Universitatea "Babeș-Bolyai" Cluj-Napoca
Școala Doctorală de Matematică și Informatică

SISTEME NELINIARE ȘI ECHILIBRE DE TIP NASH

Rezumatul tezei de doctorat

Doctorand
Andrei Stan

Conducător de doctorat
Prof. Dr. Radu Precup

CLUJ-NAPOCA
2024

Cuprins

Introducere

În această teză, combinăm noțiunile de punct fix și punct critic pentru a obține o înțelegere mai profundă a proprietăților calitative ale soluțiilor pentru diverse sisteme neliniare. În mod specific, investigăm proprietățile de echilibru ale soluțiilor pentru unele sisteme neliniare. Accentul nostru principal este pus pe echilibre de tip Nash.

Conceptul de echilibru, înțeles astăzi sub numele de echilibru Nash, își are rădăcinile istorice în studiul economic realizat de A. Cournot în mijlocul secolului al XIX-lea, în cartea *The Mathematical Principles of the Theory of Wealth* [21, Capitolul VII]. Acest studiu examinează rezultatele a doi ”proprietari” care analizeaza atât prețul total per produs, cât și cantitatea de vânzări. Analiza presupune că proprietarii nu funcționeaza ca un monopol, adică niciunul dintre ei nu exercita influență asupra celuilalt. Cu alte cuvinte, analiza s-a concentrat pe un scenariu în care ambii proprietari se aflau într-o stare în care niciunul nu putea îmbunătăți profitul în raport cu celălalt.

În 1951, J. Nash [40] a examinat astfel de echilibre în jocuri finite non-cooperative din cadrul teoriei jocurilor și a furnizat un rezultat riguros de existență folosind teorema punctului fix a lui Brouwer [11]. Noutatea acestui articol constă în aplicabilitatea sa la orice joc finit, contrastând cu încercările anterioare precum cea realizată de J. Neumann și O. Morgenstern în 1944 [39].

O nouă perspectivă este să folosim noțiunea de echilibru Nash în mod mai general pentru sisteme de ecuații operator, în special pentru un sistem de două ecuații cu u și v ca necunoscute, unde fiecare dintre ecuații are o funcție de energie $E_1(u,v)$ și $E_2(u,v)$, respectiv. O soluție (u^*,v^*) este un echilibru Nash dacă

$$E_1(u^*,v^*) = \min E_1(\cdot,v^*) \text{ și } E_2(u^*,v^*) = \min E_2(u^*,\cdot).$$

Începând din 1951, ideea unui echilibru Nash a fost extensiv dezvoltată nu numai în domeniul teoriei jocurilor, ci și în diverse alte domenii (vezi, de exemplu, F. Facchinei și C. Kanzow [29], S. Park [41,42], J. Li și S. Park [37], J. Krawczyk [36], S. Cacace, E. Cristiani, M. Falcone [15], J.A. Ramos, R. Glowinski și J. Periaux [58,59]).

Structura tezei

Teza noastră constă din patru capitole, fiecare având mai multe secțiuni în interior.

Capitolul 1 este dedicat conceptelor preliminare esențiale, rezultatelor și notării utilizate pe parcursul acestei lucrări. În Secțiunea 1.1, introducem rezultate fundamentale legate de derivata Fréchet și operatorii Nemytskii. Secțiunea 1.2 discută principiul variațional al lui Ekeland și consecințele sale. În Secțiunea 1.3, revizuim conceptele legate de matrice cconvergente la zero și proprietățile asociate acestora. În cele din urmă, ultimele trei secțiuni furnizează rezultate necesare utilizate pe parcursul tezei, acoperind teoremele punctului fix, spațiile Sobolev și un nou concept de linking introdus de R. Precup.

În **Capitolul 2**, ne concentrăm pe sistemele în care fiecare dintre ecuații admite o structură variațională, adică fiecare ecuație este echivalentă cu o problemă de punct critic. Secțiunea 2.1 începe cu un rezultat de existență și unicitate pentru o ecuație de tip Kirchhoff, unde demonstrăm, de asemenea, echivalența sa cu o problemă de punct critic. Ulterior, investigăm un sistem de ecuații Kirchhoff, demonstrând existența unei soluții care este și un echilibru Nash pentru funcționalele energie asociate. Acest rezultat este obținut atât în întregul domeniu, cât și într-o bila. Sunt furnizate exemple ilustrative pentru fiecare caz.

Capitolul continuă cu Secțiunea 2.2, unde studiem un sistem abstract pe spații Banach reflexive și uniform convexe, sub ipoteza că fiecare ecuație posedă o formă variațională.

Toate rezultatele din Secțiunea 2.1 sunt originale și au fost publicate în R. Precup și A. Stan [54]. În Secțiunile 2.2 și 2.3, contribuțiile noastre sunt: Teorema 2.8, Teorema 2.9, Teorema 2.10 și Exemplul 2.3. Acestea au fost publicate în A. Stan [67].

Scopul **Capitolului 3** este să investigăm în continuare existența soluțiilor care constituie echilibre Nash, chiar și pentru sisteme în care nu toate ecuațiile admit o structură variațională. În Secțiunea 3.1, studiem un sistem de trei ecuații în care doar ultimele două dintre ele au această proprietate. Oferim condiții suficiente astfel încât sistemul să fie rezolvabil și, în plus, ultimele două componente ale soluției să fie un echilibru Nash pentru funcționalele energie asociate.

În Secțiunea 3.2, explorăm un sistem similar celui din Secțiunea 3.1, dar cu un număr arbitrar de ecuații. Presupunem că doar ultimele p ecuații admit o formă variațională. Scopul nostru nu este doar să demonstrăm existența soluțiilor astfel încât ultimele p componente ale soluției să fie un echilibru Nash pentru funcționalele lor energie, ci și să stabilim localizarea lor în mulțimi conice. În cele din urmă, în Secțiunea 3.3, prezentăm aplicații ale rezultatelor obținute atât în Secțiunea 3.1, cât și în Secțiunea 3.2. Fiecare aplicație este însoțită de un exemplu ilustrativ.

Toate rezultatele din acest capitol sunt originale și pot fi găsite în A. Stan [65,66].

Capitolul 4 își propune să extindă conceptul de echilibru Nash discutat în capitolele anterioare. Ideea nu este doar de a atinge minimul funcționalelor energie, ci și de a obține puncte de tip mountain-pass, toate acestea printr-o teorie unitară. Astfel, dat fiind un sistem de puncte critice $E_{11}(u,v)=0$ și $E_{22}(u,v)=0$, unde E_{ii} $(i=1,2)$ reprezintă derivata Fréchet a unei funcții E_i în raport cu a i-a variabilă, ne propunem să obținem o soluție (u^*,v^*) astfel încât una dintre următoarele situații să fie valabilă: a) $E_1(u^*,v^*)$ este minim pentru $E_1(u^*,\cdot)$ și $E_2(u^*,v^*)$ este minim pentru $E_2(\cdot,v^*)$ (echilibru Nash), b) $E_1(u^*,v^*)$ este minim pentru $E_1(u^*,\cdot)$ și $E_2(u^*,v^*)$ este un punct de tip mountain-pass pentru $E_2(\cdot,v^*)$ sau c) $E_1(u^*,v^*)$ este un punct de tip mountain-pass pentru $E_1(\cdot,v^*)$ și $E_2(u^*,v^*)$ este un punct de tip mountain-pass pentru $E_2(u^*,\cdot)$. Pentru a sublinia importanța problemei, să considerăm perechea de funcții de mai jos pe $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
&E_1(x,y,z,w)=x^2+y^2+z^2+w^2-xz,\ E_2(x,y,z,w)=x^2+2y^2+z^2+w^2-yw,\\
&F_1(x,y,z,w)=x^2+y^2+z^2+w^2-xz,\ F_2(x,y,z,w)=x^2+2y^2+z^2-w^2-yw,\\
&G_1(x,y,z,w)=x^2-y^2+z^2+w^2-xz,\ G_2(x,y,z,w)=x^2+2y^2+z^2-w^2-yw.
\end{aligned}
$$

Se poate observa ușor că perechea (u^*,v^*), unde $u^*=v^*=(0,0)$, este un punct critic pentru toate funcțiile de mai sus, dar cu proprietăți diferite. Într-adevăr: u^* minimizează $E_1(\cdot,v^*)=x^2+y^2$ în timp ce v^* minimizează $E_2(u^*,\cdot)=z^2+w^2$, u^* minimizează $F_1(\cdot,v^*)=x^2+y^2$ în timp ce v^* este un punct de tip mountain-pass pentru $F_2(u^*,\cdot)=z^2-w^2$, și în cele din urmă u^* este un punct de tip mountain-pass pentru $G_1(\cdot,v^*)=x^2-y^2$ în timp ce v^* esteun punct de tip mountain-pass pentru $G_2(u^*,\cdot)=z^2-w^2$.

Această lucrare completează semnificativ lucrarea [53] și extinde ideile și tehnicile prezentate în M. Bełdzinski și M. Galewski [8], R. Precup și A. Stan [48, 52, 53, 65] (vezi și G. Kassay și V. D. Rădulescu [34, Cap. 8]). Cu toate acestea, noutatea absolută introdusă de această lucrare constă în abordarea unitară pentru obținerea soluțiilor care sunt echilibre Nash generalizate pentru sistem, adică unele componente ale soluției pot fi puncte critice de tip mountain-pass, în timp ce altele pot fi puncte de minim. Teoria se aplică nu doar sistemelor cu două ecuații, ci poate fi extinsă la orice număr de ecuații.

Toate rezultatele din acest capitol sunt incluse în R. Precup și A. Stan [55].

Publicațiile autorului:

1. A. Stan. *Nonlinear systems with a partial Nash type equilibrium.* Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., **66**(2):397–408, 2021.

2. R. Precup and A. Stan. *Stationary Kirchhoff equations and systems with reaction terms.* AIMS Math., **7**(8):15258–15281, 2022.

3. A. Stan. *Nash equilibria for componentwise variational systems.* J. Nonlinear Funct. Anal., **6**, 2023.

4. R. Precup and A. Stan. *Linking methods for componentwise variational systems.* Results Math., **78**:246, 2023.

5. A. Stan. *Localization of Nash-type equilibria for systems with a partial variational structure* J. Numer. Anal. Approx. Theory, **52**(2):253–272, 2023.

Cuvinte cheie

Echilibre de tip Nash, Operatori monotoni, Sisteme eliptice, Metode variaționale, Linking, Geometrie mountain pass, Principiul variational a lui Ekeland

Mulțumiri

Realizarea acestei teze o datorez sprijinului constant, răbdării, îndrumării oferite de către dl prof Radu Precup. Sunt profund recunoscător pentru angajamentul său neclintit în menținerea standardelor academice riguroase și pentru vasta cunoștință pe care am dobândit-o sub îndrumarea sa. Mulțumiri speciale sunt adresate tuturor membrilor Grupului de Ecuatii Diferențiale, pentru ajutorul lor amabil și sugestiile valoroase oferite în timpul seminarilor de cercetare. În final, aș dori să adresez mulțumiri speciale familiei mele pentru suportul lor necondiționat și încurajarea oferită.

Capitolul 1

Preliminarii

În acest capitol enumerăm câteva noțiuni și rezultate pe care le folosim pe parcursul tezei noastre. Principiul variațional al lui Ekeland, teoremele punctului fix, proprietățile matricelor convergente la zero și rezultatele din teoria spațiilor Sobolev sunt principalele instrumente în cercetarea noastră.

Conceptele discutate aici sunt bine documentate în literatură. Unele dintre referințele remarcabile includ lucrările lui A. I. Perov [44], I. A. Rus [61, 62], F. Browder [12], H. Brezis [10], K. Deimling [22], R. Precup [45,49], P. G. Ciarlet [16], H. Le Dret [26], C. Zălinescu [70], G. Kassay și V. D. Rădulescu [34], R. S. Varga [69], A. Granas și J. Dugundji [32], R. Adams și J. Fournier [1].

1.1 Calcul diferențial în spații Banach

Definition 1.1. *Se spune că E este diferențiabilă Fréchet în $u \in X$, dacă există $E'(u) \in X^*$ astfel încât*

$$E(u+v) - E(u) = \langle E'(u)\, ,\, v\rangle + \omega(u,v), \ \textit{pentru orice } v \in X,$$

unde ω este astfel încât

$$\frac{\omega(u,v)}{|v|} \to 0, \quad \textit{dacă } |v| \to 0.$$

Definition 1.2 ([45, Definiția 5.1])**.** *O funcție $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ se spune că este de tip Carathéodory dacă*

1. *$f(\cdot, y) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ este măsurabilă pentru fiecare $y \in \mathbb{R}^m$;*

2. *$f(x, \cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ este continuă pentru aproape fiecare $x \in \mathbb{R}^m$.*

În discuția ulterioară, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ denotă un o mulțime deschisă și mărginit.

Definition 1.3. *Fie* $f\colon \Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^N$ *o funcție. Operatorul Nemytskii asociat cu* f *este acea funcție care asociază oricărei funcții* $u\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$*, noua funcție* $N_f(u)\colon\Omega\to\mathbb{R}^N$*, dată de*

$$N_f\ (u)\,(x)=f(x,u(x)),\ \textit{pentru orice } x\in\Omega.$$

Teorema 1.1 ([46, Teorema 9.1])**.** *Fie* $p,q\in(1,\infty)$ *și fie* $f\colon\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^N$ *o funcție de tip Carathéodory. Presupunem că există constantele* $c_1,c_2\in\mathbb{R}_+$ *astfel încât*

$$|f(x,y)|\le c_1|y|^{\frac{p}{q}}+c_2,\ \textit{pentru orice } y\in\mathbb{R}^n \textit{ și aproape orice } x\in\Omega.$$

Atunci, operatorul Nemytskii N_f *este bine definit și continuu de la* $L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ *la* $L^q\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$*.*

Example 1.1. *Fie* $F\colon\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *o funcție cu următoarele proprietăți:*

(1) $F(\cdot,0)=0$*,*

(2) F *este de tip Carathéodory,*

(3) $F(x,\cdot)$ *este continuă și derivabilă.*

Dacă $\nabla F(x,\cdot)$ *este, de asemenea, de tip Carathéodory, atunci funcționala*

$$E\colon L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R},\ E(u)=\int_\Omega F(x,u(x))dx,$$

aparține lui $C^1\left(L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)\right)$*, și mai mult* $E'=N_f$*, adică,*

$$\langle E'(u),v\rangle=\int_\Omega\left(\nabla F(x,u(x))\,,\,v(x)\right)dx,\ \ \textit{pentru orice } v\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n).$$

1.2 Principiul variational Ekeland

În primul rând, reamintim forma slabă a principiului variational Ekeland (vezi, I. Ekeland [27], D. G. de Figueiredo [30]).

Teorema 1.2 (Ekeland)**.** *Fie* (X,d) *un spațiu metric complet, iar* $E:X\to\mathbb{R}$ *o funcțională inferior semicontinuă și mărginită inferior. Atunci, pentru orice* $\varepsilon>0$*, există un element* $x\in X$ *care satisface următoarele două proprietăți*

$$E\,(x)\ \ \le\ \ \inf_{y\in X}E\,(y)+\varepsilon,$$

și

$$E\,(x)\le E\,(y)+\varepsilon d\,(x,y)\,,\quad \textit{pentru orice } y\in X.$$

Propoziția 1.3. *Având ipotezele din Teorema 1.2, când X este un spațiu Banach echipat cu norma $|\cdot|_X$ și E este o funcțională de tip C^1, atunci există un șir (u_k) din X astfel încât*

$$E(u_k) \to \inf_X E \quad \text{și} \quad E'(u_k) \to 0.$$

Principiul variational Ekeland se extinde la bile sau la mulțimi conice, fiind deosebit de valoros pentru demonstrarea existenței punctelor aproape critice în mulțimi mărginite. Să considerăm H un spațiu Hilbert cu produsul scalar $(\cdot,\cdot)_H$ și norma indusă $|\cdot|_H$.

Teorema 1.4 ([63, Teorema 5.3.1]). *Fie $R > 0$, și fie $E : B_R \to \mathbb{R}$ o funcțională de tip C^1 care este mărginită inferior, unde B_R reprezintă bila închisă de rază R centrată în origine. Atunci, există un șir (u_k) din B_R astfel încât*

$$E(u_k) \to \inf_{B_R} E,$$

și una dintre următoarele două situații are loc

(a) $E'(u_k) \to 0$;

(b) $|u_k|_H = R$, $(E'(u_k), u_k) \leq 0$, *pentru orice* $k \in \mathbb{N}$, *și*

$$E'(u_k) - \frac{(E'(u_k), u_k)_H}{R^2} u_k \to 0.$$

Fie $K \subset H$ un con și $l\colon K \to \mathbb{R}$ o funcțională concavă și superior semicontinuă. De asemenea, presupunem existența unui operator $N\colon H \to H$ și a unui funcționale de tip C^1, $E\colon H \to \mathbb{R}$, astfel încât $E'(u) = u - N(u)$, pentru orice $u \in H$. Pentru două numere reale pozitive $0 < r < R$, să considerăm mulțimea conică convexă $K_{r,R}$ definită prin

$$K_{r,R} := \{u \in K \,:\, r \leq l(u),\ |u|_H \leq R\}.$$

În continuare, reamintim o variantă a principiului variational Ekeland pe mulțimea $K_{r,R}$. Pentru demonstrație și detalii suplimentare, vezi R. Precup [52, Lemma 2.1].

Lema 1.5. *Presupunem că următoarele condiții sunt satisfăcute:*

(i) *Funcționala E este mărginit inferior pe $K_{r,R}$, adică*

$$m := \inf_{K_{r,R}} E(\cdot) > -\infty.$$

(ii) *Există $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $u \in K_{r,R}$ care satisface atât $|u|_H = R$ cât și $l(u) = r$, avem $E(u) \geq m + \varepsilon$.*

(iii) $l(N(u)) \geq r$, *pentru toate* $u \in K_{r,R}$.

Atunci, există un șir $(u_k) \in K_{r,R}$ *astfel încât*

$$E(u_k) \leq m + \frac{1}{k},$$

și

$$|E'(u_k) + \lambda_n u_k|_H \leq \frac{1}{k},$$

unde

$$\lambda_n = \begin{cases} -\frac{1}{R^2}(E'(u_k), u_k)_H, & \text{când } |u_k|_H = R \text{ și } (E'(u_k), u_k)_H < 0 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

1.3 Matrici convergente la zero

Definition 1.4. *O matrice pătratică* $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ *se spune că este convergentă la zero dacă*

$$A^k \to O_n \text{ când } k \to \infty,$$

unde O_n *reprezintă matricea nulă de ordin* n.

Pentru orice $r \in \{1, \ldots, n\}$, să considerăm submatricea diagonală $A_r := [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq r}$. Observăm că dacă A este convergentă l zero, atunci și A_r este de asemenea convergentă către zero, conform următoarei leme.

Lema 1.6. *Presupunem că matricea* A *este convergentă la zero. Atunci,* A_r *este de asemenea convergentă către zero, pentru orice* $r \in \{1, \ldots, n\}$.

Pentru o matrice pătratică $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, condiția ca A să fie conveargă la zero este echivalentă cu fiecare dintre următoarele proprietăți din Teorema 1.7 de mai jos (vezi, de exemplu, A. Berman și R. J. Plemmons [7], R. Precup [47]).

Lema 1.7. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) *Matricea* A *este convergentă la zero.*

(ii) *Matricea* $I - A$ *este nesingulară, iar elementele inversei sale* $(I-A)^{-1}$ *sunt nenegative.*

(iii) *Raza spectrală a lui* A *este mai mică decât* 1, *adică valoarea maximă a modulelor propriilor sale este mai mică decât 1.*

(iv) *Există o matrice diagonală pozitivă* $D = (d_{ii})_{1\leq i\leq n}$ *astfel încât*

$$(D(I-A)x, x) > 0, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

În cazul în care $n = 2$, următoarea caracterizare echivalentă este adevărată (vezi, de exemplu, R. Precup [47]).

Lema 1.8. *Fie $A = [a_{ij}]_{1\le i,j\le 2}$ o matrice pătratică de numere reale nenegative. Atunci, A este convergentă la zero dacă și numai dacă $a_{11}, a_{22} < 1$ și*

$$a_{11} + a_{22} < 1 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.1}$$

Următorul rezultat legat de matricile convergente către zero este intens utilizat în această teză.

Lema 1.9 ([65, Lemma 2.2])**.** *Fie $(x_{k,p})_{k\ge 1}$, $(y_{k,p})_{k\ge 1}$ două șiruri de vectori în $\mathbb{R}^n_+$ (vectori coloană), ambele dependente de un parametru p, care satisface de asemenea:*

$$x_{k,p} \le Ax_{k-1,p} + y_{k,p}$$

pentru orice k și p, unde $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ este o matrice convergentă către zero. Dacă șirul $(x_{k,p})_{k\ge 1}$ este mărginit uniform în raport cu p și $y_{k,p} \to 0_n$ când $k \to \infty$ uniform în raport cu p, atunci $x_{k,p} \to 0_n$ când $k \to \infty$ uniform în raport cu p.

1.4 Teoreme de punct fix

Teorema 1.10 (Perov)**.** *Considerăm două spații metrice complete (X_i, d_i) $(i = 1, 2)$. Fie $N_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ doi operatori și presupunem că există o matrice pătratică A de dimensiune doi cu intrări pozitive și rază spectrală $\rho(A) < 1$ astfel încât următoarea inegalitate vectorială este satisfăcută*

$$\begin{pmatrix} d_1 (N_1 (x, y), N_1 (u, v)) \\ d_2 (N_2 (x, y), N_2 (u, v)) \end{pmatrix} \le A \begin{pmatrix} d_1 (x, y) \\ d_2 (u, v) \end{pmatrix},$$

pentru orice $(x, y), (u, v) \in X_1 \times X_2$. Atunci, există un punct unic $(x^*, y^*) \in X_1 \times X_2$ cu $x^* = N_1 (x^*, y^*)$ și $y^* = N_2 (x^*, y^*)$. În plus, punctul (x^*, y^*) poate fi obținut folosind metoda aproximațiilor succesive pornind de la un punct inițial arbitrar (x_0, y_0), deoarece pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem

$$\begin{pmatrix} d_1 \left(N_1^k (x_0, y_0), x^*\right) \\ d_2 \left(N_2^k (x_0, y_0), y^*\right) \end{pmatrix} \le A^k (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} d_1 (x_0, N_1 (x_0, y_0)) \\ d_2 (y_0, N_2 (x_0, y_0)) \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.11 (Schauder)**.** *Fie X un spațiu Banach, $D \subset X$ o mulțime nevidă, închisă, convexă și mărginită, iar $T : D \to D$ un operator compact (adică continuu, cu $T(D)$ relativ compact). Atunci, T are cel puțin un punct fix în D.*

Teorema 1.12 (Leray-Schauder)**.** *Fiind X un spațiu Banach și $T\colon X \to X$ o aplicație continuă și compactă care îndeplinește următoarea condiție: există $R > 0$ astfel încât mulțimea $\cup_{\lambda\in[0,1]}\{x \in X \,:\, x = \lambda Tx\}$ este inclusă într-o bilă de rază R, centrată în origine. Atunci, T are cel puțin un punct fix.*

Definition 1.5. *Fie $T\colon X \to X^*$ un operator. Se spune că:*

(i) T este tare monoton dacă există $a > 0$ astfel încât

$$\langle T(u) - T(v)\,,\, u - v\rangle \geq a|u - v|_X^2, \text{ pentru orice } u, v \in X.$$

T este considerat monoton dacă constanta a poate lua valoarea 0.

(ii) T este coerciv dacă

$$\frac{\langle T(u), u\rangle}{|u|_X} \to \infty \text{ când } |u|_X \to \infty.$$

(iii) T este semicontinuu dacă pentru orice $x_n \to x^*$ în X avem că $T(x_n) \to T(x)$ în sens slab, adică

$$\langle T(x_n)\,,\, y\rangle \to \langle T(x^*)\,,\, y\rangle, \text{ pentru orice } y \in X.$$

Teorema 1.13 (Minty-Browder)**.** *Fie X un spațiu Banach real, reflexiv și separat. Presupunem că $T\colon X \to X^*$ este un operator mărginit, semicontinuu, coerciv și monoton. Atunci, pentru orice $v \in X^*$, există un unic $u \in X$ astfel încât $T(u) = v$.*

1.5 Spații Sobolev

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și mărginită, și fie spațiul Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \,:\, \nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)\}\,.$$

Propoziția 1.14. *Pentru $1 < p < \infty$, spațiul $W^{1,p}(\Omega)$ este un spațiu Banach reflexiv și separat cu norma $\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$. Când $p = 2$, spațiul $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ devine un spațiu Hilbert împreună cu produsul intern*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}.$$

În continuare, accentul nostru va fi pe spațiul Sobolev

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p} \,:\, u|_\Omega = 0 \text{ în sensul urmelor } \right\}.$$

Propoziția 1.15 (Inegalitatea Poincaré, [10, 28, 43])**.** *Există o constantă $C > 0$ astfel încât*

$$|u|_{L^p} \leq C|\nabla u|_{L^p}, \text{ pentru orice } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Propoziția 1.16. *Spațiul Sobolev* $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\,, |\cdot|_{W_0^{1,p}}\right)$ *este un spațiu Banach real uniform convex.*

În plus, să considerăm dualul lui $W^{1,p}(\Omega)$, notat cu $W^{-1,p'}(\Omega)$, unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Următorea diagramă are loc,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \rightrightarrows L^p(\Omega) \xrightarrow{N_f} L^{p'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p}(\Omega).$$

Rezultatul următor stabilește o echivalență între p-Laplacianul și aplicația de dualitate corespunzătoare funcției $\varphi(t) = t^{p-1}$ pe $\left(W_0^{1,p}\,, |\cdot|_{W_0^{1,p}}\right)$. Pentru detalii, trimitem la G. Dinca, P. Jebelean și J. Mawhin [25, Teorema 3].

Teorema 1.17. *Operatorul* $-\Delta_p\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ *este derivata Fréchet a funcționalei* $\psi\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *unde* $\psi(u) = \frac{1}{p}|u|^p_{W_0^{1,p}}$. *Mai precis,*

$$\psi' = -\Delta_p = J_\varphi,$$

unde J_φ *reprezintă aplicația de dualitate corespunzătoare funcției* $\varphi(t) = t^{p-1}$.

Fie $H^{-1}(\Omega)$ spațiul dual al lui $H_0^1(\Omega)$. Pentru orice $f \in H^{-1}(\Omega), u \in H_0^1(\Omega)$, expresia $\langle f, u\rangle$ reprezintă valoarea în u a funcționalei liniare continue f. În plus, avem inegalitatea Poincaré

$$|u|_{L^2} \quad \leq \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}|u|_{H_0^1} \quad \left(u \in H_0^1\right),$$

unde λ_1 este prima valoare proprie a problemei Dirichlet pentru operatorul $-\Delta$. Folosim notația $(-\Delta)^{-1}$ pentru inversul laplacianului în raport cu condiția de frontieră homogenă Dirichlet.

În cazul în care $(0, T) = \Omega \subset \mathbb{R}$, inegalitatea Poincaré este valabilă cu $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{T^2}$ (vezi, de exemplu, H. Brezis [10], R. Precup [45]), adică

$$|u|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}|u|_{H_0^1} = \frac{T}{\pi}|u|_{H_0^1}, \left(u \in H_0^1\right),$$

unde λ_1 este prima valoare proprie a problemei Dirichlet $-u'' = \lambda u$, $u(0) = u(T) = 0$.

În plus, există o constantă pozitivă $c > 0$ astfel încât pentru orice $t \in (0, T)$ și $u \in H_0^1(0, T)$, inegalitatea următoare are loc

$$|u(t)| \leq c|u|_{H_0^1}.$$

1.6 O noțiune de linking

Conceptul de linking, crucial în teoria punctelor critice, are aplicații răspândite (V. Benci și P.H. Rabinowitz [5], P.H. Rabinowitz [57], M. Schechter [63], M. Struwe [68]). Originar din teorema ”mountain pass” de Ambrosetti și Rabinowitz [2], acesta s-a dezvoltat și adaptat la diverse generalizări. Linking-ul a devenit un instrument esențial în studiul și analiza unei varietăți de probleme neliniare (D.G. Costa și C.A. Magalhães [17], N. Costea, M. Csirik și C. Varga [20], R. Filippucci, P. Pucci și F. Robert [31], P. Pucci și V. D. Rădulescu [56], E.A.B. Silva [64]).

Fie X un spațiu Banach, D și Q două submulțimi ale lui X cu $\emptyset \neq Q \subset D$.

Definition 1.6 ([53]). *Se spune că o mulțime nevidă $A \subset D$ formează un linking cu $B \subset Q$ prin Q (în D) dacă $\gamma(Q) \cap A \neq \emptyset$ pentru orice $\gamma \in C(Q, D)$ cu $\gamma|_B = id_B$.*

Conform definiției date mai sus, trebuie remarcat faptul că întreaga mulțime $A = D$ poate fi considerată ca formând un linking cu mulțimea vidă $B = \emptyset$ prin intermediul oricărei mulțimi Q, în particular putând lua $Q = \{\overline{u}\}$ cu $\overline{u} \in D$. Așa cum este explicat mai jos, acest scenariu limită de linking trivial ne permite să identificăm minimele unei funcționale utilizând procedeul min-max.

Presupunem că A formează un linking cu B în D prin Q. Fie $E : D \to \mathbb{R}$ o funcțională, și fie

$$\Gamma = \{\gamma \in C(Q, D) : \ \gamma|_B = \mathrm{id}_B\}.$$

Notăm

$$m := \inf_{v \in D} E(v), \quad a := \inf_{v \in A} E(v), \quad b := \sup_{v \in B} E(v),$$

și

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{q \in Q} E(\gamma(q)).$$

Deducem imediat că

$$m \leq a \leq c \quad \text{și} \quad b \leq c.$$

De asemenea, dacă $B = \emptyset$ și $A = D$, atunci

$$m = a, \quad b = -\infty \quad \text{și} \quad c = m.$$

Capitolul 2

Echilibre Nash pentru sistemele variaţionale pe componente

2.1 Sisteme de tip Kirchhoff

Considerăm sistemul cuplat de ecuaţii Kirchhoff (vezi, G. Kirchhoff [35])

$$\begin{cases} -\left(a+b\left|u\right|_{H_0^1}^2\right)\Delta u = f_1 + g_1\left(x,u,v\right) \\ -\left(a+b\left|v\right|_{H_0^1}^2\right)\Delta v = f_2 + g_2\left(x,u,v\right) \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

pentru care ne interesează o soluţie care este şi un echilibru de tip Nash. Ideea principală este de a exprima sistemul (2.1) ca

$$\begin{cases} N_1(u,v) = u \\ N_2(u,v) = v\,, \end{cases} \tag{2.2}$$

unde ambele ecuaţii admit o structură variaţională. Adică, există funcţionalele energie $E_1\left(u,v\right)$ şi $E_2\left(u,v\right)$ astfel încât (2.2) este echivalent cu problema de punct critic

$$\begin{cases} E_{11}(u,v) = 0 \\ E_{22}(u,v) = 0\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

Aici, E_{ii} reprezintă derivata parţială Fréchet a lui E_i $(i=1,2)$ în raport cu a i-a variabilă.

În continuare, considerăm ecuaţia Kirchhoff cu condiţie Dirichlet pe frontieră

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx\right)\Delta u = h, \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Primul rezultat abordează existența unui operator soluție .

Teorema 2.1. *Dacă $h \in H^{-1}(\Omega)$, atunci problema (2.4) are o soluție unică in sens slab, adică există un unic $u \in H_0^1(\Omega)$ astfel încât*

$$\left(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)(u, v)_{H_0^1} = \langle h, v \rangle, \qquad v \in H_0^1(\Omega) . \tag{2.5}$$

Ideea principală pentru a garanta existența unei soluții a (2.5) este de a considera operatorul:

$$S_h : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega), \quad S_h(v) = \frac{1}{a + b\,|v|_{H_0^1}^2}(-\Delta)^{-1} h \ \ \big(v \in H_0^1(\Omega)\big) .$$

Clar, S_h este compact și, mai mult:

$$|S_h(v)|_{H_0^1} \le \frac{1}{a} |h|_{H^{-1}} . \tag{2.6}$$

Dacă definim:

$$B = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \ |v|_{H_0^1} \le \frac{1}{a} |h|_{H^{-1}} \right\},$$

atunci $S_h(B) \subset B$. Prin urmare, din Teorema lui Schauder, există cel puțin un u astfel încât $S_h(u) = u$.

Din monotonia funcției $(a + bx^2)\,x$, deducem că oricare două soluții u_1, u_2 ale (2.5) satisfac $|u_1|_{H_0^1} = |u_2|_{H_0^1}$. Astfel, unicitatea soluției pentru problema Dirichlet asociată lui $-\Delta$ garantează $u_1 = u_2$.

Teorema 2.2. *(Funcționala energie) O funcție $u \in H_0^1(\Omega)$ este o soluție slabă a problemei Dirichlet dacă și numai dacă este un punct critic a funcționalei C^1 $E : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,*

$$E(v) = \frac{1}{4}(2a + b\,|v|_{H_0^1}^2)\,|v|_{H_0^1}^2 - \langle h, v \rangle . \tag{2.7}$$

Teorema 2.3. *O funcție $u \in H_0^1(\Omega)$ este soluție a problemei Dirichlet dacă și numai dacă reprezintă un minim pentru funcționala energie corespunzătore.*

2.1.1 Soluție globală

Suntem interesați să demonstrăm existența unei soluții care este un echilibru Nash în întregul spațiu $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ pentru sistemul (2.1).

Pentru fiecare dintre ecuațiile din sistemul (2.1) asociem funcționalele energie

$E_1, E_2 \colon H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E_1(u,v) &= \frac{1}{4}\left(2a + b\,|u|_{H_0^1}^2\right)|u|_{H_0^1}^2 - \langle f_1, u\rangle - \int_\Omega G_1(x, u(x), v(x))\,dx, \\ E_2(u,v) &= \frac{1}{4}\left(2a + b\,|v|_{H_0^1}^2\right)|v|_{H_0^1}^2 - \langle f_2, v\rangle - \int_\Omega G_2(x, u(x), v(x))\,dx, \end{aligned}$$

unde $G_1(x,u,v) = \int_0^u g_1(x,s,v)\,ds$ și $G_2(x,u,v) = \int_0^v g_2(x,u,s)\,ds$. Observam că

$$\begin{aligned} E_{11}(u,v) &= \left(a + b\,|u|_{H_0^1}^2\right)u - (-\Delta)^{-1}(f_1 + g_1(\cdot,u,v)), \\ E_{22}(u,v) &= \left(a + b\,|v|_{H_0^1}^2\right)v - (-\Delta)^{-1}(f_2 + g_2(\cdot,u,v)), \end{aligned}$$

pentru orice $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Definition 2.1. *O funcție $H : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește de tip coerciv dacă funcționala $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,*

$$\phi(v) = \frac{1}{4}\left(2a + b\,|v|_{H_0^1}^2\right)|v|_{H_0^1}^2 - \langle f_2, v\rangle - \int_\Omega H(x,v)\,dx$$

este coercivă, adică $\phi(v) \to +\infty$ când $|v|_{H_0^1} \to +\infty$.

Teorema 2.4. *Pentru fiecare $i \in \{1,2\}$, presupunem că funcțiile $f_i \in H^{-1}(\Omega)$ și $g_i \colon\ \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt de tip Carathéodory și în plus $g_i(\cdot,0,0) = 0$. De asemenea presupunem*

(h1) *Există constante $a_{ij} \in \mathbb{R}_+$ $(i,j = 1,2)$ astfel încât*

$$a_{ii} < \lambda_1 a, \quad i = 1,2,$$

$$a_{12}a_{21} < (\lambda_1\, a - a_{11})(\lambda_1\, a - a_{22}), \tag{2.8}$$

și

$$\begin{aligned} (g_1(t,x,y) - g_1(t,\overline{x},\overline{y}))(x - \overline{x}) &\le a_{11}\,|x - \overline{x}|^2 + a_{12}\,|x - \overline{x}|\,|y - \overline{y}|, \qquad (2.9) \\ (g_2(t,x,y) - g_2(t,\overline{x},\overline{y}))(y - \overline{y}) &\le a_{21}\,|x - \overline{x}|\,|y - \overline{y}| + a_{22}\,|y - \overline{y}|^2, \end{aligned}$$

pentru orice $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$ și a.p.t. $t \in \Omega$. Aici, λ_1 reprezintă prima valoare proprie a problemei Dirichlet $-\Delta u = \lambda u$, $u_{\partial\Omega} = 0$.

(h2) *Există două funcții $H_1,\ H_2 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de tip coerciv astfel încât*

$$H_1(t,y) \le G_2(t,x,y) \le H_2(t,y), \tag{2.10}$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ și a.e. $t \in \Omega$.

Atunci sistemul (2.1) *are o soluție unică care este un echilibru Nash pentru funcționalele* E_1, E_2.

Remark 2.5 (Condițiile Lipschitz clasice)**.** *Condițiile Lipschitz unilaterale (2.9) sunt îndeplinite atunci când* g_1 *și* g_2 *satisfac condițiile Lipschitz clasice:*

$$\begin{aligned}
|g_1(t,x,y) - g_1(t,\overline{x},\overline{y})| &\leq a_{11}|x-\overline{x}| + a_{12}||y-\overline{y}|, \\
|g_2(t,x,y) - g_2(t,\overline{x},\overline{y})| &\leq a_{21}|x-\overline{x}| + a_{22}|y-\overline{y}|,
\end{aligned}$$

pentru orice $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$ *și a.e.* $t \in \Omega$. *În lucrarea lui R. Precup [50], condițiile impuse asupra coeficienților* a_{ij} *ne permit să stabilim direct atât existența, cât și unicitatea soluției pentru sistemul (2.2) folosind teorema de punct fix a lui Perov (Teorema 1.10). Aplicarea condițiilor Lipschitz unilaterale pentru a demonstra existența echilibrelor Nash a fost introdusă inițial de către R. Precup [51].*

Example 2.1. Considerăm problema Dirichlet pentru sistemul de tip Kirchhoff

$$\begin{cases}
-\left(1+\int_0^1 |u'|^2\right) u'' = u - \sin v \\
-\left(1+\int_0^1 |v'|^2\right) v'' = v + \sin u \qquad \text{pe } (0,1) \\
u(0) = v(0) = u(1) = v(1) = 0.
\end{cases} \tag{2.11}$$

Folosim Teorema 2.4 cu

$$\Omega = (0,1)\,,\; a = b = 1\,,\; g_1(t,x,y) = x - \sin y\,,\; g_2(t,x,y) = \sin x + y.$$

Condiția (2.9) este satisfăcută cu $a_{ij} = 1\ (i,j = 1,2)$. De asemenea, prima valoare proprie a problemei Dirichlet $-u'' = \lambda u$ pe $(0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$ are valoarea π^2 (vezi, de ex., R. Precup [45, p. 72]), prin urmare relația (2.8) este adevărată deoarece $1 < \pi^2$ și $1 < (\pi^2 - 1)^2$. Pentru a verifica condiția (h2), calculăm

$$G_2(t,x,y) = \int_0^y (s + \sin x) ds = \frac{1}{2}y^2 + y \sin x.$$

Fie funcțiile de tip coerciv $H_1(t,y) = \frac{1}{2}y^2 - |y|$ și $H_2(t,y) = \frac{1}{2}y^2 + |y|$. Se observă ușor că

$$H_1(t,y) \leq G_2(t,x,y) \leq H_2(t,y).$$

Prin urmare, problema Dirichlet (2.11) posedă o soluție unică $(u^*, v^*) \in H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1)$ care este, de asemenea, un echilibru Nash pentru funcționalele energie asociate.

2.1.2 Solutions in bounded domains

În cele ce urmează ne propunem să demonstrăm existența unei soluții pentru sistemul (2.1) în $B_{R_1} \times B_{R_2}$, unde B_{R_i} reprezintă bile de rază R_i $(i = 1, 2)$ centrate în originea spațiului $H_0^1(\Omega)$.

Considerăm următoarele condiții de frontieră Leray-Schauder

$$\begin{aligned} &E_{11}(u,v) + \mu\, u \neq 0 \,\text{pentru } (u,v) \in B_{R_1} \times B_{R_2} \text{ cu } |u|_{H_0^1} = R_1 \text{ și } \mu > 0, \\ &E_{22}(u,v) + \gamma\, v \neq 0 \text{pentru } (u,v) \in B_{R_1} \times B_{R_2} \text{ cu } |v|_{H_0^1} = R_2 \text{ și pentru } \gamma > 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Teorema 2.6. *Fie* $f_i \in H^{-1}(\Omega)$ *și* $g_i\colon\ \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *funcții de tip Carathéodory cu* $g_i(\cdot, 0, 0) = 0$ $(i = 1, 2)$ *care satisfac condițiile de monotonie din presupunerea (h1) a Teoremei 2.4. Mai mult, presupunem că*

(h2')

$$\begin{aligned} \frac{a_{11}}{\lambda_1} R_1 + \frac{a_{12}}{\lambda_1} R_2 + |f_1|_{H^{-1}} &\leq aR_1 + bR_1^3, \\ \frac{a_{21}}{\lambda_1} R_1 + \frac{a_{22}}{\lambda_1} R_2 + |f_2|_{H^{-1}} &\leq aR_2 + bR_2^3. \end{aligned}$$

Atunci, sistemul (2.1) *are o soluție unică în* $B_{R_1} \times B_{R_2}$ *care este un echilibru Nash pentru funcționalele* E_1, E_2.

Example 2.2. Fie problema Dirichlet pentru sistemul de tip Kirchhoff

$$\begin{cases} -\left(2 + \int_0^1 |u'|^2\right) u'' = -u^3 + u - \sin v + \pi^2 \sin(\pi x) \\ -\left(2 + \int_0^1 |v'|^2\right) v'' = -v^3 + v + \sin u & \text{pe } (0,1) \\ u(0) = v(0) = u(1) = v(1) = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Fie $R_1 = R_2 = 1$. În continuare, aplicăm Teorema 2.6 cu

$$\Omega = (0,1),\ a = 2,\ b = 1,\ f_1(t) = \pi^2 \sin(\pi t),\ f_2 \equiv 0,$$

$$g_1(t,x,y) = -x^3 + x - \sin y,\ g_2(t,x,y) = -y^3 + y + \sin x.$$

Pentru orice $x, \overline{x} \in \mathbb{R}$ se poate observa că

$$\begin{aligned} &\left(g_1(t,x,y) - g_1(t,\overline{x},\overline{y})\right)(x - \overline{x}) \leq |x - \overline{x}|^2 + |x - \overline{x}|\,|y - \overline{y}|, \\ &\left(g_2(t,x,y) - g_2(t,\overline{x},\overline{y})\right)(y - \overline{y}) \leq |x - \overline{x}|\,|y - \overline{y}| + |y - \overline{y}|^2. \end{aligned}$$

Prin urmare, condiția (2.9) este îndeplinită cu $a_{ij} = 1$ $(i, j = 1, 2)$. Mai mult, deoarece $\lambda_1 = \pi^2$, observăm că relația (2.8) este de asemenea satisfăcută. Prin urmare, presupunerea (h1) este verificată. În continuare, verificăm condiția (h2'). Observăm că $|f_2|_{H^{-1}} = 0$ și în plus, funcția $u_0(t) = \sin(\pi t)$ este soluția problemei Dirichlet $-u'' = f_1$ în $(0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$. Astfel,

$$|f_1|_{H^{-1}} = |u_0|_{H_0^1} = |u_0'|_{L^2} = \left(\int_0^1 \pi^2 \cos^2(\pi t)\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

În cele din urmă, condiția (h2') este îndeplinită deoarece

$$\frac{2}{\pi^2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} < 3 \text{ și } \frac{2}{\pi^2} < 3.$$

Prin urmare, există o soluție unică

$$(u^*, v^*) \in \left\{ u \in H_0^1(0,1) \,:\, |u|_{H_0^1} \leq 1 \right\} \times \left\{ v \in H_0^1(0,1) \,:\, |v|_{H_0^1} \leq 1 \right\},$$

pentru problema Dirichlet (2.13) care este și un echilibru Nash pentru funcționalele energie corespunzătoare.

2.2 Sisteme abstracte în spații Banach reflexive

În această secțiune prezentăm câteva generalizări ale rezultatelor obținute de R. Precup [50], pentru sisteme similare cu (2.14) în spații Hilbert.

În contrast cu abordările anterioare, care utilizează condițiile de contractie Perov și principiul variațional al lui Ekeland, metoda noastră se bazează pe metode matematice diferite, inclusiv idei din lucrarea lui C. Avramescu [3], precum și tehnici care implică operatori monotoni, cum ar fi teorema Minty-Browder (Teorema 1.13) și teorema punctului fix Leray-Schauder (Teorema 1.12).

Considerăm în continuare sistem

$$\begin{cases} N_1(u,v) = J_1(u) \\ N_2(u,v) = J_2(v), \end{cases} \tag{2.14}$$

unde N_1, N_2 sunt operatori continuui iar J_1, J_2 reprezintă aplicații de dualitate.

În contextul în care X este un spațiu Banach real, separat și uniform convex, împreună cu spațiul său dual X^*, și avem dualitatea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ între X^* și X, definim aplicația de dualitate asociată funcției $\varphi(t) := t^{p-1}$, cu $p > 1$, sub forma:

$$Jx := x^* \in X^*, :, \langle x^*, , , x \rangle = |x|^p, , , |x^*|_{X^*} = |x|^{p-1}. \tag{2.15}$$

Lema 2.7. *Aplicația de dualitate* (2.15) *are următoarele proprietăți:*

i) *J este unică.*

ii) *J este strict monotonă, adică* $\langle Jx - Jy, x - y\rangle > 0$ *pentru orice* $x \neq y$.

iii) *J satisface condiția* $(S)_+$, *adică dacă* $x_n \to x$ *în sens slab și* $\limsup_{n\to\infty}\langle J x_n , x_n - x\rangle \leq 0$, *atunci* $x_n \to x$.

iv) *J este demicontinuă, adică dacă* $x_n \to x$, *atunci* $Jx_n \to Jx$ *în sens slab.*

v) *J este bijectivă din* X *în* X^*.

Fie $(X_1, |\cdot|_1)$ și $(X_2, |\cdot|_2)$ două spații Banach reale, separabile și uniform convexe, împreună cu spațiile lor duale X_1^* și X_2^*. Notăm cu $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_1$ și $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_2$ dualitatea între X_1^*, X_1 și X_2^*, X_2, respectiv. Aplicațiile de dualitate J_1 și J_2 corespund funcțiilor $\varphi_1(t) := t^{p-1}$ și $\varphi_2(t) = t^{q-1}$, unde $p \geq q > 1$.

Presupunem o structură variatională pentru (2.14), cu funcțiile energie E_1 și E_2, astfel încât

$$E_{11}(u, v) = J_1(u) - N_1(u, v), \quad E_{22}(u, v) = J_2(v) - N_2(u, v),$$

unde E_{11} și E_{22} sunt derivatele parțiale Fréchet. Orice $(u^*, v^*) \in X_1 \times X_2$ care satisface $E_{11}(u^*, v^*) = 0$ și $E_{22}(u^*, v^*) = 0$ este o soluție a (2.14).

Fie $a_{11}, a_{22} \in [0, 1)$ astfel încât

$$\langle N_1(u, v) - N_1(\overline{u}, v)\,,\, u - \overline{u}\rangle_1 \leq a_{11}\langle J_1(u) - J_1(\overline{u})\,,\, u - \overline{u}\rangle_1, \tag{2.16}$$

$$\langle N_2(u, v) - N_2(u, \overline{v})\,,\, v - \overline{v}\rangle_2 \leq a_{22}\langle J_2(v) - J_2(\overline{v})\,,\, u - \overline{v}\rangle_2, \tag{2.17}$$

pentru orice $u, \overline{u} \in X_1$ și $v, \overline{v} \in X_2$.

Problema găsirii unei soluții de echilibru Nash pentru sistemul (2.14) poate fi împărțită în două subprobleme:

(i) Demonstrarea statutului oricărei soluții ca fiind un echilibru Nash.

(ii) Asigurarea existenței a cel puțin unei soluții.

Această divizare simplifică analiza menținând în același timp claritatea. De remarcat că, în cazul nostru, echivalența dintre problema inițială și subproblemele sale (i) și (ii) este valabilă.

Primul nostru rezultat de mai jos asigură faptul că condițiile de monotonie (2.16) și (2.17) sunt suficiente pentru a rezolva primul subproblema (i).

Teorema 2.8. *Dacă* $(u^*, v^*) \in X_1 \times X_2$ *satisface simultan atât* $E_{11}(u^*, v^*) = 0$, *cât și* $E_{22}(u^*, v^*) = 0$, *atunci* $(u^*, v^*) \in X_1 \times X_2$ *este, de fapt, un echilibru Nash pentru* *funcționalele energie* (E_1, E_2)*, adică*

$$E_1(u^*, v^*) = \inf_{X_1} E_1(\cdot, v^*) \text{ și } E_2(u^*, v^*) = \inf_{X_2} E_2(u^*, \cdot)\,. \tag{2.18}$$

Teorema 2.9. *Presupunem că următoarele condiții sunt îndeplinite:*

(h1) *Operatorul* $J_2^{-1} \circ N_2 \colon X_1 \times X_2 \to X_2$ *este compact.*

(h2) *Există numere reale* $a_{12}, a_{21} \in (0,1)$ *și* $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât*

$$|N_1(0, v)| \le a_{12}|v|_1^{p-1} + M_1, \quad \text{pentru orice } v \in X_2, \tag{2.19}$$

$$|N_2(u, 0)| \le a_{21}|u|_1^{q-1} + M_2, \quad \text{pentru orice } u \in X_1, \tag{2.20}$$

și matricea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

converge către zero.

Atunci, există o soluție $(u^*, v^*) \in X_1 \times X_2$ *a sistemului* (2.14).

2.3 Aplicații

Considerăm problema Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p\, u = f_1(\cdot, u, v) \\ -\Delta_q\, v = f_2(\cdot, u, v) & \text{pe } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0\,, \end{cases} \tag{2.21}$$

unde $p \ge q > 1$ și Ω este un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^n$ cu frontieră Lipschitz. Considerăm $X_1 = W_0^{1,p}(\Omega)$ și $X_2 = W_0^{1,q}(\Omega)$, echipate cu normele obișnuite $|u|_{1,p} := |\nabla u|_{L^p}$ și $|u|_{1,q} := |\nabla u|_{L^q}$. Din Teorema 1.17 vedem că $J_1 = -\Delta_p$ și $J_2 = -\Delta_q$.

Presupunem că $f_1, f_2 \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfac condițiile de creștere

$$|f_1(t, x, y)| \le C_1|x|^{p-1} + C_2|y|^{p-1} + a(t)\,, \tag{2.22}$$
$$|f_2(t, x, y)| \le C_1|x|^{q-1} + C_2|y|^{q-1} + b(t)\,, \tag{2.23}$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ și $t \in \Omega$, unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $a \in L^{p'}(\Omega)$ și $b \in L^{q'}(\Omega)$. Aici, p' și q' sunt astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ și $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Din (2.22) și (2.23) deducem că operatorii Nemytskii

$$N_{f_1}(u, v)(t) := f_1(t, u(t), v(t)) \text{ și } N_{f_2}(u, v)(t) := f_2(t, u(t), v(t))$$

sunt bine definiți, continui și mărginiți de la $L^p(\Omega)$ la $L^{p'}(\Omega)$, respectiv de la $L^q(\Omega)$ la $L^{q'}(\Omega)$. Includerea compactă a lui $W_0^{1,p}(\Omega)$ în $L^p(\Omega)$ și $W_0^{1,q}(\Omega)$ în $L^q(\Omega)$ garantează că operatorul

$$T = (-\Delta_q)^{-1} N_{f_2}(u,v) \colon W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega) \to W_0^{1,q}(\Omega)$$

este compact (vezi, de exemplu, G. Dinca și P. Jebelean [24]).

Observăm că fiecare ecuație din (2.21) admite o formulare variațională dată de funcționalele energie $E_1, E_2 \colon W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$E_1(u,v) := \frac{1}{p}|u|_{1,p}^p - \int_\Omega F_1(\cdot,u,v),\ E_2(u,v) := \frac{1}{q}|u|_{1,q}^q - \int_\Omega F_2(\cdot,u,v),$$

unde

$$F_1(t,u(t),v(t)) := \int_0^{u(t)} f_1(t,s,w(t))ds,\ F_2(t,u(t),v(t)) := \int_0^{v(t)} f_2(t,u(t),s)ds.$$

Teorema 2.10. *In contextul definit mai sus, presupunem în plus următoarele*

(H1) *Există* $\overline{a}_{11}, \overline{a}_{22}$ *astfel încât*

$$(x-\overline{x})(f_1(\cdot,x,y) - f_1(\cdot,\overline{x},y)) \leq \overline{a}_{11}|x-\overline{x}|^p, \tag{2.24}$$

$$(y-\overline{y})(f_2(\cdot,x,y) - f_2(\cdot,x,\overline{y})) \leq \overline{a}_{22}|s-\overline{s}|^q, \tag{2.25}$$

pentru toate numerele reale $x, \overline{x}, y, \overline{y}$.

(H2) *Există* $\overline{a}_{12}, \overline{a}_{21}, M_1, M_2$ *astfel încât*

$$|f_1(\cdot,0,y)| \leq \overline{a}_{12}|y|^{p-1} + M_1, \tag{2.26}$$

$$|f_2(\cdot,x,0)| \leq \overline{a}_{21}|x|^{q-1} + M_2, \tag{2.27}$$

pentru toate numerele reale x, y.

(H3) *Matricea*

$$A := \begin{bmatrix} C^p\,\overline{a}_{11} & C^p\,\overline{a}_{12} \\ D^q\,\overline{a}_{21} & D^q\,\overline{a}_{22} \end{bmatrix}$$

converge la zero, unde C și D reprezintă constantele asociate inegalității Poincaré (Teorema 1.15) în spațiile $W_0^{1,p}(\Omega)$ *și* $W_0^{1,q}(\Omega)$.

Atunci, există o soluție $(u^*, v^*) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ *pentru sistemul* (2.21), *astfel încât să fie un echilibru Nash pentru funcționalele energie* E_1, E_2.

În demonstrația rezultatului anterior avem nevoie și de următoarea lemă

Lema 2.11. *([23, Propoziția 8]) Sub condițiile de creștere (2.26-2.27), operatorii lui Nemytskii* $(\overline{N}_{f_1}v)(x) := f_1(x, 0, v(x))$ *și* $(\overline{N}_{f_2}u)(x) := f_2(x, u(x), 0)$ *satisfac*

$$\begin{aligned} |\overline{N}_{f_1}v|_{L^{p'}} &\leq \overline{a}_{12}|v|_{L^p}^{p-1} + M_1' \\ |\overline{N}_{f_2}u|_{L^{q'}} &\leq \overline{a}_{21}|u|_{L^q}^{q-1} + M_2'. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Example 2.3. *Considerăm următorul sistem de ecuații diferențiale de ordinul al doilea, împreună cu condiții de frontieră Dirichlet:*

$$\begin{cases} -u'' = -u + \pi\ \sin(u) + \frac{\pi}{2}v \\ -v'' = u + \cos(v) & pe\ (0,1) \\ \ u(0) = v(0) = u(1) = v(1) = 0. \end{cases} \tag{2.29}$$

Pentru a obține o soluție care să fie un echilibru Nash pentru funcțtionalele energie asociate, vom demonstra că toate ipotezele specificate în Teorema 2.10 sunt îndeplinite, unde

$$\Omega = (0,1), \quad p = q = 2, \quad n = 1, \quad C = \frac{1}{\pi},$$

$$f_1(t,x,y) = -x + \pi \sin(x) + \frac{\pi}{2}y, \quad f_2(t,x,y) = x + \cos(y).$$

Observăm că (2.22-2.23) sunt satisfăcute cu $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{\pi}{2}$ și $a(t) = \pi$, $b(t) = 1$.

De asemenea,

$$\begin{aligned} &(f_1(t,x,y) - f_1(t,\overline{x},y))\,(x - \overline{x}) \leq \pi|x - \overline{x}|, \\ &(f_2(t,x,y) - f_1(t,x,\overline{y}))\,(y - \overline{y}) \leq |y - \overline{y}|. \end{aligned}$$

Prin urmare, putem alege $\overline{a}_{11} = \pi$ și $\overline{a}_{22} = 1$ pentru a satisface condiția (H1). Simple calcule demonstrează că (H2) este de asemenea satisfăcută luând $\overline{a}_{12} = \frac{\pi}{2}$, $\overline{a}_{21} = 1$, $M_1 = 0$ și $M_2 = 1$. Ȋn final, este clar că matricea

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} & \frac{1}{2\pi} \\ \frac{1}{\pi^2} & \frac{1}{\pi^2} \end{bmatrix}$$

converge către zero. Prin urmare, sistemul (2.29) are o soluție $(u^*, v^*) \in W_0^{1,2}(0,1) \times W_0^{1,2}(0,1)$ care este un echilibru Nash pentru functionalele energie asociate.

Capitolul 3

Echilibre Nash pentru sisteme variționale parțiale

În această secțiune, extindem rezultatele pentru sistemele cu trei ecuații, unde ne propunem să găsim soluții care sunt un echilibru de tip Nash parțial.

Rezultatele relevante se pot găsi în R. Precup [52], B. Renata și R. Precup [13], J. R. López, R. Precup și C.I Gheorghiu [60], I. Benedetti, T. Cardinali și R. Precup [6], M. Bełdziński, M. Galewski și D. Barilla [9].

3.1 Existența globală

Considerăm sistemul

$$\begin{cases} N_1(u,v,w) = u \\ N_2(u,v,w) = v \\ N_3(u,v,w) = w, \end{cases} \tag{3.1}$$

unde doar ultimele două ecuații admit o structura variațională. Obiectivul nostru este să găsim o soluție (u,v,w) astfel încât perechea (v,w) să fie un echilibru de tip Nash pentru funcționalele energie asociate ultimelor două ecuații.

În această secțiune, vom extinde rezultatele pentru sistemele cu trei ecuații, unde ne propunem să găsim soluții care sunt un echilibru de tip Nash parțial.

Pentru început, considerăm un spațiu metric complet (X_1, d) și două spații Hilbert reale $(X_2, |\cdot|_2)$ și $(X_3, |\cdot|_3)$, care sunt identificate cu dualele lor. Notăm $X := X_1 \times X_2 \times X_3$. Vom presupune că există două funcționale $E_2, E_3 : X \to \mathbb{R}$ astfel încât $E_2(u,\cdot,w)$ să fie Fréchet diferențiabil pentru orice $(u,w) \in X_1 \times X_3$, iar

$E_3(u, v, \cdot)$ să fie Fréchet diferențiabil pentru orice $(u, v) \in X_1 \times X_2$ și

$$E_{22}(u, v, w) = v - N_2(u, v, w),$$
$$E_{33}(u, v, w) = w - N_3(u, v, w).$$

Aici, E_{22} reprezintă derivata Fréchet a funcționalului $E_2(u, \cdot, w)$, în timp ce E_{33} este derivata Fréchet a funcționalului $E_3(u, v, \cdot)$.

În plus, vom presupune că operatorii N_i satisfac următoarele condiții Lipschitz (condiția de contractie Perov): există numere reale pozitive a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ astfel încât

$$\begin{aligned} &d\left(N_1(u, v, w),\ N_1(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})\right) \leq a_{11} d(u, \overline{u}) + a_{12}|v - \overline{v}|_2 + a_{13}|w - \overline{w}|_3, \\ &|N_2(u, v, w),\ N_2(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})|_2 \leq a_{21} d(u, \overline{u}) + a_{22}|v - \overline{v}|_2 + a_{23}|w - \overline{w}|_3, \\ &|N_3(u, v, w),\ N_3(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})|_3 \leq a_{31} d(u, \overline{u}) + a_{32}|v - \overline{v}|_2 + a_{33}|w - \overline{w}|_3, \end{aligned} \tag{3.2}$$

pentru orice $(u, v, w), (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) \in X$ și matricea $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq 3}$ convergentă la zero.

Teorema 3.1. *În cadrul funcțional prezentat anterior, vom presupune, de asemenea:*

(h1) *Pentru orice triplet $(u, v, w) \in X$, funcționalele $E_2(u, \cdot, w)$, $E_3(u, v, \cdot)$ sunt mărginite inferior.*

(h2) *Există numere reale pozitive $R_2, R_3, a > 0$ astfel încât*

$$E_2(u, v, w) \geq \inf_{X_2} E_2(u, \cdot, w) + a \text{ pentru orice } (u, w) \in X_1 \times X_3 \text{ și } |v|_2 \geq R_2,$$

și

$$E_3(u, v, w) \geq \inf_{X_3} E_3(u, v, \cdot) + a \text{ pentru orice } (u, v) \in X_1 \times X_2 \text{ și } |w|_3 \geq R_3.$$

Atunci, punctul fix (u^*, v^*, w^*) garantat de teorema lui Perov are proprietatea că (v^*, w^*) este un echilibru de tip Nash pentru perechea de funcționale (E_2, E_3), adică

$$E_2(u^*, v^*, w^*) = \inf_{X_2} E_2(u^*, \cdot, w^*),$$
$$E_3(u^*, v^*, w^*) = \inf_{X_3} E_3(u^*, v^*, \cdot).$$

3.2 Soluții in multimi anulare

Considerăm sistemul cu n ecuații

$$\begin{cases} N_1(u^1,\dots,u^n) = u^1 \\ \dots \\ N_p(u^1,\dots,u^p,\dots,u^n) = u^p \\ \dots \\ N_n(u^1,\dots,u^n) = u^n, \end{cases} \tag{3.3}$$

având proprietatea specială că doar ultimele n-p ecuații admit o structură variațională. Ne propunem să găsim o soluție $(u_*^1,\dots,u_*^p,\dots,u_*^n)$ astfel încât $(u_*^{p+1},\dots,u_*^n)$ să se afle în produsul cartezian al unor multimi anulare și, în plus, să fie un echilibru Nash pentru funcțiile energie.

Definition 3.1. *Fie $x=(x_i), y=(y_i)\in\mathbb{R}^n$ doi vectori. Notăm cu $\circ\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ produsul Hadamard, adică*

$$x\circ y = (x_1y_1,\dots,x_ny_n)^T.$$

Urmatoare legatura intre produsul Hadamard si produsul scalar are loc.

Propoziția 3.2. *Fie $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_+)$ o matrice cu intrări pozitive și fie $x=(x_i), y=(y_i), z=(z_i)\in\mathbb{R}_+^n$. Dacă*

$$Ax\circ y\le z$$

atunci

$$Ax\cdot y\le\sqrt{n}|z|.$$

3.2.1 Existența unei șir minimizant

Teorema 3.3. *În continuare vom presupune:*

(h1) *Există o matrice $A=[a_{ij}]_{1\le i,j\le n}$ convergentă la zero astfel încât*

$$\langle\langle N_{1,n}(u)-N_{1,n}(v)\ ,\ u-v\rangle\rangle\le A\|u-v\|\circ\|u-v\|, \tag{3.4}$$

adică

$$\left(N_i(u)-N_i(v),u^i-v^i\right)_i\le\sum_{j=1}^n\left|u^i-v^i\right|_i\sum_{j=1}^n a_{ij}\left|u^j-v^j\right|_j,\ (i=1,\dots,n), \tag{3.5}$$

pentru orice $u = (u^1, \ldots, u^n), v = (v^1, \ldots, v^n) \in X$.

(h2) *Pentru fiecare* $q \in \{p+1, \ldots, n\}$, *avem*

$$l_q \left(N_q(u)\right) \geq r_q, \text{ pentru orice } u \in X_{1,p} \times K.$$

(h3) *Există* $m := \inf_{u \in X_{1,p} \times K} E_q(u) > -\infty$ *și* $\varepsilon > 0$ *astfel încât*

$$E_q(u) \geq \inf_{(K_q)_{r_q,R_q}} E_q(u^1, \ldots, u^{q-1}, \cdot, u^{q+1}, \ldots, u^n) + \varepsilon,$$

pentru orice $(u^1, \ldots, u^{q-1}, u^{q+1}, u^n) \in X_{1,p} \times \overline{K}_q$ *care satisface* $l_q(u^q) = r_q$ *și* $|u^q|_q = R_q$, *simultan.*

Atunci, există un șir $u_k = (u_k^1, \ldots, u_k^p, u_k^{p+1}, \ldots, u_k^n)^T \in X_{1,p} \times K$ *astfel încât*

$$E_q \left(u_k^{1,q}, u_{k-1}^{q+1,n}\right) \leq \inf_{(K_q)_{r_q,R_q}} E_q \left(u_k^{1,q-1}, \cdot, u_{k-1}^{q+1,n}\right) + \frac{1}{k}$$

și

$$\left|E_{qq} \left(u_k^{1,q}, u_{k-1}^{q+1,n}\right) + \lambda_k^q u_k^q\right|_q \leq \frac{1}{k},$$

unde

$$\lambda_k^q := \begin{cases} -\frac{1}{R_q^2} \left(E_{qq} \left(u_k^{1,q}, u_{k-1}^{q+1,n}\right), u_k^q\right)_q, & \text{dacă } |u_k^q|_q = R_q \text{ și} \\ & \left(E_{qq} \left(u_k^{1,q}, u_{k-1}^{q+1,n}\right), u_k^q\right)_q < 0 \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases}$$

pentru orice $q \in \{p, \ldots, n\}$, $k \in \mathbb{N}$.

3.2.2 Convergența șirului minimizant de localizare

In celel ce urmează stabilim condițiile care asigură convergența șirului minimizant (u_k) generat în Teorema 3.3.

Teorema 3.4. *Fie* $u_k = (u_k^1, \ldots, u_k^p, u_k^{p+1}, \ldots, u_k^n)^T \in X_{1,p} \times K$ *șirul generat în Teorema 3.3. In plus, presupunem*

(h2') *Pentru fiecare* $q \in \{p+1, \ldots, n\}$, *sunt satisfăcute următoarele condiții de de tip Leray-Schauder:*

$$N_q(u) - u^q - \lambda\, u^q \neq 0, \text{ pentru orice } \lambda > 0 \text{ și } u \in X_{1,p} \times K \text{ cu } |u^q|_q = R_q.$$

(h4) *Operatorul* $N_q \left(0_{X_1}, \ldots, 0_{X_p}, \cdot\right)$ *este mărginit pe* K.

Atunci, șirul u_k converge către $u_* = (u_*^{1,p}, u_*^{p+1,n}) \in X_{1,p} \times K$. În plus, u_* este o soluție a sistemului (3.3) și $u_*^{p+1,n}$ este un echilibru Nash în K pentru funcționalele $(E_{p+1}, \ldots, E_n)$, adică ,

$$E_q(u_*) = \inf_{(K_q)_{r_q,R_q}} E_q(u_*^{1,q-1}, \cdot, u_*^{q+1,n}) \quad (q = p+1, \ldots, n)\,.$$

Remark 3.5 (Cazuri limită)**.** *În teoria noastră, nu ne restricționăm la folosirea doar a numerelor reale nenegative pentru r_q și R_q. Atunci când ne propunem să găsim soluții într-o bilă, setăm $r_q = 0$, iar când intenționăm să găsim soluții nelimitate superior, alegem $R_q = \infty$.*

3.3 Aplicații

3.3.1 Existența globală pentru un sistem de tip gradient cu structură variațională parțială

Considerăm problema

$$\begin{cases} -u'' + a_1^2 u = f_1(t, u(t), v(t), w(t), u'(t)) \\ -v'' + a_2^2 v = \nabla_y f_2(t, u(t), v(t), w(t)) \qquad \text{pe (0,T)} \\ -w'' + a_3^2 w = \nabla_z f_3(t, u(t), v(t), w(t)), \end{cases} \tag{3.6}$$

cu condițiile la frontieră periodice

$$\begin{aligned} u(0) - u(T) &= u'(0) - u'(T) = 0, \\ v(0) - v(T) &= v'(0) - v'(T) = 0, \\ w(0) - w(T) &= w'(0) - w'(T) = 0, \end{aligned}$$

unde $f_{2,3}\colon (0,T) \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times \mathbb{R}^{k_3} \to \mathbb{R}$ și $f_1\colon (0,T) \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times \mathbb{R}^{k_3} \times \mathbb{R}^{k_1} \to \mathbb{R}^{k_1}$. Presupunem că $f_i\,(i = 1,2,3)$, $\nabla_y f_2$ și $\nabla_z f_3$ sunt funcții continue de tip Carathéodory. Fie

$$C_p^1 = \{u \in C^1[0,T] \,:\, u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0\},$$

și notăm cu $H_p^1(0,T)$ completarea lui C_p^1 în $H^1(0,T)$.

Pe $H_p^1(0,T)$, putem defini două produse scalare

$$(u,v)_i = \int_0^T u'v' + a_i^2 uv = (u',v')_{L^2} + a_i^2 (u,v)_{L^2},$$

care induc norme echivalente. Acum, din teorema lui Riesz, pentru orice $h \in (H_p^1(0,T))'$, există un unic $u_h \in H_p^1(0,T)$ astfel încât

$$h(v) = (u_h, v)_i, \text{ pentru orice } v \in H_p^1(0,T).$$

Definim operatorii

$$J_i\colon (H_p^1(0,T))' \to (H_p^1(0,T)), J_i(h) = u_h \text{ cu } (J_i h, v)_i = h(v), \ (i = 1,2,3).$$

Pentru a doua și a treia ecuație din (3.15), asociem funcționalele

$$E_2, E_3\colon H_p^1(0,T;\mathbb{R}^{k_1}) \times H_p^1(0,T;\mathbb{R}^{k_2}) \times H_p^1(0,T;\mathbb{R}^{k_3}) \to \mathbb{R},$$

unde

$$E_2(u,v,w) = \frac{1}{2}|v|_2^2 - \int_0^T f_2(t,u(t),v(t),w(t)),$$
$$E_3(u,v,w) = \frac{1}{2}|w|_3^2 - \int_0^T f_3(t,u(t),v(t),w(t)).$$

Din [38, Theorem 1.4], avem

$$(E_{22}(u,v,w,u',w'),\varphi) = (v,\varphi)_2 - (J_2(\nabla_y f_2),\varphi)_2,$$

pentru orice $\varphi \in H_p^1(0,T;\mathbb{R}^{k_2})$. Prin urmare, putem scrie $E_{22}(u,v,w) = v - J_2(\nabla_y f_2)$. Similar, deducem aceeași relație pentru E_{33}, adică,

$$E_{33}(u,v,w,u',v') = w - J_3(\nabla_z f_3).$$

Prin urmare, putem scrie sistemul nostru (3.15) sub formă de punct fix,

$$\begin{cases} N_1(u,v,w) = u \\ N_2(u,v,w) = v \\ N_3(u,v,w) = w \end{cases}$$

unde

$$\begin{aligned} N_1(u,v,w) &= J_1 f_1(\cdot,u,v,w,u'), \\ N_2(u,v,w) &= J_2 \nabla_y f_2(\cdot,u,v,w), \\ N_3(u,v,w) &= J_3 \nabla_z f_3(\cdot,u,v,w). \end{aligned}$$

Pentru f_1, f_2, f_3, vom face următoarele presupuneri

$$|f_1(t, x_1, ..., x_4) - f_1(t, \overline{x_1}, ..., \overline{x_4})| \leq \sum_{i=1}^{4} a_{1i}|x_i - \overline{x_i}|, \tag{3.7}$$

$$|\nabla_y f_2(t, x_1, x_2, x_3) - \nabla_y f_2(t, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})| \leq \sum_{i=1}^{3} a_{2i}|x_i - \overline{x_i}|, \tag{3.8}$$

$$|\nabla_z f_3(t, x_1, x_2, x_3) - \nabla_z f_3(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})| \leq \sum_{i=1}^{3} a_{3i}|x_i - \overline{x_i}|, \tag{3.9}$$

unde a_{ij}, a_{14} $(i, j = 1, 2, 3)$ sunt niște numere reale pozitive.

Pentru orice $h \in L^2[0, T]$,urmatoarea estimare are loc J_i $(i = 1, 2, 3)$, $|J_i h|_i \leq \frac{1}{a_i}|h|_{L_2}$. Din (3.7), obținem

$$\begin{aligned}
&|N_1(u, v, w) - N_1(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})|_1 = |J_1\left(f_1(\cdot, u, v, w, u') - f_1(\cdot, \overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{u}')\right)|_1 \\
&\leq \frac{1}{a_1}\left(\left(\frac{a_{11}}{a_1}\right)^2 + a_{14}^2\right)^{\frac{1}{2}} |u - \overline{u}|_1 + \frac{a_{12}}{a_1 a_2}|v - \overline{v}|_2 + \frac{a_{13}}{a_1 a_3}|w - \overline{w}|_3.
\end{aligned}$$

De asemenea, pentru $N_2(u, v, w)$ și $N_3(u, v, w)$ avem

$$\begin{aligned}
|N_2(u, v, w) - N_2(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})|_2 &\leq \frac{a_{21}}{a_2 a_1}|u - \overline{u}|_1 + \frac{a_{22}}{a_2^2}|v - \overline{v}|_2 + \frac{a_{23}}{a_2 a_3}|w - \overline{w}|_3, \\
|N_3(u, v, w) - N_3(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})|_3 &\leq \frac{a_{31}}{a_3 a_1}|u - \overline{u}|_1 + \frac{a_{32}}{a_3^2}|v - \overline{v}|_2 + \frac{a_{33}}{a_3^2}|w - \overline{w}|_3.
\end{aligned}$$

Prin urmare, condiția legată de (3.2) este satisfăcută dacă matricea

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1}\left(\left(\frac{a_{11}}{a_1}\right)^2 + a_{14}^2\right)^{\frac{1}{2}} & \frac{a_{12}}{a_1 a_2} & \frac{a_{13}}{a_1 a_3} \\ \frac{a_{21}}{a_2 a_1} & \frac{a_{22}}{a_2^2} & \frac{a_{23}}{a_2 a_3} \\ \frac{a_{31}}{a_3 a_1} & \frac{a_{32}}{a_2 a_3} & \frac{a_{33}}{a_3^2} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

converge la zero.

În continuare, ne propunem să stabilim condiții care asigură ca $E_2(u, \cdot, w)$ și $E_3(u, v, \cdot)$ sunt marginite inferior. Pentru a realiza acest lucru, presupunem că pentru $i \in \{2, 3\}$ și $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, există $\sigma_{ij} \in L^1(0, T; \mathbb{R}+)$ și $\gamma_i \in \mathbb{R}$ cu $\gamma_i^2 < \frac{a_i^2}{2}$, astfel încât

$$f_2(t, x, y, z) \leq \gamma_2^2|y|^2 + \sigma_{21}(t)|x| + \sigma_{22}(t)|y| + \sigma_{23}(t)|z| + \sigma_{24}(t) \tag{3.11}$$

$$f_3(t, x, y, z) \leq \gamma_3^2|z|^2 + \sigma_{31}(t)|x| + \sigma_{32}(t)|y| + \sigma_{33}(t)|z| + \sigma_{34}(t). \tag{3.12}$$

Ținand cont că $H_p^1\left(0,T;\mathbb{R}^{k_i}\right)$ se scufunda continuu in $C\left([0,T];\mathbb{R}^{k_i}\right)$, obținem

$$E_2(u,v,w) \geq \left(1-\frac{2\gamma_2^2}{a_2^2}\right)|v|_2^2 - C_{21}|u|_1 - C_{22}|v|_2 - C_{23}\,|w|_3 - C_{24},$$

pentru C_{2j} $(j=1,2,3,4)$. Acest lucru garantează că $E_2(u,v,w)\to\infty$ dacă $|v|_2\to\infty$. In aceiasi manieră, $E_3\,(u,v,w)\to\infty$ când $|w|_3\to\infty$. Prin urmare, funcționalele $E_2(u,\cdot,w)$ și $E_3(u,v,\cdot)$ sunt coercitive, iar mai mult, din R. Precup [50, Lemma 4.1], ele sunt, de asemenea, mărginite inferior.

Ultima noastră presupunere se referă la existența unor funcții Carathéodory L^1 $g_{i1}, g_{i2}\colon (0,T)\times\mathbb{R}^{k_i}\to\mathbb{R}$ $(i=2,3)$, de tip coercitiv, astfel încât

$$g_{21}(t,y) \leq f_2(t,x,y,z) \leq g_{22}(t,y), \tag{3.13}$$

$$g_{31}(t,z) \leq f_3(t,x,y,z) \leq g_{32}(t,z), \tag{3.14}$$

pentru toate tripletele $(x,y,z)\in\mathbb{R}^{k_1}\times\mathbb{R}^{k_2}\times\mathbb{R}^{k_3}$ și $t\in(0,T)$. Luând $a>0$ fix, concluzionăm că

$$\inf_{v\in H_p^1} E_2(u,\cdot,w) + a \leq \inf_{v\in H_p^1}\left(\frac{1}{2}\,|v|_2^2 - \int_0^T g_{21}\,(t,v)\,dt\right) + a.$$

În plus, deoarece g_{22} este coercitiv, există $R_2>0$ astfel încât

$$\inf_{v\in H_p^1}\left(\frac{1}{2}\,|v|_2^2 - \int_0^T g_{21}\,(t,v)\,dt\right) + a \leq \frac{1}{2}\,|v|_2^2 - \int_0^T g_{22}\,(t,v)\,dt,$$

pentru orice $|v|_2\geq R_2$. Acum, pentru $|v|_2\geq R_2$ și toți $(u,w)\in H_p^1(0,T;\mathbb{R}^{k_1})\times H_p^1(0,T;\mathbb{R}^{k_3})$, folosind din nou (3.13), deducem

$$E_2\,(u,v,w) \geq \frac{1}{2}\,|v|_2^2 - \int_0^T g_{22}\,(t,v)\,dt \geq \inf_{v\in H_p^1} E_2(u,\cdot,w) + a,$$

O inegalitate similară se obține pentru E_3. Din toate cele de mai sus, concluzionăm că (3.15) are cel puțin o soluție globală în $H_p^1\left(0,T;\mathbb{R}^{k_1}\right)\times H_p^1\left(0,T;\mathbb{R}^{k_2}\right)\times H_p^1\left(0,T;\mathbb{R}^{k_3}\right)$.

3.3.2 Existența locală pentru un sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordinul doi.

Vom examina problema:

$$\begin{cases} -u''(t) = f_1(t, u(t), v(t), w(t), u'(t)) \\ -v''(t) = f_2(t, u(t), v(t), w(t)) \\ -w''(t) = f_3(t, u(t), v(t), w(t)), \end{cases} \quad \text{pe (0,T)} \tag{3.15}$$

cu condițiile de frontieră Dirichlet

$$\begin{cases} u(0) = u(T) = 0 \\ v(0) = v(T) = 0 \\ w(0) = w(T) = 0, \end{cases}$$

unde $f_1 \colon (0,T)\times\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_+$, $f_2, f_3 \colon (0,T)\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ sunt funcții de tip Carathéodory. Subliniem faptul că prezența lui u' în prima ecuație, spre deosebire de ecuațiile 2 și 3, face ca aceasta sa nu mai admită o structura variațională. Aici, spațiile Hilbert X_1, X_2, X_3 reprezintă spațiul Sobolev $H_0^1(0,T)$ echipat cu produsul scalar $(u,v)_{H_0^1} = \int_0^T u'v'$ și norma $|u|_{H_0^1} = \left(\int_0^T (u')^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Fie $(H_0^1(0,T))'$ spațiul dual al lui $H_0^1(0,T)$ și $(\cdot\,,\,\cdot)'$ dualitatea între $(H_0^1(0,T))'$ și $H_0^1(0,T)$. Din teorema de reprezentare a lui Riesz (vezi, de exemplu, G. Bachman și L. Narici [4, Teorema 1.9]), pentru fiecare $h \in (H_0^1(0,T))'$, există un unic $u_h \in H_0^1(0,T)$ astfel încât

$$(h,\phi)' = (u_h,\phi)_{H_0^1}, \text{ pentru orice } \phi \in H_0^1(0,T).$$

Prin urmare, definim operatorul soluție $S\colon\ (H_0^1(0,T))' \to H_0^1(0,T)$, unde $S(h) = u_h$. Atunci când $h \in L^2(0,T)$, expresia lui $S(h)$ este dată de

$$S(h)(t) = \int_0^T G(t,s)h(s)ds,$$

unde $G(t,s)\colon (0,T)^2 \to \mathbb{R}_+$ este funcția Green (vezi, de exemplu, A. Cabada [14, Exemplu 1.8.18]),

$$G(t,s) = \begin{cases} s\left(1 - \frac{t}{T}\right), & s \le t \\ t\left(1 - \frac{s}{T}\right), & s \ge t. \end{cases}$$

Fie $K := K_2 = K_3$ conul funcțiilor pozitive din $H_0^1(0,T)$ și fie $[a,b]$ un subinterval compact fixat al intervalului $(0,T)$. În plus, considerăm $l_2, l_3 \colon K \to \mathbb{R}_+$, definite astfel:

$$l_1(u) = l_2(u) = \min_{t\in[a,b]} u(t) \quad (u \in K)\,,$$

și mulțimile anulare

$$(K)_{r_j,R_j} = \{u \in K_j \,|\, r_j \le l_j(u),\, |u|_{H_0^1} \le R_j\}, (j = 2, 3)\,,$$

unde $0 < r_j < R_j$ sunt numere reale pozitive.

Subliniem faptul că a doua și a treia ecuații din (3.15) admit o formulare variațională dată de funcționalele energie $E_2, E_3 \colon H_0^1(0,T) \times K \times K \to \mathbb{R}$,

$$E_2(u,v,w) := \frac{1}{2}|v|^2_{H_0^1} - \int_0^T F_2(\cdot,u,v,w),\ E_3(u,v,w) := \frac{1}{2}|w|^2_{H_0^1} - \int_0^T F_3(\cdot,u,v,w)$$

unde

$$F_2(x,u(x),v(x),w(x)) := \int_0^{v(x)} f_2(x,u(x),s,w(x))ds$$
$$F_3(x,u(x),v(x),w(x)) := \int_0^{w(x)} f_2(x,u(x),v(x),s)ds.$$

În plus, dacă $H_0^1(0,T)$ este identificat cu spațiul său dual $\left(H_0^1(0,T)\right)'$, avem

$$E_{22}(u,v,w) = v - Sf_2(u,v,w),\ E_{33}(u,v,w) = w - Sf_3(u,v,w).$$

Prin urmare, sistemul (3.15) este echivalent cu următoarea ecuație de punct fix:

$$\begin{cases} N_1(u,v,w) = u \\ N_2(u,v,w) = v \\ N_3(u,v,w) = w, \end{cases}$$

unde

$$\begin{cases} N_1(u,v,w) = Sf_1(\cdot,u,v,w,u') \\ N_2(u,v,w) = Sf_2(\cdot,u,v,w) \\ N_3(u,v,w) = Sf_3(\cdot,u,v,w). \end{cases}$$

Notăm

$$m := \min_{t\in[a,b]} \int_0^T G(t,s)ds = \min_{t\in[a,b]} \frac{t(T-t)}{2} = \min\left\{\frac{a(T-a)}{2}, \frac{b(T-b)}{2}\right\}.$$

Teorema 3.6. *Având în vedere ipotezele menționate anterior, considerăm următoarele:*

(H1) Există $a_{ij}, a_{14} > 0$ $(i,j = 1,2,3)$ *astfel încât pentru toate numerele reale* $x_1, \ldots, x_4$

și $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_4$, *avem*

$$(x_1-\overline{x}_1)\left(f_1(t,x_1,...,x_4)-f_1(t,\overline{x}_1,...,\overline{x}_4)\right)\le |x_1-\overline{x}_1|\sum_{j=1}^{4}a_{1j}|x_j-\overline{x}_j|,$$
$$(x_i-\overline{x}_i)\left(f_i(t,x_1,x_2,x_3)-f_i(t,\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)\right)\le |x_i-\overline{x}_i|\sum_{j=1}^{3}a_{ij}|x_j-\overline{x}_j|, \tag{3.16}$$

unde $i\in\{2,3\}$, *și în plus, matricea*

$$A=\tfrac{T^2}{\pi^2}\begin{bmatrix}\left(a_{11}+\frac{\pi}{T}a_{41}\right) & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

converge către zero.

(H2) *Funcțiile* $f_i(t,x,y,z)$ $(i=2,3)$, *satisfac:*

(i) *Sunt monoton crescătoare în raport cu variabilele* y *și* z.

(ii)

$$f_i(t,\cdot,r_2,r_3)\ge \frac{r_i}{m(b-a)} \tag{3.18}$$

și

$$|f_i(t,\cdot,0,0)|_{L^2}\le \frac{\pi}{T}R_2-\frac{T}{\pi}\left(a_{i2}R_2+a_{i3}R_3\right) \tag{3.19}$$

pentru orice $t\in(0,T)$.

(iii) *Există numere reale* $M_1,M_2,M_3,M_4>0$ *astfel încât*

$$f_2(t,\cdot,cR_2,cR_3)\le M_1,\ \ f_2(t,\cdot,0,r_3)\ge M_2,$$
$$f_3(t,\cdot,cR_2,cR_3)\le M_3,\ \ f_3(t,\cdot,r_2,0)\ge M_4,$$

pentru fiecare $t\in(0,T)$ *și*

$$TcR_2M_1-\frac{R_2^2}{2}<r_2(b-a)M_2,\ TcR_3M_3-\frac{R_3^2}{2}<r_3(b-a)M_4.$$

Atunci, există o soluție $(u^*,v^*,w^*)\in H_0^1(0,T)\times(K_2)_{r_2,R_2}\times(K_3)_{r_3,R_3}$ *pentru sistemul* (3.15) *astfel încât* (v^*,w^*) *este un echilibru Nash pentru funcționalele energie* E_2 *și* E_3.

Example 3.1. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} -u''(t) = \bar{a}_1 \left(e^{-u^2(t)} + e^{-(u'(t))^2} + e^{-v^2(t)} + e^{-w^2(t)} \right) \\ -v''(t) = \bar{a}_2 \left(e^{-u^2(t)} + \arctan(v(t) + 2w(t)) + \frac{\pi}{2} \right) \\ -w''(t) = \bar{a}_3 \left(e^{-u^2(t)} + \arctan(2v(t) + w(t)) + \frac{\pi}{2} \right), \end{cases} \quad \text{pe } (0,3) \tag{3.20}$$

cu condiții de frontieră Dirichlet

$$\begin{cases} u(0) = u(3) = 0 \\ v(0) = v(3) = 0 \\ w(0) = w(3) = 0 \end{cases},$$

unde $\bar{a}_i$ $(i = 1, 3)$ sunt numere reale pozitive.

Vom aplica Teorema 3.6 cu,

$$\begin{aligned} f_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4) &= \bar{a}_1 \left(e^{-x_1^2} + e^{-x_2^2} + e^{-x_3^2} + e^{-x_4^2} \right) \\ f_2(t, x_1, x_2, x_3) &= \bar{a}_2 \left(e^{-x_1^2} + \arctan(x_2 + x_3) + \frac{\pi}{2} \right) \\ f_3(t, x_1, x_2, x_3) &= \bar{a}_3 \left(e^{-x_2^2} + \arctan(x_2 + x_3) + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Alegem $c = \sqrt{3}$, $r = r_2 = r_3$ și $R_1 = R_2 = \infty$. Valoarea lui r este aleasă astfel încât pentru fiecare $i = 2, 3$,

$$\bar{a}_i \left(\arctan 2r + \frac{\pi}{2} \right) \geq r. \tag{3.21}$$

Intervalul compact $[a, b]$ este $[1, 2]$. Prin urmare,

$$m = \min \left\{ \frac{1(3-1)}{2}, \frac{2(3-2)}{2} \right\} = 1.$$

Dacă matricea

$$A = \frac{9}{\pi^2} \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \left(\frac{\pi}{3} + 1 \right) & \bar{a}_1 & \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_2 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_3 \end{bmatrix}$$

converge către zero, atunci sistemul (2.21) are o soluție (u^*, v^*, w^*) astfel încât (v^*, w^*) reprezintă un echilibru Nash pe $(K)_{r,R} \times (K)_{r,R}$ pentru funcționalele energie asociate cu a doua și a treia ecuație.

Capitolul 4

Puncte de echilibru pentru sisteme variationale pe componente

În capitolele anterioare, ne-am concentrat pe echilibrele Nash pentru funcționalele de energie, în care fiecare componentă minimizează în timp ce celelalte sunt ținute constante. Acest capitol extinde acest concept către echilibrele de tip Nash generalizate, care implică combinații între puncte de trecere și puncte de minim sau maxim.

4.1 Problema de echilibru

În acest capitol, analizăm punctele critice (u_1, u_2) pentru funcționalele energie E_1 și E_2, care îndeplinesc condițiile $E_{11}(u_1, u_2) = 0$ și $E_{22}(u_1, u_2) = 0$. Aceste puncte pot fi clasificate în următoarele categorii:

(a) Echilibre Nash, unde u_1 minimizează E_1 și u_2 minimizează E_2.

(b) Echilibre de tip minim-mountain pass, cu u_1 minimizând E_1 și u_2 ca mountain pass pentru E_2.

(c) Echilibre de tip mountain pass-mountain pass, unde u_1 este un punct de mountain pass pentru E_1 și u_2 este un punct de mountain pass pentru E_2.

Existența unui șir cu una din cele 3 proprietați menționate mai sus il vom numi punct de tip echilibru Nash generalizat.

Ne propunem să unificăm tratarea acestor cazuri, folosind conceptul de linking introdus de R. Precup, care generează atât puncte de minim, cât și puncte critice de tip mountain pass. Această abordare implică construirea unei sir de aproximarem cu analiza ulterioară a convergenței acestui șir către punctul critic dorit.

Fie H_i $(i = 1, 2)$ spații Hilbert împreună cu produsul scalar $(\cdot, \cdot)_i$ și norma $|\cdot|_i$, identificate cu dualele lor. Notăm $H = H_1 \times H_2$. Pentru fiecare spațiu H_i, considerăm un linking dată de două mulțimi închise $A_i, B_i \subset H_i$ și o mulțime compactă $Q_i \subset H_i$ cu $A_i, Q_i \neq \emptyset$ și $B_i \subset Q_i$. Fie

$$\Gamma_i := \{\gamma_i \in C(Q_i, H_i) : \ \gamma_i(u_i) = u_i \text{ pentru orice } u_i \in B_i\}.$$

Observam ca aceste multimi Γ_i sunt spatii metrice împreună cu metrica d_i, unde

$$d_i(\gamma_i, \overline{\gamma_i}) := \max_{q \in Q_i} |\gamma_i(q) - \overline{\gamma_i}(q)\ |_i,$$

pentru orice $\gamma_i, \overline{\gamma_i} \in \Gamma_i$.

Fie $E_i : H \to \mathbb{R}\,(i = 1, 2)$ două funcționale Fréchet diferențiabile. Pentru fiecare $(u_1, u_2) \in H$, definim:

$$\begin{aligned} m_1(u_2) &:= \inf\nolimits_{X_1} E_1(\cdot, u_2)\,; \quad & m_2(u_1) &:= \inf\nolimits_{X_2} E_2(u_1, \cdot)\,; \\ a_1(u_2) &:= \inf\nolimits_{A_1} E_1(\cdot, u_2)\,; \quad & a_2(u_1) &:= \inf\nolimits_{A_2} E_2(u_1, \cdot)\,; \\ b_1(u_2) &:= \sup\nolimits_{B_1} E_1(\cdot, u_2)\,; \quad & b_2(u_1) &:= \sup\nolimits_{B_2} E_2(u_1, \cdot)\,; \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$c_1(u_2) := \inf_{\mu \in \Gamma_1} \max_{q \in Q_1} E_1(\mu(q), u_2)\,; \tag{4.2}$$

$$c_2(u_1) := \inf_{\mu \in \Gamma_2} \max_{q \in Q_2} E_2(u_1, \mu(q)). \tag{4.3}$$

Se observă ușor că

$$m_i \leq a_i \leq c_i \quad \text{și} \ \ b_i \leq c_i \ \ (i = 1, 2).$$

4.2 Existența unui sir minimizant către punctul Nash generalizat

Folosing un linking particular, vom folosi principiul variațional a lui Ekeland pentru a genera un sir aproximant către punctul critic, ulterior demonstrand ca acesta este covnergent iar limita acestuia este chiar un punct cu una din proprietătile $(a), (b), (c)$, acesta fiind determinat de tipul de linking folosit.

Lema 4.1. *Fie $(X, |\cdot|_X)$ un spațiu Banach, K o ubmulțime compactă al lui X și $f \in C\,(K, X^*)$ o aplicație continuă de la K la dualul lui X. Atunci, pentru fiecare $\varepsilon > 0$,găsim o funcție $\varphi \in C\,(K, X)$ astfel încât:*

$$|\varphi\,(x)|_X \leq 1, \ \text{și} \ \langle f\,(x)\,,\ \varphi\,(x)\rangle > |f\,(x)|_X - \varepsilon,$$

pentru orice $x \in K$.

Teorema 4.2. *Presupunem că există un linking de la A_i la B_i prin intermediul unei submulțimi Q_i în H_i, și în plus presupunem că*

$$b_i < a_i, \quad i = 1, 2.$$

Atunci, există două șiruri $\left(u_1^k\right) \in H_1$ și $\left(u_2^k\right) \in H_2$ astfel încât

$$0 \leq E_1(u_1^k, u_2^{k-1}) - c_1\left(u_2^{k-1}\right) \to 0, \quad 0 \leq E_2(u_1^k, u_2^k) - c_2\left(u_1^k\right) \to 0 \tag{4.4}$$

și

$$E_{11}\left(u_1^k, u_2^{k-1}\right) \to 0, \quad E_{22}\left(u_1^k, u_2^k\right) \to 0, \tag{4.5}$$

dacă $k \to \infty$.

4.3 Explorarea cazului limită.

În secțiunea precedentă, am examinat condițiile prealabile pentru generarea unui sir de aproximare. Totuși, acest șir poate sa nu fie convergent. În secțiunea următoare, vom explora caracteristicile punctelor limită, presupunând existența acestora.

Teorema 4.3. *Fie $\left(u_1^k\right), \left(u_2^k\right)$ șirurile obținute în Teorema 4.2. Presupunem că acestea sunt convergente, adică există u^*, v^* astfel încât $u_1^k \to u^*$ și $u_2^k \to v^*$. Atunci*

$$E_{11}(u^*, v^*) = 0\,, \quad E_{22}(u^*, v^*) = 0, \tag{4.6}$$

$$c_1\left(u_2^k\right) \to c_1\left(v^*\right), \quad c_2\left(u_1^k\right) \to c_2\left(u^*\right) \tag{4.7}$$

și

$$E_1(u^*, v^*) = c_1\left(v^*\right)\,, \quad E_2(u^*, v^*) = c_2\left(u^*\right). \tag{4.8}$$

Remark 4.4. *Din Teorema 4.3, putem face distincție între următoarele scenarii:*

(a) Dacă ambele linking-uri ale spațiilor H_1 și H_2 sunt triviale, atunci u^* este minimizant al funcționalei $E_2\left(\cdot, v^*\right)$ și de asemenea, v^* este un minimizant al funcționalei $E_2\left(u^*, \cdot\right)$. Cu alte cuvinte, perechea (u^*, v^*) reprezintă un echilibru Nash pentru funcționalele E_1 și E_2.

(b) Dacă în H_2 avem un linking trivial, atunci u^* este un punct de tip mountain pass pentru $E_1\left(\cdot, v^*\right)$, în timp ce v^* este un minimizant pentru funcționala $E_2\left(u^*, \cdot\right)$.

(c) Dacă ambele linkinguri ale spațiilor H_1 și H_2 sunt netriviale, atunci u^* este un punct de tip mountain pass pentru funcționala $E_2\left(\cdot, v^*\right)$, și similar, v^* este un punct de tip mountain pass pentru funcționalul $E_2\left(u^*, \cdot\right)$.

Remark 4.5. *In cazul caz particular cand* $X_1 = X_2 = H_1 \times H_2$, *atunci putem considera*

(1^0) $E_1 = E_2 = E$; *sau*

(2^0) $E_1 = E$ *și* $E_2 = -E$.

Dacă cele două șiruri (u_1^k) *și* (u_2^k) *converg către* u_1^* *și* u_2^*, *se pot obține puncte critice* (u_1^*, u_2^*) *ale lui* E *cu una dintre următoarele proprietăți*

$$\begin{aligned}
E\left(u_1^*, u_2^*\right) &= \min E\left(\cdot, u_2^*\right) = \max E\left(u_1^*, \cdot\right); \\
E\left(u_1^*, u_2^*\right) &= \min E\left(\cdot, u_2^*\right) = \sup_{\mu \in \Gamma_2} \min_{q \in Q_2} E\left(u_1^*, \mu\left(q\right)\right); \\
E\left(u_1^*, u_2^*\right) &= \inf_{\mu \in \Gamma_1} \max_{q \in Q_1} E\left(\mu\left(q\right), u_2^*\right) = \max E\left(u_1^*, \cdot\right); \\
E\left(u_1^*, u_2^*\right) &= \inf_{\mu \in \Gamma_1} \max_{q \in Q_1} E\left(\mu\left(q\right), u_2^*\right) = \sup_{\mu \in \Gamma_2} \min_{q \in Q_2} E\left(u_1^*, \mu\left(q\right)\right).
\end{aligned}$$

4.4 Condiții pentru convergență.

În secțiunile anterioare, am discutat proprietățile limitelor secvențelor generate. Acum, abordăm provocarea asigurării existenței acestor limite prin prezentarea condițiilor pentru existența lor. Pentru a realiza acest lucru, impunem condiții de monotonie asupra derivatelor E_{11} și E_{22}.

Teorema 4.6. *Fie* $L = (L_1, L_2) : H \to H$, $L_i : H \to H_i$ $(i = 1, 2)$ *un operator continuu și fie* $N = (N_1, N_2) : H \to H$, $N_i : H \to H_i$ $(i = 1, 2)$, *definit prin*

$$N\left(u\right) = u - L\left(E_{11}\left(u\right), E_{22}\left(u\right)\right). \tag{4.9}$$

Presupunem că următoarele condiții sunt îndeplinite:

(i) *Există constante pozitive* a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ *astfel încât*

$$\begin{aligned}
&\left(N_1(u_1, u_2) - N_1(\overline{u}_1, \overline{u}_2),\, u_1 - \overline{u}_1\right)_1 \qquad (4.10)\\
&\leq a_{11} \left|u_1 - \overline{u}_1\right|_1^2 + a_{12} \left|u_1 - \overline{u}_1\right|_1 \left|u_2 - \overline{u}_2\right|_2, \\
&\left(N_2(u_1, u_2) - N_2(\overline{u}_1, \overline{u}_2),\, u_2 - \overline{u}_2\right)_2 \qquad (4.11)\\
&\leq a_{22} \left|u_2 - \overline{u}_2\right|_2^2 + a_{21} \left|u_1 - \overline{u}_1\right|_1 \left|u_2 - \overline{u}_2\right|_2,
\end{aligned}$$

pentru orice $u_1, \overline{u}_1 \in H_1$ *și* $u_2, \overline{u}_2 \in H_2$;

(ii) *Matricea* $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq 2}$ *converge la zero;*

(iii) *Secvența* $\left(u_2^k\right)$ *(echivalent,* $\left(u_1^k\right)$*) este mărginită.*

Atunci, șirurile $\left(u_1^k\right)$ *și* $\left(u_2^k\right)$ *sunt convergente.*

Remark 4.7. *Utilizarea unui operator continuu* L *ne permite să obținem o transformare continuă a derivatelor, la care putem aplica ulterior condițiile de monotonie necesare. Fără această transformare, îndeplinirea condițiilor de monotonie necesare pare dificilă din cauza naturii geometriei de trecere a muntelui. Merită menționat că în lucrările noastre anterioare concentrate pe echilibre de tip Nash, necesitatea unui operator specializat ca* L *a fost evitată, iar în acele cazuri, operatorul identitate a fost suficient.*

Condiția (iii) (mărginirea unei secvențe) nu este presupusă în prealabil și trebuie asigurată. Aici, enumerăm condiții suficiente bazate pe conectarea aleasă pentru a garanta această condiție.

Teorema 4.8. *Șirul* $\left(u_2^k\right)$ *rămâne mărginită în fiecare dintre scenariile următoare:*

(a) *Linkingul în* H_2 *este trivială. Există* $w \in H_2$ *astfel încât*

$$E_2\left(\cdot, w\right) \quad \text{este mărginit pe } H_1; \tag{4.12}$$

și

$$E_2\left(u, \cdot\right) \text{ este coerciv uniform în raport cu } u. \tag{4.13}$$

(b) *Linkingul în* H_2 *este netrivială. Există* $w \in B_2$, *astfel încât*

$$-E_2\left(\cdot, w\right) \quad \text{este mărginit pe } H_1; \tag{4.14}$$

și

$$-E_2\left(u, \cdot\right) \text{ este coerciv uniform în raport cu } u. \tag{4.15}$$

Remark 4.9. *Merită menționat că în aplicațiile practice, condiții specifice suplimentare, cum ar fi condițiile de creștere și coercivitate sau condiția Ambrosetti-Rabinowitz, pot fi utilizate pentru a asigura mărginirea lui* $\left(u_2^k\right)$.

4.5 Aplicații

Considerăm problema Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta v_1 = \nabla_{v_1} F(v_1, w_1, v_2, w_2) \\ -\Delta w_1 = \nabla_{w_1} F(v_1, w_1, v_2, w_2) \\ -\Delta v_2 = \nabla_{v_2} G(v_1, w_1, v_2, w_2) \\ -\Delta w_2 = \nabla_{w_2} G(v_1, w_1, v_2, w_2) \quad \text{on } \Omega \\ v_1|_{\partial\Omega} = w_1|_{\partial\Omega} = v_2|_{\partial\Omega} = w_2|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

In cazul nostru, Ω reprezintă o mulțime deschisă și mărginită din $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$. Asemenea probleme sunt bine cunoscute in literatura, adesea modelând probleme din lumea reala, incluzând probleme de difuzie sau miscare a undelor.

Presupunem următoarele condiții asupra potențialelor F și G

(H1) Funcțiile $F, G\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ sunt de tip C^1 și de asemenea

$$F(0, x_2) = 0,\ G(x_1, 0) = 0,$$

pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$. În plus, pentru $2 \leq p \leq 2^* = \frac{2n}{n-2}$, avem următoarele condiții de creștere satisfăcute

$$\begin{aligned} |F(x_1, x_2)| &\leq C_F\left(|x_1|^p + 1\right), \\ |G(x_1, x_2)| &\leq C_G\left(|x_2|^p + 1\right), \end{aligned} \tag{4.17}$$

pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, unde C_F, C_G sunt constante pozitive.

Aici, $H_1 = H_2 := \left(H_0^1(\Omega)\right)^2 = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ echipat cu produsul scalar

$$(u, \overline{u})H0^1 \times H_0^1 = (v, \overline{v})H0^1 + (w, \overline{w})H0^1,$$

și norma

$$|u|H0^1 \times H_0^1 = \left(|v|H0^{1^2} + |w|H0^{1^2}\right)^{1/2},$$

pentru $u = (v, w), \overline{u} = (\overline{v}, \overline{w})$.

Caracteristica distinctivă a sistemului (4.16) este că primele două ecuații și ultimele două ecuații cuplate împreună, permit o formulare variațională care poate fi exprimată prin funcționalel energie $E_1, E_2\colon \left(H_0^1(\Omega)\right)^2 \times \left(H_0^1(\Omega)\right)^2 \to \mathbb{R}$,

$$E_1(u_1, u_2) = \tfrac{1}{2}|u_1|^2_{H_0^1 \times H_0^1} - \int_\Omega F(u_1, u_2), \quad E_2(u_1, u_2) = \tfrac{1}{2}|u_2|^2_{H_0^1 \times H_0^1} - \int_\Omega G(u_1, u_2),$$

unde $u_1 = (v_1, w_1)$, $u_2 = (v_2, w_2) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2$.

Fie

$$\begin{aligned} f_1(y_1, z_1, y_2, z_2) &= \nabla_{y_1} F(y_1, z_1, y_2, z_2), \\ f_2(y_1, z_1, y_2, z_2) &= \nabla_{z_1} F(y_1, z_1, y_2, z_2), \\ g_1(y_1, z_1, y_2, z_2) &= \nabla_{y_2} G(y_1, z_1, y_2, z_2), \\ g_2(y_1, z_1, y_2, z_2) &= \nabla_{z_2} G(y_1, z_1, y_2, z_2). \end{aligned}$$

Dacă identificăm $H_0^1(\Omega)$ cu dualul său $H^{-1}(\Omega)$ prin intermediul lui $-\Delta$, atunci derivatele parțiale ale lui E_1 și E_2 în raport cu prima și a doua componentă, respectiv, sunt date de

$$\begin{aligned} E_{11}(u_1,u_2) &= u_1 - \left((-\Delta)^{-1} f_1(u_1,u_2)\,,\,(-\Delta)^{-1} f_2(u_1,u_2)\right),\\ E_{22}(u_1,u_2) &= u_2 - \left((-\Delta)^{-1} g_1(u_1,u_2)\,,\,(-\Delta)^{-1} g_2(u_1,u_2)\right). \end{aligned}$$

Din condițiile de creștere (4.17), operatorii Nemytskii

$$\mathcal{N}_{f_i}(u_1,u_2)(x) := f_i(u_1(x),u_2(x)), \quad \mathcal{N}_{g_i}(u_1,u_2)(x) := g_i(u_1(x),u_2(x)),$$

(i=1,2), sunt bine definiți de la $\left(L^{2^*}(\Omega)\right)^4$ la $\left(L^{(2^*)'}(\Omega)\right)^2$, mărginiți (duc mulțimi mărginite în mulțimi mărginite) și continui. Prin urmare, operatorii

$$\begin{aligned} N_1(u_1,u_2) &= \left((-\Delta)^{-1} f_1(u_1,u_2)),(-\Delta)^{-1} f_2(u_1,u_2))\right)\\ N_2(u_1,u_2) &= \left((-\Delta)^{-1} g_1(u_1,u_2)),(-\Delta)^{-1} g_2(u_1,u_2))\right) \end{aligned}$$

sunt bine definiți și continui de la $(H_0^1(\Omega))^4$ la $(H_0^1(\Omega))^2$.

(H2) Inegalitățile (vezi, de exemplu, [2, 17–19, 33]).

$$\limsup_{|x_1|\to 0} \frac{F(x_1,x_2)}{|x_1|^2} < \frac{\lambda_1}{2} < \liminf_{|y_1|\to\infty} \frac{F\left((y_1,0),x_2\right)}{{y_1}^2},$$

au loc pentru orice $y_1 \in \mathbb{R}$ și uniform în raport cu $x_2 \in \mathbb{R}^2$.

Din (4.17) și (H2), găsim un r_0' astfel încât

$$E_1(u_1,u_2) \geq c > 0 \quad \text{pentru orice} \quad |u_1|_{H_0^1\times H_0^1} = r_0'. \tag{4.18}$$

De asemenea, există un $\alpha_0 > r_0'$ astfel încât

$$E_1\left((\alpha_0\phi_1,0),u_2\right) < 0 \quad \text{pentru orice} \;\; u_2 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2. \tag{4.19}$$

În plus, avem în mod clar

$$E_1((0,0),u_2) = 0. \tag{4.20}$$

Pe $(H_0^1(\Omega))^2$, considerăm mulțimile

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{u_1 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2 : \, |u_1|_{H_0^1\times H_0^1} = r_0'\right\},\\ Q_1 &= \left\{s\,(\phi_1,0) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2 : \, 0 \leq s \leq \alpha_0\right\},\\ B_1 &= \left\{((0,0)\,,\;(s_0\phi_1,0))\right\}. \end{aligned}$$

Din (4.18), (4.19) și (4.20), vedem că A_1 formeaza un linking cu B_1 prin Q_1, și în plus

$$\inf_{A_1} E_1(\cdot, u_2) \geq c > \sup_{B_1} E_1(\cdot, u_2),$$

pentru orice $u_2 \in (H_0^1(\Omega))^2$, adică $b_1 < a_1$.

Vom considera

$$A_2 = \left(H_0^1(\Omega)\right)^2, \quad B_2 = \emptyset \quad \text{și} \quad Q_2 = \{(0,0)\},$$

adică alegem un linking trivial. Pentru a asigura $b_2 < a_2$ (sau echivalent, $-\infty < m_2$), funcționala $E_2(\cdot, u_2)$ trebuie să fie uniform mărginit inferior în raport cu u_1. Această cerință poate fi îndeplinită dacă presupunem următoarea condiție de creștere unilaterală asupra lui G:

(H3) Există $0 \leq \sigma < \lambda_1$ astfel încât

$$G\left(x_1, x_2\right) \leq \frac{\sigma}{2} \left|x_2\right|^2 + C, \text{ pentru orice } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2. \tag{4.21}$$

Folosind Teorema 4.2, se poate deduce că există două șiruri, $\left(u_1^k\right)$ și $\left(u_2^k\right)$, care satisfac (4.4) și (4.5). Referitor la Teorema 4.6, considerăm operatorul liniar $L = \left(L_1, L_2\right)$, unde $L_1, L_2 \colon \left(H_0^1(\Omega)\right)^2 \to \left(H_0^1(\Omega)\right)^2$ sunt date de

$$L_1(v_1, w_1) = L_1\left(u_1\right) = \beta(v_1 - w_1, v_1 - w_1), \qquad L_2(v_2, w_2) = L_2\left(u_2\right) = u_2, \tag{4.22}$$

pentru $u_1 = \left(v_1, w_1\right),\ u_2 = \left(v_2, w_2\right) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2$ și un $\beta > 0$. Prin urmare, putem exprima operatorii N_1 și N_2 în funcție de L astfel

$$\begin{aligned} N_1(u_1, u_2) = {} & ((1-\beta)v_1 + \beta w_1, (1-\beta)w_1 - \beta v_1) \\ & + \beta \left((-\Delta)^{-1}\left(f_1(u_1, u_2) - f_2(u_1, u_2)\right),\ (-\Delta)^{-1}\left(f_1(u_1, u_2) - f_2(u_1, u_2)\right)\right). \end{aligned}$$

$$N_2(u_1, u_2) = u_2 - L_2\ \left(E_{22}(u_1, u_2)\right) = \left((-\Delta)^{-1} g_1(u_1, u_2)\,,\, (-\Delta)^{-1} g_2(u_1, u_2)\right)$$

În continuare, vom discuta unele condiții legate de monotonia funcțiilor $\widetilde{f} := f_1 - f_2$, g_1 și g_2 care apar în expresiile lui N_1 și N_2.

(H4) Există m_{ij} $(i,j=\overline{1,4})$ astfel încât

$$\begin{aligned}
& \left(\widetilde{f}(x_1,x_2)-\widetilde{f}(\overline{x}_1,\overline{x}_2)\right)(y_1-\overline{y}_1) && (4.23)\\
\leq\ & |y_1-\overline{y}_1|\left(m_{11}|y_1-\overline{y}_1|+m_{12}|z_1-\overline{z}_1|+m_{13}|y_2-\overline{y}_2|+m_{14}|z_2-\overline{z}_2|\right),\\
& \left(\widetilde{f}(x_1,x_2)-\widetilde{f}(\overline{x}_1,\overline{x}_2)\right)(z_1-\overline{z}_1)\\
\leq\ & |z_1-\overline{z}_1|\left(m_{21}|y_1-\overline{y}_1|+m_{22}|z_1-\overline{z}_1|+m_{23}|y_2-\overline{y}_2|+m_{24}|z_2-\overline{z}_2|\right),\\
& \left(g_1(x_1,x_2)-g_1(\overline{x}_1,\overline{x}_2)\right)(y_2-\overline{y}_2)\\
\leq\ & |y_2-\overline{y}_2|(m_{31}|y_1-\overline{y}_1|+m_{32}|z_1-\overline{z}_1|+m_{33}|y_2-\overline{y}_2|+m_{34}|z_2-\overline{z}_2|),\\
& \left(g_2(x_1,x_2)-g_2(\overline{x}_1,\overline{x}_2)\right)(z_2-\overline{z}_2)\\
\leq\ & |z_2-\overline{z}_2|\left(m_{41}|y_1-\overline{y}_1|+m_{42}|z_1-\overline{z}_1|+m_{43}|y_2-\overline{y}_2|+m_{44}|z_2-\overline{z}_2|\right),
\end{aligned}$$

pentru orice $x_1=(y_1,z_1),\ \overline{x}_1=(\overline{y}_1,\overline{z}_1),\ x_2=(y_2,z_2),\ \overline{x}_2=(\overline{y}_2,\overline{z}_2)\in\mathbb{R}^2$.

DIn ipoteza (H4), operatorii N_1,N_2 îndeplinesc condițiile de monotonie (2.16) și (2.17), cu coeficienții

$$a_{11}=1-\beta+\tfrac{\beta}{\lambda_1}\max\{m_{11},\ m_{22}\}+\tfrac{\beta}{2\lambda_1}\left(m_{12}+m_{21}\right), \tag{4.24}$$

$$a_{12}=\tfrac{\beta}{\lambda_1}\max\left\{\sqrt{m_{13}^2+m_{23}^2},\ \sqrt{m_{14}^2+m_{24}^2}\right\}, \tag{4.25}$$

$$a_{21}=\frac{1}{\lambda_1}\max\left\{\sqrt{m_{31}^2+m_{32}^2},\ \sqrt{m_{41}^2+m_{42}^2}\right\}, \tag{4.26}$$

$$a_{22}=\frac{m_{34}+m_{43}}{2\lambda_1}+\max\left\{m_{33},\ m_{44}\right\}. \tag{4.27}$$

Pe baza celor de mai sus, primele două condiții din Teorema 4.6 sunt îndeplinite dacă

(H5) Matricea $M:=[a_{ij}]_{1\leq i,j\leq 2}$ converge la zero.

Rămâne de arătat că șirul $\left(u_2^k\right)$ este mărginită. Pentru a face acest lucru, aplicăm Teorema 4.8 (a). Din $G(\cdot,0)=0$ și condiția de creștere (4.21), obținem

$$E_2\left(u_1,u_2\right)\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2\lambda_1}\right)|u_2|^2_{H_0^1\times H_0^1}-C\,\mathrm{meas}\,(\Omega)\to\infty,$$

când $|u_2|_{H_0^1\times H_0^1}\to\infty$, uniform în raport cu u_1. Prin urmare, deoarece toate condițiile din Teorema 4.6 sunt îndeplinite, deducem că șirurile $\left(u_1^k\right)$ și $\left(u_2^k\right)$ converg în $\left(H_0^1(\Omega)\right)^2$.

Astfel, pe baza Teoremei 4.2, putem formula următorul rezultat.

Teorema 4.10. *Sub ipotezele (H1)-(H5), concluzionăm că problema* (2.21) *are o soluție tip mountain pass-min. Mai precis, există o soluție* $(u_1^*,u_2^*)\in\left(H_0^1(\Omega)\right)^2\times\left(H_0^1(\Omega)\right)^2$ *astfel încât* u_1^* *este un punct critic de tip mountain pass al funcției* $E_1(\cdot,u_2^*)$ *și* u_2^* *este un minimizant al funcționalei* $E_2(u_1^*,\cdot)$.

Pentru a obține o soluție de tip mountain pass, urmăm o abordare similară cu Teorema 1, cu cateva clarificări importante. În primul rând, ambele funcții F și G trebuie să satisfacă condițiile (H2)' pentru linkingul netrivial. Prin impunerea (H3)' cu $-G$ în loc de G, asigurăm mărginirea lui u_2^k (cf. Teorema 3(b)).

În al doilea rând, folosim un operator alternativ L_2 în loc de operatorul identitate (algem $L_2 = L_1$ pentru simplitate). Condiția (H4) necesită o condiție de monotonie pentru $\tilde{g} = g_1 - g_2$ în loc de g_1 și g_2 (denumită (H4)'). Schimbarea lui L_2 necesită revizuirea coeficienților a_{21} și a_{22} (cf. ecuațiilor (5) și (6)), unde a_{21} corespunde lui a_{12} și a_{22} corespunde lui a_{11}.

Teorema 4.11. *Presupunând că sunt îndeplinite condițiile (H1), (H2)'-(H4)', (H5), atunci problema* (2.21) *are o soluție de tip mountain pass-mountain pass, adică există o soluție* $(u_1^*, u_2^*) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2 \times \left(H_0^1(\Omega)\right)^2$ *astfel încât* u_1^* *este un punct critic de tip mountain pass al funcției* $E_1(\cdot, u_2^*)$ *și* u_2^* *este un punct critic de tip mountain pass al funcției* $E_2(u_1^*, \cdot)$.

Exemplul 1. Considerăm problema Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta v_1 = a(v_1 + w_1)^3 + \tilde{a} v_1 + a(v_1 + w_1)\frac{1}{v_2^2 + w_2^2 + 1} \\ -\Delta w_1 = a(v_1 + w_1)^3 - \tilde{a} w_1 + a(v_1 + w_1)\frac{1}{v_2^2 + w_2^2 + 1} \\ -\Delta v_2 = b v_2 + \frac{1}{v_1^2 + c^2} \\ -\Delta w_2 = b w_2 + \frac{1}{v_2^2 + c^2} \text{ în } \Omega \\ v_1|_\Omega = w_1|_\Omega = v_2|_\Omega = w_2|_\Omega = 0. \end{cases} \tag{4.28}$$

Aplicăm Teorema 4.10, unde

$$\begin{aligned} &\Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad a \le \frac{\lambda_1}{4}, \quad \tilde{a} < \frac{\lambda_1}{2}, \quad b < 1, \quad b + \tfrac{4}{c} < \lambda_1, \quad c > 1, \\ &F(y_1, z_1, y_2, z_2) = \tfrac{a}{4}(y_1 + z_1)^4 + \tfrac{\tilde{a}}{2}\left(y_1^2 - z_1^2\right) + \tfrac{a}{2}(y_1 + z_1)^2 \frac{1}{y_2^2 + z_2^2 + 1}, \\ &G(y_1, z_1, y_2, z_2) = \tfrac{b}{2}\left(y_2^2 + z_2^2\right) + \frac{y_2}{y_1^2 + c^2} + \frac{z_2}{z_1^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Valoarea absolută a lui $F(x_1, x_2)$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2)$ este mărginită de un polinom de grad patru în $|x_1|$ și

$$|G(y_1, z_1, y_2, z_2)| \le \left(\tfrac{b}{2} + \tfrac{2}{c}\right) |(y_2, z_2)|^2 + \tfrac{2}{c}.$$

Prin urmare, condiția (H1) este garantată. În plus, condiția (H3) este, de asemenea, satisfăcută deoarece $\frac{b}{2} + \frac{2}{c} < \frac{\lambda_1}{2}$. Din simple calcule avem

$$\lim_{|y_1| + |z_1| \to 0} \frac{F(y_1, z_1, y_2, z_2)}{{y_1}^2 + {z_1}^2} \le \tfrac{\tilde{a}}{2} + a < \frac{\lambda_1}{2} \text{ și } \lim_{|y_1| \to \infty} \frac{F((y_1, 0), x_2)}{{y_1}^2} \ge \lim_{|y_1| \to \infty} \tfrac{a}{4} y_1^2 = \infty,$$

ceea ce garantează că (H2) este satisfăcută. Observăm că

$$\begin{aligned}
f_1(y_1,z_1,y_2,z_2) &= a(y_1+z_1)^3 + \tilde{a}y_1 + a(y_1+z_1)\frac{1}{y_2^2+z_2^2+1},\\
f_2(y_1,z_1,y_2,z_2) &= a(y_1+z_1)^3 - \tilde{a}z_1 + a(y_1+z_1)\frac{1}{y_2^2+z_2^2+1},\\
g_1(y_1,z_1,y_2,z_2) &= by_2 + \frac{1}{y_1^2+c^2},\\
g_2(y_1,z_1,y_2,z_2) &= bz_2 + \frac{1}{z_1^2+c^2},
\end{aligned}$$

ceea ce ne oferă

$$\widetilde{f}(y_1,z_1,y_2,z_2) = \tilde{a}y_1 + \tilde{a}z_1.$$

Liniaritatea lui $\widetilde{f}$ și proprietatea Lipschitz $\left|\frac{1}{x^2+c^2} - \frac{1}{\overline{x}^2+c^2}\right| \le \frac{1}{c}|x-\overline{x}|$ conduc la

$$\begin{aligned}
&\left(\widetilde{f}(y_1,z_1,y_2,z_2) - \widetilde{f}(\overline{y}_1,\overline{z}_1,\overline{y}_2,\overline{z}_2)\right)(y_1-\overline{y}_1) \le \tilde{a}|y_1-\overline{y}_1|^2 + \tilde{a}\,|y_1-\overline{y}_1|\,|z_1-\overline{z}_1|,\\
&\left(\widetilde{f}(y_1,z_1,y_2,z_2) - \widetilde{f}(\overline{y}_1,\overline{z}_1,\overline{y}_2,\overline{z}_2)\right)(z_1-\overline{z}_1) \le \tilde{a}|z_1-\overline{z}_1|^2 + \tilde{a}\,|y_1-\overline{y}_1|\,|z_1-\overline{z}_1|,\\
&\left(g_1(y_1,z_1,y_2,z_2) - g_1(\overline{y}_1,\overline{z}_1,\overline{y}_2,\overline{z}_2)\right)(y_2-\overline{y}_2) \le b|y_2-\overline{y}_2|^2 + \tfrac{1}{c}|y_2-\overline{y}_2||y_1-\overline{y}_1|,\\
&\left(g_2(y_1,z_1,y_2,z_2) - g(\overline{y}_1,\overline{z}_1,\overline{y}_2,\overline{z}_2)\right)(z_2-\overline{z}_2) \le b|z_2-\overline{z}_2|^2 + \tfrac{1}{c}|z_1-\overline{z}_1||z_2-\overline{z}_2|.
\end{aligned}$$

Astfel, condițiile de monotonie (4.23) sunt îndeplinite cu

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \tilde{a}, \quad m_{12} = \tilde{a}, \quad m_{13} = 0, \quad m_{14} = 0,\\
m_{21} &= \tilde{a}, \quad m_{22} = \tilde{a}, \quad m_{23} = 0, \quad m_{24} = 0,\\
m_{31} &= \frac{1}{c}, \quad m_{32} = 0, \quad m_{33} = b, \quad m_{34} = 0,\\
m_{41} &= 0, \quad m_{42} = \frac{1}{c}, \quad m_{43} = 0, \quad m_{44} = b.
\end{aligned}$$

Din simple calcule obținem

$$M = \begin{bmatrix} 1-\beta\left(1-2\frac{\tilde{a}}{\lambda_1}\right) & 0 \\ \frac{1}{c\lambda_1} & b \end{bmatrix}.$$

Pentru că $b<1$ și $1-2\frac{\tilde{a}}{\lambda_1}>0$, putem alege $\beta>0$ în (4.22) suficient de mic, astfel încât matricea M să conveargă la zero.

Prin urmare, având în vedere ca toate ipotezele din Teorema 2.10 sunt îndeplinite, problema (4.28) are o soluție $(v_1^*, w_1^*, v_2^*, w_2^*)$. În plus, $u_1^* := (v_1^*, w_1^*)$ și $u_2^* := (v_2^*, w_2^*)$ sunt astfel încât u_1^* este un punct critic de tip mountain pass pentru funcționala energie $E_1(\cdot, u_2^*)$, iar u_2^* este un minim pentru funcționala energie $E_2(u_1^*, \cdot)$.

Bibliografie

[1] R. Adams and J. Fournier. *Sobolev Spaces, 2nd Edition.* Academic Press, 2003.

[2] A. Ambrosetti and P. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Funct. Anal.*, **14**:349–381, 1973.

[3] C. Avramescu. On a fixed point theorem (in romanian). *St. Cerc. Mat.*, **22**:215–221, 1970.

[4] G. Bachman and L. Narici. *Functional Analysis.* Dover Publications, Mineola, New York, 2nd edition, 2000.

[5] V. Benci and P. Rabinowitz. Critical point theorems for indefinite functionals. *Invent. Math.*, **52**:241–273, 1979.

[6] I. Benedetti, T. Cardinali, and R. Precup. Fixed point-critical point hybrid theorems and application to systems with partial variational structure. *J. Fixed Point Theory Appl.*, **23**:63, 2021.

[7] A. Berman and R. J. Plemmons. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, 1979.

[8] M. Bełdzinski and M. Galewski. Nash-type equilibria for systems of non-potential equations. *Appl. Math. Comput.*, **385**:125456, 2020.

[9] M. Bełdziński, M. Galewski, and D. Barilla. Nash-type equilibria for systems of partially potential nonlinear equations. *Math. Methods Appl. Sci.*, **46**(11):11830–11841, 2023.

[10] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New-York, 2011.

[11] L. Brouwer. Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, **71**:97–115, 1911.

[12] F. E. Browder. Existence and perturbation theorems for nonlinear maximal monotone operators in banach spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**(3):322–328, 1967.

[13] R. Bunoiu and R. Precup. Localization and multiplicity in the homogenization of nonlinear problems. *Adv. Nonlinear Anal.*, **9**(1):292–304, 2020.

[14] A. Cabada. *Green's Functions in the Theory of Ordinary Differential Equations.* Springer, NY, 2014.

[15] S. Cacace, E. Cristiani, and M. Falcone. Numerical approximation of nash equilibria for a class of non-cooperative differential games. 2011.

[16] P. G. Ciarlet. *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications.* SIAM, 2013.

[17] D. Costa and C. Magalhães. Existence results for perturbations of the p-laplacian. *Nonlinear Anal.*, **24**:409–418, 1995.

[18] D. Costa and C. Magalhães. Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity. *Nonlinear Anal.*, 23(11):1401–1412, 1994.

[19] D. G. Costa and C. A. Magalhães. A variational approach to noncooperative elliptic systems. *Nonlinear Anal.*, 25(7):699–715, 1995.

[20] N. Costea, M. Csirik, and C. Varga. Linking-type results in nonsmooth critical point theory and applications. *Set-Valued Var. Anal.*, **25**:333–356, 2017.

[21] A. Cournot. *The Mathematical Principles of the Theory of Wealth.* Economic J., 1838.

[22] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis.* Springer, Berlin, 1985.

[23] G. Dinca and P. Jebelean. Some existence results for a class of nonlinear equations involving a duality mapping. *Nonlinear Anal.*, **46**:347–363, 2001.

[24] G. Dinca, P. Jebelean, and J. Mawhin. Une méthode de point fixe pour le p-laplacien. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **324**:165–168, 1997.

[25] G. Dinca, P. Jebelean, and J. Mawhin. Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian. *Portugal. Math.*, **58**:339–378, 2001.

[26] H. L. Dret. *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations.* Springer, 2018.

[27] I. Ekeland. On the variational principle. *J. Math. Anal. Appl.*, **47**(2):324–353, 1974.

[28] L. Evans. *Partial Differential Equations.* AMS, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, 2nd edition, 2010.

[29] F. Facchinei and C. Kanzow. Generalized nash equilibrium problems. *Ann. Oper. Res.*, **171**:177–211, 2010.

[30] D. G. d. Figueiredo. Lectures on the ekeland variational principle with applications and detours. *Acta Appl. Math*, 1989.

[31] R. Filippucci, P. Pucci, and F. Robert. On a p-laplace equation with multiple critical nonlinearities. *J. Math. Pures Appl.*, **91**(2):156–177, 2009.

[32] A. Granas and J. Dugundji. *Fixed Point Theory.* Springer, New York, 2003.

[33] P. Jebelean and G. Moroşanu. Mountain pass type solutions for discontinuous perturbations of the vector p-laplacian. *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, **10**(4):591–611, 2005.

[34] G. Kassay and V. Rădulescu. *Equilibrium Problems and Applications.* Academic Press, 2019.

[35] G. Kirchhoff. *Vorlesungen über Mechanik. Leipzig: Teubner*, 1883.

[36] J. Krawczyk. Numerical solutions to coupled-constraint (or generalized nash) equilibrium problems. *Comput. Manag. Sci.*, **4**(2):183–204, 2007.

[37] J. Li and S. Park. Generalized nash equilibria of nonmonetized noncooperative games on lattices. *Journal of Economics, Management and Trade*, **4**(1):97–110, 2013.

[38] J. Mawhin and M. Willem. Critical point theory and hamiltonian systems. *Springer*, 1989.

[39] O. Morgenstern and J. von Neumann. *The Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 1947.

[40] J. Nash. Non-cooperative games. *Ann. of Math.*, **54**:286–295, 1951.

[41] S. Park. Generalizations of the nash equilibrium theorem in the kkm theory. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2010.

[42] S. Park. The fan minimax inequality implies the nash equilibrium theorem. *Appl. Math. Lett.*, **24**(12):2206–2210, 2011.

[43] L. Payne and H. Weinberger. An optimal poincaré inequality for convex domains. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **5**:286–292, 1960.

[44] A. Perov. *On the Cauchy's Problem for a System of Ordinary Differential Equations.* Priblizhen. Metod. Reshenia Urav., Kiev, Russia, 1964.

[45] R. Precup. *Methods in Nonlinear Integral Equations.* Springer, 2002.

[46] R. Precup. *Lecții de ecuații cu derivate parțiale.* Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2004.

[47] R. Precup. The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems. *Math. Comput. Model. Dyn. Syst.*, **49**(3):703–708, 2009.

[48] R. Precup. Critical point theorems in cones and multiple positive solutions of elliptic problems. *Nonlinear Anal.*, **75**:834–851, 2012.

[49] R. Precup. *Linear and semilinear partial differential equations.* Berlin: De Gruyter, 2013.

[50] R. Precup. Nash-type equilibria and periodic solutions to nonvariational systems. *Adv. Nonlinear Anal.*, **3**(4):197–207, 2014.

[51] R. Precup. Nash-type equilibria for systems of szulkin functionals. *Set-Valued Var. Anal.*, **24**,(3):471–482, 2016.

[52] R. Precup. A critical point theorem in bounded convex sets and localization of Nash-type equilibria of nonvariational systems. *J. Math. Anal. Appl.*, **463**, 2018.

[53] R. Precup. Componentwise localization of critical points for functionals defined on product spaces. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **53**:51–77, 2021.

[54] R. Precup and A. Stan. Stationary Kirchhoff equations and systems with reaction terms. *AIMS Mathematics*, **7**(8):15258–15281, 2022.

[55] R. Precup and A. Stan. Linking methods for componentwise variational systems. *Results Math.*, **78**:246, 2023.

[56] P. Pucci and V. Rădulescu. The impact of the mountain pass theory in nonlinear analysis: a mathematical survey. *Boll. Unione Mat. Ital.*, **9**(3):543–584, 2010.

[57] P. Rabinowitz. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Nonlinear Partial Differential Equations*, volume **65** of *Conf. Board of Math Sci.* Amer. Math. Soc., 1986.

[58] A. Ramos, R. Glowinski, and J. Periaux. Nash equilibria for the multiobjective control of linear partial differential equations. *J. Optim. Theory Appl.*, **112**:457–498, 2002.

[59] A. Ramos, R. Glowinski, and J. Periaux. Pointwise control of the burgers equation and related nash equilibrium problems: Computational approach. *J. Optim. Theory Appl.*, **112**:499–516, 2002.

[60] J. Rodríguez-López, R. Precup, and C.-I. Gheorghiu. On the localization and numerical computation of positive radial solutions for ϕ-laplace equations in the annulus. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, (47):1–22, 2022.

[61] I. Rus. *Principles and Applications of Fixed Point Theory.* Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

[62] I. A. Rus. On the fixed points of mappings defined on a Cartesian product. II. Metric spaces (Romanian). *Stud. Cerc. Mat.*, **24**:897–904, 1972.

[63] M. Schechter. *Linking Methods in Critical Point Theory.* Birkhäuser Boston, MA, 2012.

[64] E. Silva. Existence and multiplicity of solutions for semilinear elliptic systems. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, **1**:339–363, 1994.

[65] A. Stan. Nonlinear systems with a partial Nash type equilibrium. *Univ. Babeș-Bolyai Math.*, **66**(2):397–408, 2021.

[66] A. Stan. Localization of Nash-type equilibria for systems with a partial variational structure. *J. Numer. Anal. Approx. Theory*, **52**(2):254–273, 2023.

[67] A. Stan. Nash equilibria for componentwise variational systems. *J. Nonlinear Funct. Anal.*, **6**, 2023.

[68] M. Struwe. *Variational Methods.* Springer, 1990.

[69] R. S. Varga. *Matrix Iterative Analysis.* Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2 edition, 1999.

[70] C. Zalinescu. *Convex Analysis in General Vector Spaces.* World Scientific, River Edge, N.J. London, 2002.