UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Matrice de tip regular von Neumann

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific
Prof. Dr. Septimiu Crivei

Doctorandă
Iulia-Elena Chiru

Cluj-Napoca
2024

Cuprins

Cuvinte cheie

- matrice regulară von Neumann
- inversă interioară
- matrice regulară tare
- inversă interioară tare
- matrice regulară exterioară
- inversă exterioară
- inel local
- rang determinantal
- rang McCoy
- matricea compusă

Introducere

Conceptul de inel regular (von Neumann) a fost introdus de von Neumann în lucrarea sa faimoasă [70] ca un instrument algebric pentru a studia anumite latici, care au fost utilizate în coordonatizarea geometriei proiective. De atunci, s-au descoperit multe aplicații ale acestor inele, în diferite ramuri ale matematicii, cum ar fi algebră, analiză funcțională, ecuații diferențiale, statistică, probabilități sau criptografie. O prezentare exhaustivă a inelelor regulare von Neumann a fost facută prima dată în monografia lui Goodearl [38].

Reamintim faptul că un inel R se numește *regular von Neumann* dacă fiecare element $a \in R$ este *regular von Neumann*, adică există un element $b \in R$, numit *inversă interioară* sau *inversă generalizată* a lui a, astfel încât $a = aba$. Definiția poate fi extinsă cu ușurință la matrice peste un inel R astfel: o matrice A de dimensiune $m \times n$ se numește *regulară von Neumann* dacă există o matrice B de dimensiune $n \times m$ astfel încât $A = ABA$, caz în care B se numește *inversă interioară* sau *inversă generalizată* a matricei A. Inversa interioară are aplicații directe în rezolvarea sistemelor liniare de forma $Ax = b$, când A este o matrice singulară sau nepătratică. Dacă sistemul are soluția y și A este regulară von Neumann, cu inversa interioară B, atunci $x = Bb$ este o soluție, deoarece $Ax = ABb = ABAy = Ay = b$ (a se vedea [12]).

Conform unei teoreme clasice a lui von Neumann, orice matrice peste un inel regular von Neumann este regulară von Neumann și, în particular, orice matrice peste un corp este regulară von Neumann. Problema caracterizării matricelor regulare von Neumann și a inverselor generalizate peste inele comutative a fost formulată de Bhaskara Rao [13], iar în această direcție menționăm lucrările: Bapat, Bhaskara Rao și Prasad [10], Prasad [65], Lam și Swan [49], și monografiile lui Ben-Israel și Greville [12] și Bhaskara Rao [14], care conțin câteva caracterizări importante. Această problemă are aplicații utile în teoria controlului, teoria sistemelor de matrice polinomiale, precum și în algebre de operatori (a se vedea [14]).

Regularitatea von Neumann are o generalizare în teoria categoriilor dată de Dăscălescu, Năstăsescu, Tudorache și Dăuș [33] după cum urmează: pentru două obiecte M și N dintr-o categorie oarecare, N se numește M-regular dacă fiecare morfism $f : M \to N$ este regular, adică există un morfism $g : N \to M$ astfel încât $f = fgf$. Morfismele regulare din categoria modulelor au fost studiate de Kasch și Mader [43]. Recent, obiectele și morfismele regulare din categorii abeliene au fost studiate de Crivei and Kör [32] și Crivei, Koşan și Yildirim [31].

Toate acestea ne-au stârnit interesul în cercetarea regularității von Neumann pentru matrice și a noțiunilor aferente numite regularitate tare și regularitate exterioară, noțiuni ce vor fi abordate pe parcursul lucrării. Teza este structurată în patru capitole și un apendix, care vor fi descrise în continuare.

În primul capitol ne-am concentrat pe găsirea unui criteriu practic de a verifica regularitatea von Neumann a matricelor peste anumite inele comutative, precum și numărarea lor în cazuri finite. Abordarea noastră are legătură cu lucrarea lui Lam și Swan [49], care dă o caracterizare a matricelor pătratice regulare von Neumann peste inele comutative din perspectiva idealelor determinantale asociate. În Teorema 1.2.1 demonstrăm că dacă A este o matrice nenulă de dimensiune $m \times n$ cu rangul determinantal t peste un inel comutativ astfel încât A să aibă o submatrice inversabilă A' de dimensiune $t \times t$, atunci A este regulară von Neumann, iar o inversă interioară a sa poate fi construită folosind inversa matricei A'. Reciproc, în Teorema 1.3.2, cu anumite condiții impuse asupra inelului R, dacă A este o matrice regulară von Neumann nenulă de dimensiune $m \times n$ cu rangul determinantal t peste un inel comutativ R, atunci A are o submatrice inversabilă de dimensiune $t \times t$. În Teorema 1.3.3, demonstrăm că, în anumite situații, o matrice de dimensiune $m \times n$ peste un inel comutativ local este regulară von Neumann dacă și numai dacă rangul său determinantal și rangul său McCoy coincid. Bazându-ne pe rezultatele anterioare, am formulat Teorema 1.4.2, în care dăm o caracterizare intrinsecă a unei matrice A, de dimensiune $m \times n$ nenulă cu rangul determinantal $\rho(A) = t$ peste un inel comutativ local, de a fi regulară von Neumann, și anume A trebuie să aibă o submatrice inversabilă de dimensiune $t \times t$. Existența unei astfel de submatrice este echivalentă cu existența unui element inversabil în matricea compusă de ordin t, $C_t(A)$, a matricei A, care conține toți minorii de dimensiune $t \times t$ ai matricei A.

De asemenea, deducem consecințe în inele comutative oarecare și produse de inele comutative locale. În Teorema 1.5.1 determinăm numărul matricelor regulare von Neumann de dimensiune $m \times n$ peste un inel finit local R cu idealul maximal M, cu $|R/M| = |F_q| = q$, ca fiind $\sum_{t=0}^{\min(m,n)} |M|^{t(m+n-t)} r(m, n, q, t)$, unde $r(m, n, q, t)$ este numărul matricelor de dimensiune $m \times n$ peste un corp F_q, având rangul determinantal egal cu t. Ca aplicații, numărăm matricele regulare von Neumann de dimensiune $m \times n$ peste inele de clase de resturi $\mathbb{Z}_l$ și peste algebre grupale $F_q[\mathbb{Z}_l]$ (Corolarul 1.5.3), unde F_q este un corp cu q elemente, a cărui caracteristică divide l. În final, abordăm matricele regulare von Neumann peste inelele de matrice formale triunghiulare și dăm caracterizarea din Teorema 1.6.1.

O subclasă importantă a inelelor regulare von Neumann [70] constă din inelele regulare tari, introduse de Arens și Kaplansky [6], care sunt studiate în teoria inelelor. Aceasta este tema celui de-al doilea capitol din teză. Un inel R cu unitate se numește *regular tare* dacă pentru orice element $a \in R$ există un element $b \in R$ astfel încât $a = a^2b$, iar definiția este simetrică dreapta-stânga. Restricționând această noțiune la elemente, spunem că $a \in R$ se numește *regular tare* dacă există $b \in R$ astfel încât $a = a^2b = ba^2$, caz în care b se numește *inversă interioară tare* (sau *inversă generalizată tare*) a lui a. Pentru proprietăți generale ale inelelor regulare tari facem trimitere la [38]. Aceste definiții pot fi date și pentru matrice peste anumite inele R: o matrice A de dimensiune $n \times n$ se numește *regulară tare* dacă există o matrice B de dimensiune $n \times n$ astfel încât $A = A^2B = BA^2$. De menționat că matricele peste corpuri nu trebuie să fie regulare tari, cum este cazul celor regulare von Neumann, deci problema caracterizării matricelor regulare tari are sens și pentru corpuri.

Subliniem că definițiile pentru matricele regulare von Neumann și matricele regulare tari nu sunt intrinseci, ci depind de existența altor matrice cu anumite proprietăți. Printre aplicațiile practice menționăm verificarea regularității von Neumann și a regularității tari a matricelor de dimensiuni mari, lucru care necesită mult timp din punct de vedere computațional. De aceea, ne interesează să avem caracterizări intrinseci ale acestor proprietăți. Astfel, o întrebare firească este dacă o matrice regulară tare cu rangul determinantal t peste un inel comutativ local poate fi caracterizată și din perspectiva matricei sale compuse de ordin t. Un răspuns afirmativ îl dăm în al doilea capitol din teză. Mai întâi stabilim un rezultat mai general pentru un inel comutativ oarecare R, folosind Teorema Cayley-Hamilton redusă (Teorema 2.1.1). Pentru o matrice $A \in M_n(R)$ nenulă, cu rangul determinantal t, demonstrăm că dacă A este regulară tare, atunci urma $\mathrm{Tr}(C_t(A))$ a matricei sale compuse de ordin t nu aparține radicalului lui R, în timp ce, dacă $\mathrm{Tr}(C_t(A))$ este inversabilă în R, atunci A este regulară tare (Teorema 2.1.3). În particular, aceste lucruri implică faptul că o matrice A nenulă cu rangul determinantal t peste un inel comutativ local R este regulară tare dacă și numai dacă suma minorilor diagonali de dimensiune $t \times t$ este inversabilă în R, sau echivalent, urma matricei compuse de ordin t este inversabilă în R. Mai mult decât atât, în acest caz putem construi o inversă interioară tare a matricei A, ca fiind matricea $B = -c_t^{-1}(A^{t-1}+c_1A^{t-2}+\cdots+c_{t-1}I_n)$, unde $c_k = (-1)^k\mathrm{Tr}(C_k(A))$ pentru orice $k \in \{1,\ldots,n\}$ (Teorema 2.1.5).

Acest rezultat are consecințe la produse de inele comutative locale și algebre grupale (a se vedea Corolarul 2.2.3). Astfel, în Teorema 2.3.1 vom număra matricele regulare tari peste inele finite locale. Mai precis, numărul matricelor regulare tari de dimensiune $n \times n$ cu rangul determinantal t peste R este dat de $\frac{|GL_n(R)|}{|GL_{n-t}(R)|}$. De asemenea, stabilim rezultate de numărare și pentru inele de clase de resturi $\mathbb{Z}_l$ și algebre grupale $F_q[G]$ (Teorema 2.4.1), unde F_q este un corp cu q elemente și G este un grup cu l elemente. Apoi, ne ocupăm de inverse interioare tari și inverse reflexive tari în inele oarecare, și demonstrăm în Teorema 2.5.2 că dacă a și b sunt elemente regulare tari dintr-un inel semiprim R, având mulțimi disjuncte de inverse interioare $S(a)$ și $S(b)$, atunci $S(a) \subseteq S(b)$ dacă și numai dacă $b^2 = ab = ba$. În final, caracterizăm matricele regulare tari peste inele de matrice formale triunghiulare (Teorema 2.6.1).

O continuare firească a cercetării noastre, în capitolul trei, este studiul inverselor exterioare. Un element b din inelul R se numește *inversă exterioară* a lui $a \in R$, dacă $bab = b$, definiție ce poate fi transpusă și la matrice: o matrice B de dimensiune $n \times m$ se numește *inversă exterioară* a matricei A de dimensiune $m \times n$ dacă $BAB = B$. Dacă A este o matrice regulară von Neumann de dimensiune $m \times n$ cu inversa interioară B de dimensiune $n \times m$, atunci este ușor de observat că BAB este o inversă exterioară a lui A. Evident, dacă A este o matrice regulară von Neumann nenulă, atunci ea are o inversă exterioară nenulă. În primele două capitole din teză am stabilit câteva caracterizări intrinseci ale matricelor regulare von Neumann (tari) peste inele comutative, cât și rezultate de numărare. În continuare considerăm clasa mai generală a matricelor care au inverse exterioare nenule peste inele oarecare, și căutăm descrieri intrinseci ale acestor matrice.

Mai întâi analizăm matricele care au o inversă exterioară nenulă în cazul general al unui inel oarecare. Astfel, demonstrăm că existența unui element al matricei cu o inversă exterioară nenulă ne asigură că matricea A are o inversă exterioară nenulă. Acest lucru implică faptul că A trebuie să aibă un element în afara radicalului Jacobson al inelului (Teorema 3.1.1). Arătăm că aceste condiții sunt echivalente și ne dau un criteriu constructiv pentru matricele ce au o inversă exterioară nenulă în cazul unui tip mai general de inele, și anume inelele semiperfecte. Ca exemple de inele semiperfecte reamintim inelele locale, inelele artiniene pe o parte, inelele semiprime și inelele perfecte pe o parte. Construcția noastră ia în considerare inelele locale, produsul de inele locale (Teorema 3.2.2), și în final inelele semiperfecte (Teorema 3.3.1). Pe parcursul acestor demonstrații, dăm un rezultat interesant de sine stătător, și anume, că elementele cu o inversă exterioară nenulă se ridică modulo ideale pe o parte a inelelor exchange (Teorema 3.1.4 și Corolarul 3.1.5).

De asemenea, numărăm matricele care au o inversă exterioară nenulă peste inele semiperfecte finite și inele comutative finite (Propoziția 3.4.1), și dăm câteva aplicații pentru inele de clase de resturi, produse de inele Galois, inele de cuaternioni peste inele de clase de resturi și algebre grupale finite. Aceste rezultate pot avea aplicații și în criptografie, în descrierea și numărarea elementelor unor spații de chei pentru criptosisteme, la fel ca matricele regulare von Neumann care pot avea aplicații, spre exemplu, în protocolul de schimbare de chei și criptarea cu cheie publică cu schema de căutare a cuvintelor cheie din [56]. În final, caracterizăm matricele care au o inversă exterioară nenulă peste inele de matrice formale triunghiulare (Teorema 3.5.1).

Odată ce am studiat conceptele de matrice regulare von Neumann, matrice regulare tari și matrice care au o inversă exterioară nenulă, în ultimul capitol, mai exact capitolul patru din teză, vom da aplicații pentru câteva generalizări ale acestora. O astfel de generalizare se numește matrice *von Neumann locală*, adică o matrice $A \in M_n(R)$ astfel încât A sau $I_n - A$ să fie regulară von Neumann. Aceasta a fost inspirată din conceptul asemănător folosit în teoria inelelor, introdus de Contessa [29]. Astfel, în Teorema 4.1.3, deducem că A este von Neumann locală, cu $\rho(A) = t$ și $\rho(I_n - A) = s$, dacă și numai dacă $C_t(A)$ sau $C_s(I_n - A)$ este regulară von Neumann. De asemenea, extindem astfel de rezultate la produse directe de inele oarecare (sau inele comutative locale) (a se vedea Teorema 4.1.6).

O specializare a noțiunii de matrice von Neumann locală este aceea de matrice *von Neumann locală tare*, adică o matrice A de dimensiune $n \times n$ astfel încât A sau $I_n - A$ să fie regulară tare. Arătăm în Corolarul 4.2.2 că există din abundență astfel de matrice, deoarece pentru orice $A \in M_n(R)$ peste un inel comutativ R, cu $\rho(A) = t$, $C_t(A)$ este von Neumann locală tare. O caracterizare a acestor matrice peste inele comutative R este dată în Teorema 4.2.3 prin condiţiile ca $C_t(A)$ sau $C_s(I_n - A)$ să fie regulară tare, unde $t = \rho(A)$ și $s = \rho(I_n - A)$. Generalizând mai mult conceptul de matrice von Neumann locală, considerăm noțiunea de matrice *von Neumann locală exterioară*, adică o matrice $A \in M_n(R)$ astfel încât A sau $I_n - A$ să aibă o inversă exterioară nenulă. În Teorema 4.3.1 demonstrăm că orice $A \in M_n(R)$ peste un inel semiperfect oarecare R este von Neumann locală exterioară. Când R este un inel local oarecare, atunci $A \in M_n(R)$ este von Neumann locală exterioară dacă și numai dacă A sau $I_n - A$ are una dintre următoarele proprietăți: are un element inversabil, sau are un element cu o inversă exterioară nenulă, sau nu are elemente în radicalul Jacboson al lui R (Teorema 4.3.3).

În cele din urmă, după ce avem toate aceste caracterizări intrinseci pentru matrice regulare von Neumann, matrice regulare tari și matrice care au o inversă exterioară nenulă, este util să dezvoltăm câțiva algoritmi care să verifice aceste proprietăți pentru diferite matrice. Astfel, în apendixul tezei, prezentăm câțiva algoritmi eficienți pentru matrice peste inele de clase de resturi, împreună cu implementările lor în Python, dar și câteva exemple relevante de ordin mai mare, calculate cu ajutorul acestor algoritmi.

Exeptând rezultatele citate, toate celelalte rezultate din teză sunt originale și sunt incluse în articolele noastre [15, 23, 24, 25, 26, 27]. Dintre acestea, cinci au fost publicate în revistele *Linear and Multilinear Algebra, Linear Algebra and Its Applications, Electronic Journal of Linear Algebra* și *Mathematica.* De asemenea, rezultatele principale din teză au fost prezentate în cadrul a trei conferințe.

Nu pot exprima în cuvinte cât de mult îi mulțumesc profesorului meu îndrumător pentru răbdarea, ajutorul moral și intelectual, dar și sugestiile din tot acest timp. De asemenea, nu puteam să ajung până aici fără ajutorul comisiei de îndrumare, care m-a ajutat cu expertiza științifică.

Capitolul 1

Matrice regulare von Neumann

În acest capitol vom da o condiție suficientă de tip constructiv pentru ca o matrice peste un inel comutativ să fie regulară von Neumann, dar vom arăta că este și necesară peste anumite inele locale. Mai exact, considerând anumite ipoteze asupra inelului R, vom demonstra că o matrice A peste un inel comutativ local R este regulară von Neumann dacă și numai dacă A are o submatrice inversabilă de dimensiune $\rho(A) \times \rho(A)$, unde $\rho(A)$ reprezintă rangul determinantal al lui A. Vom deduce consecințe asupra inelelor comutative (produselor de inele locale comutative), și vom determina numărul matricelor regulare von Neumann peste inele finite de clase de resturi și algebre grupale. Vom aborda și matricele regulare von Neumann peste inele de matrice formale triunghiulare. Cu excepția rezultatelor citate, toate celelalte rezultate sunt originale și majoritatea sunt incluse în articolele noastre [15, 24].

1.1 Preliminarii

Vom reaminti terminologia despre matrice (regulare von Neumann) peste inele comutative din câteva surse clasice, cum ar fi [12, 14, 18, 38].

Pe parcursul acestui capitol $m, n \geq 2$ vor fi două numere întregi, iar R va fi un inel comutativ cu unitate. Notăm cu $M_{m,n}(R)$ mulțimea tuturor matricelor de dimensiune $m \times n$ peste R, iar cu $M_n(R)$ mulțimea tuturor matricelor de dimensiune $n \times n$ peste R. Fie $A \in M_{m,n}(R)$. Fiind date submulțimile $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ unde $i_1 < \cdots < i_k$ și $J = \{j_1, \ldots, j_l\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ unde $j_1 < \cdots < j_l$, notăm cu $A_{I,J}$ submatricea lui A ale cărei linii și coloane sunt indexate după mulțimile I și J. Pentru oricare $k \in \{1, \ldots, \min(m, n)\}$, *matricea compusă de ordin* k a lui A este definită ca matricea $C_k(A) \in M_{m',n'}(R)$, unde $m' = \binom{m}{k}$ și $n' = \binom{n}{k}$, matrice care conține toți minorii lui A de dimensiune $k \times k$, în care pentru orice $I' = \{i'_1, \ldots, i'_k\}$ cu $i'_1 < \cdots < i'_k$ și $J' = \{j'_1, \ldots, j'_k\}$ cu $j'_1 < \cdots < j'_k$, elementul (I', J') al matricei $C_k(A)$ este $\det(A_{I',J'})$.

Pentru orice $k \in \{1, \ldots, r = \min(m, n)\}$, notăm cu $\mathcal{D}_k(A)$ idealul lui R generat de minorii lui A de dimensiune $k \times k$ (adică toate elementele din matricea compusă $C_k(A)$), numit *idealul determinantal de ordin* k al lui A. În R avem următorul șir crescător de ideale: $\mathcal{D}_r(A) \subseteq \mathcal{D}_{r-1}(A) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{D}_2(A) \subseteq \mathcal{D}_1(A) \subseteq \mathcal{D}_0(A) = R$.

Rangul McCoy al lui A, notat $\mathrm{rk}(A)$, este definit ca fiind cel mai mare $k \in \{0, \ldots, r\}$, pentru care idealul determinantal $\mathcal{D}_k(A)$ este fidel, adică $\mathrm{rk}(A) = \max\{k \in \{0, \ldots, r\} \mid \mathrm{Ann}_R(\mathcal{D}_k(A)) = (0)\}$. Cu alte cuvinte, rangul McCoy al matricei $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ este zero dacă există un

$c \in R$ nenul astfel încât $ca_{ij} = 0$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$, sau cel mai mare număr întreg pozitiv k cu proprietatea că dacă există $c \in R$ astfel încât $c \det(A') = 0$ pentru orice submatrice A' de dimensiune $k \times k$ a lui A, atunci $c = 0$.

Rangul determinantal al unei matrice nenule $A \in M_{m,n}(R)$, notat cu $\rho(A)$, este ordinul maxim al unei submatrice a lui A cu determinantul nenul. Rangul determinantal al matricei zero este zero. Pentru orice matrice $A \in M_{m,n}(R)$ avem $\mathrm{rk}(A) \leq \rho(A)$, dar în general rangul determinantal și rangul McCoy al unei matrice nu sunt egale.

Un inel R se numește *local* dacă are un unic ideal maximal la dreapta. Notăm cu $\mathrm{rad}(R)$ radicalul Jacobson al lui R, adică intersecția tuturor idealelor maximale la dreapta, și notăm cu $U(R)$ mulțimea elementelor inversabile din R.

1.2 Condiții suficiente

Începem prin a da o condiție suficientă ca o matrice de dimensiune $m \times n$ peste un inel comutativ să fie regulară von Neumann, care este o condiție de interes practic.

Teorema 1.2.1. *Fie $A \in M_{m,n}(R)$ o matrice nenulă cu $\rho(A) = t$. Dacă A are o submatrice $A_{I,J} \in U(M_t(R))$ pentru $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ și $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, atunci A este regulară von Neumann. Mai mult, o inversă interioară a lui A este matricea $B \in M_{n,m}(R)$, unde $B_{J,I} = A_{I,J}^{-1}$ și toate celelalte elemente ale lui B sunt zero.*

Exemplificăm Teorema 1.2.1 după cum urmează.

Exemplul 1.2.2. Matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{Z})$ are $\rho(A) = \mathrm{rk}(A) = 2$. Fie $I = \{2, 3\}$ și $J = \{1, 3\}$. Atunci $\det(A_{I,J}) = -1$ este inversabil în $\mathbb{Z}$. Așadar A este regulară von Neumann conform Teoremei 1.2.1, și o inversă interioară B a lui A poate fi construită luând $B_{J,I} = A_{I,J}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, iar $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{Z})$.

Se poate folosi și următoarea extindere a teoremei [14, Theorem 5.3] pentru a da o demonstrație alternativă imediată a Teoremei 1.2.1.

Teorema 1.2.3. *Fie $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ astfel încât $\rho(A) = t$. Notăm cu $\Delta = \{(I, J) \mid I \subseteq \{1, \ldots, m\}, J \subseteq \{1, \ldots, n\}, |I| = |J| = t\}$. Fie afirmațiile următoare:*

(o) *Există $(I, J) \in \Delta$ astfel încât $\det(A_{I,J}) \in U(R)$.*

(i) *Există o familie $(c_{J,I})_{(I,J)\in\Delta}$ de elemente ale lui R astfel încât $\sum_{(I,J)\in\Delta} \det(A_{I,J}) c_{J,I} = 1$.*

(ii) *Există o familie $(c_{J,J})_{(I,J)\in\Delta}$ de elemente ale lui R astfel încât $\left(\sum_{(I,J)\in\Delta} \det(A_{I,J}) c_{J,I}\right) a_{kl} = a_{kl}$ pentru orice $k \in \{1, \ldots, m\}$ și $l \in \{1, \ldots, n\}$.*

(iii) *A este regulară von Neumann.*

(iv) *$C_t(A)$ este regulară von Neumann.*

(v) *Există o familie $(c_{J,I})_{(I,J)\in\Delta}$ de elemente din R astfel încât $\det(A_{K,L})\left(\sum_{(I,J)\in\Delta}\det(A_{I,J})c_{J,I}\right)=\det(A_{K,L})$ pentru orice $(K,L)\in\Delta$.*

(vi) *Există o familie $(c_{J,I})_{(I,J)\in\Delta}$ de elemente din R astfel încât $\sum_{(I,J)\in\Delta}\det(A_{I,J})c_{J,I}$ este un idempotent diferit de zero.*

Atunci (o) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (vi). Dacă R este un inel local, atunci toate afirmațiile sunt echivalente.

În cazul anumitor inele putem deduce o altă condiție suficientă pentru ca o matrice să fie regulară von Neumann. Reamintim că un inel R are *dimensiune uniformă finită* dacă există o sumă directă finită de ideale uniforme ale lui R care este esențială în R. De asemenea, reamintim că un inel R se numește *morfic* dacă $R/Ra \cong \mathrm{Ann}_R(a)$ pentru orice $a \in R$, sau echivalent, pentru orice $a \in R$, există $b \in R$ astfel încât $Ra = \mathrm{Ann}_R(b)$ și $Rb = \mathrm{Ann}_R(a)$ [59].

Corolarul 1.2.4. *Fie R un inel local care îndeplinește una dintre următoarele condiții:*

(i) *Fiecare element din R este fie inversabil, fie nilpotent.*

(ii) *R are dimensiune uniformă finită și fiecare element din R este fie inversabil, fie divizor al lui zero.*

(iii) *R este un inel morfic.*

Fie $A \in M_{m,n}(R)$ astfel încât $\rho(A) = \mathrm{rk}(A)$. Atunci A este regulară von Neumann.

1.3 O condiție necesară

Reciproca Teoremei 1.2.1 nu are loc în general, după cum putem vedea din exemplul următor.

Exemplul 1.3.1. Urmând exemplul [49, Example 3.3 (C)], considerăm $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ -2 & -8 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z})$, care are $\rho(A) = 2$. Atunci A este regulară von Neumann, dar nu are nicio submatrice inversabilă de dimensiune 2×2.

În ceea ce urmează ne interesează să găsim anumite condiții pentru care reciproca Teoremei 1.2.1 să fie adevărată, pentru a obține caracterizări ale matricelor regulare von Neumann cu consecințe computaționale semnificative.

Teorema 1.3.2. *Fie R un inel local, și fie $A \in M_{m,n}(R)$ o matrice nenulă cu $\rho(A) = t$. Dacă A este regulară von Neumann, atunci A are o submatrice inversabilă de dimensiune $t \times t$.*

Se cunoaște faptul că $\mathrm{rk}(A) \le \rho(A)$, pentru orice $A \in M_{m,n}(R)$, iar egalitatea are loc când R este un corp. Teorema 1.3.2 ne dă un alt exemplu al egalității celor două ranguri.

Corolarul 1.3.3. *Fie R un inel local, și fie $A \in M_{m,n}(R)$ regulară von Neumann. Atunci $\rho(A) = \mathrm{rk}(A)$.*

1.4 Caracterizări

Mai întâi, să reamintim că teorema [61, Chapter 4, Theorem 18] a lui Northcott (în limbajul modulelor libere finite), teorema [14, Theorem 7.19] a lui Bhaskara Rao și teorema [49, Theorem 3.2] a lui Lam și Swan dau deja condiții necesare și suficiente ca o matrice peste un inel comutativ să fie regulară von Neumann. În continuare enunţam rezultatul lor şi dăm o demonstraţie alternativa pentru una dintre implicaţii.

Teorema 1.4.1. *O matrice $A \in M_{m,n}(R)$ este regulară von Neumann dacă și numai dacă, pentru orice $k \in \{1, \ldots, \min(m, n)\}$, $\mathcal{D}_k(A)$ este generat de un idempotent.*

Teoremele 1.2.1 și 1.3.2 și Corolariile lor 1.2.4 și 1.3.3 dau următoarea caracterizare pentru matricele regulare von Neumann de dimensiune $m \times n$ peste un inel comutativ local.

Teorema 1.4.2. *Fie R un inel local, și fie $A \in M_{m,n}(R)$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(1) A este regulară von Neumann.

(2) A este fie zero, fie A are o submatrice inversabilă de dimensiune $\rho(A) \times \rho(A)$.

Dacă R satisface (i), (ii) sau (iii) din Corolarul 1.2.4, atunci sunt mai departe echivalente cu:

(3) $\rho(A) = \mathrm{rk}(A)$.

Amintim că o matrice $A \in M_{m,n}(R)$ se notează cu $A_\mathfrak{p}$ când este văzută peste localizarea $R_\mathfrak{p}$ a lui R la un ideal prim $\mathfrak{p}$. Avem următoarea consecință a Teoremei 1.4.2.

Teorema 1.4.3. *Fie $A \in M_{m,n}(R)$. Considerăm afirmațiile:*

(1) A este regulară von Neumann.

(2) Pentru orice ideal prim (maximal) $\mathfrak{p}$ al lui R, $A_\mathfrak{p} \in M_{m,n}(R_\mathfrak{p})$ este fie zero, fie are o submatrice inversabilă de dimensiune $\rho(A_\mathfrak{p}) \times \rho(A_\mathfrak{p})$.

Atunci (1) $\Longrightarrow$ (2)*.*

Dacă $R_\mathfrak{p}$ satisface (i), (ii) sau (iii) din Corolarul 1.2.4 pentru orice ideal prim (maximal) $\mathfrak{p}$ al lui R, atunci (2) *este mai departe echivalentă cu:*

(3) Pentru orice ideal prim (maximal) $\mathfrak{p}$ al lui R, $\rho(A_\mathfrak{p}) = \mathrm{rk}(A_\mathfrak{p})$.

Teorema 1.4.2 poate fi extinsă la matrice de dimensiune $m \times n$ peste produse de inele comutative locale. Se cunoaște faptul că regularitatea von Neumann se comportă bine relativ la produse directe.

Corolarul 1.4.4. *Fie $R = \prod_{k \in K} R_k$ un produs direct de inele comutative locale, și fie $0_{m,n} \neq A \in M_{m,n}(R)$. Pentru orice $k \in K$, notăm cu $h_k : M_{m,n}(R) \to M_{m,n}(R_k)$ proiecția canonică. Atunci următoarele sunt echivalente:*

(1) A este regulară von Neumann.

(2) Pentru orice $k \in K$, $h_k(A) = 0_{m,n}$ sau $h_k(A)$ are o submatrice inversabilă de dimensiune $t_k \times t_k$, unde $t_k = \rho(h_k(A))$.

Dacă R_k satisface (i), (ii) sau (iii) din Corolarul 1.2.4 pentru orice $k \in K$, atunci sunt echivalente în continuare cu:

(3) Pentru orice $k \in K$, $\rho(h_k(A)) = \mathrm{rk}(h_k(A))$.

Remintim că un inel R se numește *semiperfect* dacă $R/\mathrm{rad}(R)$ este semisimplu artinian și idempotenții se ridică modulo $\mathrm{rad}(R)$. Un inel comutativ este semiperfect dacă și numai dacă este un produs direct finit de inele comutative locale [46, Theorem 23.11]. Deci corolarul de mai sus se aplică oricărui inel comutativ semiperfect. În particular, se aplică oricărui inel comutativ finit, deoarece orice astfel de inel este un produs direct finit de inele comutative locale finite (a se vedea [52, Theorem (VI.2)]). deci este semiperfect.

Teorema 1.4.5. *Fie $R = \prod_{k\in K} R_k$ un produs direct de inele comutative locale. Fie $A \in M_{m,n}(R)$ cu $\rho(A) = t$. Atunci A este regulară von Neumann dacă și numai dacă $C_t(A)$ este regulară von Neumann.*

1.5 Numărarea matricelor regulare von Neumann

Elementele regulare von Neumann din inelele de clase de resturi au fost caracterizate de Morgado [54], iar numărul lor a fost determinat de Alkam, Osba [3] și Tóth [69]. De asemenea, Castillo-Ramirez și Gadouleau au determinat numărul elementelor regulare von Neumann peste diferite algebre grupale în studiul despre automate celulare von Neumann [19]. Ca aplicații ale Teoremei 1.4.2 vom generaliza rezultatele citate la matrice peste astfel de inele și vom determina numărul matricelor regulare von Neumann de dimensiune $m \times n$ peste inelele de clase de resturi $\mathbb{Z}_l$ și peste algebrele grupale $F_q[\mathbb{Z}_l]$, unde F_q este un corp a cărui caracteristică $\mathrm{char}(F_q)$ divide l. De fapt, vom demonstra un rezultat mai general și vom deduce aceste numere ca și cazuri particulare.

Notăm cu $r(m, n, q, t)$ numărul matricelor de dimensiune $m \times n$ peste un corp F_q cu q elemente, având rangul (determinantal) $t \in \{0, \ldots, \min(m, n)\}$. Atunci $r(m, n, q, 0) = 1$ și pentru orice $t \in \{1, \ldots, \min(m, n)\}$ avem:

$$r(m,n,q,t) = \frac{(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{t-1})(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{t-1})}{(q^t-1)(q^t-q)\cdots(q^t-q^{t-1})}$$

by [55, 1.7].

Teorema 1.5.1. *Fie R un inel finit local cu idealul maximal M astfel încât $|R/M| = |F_q| = q$. Atunci numărul matricelor regulare von Neumann de dimensiune $m \times n$ peste R este*

$$V(M_{m,n}(R)) = \sum_{t=0}^{\min(m,n)} |M|^{t(m+n-t)} r(m,n,q,t).$$

Având în vedere că regularitatea von Neumann se comportă bine relativ la produsele directe, deducem imediat următorul corolar, care este aplicabil inelelor comutative semiperfecte.

Corolarul 1.5.2. *Fie $R = \prod_{k=1}^{s} R_k$ un produs direct de inele comutative finite locale R_k cu idealele maximale M_k astfel încât $|R_k/M_k| = |F_{q_k}| = q_k$ pentru orice $k \in K$. Atunci numărul matricelor regulare von Neumann de dimensiune $m \times n$ peste R este*

$$V(M_{m,n}(R)) = \prod_{k=1}^{s} \sum_{t=0}^{\min(m,n)} |M_k|^{t(m+n-t)} r(m, n, q_k, t).$$

Considerăm algebrele grupale $F_q[G]$, unde F_q este un corp cu q elemente și $G = \mathbb{Z}_l$.

Corolarul 1.5.3. *Fie $l \geq 2$ un număr întreg și fie F_q un corp finit cu q elemente astfel încât $\mathrm{char}(F_q)$ divide l. Fie $x^l - 1 = p_1(x)^{r_1} \cdots p_s(x)^{r_s}$ cu polinoamele distincte ireductibile $p_1(x), \ldots, p_s(x) \in F_q[x]$ respectiv cu gradele $d_1, \ldots, d_s$, și numerele întregi pozitive $r_1, \ldots, r_s$. Atunci numărul matricelor regulare von Neumann de dimensiune $m \times n$ peste algebra grupală $F_q[\mathbb{Z}_l]$ este*

$$V(M_{m,n}(F_q[\mathbb{Z}_l])) = \prod_{k=1}^{s} \sum_{t=0}^{\min(m,n)} q_k^{(r_k-1)t(m+n-t)} r(m, n, q_k, t),$$

unde pentru orice $k \in \{1, \ldots, s\}$ avem $q_k = q^{d_k}$.

În finalul acestei secțiuni, abordăm următoarea întrebare: *Dacă o matrice peste un inel finit este regulară von Neumann, atunci câte inverse interioare și câte inverse reflexive are?* Amintim că o matrice este regulară von Neumann dacă și numai dacă aceasta are o inversă interioară dacă și numai dacă are o inversă reflexivă. Dar vom vedea că, pentru o matrice regulară von Neumann dată, numărul inverselor interioare poate fi diferit de numărul inverselor sale reflexive.

Notăm cu $I(A)$ și $\mathrm{Ref}(A)$ mulțimile tuturor inverselor interioare, respectiv tuturor inverselor reflexive ale unei matrice regulare von Neumann A.

Teorema 1.5.4. *Fie R un inel finit local cu idealul maximal M astfel încât $|R/M| = |F_q| = q$. Considerăm omomorfismul natural de inele $p : R \to R/M$ și omomorfismul indus de R $h : M_{m,n}(R) \to M_{m,n}(R/M)$, $h((a_{ij})) = (a_{ij} + M)$. Fie $A \in M_{m,n}(R)$ o matrice regulară von Neumann cu $\rho(A) = t$.*

Atunci numărul inverselor interioare ale matricei A este $|I(A)| = |M|^{mn-t^2} \cdot |I(h(A))| = |R|^{mn-t^2}$, iar numărul inverselor reflexive este $|\mathrm{Ref}(A)| = |M|^{t(m+n-2t)} \cdot |\mathrm{Ref}(h(A))| = |R|^{t(m+n-2t)}$.

Corolarul 1.5.5. *Fie $R = \prod_{k=1}^{s} R_k$ un produs direct de inele comutative finite locale. Fie $A \in M_{m,n}(R)$ o matrice regulară von Neumann cu $\rho(A) = t$. Atunci numărul inverselor interioare ale matricei A este $|I(A)| = \prod_{k=1}^{s} |R_k|^{mn-t^2}$, iar numărul inverselor reflexive este $|\mathrm{Ref}(A)| = \prod_{k=1}^{s} |R_k|^{t(m+n-2t)}$.*

1.6 Inele de matrice formale triunghiulare regulare von Neumann

Ne interesează cum se comportă regularitatea von Neumann pentru inelele de matrice formale triunghiulare. În introducerea articolului [39] se afirmă că autorii vor da un astfel de rezultat, dar nu apare în lucrare, iar noi nu am putut să îl găsim în literatura de specialitate. Pentru inelele oarecare R și S și un R-S-bimodul M, un inel de matrice formale triunghiulare este definit ca fiind un inel de forma

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & x \\ 0 & s \end{pmatrix} \middle| r \in R, x \in M, s \in S \right\},$$

cu adunarea și înmulțirea cunoscute de la matrice.

Teorema 1.6.1. *Fie R și S inele oarecare și fie M un R-S-bimodul. Atunci $\begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ este regulară von Neumann dacă și numai dacă $a_1 \in R$ și $a_2 \in S$ sunt regulare von Neumann, iar $x \in a_1 M + M a_2$.*

Folosind Teorema 1.6.1 putem imediat să numărăm elementele regulare von Neumann ale inelelor de matrice formale triunghiulare.

Teorema 1.6.2. *Fie R și S două inele finite oarecare și fie M un R-S-bimodul finit. Fie $\mathrm{vnr}(R) = \{r_1, \ldots, r_k\}$ și $\mathrm{vnr}(S) = \{s_1, \ldots, s_l\}$ mulțimile de elemente regulare von Neumann din R și respectiv din S. Atunci numărul matricelor regulare von Neumann din $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ este $\sum_{(i,j) \in \{1,\ldots,k\} \times \{1,\ldots,l\}} |r_i M + M s_j|$.*

Capitolul 2

Matrice regulare tari

În acest capitol vom demonstra o condiție necesară și o condiție suficientă pentru ca o matrice A de dimensiune $n \times n$ cu rangul determinantal $\rho(A) = t$ peste un inel comutativ oarecare să fie (von Neumann) regulară tare, folosind urma matricei compuse $C_t(A)$ de ordin t. În particular, o matrice A nenulă de dimensiune $n \times n$ cu $\rho(A) = t$ peste un inel comutativ local R este regulară tare dacă și numai dacă $\mathrm{Tr}(C_t(A))$ este inversabilă în R, iar în acest caz putem construi o inversă interioară tare pentru A. De aici, vom dezvolta aplicații pentru produse directe de inele comutative locale și algebre grupale. Vom număra matricele regulare tari peste inele finite de clase de resturi și algebre grupale. De asemenea, vom aborda inversele interioare tari și inversele reflexive tari în inele oarecare, precum și matricele regulare tari peste inele de matrice formale triunghiulare. Exeptând rezultatele citate, toate celelalte rezultate sunt originale și majoritatea sunt incluse în articolele noastre [23, 27].

2.1 Caracterizări

Pentru terminologia generală despre matrice peste inele comutative vom face referință la sursele clasice [12, 14, 18, 38]. Vom reaminti doar conceptele care sunt necesare pentru studiul nostru. Pe parcursul capitolului $n \geq 2$ este un număr întreg, iar R este un inel comutativ cu unitate. De asemenea, $GL_n(R)$ este grupul matricelor de dimensiune $n \times n$ al căror determinant este inversabil în R. Polinomul caracteristic al matricei A este $p_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n$, unde $c_k = (-1)^k \mathrm{Tr}(C_k(A))$ pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Începem cu o versiune redusă a Teoremei Cayley-Hamilton pentru matrice peste inele comutative, pe care o vom folosi pentru a demonstra o caracterizare a matricelor regulare tari nenule. Cazul matricelor peste corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe a fost demonstrat de Segercrantz [68], iar apoi de Hwang [42, Theorem 1]. Ultima demonstrație are loc și pentru matrice peste corpuri oarecare. Una din demonstrațiile Teoremei Cayley-Hamilton peste un inel comutativ R folosește reducerea la un corp, sau chiar la $\mathbb{C}$ (a se vedea [53, p. 32] și [28, Theorem 3.4] și detaliile aferente). Pentru redusa Teoremei Cayley-Hamilton vom folosi aceeași idee, care este în general aplicabilă pentru identități universale, și o vom schița în ceea ce urmează.

Teorema 2.1.1. *Fie $A \in M_n(R)$ cu $\rho(A) = t$. Atunci $A^{t+1} + c_1A^t + \cdots + c_tA = 0_n$.*

Observaţia 2.1.2. Teorema 2.1.1 este relevantă pentru cazul în care $t < n - 1$, în timp ce pentru $t \geq n-1$ identitatea anterioară poate fi obținută din Teorema Cayley-Hamilton.

Acum putem prezenta rezultatul principal din acest capitol.

Teorema 2.1.3. *Fie $A \in M_n(R)$ o matrice nenulă cu $\rho(A) = t$.*

(i) Dacă A este regulară tare, atunci $c_t \notin \mathrm{rad}(R)$.

(ii) Dacă $c_t \in U(R)$, atunci A este regulară tare și o inversă interioară tare a lui A este

$$B = -c_t^{-1}(A^{t-1} + c_1 A^{t-2} + \cdots + c_{t-1} I_n).$$

Dăm următorul exemplu ilustrativ.

Exemplul 2.1.4. (1) Fie $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \\ 0 & 10 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{12})$. Din Teorema 2.1.3, A este regulară tare, și o inversă interioară tare a lui A este $B = -c_2^{-1}(A + c_1 I_3) = -5(A - \mathrm{Tr}(A) I_3) = 7(A - 6I_3) = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 6 & 5 & 9 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_4)$. Din Teoremele 1.4.2 și 2.1.3, A este regulară von Neumann, dar nu și regulară tare.

În cazul inelelor comutative locale, vom da o teoremă de caracterizare a matricelor regulare tari nenule.

Teorema 2.1.5. *Fie R un inel local și fie $A \in M_n(R)$ o matrice nenulă cu $\rho(A) = t$. Atunci A este regulară tare dacă și numai dacă $c_t \in U(R)$. În acest caz, o inversă interioară tare a lui A este $B = -c_t^{-1}(A^{t-1} + c_1 A^{t-2} + \cdots + c_{t-1} I_n)$.*

2.2 Transferul proprietății de regularitate tare

Mai întâi vom vedea cum regularitatea tare a unei matrice cu rang determinantal t se compară cu regularitatea tare a matricei compuse de ordin t.

Teorema 2.2.1. *Fie $A \in M_n(R)$ cu $\rho(A) = t$. Considerăm următoarele afirmații:*

(i) A este regulară tare.

(ii) $C_t(A)$ este regulară tare.

Atunci (i) $\Longrightarrow$ (ii). Dacă R este un inel local, atunci (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

Caracterizarea noastră pentru matricele regulare tari nenule peste inele comutative locale din Teorema 2.1.5 poate fi aplicată și în cazul localizărilor la idealele prime ale inelelor comutative oarecare ca să decidem dacă o matrice nenulă este regulară tare peste un inel comutativ oarecare. Putem imediat deduce următoarea consecință a Teoremei 2.1.5. Reamintim că o matrice $A \in M_n(R)$ se notează cu $A_{\mathfrak{p}}$ când este văzută peste localizarea $R_{\mathfrak{p}}$ a lui R la un ideal prim $\mathfrak{p}$.

Teorema 2.2.2. *Fie $A \in M_{m,n}(R)$. Dacă A este regulară tare, atunci pentru orice ideal prim (maximal) $\mathfrak{p}$ al lui R, $A_{\mathfrak{p}} \in M_{m,n}(R_{\mathfrak{p}})$ este fie zero, fie are $c_t \in U(R_{\mathfrak{p}})$, unde $t = \rho(A_{\mathfrak{p}})$.*

Teorema 2.1.5 poate fi extinsă la matrice de dimensiune $n \times n$ peste produse de inele comutative locale, după cum urmează. Obținem următorul corolar, care poate fi aplicat pentru orice inel comutativ semiperfect și în particular pentru orice inel comutativ finit.

Corolarul 2.2.3. *Fie $R = \prod_{k \in K} R_k$ un produs direct de inele comutative locale, și fie $0_n \neq A \in M_n(R)$. Pentru orice $k \in K$, notăm cu $h_k : M_n(R) \to M_n(R_k)$ proiecția canonică. Atunci următoarele sunt echivalente:*

(1) A este regulară tare.

(2) Pentru orice $k \in K$, fie $h_k(A) = 0_n$, fie $\rho(h_k(A)) = t_k \geq 1$ și $c_{t_k} = (-1)^k \mathrm{Tr}(C_{t_k}(h_k(A))) \in U(R_k)$.

Am observat în Teorema 2.2.1 că o matrice A de dimensiune $n \times n$ cu $\rho(A) = t$ peste un inel local R este regulară tare dacă și numai dacă și matricea sa compusă $C_t(A)$ este regulară tare. Putem extinde acest rezultat și la matrice peste produse directe de inele locale.

Teorema 2.2.4. *Fie $R = \prod_{k \in K} R_k$ un produs direct de inele comutative locale. Fie $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ cu $\rho(A) = t$. Atunci A este regulară tare dacă și numai dacă $C_t(A)$ este regulară tare.*

Amintim că orice inel comutativ semiperfect este un produs direct finit de inele comutative locale. Așadar, obținem următorul corolar.

Corolarul 2.2.5. *Fie R un inel comutativ semiperfect, și fie $A \in M_n(R)$ cu $\rho(A) = t$. Atunci A este regulară tare dacă și numai dacă $C_t(A)$ este regulară tare.*

2.3 Numărarea matricelor regulare tari

În această secțiune vom număra matricele regulare tari peste inele finite, vom deduce câteva formule aferente și vom da câteva aplicații pentru inelele de clase de resturi. Pe lângă implicațiile directe, asemenea rezultate pot avea aplicații și în teoria automatelor celulare [19] sau în criptografie, unde matricele regulare von Neumann pot fi folosite pentru protocoale de schimb de chei și criptare cu cheie publică cu scheme de căutare a cuvintelor cheie [56]. Similar, matricele regulare tari pot fi și spațiu de chei pentru anumite criptosisteme, iar determinarea dimensiunii acestui spațiu este o problemă importantă.

Vom număra matricele regulare tari peste inele comutative locale finite. Ca și până acum, notăm cu F_q un corp cu q elemente.

Teorema 2.3.1. *Fie R un inel local finit cu idealul maximal M astfel încât $|R/M| = |F_q| = q$. Atunci numărul matricelor regulare tari de dimensiune $n \times n$ cu rangul determinantal t peste R este*

$$VS_t(M_n(R)) = \frac{|GL_n(R)|}{|GL_{n-t}(R)|} = |M|^{t(2n-t)} q^{t(n-t)} (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{t-1}).$$

Așadar, numărul matricelor regulare tari de dimensiune $n \times n$ peste R este $VS(M_n(R)) = \sum_{i=0}^{n} VS_t(M_n(R))$.

Pentru următorul rezultat vom corela numărul $VS_t(M_n(R))$, de matrice regulare tari, cu numărul $V_t(M_n(R))$ al matricelor regulare von Neumann de dimensiune $n \times n$, cu rang t, peste inele comutative locale finite, dar și cu alte numere relevante. De asemenea, notăm cu $r(n, n, q, t)$ numărul matricelor de dimensiune $n \times n$ de rang t peste un corp F_q cu q elemente. Pentru orice $k \in \{0, \ldots, n\}$, notăm cu

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{t-1})}{(q^t - 1)(q^t - q) \cdots (q^t - q^{t-1})}$$

coeficientul binomial Gaussian, care numără subspațiile k-dimensionale ale unui n-spațiu vectorial peste F_q. Se cunoaște că $\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q$.

Propoziţia 2.3.2. *Fie R un inel finit local cu idealul maximal M astfel încât $|R/M| = |F_q| = q$, și fie $t \in \{0, \ldots, n\}$. Atunci:*

(1) $VS_t(M_n(R)) = |M|^{t(2n-t)} \prod_{k=0}^{t-1} VS_1(M_{n-k}(F_q))$.

(2) $VS_t(M_n(R)) = |M|^{t(2n-t)} q^{t(n-t)} \binom{n}{t}_q^{-1} r(n, n, q, t) = q^{t(n-t)} \binom{n}{t}_q^{-1} V_t(M_n(R))$.

Deoarece regularitatea von Neumann tare se comportă bine față de produsele directe, obținem următorul corolar.

Corolarul 2.3.3. *Fie $R = \prod_{k=1}^{s} R_k$ un produs direct de inele comutative locale finite R_k cu idealele maximale M_k astfel încât $|R_k/M_k| = |F_{q_k}| = q_k$ pentru orice $k \in K$. Atunci numărul matricelor regulare tari de dimensiune $n \times n$ peste R este*

$$VS(M_n(R)) = \prod_{k=1}^{s} \sum_{t=0}^{n} |M_k|^{t(2n-t)} q_k^{t(n-t)} (q_k^n - 1)(q_k^n - q_k) \cdots (q_k^n - q_k^{t-1}).$$

În final vom aborda următoarea întrebare: *Dacă o matrice peste un inel finit este regulară tare, atunci câte inverse interioare tari are?*

Notăm cu $S(A)$ mulțimea tuturor inverselor interioare tari a unei matrice regulare tare A.

Teorema 2.3.4. *Fie R un inel local finit cu idealul maximal M astfel încât $|R/M| = |F_q| = q$. Considerăm omomorfismul natural $p : R \to R/M$ și omomorfismul indus de R-module $h : M_n(R) \to M_n(R/M)$, $h((a_{ij})) = (a_{ij} + M)$. Fie $A \in M_n(R)$ o matrice regulară tare. Atunci numărul de inverse interioare tari ale lui A este $|S(A)| = |M|^{(n-t)^2} \cdot |S(h(A))| = |R|^{(n-t)^2}$.*

Corolarul 2.3.5. *Fie $R = \prod_{k=1}^{s} R_k$ un produs direct de inele comutative locale finite. Fie $A \in M_n(R)$ o matrice regulară tare cu $\rho(A) = t$. Atunci numărul inverselor interioare tari ale lui A este $|S(A)| = \prod_{k=1}^{s} |R_k|^{(n-t)^2}$.*

2.4 Numărarea matricelor regulare tari peste algebre grupale

Considerăm o algebră grupală semisimplă $F_q[G]$, unde F_q este un corp cu q elemente și G este un grup cu l elemente. Conform Teoremei lui Maschke, algebra grupală $F_q[G]$ este semisimplă dacă și numai dacă $\mathrm{char}(F_q)$ nu divide l. În acest caz, Teorema Wedderburn-Artin ne dă un izomorfism de F_q-algebre: $F_q[G] \cong \bigoplus_{k=1}^{s} M_{n_k}(D_k)$ pentru numerele întregi pozitive

$n_1, \ldots, n_s$ și corpurile finite $D_1, \ldots, D_s$ [64, Theorem 3.4.9]. Amintim că $|G| = \sum_{k=1}^{s} n_k^2 d_k$, unde $d_k = [D_k : F_q]$ este gradul extinderii corpului D_k peste F_q pentru orice $k \in \{1, \ldots, s\}$. În ceea ce urmează vom folosi notațiile $q_k = |D_k| = q^{d_k}$ și $m_k = nn_k$ pentru orice $k \in \{1, \ldots, s\}$.

Am văzut deja că nu orice matrice peste un corp este regulară tare, deși este întotdeauna regulară von Neumann. În această secțiune ne interesează să numărăm elementele regulare tari ale lui $F_q[G]$, precum și matricele regulare tari de dimensiune $n \times n$ peste $F_q[G]$, chiar și în cazul în care $F_q[G]$ nu este semisimplă.

Teorema 2.4.1. *Fie G un grup cu l elemente și fie F_q un corp cu q elemente astfel încât $\mathrm{char}(F_q)$ nu divide l. Considerăm un izomorfism $F_q[G] \cong \bigoplus_{k=1}^{s} M_{n_k}(D_k)$ de F_q-algebre cu notațiile de mai sus. Atunci:*

(1) numărul elementelor regulare tari din $F_q[G]$ este

$$VS(F_q[G]) = \prod_{k=1}^{s} \sum_{t=0}^{n_k} q_k^{t(n_k-t)}(q_k^{n_k} - 1)(q_k^{n_k} - q_k) \cdots (q_k^{n_k} - q_k^{t-1}).$$

(2) numărul matricelor regulare tari de dimensiune $n \times n$ peste $F_q[G]$ este

$$VS(M_n(F_q[G])) = \prod_{k=1}^{s} \sum_{t=0}^{m_k} q_k^{t(m_k-t)}(q_k^{m_k} - 1)(q_k^{m_k} - q_k) \cdots (q_k^{m_k} - q_k^{t-1}).$$

În continuare, considerăm o algebră grupală semisimplă $F_q[G]$, unde F_q este un corp cu q elemente și G este un grup *abelian* cu l elemente. Atunci, în descompunerea Wedderburn de mai sus $F_q[G] \cong \bigoplus_{k=1}^{s} M_{n_k}(D_k)$ toți n_k sunt unu, iar toate corpurile D_k sunt extinderi de corpuri ale lui F_q cu rădăcini primitive ale unității. Mai exact, Teorema Perlis-Walker [64, Theorem 3.5.4] stabilește un izomorfism de F_q-algebre: $F_q[G] \cong \bigoplus_{d|l} a_d F_q(\zeta_d)$, unde ζ_d este o rădăcină primitivă de ordin d a unității, $e_d = [F_q(\zeta_d) : F_q]$, n_d reprezintă numărul elementelor de ordin d ale lui G, $a_d = \frac{n_d}{e_d}$, iar $a_d F_q(\zeta_d)$ reprezintă suma directă de a_d corpuri distincte, care sunt izomorfe cu extinderea de corpuri $F_q(\zeta_d)$ a lui F_q. Amintim că $|F_q(\zeta_d)| = q^{e_d}$. Vom folosi aceste notații în ceea ce urmează.

Deoarece toți sumanzii din descompunerea Perlis-Walker a algebrei grupale $F_q[G]$ sunt corpuri, toate elementele din $F_q[G]$ sunt regulare von Neumann (tari). Așadar vom număra doar matricele regulare tari de dimensiune $n \times n$ peste $F_q[G]$.

Teorema 2.4.2. *Fie G un grup abelian cu l elemente și fie F_q un corp cu q elemente astfel încât $\mathrm{char}(F_q)$ nu divide l. Considerăm un izomorfism $F_q[G] \cong \bigoplus_{d|l} a_d F_q(\zeta_d)$ de F_q-algebre. Atunci numărul matricelor regulare tari de dimensiune $n \times n$ peste $F_q[G]$ este*

$$VS(M_n(F_q[G])) = \prod_{d|l} \left(\sum_{t=0}^{n} q^{e_d t(n-t)}(q^{e_d n} - 1)(q^{e_d n} - q^{e_d}) \cdots (q^{e_d n} - q^{e_d(t-1)}) \right)^{a_d}.$$

În final, considerăm o algebră grupală $F_q[G]$, unde F_q este un corp cu q elemente și G este un grup *ciclic* cu l elemente, cu alte cuvinte $G \cong \mathbb{Z}_l$. Spre deosebire de celelalte cazuri, vom putea da o formulă pentru numărarea matricelor regulare tari de dimensiune $n \times n$ peste $F_q[G]$ chiar dacă algebra grupală $F_q[G]$ nu este semisimplă.

Teorema 2.4.3. *Fie $l \geq 2$ un număr întreg și fie F_q un corp finit cu q elemente. Scriem $x^l - 1 = p_1(x)^{r_1} \cdots p_s(x)^{r_s}$ pentru polinoamele distincte ireductibile $p_1(x), \ldots, p_s(x) \in F_q[x]$ respectiv cu gradele $d_1, \ldots, d_s$, și numerele întregi pozitive $r_1, \ldots, r_s$. Atunci numărul matricelor regulare tari de dimensiune $n \times n$ peste algebra grupală $F_q[\mathbb{Z}_l]$ este*

$$VS(M_n(F_q[\mathbb{Z}_l])) = \prod_{k=1}^{s} \sum_{t=0}^{n} q_k^{(r_k-1)t(2n-t)} q_k^{t(n-t)} (q_k^n - 1)(q_k^n - q_k) \cdots (q_k^n - q_k^{t-1}),$$

unde $q_k = q^{d_k}$ pentru orice $k \in \{1, \ldots, s\}$.

Când G este un grup ciclic finit și algebra grupală $F_q[G]$ este semisimplă, putem simplifica Teorema 2.4.3, dar putem da și o alternativă folosind extinderi de corpuri ale lui F_q cu rădăcini primitive ale unității, care corespunde cu Teorema 2.4.2.

Corolarul 2.4.4. *Fie $l \geq 2$ un număr întreg și fie F_q un corp cu q elemente astfel încât* $\mathrm{char}(F_q)$ *nu divide l. Considerăm izomorfismul de F_q-algebre $F_q[\mathbb{Z}_l] \cong F_q[x]/(x^l - 1) \cong \bigoplus_{d|l} a_d F_q(\zeta_d)$, unde $x^l - 1 = p_1(x) \cdots p_s(x)$ sunt polinoame distincte ireductibile $p_1(x), \ldots, p_s(x) \in F_q[x]$ respectiv cu gradele $d_1, \ldots, d_s$, ζ_d este o rădăcină primitivă a unității, de ordin d, $e_d = [F_q(\zeta_d) : F_q]$, $\phi(d)$ este funcția lui Euler, $a_d = \frac{\phi(d)}{e_d}$, iar cu $a_d F_q(\zeta_d)$ notăm suma directă de a_d corpuri distinte care sunt toate izomorfe cu extinderea de corpuri $F_q(\zeta_d)$ a lui F_q. Atunci numărul matricelor regulare tari de dimensiune $n \times n$ peste algebra grupală $F_q[\mathbb{Z}_l]$ este*

$$\begin{aligned} VS(M_n(F_q[\mathbb{Z}_l])) &= \prod_{k=1}^{s} \sum_{t=0}^{n} q^{d_k t(n-t)} (q^{d_k n} - 1)(q^{d_k n} - q^{d_k}) \cdots (q^{d_k n} - q^{d_k(t-1)}) \\ &= \prod_{d|l} \left(\sum_{t=0}^{n} q^{e_d t(n-t)} (q^{e_d n} - 1)(q^{e_d n} - q^{e_d}) \cdots (q^{e_d n} - q^{e_d(t-1)}) \right)^{a_d}. \end{aligned}$$

2.5 Inverse interioare tari și reflexive tari

Pe parcursul acestei secțiuni, inelul R nu trebuie să fie comutativ. Așadar, următoarele rezultate se aplică inelelor de matrice.

Reamintim că un element $a \in R$ se numește *regular tare* dacă $a \in a^2R \cap Ra^2$ (a se vedea [8, 58]). Conform lui Azumaya [8, Lemma 1], dacă a este regular tare cu $a = a^2u = va^2$ pentru $u, v \in R$, atunci există un (unic) element $w \in R$ astfel încât $a = a^2w = wa^2$ iar $aw = wa$, mai precis $w = au^2 = v^2a$. Așadar $a \in R$ este regular tare dacă și numai dacă există un $w \in R$ astfel încât $a = a^2w = wa^2$ și $aw = wa$, iar în acest caz w se numește *inversa interioară tare* sau *inversa generalizată tare* a lui a. Un element $u \in R$ se numește *inversă reflexivă tare* a lui $a \in R$ dacă u este o inversă interioară tare a lui a și a este o inversă interioară tare a lui u. Amintim și faptul că R este regular tare dacă și numai dacă orice element are o inversă reflexivă unică [67, Proposition 3.4].

Notăm cu $S(a)$ mulțimea inverselor interioare tari și cu $\mathrm{SRef}(a)$ mulțimea inverselor reflexive tari ale lui $a \in R$.

Khurana, Lam și Nielsen au studiat proprietatea de ridicare a elementelor regulare von Neumann [44, Theorem 4.2]. Vom aborda aceeași problemă în cazul elementelor regulare tari.

Teorema 2.5.1. *Fie I un ideal al inelului R și fie $x \in R$ un element regular tare modulo I. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(1) Elementul x se ridică regular tare modulo I.

(2) Elementul x se ridică regular tare modulo I și dacă y este o inversă interioară regulară tare a lui x modulo I, atunci $y + I$ se ridică la o inversă interioară tare a oricărei ridicări regulare tari a lui $x + I$.

(3) Dacă x, y sunt inverse interioare regulare tari modulo I, atunci ele se ridică modulo I la inverse reflexive tari. (De fapt, $y + I$ se ridică la o inversă reflexivă tare a oricărei ridicări regulare tari a lui $x + I$).

O problemă interesantă a inverselor generalizate ale elementelor din inele este să corelăm elementele din punct de vedere al mulțimilor de inverse generalizate. Astfel, menționăm lucrările lui Alahmadi, Jain și Leroy [2], și Lee [50, 51], care au studiat inverse interioare și reflexive în inele semiprime. În ceea ce urmează, vom considera cazul inverselor interioare tari și inverselor reflexive tari în inele semiprime.

Reamintim că R se numește inel *semiprim* dacă pentru orice $a \in R$ astfel încât $aRa = 0$, avem $a = 0$. De exemplu, orice inel regular von Neumann este semiprim. De asemenea, orice inel redus (adică un inel fără elemente nilpotente nenule) este semiprim.

Teorema 2.5.2. *Fie R un inel semiprim, și fie $a, b \in R$ un element regular tare astfel încât $S(a) \cap S(b) \neq \emptyset$. Atunci $S(a) \subseteq S(b)$ dacă și numai dacă $b^2 = ab = ba$.*

Corolarul 2.5.3. *Fie R un inel semiprim, și fie $a, b \in R$ elemente regulare tari astfel încât $S(a) \cap S(b) \neq \emptyset$. Atunci $S(a) = S(b)$ dacă și numai dacă $a = b$.*

Teorema 2.5.4. *Fie R un inel semiprim, și fie $a, b \in R$ elemente regulare tari. Atunci* $\mathrm{SRef}(a) \cap \mathrm{SRef}(b) \neq \emptyset$ *dacă și numai dacă $a = b$.*

2.6 Inele de matrice formale triunghiulare regulare tari

În această secțiune vom studia cum regularitatea tare se comportă relativ la inele de matrice formale triunghiulare.

Teorema 2.6.1. *Fie R și S inele oarecare și fie M un R-S-bimodul. Atunci $\begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ este regulară tare dacă și numai dacă $a_1 \in R$ and $a_2 \in S$ sunt regulare tari și $x \in a_1M + Ma_2$.*

Folosind Teorema 2.6.1 putem număra imediat elementele regulare tari din inelele de matrice formale triunghiulare.

Teorema 2.6.2. *Fie R și S inele finite oarecare, și fie M un R-S-bimodul finit. Fie* $\mathrm{svnr}(R) = \{r_1, \ldots, r_k\}$ *și* $\mathrm{svnr}(S) = \{s_1, \ldots, s_l\}$ *mulțimile de elemente regulare tari ale lui R, respectiv S. Atunci numărul matricelor regulare tari din $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ este* $\sum_{(i,j) \in \{1,\ldots,k\} \times \{1,\ldots,l\}} |r_iM + Ms_j|$.

Capitolul 3

Matrice cu inverse exterioare nenule

Se cunoaște faptul că orice matrice A regulară von Neumann nenulă de dimensiune $m \times n$ peste un inel oarecare are o inversă exterioară B de dimensiune $n \times m$ în sensul că $BAB = B$. Generalizând conceptele anterioare despre matrice regulare von Neumann, în acest capitol, matricele care au inverse exterioare nenule peste inele semiperfecte vor fi caracterizate ca fiind matricele ce au anumite elemente în afara radicalului Jacobson al lui R. Vom număra astfel de matrice peste inele semiperfecte finite și inele comutative finite, și vom da câteva aplicații ale acestora. De asemenea, vom aborda inversele exterioare în inele de matrice formale triunghiulare. Exceptând rezultatele citate, toate celelalte rezultate sunt originale și majoritatea sunt incluse în articolul [25].

3.1 Inele oarecare

Pe parcursul acestui capitol $m, n \geq 1$ vor fi două numere întregi, iar R va fi un inel cu unitate.

Analizăm matricele care au inverse exterioare nenule luând, mai întâi, în considerare cazul general al inelelor oarecare. Am văzut deja că orice matrice regulară von Neumann nenulă are o inversă exterioară nenulă. Putem corela existența inversei exterioare nenulă a unei matrice cu următoarele două condiții.

Teorema 3.1.1. *Fie $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$. Considerăm următoarele afirmații:*

(i) Există anumite a_{ij} care au o inversă exterioară nenulă.

(ii) A are o inversă exterioară nenulă.

(iii) $A \notin M_{m,n}(\mathrm{rad}(R))$.

Atunci (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii).

În cele ce urmează vom studia când afirmațiile din Teorema 3.1.1 sunt echivalente.

Exemplul 3.1.2. Matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_4)$ are o inversă exterioară nenulă, conform Teoremei 3.1.1, deoarece A are un element inversabil. Așadar, deoarece elementul (3,1) al lui A

este 1, o inversă exterioară nenulă a lui A este $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_4)$ conform Teoremei 3.1.1. Dar A nu este regulară von Neumann.

Vom folosi următorul concept.

Definiţia 3.1.3. Fie I un ideal pe o parte al lui R. Spunem că *elementele care au o inversă exterioară nenulă se ridică modulo I*, dacă pentru fiecare $x+I \in R/I$ care are o inversă exterioară nenulă în R/I, există un element $a \in R$ care are o inversă exterioară nenulă în R astfel încât $x - a \in I$.

Reamintim că un ideal I pe o parte a lui R se spune că se *ridică tare* dacă pentru orice $x^2 - x \in I$ cu $x \in R$ (adică x este un idempotent modulo I), există un idempotent $e \in xR$ astfel încât $e - x \in I$ [60]. Menționăm că această proprietate este simetrică stânga-dreapta, și că radicalul Jacobson J al unui inel este un ideal care se ridică tare, deoarece idempotenții se ridică modulo J.

Extindem [44, Theorem 4.9] de la elemente regulare von Neumann la elemente care au o inversă exterioară nenulă.

Teorema 3.1.4. *Fie I un ideal drept al lui R care se ridică tare. Atunci elementele care au o inversă exterioară nenulă se ridică modulo I.*

Reamintim că un inel R se numește *inel exchange* (sau *inel suitable*) dacă există un idempotent $e \in R$ astfel încât $e - x \in (x^2 - x)R$, concept care este simetric stânga-dreapta [57].

Vom da o consecință utilă a Teoremei 3.1.4 în cazul inelelor exchange și, în mod particular, inelelor regulare von Neumann, inelelor π-regulare sau inelelor semiperfecte, cele din urmă fiind cele care ne interesează.

Corolarul 3.1.5. *Fie I un ideal pe o parte al unui inel exchange R. Atunci elementele care au o inversă exterioară nenulă se ridică modulo I.*

3.2 Transferul inverselor exterioare nenule

În primul rând, vom considera cazul în care afirmațiile din Teorema 3.1.1 sunt echivalente.

Teorema 3.2.1. *Fie R un inel local și fie $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$. Atunci următoarele sunt echivalente:*

(i) Există un element $a_{ij} \in U(R)$.

(ii) Există un element a_{ij} care are o inversă exterioară nenulă.

(iii) A are o inversă exterioară nenulă.

(iv) $A \notin M_{m,n}(\mathrm{rad}(R))$.

În acest caz, o inversă exterioară nenulă a lui A este matricea $B \in M_{n,m}(R)$ care are toate elementele zero, mai puțin elementul (j, i), care este o inversă exterioară (nenulă) a lui a_{ij}.

Teorema 3.2.1 se poate extinde la matrice de dimensiune $m \times n$ peste produse directe de inele locale după cum urmează. Spre deosebire de cazul inverselor interioare tari sau al inverselor interioare, $A \in M_{m,n}(R)$ are o inversă exterioară nenulă dacă și numai dacă există o proiecție a sa $h_k(A)$ care are o inversă exterioară nenulă pentru un $k \in K$. Astfel obținem următorul rezultat.

Teorema 3.2.2. *Fie s un număr întreg pozitiv, fie $R = R_1 \times \cdots \times R_s$ un produs direct de inele locale, și fie $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) Există un element a_{ij} care are o inversă exterioară nenulă.

(ii) A are o inversă exterioară nenulă.

(iii) $A \notin M_{m,n}(\mathrm{rad}(R))$.

În acest caz, o inversă exterioară nenulă a lui A este matricea $B \in M_{n,m}(R)$ care are toate elementele zero, mai puțin elementul (j,i), care este o inversă exterioară nenulă a lui a_{ij}.

3.3 Inele semiperfecte

Odată ce am pregătit instrumentele necesare, în această secțiune vom extinde rezultatele la inele semiperfecte. Dacă R este un inel semiperfect comutativ, atunci se cunoaște faptul că este un produs finit direct de inele comutative locale, așadar se poate aplica direct Teorema 3.2.2. Vom vedea că un rezultat similar are loc pentru inele semiperfecte oarecare.

Teorema 3.3.1. *Fie R un inel semiperfect. Atunci următoarele sunt echivalente pentru $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$:*

(i) Există un element a_{ij} care are o inversă exterioară nenulă.

(ii) A are o inversă exterioară nenulă.

(iii) $A \notin M_{m,n}(\mathrm{rad}(R))$.

În acest caz, o inversă exterioară nenulă a lui A este matricea $B \in M_{n,m}(R)$ care are toate elementele zero, mai puțin elementul (j,i), care este o inversă exterioară nenulă a lui a_{ij}.

În general, Teorema 3.3.1 nu are loc pentru inele semilocale, după cum vom vedea în următorul exemplu. Reamintim că un inel R se numește *semilocal* dacă $R/\mathrm{rad}(R)$ este semisimplu artinian. Este evident că orice inel semiperfect este semilocal.

Exemplul 3.3.2. Considerăm localizările $\mathbb{Z}_{(p)}$ and $\mathbb{Z}_{(q)}$ ale inelului întregilor la numerele prime p și q. Atunci inelul $R = \mathbb{Z}_{(p)} \cap \mathbb{Z}_{(q)}$ este un inel semilocal cu două ideale maximale (p) și (q) generate de p și q, deoarece

$$R/\mathrm{rad}(R) = R/(pq) \cong R/(p) \times R/(q).$$

Dar R nu este semiperfect, deoarece idempotenții nu se ridică modulo $\mathrm{rad}(R)$. Observăm faptul că $x = \frac{a}{b} \in R$ are o inversă exterioară nenulă dacă și numai dacă $x \in U(R)$ dacă și numai dacă a și pq sunt relativ prime.

Vom alege $p = 3$ și $q = 5$, așadar $R = \mathbb{Z}_{(3)} \cap \mathbb{Z}_{(5)}$. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(R)$. Niciun element al lui A nu are o inversă exterioară nenulă, dar A este inversabilă, deci are o inversă exterioară nenulă, mai exact $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(R)$. De asemenea, $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ și $A' \notin M_2(\mathrm{rad}(R)) = M_2(15R)$, dar se poate observa cu ușurință că A' că nu are nicio inversă exterioară nenulă.

Putem observa cum proprietatea de a avea o inversă exterioară nenulă se transferă de la o matrice cu rangul determinantal t la matricea ei compusă de ordin t.

Teorema 3.3.3. *Fie $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ cu $\rho(A) = t$. Considerăm afirmațiile:*

(i) A are o inversă exterioară nenulă.

(ii) $C_t(A)$ are o inversă exterioară nenulă.

Atunci (i) $\Longrightarrow$ (ii). Dacă R este un inel semiperfect, atunci (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

Deoarece orice inel comutativ semiperfect este un produs direct finit de inele comutative locale, putem deduce imediat următorul corolar.

Corolarul 3.3.4. *Fie R un inel comutativ semiperfect, și fie $A \in M_{m,n}(R)$ cu $\rho(A) = t$. Atunci A are o inversă exterioară nenulă dacă și numai dacă $C_t(A)$ are o inversă exterioară nenulă.*

3.4 Numărarea matricelor care au o inversă exterioară nenulă

În cazul unui inel finit semiperfect, Teorema 3.3.1 ne ajută să determinăm cu ușurință numărul matricelor de dimensiune $m \times n$ peste R care au o inversă exterioară nenulă, pe care îl vom nota cu $VO(M_{m,n}(R))$.

Propoziţia 3.4.1. *Fie R un inel comutativ semiperfect, să zicem că $R = R_1 \times \cdots \times R_s$ este un produs de inele comutative locale finite. Atunci:*

$$VO(M_{m,n}(R)) = \prod_{k=1}^{s} |M_{m,n}(R_k)| - \prod_{k=1}^{s} |M_{m,n}(\mathrm{rad}(R_k))|.$$

În cele ce urmează vom număra matricele care au o inversă exterioară nenulă peste algebre grupale finite $F_q[G]$, unde F_q este un corp cu q elemente și G este un grup cu l elemente.

Propoziţia 3.4.2. *Fie G un grup cu l elemente, și fie F_q un corp cu q elemente astfel încât* $\mathrm{char}(F_q)$ *nu divide l. Atunci:*

(i) $VO(M_{m,n}(F_q[G])) = \prod_{k=1}^{s} q_k^{mnn_k^2} - 1$.

(ii) Dacă G este abelian, atunci $VO(M_{m,n}(F_q[G])) = \prod_{k=1}^{s} q^{mne_d a_d} - 1$.

În final vom considera cazul mai interesant al unui grup *ciclic*, G, cu l elemente, adică $G \cong \mathbb{Z}_l$.. De data aceasta vom avea o formulă pentru numărul matricelor de dimensiune $m \times n$ peste $F_q[G]$ care au o inversă exterioară nenulă dacă algebra grupală $F_q[G]$ nu este semisimplă.

Propoziţia 3.4.3. *Fie $l \geq 2$ un număr întreg și fie F_q un corp finit cu q elemente. Scriem $x^l - 1 = p_1(x)^{r_1} \cdots p_s(x)^{r_s}$ cu polinoamele distincte ireductibile $p_1(x), \ldots, p_s(x) \in F_q[x]$ respectiv cu gradele $d_1, \ldots, d_s$, și numerele întregi pozitive $r_1, \ldots, r_s$. Atunci:*

$$VO(M_{m,n}(F_q[\mathbb{Z}_l])) = \prod_{k=1}^{s} q_k^{r_k mn} - \prod_{k=1}^{s} q_k^{(r_k-1)mn},$$

unde $q_k = q^{d_k}$ pentru orice $k \in \{1, \ldots, s\}$.

3.5 Inverse exterioare în inele de matrice formale triunghiulare

În această secțiune vom vedea cum se comportă proprietatea de a avea o inversă exterioară nenulă relativ la inele de matrice formale triunghiulare.

Teorema 3.5.1. *Fie R și S inele oarecare și fie M un R-S-bimodul. Atunci $\begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ are o inversă exterioară $\begin{pmatrix} b_1 & y \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ dacă și numai dacă $a_1 \in R$ are inversa exterioară $b_1 \in R$ și $a_2 \in S$ are inversa exterioară $b_2 \in S$. Mai mult, $\begin{pmatrix} b_1 & y \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ este nenulă dacă și numai dacă cel puțin una dintre b_1 și b_2 este nenulă.*

Folosind Teorema 3.5.1 putem imediat număra matricele care au o inversă exterioară nenulă în inele de matrice formale triunghiulare.

Teorema 3.5.2. *Fie R și S inele finite oarecare, și fie M un R-S-bimodul finit. Fie* $\mathrm{ovnr}(R)$ *și* $\mathrm{ovnr}(S)$ *mulțimile de elemente din R, respectiv S care au o inversă exterioară nenulă. Atunci numărul matricelor din $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ care au o inversă exterioară nenulă este*

$$|R| \cdot |S| \cdot |M| - (|R| - |\mathrm{ovnr}(R)|) \cdot (|S| - |\mathrm{ovnr}(S)|) \cdot |M|.$$

Capitolul 4

Aplicații

Vom folosi rezultatele anterioare legate de matrice regulare von Neumann, matrice regulare tari și matrice care au o inversă exterioară nenulă ca să dezvoltăm aplicații la generalizări ale acestor concepte, numite matrice von Neumann locale, von Neumann locale tari și von Neumann locale exterioare. Printre alte proprietăți, vom arăta că matricea compusă de ordin t a unei matrice cu rangul determinantal t peste un inel comutativ local este von Neumann locală tare, iar fiecare matrice peste un inel semiperfect oarecare este von Neumann locală exterioară. Exceptând rezultatele citate, toate celelalte rezultate sunt originale și majoritatea sunt incluse în lucrarea [26].

4.1 Matrice von Neumann locale

Contessa [29] a introdus inelele *von Neumann locale* ca fiind inelele R cu proprietatea că a sau $1-a$ este regular von Neumann pentru orice $a \in R$. Evident, orice inel regular von Neumann și orice inel local este von Neumann local. De asemenea, orice inel von Neumann local este un inel exchange. Inelele von Neumann locale au fost studiate și de Abu Osba, Henriksen și Alkam [1], și Anderson și Badawi [4], care au considerat definiția lor pe elemente. Astfel, un element $a \in R$ se numește *von Neumann local* dacă a sau $1 - a$ este von Neumann regular. Evident, orice element regular von Neumann este von Neumann local.

În particular, o matrice $A \in M_n(R)$ este von Neumann locală dacă A sau $I_n - A$ este regulară von Neumann. Vom arăta că există numeroase matrice von Neumann locale.

Teorema 4.1.1. *Fie R un inel comutativ local, și fie $A \in M_n(R)$ cu $\rho(A) \leq 1$. Atunci A este von Neumann locală.*

Corolarul 4.1.2. *Fie R un inel comutativ local, și fie $A \in M_n(R)$ cu $\rho(A) = t$. Atunci $C_t(A)$ este von Neumann locală.*

Folosind caracterizarea noastră despre matrice regulare von Neumann, vom deduce imediat caracterizarea matricelor von Neumann locale.

Teorema 4.1.3. *Fie R un inel comutativ local, și fie $A \in M_n(R)$ cu $\rho(A) = t$ și $\rho(I_n - A) = s$. Atunci următoarele sunt echivalente:*

(1) A este von Neumann locală.

(2) $C_t(A)$ *sau* $C_s(I_n - A)$ *este regulară von Neumann.*

(3) $A = 0_n$ *sau* A *are o submatrice inversabilă de dimensiune* $t \times t$*-sau* $A = I_n$ *sau* $I_n - A$ *are o submatrice inversabilă de dimensiune* $s \times s$.

În continuare vom caracteriza matricele von Neumann locale de dimensiune 2×2 peste inele comutative locale, doar din punct de vedere al determinanților.

Teorema 4.1.4. *Fie* R *un inel comutativ local, și fie* $A \in M_2(R)$. *Atunci următoarele sunt echivalente:*

(1) A *este von Neumann locală.*

(2) $\det(A) \in U(R) \cup \{0\}$ *sau* $\det(I_2 - A) \in U(R) \cup \{0\}$.

Dacă R *nu este corp, atunci sunt mai departe echivalente cu:*

(3) $\det(A) \notin \mathrm{rad}(R) \setminus \{0\}$ *sau* $\det(I_2 - A) \notin \mathrm{rad}(R) \setminus \{0\}$.

(4) $\det(A) \in U(R) \cup \{0\}$ *sau* $1 - \mathrm{Tr}(A) \in U(R)$.

Exemplul 4.1.5. Matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_4)$ este von Neumann locală (deoarece $I_2 - A$ este inversabilă), dar nu este regulară von Neumann conform Teoremei 1.4.2.

Spre deosebire de cazul regularității von Neumann, proprietatea de a fi von Neumann locală nu se comportă bine relativ la produse directe (a se vedea [1, p.2644]). Conform [1, Theorem 3.1], un produs direct $R = \prod_{k \in K} R_k$ este von Neumann local dacă și numai dacă există $l \in K$ astfel încât R_l este von Neumann local și R_k este regular von Neumann pentru orice $k \in K \setminus \{l\}$. În continuare vom da un rezultat referitor la elemente, a cărui versiune comutativă a fost dată de Anderson și Badawi [4, Theorem 5.1]. Notăm cu $\mathrm{vnr}(R)$ (respectiv $\mathrm{vnl}(R)$) mulțimea elementelor regulare von Neumann (respectiv von Neumann locale) ale inelului R.

Teorema 4.1.6. *Fie* $R = \prod_{k \in K} R_k$ *un produs direct de inele oarecare. Atunci* $\mathrm{vnl}(R) = \prod_{k \in K} \mathrm{vnl}(R_k)$ *dacă și numai dacă* $\mathrm{vnl}(R_k) = \mathrm{vnr}(R_k)$ *pentru toate mai puțin un* $k \in K$. *În particular,* R *este un inel a von Neumann local ring dacă și numai dacă există cel puțin un* $k \in K$ *astfel încât* R_k *nu este regular von Neumann, dar* R_k *este von Neumann local.*

4.2 Matrice von Neumann locale tari

Considerăm specializarea noțiunii de element von Neumann local al unui inel. Astfel, un element $a \in R$ se numește *von Neumann local tare* dacă a sau $1 - a$ este regular tare. Evident, orice element regular tare este von Neumann local tare, și orice element von Neumann local tare este un element von Neumann local. În particular, o matrice $A \in M_n(R)$ este von Neumann locală tare dacă A sau $I_n - A$ este regulară tare. Observăm că noțiunea noastră de element von Neumann local tare este diferită de cea cu același nume din [1].

În continuare vom îmbunătăți anumite rezultate de la matrice von Neumann locale.

Teorema 4.2.1. *Fie R un inel comutativ local, și fie $A \in M_n(R)$ cu $\rho(A) \leq 1$. Atunci A este von Neumann locală tare.*

Corolarul 4.2.2. *Fie R un inel comutativ local, și fie $A \in M_n(R)$ cu $\rho(A) = t$. Atunci $C_t(A)$ este von Neumann locală tare.*

Rezultatele noastre anterioare cu privire la matricele regulare tari pot fi imediat aplicate ca să deducem proprietăți asemănătoare la matricele von Neumann locale tari.

Teorema 4.2.3. *Fie R un inel comutativ local, și fie $A \in M_n(R)$ cu $\rho(A) = t$ și $\rho(I_n - A) = s$. Atunci următoarele sunt echivalente:*

(1) A este von Neumann locală tare.

(2) $C_t(A)$ sau $C_s(I_n - A)$ este regulară tare.

(3) $A = 0_n$ sau $c_t \in U(R)$ sau $A = I_n$ sau $d_s \in U(R)$, unde $c_t = (-1)^t \mathrm{Tr}(C_t(A))$ și $d_s = (-1)^s \mathrm{Tr}(C_s(I_n - A))$.

În continuare vom arăta că matricele von Neumann locale și von Neumann locale tari coincid în cazul matricelor 2×2 peste inele comutative locale.

Teorema 4.2.4. *Fie R un inel comutativ local, și fie $A \in M_2(R)$. Atunci A este von Neumann locală tare dacă și numai dacă A este von Neumann locală.*

Exemplul 4.2.5. Conform Teoremei 4.2.4, ca să găsim un exemplu de matrice von Neumann locală, care să nu fie von Neumann locală tare, peste un inel comutativ local trebuie să căutăm o matrice cu dimensiunea mai mare de 2×2. Vom lua

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_4).$$

Deoarece $\rho(A) = 2$ și A are o submatrice inversabilă de dimensiune 2×2, A este regulară von Neumann din Teorema 1.4.2, și deci, A este von Neumann locală. Deoarece suma submatricelor diagonale de dimensiune 2×2 ale lui A este 0, A nu este regulară tare, din Teorema 2.1.5. Considerăm

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\rho(I_3 - A) = 3$ și $\det(I_3 - A) = 2 \notin U(\mathbb{Z}_4)$, $I_3 - A$ nu este regulară tare din Teorema 2.1.5, și deci, A nu este von Neumann locală tare.

Am văzut deja că în general proprietatea de a fi von Neumann local nu se comportă bine în raport cu produsele directe, și am dat Teorema 4.1.6. Ne confruntăm cu aceeași problemă la elementele von Neumann locale tari în inele oarecare R. Vom nota cu $\mathrm{svnr}(R)$ (respectiv $\mathrm{svnl}(R)$) mulțimea elementelor regulare tari (respectiv von Neumann locale tari) din R.

Teorema 4.2.6. *Fie $R = \prod_{k \in K} R_k$ un produs direct de inele oarecare. Atunci $\mathrm{svnl}(R) = \prod_{k \in K} \mathrm{svnl}(R_k)$ dacă și numai dacă $\mathrm{svnl}(R_k) = \mathrm{svnr}(R_k)$ pentru cel mult un $k \in K$. În particular, R este un inel von Neumann local tare dacă și numai dacă există cel mult un $k \in K$ astfel încât R_k nu este regular tare, dar R_k este von Neumann local tare.*

4.3 Matrice von Neumann locale exterioare

Generalizând elementele von Neumann locale ale unui inel, spunem că un element $a \in R$ se numește *von Neumann local exterior* dacă a sau $1-a$ are o inversă exterioară nenulă. Un element care are o inversă von Neumann locală exterioară se va numi și element *regular von Neumann exterior*. Evident, orice element regular von Neumann exterior va fi von Neumann local exterior, iar orice element von Neumann local va fi von Neumann local exterior. În particular, o matrice $A \in M_n(R)$ este von Neumann locală exterioară dacă A sau $I_n - A$ este regulară von Neumann exterioară.

În Teorema 3.3.1 am dat o caracterizare a matricelor care au o inversă exterioară nenulă peste un inel semiperfect. O putem folosi acum ca să obținem următorul rezultat.

Teorema 4.3.1. *Fie R un inel semiperfect. Atunci orice matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ este von Neumann locală exterioară.*

Exemplul 4.3.2. (1) Vom da mai întâi un exemplu de matrice von Neumann locală exterioară peste un inel care nu este semiperfect. Considerăm inelul semilocal $R = \mathbb{Z}_{(2)} \cap \mathbb{Z}_{(3)}$ (care nu este semiperfect), și matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(R)$. Prin calcule directe se arată că A nu are o inversă exterioară nenulă. Dar se vede că $B(I_2 - A)B = B$ pentru $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(R)$, așadar $I_2 - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ are o inversă exterioară nenulă, și deci A este von Neumann locală exterioară.

(2) Matricea A de mai sus poate fi și un exemplu de matrice von Neumann locală exterioară, care nu este von Neumann locală. Într-adevăr, prin calcule directe se arată că nici A și nici $I_2 - A$ nu este regulară von Neumann (sau observăm că primele ideale determinantale ale lui A și $I_2 - A$ nu sunt generate de idempotenți și folosim Teorema 1.4.1). Așadar A nu este von Neumann locală.

Teorema 4.3.3. *Fie R un inel local oarecare și fie $A \in M_n(R)$. Atunci următoarele sunt echivalente:*

(1) A este von Neumann locală exterioară.

(2) A sau $I_n - A$ are un element inversabil.

(3) A sau $I_n - A$ are un element cu o inversă exterioară nenulă.

(4) $A \notin M_n(\mathrm{rad}(R))$ sau $I_n - A \notin M_n(\mathrm{rad}(R))$.

În final, vom vedea cum se comportă proprietatea de a fi von Neumann locală exterioară relativ la produse directe. Notăm $\mathrm{ovnr}(R)$ (respectiv $\mathrm{ovnl}(R)$) mulțimea elementelor regulare von Neumann exterioare (respectiv von Neumann locale exterioare) ale unui inel R.

Teorema 4.3.4. *Fie $R = \prod_{k \in K} R_k$ un produs direct de inele oarecare. Atunci $(a_k)_{k \in K} \in \mathrm{ovnl}(R)$ dacă și numai dacă există un $j \in K$ astfel încât $a_j \in \mathrm{ovnl}(R_j)$.*

Apendix

Definițiile unei matrice regulare von Neumann, regulare tari sau regulare exterioare se folosesc de găsirea unei matrice B care să satisfacă anumite proprietăți relativ la A. De aceea, pentru a verifica regularitatea von Neumann, regularitatea tare și regularitatea exterioară folosind definițiile poate fi un proces de durată, partea cea mai dificilă fiind găsirea unei matrice convenabile B. Pe de altă parte, rezultatele noastre oferă caracterizări intrinseci ale acestor trei noțiuni, care pot fi dezvoltate în algoritmi mai eficienți. Vom ilustra acest lucru pentru matrice peste inele de clase de resturi.

Algoritmii pentru matricele von Neumann locale tari și von Neumann locale peste inelele de clase de resturi se pot deduce imediat din aceștia trei de bază. Am văzut deja că orice matrice peste inele de clase de resturi este von Neumann locală exterioară.

Folosindu-ne de algoritmii noștri, am obținut exemple pentru matrice de dimensiuni mai mari.

Bibliografie

[1] E. Abu Osba, M. Henriksen and O. Alkam, *Combining local and regular von Neumann rings*, Comm. Algebra **32** (2004), 2639–2653.

[2] A. Alahmadi, S. K. Jain and A. Leroy, *Regular elements determined by generalized inverses*, J. Algebra Appl. **18** (2019), 1950128.

[3] O. Alkam and E. Abu Osba, *On the regular elements in* $\mathbb{Z}_n$, Turkish J. Math. **32** (2008), 31–39.

[4] D. F. Anderson and A. Badawi, *Von Neumann regular and related elements in commutative rings*, Algebra Colloq. **19** (Spec 1) (2012), 1017–1040.

[5] D. D. Anderson, D. Bennis, B. Fahid and A. Shaiea, *On n-trivial extensions of rings*, Rocky Mount. J. Math. **47** (2017), 2439–2511.

[6] R. F. Arens and I. Kaplansky, *Topological representations of algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 457–481.

[7] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[8] G. Azumaya, *Strongly π-regular rings*, J. Faculty Sci., Hokkaido University, Ser. 1, Mathematics **13** (1954), 34–39.

[9] G. K. Bakshi, O. Broche Cristo, A. Herman, A. Konovalov, S. Maheshwary, A. Olivieri, G. Olteanu, Á. del Río and I. Van Gelder. Wedderga – Wedderburn Decomposition of Group Algebras, Version 4.10.0; 2020 (`http://www.cs.st-andrews.ac.uk/~alexk/wedderga`).

[10] R. B. Bapat, K. P. S. B. Rao and K. M. Prasad, *Generalized inverses of matrices over integral domains*, Linear Algebra Appl. **140** (1990), 181–196.

[11] E. A. Bender, *On Buckhiester's enumeration of $n \times n$ matrices*, J. Combin. Theory Ser. A **17** (1974), 213–214.

[12] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, Canadian Mathematical Society, Springer, New York, 2003.

[13] K. P. S. Bhaskara Rao, *On generalized inverses of matrices over integral domains*, Linear Algebra Appl. **49** (1983), 179-189.

[14] K. P. S. Bhaskara Rao, *The Theory of Generalized Inverses over Commutative Rings*, Taylor and Francis, London, New York, 2002.

[15] K. P. S. Bhaskara Rao, I.-E. Chiru and S. Crivei, *A note on regular von Neumann matrices*, preprint, 2024.

[16] G. F. Birkenmeier, H. E. Heatherly, J. Y. Kim and J. K. Park, *Triangular matrix representations*, J. Algebra **230** (2000), 558–595.

[17] D. Bollman and H. Ramírez, *On the enumeration of matrices over finite commutative rings*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 1019–1023.

[18] W. C. Brown, *Matrices over Commutative Rings*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1993.

[19] A. Castillo-Ramirez and M. Gadouleau, *Von Neumann regular cellular automata.* 23th International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems (AUTOMATA), Jun 2017, Milan, Italy. pp. 44–55.

[20] J. Chen and Y. Zhou, *Morphic rings as trivial extensions*, Glasgow Math. J. **47** (2005), 139–148.

[21] H. Cheraghpour and N. M. Ghosseiri, *On the idempotents, nilpotents, units and zero divisors of finite rings*, Linear Multilinear Algebra **67** (2019), 327–336.

[22] A. Y. M. Chin, *A note on strongly π-regular rings*, Acta Math. Hungar. **102** (2004), 337–342.

[23] I.-E. Chiru, *Strong inner and strong reflexive inverses in semiprime rings*, Mathematica **65 (88)** (2023), 215–218.

[24] I.-E. Chiru and S. Crivei, *Von Neumann regular matrices revisited*, Linear Multilinear Algebra **71** (2023), 1352–1363.

[25] I.-E. Chiru and S. Crivei, *Matrices having nonzero outer inverses*, Electron. J. Linear Algebra **40** (2024), 299–306.

[26] I.-E. Chiru and S. Crivei, *Von Neumann local matrices*, Mathematica **65 (88)** (2023), 219–228.

[27] I.-E. Chiru, S. Crivei and G. Olteanu, *Strongly regular matrices revisited*, Linear Algebra Appl. **658** (2023), 233–249.

[28] K. Conrad, *Universal identities.*

`https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/linmultialg/univid.pdf`

[29] M. Contessa, *On certain classes of MP rings*, Comm. Algebra **12** (1984), 1447–1469.

[30] H. H. Crapo, *The Möbius function of a lattice*, J. Combin. Theory **1** (1966), 126–131.

[31] S. Crivei, M. T. Koşan and T. Yildirim, *Regular morphisms in abelian categories*, J. Algebra Appl. **18** (2019), 1950180.

[32] S. Crivei and A. Kör, *Rickart and dual Rickart objects in abelian categories*, Appl. Categor. Struct. **24** (2016), 797–824.

[33] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, A. Tudorache and L. Dăuş, *Relative regular objects in categories*, Appl. Categor. Struct. **14** (2006), 567–577.

[34] D. Ellerman, *The number of direct-sum decompositions of a finite vector space.* arXiv:1603.07619

[35] M. Filipowicz and M. Kępczyk, *A note on zero-divisors of commutative rings*, Arab. J. Math. **1** (2012), 191–194.

[36] J. D. Fullton, *Generalized inverses of matrices over a finite field*, Discrete Math. **21** (1978), 23–29.

[37] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.1; 2021. (`https://www.gap-system.org`)

[38] K. R. Goodearl, *Von Neumann Regular Rings*, Pitman Publishing, London, San Francisco, Melbourne, 1979.

[39] A. Haghany and K. Varadarajan, *Study of formal triangular matrix rings*, Comm. Algebra **27** (1999), 5507–5525.

[40] R. E. Hartwig and P. Patrício, *Invariance under outer inverses*, Aequat. Math. **92** (2018), 375–383.

[41] C. Huh, N. K. Kim and Y. Lee, *Examples of strongly π-regular rings*, J. Pure Appl. Algebra **189** (2004), 195–210.

[42] S.-G. Hwang, *The reduced Cayley–Hamilton equation for a pair of commuting matrices*, Linear Algebra Appl. **436** (2012), 2078–2083.

[43] F. Kasch and A. Mader, *Regularity and substructures of Hom*, Comm. Algebra **34** (2006), 1459–1478.

[44] D. Khurana, T. Y. Lam and P. P. Nielsen, *An ensemble of idempotent lifting hypotheses*, J. Pure Appl. Algebra **222** (2018), 1489–1511.

[45] D. Khurana and P. P. Nielsen, *Perspectivity and regular von Neumannity*, Comm. Algebra **49** (2021), 5483–5499.

[46] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Ring Theory*, Springer, New York, 1991.

[47] *Lectures on Modules and Rings*, Springer, New York, 1999.

[48] T. Y. Lam, *Exercises in Classical Ring Theory*, Springer, New York, 2003.

[49] T. Y. Lam and R. G. Swan, *Symplectic modules and regular von Neumann matrices over commutative rings*. In: D. Van Huynh, S. R. López-Permouth (eds), Advances in Ring Theory, Trends in Mathematics, pp. 213–227, Birkhäuser, Basel, 2010.

[50] T.-K. Lee, *A note on inner and reflexive inverses in semiprime rings*, J. Algebra Appl. **19** (2020), 2050197.

[51] T.-K. Lee, *Inclusion properties of generalized inverses in semiprime rings*, J. Algebra Appl. **20** (2021) 2150057.

[52] B. R. McDonald, *Finite Rings with Identity*, Marcel Dekker, New York, 1974.

[53] B. R. McDonald, *Linear Algebra over Commutative Rings*, Marcel Dekker, New York, Basel, 1984.

[54] J. Morgado, *A property of the Euler function concerning the integers which are regular modulo n*, Port. Math. **33** (1974), 185–191.

[55] K. E. Morrison, *Integer sequences and matries over finite fields*, J. Integer Seq. **9** (2006), Article 06.2.1.

[56] T. D. Nguyen and V. H. Dang, *Quasi-inverse based cryptography*. In: B. Murgante et al. (eds) Computational Science and Its Applications – ICCSA 2013, Lecture Notes in Computer Science, vol. 7974, Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 629–642.

[57] W. K. Nicholson, *Lifting idempotents and exchange rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **229** (1977), 269–278.

[58] W. K. Nicholson, *Strongly clean rings and Fitting's lemma*, Comm. Algebra **27** (1999), 3583–3592.

[59] W. K. Nicholson and E. Sánchez Campos, *Rings with the dual of the isomorphism theorem*, J. Algebra **271** (2004), 391–406.

[60] W. K. Nicholson and Y. Zhou, *Strong lifting*, J. Algebra **285** (2005), 795–818.

[61] D. G. Northcott, *Finite Free Resolutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[62] The On-line Encyclopedia of Integer Sequences, Sequence A295071: The number of regular von Neumann elements in the ring of 2×2-matrices over $\mathbb{Z}_n$. oeis.org

[63] J. Overbey, W. Traves and J. Wojdylo, *On the keyspace of the Hill cipher*, Cryptologia **29** (2005), 59–72.

[64] C. Polcino Milies and S. K. Sehgal, *An Introduction to Group Rings*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2002.

[65] K. M. Prasad, *Generalized inverses of matrices over commutative rings*, Linear Algebra Appl. **211** (1994), 35–52.

[66] K. M. Prasad, N. Nandini and P. D. Shenoy, *Rank and dimension functions*, Electron. J. Linear Algebra **49** (2015), 144–155.

[67] T. R. Savage, *Generalized inverses in regular rings*, Pacific J. Math. **87** (1980), 455–466.

[68] J. Segercrantz, *Improving the Cayley-Hamilton equation for low-rank transformations*, Amer. Math. Monthly **99** (1992), 42–44.

[69] L. Tóth, *Regular integers modulo n*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. **29** (2008), 263–275.

[70] J. von Neumann, *On regular rings*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **22** (1936), 707–712.

[71] S. E. Wright, *Constructing and counting regular triangular matrices*, Linear Multilinear Algebra **70** (2022), 3936–3943.

[72] X. Yang, *On rings whose finitely generated left ideals are left annihilators of an element.* arXiv:1002.3193