Se presupune că $w, W\colon (0, \sup_\Omega \rho) \to [0,\infty)$ sunt funcții netede. (L_κ, W) este o *pereche* (ρ, w)*-Riccati simplificată* pe $(0, \sup_\Omega \rho)$ dacă există o funcție netedă $G\colon (0, \sup_\Omega \rho) \to \mathbb{R}$ astfel încât următoarea IDO să fie valabilă:

$$G'(t) + \left(L_\kappa(t) + \frac{w'(t)}{w(t)}\right) G(t) - G(t)^2 \geq W(t), \qquad \forall t \in (0, \sup_\Omega \rho). \tag{5.1}$$

O funcție G care satisface (5.1) este *admisibilă* pentru (L_κ, W).

Inegalitatea de mai sus este o forță motrice pentru inegalitățile funcționale de tip Hardy. Cu toate acestea, după cum vom vedea în curând, inegalitățile de tip Rellich sunt mai compatibile cu versiunea sa duală, care poate fi enunțată după cum urmează.

Definiția 5.2 (a se vedea [55]). Fie $\kappa \leq 0$ și $\Omega \subseteq \mathbf{M}_\kappa^n$ un domeniu. Se fixează $x_0 \in \Omega$ și se consideră $\rho = d_{\kappa,x_0}$ distanța de la x_0. Se presupune că $v, V \colon (0, \sup_\Omega \rho) \to [0, \infty)$ sunt funcții netede. (L_κ, V) este o *pereche* (ρ, v)*-Riccati duală* pe $(0, \sup_\Omega \rho)$ dacă există o funcție netedă $H \colon (0, \sup_\Omega \rho) \to \mathbb{R}$ astfel încât următoarea IDO să fie valabilă:

$$-H'(t) + \left(L_\kappa(t) - \frac{v'(t)}{v(t)}\right) H(t) - H(t)^2 \geq V(t), \qquad \forall t \in (0, \sup_\Omega \rho). \tag{5.2}$$

O funcție H care satisface (5.2) este *admisibilă dual* pentru (L_κ, V).

Primul rezultat al secțiunii este o inegalitate funcțională generală, care poate fi enunțată după cum urmează.

Teorema 5.3 (a se vedea [55]). *Fie $\kappa \leq 0$ și $\Omega \subseteq \mathbf{M}_\kappa^n$ un domeniu. Se fixează $x_0 \in \Omega$ și se definește $\rho = d_{\kappa,x_0}$. Se presupune că (L_κ, V) este o pereche Riccati duală pe $(0, \sup_\Omega \rho)$ și H este admisibilă dual pentru (L_κ, V). Atunci sunt valabile următoarele afirmații.*

(i) *Pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc*

$$\int_\Omega v(\rho) |\Delta_\kappa u|^2 \,\mathrm{d}x_\kappa \geq \int_\Omega v(\rho) V(\rho) |\nabla_\kappa^{\mathrm{rad}} u|^2 \,\mathrm{d}x_\kappa, \tag{5.3}$$

cu condiția ca $E_1(t) = (v(t)H(t))' + v(t)H(t)(L_\kappa(t) - 2\mathbf{ct}_\kappa(t)) \geq 0$, $\forall t > 0$.

(ii) *Pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc*

$$\int_\Omega v(\rho) |\Delta_\kappa u|^2 \,\mathrm{d}x_\kappa \geq \int_\Omega v(\rho) V(\rho) |\nabla_\kappa u|^2 \,\mathrm{d}x_\kappa, \tag{5.4}$$

cu condiția ca $E_2(t) = 2(v(t)H(t))' + v(t)H(t)(H(t) - 2\mathbf{ct}_\kappa(t)) \geq 0$, $\forall t > 0$.

Al doilea rezultat al secțiunii este conceput pentru a completa Teorema 5.3/(i). Acesta poate fi enunțat după cum urmează.

Teorema 5.4 (a se vedea [55]). *Fie $\kappa \leq 0$ și $\Omega \subseteq \mathbf{M}_\kappa^n$ un domeniu. Se fixează $x_0 \in \Omega$ și se definește $\rho = d_{\kappa,x_0}$. Presupunem că (L_κ, V) este o pereche Riccati simplificată pe $(0, \sup_\Omega \rho)$ și H este admisibilă pentru (L_κ, V). Atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ avem*

$$\int_\Omega w(\rho) |\nabla_\kappa^{\mathrm{rad}} u|^2 \,\mathrm{d}x_\kappa \geq \int_\Omega w(\rho) W(\rho) u^2 \,\mathrm{d}x_\kappa. \tag{5.5}$$

Observăm că Teorema 5.3/(i) şi Teorema 5.4 pot fi utilizate în mod eficient pentru a demonstra inegalități de tip Rellich pe varietățile cu curbură constată. Aceasta se poate realiza și prin combinarea Teoremei 5.3/(ii) și a Teoremei 3.3, dar cu costul unor condiții suplimentare, care implică de obicei constrângeri restrictive pentru dimensiune.

5.2 Aplicații I: Inegalități pe spații euclidiene

În contextul euclidian, o serie de inegalități de tip Rellich bine cunoscute sunt studiate de Ghoussoub și Moradifam [49] în termeni de potențiale Bessel și/sau perechi Bessel. După recapitularea conceptelor aferente, discutăm două inegalități noi, care evidențiază punctele forte și limitările metodei noastre. Pentru demonstrațiile originale ale inegalităților selectate (5.7) şi (5.8), a se vedea Adimurthi, Grossi și Santra [2].

Reamintim că o funcție $Z > 0$ este un *potențial Bessel* pe $(0, R)$ dacă există o constantă $c > 0$ și o funcție $z > 0$ astfel încât următoarea EDO să fie valabilă:

$$z''(t) + \frac{z'(t)}{t} + c \cdot Z(t) \cdot z(t) = 0, \qquad \forall t \in (0, R). \tag{5.6}$$

Folosind Teorema 5.3/(i) şi Teorema 5.4 obținem următorul rezultat general.

Teorema 5.5 (a se vedea [55]). *Fie $n \geq 5$ și fie $B \subseteq \mathbb{R}^n$ o bilă centrată în origine cu raza $R > 0$. Să presupunem că Z este un potențial Bessel pe $(0, R)$ cu soluția z și cea mai bună constantă c, astfel încât să avem*

(Z) : $\frac{Z'(t)}{Z(t)} = -\frac{\lambda}{t} + f(t)$, *unde* $\lambda < n - 2$, $f(t) \geq 0$ *și* $\lim_{t \to 0} t f(t) = 0$.

Se definește $H(t) = \frac{n}{2t} + \frac{z'(t)}{z(t)}$. *Dacă* $E_1(t) = H'(t) + H(t) \cdot \frac{n-3}{t} \geq 0$, $\forall t \in (0, R)$, *atunci pentru fiecare* $u \in C_0^\infty(B)$ *avem*

$$\int_B |\Delta u|^2 \, \mathrm{d}x \geq \frac{n^2(n-4)^2}{16} \int_B \frac{u^2}{|x|^4} \, \mathrm{d}x + c \left(\frac{n^2}{4} + \frac{(n - \lambda - 2)^2}{4} \right) \int_B \frac{Z(|x|) u^2}{|x|^2} \, \mathrm{d}x.$$

În continuare, pentru o funcție arbitrară h se definesc

$$h_{[0]}(t) = t, \quad h_{[1]}(t) = h(t) \quad \text{și} \quad h_{[i]}(t) = h(h_{[i-1]}(t)), \qquad \forall i \geq 2.$$

Un corolar al Teoremei 5.5 poate fi enunțat după cum urmează.

Corolarul 5.6 (a se vedea [55]). *Fie $n \geq 5$ și $B \subseteq \mathbb{R}^n$ o bilă centrată în origine cu raza $R > 0$. Dacă $k \geq 1$ și $r = R \cdot \exp_{[k-1]}(e)$, atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ avem*

$$\int_B |\Delta u|^2 \, \mathrm{d}x \geq \frac{n^2(n-4)^2}{16} \int_B \frac{u^2}{|x|^4} \, \mathrm{d}x + \left(1 + \frac{n(n-4)}{8}\right) \sum_{j=1}^{k} \int_B \frac{u^2}{|x|^4} \left(\prod_{i=1}^{j} \log_{[i]} \left(\frac{r}{|x|} \right) \right)^{-2} \mathrm{d}x. \tag{5.7}$$

Limitările Teoremei 5.5 pot fi ilustrate după cum urmează.

Observația 5.7. Fie $\ell(t) = \frac{1}{1 - \log(t)}$, $k \geq 1$, $R > 0$ și se consideră inegalitatea

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 \, \mathrm{d}x \geq \frac{n^2(n-4)^2}{16} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^4} \, \mathrm{d}x + \left(1 + \frac{n(n-4)}{8}\right) \sum_{j=1}^{k} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^4} \prod_{i=1}^{j} \ell_{[i]}^2 \left(\frac{|x|}{R} \right) \mathrm{d}x. \tag{5.8}$$

Inegalitatea (5.8) este generată de potențialul Bessel cu parametrii

$$\widetilde{Z}_{k,R}(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{t^2} \prod_{i=1}^{j} \ell_{[i]}^2\left(\frac{t}{R}\right), \quad \widetilde{z}_{k,R}(t) = \left(\prod_{i=1}^{k} \ell_{[i]}\left(\frac{t}{R}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \forall t \in (0,R),$$

și $c = \frac{1}{4}$. În plus, condiția **(Z)** este valabilă pentru $\lambda = 2$. Se observă că

$$\lim_{t\to R} E_1(t) = \lim_{t\to R}\left(H'(t) + H(t)\cdot\frac{n-3}{t}\right) = \frac{n-k}{2}, \quad \text{unde} \quad H(t) = \frac{n}{2t} + \frac{\widetilde{z}'_{k,r}(t)}{\widetilde{z}_{k,r}(t)}.$$

Relația de mai sus arată că, dacă $k > n$, condiția de pozitivitate nu este îndeplinită și, prin urmare, Teorema 5.5 nu poate fi aplicată.

5.3 Aplicații II: Inegalități pe spații hiperbolice

În această secțiune, prezentăm aplicații ale rezultatelor noastre pe spații hiperbolice. Primul rezultat în acest context este următoarea inegalitate de interpolare.

Teorema 5.8 (a se vedea [55]). *Fie $\kappa < 0$, $n \geq 5$ și $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n_\kappa$ un domeniu. Se fixează $x_0 \in \Omega$ și se notează cu $\rho = d_{\kappa,x_0}$ distanța riemanniană de la x_0. Atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\Delta_\kappa u|^2 \,\mathrm{d}x_\kappa \geq |\kappa|\lambda \int_\Omega |\nabla^{\mathrm{rad}}_\kappa u|^2 \,\mathrm{d}x_\kappa &+ h_n^2(\lambda)\int_\Omega \frac{|\nabla^{\mathrm{rad}}_\kappa u|^2}{\rho^2}\,\mathrm{d}x_\kappa \\ &+ |\kappa|\left(\frac{n^2}{4} - h_n^2(\lambda)\right)\int_\Omega \frac{|\nabla^{\mathrm{rad}}_\kappa u|^2}{\sinh^2(\sqrt{-\kappa}\rho)}\,\mathrm{d}x_\kappa \\ &+ \gamma_n(\lambda)h_n(\lambda)\int_\Omega \frac{(\rho\,\mathbf{ct}_\kappa(\rho) - 1)}{\rho^2}|\nabla^{\mathrm{rad}}_\kappa u|^2\,\mathrm{d}x_\kappa, \end{aligned} \tag{5.9}$$

unde $0 \leq \lambda \leq \frac{(n-1)^2}{4}$, $\gamma_n(\lambda) = \sqrt{(n-1)^2 - 4\lambda}$ și $h_n(\lambda) = \frac{\gamma_n(\lambda)+1}{2}$.

Consecințele directe pot fi enunțate după cum urmează pentru cele două valori marginale ale lui λ.

Corolarul 5.9 (a se vedea [55]). *Se alege $\lambda = 0$ în (5.9). Pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ se obține*

$$\int_\Omega |\Delta_\kappa u|^2\,\mathrm{d}x_\kappa \geq \frac{n^2}{4}\int_\Omega \frac{|\nabla^{\mathrm{rad}}_\kappa u|^2}{\rho^2}\,\mathrm{d}x_\kappa + \frac{n(n-1)}{2}\int_\Omega \frac{(\rho\,\mathbf{ct}_\kappa(\rho) - 1)}{\rho^2}|\nabla^{\mathrm{rad}}_\kappa u|^2\,\mathrm{d}x_\kappa.$$

Corolarul 5.10 (a se vedea [55]). *Se alege $\lambda = \frac{(n-1)^2}{4}$ în (5.9). Pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ se obține*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\Delta_\kappa u|^2\,\mathrm{d}x_\kappa \geq \frac{(n-1)^2|\kappa|}{4}\int_\Omega |\nabla^{\mathrm{rad}}_\kappa u|^2\,\mathrm{d}x_\kappa &+ \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{|\nabla^{\mathrm{rad}}_\kappa u|^2}{\rho^2}\,\mathrm{d}x_\kappa \\ &+ \frac{(n^2-1)|\kappa|}{4}\int_\Omega \frac{|\nabla^{\mathrm{rad}}_\kappa u|^2}{\sinh^2(\sqrt{-\kappa}\rho)}\,\mathrm{d}x_\kappa.\end{aligned}$$

Complementele de ordin inferior ale Corolarului 5.10 pot fi enunțate după cum urmează.

Teorema 5.11 (a se vedea [55]). *Fie $\kappa < 0$, $n \geq 5$ și $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n_\kappa$ un domeniu. Se fixează $x_0 \in \Omega$ și se notează cu $\rho = d_{\kappa,x_0}$ distanța riemanniană de la x_0. Atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ au loc inegalitățile*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla_\kappa^{\mathrm{rad}} u|^2 \,\mathrm{d}x_\kappa \geq \frac{(n-1)^2|\kappa|}{4}\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x_\kappa + \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\rho^2}\,\mathrm{d}x_\kappa \\ + \frac{(n-1)(n-3)|\kappa|}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\sinh^2(\sqrt{-\kappa}\rho)}\,\mathrm{d}x_\kappa,\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|\nabla_\kappa^{\mathrm{rad}} u|^2}{\rho^2}\,\mathrm{d}x_\kappa \geq \frac{9}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\rho^4}\,\mathrm{d}x_\kappa - (n-1)\int_\Omega \frac{\mathbf{ct}_\kappa(\rho)}{\rho^3}\,\mathrm{d}x_\kappa + \frac{(n-1)^2|\kappa|}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\rho^2}\,\mathrm{d}x_\kappa \\ + \frac{(n-1)(n-3)|\kappa|}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\rho^2\sinh^2(\sqrt{-\kappa}\rho)}\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|\nabla_\kappa^{\mathrm{rad}} u|^2}{\sinh^2(\sqrt{-\kappa}\rho)}\,\mathrm{d}x_\kappa \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{t^2\sinh^2(\sqrt{-\kappa}\rho)}\,\mathrm{d}x_\kappa + \frac{(n-3)^2|\kappa|}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\sinh^2(\sqrt{-\kappa}\rho)}\,\mathrm{d}x_\kappa \\ + \frac{(n-3)(n-5)|\kappa|}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\sinh^4(\sqrt{-\kappa}\rho)}\,\mathrm{d}x_\kappa.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Observația 5.12. Versiunile non-radiale ale ultimelor trei inegalități pot fi obținute folosind Teorema 3.3 prin alegerea acelorași funcții pentru parametri; a se vedea, de asemenea, Secțiunea 3.2.4 și rezultatele din aceasta.

Încheiem secțiunea cu următorul rezultat, care combină Teorema 5.11 și Corolarul 5.10. Acest ultim rezultat poate fi enunțat după cum urmează.

Teorema 5.13 (a se vedea [55]). *Fie $\kappa < 0$, $n \geq 5$ și $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n_\kappa$ un domeniu. Se fixează $x_0 \in \Omega$ și se notează cu $\rho = d_{\kappa,x_0}$ distanța riemanniană de la x_0. Atunci pentru fiecare $u \in C_0^\infty(\Omega)$ are loc*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\Delta_\kappa u|^2\,\mathrm{d}x_\kappa \geq \frac{(n-1)^4|\kappa|}{16}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x_\kappa + \frac{(n-1)^2|\kappa|}{8}\int_\Omega \frac{u^2}{\rho^2}\,\mathrm{d}x_\kappa \\ + \frac{(n-1)^2|\kappa|}{8}\int_\Omega \frac{u^2}{\rho^2\sinh^2(\sqrt{-\kappa}\rho)}\,\mathrm{d}x_\kappa \\ + \frac{(n-1)(n-3)(n^2-2n-1)\kappa^2}{8}\int_\Omega \frac{u^2}{\sinh^2(\sqrt{-\kappa}\rho)}\,\mathrm{d}x_\kappa \\ - \frac{(n-1)\kappa}{4}\int_\Omega \frac{\mathbf{ct}_\kappa(\rho)|u^2|}{t^3}\,\mathrm{d}x_\kappa \\ + \frac{(n^2-1)(n-3)(n-5)\kappa^2}{16}\int_\Omega \frac{u^2}{\sinh^4(\sqrt{-\kappa}\rho)}\,\mathrm{d}x_\kappa + \frac{9}{16}\int_\Omega \frac{u^2}{\rho^4}\,\mathrm{d}x_\kappa.\end{aligned}$$

Bibliografie

[1] Adimurthi, N. Chaudhuri și M. Ramaswamy. An improved Hardy-Sobolev inequality and its applications. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(2):489–505, 2002.

[2] Adimurthi, M. Grossi și S. Santra. Optimal Hardy–Rellich inequalities, maximum principle and related eigenvalue problem. *J. Funct. Anal.*, 240(1):36–83, 2006.

[3] K. Akutagawa și H. Kumura. Geometric relative Hardy inequalities and the discrete spectrum of Schrödinger operators on manifolds. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 48:67–88, 2013.

[4] W. Allegretto. On the equivalence of two types of oscillation for elliptic operators. *Pac. J. Math.*, 55(2):319–328, 1974.

[5] P.R.S. Antunes, D. Buoso și P. Freitas. On the behavior of clamped plates under large compression. *SIAM J. Appl. Math.*, 79(5):1872–1891, 2019.

[6] M. Ashbaugh și R. Benguria. On Rayleigh's conjecture for the clamped plate and its generalization to three dimensions. *Duke Math. J.*, 78(1):1–17, 1995.

[7] A. A. Balinsky, W. D. Evans și R. T. Lewis. *The analysis and geometry of Hardy's inequality.* Springer Verlag Universitext, 2015.

[8] G. Barbatis, S. Filippas și A. Tertikas. A unified approach to improved L^p Hardy inequalities with best constants. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(6):2169–2196, 2004.

[9] E. Berchio, L. D'Ambrosio, D. Ganguly și G. Grillo. Improved L^p-Poincaré inequalities on the hyperbolic space. *Nonlinear Anal.*, 157:146–166, 2017.

[10] E. Berchio, D. Ganguly și G. Grillo. Sharp Poincaré–Hardy and Poincaré–Rellich inequalities on the hyperbolic space. *J. Funct. Anal.*, 272(4):1661–1703, 2017.

[11] E. Berchio, D. Ganguly, G. Grillo și Y. Pinchover. An optimal improvement for the Hardy inequality on the hyperbolic space and related manifolds. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 150(4):1699–1736, 2020.

[12] E. Berchio, D. Ganguly și P. Roychowdhury. On some strong Poincaré inequalities on Riemannian models and their improvements. *J. Math. Anal. Appl.*, 490(1):124213, 2020.

[13] E. Berchio, D. Ganguly și P. Roychowdhury. Hardy–Rellich and second order Poincaré identities on the hyperbolic space via Bessel pairs. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 61(4):24, Paper No. 130, 2022.

[14] G. Bol. Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 51:219–257, 1941.

[15] D. Borisov și P. Freitas. The spectrum of geodesic balls on spherically symmetric manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 2017(3):507–544, 2017.

[16] H. Brezis și M. Marcus. Hardy's inequalities revisited. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci*, 25:217–237, 1997.

[17] H. Brezis și J. L. Vázquez. Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems. *Rev. Mat. Univ. Compl. Madrid*, 10:443–469, 1997.

[18] L. Caffarelli, R. Kohn și L. Nirenberg. First order interpolation inequalities with weights. *Compos. Math.*, 53(3):259–275, 1984.

[19] G. Carron. Inégalités de Hardy sur les variétés riemanniennes non-compactes. *J. Math. Pures Appl.*, 76(10):883–891, 1997.

[20] F. G. de S. Carvalho și M. P de A. Cavalcante. On the fundamental tone of the p-Laplacian on Riemannian manifolds and applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 506(2):8, Paper No. 125703, 2022.

[21] F. Catrina și Z.-Q. Wang. On the Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities: Sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 54(2):229–258, 2001.

[22] C. Cazacu, J. Flynn și N. Lam. Sharp second order uncertainty principles. *J. Funct. Anal.*, 283(10):37, Paper No. 109659, 2022.

[23] I. Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984.

[24] Y. Chen, N. C. Leung și W. Zhao. Sharp Hardy inequalities via Riemannian submanifolds. *J. Geom. Anal.*, 32(7):204, 2022.

[25] Q.-M. Cheng și H. Yang. Estimates for eigenvalues on Riemannian manifolds. *J. Differ. Equ.*, 247(8):2270–2281, 2009.

[26] Q.-M. Cheng și H. Yang. Universal inequalities for eigenvalues of a clamped plate problem on a hyperbolic space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139(2):461–471, 2011.

[27] S.-Y. Cheng. Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. *Math. Z.*, 143:289–297, 1975.

[28] C. B. Croke. A sharp four dimensional isoperimetric inequality. *Comment. Math. Helvetici*, 59(1):187–192, 1984.

[29] L. D'Ambrosio și S. Dipierro. Hardy inequalities on Riemannian manifolds and applications. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 31(3):449–475, 2014.

[30] E. B. Davies. *Heat kernels and spectral theory.* 92. Cambridge university press, 1989.

[31] E. B. Davies și A. M. Hinz. Explicit constant for Rellich inequalities in $L^p(\Omega)$. *Math. Z.*, 227:511–524, 1998.

[32] F. Della Pietra, G. di Blasio și N. Gavitone. Anisotropic Hardy inequalities. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 148(3):483–498, 2018.

[33] B. Devyver, M. Fraas și Y. Pinchover. Optimal Hardy weight for second-order elliptic operator: An answer to a problem of Agmon. *J. Funct. Anal.*, 266(7):4422–4489, 2014.

[34] A. Dinghas. Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung. *Math. Nachr.*, 2(3-4):148–162, 1949.

[35] N. T. Duy, N. Lam și G. Lu. p-Bessel Pairs, Hardy's Identities and Inequalities and Hardy–Sobolev Inequalities with Monomial Weights. *J. Geom. Anal.*, 32(109):36, 2022.

[36] D. E. Edmunds și H. Triebel. Sharp Sobolev embeddings and related Hardy inequalities: the critical case. *Math. Nachr.*, 207:79–92, 1999.

[37] G. Faber. Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt. *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-Phys. Kl.*, pages 169–172, 1923.

[38] C. Farkas, S. Kajántó și A. Kristály. Sharp spectral gap estimates for higher-order operators on Cartan-Hadamard manifolds. *Commun. Contemp. Math.*, 2024. accepted.

[39] C. Farkas, S. Kajántó și C. Varga. Lower semicontinuity of Kirchhoff-type energy functionals and spectral gaps on (sub)Riemannian manifolds. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 61(2):743–760, 2023.

[40] C. L. Fefferman. The uncertainty principle. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 9(2):129–206, 1983.

[41] S. Filippas, V. Maz'ya și A. Tertikas. On a question of Brezis and Marcus. *Calc. Var.*, 25(4):491–501, 2006.

[42] S. Filippas, V. Maz'ya și A. Tertikas. Critical Hardy–Sobolev inequalities. *J. Math. Pures Appl.*, 87(1):37–56, 2007.

[43] S. Filippas și A. Tertikas. Optimizing improved Hardy inequalities. *J. Funct. Anal.*, 192(1):186–233, 2002.

[44] J. Flynn, N. Lam și G. Lu. Hardy-Poincaré-Sobolev type inequalities on hyperbolic spaces and related Riemannian manifolds. *J. Funct. Anal.*, 283(12):37, Paper No. 109714, 2022.

[45] J. Flynn, N. Lam, G. Lu și S. Mazumdar. Hardy's identities and inequalities on Cartan-Hadamard manifolds. *J. Geom. Anal.*, 33(1):34, Paper No. 27, 2023.

[46] R. Frank. *Sobolev inequalities and uncertainty principles in mathematical physics, Part 1, Lectur Notes.* LMU Munich, 2011.

[47] S. Gallot, D. Hulin și J. Lafontaine. *Riemmanian Geometry.* Universitext Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[48] N. Ghoussoub și A. Moradifam. On the best possible remaining term in the Hardy inequality. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 105(37):13746–13751, 2008.

[49] N. Ghoussoub și A. Moradifam. Bessel pairs and optimal Hardy and Hardy–Rellich inequalities. *Math. Ann.*, 349(1):1–57, 2011.

[50] N. Ghoussoub și A. Moradifam. *Functional Inequalities: New Perspectives and New Applications*, volume 187 of *Mathematical Surveys and Monographs.* AMS, 2013.

[51] R. E. Greene și H.-H. Wu. *Function theory on manifolds which possess a pole*, volume 699. Springer, 2006.

[52] G. H. Hardy. Note on a theorem of Hilbert. *Math. Z.*, 6(3-4):314–317, 1920.

[53] E. Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities: Sobolev spaces and inequalities*, volume 5 of *Courant Lect. Notes Math.* AMS, 2000.

[54] J. Heinonen, T. Kilpeläinen și Martio O. *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations.* Clarendon Press, Oxford, 1993.

[55] S. Kajántó. Rellich inequalities via Riccati pairs on model space forms. *J. Math. Anal. Appl.*, 531(2, Part 1):13, Paper No. 127870, 2024.

[56] S. Kajántó, A. Kristály, I. R. Peter și W. Zhao. A generic functional inequality and Riccati pairs: an alternative approach to Hardy-type inequalities. *Math. Ann.*, 2024. accepted.

[57] S. Kajántó și A. Kristály. Unexpected Behaviour of Flag and S-Curvatures on the Interpolated Poincaré Metric. *J. Geom. Anal.*, 31:10246–10262, 2021.

[58] S. Kajántó și A. Kristály. Saturation phenomena of a nonlocal eigenvalue problem: the Riemannian case. *Optimization*, pages 1–24, 2023.

[59] B. Kleiner. An isoperimetric comparison theorem. *Invent. Math.*, 108(1):37–47, 1992.

[60] B. R. Kloeckner și G. Kuperberg. The Cartan–Hadamard conjecture and the Little Prince. *Rev. Mat. Iberoam.*, 35(4):1195–1258, 2019.

[61] I. Kombe și M. Özaydin. Improved Hardy and Rellich inequalities on Riemannian manifolds. *Trans. Am. Math. Soc.*, 361(12):6191–6203, 2009.

[62] I. Kombe și M. Özaydin. Hardy-Poincaré, Rellich and uncertainty principle inequalities on Riemannian manifolds. *Trans. Am. Math. Soc.*, 365(10):5035–5050, 2013.

[63] E. Krahn. Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises. *Math. Ann.*, 94(1):97–100, 1925.

[64] A. Kristály. Sharp uncertainty principles on Riemannian manifolds: the influence of curvature. *J. Math. Pures Appl.*, 119(9):326–346, 2018.

[65] A. Kristály. Fundamental tones of clamped plates in nonpositively curved spaces. *Adv. Math.*, 367:39, Paper No. 107113, 2020.

[66] A. Kristály. Lord Rayleigh's conjecture for vibrating clamped plates in positively curved spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 32(4):881–937, 2022.

[67] A. Kristály. New features of the first eigenvalue on negatively curved spaces. *Adv. Calc. Var.*, 15(3):475–495, 2022.

[68] A. Kristály, Á. Mester și I. I. Mezei. Sharp Morrey–Sobolev inequalities and eigenvalue problems on Riemannian–Finsler manifolds with nonnegative Ricci curvature. *Commun. Contemp. Math.* Paper No. 2250063, 2022.

[69] A. Kristály și S. Ohta. Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality on metric measure spaces with applications. *Math. Ann.*, 357(2):711–726, 2013.

[70] A. Kristály și D. Repovš. Quantitative Rellich inequalities on Finsler–Hadamard manifolds. *Commun. Contemp. Math.*, 18(6):17, Paper No. 1650020, 2016.

[71] A. Kristály și A. Szakál. Interpolation between Brezis-Vázquez and Poincaré inequalities on nonnegatively curved spaces: sharpness and rigidities. *J. Differ. Equ.*, 266(10):6621–6646, 2019.

[72] R. Küstner. Mapping properties of hypergeometric functions and convolutions of starlike or convex functions of order α. *Comput. Methods Funct. Theory*, 2:597–610, 2002.

[73] R. T. Lewis, J. Li și Y. Li. A geometric characterization of a sharp Hardy inequality. *J. Funct. Anal.*, 262(7):3159–3185, 2012.

[74] X. Li, J. Mao și L. Zeng. Eigenvalues of the bi-drifting Laplacian on the complete noncompact Riemannian manifolds. *Z. Angew. Math. Phys.*, 73(6):19, Paper No. 240, 2022.

[75] H. McKean. An upper bound to the spectrum of Δ on a manifold of negative curvature. *J. Diff. Geom.*, 4(3):359–366, 1970.

[76] C. Meng, H. Wang și W. Zhao. Hardy type inequalities on closed manifolds via Ricci curvature. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 151(3):993–1020, 2021.

[77] Á. Mester, I. R. Peter și C. Varga. Sufficient criteria for obtaining Hardy inequalities on Finsler manifolds. *Mediterr. J. Math.*, 18(2):1–22, Paper No. 76, 2021.

[78] E. Mitidieri. A Rellich type identity and applications: Identity and applications. *Commun. Partial. Differ. Equ.*, 18(1-2):125–151, 1993.

[79] E. Mitidieri. A simple approach to Hardy inequalities. *Mathematical notes*, 67:479–486, 2000.

[80] W. Moss și J. Piepenbrink. Positive solutions of elliptic equations. *Pac. J. Math.*, 75(1):219–226, 1978.

[81] B. Muckenhoupt. Hardy's inequality with weights. *Studia Math.*, 44:31–38, 1972.

[82] N. S. Nadirashvili. Rayleigh's conjecture on the principal frequency of the clamped plate. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 129(1):1–10, 1995.

[83] Q. A. Ngô și V. H. Nguyen. Sharp constant for Poincaré-type inequalities in the hyperbolic space. *Acta Math. Vietnam.*, 44:781–795, 2019.

[84] V. H. Nguyen. New sharp Hardy and Rellich type inequalities on Cartan–Hadamard manifolds and their improvements. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 150(6):2952–2981, 2020.

[85] V. H. Nguyen. Sharp Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities on Riemannian manifolds: the influence of curvature. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 152(1):102–127, 2022.

[86] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert și C. W. Clark (eds). *NIST Handbook of Mathematical Functions.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[87] Y. Pinchover. Criticality and ground states for second-order elliptic equations. *J. Differ. Equ.*, 80(2):237–250, 1989.

[88] Y. Pinchover. On criticality and ground states of second order elliptic equations, II. *J. Differ. Equ.*, 87(2):353–364, 1990.

[89] J. W. S. Rayleigh. The Theory of Sound. 2nd edition, revised and enlarged (in two volumes), 1945.

[90] F. Rellich. Halbbeschränkte Differentialoperatoren höherer Ordnung. In *Proc. Int. Congr. Math.*, volume 3, pages 243–250, 1954.

[91] M. Ruzhansky și D. Suragan. Hardy and Rellich inequalities, identities și sharp remainders on homogeneous groups. *Adv. Math.*, 317:799–822, 2017.

[92] M. Ruzhansky și D. Suragan. *Hardy inequalities on homogeneous groups: 100 years of Hardy inequalities.* Birkhäuser Basel, 2019.

[93] A. Savo. On the lowest eigenvalue of the Hodge Laplacian on compact, negatively curved domains. *Ann. Global Anal. Geom.*, 35(1):39–62, 2009.

[94] A. Tertikas și N. B. Zographopoulos. Best constants in the Hardy–Rellich inequalities and related improvements. *Adv. Math.*, 209(2):407–459, 2007.

[95] Z.-Q. Wang și M. Willem. Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities with remainder terms. *J. Funct. Anal.*, 203(2):550–568, 2003.

[96] G. N. Watson. A Treatise on the Theory of Bessel Functions, reprint of the second (1944) edition. *Cambridge Univ. Press*, 1995.

[97] C. Xia. The Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities on complete manifolds. *Math. Res. Lett.*, 14(5):875–885, 2007.

[98] Q. Yang, D. Su și Y. Kong. Hardy inequalities on Riemannian manifolds with negative curvature. *Commun. Contemp. Math.*, 16:24, 2014.

[99] S.-T. Yin și Q. He. The first eigenvalue of Finsler p-Laplacian. *Differ. Geom. Appl.*, 35:30–49, 2014.

[100] W. Zhao. Hardy inequalities with best constants on Finsler metric measure manifolds. *J. Geom. Anal.*, 31(2):1992–2032, 2021.