UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

REZUMAT TEZĂ DE DOCTORAT

Contribuţii la studiul funcţiilor de tip convex şi în optimizarea fracţionară

Conducător ştiinţific
Prof. Dr. Radu Precup

Doctorand
Alexandru Orzan

Cluj-Napoca
2024

Cuprins

Introducere

Prezenta teză de doctorat a început sub îndrumarea regretatului profesor Nicolae Popovici

Optimizarea este o bine-cunoscută ramură a matematicii care are drept obiect determinarea soluţilor optime dintr-o mulţime admisibilă de soluţii, din cadrul unei probleme de minimizare sau maximizare pentru o funcţie dată, luând în considerare şi posibile restricţii. Datorită numeroaselor sale aplicaţii, optimizarea reprezintă un domeniu deosebit de important atât în matematică cât şi în alte domenii conexe.

Dintre aceste domenii amintim următoarele (vezi, e.g., Frenk şi Schaible [26], Schaible [72], Shen şi Yu [75, 76], Hillier şi Lieberman [41], Khisty şi Lall [46] şi alte titluri citate în aceste lucrări).

Cercetarea operaţională: Optimizarea este o ştiinţă care stă la baza cercetarării operaţionale, facilitând astfel afacerile în procese decizionale legate de alocarea resurselor, planificarea producţiei, gestionarea stocurilor şi logistică;

Inginerie: Inginerii folosesc tehnici de optimizare pentru a proiecta sisteme, structuri şi procese eficiente, cum ar fi optimizarea formei aripilor aeronavelor sau proiectarea clădirilor energo-eficiente;

Economie şi Finanţe: În economie, modelele de optimizare sunt folosite pentru a studia şi prognoza comportamentul economic. În domeniul finanţelor, diferite modele matematice de optimizare sunt deasemenea încorporate pentru gestionarea riscului;

Transport: Optimizarea este esenţială pentru planificarea rutelor, programarea vehiculelor şi gestionarea lanţurilor de aprovizionare;

Energie şi mediu: Optimizarea este de o importană covârşitoare la reglarea consumului de energie, reducerea emisiilor şi proiectarea sistemelor durabile în domenii precum integrarea energiei regenerabile şi modelarea mediului înconjurător.

Dintre diversele teme care fac obiectul optimizării amintim, printre altele, programarea liniară, programarea convexă, programarea neliniară, programarea discretă și programarea dinamică. La fel ca în multe alte domenii matematice, optimizarea integrează concepte şi rezultate din diverse domenii conexe, precum analiza funcţională, analiza convexă, teoria jocurilor etc., fiind, totodată, deschisă şi către algoritmi și modelări numerice.

Urmând curentul impus şi de alte domenii matematice, optimizarea a încorporat în mod natural liniaritatea, evoluţie marcată de apariţia programării liniare ca componentă semnificativă în cadrul domeniului optimizării.

În mod firesc, următorul pas în acest domeniu, crucial pentru abordarea eficientă a problemelor practice, a implicat abordarea non-liniarităţii şi, în consecinţă, a funcţiilor neliniare.

Acest lucru încă reprezintă o provocare şi ar fi fost imposibil de întrezărit fără pasul intermediar oferit de analiza convexă. Convexitatea joacă un rol fundamental în optimizare deoarece simplifică procesul de rezolvare a problemelor, garantează existenţa punctelor de optim global şi permite utilizarea eficientă a multor algoritmilor.

Una dintre cele mai populare ramuri ale oprimizării este optimizarea fracţionară. Acest subdomeniu se ocupă cu optimizarea funcțiilor care implică fracții sau expresii raționale și este aplicat cu precădere în economie (programare fracționară), inginerie, sănătate (alocare de resurse), proiectarea rețelelor (rute optime pentru transmiterea datelor), sistemele de control optim (pentru procese care implică dinamici de ordin fracționar, cum ar fi circuitele electrice, reactoarele chimice sau sistemele mecanice), managementul lanțurilor de aprovizionare, matematică (Ecuații Diferențiale Fracționare), studii de mediu (optimizarea utilizării terenurilor, alocarea fondurilor de conservare sau proiectarea coridoarelor pentru fauna sălbatică) etc.

Problema tipică de optimizare fracționară (denumită în mod obișnuit problemă de programare fracționară sau program fracționar) este definită în felul următor:

$$\frac{A\left(x\right)}{B\left(x\right)} \longrightarrow \min_{x\in D},$$

unde A şi B sunt funcţii definite pe o mulţime nevidă D iar $B\left(x\right)\neq 0$ pentru orice $x\in D$. Rezolvarea acestei probleme se reduce la determinarea unei perechi (λ^{*}, x^{*}), în care λ^{*} reprezintă valoarea minimă a câtului A/B, şi x^{*}

este punctul de minim corespunzător., i.e.,

$$\lambda^* = \frac{A(x^*)}{B(x^*)} = \min_D \frac{A}{B}.$$

Dintr-o perspectivă istorică, așa cum se menționază în lucrarea lui Frenk și Schaible [26], este demn de remarcat faptul că una dintre primele apariții ale programării fracționare, cu toate că nu fusese denumită în mod explicit astfel, a apărut în 1937 odată cu modelul de echilibru al economiei în creștere al lui John von Neumann. Modelul calculează rata de creștere economică selectând cea mai mare valoare dintre cele mai mici rapoarte producție-intrare din surse multiple. Cu toate acestea, cu excepția unui număr mic de lucrări individuale, precum cele ale lui von Neumann, un studiu cuprinzător al programării fracționare a început abia mult mai târziu. Influența mai multor autori cu contribuţii semnificative în domeniu la acea perioadă este de asemenea evidențiată în lucrarea lui Frenk și Schaible [26].

Prima monografie ce tratează programarea fracționară, intitulată *Analyse und Anwendungen von Quotientenprogrammen, Ein Beitrag zur Planung mit Hilfe der nichtlinearen Programmierung*, a fost scrisă de Schaible în 1978. După cum este menționat în lucrarea lui Frenk și Schaible [26], aceasta a fost urmată de alte două monografii care s-au concentrat exclusiv pe programarea fracționară, prima dintre ele fiind scrisă de Craven în 1988, iar cealaltă, de Stancu-Minasian în 1997.

De atunci, mulți cercetători au depus eforturi considerabile în domeniul optimizării fracţionare. Contribuțiile remarcabile includ lucrările lui Avriel et al. [2], Cambini și Martein [14], Stancu-Minasian [79], Elbenani și Ferland [21], Crouzeix [15, 16], Hadjisavvas [26], Schaible [71, 72], Rodenas [69], Shi [77], Boț et al. [10, 11], și Tammer [81], precum şi alte titluri citate în aceste lucrări.

Metodele și tehnicile de lucru dezvoltate în cadrul optimizării fracționare au generat un interes semnificativ legat de proprietățile funcțiilor f și g, cum ar fi convexitatea, concavitatea, mărginirea, liniaritatea etc. Prin urmare, primele două capitole ale tezei tratează acest subiect.

În aceste capitole, introducem un nou concept de semistrict cvasiconvexitate pentru funcții vectoriale, definite pe o mulţime nevidă şi convexă dintr-un spațiu liniar real X cu valori într-un spațiu liniar real topologic Y, parțial ordonat de un con convex solid C. Ulterior, oferim o caracterizare a acestor funcții folosind funcția de scalarizare neliniară introdusă de Gerstewitz (Tammer) în 1983. Adiţional, furnizăm câteva caracterizări de conservare a convexităţii prin imaginile directe şi inverse pentru două clase speciale de multifuncții fracționare.

O direcţie importantă de cercetare în cadrul optimizării fracționare se concentrează pe dezvoltarea algoritmilor pentru rezolvarea problemelor fracționare. Printre numeroșii algoritmi care abordează problemele de tip fracționar, vechi și noi (consultați, de exemplu, lucrările lui Boț și Csetnek [10], Boț, Dao și Li [11], Boyd et al. [12], Geissler et al. [28], Goldstein et al. [31], Kleinert și Schmidt [47] precum și titlurile citate în aceste lucrări), algoritmul lui Dinkelbach (Dinkelbach [20]) rămâne unul dintre cei mai cunoscuţi. Așa cum este menționat în lucrarea lui Tammer și Ohlendorf [81, Sec. 3], acesta are la bază algoritmul lui Jagannathan din 1966 pentru problemele fracționare liniare. Algoritmul lui Dinkelbach este un procedeu folosit pentru a rezolva probleme de programare fracționară prin transformarea problemei inițiale (de tip fracţionar) într-o problemă parametrică non-fracționară şi, în consecinţă, cea de-a doua parte a tezei este dedicată acestui subiect.

În această parte se prezintă două variante aproximative ale algoritmului lui Dinkelbach (cu o eroare dată $\varepsilon > 0$ și cu erori convergente către zero), alături de o nouă versiune a algoritmului, algoritmul Dinkelbach-Ekeland, ce încorporează principiul variațional al lui Ekeland.

Ultimul capitol al tezei, prezintă o nouă versiune a algoritmului lui Dinkelbach, numită algoritmul lui Dinkelbach pe componente. Spre deosebire de versiunea originală, această variantă este concepută pentru a aborda funcțiile fracționare care depind de două variabile. Contribuţia acestui capitol constă în stabilirea convergenței algoritmului componenţial.

Teza are patru capitole şi este structurată pe secţiuni şi subsecţiuni.

Capitolul 1: Convexitate generalizată pentru funcţii vectoriale

În primul capitol introducem noul concept de semistrict cvasiconvexitate pentru funcții vectoriale, definite pe o mulţime nevidă şi convexă dintr-un spațiu liniar real X cu valori într-un spațiu liniar real topologic Y, parțial ordonat de un con convex solid C. Secțiunea 1.1 se concentrează pe prezentarea cadrului general și a noțiunilor care se vor dovedi a fi de interes în continuare. În Secțiunea 1.2, revizuim câteva noțiuni clasice de convexitate generalizată atât pentru funcții scalare cât şi vectoriale, și enunțăm conceptul de semistrict cvasiconvexitate. În cele din urmă, în Secțiunea 1.3, prezentăm rezultatul nostru principal care caracterizează funcțiile vectoriale semistrict C-quasiconvexe folosind funcțiile de scalarizare neliniare. În plus, în cazul particular finit dimensional al spațiului euclidian real $Y = \mathbb{R}^m$, ordonat de conul standard $C = \mathbb{R}^m_+$, stabilim o relație între conceptul nostru de semistrict C-quasiconvexitate și alte concepte cunoscute din literatură.

Contribuţiile noastre în acest capitol sunt prezentate mai jos. În Secţiunea 1.2: Definiţia 1.2.8, Lema 1.2.11, Lema 1.2.12, Teorema 1.2.13, Lema 1.2.16, Teorema 1.2.19, Teorema 1.2.21. În Secţiunea 1.3 avem: Teorema 1.3.1 şi Corolarul 1.3.2.

Toate rezultatele menţionate anterior sunt originale şi sunt conţinute în lucrarea Günther, Orzan şi Popovici [35].

Capitolul 2: Proprietăţi ale funcţiilor fracţionare

În acest capitol prezentăm rezultate de conservare a convexităţii prin imagini directe şi inverse pentru două clase speciale de multifuncții fracționare. Capitolul este împărţit în patru secţiuni.

Secţiunea 2.1 este dedicată prezentării noţiunilor şi rezultatelor generale de analiză multivocă şi convexă ce vor fi folosite pe parcurs.

Secțiunea 2.2 studiază conceptul de multifuncție afină în sens Tan [84] şi extinde rezultatele clasice stabilite de Rothblum [70] în cadrul spațiile euclidiene finite-dimensionale la spații liniare reale. În ultima parte a acestei secțiuni se furnizează o serie de proprietăți de păstrare a convexității.

În Secțiunea 2.3, examinăm o altă noțiune de multifuncție afină, anume cea introdusă de Gorokhovik [33, 34] și prezentăm o serie de rezultate care vor fi de o importanță semnificativă pentru secțiunea următoare.

Ultima Secțiune 2.4 furnizează o serie de rezultate de conservare a convexităţii mulţimilor atat prin multifuncţii generale cât şi prin clasele noastre de multifuncţiile afine.

Contribuţiile noastre în acest capitol sunt prezentate mai jos. În Secţiunea 2.2: Propoziţia 2.2.2, Teorema 2.2.3, Corolarul 2.2.4, Propoziţiile 2.2.6, 2.2.7, 2.2.8, Teorema 2.2.10, Teoremele 2.2.11, 2.2.12, Corolarul 2.2.13. În Secţiunea 2.3 avem: Lema 2.3.6, Propoziţia 2.3.7. În ultima Secţiune 2.4, avem: Propoziţiile 2.4.1, 2.4.3, Corolarul 2.4.2, Teorema 2.4.4, 2.4.6, Corolarul 2.4.5, Teorema 2.4.7, Corolariile 2.4.8, 2.4.9.

Toate rezultatele menţionate anterior sunt originale şi sunt conţinute în lucrările Orzan şi Popovici [60, 61] şi Orzan [59].

Capitolul 3: Algoritmi de aproximare de tip Dinkelbach pentru probleme fracţionare

În cel de-al treilea capitol al tezei, prezentăm variante aproximative ale algoritmului lui Dinkelbach pentru probleme de optimizare fracționară neliniară în cadrul general al spațiilor Banach. Capitolul este format din cinci secțiuni.

Secțiunea 3.1 vine ca o introducere în cadrul general de lucru și în algoritmul original al lui Dinkelbach. În Secțiunea 3.2, abordăm cazul în care punctul de minim pentru problema noastră de optimizare poate fi determinat cu o eroare specificată ($\varepsilon > 0$), și stabilim, de asemenea, o condiție suficientă pentru atingerea valorii minime a funcționalei A/B. În Secțiunea

3.3, prezentăm o altă versiune a algoritmul Dinkelbach, în care eroare tinde către zero, demonstrând convergența sa către soluția problemei noastre de optimizare, sub condiția de compactitate Palais-Smale.

În Secțiunea 3.4 prezentăm noul nostru algoritm, algoritmul de aproximare Dinkelbach-Ekeland, pentru probleme de optimizare fracționară, care utilizează principiul variațional al lui Ekeland pentru a genera şirul (x_k) implicat în procesul iterativ.

Ultima secțiune, Secțiunea 3.5, oferă condiții suficiente care permit îndeplinirea cerinței Palais-Smale și, în consecință, stabilește rezultatul nostru final referitor la convergența algoritmului Dinkelbach-Ekeland.

Contribuţiile noastre în acest capitol sunt prezentate mai jos. În Secţiunea 3.2: Teoremele 3.2.2, 3.2.3. Secţiunea 3.3 prezintă: Teoremele 3.3.2 şi 3.3.3. În Secţiunea 3.4 avem: Algoritmul 3.4.1 şi Teorema 3.4.2. Ultima Secţiune 3.5 prezintă: Lemele 3.5.1, 3.5.2 , Propoziţia 3.5.3 şi Teorema 3.5.4.

Toate rezultatele menţionate anterior sunt originale şi sunt conţinute în lucrarea Orzan şi Precup [62].

Capitolul 4: Algoritmul lui Dinkelbach pe componente pentru probleme fracţionare

În ultimul capitol al tezei, introducem un algoritm de aproximare de tip Dinkelbach, dezvoltat special pentru calculul punctelor de minim parțiali în problemele de optimizare fracționară. Capitolul este împărțit în patru secțiuni.

Secțiunea 4.1 prezintă noţiunile de bază necesare pentru înțelegerea problemelor de optimizare fracționară în care funcția obiectiv (raport a două funcții) este definită pe produsul cartezian a două spații normate reale, anume X și Y. Cel de-al doilea obiectiv al acestei secțiuni este identificarea punctelor de minim parţial, puncte din $X \times Y$ în care o variabilă minimizează funcția obiectiv în timp ce cealaltă rămâne constantă. În Secțiunea 4.2 stabilim câteva conexiuni între punctele de minim global și parțial, și explorăm, de asemenea, cazul în care $A(x, y)$ și $B(x, y)$ au variabile separate, demonstrând că în acest context, minimul parțial coincide cu minimul global. În plus, oferim un rezultat similar pentru spațiile euclidiene finite-dimensionale spre sfârșitul acestei secțiuni. Secțiunea 4.3 debutează prin introducerea algoritmului original Dinkelbach, aplicat la funcții cu două variabile iar, mai apoi, prezintă varianta noastră componentială a algoritmului lui Dinkelbach și investighează câteva dintre limitările acestuia.

Ultima Secțiune 4.4, are drept obiectiv convergența algoritmului nostru componenţial. În cadrul ei, se demonstrează că prin impunerea unor condiţii asupra spațiilor și funcțiilor implicate, cum ar fi continuitatea de tip Lipschitz, diferențiabilitatea Fréchet parțială și coercivitatea, algoritmul converge către un minim parțial.

Contribuţiile noastre în acest capitol sunt prezentate mai jos. În Secţiunea 4.2 avem: Propoziţiile 4.2.1, 4.2.2 şi 4.2.3. În Secţiunea 4.3: Algoritmul 4.3.1, Propoziţia 4.3.2. În ultima Secţiune 4.4 prezentăm: Teoremele 4.4.1, 4.4.2 şi 4.4.4.

Toate rezultatele menţionate anterior sunt originale şi sunt conţinute în lucrarea Günther, Orzan şi Precup [36].

***

Lucrările doctorandului:

- Orzan A. A new class of fractional type set-valued functions. Carpathian J. Math. 2009;35:79–84.
- Orzan A, Popovici N. Convexity-preserving properties of set-valued ratios of affine functions. Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 2023;66:591–602.
- Orzan A, Popovici N. Characterization of certain fractional-type set-valued functions. Optimization. DOI: 10.1080/02331934.2023.2174377.
- Orzan A, Precup R. Dinkelbach type approximation algorithms for nonlinear fractional optimization problems, Numerical Functional Analysis and Optimization. 2023;44(9):954–969.
- Günther C, Orzan A, Precup R. Componentwise Dinkelbach algorithm for nonlinear fractional optimization problems. Optimization, DOI: 10.1080/02331934.2023.2256750.
- Günther C, Orzan A, Popovici N. A new concept of semistrict quasiconvexity for vector functions, submitted 2023.

Comunicăriile ştiinţifice ale doctorandului cu abstract:

- *On a special class of fractional set-valued functions*, Romanian Itinerant Seminar on Mathematical Analysis and its Applications (RISMAA), Cluj-Napoca, 20-22 aprilie, 2018. https://www.cs.ubbcluj.ro/wp-content/uploads/RISMAA-2018-Abstracts.pdf
- *On a special class of fractional type set-valued functions*, 13th Joint Conference on Mathematics and Computer Science (the 13th MaCS), October 1-3, 2020, ELTE, Hungary. http://macs2020.elte.hu/wpcontent/uploads/2020/10/programme_overview.pdf

- *Dinkelbach type approximation algorithms for nonlinear fractional optimization problems*, 14th Joint Conference on Mathematics and Computer Science (the 14th MaCS), November 24-27, 2022, Cluj-Napoca, Romania. https://www.cs.ubbcluj.ro/ macs/2022/abs/macs2022_ abstracts.pdf

- *Aproximation Algorithms of Dinkelbach type for fractional optimization problems*, The joint seminar of the groups algorithmic optimization, numerical analysis, and scientific computing, Leibniz University, February 23, Hannover, Germany, 2023.

- *Componentwise Dinkelbach algorithm for nonlinear fractional optimization problems*, 17th International Conference on Applied Mathematics and Computer Science, July 11-13, 2023, Cluj-Napoca, Romania. https://docs.google.com/spreadsheets/d/e/2PACX-1vTtFLtlpmFkAL9zMmrj _ Lg3HxToczM3K3FZJXaoVieLtM Qh-PepYajD3BG3McZEXKsR2CnZWLxhXrKkb/pubhtml#

* * *

Cuvinte cheie

Convexitate generalizată, multifuncţii fracţionar-afine, funcţii ce păstrează convexitatea, optimizare fracţionară, algoritmi de tip Dinkelbach, Principiul lui Ekeland, minim parţial.

Capitolul 1
Convexitate generalizată pentru funcţii vectoriale

Noţiunea generală de convexitate a funţiilor este des recunoscută ca fiind un factor limitativ în multe situaţii practice, așa cum este demonstrat în lucrări precum cea a lui Cambini și Martein [14]. În răspuns la această limitare, mai mulți cercetători au introdus clase mai largi de funcții, cunoscute sub numele de funcții convexe generalizate. Aceste funcții generalizat convexe (şi concave) conţin clasa funcțiilor convexe, moștenind totodată proprietăți valoroase de la acestea dar se bucură şi de condiţii de existenţă mai relaxate. Funcțiile generalizat convexe au aplicații într-o varietate de domenii, inclusiv în economie pentru reprezentarea preferințelor și a funcțiilor de utilitate, în finanțe pentru sarcini precum optimizarea portofoliului, gestionarea riscurilor și evaluarea activelor, precum și în inginerie pentru aplicații în design structural, optimizarea proceselor și prelucrarea semnalelor etc.

În ceea ce privește aplicațiile matematice, aceste funcții sunt larg recunoscute și studiate în special în contextul optimizării scalare, vectoriale și multivoce. Referințele semnificative în această direcţie includ lucrările lui Avriel *et al.* [2], Bagdasar și Popovici [3], Crouzeix, Martínez-Legaz și Volle [17], Flores-Bazán [23], Flores-Bazán și Vera [25], Göpfert *et al.* [32], Günther și Tammer [39, 40], Jahn [43], Khan, Tammer și Zălinescu [45], La Torre și Popovici [49], Luc [53], Luc și Schaible [54], Popovici [64], împreună cu referințele citate în aceste lucrări.

Printre conceptele foarte cunoscute de convexitate generalizată pentru funcţii vectoriale, definite pe o submulțime nevidă şi convexă D dintr-un spațiu liniar real X, cu valori într-un spațiu topologic liniar real Y, ordonat de un con convex C, se numără noțiunile de C-convexitate, C-cvasiconvexitate și explicit C-cvasiconvexitate, introduse de Luenberger [55], Borwein [9], Luc [53], și Popovici [63].

Aceste concepte de C-convexitate, C-cvasiconvexitate și explicit C-

cvasiconvexitate reprezintă generalizări naturale ale noţiunilor clasice de convexitate, cvasiconvexitate și explicit cvasiconvexitate, care sunt aplicate în mod obișnuit funcțiilor cu valori reale. Această extindere provine din faptul că în contextul specific al spațiului euclidian real de dimensiune finită $Y = \mathbb{R}^m$, parțial ordonat de conul uzual de ordine $C = \mathbb{R}^m_+$, o funcție vectorială $f = (f_1, \dots, f_m)$ este C-convexă (C-cvasiconvexă, explicit C-cvasiconvexă) dacă și numai dacă componentele sale scalare au această proprietate.

Sigur că o astfel de abordare pe componente nu este realizabilă, în general, în spații oarecare. Prin urmare, un domeniu de cercetare interesant în cadrul optimizării vectoriale se concentrează pe caracterizarea convexității generalizate a funcțiilor vectoriale prin valorificarea principiilor clasice de convexitate generalizată ale anumitor funcții cu valori reale. Această abordare a fost explorată de cercetători precum Benoist, Borwein și Popovici [6], La Torre, Popovici și Rocca [50], Luc [53], și Günther și Popovici [37, 38].

În acest prim capitol introducem un nou concept de semistrict cvasiconvexitate pentru funcţii vectoriale, definite pe o mulţime nevidă şi convexă dintr-un spațiu liniar real X cu valori într-un spațiu liniar real topologic Y, parțial ordonat de un con convex solid C. Rezultatul principal din această secţiune a tezei este caracterizarea funcțiilor semistrict C-cvasiconvexe folosind funcțiile de scalarizare semistrict cvasiconvexe $\sigma_a \circ f$.

Capitolul este împărțit în trei secțiuni. **Secțiunea 1.1** prezintă noţiuni şi rezultate fundamentale care se vor dovedi a fi de interes în continuare.

În **Secțiunea 1.2**, reamintim câteva noțiuni clasice de convexitate generalizată atât pentru funcțiile cu valori reale, cât și pentru cele cu valori vectoriale și enunțăm noul nostru concept de semistrict cvasiconvexitate pentru funcții vectoriale.

În finalul capitolului, **Secțiunea 1.3**, prezentăm rezultatul nostru central, ce oferă o caracterizare a funcțiilor vectoriale semistrict C-cvasiconvexe cu ajutorul funcțiilor de scalarizare neliniare. Mai mult, în contextul spațiului euclidian real finit-dimensional $Y = \mathbb{R}^m$, parțial ordonat de conul uzual de ordine $C = \mathbb{R}^m_+$, stabilim legătura dintre noul nostru concept și alte noțiuni cunoscute în literatură, respectiv, semistrict cvasiconvexitate pe componente și explicit cvasiconvexitate pe componente.

Rezultatele prezentate în această parte a tezei au fost incluse în lucrarea Günther, Orzan şi Popovici [35].

1.1 Preliminarii şi proprietăţi ale conurilor convexe

În prima secțiune a acestui capitol vom prezenta o serie de definiții și rezultate cheie legate de convexitate generalizată și conuri convexe. Pentru a facilita înțelegerea, începem prin a considera X un spațiu liniar real, Y un spațiu liniar topologic real, $D \subseteq X$ o mulţime nevidă şi convexă, şi $C \subseteq Y$ un con convex, i.e., $0 \in C = \mathbb{R}_+ \cdot C = C + C$, unde 0 semnifică vectorul nul din Y iar $\mathbb{R}_+$ este mulţimea numerelor reale nenegative. Partea liniară a conului C este definită prin $\ell(C) := C \cap (-C)$. Pentru fiecare punct $y \in Y$ şi orice mulţime $A \subseteq Y$, notăm cu $\mathcal{V}(y)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor punctului y, iar cu $\operatorname{int} A$, $\operatorname{cl} A$ şi $\operatorname{bd} A$ interiorul, aderenţa şi respectiv frontiera lui A. Este cunoscut faptul că

$$\operatorname{int} A \subseteq \{x \in A \mid \forall\, d \in Y,\ \exists\, r \in \mathbb{R}_+^* \text{ a.i. } x + [-r, r] \cdot d \subseteq A\}, \tag{1.1}$$

unde $\mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ este mulţimea numerelor reale fără zero.

Vom investiga mai multe concepte de convexitate generalizată pentru funcții vectoriale $f : D \to Y$ în raport cu C, care extind în mod natural noțiunile clasice corespunzătoare de convexitate generalizată cunoscute pentru funcțiile scalare de tip $\varphi : D \to \mathbb{R}$. Pentru acest lucru, este posibil ca ocazional să introducem proprietăţi suplimentare referitoare la conul C, contextul specific dictând natura acestora. Amintim că C se numeşte: propriu, dacă $C \neq Y$; ascuţit, dacă $\ell(C) = \{0\}$; solid, dacă $\operatorname{int} C \neq \emptyset$; închis, dacă $\operatorname{cl} C = C$.

În cele ce urmează, vom revizui câteva proprietăți de bază ale conului convex C (a se vedea, de exemplu, cărțile lui Jahn [43] și Tammer și Weidner [82]):

$$\operatorname{int} C = \mathbb{R}_+^* \cdot \operatorname{int} C = C + \operatorname{int} C = \operatorname{cl} C + \operatorname{int} C = C + \mathbb{R}_+^* \cdot e,\ \forall\, e \in \operatorname{int} C, \tag{1.2}$$

$$Y = \operatorname{int} C - \mathbb{R}_+^* \cdot e,\ \forall\, e \in \operatorname{int} C, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{cl} C = \mathbb{R}_+^* \cdot \operatorname{cl} C,$$

$$\operatorname{bd} C = \mathbb{R}_+^* \cdot \operatorname{bd} C. \tag{1.4}$$

Dacă C e solid, atunci

$$\operatorname{int} C = \operatorname{int}(\operatorname{cl} C),$$
$$\operatorname{cl} C = \operatorname{cl}(\operatorname{int} C).$$

Dacă C este propriu, atunci

$$0 \in \operatorname{bd} C.$$

Lemă 1.1.1. *Fie C un con solid. Atunci, pentru orice vector $e \in \operatorname{int} C$ au loc următoarele egalităţi*

$$Y \setminus \operatorname{cl} C = \operatorname{bd} C - \mathbb{R}^*_+ \cdot e = \operatorname{bd} C - \operatorname{int} C. \tag{1.5}$$

Lemă 1.1.2. *Fie C un con solid şi fie $e \in \operatorname{int} C$. Atunci, pentru orice vector $v \in Y$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° $v \in \operatorname{cl} C$.

2° $(v + \operatorname{int} C) \cap \operatorname{bd} C = \emptyset$.

3° $(v + \mathbb{R}^*_+ \cdot e) \cap \operatorname{bd} C = \emptyset$.

1.2 Convexitate generalizată

1.2.1 Convexitate generalizată pentru funcţii scalare

În această subsecțiune vom reaminti definiţia clasică a convexităţii, alături de alte trei concepte cunoscute de convexitate generalizată pentru funcții scalare, răspândite pe scară largă pentru importanța lor în optimizare (a se vedea, de exemplu, Avriel *et al.* [2], Cambini și Martein [14]).

Definiţie 1.2.1. *O funcţie $\varphi : D \to \mathbb{R}$ se numeşte:*

- *convexă, dacă pentru orice $x, x' \in D$ şi $t \in (0,1)$ avem*

$$\varphi((1-t)x + tx') \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(x').$$

- *cvasiconvexă, dacă pentru orice $x, x' \in D$ şi $t \in (0,1)$ avem*

$$\varphi((1-t)x + tx') \leq \max\{\varphi(x), \varphi(x')\}.$$

- *semistrict cvasiconvexă, dacă pentru orice $x, x' \in D$ şi $t \in (0,1)$,*

$$\varphi(x) \neq \varphi(x') \implies \varphi((1-t)x + tx') < \max\{\varphi(x), \varphi(x')\}.$$

- *explicit cvasiconvexă, dacă φ este atât cvasiconvexă cât şi semistrict cvasiconvexă.*

Următoarea propoziţie reiese imediat din Definiția 1.2.1 și caracterizarea cvasiconvexității explicite dată de Popovici [63, Rem. 3.1] (vezi și Günther și Popovici [37, Prop. 2.2]).

Propoziţie 1.2.2. *Pentru orice funcţie $\varphi : D \to \mathbb{R}$ următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

a) φ este convexă dacă şi numai dacă pentru orice $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, $x, x' \in D$ şi $t \in (0,1)$,

$$\varphi(x) \leq \lambda \ \text{ şi } \ \varphi(x') \leq \lambda' \quad \Longrightarrow \quad \varphi((1-t)x + tx') \leq (1-t)\lambda + t\lambda'.$$

b) φ este cvasiconvexă dacă şi numai dacă pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, x' \in D$ şi $t \in (0,1)$,

$$\varphi(x) \leq \lambda \ \text{ şi } \ \varphi(x') \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad \varphi((1-t)x + tx') \leq \lambda.$$

c) φ este semistrict cvasiconvexă dacă şi numai dacă pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, x' \in D$ şi $t \in (0,1)$,

$$\varphi(x) = \lambda \ \text{ şi } \ \varphi(x') < \lambda \quad \Longrightarrow \quad \varphi((1-t)x + tx') < \lambda.$$

d) φ este explicit cvasiconvexă dacă şi numai dacă pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, x' \in D$ şi $t \in (0,1)$,

$$\varphi(x) \leq \lambda \ \text{ şi } \ \varphi(x') < \lambda \quad \Longrightarrow \quad \varphi((1-t)x + tx') < \lambda.$$

Observaţie 1.2.3. *Următoarele afirmații cu privire la funcții scalare sunt binecunoscute:*

a) Funcțiile convexe sunt explicit cvasiconvexe.

b) Funcțiile semistrict cvasiconvexe şi inferior semicontinue de-a lungul segmentelor (cf. Popovici [64]), sunt de asemenea explicit cvasiconvexe.

c) Cvasiconvexitatea și semistrict cvasiconvexitatea nu se implică în general una pe cealaltă, așa cum arată exemplele următoare.

În continuare, pentru $n \in \mathbb{N}$, vom adopta notaţia

$$I_n := \{1, \ldots, n\}.$$

În următoarele secțiuni vom prezenta și examina concepte de convexitate generalizată pentru funcții vectoriale. Dorim să subliniem că în cazul finit-dimensional, când $Y = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), astfel de concepte se pot defini folosind componentele scalare ale funcţiei după cum urmează.

Definiţie 1.2.4. *O funcţie $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ se numeşte convexă pe componente (cvasiconvexă, semistrict cvasiconvexă, explicit cvasiconvexă) dacă pentru orice $i \in I_n$ componenta scalară $f_i : D \to \mathbb{R}$ este convexă (cvasiconvexă, semistrict cvasiconvexă respectiv explicit cvasiconvexă) în sensul definiţiei de bază.*

Următorul rezultat ilustrează două caracterizări foarte cunoscute de convexitate generalizată (a se vedea, e.g., Günther şi Popovici [37, Ex. 4.7], La Torre, Popovici şi Rocca [50, Cor. 8], Luc [53, Cor. 6.6]).

Propoziţie 1.2.5. *Pentru orice funcţie $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° *f este convexă pe componente (cvasiconvexă, explicit cvasiconvexă).*

2° *Oricare ar fi numerele reale $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, funcţia*

$$\max\{f_i(\cdot) - a_i \mid i \in I_n\} : D \to \mathbb{R}$$

este convexă (cvasiconvexă respectiv explicit cvasiconvexă).

1.2.2 Funcţii C-convexe, C-cvasiconvexe şi explicit C-cvasiconvexe

În cele ce urmează vom reaminti trei concepte importante de convexitate generalizată pentru funcții vectoriale. Ele sunt binecunoscute în domeniul optimizării vectoriale și alte domenii asociate, așa cum este evidențiat în lucrări precum Bagdasar și Popovici [3, 4], Luc [53], Popovici [63, 64], și referințele incluse în acestea.

Definiţie 1.2.6. *O funcţie $f : D \to Y$ se numeşte*

- *C-convexă, dacă pentru orice $x, x' \in D$ şi $t \in (0, 1)$ avem*

  $$f((1-t)x + tx') \in (1-t)f(x) + tf(x') - C, \text{ i.e.,}$$

  pentru orice $y, y' \in Y$, $x, x' \in D$ şi $t \in (0, 1)$,

  $$f(x) \in y - C \text{ şi } f(x') \in y' - C \implies f((1-t)x + tx') \in (1-t)y + ty' - C.$$

- *C-cvasiconvexă, dacă pentru orice $y \in Y$, $x, x' \in D$ şi $t \in (0, 1)$,*

  $$f(x) \in y - C \text{ şi } f(x') \in y - C \implies f((1-t)x + tx') \in y - C.$$

- *explicit C-cvasiconvexă, dacă pentru orice $y \in Y$, $x, x' \in D$ şi $t \in (0,1)$,*

$$f(x) \in y - C \ \text{ şi } \ f(x') \in y - \operatorname{int} C \quad \Longrightarrow \quad f((1-t)x + tx') \in y - \operatorname{int} C.$$

Următorul rezultat prezintă trei caracterizări foarte cunoscute ale funcțiilor convex generalizate (a se vedea, de exemplu, Luc [53] și Popovici [63]).

Propoziţie 1.2.7. *Pentru orice funcţie $f : D \to Y$ au loc următoarele afirmaţii:*

1° *f este C-convexă ddacă epigraful său*

$$\operatorname{epi}_C(f) = \{(x,y) \in D \times Y \mid y \in f(x) + C\}$$

este o mulţime convexă.

2° *f este C-cvasiconvexă ddacă pentru orice punct $y \in Y$, mulţimea de nivel inferioară $f^{-1}(y - C)$ este convexă.*

3° *f este explicit C-cvasiconvexă ddacă pentru orice puncte $y \in Y$, $x \in f^{-1}(y - C)$, $x' \in f^{-1}(y - \operatorname{int} C)$ şi $t \in (0,1)$ avem apartenenţa*

$$(1-t)x + tx' \in f^{-1}(y - \operatorname{int} C).$$

1.2.3 Funcţii semistrict C-cvasiconvexe

În cadrul acestei subsecțiuni introducem, în următoarea definiţie, noul nostru concept de semistrict cvasiconvexitate și stabilim legătura dintre această noţiune şi alte concepte cunoscute de convexitate generalizată din literatură. În acest scop considerăm $C \subseteq Y$ un con convex solid . În aceste condiţii, se cunoaşte faptul că $C - C = Y$, $\operatorname{bd} C \neq \emptyset$ şi $C \setminus (-C) \neq \emptyset$.

Definiţie 1.2.8. *Spunem că funcţia $f : D \to Y$ este semistrict C-cvasiconvexă dacă pentru orice $y \in Y$, $x, x' \in D$ şi $t \in (0,1)$ avem*

$$f(x) \in y - \operatorname{bd} C \ \text{ şi } \ f(x') \in y - \operatorname{int} C \quad \Longrightarrow \quad f((1-t)x + tx') \in y - \operatorname{int} C.$$

Observaţie 1.2.9. *Asemănător cu caracterizarea funcțiilor explicit C-cvasiconvexe dată de Propoziția 1.2.7 (3°), se poate demonstra uşor că o funcție $f : D \to Y$ este semistrict C-cvasiconvexă dacă și numai dacă pentru orice puncte $y \in Y$, $x \in f^{-1}(y - \operatorname{bd} C)$, $x' \in f^{-1}(y - \operatorname{int} C)$ şi $t \in (0,1)$ avem $(1-t)x + tx' \in f^{-1}(y - \operatorname{int} C)$.*

Observaţie 1.2.10. *Fie $C' \subseteq Y$ un con convex astfel încât* $\operatorname{int} C' = \operatorname{int} C$. *Cum C este solid, rezultă că* $\operatorname{cl} C' = \operatorname{cl}(\operatorname{int} C') = \operatorname{cl}(\operatorname{int} C) = \operatorname{cl} C$, *deci* $\operatorname{bd} C' = \operatorname{bd} C$. *Prin urmare, f este semistrict C-cvasiconvexă dacă şi numai dacă f este semistrict C'-cvasiconvexă.*

În cele ce urmează vom prezenta câteva relaţii între semistrict C-cvasiconvexitate şi alte concepte cunoscute de convexitate generalizată.

Lemă 1.2.11. *Dacă $f : D \to Y$ este atât C-cvasiconvexă cât şi semistrict C-cvasiconvexă, atunci f este explicit C-quasiconvexă.*

Lemă 1.2.12. *Dacă C este închis, atunci orice funcţie $f : D \to Y$ explicit C-quasiconvexă este atât C-cvasiconvexă cât şi semistrict C-cvasiconvexă.*

Următorul rezultate oferă o nouă caracterizare a explicit C-cvasiconvexităţii.

Teoremă 1.2.13. *Dacă C este închis, atunci pentru orice funcţie $f : D \to Y$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° *f este explicit C-cvasiconvexă.*

2° *f este atât C-cvasiconvexă cât şi semistrict C-cvasiconvexă.*

Fie $f : D \to Y$ o funcţie. Introducem următoarea notaţie

$$\Theta_f(x, x', y) = \{t \in [0, 1] \mid (1 - t)x + tx' \notin f^{-1}(y - C)\}$$

pentru orice puncte $x, x' \in D$ şi $y \in Y$.

Observaţie 1.2.14. *Fie $f : D \to Y$ o funcţie şi fie $y \in Y$. Dacă $x, x' \in f^{-1}(y - C)$, atunci*

$$\Theta_f(x, x', y) = \{t \in (0, 1) \mid (1 - t)x + tx' \notin f^{-1}(y - C)\}.$$

Observaţie 1.2.15. *Pentru orice funcţie $f : D \to Y$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° *f este C-cvasiconvexă.*

2° *Pentru orice $y \in Y$ şi $x, x' \in f^{-1}(y - C)$ avem $\Theta_f(x, x', y) = \emptyset$.*

Lemă 1.2.16. *Fie C închis şi $f : D \to Y$ o funcţie semistrict C-cvasiconvexă. Atunci pentru orice $y \in Y$ şi $x, x' \in f^{-1}(y - C)$, mulţimea $\Theta_f(x, x', y)$ este fie un singleton fie vidă.*

Definiţie 1.2.17. *Se spune că funcţia $f : D \to Y$ este inferior C-semicontinuă de-a lungul segmentelor dacă pentru orice puncte $x, x' \in D$ funcţia*

$$t \in [0,1] \longmapsto f((1-t)x + tx') \in Y$$

are C-mulţimile de nivel inferioare, i.e.,

$$\{t \in [0,1] \mid f((1-t)x + tx') \in y - C\} \tag{1.6}$$

închise pentru orice $y \in Y$.

Observaţie 1.2.18. *Fie $f : D \to Y$ o funcţie şi fie $x, x' \in D$. Pentru orice $y \in Y$ mulţimea de nivel* (1.6) *admite reprezentarea*

$$\{t \in [0,1] \mid f((1-t)x + tx') \in y - C\} = [0,1] \setminus \Theta_f(x, x', y).$$

Teoremă 1.2.19. *Fie conul C închis. Dacă funcţia $f : D \to Y$ este semistrict C-cvasiconvexă şi inferior C-semicontinuă de-a lungul semgmentelor, atunci f este C-cvasiconvexă.*

Încheiem această secțiune stabilind un rezultat de legătură între conceptul nostru de semistrict C-cvasiconvexitate și un alt concept de convexitate generalizată, introdus de Flores-Bazán în [23] (vezi de asemenea și Flores-Bazán și Vera [25], și Flores-Bazán și Hernández [24]).

Definiţie 1.2.20. *Fie $P \subseteq Y$ o mulţime nevidă. Spunem că funcţia $f : D \to Y$ este* semistrict $\langle P \rangle$-cvasiconvexă *în sens Flores-Bazán dacă pentru orice $x, x' \in D$ şi $t \in (0,1)$,*

$$f(x') \in f(x) - P \quad \Longrightarrow \quad f((1-t)x + tx') \in f(x) - P.$$

Teoremă 1.2.21. *Fie C un con convex închis şi fie $P \in \{\operatorname{int} C,\ C \setminus (-C),\ Y \setminus (-C)\}$. Atunci orice funcţie semistrict C-cvasiconvexă $f : D \to Y$ este semistrict $\langle P \rangle$-cvasiconvexă în sens Flores-Bazán.*

1.3 Caracterizarea funcţiilor semistrict şi explicit C-cvasiconvexe cu ajutorul funcţiilor neliniare de scalarizare

Ultima secțiune conține rezultatul nostru central care caracterizează funcțiile semistrict C-cvasiconvexe prin intermediul funcțiilor de scalarizare neliniare.

De asemenea, prezentăm câteva rezultate cunoscute referitoare la caracterizarea funcțiilor vectoriale C-convexe (respectiv, semistrict $\langle \mathrm{int}, C\rangle$-cvasiconvexe, semistrict $\langle C\rangle$-cvasiconvexe, explicit C-cvasiconvexe) prin intermediul funcțiilor de scalarizare neliniare σ_a.

Pentru acest lucru fie $C \subseteq Y$ un con propriu convex închis şi solid. Pentru un vector $e \in \mathrm{int}\, C$, notăm cu $\sigma : Y \to \mathbb{R}$ funcţia de scalarizare neliniară în sens Gerstewitz (Tammer) [29], definită pentru orice $y \in Y$ prin

$$\sigma(y) \ := \ \min\{s \in \mathbb{R} \mid y \in se - C\}.$$

De asemenea pentru un punct $a \in Y$, se poate considera funcţia $\sigma_a : Y \to \mathbb{R}$, definită pentru orice $y \in Y$ prin

$$\sigma_a(y) = \sigma(y - a),$$

unde funcţia iniţială σ se noteză de regulă cu σ_0. Aceste funcţii au fost sudiate şi folosite extensiv atât în optimizarea vectorială cât şi multivocă şi sunt de asemenea cunoscute în domeniul matematicii economice (vezi, e.g., Göpfert *et al.* [32], Khan, Tammer şi Zălinescu [45], Luc [53], Tammer şi Weidner [30], Tammer şi Zălinescu [83] şi lucrările citate de aceştia). Conform lui Göpfert *et al.* [32, Th. 2.3.1], au loc următoarele proprietăţi:

$$\{y \in Y \mid \sigma(y) \leq 0\} = -C, \tag{1.7}$$

$$\{y \in Y \mid \sigma(y) = 0\} = -\mathrm{bd}\, C, \tag{1.8}$$

$$\{y \in Y \mid \sigma(y) < 0\} = -\mathrm{int}\, C. \tag{1.9}$$

mai mult, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $y \in Y$ avem că

$$\sigma(y - \lambda e) = \sigma(y) - \lambda. \tag{1.10}$$

O caracterizare a funcțiilor vectoriale explicit C-cvasiconvexe prin intermediul funcțiilor de scalarizare neliniare σ_a este prezentată în următoarea teoremă.

Teoremă 1.3.1. *O funcţie $f : D \to Y$ este explicit C-cvasiconvexă dacă şi numai dacă pentru orice $a \in Y$, funcţia $\sigma_a \circ f : D \to \mathbb{R}$ este explicit cvasiconvexă.*

Corolar 1.3.2. *Dacă $f_1, \ldots, f_n$ sunt inferior semicontinue de-a lungul segmentelor, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° *f este semistrict $\mathbb{R}^n_+$-cvasiconvexă.*

2° *f este explicit $\mathbb{R}^n_+$-cvasiconvexă.*

3° *f este explicit cvasiconvexă pe componente.*

4° *f este semistrict cvasiconvexă pe componente.*

Capitolul 2
Proprietăţi ale funcţiilor fracţionare

Proprietatea de conservare sau păstrare a convexitățtii mulțimilor prin imagini directe și inverse este foarte importantă în optimizare, în special în optimizarea convexă, deoarece simplifică formulările problemelor, permite utilizarea eficientă a algoritmilor și joacă un rol fundamental în teoria dualității convexe.

Această proprietate este strâns legată de funcțiile convexe. Cu toate acestea, alte clase de funcții, cum ar fi câtul dintre o funcție convexă și una concavă (în special o funcție pătratică și una afină, sau două funcții afine), s-au dovedit, de asemenea, semnificative în optimizarea scalară. Lucrările cercetătorilor precum Cambini și Martein [14], Göpfert *et al.* [32], Schaible [73], și Stancu-Minasian [79] au explorat extensiv această zonă. În timp ce optimizarea multivocă rămâne un domeniu vital de studiu al teoriei generale a optimizării (vezi, de exemplu, Khan, Tammer și Zălinescu [45]), există o nevoie reală în studiul proprietăaşilor funcţiilor de tip fracționar. Contribuții remarcabile în această direcţie includ lucrări precum cea a lui Bhatia și Mehra [8], Das și Nahak [18] împreună cu alte referinţe citate de aceştia.

În acest capitol, oferim o serie de rezultate de păstrare a convexitătii mulţimilor pentru două clase speciale de funcții multivoce de tip fracționar.

Capitolul este împărțit în patru secțiuni. **Secțiunea 2.1** este dedicată introducerii noţiunilor şi rezultatelor generale de analiză multivocă şi convexă.

Secțiunea 2.2 investighează conceptul de funcție multivocă afină în sens Tan [84] şi demonstrează că inversa unei astfel de funcții este, de asemenea, afine–o distincție față de alte concepte de funcții affine multivoce, după cum este ilustrat de Kuroiwa *et al.* [48, Ex. 2]. Mai mult, în cadrul acestei secţiuni se extind o serie de rezultatele clasice ale lui Rothblum [70] din spațiile euclidiene finite-dimensionale la spații liniare reale.

În **Secțiunea 2.3**, explorăm un concept alternativ de afinitate pentru funcții multivoce, introdus în literatură de Gorokhovik [33, 34] și furnizăm o serie de rezultate care vor avea o importanță semnificativă pentru secțiunea următoare.

Ultima **Secțiune 2.4** prezintă mai multe rezultate de păstrare a convexității pentru funcţii multivoce.

Rezultatele prezentate în această parte a tezei au fost incluse în lucrările Orzan şi Popovici [60, 61] şi Orzan [59].

2.1 Preliminarii

În cadrul primei secțiuni din acest capitol vom acoperi câteva definiții și rezultate de bază de analiză multivocă și convexă, care vor fi utile pe măsură ce vom avansa. În acest scop vom considera X și Y două spații liniare reale. Ca de obicei în analiza multivocă (vezi, e.g., Aubin şi Frankowska [1]), pentru orice multifuncţie $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ notăm cu

$$\operatorname{dom} F = \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$$

domeniul lui F. Se spune că F este proprie dacă $\operatorname{dom} F \neq \emptyset$. Imaginea (directă) a mulţimii $A \subseteq X$ prin F se defineşte prin

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x).$$

Există mai multe moduri de a defini imaginea inversă a unei mulţimi $B \subseteq Y$ printr-o multifuncţie F, două dintre ele fiind cel mai des folosite în analiza multivocă (Aubin şi Frankowska [1]) fiind:

$$F^{-1}(B) = \{x \in X \mid F(x) \cap B \neq \emptyset\}, \tag{1.11}$$

$$F^{+1}(B) = \{x \in X \mid F(x) \subseteq B\}. \tag{1.12}$$

Mulţimea $F^{-1}(B)$ se numeşte imaginea inversă a lui B prin F, iar $F^{+1}(B)$ se numeşte nucleul lui B prin F (cunoscute de asemenea sub denumirea de imaginea inversă inferioară respectiv imaginea inversă superioară a mulţimii B prin F). Legătura dintre cele două este dată de relaţia (vezi, e.g., Kassay şi Rădulescu [44, Sec. 1.3])

$$F^{+1}(B) = X \setminus F^{-1}(Y \setminus B). \tag{1.13}$$

2.2 Multifuncţii afine în sens Tan

Generalizarea conceptului de afinitate pentru funcțiile multivoce este abordată în diverse moduri în literatură. Exemple remarcabile în acest sens includ lucrările lui Deutsch și Singer [19], Nikodem și Popa [57], Tan [84], Gorokhovik [33], Gorokhovik și Zabreiko [34] și referințele citate de aceştia. Dintre aceste abordări, cea dezvoltată de Tan [84], va servi ca principal instrument în această secțiune și este prezentată în cele ce urmează.

Definiţie 2.2.1. O funcţie multivocă $G : X \to \mathcal{P}(Y)$ se numeşte afină (în sens Tan) dacă

$$G((1-t)x^1 + tx^2) = (1-t)G(x^1) + tG(x^2) \tag{1.14}$$

pentru orice $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} G$ şi $t \in \mathbb{R}$.

Propoziţie 2.2.2. *Pentru orice funcţie multivocă $G : X \to \mathcal{P}(Y)$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° *G este afină.*

2° *Pentru orice $x^1, x^2 \in \operatorname{dom} G$ şi $t \in \mathbb{R}$ avem că*

$$(1-t)G(x^1) + tG(x^2) \subseteq G((1-t)x^1 + tx^2).$$

Teoremă 2.2.3. *Fie $G : X \to \mathcal{P}(Y)$ o funcţie multivocă afină. Atunci inversa lui G, i.e., funcţia multivocă $G^{-1} : Y \to \mathcal{P}(X)$, este afină.*

Corolar 2.2.4. *Dacă $g : E \to Y$ este o funcţie afină vectorială, definită pe o mulţime nevidă şi afină $E \subseteq X$, atunci funcţia multivocă $g^{-1} : Y \to \mathcal{P}(X)$ este afină.*

2.2.1 Funcţii vectoriale fracţionar afine

Începem această subsecțiune prin extinderea noțiunii de funcţie vectorială fracţionar afină, introdusă inițial de Rothblum [70] în spațiile euclidiene finite-dimensionale, la cadrul spațiilor liniare reale.

Definiţie 2.2.5. O funcţie vectorială $f : D \to Y$, definită pe o mulţime nevidă şi convexă $D \subseteq X$, se numeşte fracţionar afină dacă există o funcţie o funcţie afină vectorială $g : X \to Y$ şi o funcţie afină scalară $h : X \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$D \subseteq \{x \in X \mid h(x) > 0\}$$

şi

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},\ \forall\, x \in D.$$

Următoarele propoziții extind în cadrul spațiilor liniare reale rezultatele obținute în $\mathbb{R}^n$ de către Rothblum (vezi [70, Props. 1, 2 și 3]). Demonstratiile lor sunt omise, deoarece urmează acelaşi raţionament ca în Rothblum [70].

Propoziţie 2.2.6. *Dacă $f : D \to Y$ este o funcţie vectorială definită pe o mulţime nevidă şi convexă $D \subseteq X$, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° $\operatorname{conv} f(S) \subseteq f(\operatorname{conv} S)$ *pentru orice mulţime $S \subseteq D$.*

2° *mulţimea $f(A)$ este convexă pentru orice mulţime $A \subseteq D$.*

Propoziţie 2.2.7. *Dacă $f : D \to Y$ este o funcţie vectorială definită pe o mulţime nevidă şi convexă $D \subseteq X$, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° $f(\operatorname{conv} S) \subseteq \operatorname{conv} f(S)$ *pentru orice mulţime $S \subseteq D$.*

2° *mulţimea $f^{-1}(B)$ este convexă pentru orice mulţime convexă $B \subseteq Y$.*

Propoziţie 2.2.8. *Fie $D \subseteq X$ o mulţime nevidă şi convexă. Dacă $f : D \to Y$ este o funcţie vectorială fracţionar afină, atunci*

$$\operatorname{conv} f(S) = f(\operatorname{conv} S) \text{ for every set } S \subseteq D.$$

2.2.2 Funcţii multivoce fracţionar afine

În această subsecțiune introducem o nouă clasă de funcţii multivoce fracţionar afine ce are la bază clasa propusă de Orzan în [59, Def. 3.3]. Vom arăta că aceste funcții de tip fracționar păstrează convexitatea mulțimilor prin imagini directe și inverse, o proprietate care, după cum am menționat deja, este semnificativă în optimizare, în special în contextul optimizării convexe.

Definiţie 2.2.9. Fie $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ o funcţie multivocă cu domeniul o mulţime nevidă şi convexă. Spunem că F este fracţionar afină (în sens Tan) dacă există o funcţie multivocă afină şi proprie $G : X \to \mathcal{P}(Y)$ şi o funcţie afină scalară $h : X \to \mathbb{R}$, nenulă, astfel încât

$$\operatorname{dom} F \subseteq \{x \in X \mid h(x) > 0\} \cap \operatorname{dom} G$$

şi

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{G(x)}{h(x)} & \text{dacă } x \in \operatorname{dom} F \\ \emptyset & \text{dacă } x \in X \setminus \operatorname{dom} F. \end{cases} \tag{1.15}$$

Teoremă 2.2.10. *Fie* $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ *o funcţie multivocă fracţionar afină de forma* (1.15). *Atunci există o funcţie fracţionar afină vectorială* $f : \mathrm{dom}\, F \to Y$ *şi un spaţiu liniar* $M \subseteq Y$*, astfel încât*

$$F(x) = \begin{cases} f(x) + M & \text{dacă } x \in \mathrm{dom}\, F \\ \emptyset & \text{dacă } x \in X \setminus \mathrm{dom}\, F. \end{cases} \tag{1.16}$$

Teoremă 2.2.11. *Fie* $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ *o funcţie multivocă de forma* (1.16)*, unde* $\mathrm{dom}\, F \subseteq X$ *şi* $M \subseteq Y$ *sunt mulţimi nevide şi convexe, iar* $f : \mathrm{dom}\, F \to Y$ *o funcţie vectorială ce păstrează convexitatea mulţimilor prin imagini directe. Atunci, pentru orice mulţime convexă* $A \subseteq X$*, mulţimea* $F(A)$ *este convexă.*

Teoremă 2.2.12. *Fie* $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ *o funcţie multivocă de forma* (1.16)*, unde* $\mathrm{dom}\, F \subseteq X$ *şi* $M \subseteq Y$ *sunt mulţimi nevide şi convexe, iar* $f : \mathrm{dom}\, F \to Y$ *o funcţie vectorială ce păstrează convexitatea mulţimilor prin imagini inverse. Atunci, pentru orice mulţime convexă* $B \subseteq Y$*, mulţimile* $F^{-1}(B)$ *şi* $F^{+1}(B) \cap \mathrm{dom}\, F$ *sunt convexe.*

Corolar 2.2.13. *Dacă* $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ *este o funcţie multivocă fracţionar afină de forma* (1.15)*, atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1° *F păstrează convexitatea mulţimilor prin imagini directe.*

2° *F păstrează convexitatea mulţimilor prin imagini inverse inferioare.*

3° *F păstrează convexitatea mulţimilor prin imagini inverse superioare în sens Berge.*

2.3 Funcţii multivoce afine în sens Gorokhovik

În cadrul acestei secțiuni vom investiga un alt concept de afinitate pentru funcții multivoce, introdus de V. Gorokhovik [33], care este mai general decât conceptul de afinitate dat de Tan.

Definiţie 2.3.1. O funcţie multivocă $G : X \to \mathcal{P}(Y)$ se numeşte
(i) *convexă* dacă

$$(1-t)G(x^1) + tG(x^2) \subseteq G((1-t)x^1 + tx^2)$$

pentru orice $x^1, x^2 \in \operatorname{dom} G$ şi $t \in [0,1]$;
(ii) *concavă* dacă $\operatorname{dom} G$ este o mulţime convexă din X şi

$$G((1-t)x^1 + tx^2) \subseteq (1-t)G(x^1) + tG(x^2)$$

pentru orice $x^1, x^2 \in \operatorname{dom} G$ şi $t \in [0,1]$;
(iii) *afină* (în sens Gorokhovik) dacă

$$G((1-t)x^1 + tx^2) = (1-t)G(x^1) + tG(x^2)$$

pentru orice $x^1, x^2 \in \operatorname{dom} G$ şi $t \in [0,1]$.

Fie $K \subseteq X$ un con.

Definiţie 2.3.2 (Nikodem [56]). *Fie $F : X \to \mathcal{P}_0(Y)$ o funcţie multivocă. Atunci F se numeşte K-cvasiconcavă dacă satisface condiţia*

$$F(x^1) \subseteq A + K \;\; \text{şi} \;\; F(x^2) \subseteq A + K \Rightarrow F((1-t)x^1 + tx^2) \subseteq A + K$$

pentru orice mulţime convexă $A \subseteq Y$, $x^1, x^2 \in X$ şi $t \in [0,1]$.

Observaţie 2.3.3. *Dacă $K = \{0_X\}$, atunci F este cvasiconvexă.*

Următoarul rezultat va fi folositor pe parcurs. Pentru oricare două numere reale $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$ considerăm funcţia fracţionar afină $\sigma_{a,b} : [0,1] \to [0,1]$ definită prin

$$\sigma_{a,b}(t) = \frac{tb}{(1-t)a + tb}. \tag{1.17}$$

Observaţie 2.3.4. *Se verifică uşor faptul că $\sigma_{a,b}$ e bine definită şi are următoarele proprietăţi:*

1° *$\sigma_{a,b}$ este strict crescătoare;*

2° *$\sigma_{a,b}$ este convexă pentru $a > b$, $\sigma_{a,b}$ este concavă dacă $a < b$ şi $\sigma_{a,b}(t) = t$ pentru orice $t \in [0,1]$ dacă $a = b$;*

3° *$\sigma_{a,b}$ este bijectivă şi inversa sa $\sigma_{a,b}^{-1}$ este funcţia $\sigma_{b,a}$.*

2.3.1 Funcţii fracţionar afine multivoce

În următoarea etapă vom explora proprietăți de păstrare a convexității folosind conceptul de afinitate pentru funcţii multivoce specific lui Gorokhovik. Acest lucru va facilita munca noastră și, în același timp, va pregăti terenul pentru rezultatele viitoare.

Definiţie 2.3.5. Fie $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ o funcţie multivocă cu $\operatorname{dom} F$ o mulţime convexă. Spunem că F este *fracţionar afină* (în sens Gorokhovik) dacă există o funcţie multivocă afină şi proprie $G : X \to \mathcal{P}(Y)$ şi o funcţie afină scalară $h : X \to \mathbb{R}$, nenulă, astfel încât

$$\operatorname{dom} F \subseteq \{x \in X \mid h(x) > 0\} \cap \operatorname{dom} G$$

şi

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{G(x)}{h(x)} & \text{dacă } x \in \operatorname{dom} F \\ \emptyset & \text{dacă } x \in X \setminus \operatorname{dom} F. \end{cases}$$

Lemă 2.3.6. *Fie F o funcţie multivocă fracţionară în care numărătorul este o multifuncţie G iar numitorul este o funcţie afină pozitivă h. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1° *Dacă G este convexă, atunci*

$$(1 - \sigma_{h(x^1),h(x^2)}(t))F(x^1) + \sigma_{h(x^1),h(x^2)}(t)F(x^2) \subseteq F((1-t)x^1 + tx^2)$$

pentru orice $x^1, x^2 \in \operatorname{dom} F$ şi $t \in [0,1]$;

2° *Dacă G este concavă, atunci*

$$F((1-t)x^1 + tx^2) \subseteq (1 - \sigma_{h(x^1),h(x^2)}(t))F(x^1) + \sigma_{h(x^1),h(x^2)}(t)F(x^2)$$

pentru orice $x^1, x^2 \in \operatorname{dom} F$ şi $t \in [0,1]$;

3° *Dacă G este afină, atunci*

$$F((1-t)x^1 + tx^2) = (1 - \sigma_{h(x^1),h(x^2)}(t))F(x^1) + \sigma_{h(x^1),h(x^2)}(t)F(x^2)$$

pentru orice $x^1, x^2 \in \operatorname{dom} F$ şi $t \in [0,1]$.

Propoziţie 2.3.7. *Fie F o funcţie multivocă fracţionară în care numărătorul este o multifuncţie convexă G iar numitorul este o funcţie afină pozitivă h. Atunci*

1° *pentru orice $x \in X$, mulţimea $F(x)$ este convexă;*

2° *pentru orice $y \in Y$, mulţimea $F^{-1}(y)$ este convexă.*

2.4 Proprietăţi de păstrare a convexităţii

Încheiem acest capitol printr-o secțiune compusă din două părți. În prima subsecțiune furnizăm câteva rezultate de păstrare a convexității pentru funcții multivoce generale iar, în cea de-a doua subsecțiune, generalizăm unele dintre rezultatele obținute în secțiunile anterioare folosind conceptul de afinitate pentru funcţii multivoce introdus de Gorokhovik.

2.4.1 Funcţii multivoce generale

Propoziţie 2.4.1. *Pentru orice funcţie multivocă $F : X \to \mathcal{P}(Y)$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° $\operatorname{conv} F(A) \subseteq F(\operatorname{conv} A)$ *pentru orice mulţime* $A \subseteq X$.

2° *Pentru orice mulţime convexă $C \subseteq X$, mulţimea $F(C)$ este convexă.*

3° $\operatorname{conv} F(\{x^1, x^2\}) \subseteq F(\operatorname{conv} \{x^1, x^2\})$ *pentru orice* $x^1, x^2 \in X$.

4° $\operatorname{conv} F(\{x^1, x^2\}) \subseteq F(\operatorname{conv} \{x^1, x^2\})$ *pentru orice* $x^1, x^2 \in \operatorname{dom} F$.

Corolar 2.4.2. *Pentru orice funcţie multivocă $F : X \to \mathcal{P}(Y)$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° $\operatorname{conv} F^{-1}(A) \subseteq F^{-1}(\operatorname{conv} A)$ *pentru orice mulţime* $A \subseteq Y$.

2° *Pentru orice mulţime convexă $C \subseteq Y$, mulţimea $F^{-1}(C)$ este convexă, i.e., F este cvasiconvexă în sens Nikodem.*

3° $\operatorname{conv} F^{-1}(\{y^1, y^2\}) \subseteq F^{-1}(\operatorname{conv} \{y^1, y^2\})$ *pentru orice* $y^1, y^2 \in Y$.

4° $\operatorname{conv} F^{-1}(\{y^1, y^2\}) \subseteq F^{-1}(\operatorname{conv} \{y^1, y^2\})$ *pentru orice puncte y^1, y^2 din* $\operatorname{dom} F^{-1}$.

Propoziţie 2.4.3. *Pentru orice funcţie multivocă $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ cu $\operatorname{dom} F$ convexă următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° $F(\operatorname{conv} A) \subseteq \operatorname{conv} F(A)$ *pentru orice mulţime* $A \subseteq \operatorname{dom} F$.

2° *Pentru orice mulţime convexă $C \subseteq Y$, mulţimea $F^{+1}(C) \cap \operatorname{dom} F$ este convexă.*

3° $F(\operatorname{conv} \{x^1, x^2\}) \subseteq \operatorname{conv} F(\{x^1, x^2\})$ *pentru orice* $x^1, x^2 \in \operatorname{dom} F$.

2.4.2 Funcţii multivoce fracţionar afine

Teoremă 2.4.4. *Fie $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ o funcţie multivocă fracţionară în care numărătorul este o multifuncţie convexă iar numitorul este o funcţie afină pozitivă. Atunci pentru orice mulţime convexă $C \subseteq X$, mulţimea $F(C)$ este convexă.*

Corolar 2.4.5. *Dacă $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ este o funcţie multivocă fracţionar afină ca în Definiţia 2.3.5, atunci pentru orice mulţime convexă $C \subseteq X$, mulţimea $F(C)$ este convexă.*

Teoremă 2.4.6. *Fie $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ este o funcţie multivocă fracţionar afină. Atunci pentru orice mulţime convexă C din Y, mulţimea $F^{+1}(C) \cap \operatorname{dom} F$ este convexă.*

Teoremă 2.4.7. *Fie $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ o funcţie multivocă fracţionară în care numărătorul este o multifuncţie concavă iar numitorul este o funcţie afină pozitivă, cu domeniul $\operatorname{dom} F \subseteq X$ nevid şi convex. Atunci pentru orice mulţime convexă $C \subseteq Y$, mulţimea $F^{-1}(C)$ este convexă.*

Corolar 2.4.8. *Fie $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ o funcţie multivocă fracţionar afină. Atunci pentru orice mulţime convexă $B \in \mathcal{P}(Y)$, mulţimea $F^{-1}(B)$ este convexă.*

Corolar 2.4.9. *Fie $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ o funcţie multivocă afină. Atunci pentru orice mulţime convexă $B \in \mathcal{P}(Y)$, mulţimea $F^{-1}(B)$ este convexă.*

Capitolul 3
Algoritmi de aproximare de tip Dinkelbach pentru probleme fracţionare

Problemele de optimizare fracționară au atras o atenție semnificativă cercetătorilor datorită relevanței lor în modelarea diferitelor procese din lumea reală. Numeroși autori au dedicat mult timp studierii acestui subiect, cum ar fi Avriel et al. [2], Cambini și Martein [14], Stancu-Minasian [79], Elbenani și Ferland [21], precum și referințele citate de aceştia.

Exemple de probleme de optimizare fracționară pot fi identificate și în matematică în mai multe publicații, printre care menționăm lucrările lui Crouzeix [15, 16], Hadjisavvas [26], Schaible [71, 72], Rodenas [69], Shi [77], Boţ et al. [10, 11], Tammer [81]. În acest capitol al tezei prezentăm câteva variante aproximtive ale algoritmului clasic al lui Dinkelbach pentru problemele de optimizare fracționară în spații Banach.

Capitolul este compus din cinci secțiuni. Prima dintre ele, **Secțiunea 3.1**, introduce cadrul nostru general și algoritmul original al lui Dinkelbach.

Secțiunea 3.2 prezintă cazul în care, la fiecare pas al algoritmului, punctul generat poate fi determinat aproximativ, cu o eroare dată $\varepsilon > 0$.

În **Secțiunea 3.3** prezentăm o altă variantă a algoritmului lui Dinkelbach în care eroarea converge ccătre zero și arătăm că, sub aceeași condiție de compacitate de tip Palais-Smale, algoritmul este convergent către perechea $(\lambda^*, \widetilde{x})$, cu alte cuvinte, soluția problemei noastre de optimizare fracționară. **Secțiunea 3.4** propune algoritmul de aproximare Dinkelbach-Ekeland.

În cele din urmă, ultima **Secțiune 3.5** oferă condiții suficiente care fac posibilă îndeplinirea condiţiei Palais-Smale și oferă rezultatul nostru final referitor la convergența algoritmului Dinkelbach-Ekeland.

Rezultatele prezentate în această parte a tezei au fost incluse în lucrarea Orzan şi Precup [62].

3.1 Probleme de optimizare fracţionară şi algoritmul lui Dinkelbach

Problema standard de optimizare fracționară poate fi exprimată în forma sa generală prin

$$\frac{A(x)}{B(x)} \longrightarrow \min_{x\in D},$$

unde A şi B sunt două funcţionale definite pe o mulţime nevidă D iar $B(x) \neq 0$ pentru orice $x \in D$. Rezolvarea acestei probleme se reduce la determinarea unei perechi (λ^*, x^*), unde λ^* este valoarea minimă a funcţiei A/B şi x^* este punctul de minim, i.e.,

$$\lambda^* = \frac{A(x^*)}{B(x^*)} = \min_D \frac{A}{B}.$$

Pe lângă metodele directe de minimizare, adesea folosite la rezolvarea acestei probleme, există şi tehnici specifice care transformă problema fracţionară într-o problemă de optimizare ce implică o funcțională non-fracţionară. Un astfel de procedeu, introdus de Dinkelbach [20], se bazează pe problema parametrică

$$A(x) - \lambda B(x) \longrightarrow \min_{x\in D}.$$

Această metodă constă în generarea unui şir (λ_k) de valori care în cele din urmă vor converge la minimul raportului A/B. Alături de acest şir, se generează concomitent un alt şir (x_k) care va converge către punctul de minim dorit. Pentru a îmbunătăți înțelegerea acestei metode, furnizăm o scurtă prezentare a algoritmului lui Dinkelbach și conturăm principalele etape ale demonstrației convergenței sale. Presupunând că D este o mulţime arbitrară nevidă, $A : D \to \mathbb{R}$ este mărginită inferior, şi $B : D \to \mathbb{R}$ are proprietatea că

$$0 < c \leq B(x) \leq C \quad \text{pentru orice} \quad x \in D,$$

pentru nişte constante $c, C \in \mathbb{R}$, algoritmul lui Dinkelbach este:

Algoritm 3.1.1 (Algoritmul lui Dinkelbach)**.**

Pasul 0 **(iniţializare)** Alegem un punct de plecare $x_0 \in D$, calculăm valoarea $\lambda_0 = \frac{A(x_0)}{B(x_0)}$ şi fixăm $k = 1$.

Pasul k (pas ciclic pentru $k \geq 1$) Se determină un punct $x_k \in D$ astfel încât

$$A(x_k) - \lambda_{k-1} B(x_k) = m_k := \min_D (A - \lambda_{k-1} B),$$

se calculează

$$\lambda_k = \frac{A(x_k)}{B(x_k)}$$

şi se trece la pasul $k+1$.

Teoremă 3.1.2. *Algoritmul lui Dinkelbach este convergent iar dacă $\lambda^* = \lim \lambda_k$ şi $x^* \in D$ este punctul pentru care*

$$A(x^*) - \lambda^* B(x^*) = \min_D (A - \lambda^* B),$$

atunci

$$\lambda^* = \frac{A(x^*)}{B(x^*)} = \min_D \frac{A}{B}. \tag{1.18}$$

Încheiem această secțiune reamintind principiul variațional al lui Ekeland și unele dintre consecințele sale (vezi, de exemplu, Ekeland [22], Frigon [27]), care se va dovedi a fi de o importanță deosebită pentru lucrarea noastră. De asemenea, reamintim condiția Palais-Smale (de compactitate), denumită în mod simplu (PS).

Teoremă 3.1.3 (Ekeland)**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi fie $E : X \to \mathbb{R}$ o funcţională inferior semicontinuă şi mărginită inferior. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $u_0 \in X$, există un punct $u \in X$ astfel încât*

$$E(u) \leq E(v) + \varepsilon d(u, v) \quad \textit{pentru orice } v \in X$$

şi

$$E(u) \leq E(u_0) - \varepsilon d(u, u_0).$$

Corolar 3.1.4. *Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Banach şi $E : X \to \mathbb{R}$ o funcţională de clasă C^1 mărginită inferior. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există un punct $u \in X$ astfel încât*

$$E(u) \leq \inf_X E + \varepsilon, \quad |E'(u)| \leq \varepsilon$$

O funcţională E de clasă C^1 definită pe un spaţiu Banach satisface condiţia *(PS)* dacă orice şir (x_k) cu

$$E(x_k) \to l \quad (l \in \mathbb{R}) \quad \text{şi} \quad E'(x_k) \to 0$$

are un subşir convergent.

Teoremă 3.1.5. *Fie* $(X, |\cdot|)$ *un spaţiu Banach şi* $E : X \to \mathbb{R}$ *o funcţională de clasă* C^1 *mărginită inferior ce satisface condiţia (PS). Atunci există un punct* $x^* \in X$ *cu*

$$E(x^*) = \inf_X E \quad \text{şi} \quad E'(x^*) = 0.$$

3.2 Algoritmul lui Dinkelbach cu eroare fixă

În această secțiune, vom discuta cazul în care algoritmul lui Dinkelbach include o anumită eroare predeterminată $\varepsilon > 0$. În consecință, Algoritmul 3.1.1 se modifică după cum urmează:

Algoritm 3.2.1 (Algoritmul lui Dinkelbach cu eroare fixă)**.**

Pasul 0 **(iniţializare)** Alegem un punct de plecare $x_0 \in D$, calculăm valoarea $\lambda_0 = \frac{A(x_0)}{B(x_0)}$ şi fixăm $k = 1$.

Pasul k **(pas ciclic pentru** $k \geq 1$**)** Se determină un punct $x_k \in D$ astfel încât

$$A(x_k) - \lambda_{k-1} B(x_k) \leq \inf_D (A - \lambda_{k-1} B) + \varepsilon, \tag{1.19}$$

se calculează

$$\lambda_k = \min \left\{ \frac{A(x_k)}{B(x_k)},\ \lambda_{k-1} \right\}$$

şi se trece la pasul $k + 1$.

Teoremă 3.2.2. *Dacă* $\widetilde{\lambda} = \lim \lambda_k$ *şi* $\widetilde{x} \in D$ *este un punct pentru care*

$$A(\widetilde{x}) - \widetilde{\lambda} B(\widetilde{x}) \leq \inf_D \left(A - \widetilde{\lambda} B \right) + \varepsilon,$$

atunci

$$\inf_D \frac{A}{B} \leq \widetilde{\lambda} \leq \inf_D \frac{A}{B} + \frac{\varepsilon}{c} \tag{1.20}$$

şi

$$\widetilde{\lambda} - \frac{\varepsilon}{c} \leq \frac{A(\widetilde{x})}{B(\widetilde{x})} \leq \widetilde{\lambda} + \frac{\varepsilon}{c}. \tag{1.21}$$

Teoremă 3.2.3. *Fie* D *un spaţiu metric,* A *şi* B *funcţii continue pe* D *şi presupunem că are loc următoarea condiţie de compacititate:*

(C) *orice şir* (y_k) *din* D *pentru care şirul* $(A(y_k)/B(y_k))$ *este convergent are un subşir convergent în* D.

Atunci există un punct $\widetilde{x} \in \overline{\{x_k\}}$ *astfel încât* $\widetilde{\lambda} = A(\widetilde{x})/B(\widetilde{x})$.

3.3 Algoritmul lui Dinkelbach cu eroare convergentă la zero

În secțiunea anterioară am studiat algoritmul lui Dinkelbach cu eroare fixă $\varepsilon > 0$. În continuare vom vedea că dacă eroarea ε_k, acceptată la fiecare pas, converge la zero, atunci algoritmul converge către $(\lambda^*, \widetilde{x})$, unde λ^* este infimumul lui A/B și acesta este atins sub ipoteza compactității enunțată în teorema 3.2.3. Noul algoritmul este:

Algoritm 3.3.1 (Algoritmul lui Dinkelbach cu eroare convergentă la zero)**.**

Pasul 0 **(iniţializare)** Alegem un punct de plecare $x_0 \in D$, calculăm valoarea $\lambda_0 = \frac{A(x_0)}{B(x_0)}$ şi fixăm $k = 1$.

Pasul k **(pas ciclic pentru** $k \geq 1$) Se determină un punct $x_k \in D$ astfel încât

$$A(x_k) - \lambda_{k-1} B(x_k) \leq \inf_D (A - \lambda_{k-1} B) + \varepsilon_k, \tag{1.22}$$

se calculează

$$\lambda_k = \min \left\{ \frac{A(x_k)}{B(x_k)},\ \lambda_{k-1} \right\}$$

şi se trece la pasul $k+1$.

Teoremă 3.3.2. *Dacă* $\widetilde{\lambda} = \lim \lambda_k$ *ḑi* $\widetilde{x} \in D$ *este un punct pentru care*

$$A(\widetilde{x}) - \widetilde{\lambda} B(\widetilde{x}) \leq \inf_D \left(A - \widetilde{\lambda} B \right) + \varepsilon,$$

atunci avem că

$$\widetilde{\lambda} = \lambda^* = \inf_D \frac{A}{B} \tag{1.23}$$

şi

$$\frac{A(\widetilde{x})}{B(\widetilde{x})} \leq \inf_D \frac{A}{B} + \frac{\varepsilon}{c}.$$

Reste de remarcat faptul că rezultatul din Teorema 3.2.3 rămâne valabil și în acest context. Mai precis, avem:

Teoremă 3.3.3. *În condiţiile teoremei* 3.2.3*, dacă* (λ_k) *şi* (x_k) *sunt şirurile generate de algoritmul lui Dinkelbach cu eroare convergentă la zero iar* $\lambda^* = \lim \lambda_k$*, atunci există un punct* $x^* \in \overline{\{x_k\}}$ *astfel încât*

$$\lambda^* = \frac{A(x^*)}{B(x^*)} = \min_D \frac{A}{B}.$$

Mai mult, avem că

$$\inf_D (A - \lambda_k B) \to \inf_D (A - \lambda^* B) = 0 \quad \textit{când } k \to \infty. \tag{1.24}$$

3.4 Algoritmul Dinkelbach-Ekeland

Următorul nostru obiectiv este să asigurăm condiția de compactitate de tipul Palais-Smale (condiţia **(C)** din Teorema 3.2.3) pentru mulțimea necompactă D. Ne apropiem de aceast lucru dacă putem asigura proprietăți suplimentare şirului (x_k). În acest scopul, vom prezenta o versiune modificată a algoritmului lui Dinkelbach folosind principiul variațional al lui Ekeland pentru a genera şirul (x_k). Pentru aceasta fie $(X, |\cdot|)$ un spațiu Banach și $A, B : X \to \mathbb{R}$ două funcționale de clasă C^1 astfel încât A este mărginită inferior iar B satisface

$$0 < c \leq B(x) \leq C \quad \text{pentru orice} \quad x \in X.$$

Fie (ε_k) un şir descrescător la zero de numere reale pozitive. Atunci algoritmul Dinkelbach-Ekeland este:

Algoritm 3.4.1 (Algoritmul Dinkelbach-Ekeland)**.**

Pasul 0 **(iniţializare)** Alegem un punct de plecare $x_0 \in X$, calculăm valoarea $\lambda_0 = \dfrac{A(x_0)}{B(x_0)}$ şi fixăm $k = 1$.

Pasul k **(pas ciclic pentru** $k \geq 1$) Folosind principiul lui Ekeland, determinăm un punct $x_k \in X$ astfel încât

$$A(x_k) - \lambda_{k-1}B(x_k) \leq \inf_X (A - \lambda_{k-1}B) + \varepsilon_k, \tag{1.25}$$

$$|A'(x_k) - \lambda_{k-1}B'(x_k)| \leq \varepsilon_k$$

se calculează

$$\lambda_k = \min\left\{\frac{A(x_k)}{B(x_k)},\ \lambda_{k-1}\right\}$$

şi se trece la pasul $k+1$.

Teoremă 3.4.2. *În condiţiile enunţate anterior, dacă (λ_k) şi (x_k) sunt şirurile generate de algoritmul Dinkelbach-Ekeland şi $\widetilde{\lambda} = \lim \lambda_k$, atunci*

$$A(x_k) - \widetilde{\lambda}B(x_k) \to \inf_X \left(A - \widetilde{\lambda}B\right) \quad \text{şi} \quad A'(x_k) - \widetilde{\lambda}B'(x_k) \to 0. \tag{1.26}$$

Dacă în plus funcţionala $A - \widetilde{\lambda}B$ satisface condiţia (PS), atunci există un punct $x^* \in \overline{\{x_k\}}$ astfel încât

$$\widetilde{\lambda} = \lambda^* = \frac{A(x^*)}{B(x^*)} = \min_X \frac{A}{B}.$$

3.5 Condiţii suficiente pentru (PS)

În ultima secțiune a acestui capitol, prezentăm câteva condiții suficiente pentru ca o funcțională F să satisfacă condiția de compactitate (PS). Acestea necesită anumite proprietăți topologice asupra lui F' care sunt binecunoscute în analiza neliniară.

Lemă 3.5.1. *Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Hilbert şi $F : X \to \mathbb{R}$ o funcţională de clasă C^1 cu următoarele proprietăţi:*

(i) *orice şir (x_k) pentru care şirul $(F(x_k))$ converge este convergent;*

(ii) *operatorul $N := I - F'$ este complet continuu.*

Atunci F satisface condiţia (PS).

Lemă 3.5.2. *Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Hilbert şi $F : X \to \mathbb{R}$ o funcţională de clasă C^1 astfel încât*

(ii*) *operatorul $N = I - F'$ este o contracţie pe X.*

Atunci F satisface condiţia (PS).

Propoziţie 3.5.3. *Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Hilbert, $A, B : X \to \mathbb{R}$ funcţionale de clasă C^1 stfel încât există constantele reale c, C cu $0 < c \leq B \leq C$. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) *Dacă A este coercivă iar operatorii $I - A'$ şi B' sunt complet continui, atunci pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, funcţionala $A - \lambda B$ satisface condiţia (PS).*

(b) *Dacă operatorii $I - A'$ şi B' sunt L_A- şi L_B-Lipschitz, cu $L_A < 1$, atunci funcţionala $A - \lambda B$ satisface condiţia (PS) strict pentru orice λ cu $|\lambda| < (1 - L_A) / L_B$.*

În ceea ce privește algoritmul Dinkelbach-Ekeland, avem următorul rezultat final referitor la convergența sa.

Teoremă 3.5.4. *Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Hilbert şi presupunem că au loc condiţiile teoremei* 3.4.2*, (λ_k) şi (x_k) sunt şirurile generate de algorithmul* 3.4.1*, iar $\widetilde{\lambda} = \lim \lambda_k$. Atunci:*

(a) *Dacă A e coercivă iar operatorii $I - A'$ şi B' sunt complet continui, atunci există un punct $x^* \in \overline{\{x_k\}}$ astfel încât*

$$\widetilde{\lambda} = \lambda^* = \frac{A(x^*)}{B(x^*)} = \min_X \frac{A}{B}. \tag{1.27}$$

(b) *Dacă operatorii $I - A'$ şi B' sunt L_A- respectiv L_B-Lipschitz cu $L_A < 1$ şi*

$$\max\{\lambda_0, -\lambda_{-1}\} < \frac{1 - L_A}{L_B}, \tag{1.28}$$

unde $\lambda_{-1} = \inf_X A/B$, atunci şirul (x_k) converge la x^* şi relaţia (1.27) are loc.

Capitolul 4
Algoritmul lui Dinkelbach pe componente pentru probleme fracţionare

Necesitatea ridicată de algoritmi de calcul pentru a aborda problemele de optimizare fracționară derivă dintr-o multitudine de scenarii practice. Aceste situaţii implică frecvent contexte în care obiectivul este optimizarea unei funcţii fracţionare, așa cum este evidențiat în lucrări precum Shen și Yu [75, 76], Elbenani și Ferland [21], și referințele din aceste lucrări. Prin urmare, aceste probleme au o relevanță substanțială în diverse domenii, inclusiv economie, planificare industrială, dezvoltare de strategii medicale și alte domenii conexe. Provocări similare sunt întâlnite și în diverse domenii matematice, cum ar fi teoria grafurilor și teoria jocurilor, așa cum este evidențiat în lucrările lui Stancu-Minasian [79], Stancu-Minasian și Tigan [80], și alte referințe citate de aceştia. În aceast capitol al tezei, prezentăm un algoritm de tip Dinkelbach proiectat pentru a calcula puncte de minim parţial pentru problemele de optimizare fracționară.

Capitolul este împărțit în patru secțiuni. **Secțiunea 4.1** introduce cadrul general de lucru și oferă contextul necesar cititorului pentru a se familiariza cu problemele de optimizare fracționară în care funcția obiectiv (raport a două funcții) este definită pe produsul cartezian al două spații normate reale, respectiv X și Y. Secțiunea definește de asemenea foarte clar obiectivul acestei părți a tezei: determinarea așa-numitelor puncte de minim parţial. Acestea sunt puncte din $X \times Y$ cu proprietatea că una dintre variabilele lor minimizează funcția obiectiv atunci când cealaltă variabilă este constantă.

În **Secțiunea 4.2** demonstrăm câteva rezultate referitoare la relația dintre punctele de minim global şi parţial.

Secțiunea 4.3 debutează prin introducerea algoritmului lui Dinkelbach pe componente (algoritmul 4.3.1) și prezintă câteva limitări ale acestuia.

În final, ultima **Secțiune 4.4** este dedicată convergenței algoritmului nostru. Secțiunea demonstrează că introducerea unor ipoteze suplimentare referitoare la spațiile și funcțiile implicate - cum ar fi continuitatea de tip Lipschitz, diferențiabilitatea Fréchet și coercivitatea - oferă o bază pentru determinarea condițiilor adecvate sub care algoritmul 4.3.1 este convergent către un minim parțial.

Rezultatele prezentate în această parte a tezei au fost incluse în lucrarea Günther, Orzan şi Precup [36].

4.1 Problema generală de optimizare

În prima secțiune a acestui capitol, vom descrie problema generală de optimizare pe care o abordăm. Având acest scop în minte, vom considera pe tot parcursul capitolului că $(X, |\cdot|_X)$ și $(Y, |\cdot|_Y)$ sunt două spații normate reale, $D_1 \subseteq X$, $D_2 \subseteq Y$ sunt mulţimi nevide şi $A, B : D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii astfel încât A este mărginită inferior şi există $c, C \in \mathbb{R}$ pentru care

$$0 < c \leq B(x, y) \leq C \quad \text{pentru orice} \quad (x, y) \in D_1 \times D_2.$$

Problema de optimizare ce ne interesează este descrisă de

$$\frac{A(x,y)}{B(x,y)} \longrightarrow \min_{(x,y)\in D_1\times D_2}. \tag{P}$$

Pentru această problemă (P), de regulă se caută puncte $(x^*, y^*) \in D_1 \times D_2$ astfel încât

$$\frac{A(x^*,y^*)}{B(x^*,y^*)} = \min_{(x,y)\in D_1\times D_2} \frac{A(x,y)}{B(x,y)},$$

cu alte cuvinte (x^*, y^*) este minim global. Spre deosebire de această problemă, în cele ce urmează ne vom îndrepta atenţia spre determinarea punctelor (x^*, y^*) din $D_1 \times D_2$ cu proprietatea că

$$\frac{A(x^*,y^*)}{B(x^*,y^*)} = \min_{x\in D_1} \frac{A(x,y^*)}{B(x,y^*)}, \tag{1.29}$$

$$\frac{A(x^*,y^*)}{B(x^*,y^*)} = \min_{y\in D_2} \frac{A(x^*,y\ )}{B(x^*,y\ )}. \tag{1.30}$$

Punctele satisfăcând egalităţile (1.29) şi (1.30) se numesc puncte de minim parţial sau minime parţiale pentru problema (P).

Pentru a obține puncte de minim parțial, vom folosi o versiune modificată a algoritmului lui Dinkelbach, care se bazează pe rezolvarea, la fiecare pas iterativ, a două probleme parametrice de tipul

$$A(x,y) - \lambda B(x,y) \to \min_{x \in D_1}, \qquad (P_y(\lambda))$$

$$A(x,y) - \lambda B(x,y) \to \min_{y \in D_2}, \qquad (P_x(\lambda))$$

unde $\lambda \in \mathbb{R}$ este un parametru. Procedeul nostru va genera trei şiruri $(\lambda_k), (x_k)$ şi (y_k), unde x_k este o soluţie a problemei $(P_{y_{k-1}}(\lambda_{k-1}))$, y_k este o soluţie a problemei $(P_{x_k}(\lambda_{k-1}))$ iar

$$\lambda_k = \frac{A(x_k, y_k)}{B(x_k, y_k)}.$$

Folosind ipoteze adecvate în problema de optimizare fracționară, vom asigura convergența algoritmului şi vom obţine că punctul (x^*, y^*), unde x^* şi y^* sunt limitele şirurilor (x_k) şi (y_k), este minim parţial pentru funcţionala $\frac{A}{B}$.

4.2 Relaţii între minime globale şi parţiale

Propoziţie 4.2.1. *Fie X şi Y două spaţii reale normate ş funcţia $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Atunci:*

1° *Orice punct de minim global pentru f este minim parţial, însă reciproca nu este în general adevărată.*

2° *Dacă f este o funcţie diferenţiabilă Fréchet de clasă C^1, atunci orice punct de minim parţial este punct critic.*

3° *Dacă f este convexă, atunci (x, y) este minim global ddacă vectorul nul aparţine subgradientului lui f în punctul (x, y), i.e., $0 \in \partial f\,(x, y)$. În particular, dacă f este convexă ąi diferenţiabilă Fréchet de clasă C^1, atunci orice minim parţial este minim global.*

Propoziţie 4.2.2. *Dacă $A, B : D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}$ au variabile separate, adică*

$$A\,(x, y) = A_1\,(x) + A_2\,(y)\,, \quad B\,(x, y) = B_1\,(x) + B_2\,(y)$$

atunci orice minim parţial este şi minim global pentru $A\,(x, y)\,/B\,(x, y)$.

Propoziţie 4.2.3. *Fie $D_1 \subseteq \mathbb{R}^q$, $D_2 \subseteq \mathbb{R}^p$ mulţimi nevide, deschise şi convexe, $A, B : D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}$ funcţii diferenţiabile Fréchet, iar B pozitivă. Considerăm următoarele afirmaţii:*

1° (x^*, y^*) *este minim global pentru* $\frac{A}{B}$.

2° (x^*, y^*) *este minim parţial pentru* $\frac{A}{B}$.

3° (x^*, y^*) *este punct critic pentru* $\frac{A}{B}$*, i.e.,* $\nabla\frac{A}{B}(x^*, y^*) = 0$.

Atunci 1° $\Longrightarrow$ 2° $\Longrightarrow$ 3°. *Dacă în plus are loc cel puţin una dintre următoarele afirmaţii:*

(i) A este convexă şi B este afină;

(ii) A este pozitivă şi convexă, iar B este concavă,

atunci 1° $\Longleftrightarrow$ 2° $\Longleftrightarrow$ 3°.

4.3 Algoritmul lui Dinkelbach pe componente

În această secțiune vom prezenta algoritmul lui Dinkelbach pe componente, conceput pentru a puncte de minim parţial pentru problemele de optimizare fracționară.

Algoritm 4.3.1 (Algoritmul lui Dinkelbach pe componente)**.**

Pasul 0 **(iniţializare)** Alegem un punct de plecare $(x_0, y_0) \in D_1 \times D_2$, calculăm valoarea

$$\lambda_0 := \frac{A\,(x_0, y_0)}{B\,(x_0, y_0)}$$

şi fixăm $k = 1$.

Pasul k **(pas ciclic pentru** $k \geq 1$**)** Se determină un punct $x_k \in D_1$ astfel încât

$$\min_{x \in D_1} [A(\cdot, y_{k-1}) - \lambda_{k-1} B(\cdot, y_{k-1})] = A(x_k, y_{k-1}) - \lambda_{k-1} B(x_k, y_{k-1}), \tag{1.31}$$

apoi determinăm un punct $y_k \in D_2$ astfel încât

$$\min_{y \in D_2} [A(x_k, \cdot) - \lambda_{k-1} B(x_k, \cdot)] = A(x_k, y_k) - \lambda_{k-1} B(x_k, y_k), \tag{1.32}$$

se calculează

$$\lambda_k := \frac{A(x_k, y_k)}{B(x_k, y_k)} \tag{1.33}$$

şi se trece la pasul $k + 1$.

Propoziţie 4.3.2. *Problemele de minimizare date de* (1.31) *şi* (1.32) *au soluţii dacă cel puţin una dintre următoarele condiţii este satisfăcută:*

(a) D_1, D_2 sunt compacte, A este inferior semicontinuă (i.s.) în raport cu fiecare variabilă iar B este continuă în ambele variablie.

(b) $D_1 = X$ şi $D_2 = Y$ sunt spaţii normate finit dimensionale, A este i.s. în raport cu fiecare variabilă, coercivă în x (i.e., $\lim_{|x|_X \to \infty} A(x,y) = \infty$ pentru orice $y \in Y$), coercivă în y (i.e., $\lim_{|y|_Y \to \infty} A(x,y) = \infty$ pentru orice $x \in X$) şi B este continuă în ambele variablie.

(c) $D_1 = X$, $D_2 = Y$ unt spaţii Banach reflexive, A este atât i.s. cât şi convexă în ambele variablie, coercivă în x, coercivă în y şi nenegativă, iar B este superior semicontinuă şi concavă în ambele variablie.

4.4 Convergenţa algoritmului lui Dinkelbach pe componente

Ultima parte a acestui capitol oferă o serie de rezultate referitoare la convergența algoritmului nostru. Se arată că impunând ipoteze suplimentare asupra spațiile și funcțiile implicate, cum ar fi continuitatea de tip Lipschitz, diferențiabilitatea Fréchet și coercivitatea, algoritmul lui Dinkelbach pe componente este convergent către un punct de minim parțial.

Teoremă 4.4.1. *Şirul* (λ_k) *generat de algoritmul 4.3.1 este descrescător şi convergent la* λ^*.

Teoremă 4.4.2. *Fie* D_1, D_2 *mulţimi închise din spaţiile normate* X *şi* Y, A *şi* B *operatori continui, şi*

$$x_k \to x^*, \qquad y_k \to y^*. \tag{1.34}$$

Atunci umrătoarele afirmaţii sunt adevărate:

(a) Are loc egalitatea

$$\lambda^* = \frac{A(x^*, y^*)}{B(x^*, y^*)}.$$

(b) Notând

$$m_{k,1} := A(x_k, y_{k-1}) - \lambda_{k-1} B(x_k, y_{k-1}), \quad m_{k,2} := A(x_k, y_k) - \lambda_{k-1} B(x_k, y_k),$$

avem că

$$\lim_{k\to\infty} m_{k,1} = \lim_{k\to\infty} m_{k,2} = 0.$$

(c) *punctul* (x^*, y^*) *este minim parţial pe* $D_1 \times D_2$ *al funcţiei* $A(x,y)/B(x,y)$.

În vederea stbilirii convergenţei din (1.34), vom asigura întâi mărginirea şirurilor $((x_k)$ şi $(y_k))$. În acest scop, vom presupune că $D_1 = X$, $D_2 = Y$ sunt întreg spațiile normate, iar următoarea condiţie are loc:

(H1) Funcţionala $A(x, y)$ este uniform coercivă în x în raport cu y, i.e., pentru orice $M > 0$, există $l_M > 0$ astfel încât $A(x, y) \geq M$ pentru $|x|_X \geq l_M$ şi pentru orice $y \in Y$.

Propoziţie 4.4.3. *În condiţiile ipotezei (H1), şirul* (x_k) *este mărginit.*

În următoarea parte a acestei secțiuni vom asigura convergența şirurilor $(x_k), (y_k)$, concluzionând astfel convergența algoritmului nostru 4.3.1. Pentru a realiza acest lucru, vom presupune că X și Y sunt spații Hilbert, $D_1 = X$, $D_2 = Y$, A şi B sunt funcționale de clasă C^1 ce satisfac anumite condiții de continuitate Lipschitz.

Notăm cu A'_x, A'_y, B'_x şi B'_y derivatele parţiale Fréchet ale lui A şi B, şi presupunem că

(H2) Derivatele B'_x şi B'_y sunt mărginite pe $X \times Y$.

De asemenea, definim operatorii

$$\begin{aligned} N_{11}(x,y) &:= c_1 x - A'_x(x,y), \qquad & N_{12}(x,y) &:= c_1 y - A'_y(x,y), \\ N_{21}(x,y) &:= c_2 x - B'_x(x,y), \qquad & N_{22}(x,y) &:= c_2 y - B'_y(x,y), \end{aligned}$$

unde

$$c_1 \geq \max\{1, \lambda_0\} + \lambda_0 c_2 \quad \text{şi} \quad c_2 > 0. \tag{1.35}$$

Presupunem de asemenea că

(H3) Există constantele pozitive $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2\}$, astfel încât

$$\begin{aligned} |N_{11}(x,y) - N_{11}(\bar{x},\bar{y})|_X &\leq a_{11}|x-\bar{x}|_X + a_{12}|y-\bar{y}|_Y, \\ |N_{12}(x,y) - N_{12}(\bar{x},\bar{y})|_Y &\leq a_{21}|x-\bar{x}|_X + a_{22}|y-\bar{y}|_Y, \\ |N_{21}(x,y) - N_{21}(\bar{x},\bar{y})|_X &\leq b_{11}|x-\bar{x}|_X + b_{12}|y-\bar{y}|_Y, \\ |N_{22}(x,y) - N_{22}(\bar{x},\bar{y})|_Y &\leq b_{21}|x-\bar{x}|_X + b_{22}|y-\bar{y}|_Y \end{aligned}$$

pentru orice $x, \bar{x} \in X$ şi $y, \bar{y} \in Y$.

Notăm

$$\begin{aligned} c_{11} &:= a_{11} + b_{11},\ c_{12} := a_{12} + b_{12},\ c_{21} := a_{21} + b_{21},\ c_{22} := a_{22} + b_{22}, \\ a &:= \frac{c_{12}c_{21}}{(1 - c_{11})(1 - c_{22})} \end{aligned}$$

şi presupunem că

(H4) $c_{11} < 1,\ c_{22} < 1$ şi $a < 1$.

Teoremă 4.4.4. *În ipotezele (H1)-(H4), şirurile* (x_k) *şi* (y_k) *sunt convergente.*

Bibliografie

[1] Aubin JP, Frankowska H. Set-valued analysis. Boston (MA): Birkhäuser; 1990.

[2] Avriel M, Diewert WE, Schaible S, et al. Generalized concavity. New York (NY): Plenum Publishing Corporation; 1988.

[3] Bagdasar O, Popovici N. Local maximizers of generalized convex vector-valued functions. J. Nonlinear Convex Anal. 2017;18:2229–2250.

[4] Bagdasar O, Popovici N. Unifying local–global type properties in vector optimization. J. Global Optim. 2018;72:155–179.

[5] Barbu V, Precupanu T. Convexity and optimization in Banach spaces. Alphen aan de Rijn (NL): Sijthoff and Noordhoff; 1978.

[6] Benoist J, Borwein JM, Popovici N. A characterization of quasiconvex vector-valued functions. Proc. Amer. Math. Soc. 2003;131:1109–1113.

[7] Berge C. Topological Spaces Including a Treatment of Multi-Valued Functions, Vector Spaces and Convexity. Edinburgh-London (EDI): Oliver & Boyd; 1963.

[8] Bhatia D, Mehra A. Fractional programming involving set-valued functions. Indian J. Pure Appl. Math. 1998;29:525–539.

[9] Borwein JM. Optimization with respect to partial orderings [dissertation]. Oxford: University of Oxford; 1974.

[10] Boţ RI, Csetnek ER. Proximal-gradient algorithms for fractional programming. Optimization. 2017;66(8):1383–1396.

[11] Boţ RI, Dao MN, Li G. Extrapolated proximal subgradient algorithms for nonconvex and nonsmooth fractional programs. Mathematics of Operations Research. 2021;47(3):2415–2443.

[12] Boyd S, Parikh N, Chu E, Peleato B, Eckstein J. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. Found. Trends Mach. Learn. 2011; 3(1):1–122.

[13] Breckner WW, Kassay G. A systematization of convexity concepts for sets and functions. J. Convex Anal. 1997;4:109–127.

[14] Cambini A, Martein L. Generalized convexity and optimization - Theory and applications, Berlin Heidelberg (DE): Springer; 2009.

[15] Crouzeix JP, Ferland JA. Algorithms for generalized fractional programming. Math. Program. 1991;52:191–207.

[16] Crouzeix JP, Ferland JA, Nguyen VH. Revisiting Dinkelbach-type algorithms for generalized fractional programs. OPSEARCH. 2008;45:97–110.

[17] Crouzeix JP, Martínez-Legaz JE, Volle M. Generalized Convexity, Generalized Monotonicity: Recent Results. New York (NY): Springer; 1998.

[18] Das K, Nahak C. Set-valued fractional programming problems under generalized cone convexity. Opsearch 2016;53:157–177.

[19] Deutsch F, Singer I. On single-valuedness of convex set-valued maps. Set-Valued Anal. 1993;1:97–103.

[20] Dinkelbach W. On nonlinear fractional programming. Manage. Sci. 1967;13:492–498.

[21] Elbenani B, Ferland JA. Cell formation problem solved exactly with the Dinkelbach algorithm. Report CIRRELT-2012-07, University of Montreal. 2012.

[22] Ekeland I. On the variational principle. J. Math. Anal. Appl. 1947;47:324–353.

[23] Flores-Bazán F. Semistrictly quasiconvex mappings and non-convex vector optimization. Math. Methods Oper. Res. 2004;59:129–145.

[24] Flores-Bazán F, Hernandez E. Optimality conditions for a unified vector optimization problem with not necessarily preordering relations. Glob. Optim. 2013; 56:299–315.

[25] Flores-Bazán F, Vera C. Characterization of the nonemptiness and compactness of solution sets in convex and nonconvex vector optimization. J. Optim. Theory Appl. 2006;130:185–207.

[26] Frenk JBG, Schaible S. Fractional programming. In: Hadjisavvas N, Komlósi S, Schaible S, editors. Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity. New York (NY): Springer; 2005. p. 335–386.

[27] Frigon M. On some generalizations of Ekeland's principle and inward contractions in gauge spaces. J. Fixed Point Theory Appl. 2011;10:279–298.

[28] Geissler B, Morsi A, Schewe L, et al. Penalty alternating direction methods for mixed-integer optimization: A new view on feasibility pumps. SIAM J. Optim. 2017;27(3):1611–1636.

[29] Gerstewitz C. Nichtkonvexe Dualität in der Vektoroptimierung. Wiss. Zeitschrift Tech. Hochsch. 1983;25:357–364.

[30] Gerth (Tammer) C, Weidner P. Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization. J. Optim. Theory Appl. 1990;67:297–320.

[31] Goldstein T, O'Donoghue B, Setzer S, Baraniuk R. Fast alternating direction optimization methods. SIAM J. Imaging Sci. 2014;7(3):1588–1623.

[32] Göpfert A, Riahi H, Tammer C, Zălinescu C. Variational methods in partially ordered spaces. New York (NY): Springer-Verlag; 2003.

[33] Gorokhovik VV. Representations of affine multifunctions by affine selections. Set-Valued Anal. 2008;16:185–198.

[34] Gorokhovik VV, Zabreiko PP. On Fréchet differentiability of multifunctions. Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research. 2005;54(4-6):391–409.

[35] Günther C, Orzan A, Popovici N. A new concept of semistrict quasiconvexity for vector functions, submitted 2023.

[36] Günther C, Orzan A, Precup R. Componentwise Dinkelbach algorithm for nonlinear fractional optimization problems. Optimization, DOI: 10.1080/02331934.2023.2256750.

[37] Günther C, Popovici N. Characterizations of explicitly quasiconvex vector functions w.r.t. polyhedral cones. J. Nonlinear Convex Anal. 2019;20:2653–2665.

[38] Günther C, Popovici N. The role of nonlinear scalarization functions in characterizing generalized convex vector functions. J. Appl. Numer. Optim. 2019;1:325–333.

[39] Günther C, Tammer C. Relationships between constrained and unconstrained multi-objective optimization and application in location theory. Math. Methods Oper. Res. 2016;84:359–387.

[40] Günther C, Tammer C. On generalized-convex constrained multi-objective optimization. Pure Appl. Funct. Anal. 2018;3:429–461.

[41] Hillier FS, Lieberman GJ. Introduction to Operations Research. San Francisco (US): Holden-Day; 1967.

[42] Hiriart-Urruty JB. Generalized differentiability / duality and optimization for problems dealing with differences of convex functions. In: Ponstein J, editors. Convexity and duality in optimization. Lecture notes in economics and mathematical systems, vol 256. Berlin, Heidelberg (DE): Springer; 1985. p. 37–70.

[43] Jahn J. Vector optimization - Theory, applications, and extensions, 2nd ed. Berlin Heidelberg (DE): Springer; 2011.

[44] Kassay G, Rădulescu VD. Equilibrium problems and applications. London (UK): Elsevier/Academic Press; 2019.

[45] Khan AA, Tammer C, Zălinescu C. Set-valued optimization: An introduction with applications. Heidelberg (DE): Springer; 2015.

[46] Khisty CJ, Lall BK. Transportation Engineering: An Introduction. Upper Saddle River (US): Prentice-Hall; 1998.

[47] Kleinert T, Schmidt M. Computing feasible points of bilevel problems with a penalty alternating direction method. INFORMS J. Comput. 2021;33(1):198–215.

[48] Kuroiwa D, Popovici N, Rocca M. A characterization of cone-convexity for set-valued functions by cone-quasiconvexity. Set-Valued Var. Anal. 2015;23:295–304.

[49] La Torre D, Popovici N. Arcwise cone-quasiconvex multicriteria optimization. Oper. Res. Lett. 2010;38:143–146.

[50] La Torre D, Popovici N, Rocca M. Scalar characterizations of weakly cone-convex and weakly cone-quasiconvex functions. Nonlinear Anal. 2010;72:1909–1915.

[51] Le Thi HA, Pham DT. The DC (difference of convex functions) programming and DCA revisited with DC models of real world nonconvex optimization problems. Annals of Operations Research. 2005;133:23–46.

[52] Le Thi HA, Pham DT. Open issues and recent advances in DC programming and DCA. Journal of Global Optimization. 2023. https://doi.org/10.1007/s10898-023-01272-1.

[53] Luc DT. Theory of vector optimization. Berlin (DE): Springer; 1989.

[54] Luc DT, Schaible S. Efficiency and generalized concavity. J. Optim. Theory Appl. 1997;94:147–153.

[55] Luenberger DG. Optimization by vector space methods. New York (NY): John Wiley and Sons; 1969.

[56] Nikodem K. K-convex and K-concave set-valued functions. L*ódz* (PL): Zeszyty Nauk. Politech. Lódz. Mat. 559, Rozprawy Nauk. 114; 1989.

[57] Nikodem K, Popa D. On single-valuedness of set-valued maps satisfying linear inclusions. Banach J. Math. Anal. 2009;3:44–51.

[58] de Oliveira W. The ABC of DC programming. Set-Valued and Variational Analysis. 2020;28:679–706.

[59] Orzan A. A new class of fractional type set-valued functions. Carpathian J. Math. 2019;35:79–84.

[60] Orzan A, Popovici N. Convexity-preserving properties of set-valued ratios of affine functions. Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 2023;66:591–602.

[61] Orzan A, Popovici N. Characterization of certain fractional-type set-valued functions. Optimization. DOI: 10.1080/02331934.2023.2174377.

[62] Orzan A, Precup R. Dinkelbach type approximation algorithms for nonlinear fractional optimization problems, Numerical Functional Analysis and Optimization. 2023;44(9):954–969.

[63] Popovici N. Explicitly quasiconvex set-valued optimization. J. Global Optim. 2007;38:103–118.

[64] Popovici N. Pareto reducible multicriteria optimization problems. Optimization 2005;54:253–263.

[65] Popovici N. Structure of efficient sets in lexicographic quasiconvex multicriteria optimization. Oper. Res. Lett. 2006;34:142–148.

[66] Precup R. Methods in nonlinear integral equations. Dordrecht (DR): Springer; 2002.

[67] Precup R. Nash-type equilibria and periodic solutions to nonvariational systems. Adv. Nonlinear Anal. 2014;3:197–207.

[68] Rockafellar RT. Convex analysis. Princeton (NJ): Princeton University Press; 1970.

[69] Ródenas RG, López ML, Verastegui D. Extensions of Dinkelbach's algorithm for solving non-linear fractional programming problems. Top 1999;7:33–70.

[70] Rothblum UG. Ratios of affine functions. Math. Program. 1985;32:357–365.

[71] Schaible S. A survey of fractional programming. In: Schaible S, Ziemba WT, editors. Generalized concavity in optimization and economics. New York (NY): Academic Press; 1981. p. 417-440.

[72] Schaible S. Bibliography in fractional programming. Math. Methods Oper. Res. 1982;26:211–241.

[73] Schaible, S., Bicriteria quasiconcave programs, Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Oprationnelle. 1983;25:93–101.

[74] Seto K, Kuroiwa D, Popovici N. A systematization of convexity and quasiconvexity concepts for set-valued maps, defined by l-type and u-type preorder relations. Optimization. 2018;67:1077–1094.

[75] Shen K, Yu W. Fractional programming for communication systems–Part I: Power control and beamforming. IEEE Transactions on Signal Processing 2018;66(10):2616–2630.

[76] Shen K, Yu W. Fractional programming for communication systems–Part II: Uplink scheduling via matching. IEEE Transactions on Signal Processing 2018;66(10):2631–2644.

[77] Shi J. A combined algorithm for fractional programming. Ann. Oper. Res. 2001;103:135–147.

[78] Singer I. Duality for nonconvex approximation and optimization. New York (NY): Springer; 2006.

[79] Stancu-Minasian IM. Fractional programming. Theory, methods and applications. Dordrecht (NL): Kluwer; 1997.

[80] Stancu-Minasian IM, Tigan S. Continuous time linear-fractional programming. The minimum-risk approach. RAIRO Oper. Res. 2000;34:397–409.

[81] Tammer K, Tammer C, Ohlendorf E. Multicriterial fractional optimization, Berlin (BE): Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II, Institut für Mathematik; 2005.

[82] Tammer C, Weidner P. Scalarization and separation by translation invariant functions. Cham (CH): Springer; 2020.

[83] Tammer C, Zălinescu C. Lipschitz properties of the scalarization function and applications. Optimization. 2010;59:305–319.

[84] Tan DH. A note on multivalued affine mappings. Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. 1988;33:55–59.

[85] Toland JF. A duality principle for non-convex optimisation and the calculus of variations. Arch. Rational Mech. Anal. 1979;71:41–61.

[86] Zălinescu C. Convex analysis in general vector spaces. Singapore (SG): World Scientific Publising; 2002.