



UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Aplicațiile modelului de Creștere Locală și
Resetare Globală (LGGR) pentru
probleme socio-economice și biologice

Autor:

KELEMEN SZABOLCS

Conducători științifici:

Prof. Dr. NÉDA Zoltán
Prof. Dr. NAGY Ladislau

Departmentul de Fizică
Școala Doctorală de Fizică

Cluj-Napoca, România
Februarie, 2024

APLICAȚIILE MODELULUI DE CREȘTERE LOCALĂ ȘI RESETARE GLOBALĂ (LGGR)
PENTRU PROBLEME SOCIO-ECONOMICE ȘI BIOLOGICE

Abstract

Dinamica internă a sistemelor complexe apare din interacțiunea numeroaselor componente ghidate de reguli caracteristice ale sistemului. Sistemele biologice, economice și sociale, în special, prezintă aceste interacțiuni inerente printre numeroasele lor componente. Un tip particular de dinamică adesea observată este aceea definită de creșterea unidirecțională și procesele de resetare probabilistică. Datorită complexității emergente, studiul unor astfel de sisteme necesită instrumentele adecvate de analiză. Această teză oferă o prezentare cuprinzătoare și o analiză a fenomenelor din lumea reală prin prisma unei abordări de câmp mediu întemeiată pe o ecuație master, modelul Local Growth and Global Reset (LGGR). Un obiectiv central este de a oferi o prezentare pedagogică, furnizând o prezentare detaliată a ecuațiilor master generale și a proceselor Markov, și stabilind fundația matematică pentru aplicațiile ulterioare ale modelului LGGR.

Studiul cuprinde patru studii de modelare, fiecare aplicată fenomenelor observate în sisteme socio-economice și biologice. Secțiunea socio-economică a tezei explorează distribuțiile de avere în țările lider și într-o mică comună românească. Primul studiu analizează distribuția a averii în Statele Unite, Rusia și Franța. Modelul capturează dinamica averii, inclusiv valorile negative, și depășește modelele existente. Al doilea studiu aplică modelul LGGR pentru a explica distribuția averii într-o comună transilvăneană, dezvăluind schimbări în diferite sisteme economice, în timpul comunismului și al erei pieței libere. Un al treilea studiu, care se concentrează tot pe sistemele socio-economice, explorează dinamica Jackpot-urilor la loterie. Analizând șase loterii, modelul LGGR capturează evoluția emergentă a valorilor Jackpot influențată de comportamentul jucătorilor, regulile loteriei și ratele de resetare probabilistice. Ultimul studiu abordează domeniul sistemelor biologice, examinând modelele de diversitate în dimensiunile arborilor din medii forestiere cu frunze căzătoare. Confirmând distribuția Gamma pentru anumite specii de arbori cu frunze căzătoare, modelul demonstrează universalitatea statistică în cadrul taxonomiei și ecosistemelor.

Teza demonstrează versatilitatea modelului LGGR în înțelegerea fenomenelor complexe din sistemele socio-economice și biologice. Succesul în modelarea fenomenelor diverse sugerează potențialul său pentru o aplicabilitate extinsă în diverse domenii științifice.

Cuvinte cheie: sisteme complexe, creștere locală, reset global, diversitate biologică, fenomene socio-economice

Abstract	i
Acknowledgements	ii
Contents	iv
I Introduction and presentation of the Local Growth and Global Reset Model	1
1 Introduction	3
1.1 The general form of the master equation	5
1.2 Markov processes	7
1.2.1 Further comments on the universality of master equations: classical diffusion	9
1.3 Motivation of the thesis	14
2 The Local Growth and Global Reset (LGGR) process	15
2.1 Local Growth and Reset among discrete states	16
2.2 Local Growth and Reset in continuous states space	18
2.3 Remarks on the universality of the LGGR model and its stationary solution	19
II Dynamical equilibrium in social systems	22
3 Distribution of wealth in the society	24
3.1 Introduction to social inequality based on wealth	25
3.1.1 Experimental study and challenges	27
4 Wealth in modern societies	29
4.1 Comparison with experimental wealth distributions for the USA, Russia, and France	33
4.2 Remarks and discussions	36
4.2.1 Comparison with the model proposed by Bouchaud and Mézard	36
4.2.2 Remarks on the kernel functions	38
4.2.3 Remarks on the conservation of total wealth and population	39
4.2.4 General discussions	40
4.3 Chapter summary	41
5 Wealth distribution within a small community	42
5.1 Overview and motivation of the study	43
5.2 Common inequality measures	44
5.2.1 Lorenz curve	45
5.2.2 Pareto point	46
5.2.3 Gini index	46
5.3 Collected wealth data	47
5.4 Wealth distributions through the LGGR model	53
5.4.1 Wealth distribution in controlled economic systems	54
5.4.2 Wealth distribution in the free market	55
5.5 Contextualization and discussion	56
5.6 Chapter summary	58

6	Stationary LGGR dynamics of Lotteries	60
6.1	Introduction	61
6.2	Model applicability and Jackpot value time-series data	63
6.3	Modeling the growth and reset dynamics	65
6.3.1	The growth rate	67
6.3.2	The reset rate	68
6.3.3	Stationary probability density function	71
6.4	Discussion	72
6.5	Chapter summary	74
III	Dynamical equilibrium in biological systems	76
7	Stationary LGGR dynamics in biological systems	78
7.1	Introduction and motivation of the study	79
7.2	Study sites and experimental tree size distributions	81
7.2.1	Experimental tree size distributions	85
7.3	Modeling through the LGGR framework	86
7.3.1	The growth rate	88
7.3.2	The reset and diversification rates	89
7.3.3	Stationary size distribution	91
7.4	Discussions and additional results	92
7.4.1	Consistency of the modeling methodology	94
7.4.2	Further evidence of universality	95
7.5	Chapter summary	96
8	General summary	99
	List of Publications	102
	Bibliography	116

Abstract	i
Cuprins	iv
1 Introducere	1
1.1 Forma generală a ecuației master	1
1.1.1 Procesele Markov	2
2 Modelul de Creștere Locală și Resetare Globală (LGGR)	3
3 Distribuția averii în societate	5
3.1 Introducere în inegalitatea socială bazată pe avere	5
3.1.1 Studiu experimental și provocări	6
4 Avearea în societățile moderne	7
4.1 Validarea modelului pentru SUA, Rusia și Franța	8
4.2 Remarci despre ratele alese	10
4.3 Discuții generale și concluzii	10
5 Distribuția averii într-o comunitate mică	11
5.1 Prezentarea generală și motivația studiului	11
5.2 Date colectate despre avere	12
5.3 Distribuțiile averii prin modelul LGGR	13
5.4 Inegalitatea socială prin măsurile cunoscute	15
5.5 Rezumatul capitolului	15
6 Dinamica LGGR staționară a loteriilor	16
6.1 Aplicabilitatea modelului și seriile temporale ale valorii Jackpot-ului . .	17
6.2 Modelarea dinamicii de creștere și resetare	18
6.2.1 Funcția de densitate a probabilității staționare	20
6.3 Discuții	20
7 Dinamica LGGR staționară în sistemele biologice	21
7.1 Introducere și motivația studiului	21
7.2 Distribuții experimentale ale dimensiunilor copacilor	22
7.3 Modelare prin intermediul modelului LGGR	22
7.4 Discuții	25
8 Concluzii generale	26
Diseminarea rezultatelor	28
Bibliografie Selectată	31

INTRODUCERE

Fizica a suferit o evoluție semnificativă în ultimele două secole, cu fizicienii abordând tot mai mult sisteme complexe care sfidează intuiția convențională [1–4]. Această schimbare către confruntarea cu complexitatea a condus la un caracter interdisciplinar puternic în cadrul domeniului, cuprinzând biologia [5], chimia [6], economia [7], și științele sociale [8]. În centrul fizicii stă misiunea de a elucida principiile fundamentale care guvernează comportamentul materiei și al energiei, adesea realizată prin modelarea matematică. Studiul sistemelor intricate a condus la dezvoltarea unor modele matematice elegante, în special în înțelegerea fenomenelor probabilistice. De exemplu, descoperirea mișcării Browniene de către Robert Brown în 1827 a stârnit interesul pentru subtilitățile probabilistice care stau la baza fenomenelor aparent haotice [9]. Einstein, Schmoluchowski și Langevin au fost printre primii care au reușit să modeleze cu succes mișcarea Browniană, deschizând drumul către ecuația Fokker-Planck și ecuațiile evolutive ulterioare care descriu evoluția sistematică probabilistică [10]. În mijlocul diferitelor paradigme de modelare, abordarea fenomenologică a ecuațiilor master a apărut ca un actor central în fizica statistică, descriind sisteme guvernate de procese dinamice probabilistice [10]. Einstein, Furry și Feller, printre alții, au aplicat ecuațiile master la diverse fenomene, inclusiv radiația corpului negru, trecerea electronilor prin materiale și dinamica populației [10, 11]. În timp ce cadru ecuațiilor master a devenit larg cunoscut în fizica statistică, termenul "ecuație master" a fost folosit pentru prima dată în 1940 de către Nordsieck și colab. [12]. De atunci, ecuațiile master au fost aplicate în diverse domenii de cercetare, oferind perspective profunde asupra evoluției probabilistice a sistemelor intricate [13].

1.1 Forma generală a ecuației master

În cazul în care sistemul are un număr finit de stări interne discrete și elementele sistemului pot să sara probabilistic și independent de fiecare altul în timp dintr-o stare în alta, schimbarea probabilității $P_n(t)$ luând limita continuă a parametrului de timp ($\Delta t \rightarrow 0$) este dată de Ecuația 1.1. Aceasta este forma generală a ecuației master cu timp continuu și spațiu de stare discret. Pentru a oferi câteva exemple, aceste stări ar putea reprezenta diferite poziții, nivele de energie sau alte caracteristici ale sistemului.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \sum_{\{m\}} [w_{m,n}P_m(t) - w_{n,m}P_n(t)]. \quad (1.1)$$

unde $P_n(t)$ denotă probabilitatea de ocupare a stării n la momentul t , în timp ce $w_{n,m}$ reprezintă rata de tranziție direcționată (probabilitate pe unitate de timp) între cele două stări m și n . Ratele de tranziție ($w_{n,m}$) în acest caz sunt independente de timp. Dinamica descrisă de Ecuația 1.1 este ilustrată în Figura 1.1. Colecția ratelor de tranziție

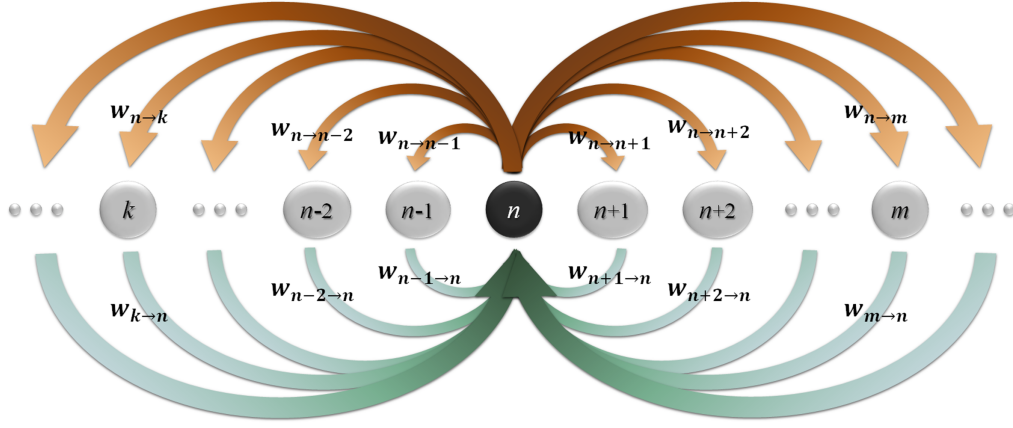


Figura 1.1: Reprezentarea schematică a dinamicii descrise de ecuația master discretă (Ecuția 1.1).

formează o matrice de tranziție $W_{n,m}$, care codifică dinamica sistemului. Probabilitatea de ocupare este dată de fracția elementelor sistemului aflate în starea n împărțită la numărul total de elemente. Prin urmare, distribuția de probabilitate $P_n(t)$ este normalizată: $\sum_{\{n\}} P_n(t) = 1$.

Ecuția master poate fi scrisă și în limita spațiului de stare continuu atunci când sistemul are un număr infinit de stări. În acest caz, Ecuția 1.1 se transformă într-o ecuație integro-diferențială scrisă în forma Ecuției 1.2 [14].

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} [w(x, y)\rho(y, t) - w(y, x)\rho(x, t)] dy, \quad (1.2)$$

În cazul continuu, însă, în locul evoluției temporale a distribuției de probabilitate $P_n(t)$, evoluția temporală a funcției de densitate a probabilității $\rho(x, t)$ este definită de Ecuția 1.2. Ratele de tranziție $w(x, y)$ sunt de asemenea independente de timp în acest caz. Funcția de densitate a probabilității trebuie, de asemenea, să fie normalizată: $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) dx = 1$.

Natura larg aplicabilă a ecuațiilor master derivă din flexibilitatea în definirea matricei de tranziție $W_{n,m}$. Această flexibilitate, însă, este limitată de faptul că în cazul în care sistemul studiat are un număr mare de stări (Ecuția 1.1), sau ratele de tranziție au forme complexe (Ecuția 1.2), ecuația master devine analitic intractabilă. Prin urmare, soluțiile analitice sunt disponibile doar într-un număr foarte limitat de cazuri.

1.1 Procesele Markov

Când discutăm despre ecuațiile master, este crucial să introducem și procesele Markov, deoarece acestea sunt strâns legate. Procesele Markov, introduse de Andrey Markov la începutul secolului al XX-lea, servesc ca fundament pentru sistemele studiate utilizând ecuații master. Un proces Markov este caracterizat de proprietatea sa fără memorie, unde starea următoare a sistemului depinde doar de starea sa curentă. Dacă se descrie evoluția în timp a sistemului prin stări discrete $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ care pot fi atinse secvențial, atunci proprietatea Markov poate fi descrisă folosind probabilitatea condiționată $P(x_n \| x_{n-1}, \dots, x_0)$ că starea x_n este atinsă prin stările $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$: $P(x_n, t \| x_{n-1}, t - \Delta t, \dots, x_0, 0) = P(x_n, t \| x_{n-1}, t - \Delta t)$. Cu toate acestea, probabilitatea condiționată $P(x_n, t \| x_{n-1}, t - \Delta t)$ corespunde probabilității de tranziție per

unitate de timp (Δt) pentru a sări de la starea x_{n-1} la x_n , ceea ce corespunde ratei de tranziție $w_{n,n-1}$ de la starea x_{n-1} la x_n care apare în ecuația master, Ecuația 1.1. Astfel, proprietatea fără memorie a tranzițiilor este inherent prezentă în ecuația master. Procesele Markov presupun adesea staționaritatea, în care distribuția de probabilitate a cantităților relevante rămâne constantă în timp: $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$. Această distribuție staționară, derivată din ratele de tranziție și probabilități, oferă perspective valoroase asupra dinamicii sistemului. Procesele Markov reversibile reprezintă o categorie specială în care dinamica este atât staționară, cât și satisface condiția de echilibru detaliat ($w_{n,m} \cdot P_m = w_{m,n} \cdot P_n$). Această condiție asigură o dinamică de echilibru, în care procesele înainte și înapoi prezintă distribuții de probabilitate staționare echivalente. Ergodicitatea, o proprietate esențială a lanțurilor Markov, presupune atât aperiodicitatea (pentru fiecare stare a sistemului, nu există un număr finit $k > 1$, reprezentând numărul de pași pentru care probabilitatea de a reveni la starea x_i este 1: $P^{(k)}(x_i||x_i) = 1$), cât și ireductibilitatea (posibilitatea de a ajunge în orice stare a sistemului din orice altă stare). Un lanț Markov este ergodic dacă lipsește de stări periodice și este ireductibil, permițând existența unei distribuții staționare unice peste stările sale posibile.

MODELUL DE CREȘTERE LOCALĂ ȘI RESETARE GLOBALĂ (LGGR)

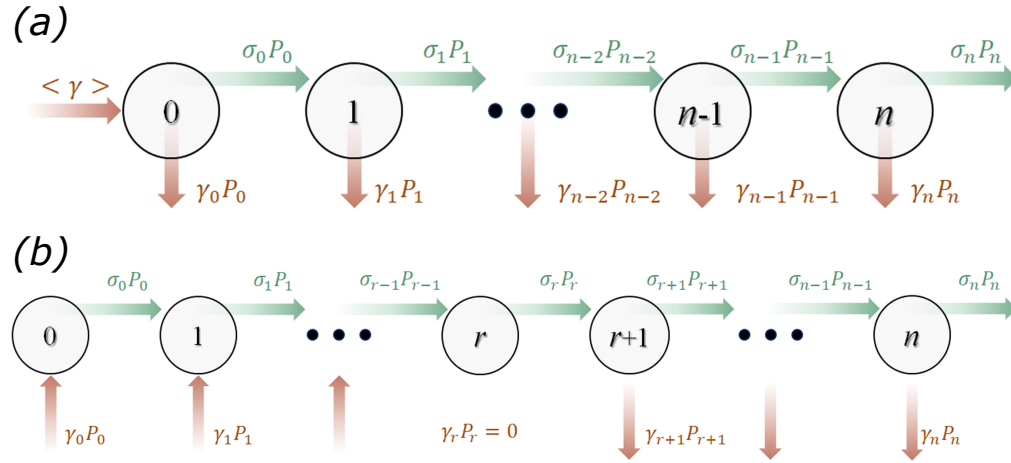


Figura 2.1: Schița procesului de creștere și resetare (a) pentru mecanismul simplu cu o rată de resetare pozitivă; (b) când rata de resetare poate fi atât pozitivă, cât și negativă ($\gamma_n < 0$ dacă $n < r$, și $\gamma_n > 0$ pentru $n > r$).

În acest capitol, prezentăm o clasă particulară de ecuații maestre care constă într-un proces de creștere unidirecțional caracterizat de rata de creștere σ_n (sau $\sigma(x)$ în cazul continuu) și un proces de resetare, caracterizat de rata de resetare γ_n (sau $\gamma(x)$) către starea de bază denumită $n = 0$, care asigură posibilitatea unei dinamici staționare. Ca rezultat al simetriei rupte, condiția echilibrului detaliat nu este satisfăcută, transformând dinamica într-un proces Markov ireversibil. Schița acestei dinamici este

reprezentată în Figura 2.1a. Modelul este cunoscut sub numele de Modelul de Creștere Locală și Resetare Globală (LGGR), denumit astfel după procesele care îl încapsulează, sau este recunoscut în mod obișnuit ca modelul Biró-Néda, numit după dezvoltatorii săi [15, 16]. Dinamica implicând creșterea persistentă urmată de resetare este un model recurent în numeroase fenomene fizice, biologice, sociale și economice. În aceste sisteme complexe, complexitatea dinamicii dă naștere la diverse distribuții de probabilitate ale cantității caracteristice. Prin alegerea corespunzătoare a formelor funcțiilor de nucleu de creștere și resetare, o gamă largă de alte tipuri de distribuții pot fi derivate analitic [16].

În majoritatea sistemelor din lumea reală, interesul nostru se află în demonstrarea sistemelor în echilibru. Prin urmare, ne propunem să modelăm fluctuațiile staționare care rezultă în distribuția caracteristică, staționară $P_n^s(\rho_s(x))$. Ratele de tranziție ($w_{m,n}$) (însemnând aici că n este starea de pornire și m este destinația tranziției) corespunzătoare proceselor discrete de creștere și resetare sunt definite ca: $w_{m,n} = \sigma_n \delta_{m,n+1} + \gamma_n \delta_{m,0}$. Utilizând forma generală a ecuației maestre (Ecuația 1.1) împreună cu aceste rate de tranziție, se obține forma ecuației maestre corespunzătoare procesului LGGR în spațiul de stare discret dată de Ecuația 2.1.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \sigma_{n-1}P_{n-1}(t) + \langle \gamma \rangle(t)\delta_{n,0} - (\sigma_n + \gamma_n)P_n(t). \quad (2.1)$$

Presupunând limita staționară (partea stângă a Ecuației 2.1 devine 0: $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$), probabilitatea P_n poate fi calculată folosind următoarea formulă [15]:

$$P_n = P_0 \frac{\sigma_0}{\sigma_n} e^{-\sum_{i=0}^n \ln(1 + \frac{\sigma_i}{\gamma_i})}. \quad (2.2)$$

Când cantitatea relevantă care caracterizează elementele sistemului se schimbă continuu, forma rezultată a ecuației de evoluție determină acum evoluția în timp a funcției de densitate a probabilității $\rho(x, t)$:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\sigma(x)\rho(x, t)] - \gamma(x)\rho(x, t) + \langle \gamma(x) \rangle(t)\delta(x). \quad (2.3)$$

Valoarea medie a ratei de resetare $\langle \gamma(x) \rangle(t)$ este calculată folosind funcția de densitate a probabilității $\rho(x, t)$: $\langle \gamma \rangle(t) = \int_0^\infty \gamma(x)\rho(x, t) dx$. Normalizarea funcției de densitate a probabilității $\int_0^\infty \rho(x, t) dx = 1$ este asigurată prin reintroducerea în sistem a unor noi elemente la starea de bază $x = 0$ prin componenta $\langle \gamma(x) \rangle(t)\delta(x)$. În condiția de staționaritate, soluția Ecuației 2.3 oferă forma generală a funcției de densitate a probabilității staționare $\rho_s(x)$ (Ecuația 2.4).

$$\rho_s(x) = \frac{\sigma(0)\rho_s(0)}{\sigma(x)} e^{-\int_0^x \frac{\gamma(u)}{\sigma(u)} du}, \quad (2.4)$$

Acesta este echivalentul continuu al Ecuației 2.2. În majoritatea cazurilor, atunci când ne confruntăm cu fenomene din lumea reală, cantitatea studiată este aproape continuă (venitul, averea, dimensiunea individului în sistemele biologice, ...). Prin urmare, în aceste cazuri, ne întoarcem la Ecuația 2.4 pentru a calcula distribuția caracteristică a sistemului. Soluțiile staționare prezentate în Ecuațiile 2.2 și 2.4 prezintă un grad ridicat de universalitate, deoarece depind exclusiv de formele funcțiilor σ_n ($\sigma(x)$) și γ_n ($\gamma(x)$) [16–19]. Rata de resetare $\gamma(x)$ permite diferențierea a două scenarii dinamice unice. Cel mai simplu scenariu apare atunci când rata de resetare $\gamma(x)$ este pozitivă

pentru toate valorile lui x (și pentru n în cazul spațiului de stare discret, γ_n). Acest comportament este ilustrat în Figura 2.1a. Un scenariu mai complex dinamic apare atunci când rata de resetare $\gamma(x)$ (γ_n) poate fi pozitivă sau negativă în funcție de valoarea lui x (x_n). Al doilea scenariu care ia în considerare rata de resetare "inteligentă" dependentă de stare s-a dovedit a fi mai flexibil pentru aplicații. Acest comportament este ilustrat în Figura 2.1b.

O modalitate alternativă de a extinde ecuația de evoluție este prin luarea în considerare a scenariilor în care numărul de elemente se schimbă multiplicativ în timp: $\frac{dN_{total}(t)}{dt} = \kappa N_{total}(t)$. Prin introducerea unei astfel de diluări în ecuația maestră, apare un nou termen similar cu resetarea.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \sigma_{n-1}P_{n-1}(t) - \sigma_n P_n(t) - (\gamma_n + \kappa)P_n(t) + \delta_{n,0}\langle\gamma\rangle(t). \quad (2.5)$$

În spațiul de stare continuu, ecuația diferențială parțială corespunzătoare ecuației 2.5 este exprimată în următoarea formă:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\sigma(x)\rho(x, t)] - (\gamma(x) + \kappa)\rho(x, t) + \langle\gamma(x)\rangle(t)\delta(x). \quad (2.6)$$

În starea staționară, forma generală a funcției de densitate a probabilității pentru $x > 0$ depinde, de asemenea, de rata de diluție κ :

$$\rho_s(x) = \frac{C}{\sigma(x)} e^{-\int_{\{x\}} \frac{(\gamma(u)+\kappa)}{\sigma(u)} du}, \quad (2.7)$$

unde C reprezintă constanta de normalizare.

DISTRIBUȚIA AVERII ÎN SOCIETATE

3.1 Introducere în inegalitatea socială bazată pe avere

Inegalitățile sociale se referă la diferențele în alocarea resurselor și oportunităților între indivizi sau grupuri în cadrul unei societăți date. O cantitate comună pentru măsurarea acestor inegalități este averea, care cuprinde toate tipurile de proprietăți pe care le deține un individ. Astfel de inegalități au existat întotdeauna în societate, chiar și în timpurile istorice, indiferent de tipul de sistem administrativ [20]. Cu toate că dovezi cantitative ale inegalității de avere pot fi găsite în literatură, în toate cazurile, atunci când scopul este de a măsura averea, aceasta este aproximată prin diverse metode care se bazează pe diferite proxy-uri [21]. Vilfredo Pareto, un renumit sociolog italian, a oferit prima descriere empirică și calitativă a distribuției averii la sfârșitul secolului al XIX-lea. Descoperirile sale au expus o tendință distinctă de coadă de tip funcție de putere în distribuția cumulativă a averii [22]. Cunoscutul principiu Pareto este, de asemenea, legat de observațiile sale. Conform principiului Pareto, o fracțiune p din societate deține o fracțiune $1 - p$ din totalul averii distribuite în societate. În timpul

lui Pareto, valoarea lui p era aproximativ 0.2, ceea ce înseamnă că 20% din societate deținea 80% din totalul averii.

Începând din ultima decadă a secolului al XX-lea, un nou domeniu interdisciplinar de știință, numit econo-fizică, a apărut, combinând elemente din fizică și economie. Mai multe modele au fost proiectate pentru a descrie într-un mod unitar întreaga gamă de distribuții ale averii [18, 23–25]. Cu toate acestea, chiar și cu colaborarea între fizicieni și economiști, (după cunoașterea noastră) un model comprehensiv pentru descrierea inegalităților sociale nu a fost dezvoltat până în timpuri recente [18, 19, 23, 26].

Un abordaj general pentru descrierea dinamicii sistemelor economice se bazează pe ecuațiile maestre, care sunt ecuațiile de evoluție ale unui sistem dat în spațiul probabilității [18]. În acest capitol, prezentăm un cadru de modelare bazat pe modelul LGGR care s-a dovedit a fi potrivit pentru modelarea inegalităților. Pentru aplicarea modelului LGGR pentru a modela sistemele socio-economice, considerăm că următoarele presupuneri sunt valabile și pentru societate: (1) presupunem că interacțiunile directe pe rețea pot fi approximate printr-o interacțiune de câmp-medie capturată în cadrul ratelor de creștere ($\sigma(x)$) și resetare ($\gamma(x)$); (2) presupunem că toți indivizii sunt identici și nu se poate face nicio diferențiere.

3.1 Studiu experimental și provocări

Datele de bună calitate sunt necesare pentru proiectarea modelelor matematice care ar putea explica cauzalitatea din spatele fenomenului. În prezent, datorită accesului ușor la internet, o cantitate imensă de date financiare digitalizate pentru diferite țări este disponibilă [27, 28]. Măsurile socio-economice monitorizate sunt în general considerate atât pentru indivizi, cât și pentru grupuri de indivizi (familii, organizații, așezări, etc.) [29–31]. Distribuția acestora poate varia în funcție de faptul dacă este considerată pentru indivizi sau grupuri de oameni. La fel se întâmplă și în cazul datelor despre averi. Avera nu poate fi măsurată folosind o cantitate simplă, deoarece este compusă din mai multe componente. Odată cu creșterea complexității societății, a devenit aproape imposibil să se realizeze o cartografiere exhaustivă a acesteia. Procedurile de eșantionare pentru averi tind să fie inexacte, datele disponibile despre averi implică în mod obișnuit estimări și sondaje anuale [28]. Eșantionarea poate fi foarte periculoasă deoarece mostrele alese nu reprezintă neapărat corect întreaga grupă din care fac parte. O reprezentare ilustrativă a eșantionării și a deficiențelor sale este ilustrată în Figura 3.1. Prin urmare, este o provocare să găsim date reprezentative care caracterizează ansamblurile de indivizi.

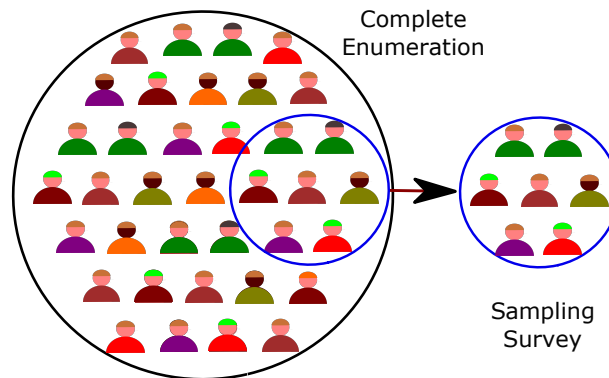


Figura 3.1: Ilustrare a deficienței de eșantionare a ansamblului.

AVEREA ÎN SOCIETĂȚILE MODERNE

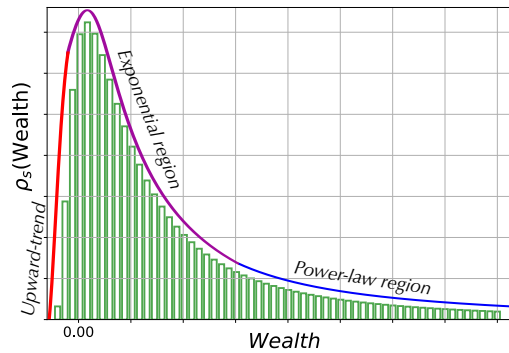


Figura 4.1: Ilustrarea celor trei regiuni ale distribuției averii.

În zilele noastre, distribuția averii este monitorizată de birourile statistice guvernamentale și numeroase organizații [27, 32], furnizând date precise despre avere. Este important de menționat că în societățile moderne, în cazul averii, sunt posibile și valori negative, semnificând datorii. Putem diferenția trei regiuni bazate pe forma distribuției averii, așa cum este ilustrat în Figura 4.1. Prima regiune este o regiune exponențial crescătoare la valori negative și foarte mici ale averii. Partea de mijloc a distribuției averii este o regiune exponențială cu o tendință negativă. Partea superioară a distribuției averii urmează o tendință de descreștere similară cu o lege a puterilor. În literatura relevantă, totuși, prima regiune nu este identificată ca o regiune separată, deoarece datoria nu este luată în considerare în distribuție [23, 26]. În locul părții pe care o considerăm ca fiind o regiune de descreștere exponențială, se consideră o distribuție de tip Boltzmann-Gibbs [23, 26]. O altă deficiență a modelelor existente este că ele demonstrează cele două regiuni separat. Ambiția principală a lucrării noastre a fost să proiectăm un model analitic, dinamic, potrivit pentru a demonstra distribuția observată a averii în întregimea sa (regiunile negative și pozitive ale datelor empirice).

Accentul acestei secțiuni se pune pe aplicarea modelului LGGR pentru a ilustra distribuția staționară a averii în SUA, Rusia și Franța la începutul secolului al XXI-lea. Presupunem că dinamica averii este într-o condiție de quasi-echilibru pe baza a două împrejurări: (1) existența suficient de îndelungată a economiei de piață liberă în aceste țări în ultimele decenii; și (2) dimensiunea substanțială a acestor economii, asigurând rezistența lor la fluctuații minore în economia globală.

Rata de creștere liniară ($\sigma(x)$) poate fi luată în considerare pentru avere, în concordanță cu fenomenul preferențial de acumulare a averii. Această rată de creștere, exprimată de prima linie a Ecuației 4.1, indică o creștere pozitivă în intervalul $[-g, \infty)$ (g fiind o constantă pozitivă). Creșterea financiară începe în principal la valori scăzute ale

averii și se încheie la niveluri mai ridicate ale acesteia. Prin urmare, rata de resetare ($\gamma(x)$) ar trebui să fie negativă pentru valori mici și negative ale averii și să se satureze la o valoare pozitivă pentru valori mari ale averii, prevenind posibilitatea unei averii infinite. O astfel de rată de resetare poate fi formulată conform celei de-a doua linii a Ecuației 4.1.

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= l \cdot (x + g) \\ \gamma(x) &= l \cdot \left(s - \frac{v}{x + g} \right), \quad (s, v \in \mathbb{R}_+).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Luând în considerare aceste forme ale ratelor de creștere și resetare, calculăm forma funcției de densitate a probabilității staționare dată de modelul LGGR (Ecuația 2.4). Am redimensionat variabila x cu valoarea sa așteptată ($y = x/\langle x \rangle$), calculată analitic din funcția de distribuție a probabilității staționare $\rho_s(x)$. Forma obținută a funcției de distribuție a probabilității renormalizate $\rho_s(y)$:

$$\rho(y)_s = \frac{c(c+1)^s (s-1)^s}{\Gamma(s)} e^{-\frac{(c+1)(s-1)}{1+cy}} (1+cy)^{-1-s}.\tag{4.2}$$

unde $c = v/[g(s-1)] - 1$.

Rescalarea funcției de densitate a probabilității pentru a fi normalizată când valoarea așteptată $\langle y \rangle = 1$ este practică nu doar pentru că ne permite să eliminăm un parametru, ci și pentru că facilitează comparația vizuală a funcțiilor de distribuție a probabilității obținute pentru diferite țări (vezi Figura 4.2).

4.1 Validarea modelului pentru SUA, Rusia și Franța

Datele referitoare la averea populației au fost obținute din Baza de Date a Inegalității Mondiale (WID) [28]. Studiul nostru a folosit date din mai mulți ani pentru Statele Unite ale Americii, Rusia și Franța. Datele furnizate sunt prezentate ca fracțiuni procentuale cumulative care reprezintă populația și bogăția lor corespunzătoare în moneda locală a țărilor. Din aceste distribuții cumulative, am derivat distribuțiile normalizate ale bogăției. Am calculat funcția de densitate a probabilității pentru averea rescalată cu averea medie $\langle Z \rangle$ pentru fiecare an respectiv, exprimată ca $z = Z/\langle Z \rangle$. Utilizarea acestei abordări a dus la suprapunerea distribuțiilor bogăției pentru ambele țări, SUA și Rusia, în diferiți ani, pe o curbă unificată. Această suprapunere a distribuțiilor a permis calcularea distribuției medii a averii pentru ambele țări.

Ambele distribuții (SUA și Rusia) prezintă tendințe remarcabil de similare, permițând o comparație mai cuprinzătoare atunci când modelele lor medii sunt suprapuse pe același grafic, Figura 4.2. Figura 4.2 indică o potrivire precisă pentru întregul spectru de avere folosind parametri $s = 1.4$ și $c = 6.5$ în cadrul Ecuației 4.2, forma analitică a funcției de densitate a probabilității. În mod interesant, în ciuda diferențelor semnificative în istoriile economice ale SUA și Rusiei, distribuția averii personale relative prezintă o tendință universală.

Am extins analiza către distribuția averii în Franța [28], devenind evident că această tendință nu se aplică universal, așa cum este arătat în Figura 4.3a. Distribuția averii pentru Franța sugerează o mai mare egalitate între populație comparativ cu SUA și Rusia, indicată de descompunerea mai rapidă a funcției de densitate a probabilității a averii prezentată în Figura 4.3a. Pentru Franța, similar cu SUA și Rusia, distribuțiile

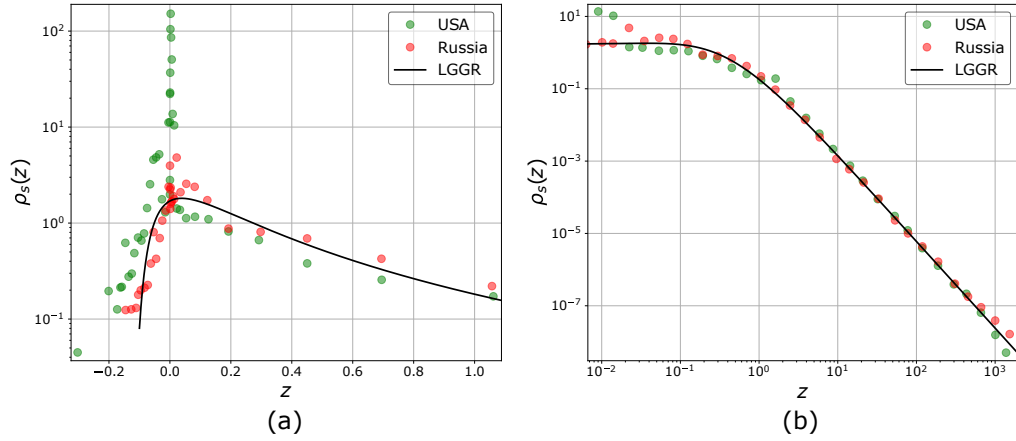


Figura 4.2: Compararea funcției de distribuție a averii relative normalizate ($z = Z/\langle Z \rangle$) din SUA și Rusia (reprezentată cu puncte) și funcția de densitate a probabilității dată de modelul LGGR sub forma Ecuației 4.2 (linie continuă neagră). Distribuțiile experimentale sunt distribuțiile medii peste anii considerați. Regiunea negativă a distribuțiilor este reprezentată pe scară log-normală (a), în timp ce regiunea pozitivă este reprezentată pe scară log-log (b).

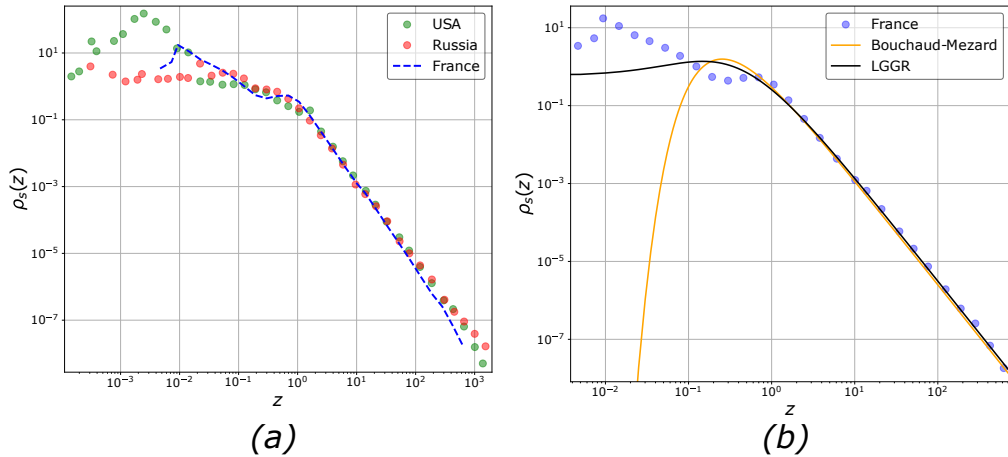


Figura 4.3: (a) Compararea funcțiilor de densitate a probabilității experimentale (medii pe mai mulți ani) ale valorilor relative ale averii ($z = Z/\langle Z \rangle$) din SUA, Rusia și Franța. (b) Comparații între cele mai bune potriviri generate de modelul LGGR (Ecuațiile 4.2) și modelul Bouchaud și Mezard [24] la distribuția experimentală a averii pentru Franța.

calculate pentru diferiți ani se suprapun. În setul de date francez, nu există înregistrări ale averii negative, astfel că numai regiunea pozitivă a averii ($z > 0$) este reprezentată pe o scară log-log în Figura 4.3.

De asemenea, am comparat rezultatele modelării noastre cu un model general acceptat pentru distribuțiile averii, modelul Mezard-Bouchaud [24]. Modelul nostru prezintă o aliniere mai bună cu datele experimentale în regiunea de valori mici ale averii. Acest lucru este ilustrat și în Figura 4.3b.

4.2 Remarci despre ratele alese

Pentru a testa rata de creștere preferențială, am examinat creșterea averii celor mai bogați 15 indivizi prezenți constant în lista Forbes din 2001 până în 2019. Am urmărit averea $Z_i(t)$ a fiecărui individ în fiecare an t , în raport cu averea lor din 2001, notată ca ${}^rZ_i(t) = Z_i(t)/Z_i(2001)$. Creșterea medie ${}^rZ(t) = \langle {}^rZ_i(t) \rangle_i$ în timp este ilustrată în Figura 4.4a, folosind scalarea log-normală. Modelul aparent liniar (curba neagră) observat în Figura 4.4a susține tendința exponențială în creșterea averii: ${}^rZ(t) \approx \exp[-0.075 \cdot (t - 2001)]$.

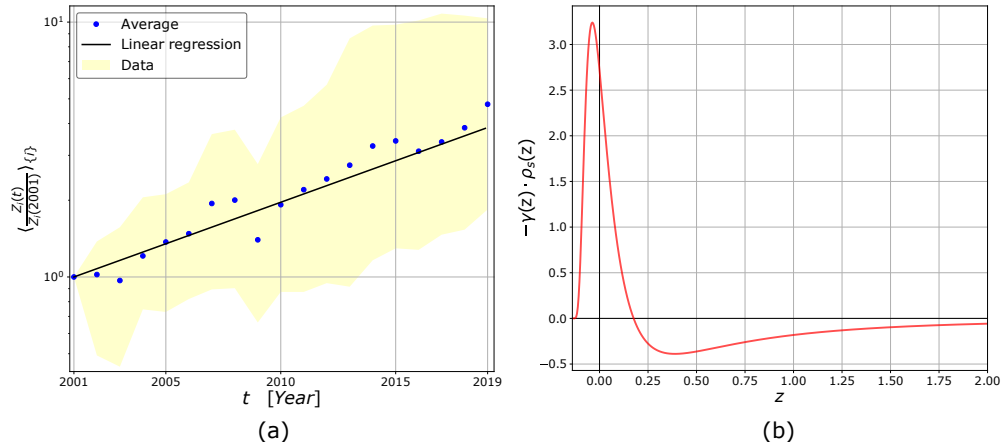


Figura 4.4: (a) Pe axa y logarithmică este reprezentat trendul de creștere exponențială a averii rescalate medii, ${}^rZ(t)$, printre cei mai bogați indivizi din lume de la 2001 până la 2020. Zona umbrită în fundal reprezintă creșterea averii celor 15 cei mai bogați indivizi în mod separat. (b) Schimbările pe unitate de timp în fracțiunea populației într-un interval de avere unitar ($n(z) = N(z, z + dz)/dz$) în jurul lui z ca urmare a procesului de resetare inteligentă (Ecuatia 4.2). Parametrii modelului corespund celor obținuți din potrivirea funcțiilor de densitate experimentale din Figura 4.3 ($s = 1.4$ și $c = 6.5$)

Ne lipsește date experimentale pentru a susține funcția aleasă pentru rata de resetare. Cu toate acestea, bazându-ne pe funcția de resetare și forma densității de probabilitate din Ecuatia 4.2, putem calcula schimbările pe unitate de timp în fracțiunea populației într-un interval de avere unitar ($n(z) = N(z, z + dz)/dz$) folosind produsul $\frac{d, n(z)}{dt} \propto -\gamma(z), \rho_s(z)$. Am utilizat parametri potriviți pentru potrivirea distribuțiilor experimentale de avere din Figura 4.3 ($s = 1.4$ și $c = 6.5$) și am reprezentat produsul ratei de resetare și a funcției densității de probabilitate înmulțit cu -1 ($-\gamma(z) \cdot \rho(z)$) în Figura 4.4b. Observăm că majoritatea indivizilor își încep dinamica averii în intervalul valorilor mici și negative ($\gamma(z), \rho(z) > 0$), semnificativ sub media averii din societate ($z < 0.2 \cdot \langle z \rangle$). Până în momentul în care ies din sistem (rată de resetare pozitivă), averea lor este în general mai mare. Aceasta se aliniază bine cu experiențele noastre comune din viața de zi cu zi.

4.3 Discuții generale și concluzii

Scopul nostru a fost de a crea o formulă matematică cuprinzătoare care să încorporeze distribuția averii în toate categoriile, inclusiv valorile negative care reprezintă datoriile. Am observat că creșterea preferențială (Ecuatia 4.1) este susținută de dinamica averii

celor mai bogați oameni. Rata de resetare inteligentă presupusă (Ecuatia 4.1) se aliniază cu observațiile din lumea reală, unde persoanele mai tinere încep de obicei cu datorii sau avere scăzută (rată de resetare negativă), progresând către categorii de avere mai mari în timp. Această perspectivă întărește convingerea noastră că ratele pe care le-am folosit abordează corespunzător dinamica averii în cadrul societății folosind o abordare de tip câmp medie. Buna aliniere între datele colectate cu funcția densității de probabilitate dată de Ecuatia 4.2 arată că acest model oferă o reprezentare bună a distribuțiilor de avere observate în societățile contemporane. Funcția densității de probabilitate rezultată din modelul nostru prezintă două avantaje principale în raport cu abordarea Bouchaud și Mezard: (1) se potrivește și valorilor negative ale averii (datoriilor); (2) cu cele două parametri liberi (Ecuatia 4.2), permite o potrivire rafinată pentru regiunea de avere scăzută. Analiza noastră a dezvăluit similitudini neașteptate între distribuțiile de avere din economiile istoric distincte ale SUA și Rusiei. Observația că distribuția rescalată a averii se suprapune pentru SUA și Rusia, dar nu și pentru Franța, sugerează că nu există o tendință universală singulară în distribuțiile de avere între diferite țări, în ciuda similarităților evidente.

DISTRIBUȚIA AVERII ÎNTR-O COMUNITATE MICĂ

5.1 Prezentarea generală și motivația studiului

În capitolul anterior, ne-am concentrat pe examinarea inegalităților sociale prin analiza distribuției averii la nivelul unor țări mari (Statele Unite ale Americii, Rusia, Franța). În această capitol explorăm o societate umană mai mică, formată din aproximativ o mie de gospodării. Scopul nostru aici este să modelăm din nou inegalitățile sociale prin măsurarea averii. Pentru lucrarea prezentată în această secțiune, am avut acces la o bază de date exhaustivă privind averea dintr-o mică comună românească, Comuna Sâncraiu. Baza de date a fost digitalizată din înregistrările de proprietate și impozite stocate la autoritățile locale ale comunei Sâncraiu, România. Ca o extensie a lucrării noastre anterioare, explorăm diferite perioade de timp care reprezintă sisteme distincte de autoritate. Baza de date conține informații din trei ani distincți: 1961, 1989 și 2021. În 1961, capturează perioada imediat anterioară colectivizării, marcând momentul în care terenurile anterior alocate țăranilor de către comuniști după 1947 au fost din nou colectivizate. Anul 1989 a marcat sfârșitul regimului comunist din România, în timp ce 2021 reprezintă prezentul, cuprinzând peste trei decenii de la căderea comunismului și reflectând efectele tranziției către o economie de piață liberă în comunele românești.

În această lucrare, demonstrăm aplicabilitatea modelului LGGR pentru o societate relativ mică. Mai mult, având date din trei epoci economice diferite ale României, suntem capabili să comparăm populația acestei comune din punctul de vedere al inegalității sociale. Pentru a face acest lucru, comparăm ratele de creștere și de resetare aplicate în cadrul modelului LGGR și calculăm, de asemenea, curbele Lorenz, punctele Pareto și indicele Gini pentru toți cei trei ani [26].

5.2 Date colectate despre avere

Înregistrările anonimizate privind averea gospodăriilor au fost obținute de la autoritățile locale din comuna Sâncraiu, printr-un acord între Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca. Populația comunei prezintă o tendință de scădere în ultimii aproximativ 70 de ani. Recensământul din 1956 a înregistrat 3557 de locuitori [33]. 36 de ani mai târziu, recensământul din 1992 a înregistrat 2053 de persoane [33], în timp ce populația actuală a comunei este 1628 de locuitori conform recensământului din 2011. În ceea ce privește gospodăriile, în 1961 existau 1133 de gospodării, în 1989 acest număr a scăzut la 921. În 2021, numărul de contribuabili a fost de 1595. Informațiile privind componentele averii pentru anii 1961 și 1989 au fost extrase din registrele agricole anonime întreținute de primărie. Aceste registre conțin informații cuprinzătoare despre fiecare gospodărie, documentând terenurile deținute, dimensiunea casei și a clădirilor auxiliare, precum și numărul de animale deținute de fiecare gospodărie. Având în vedere dependența istorică a comunei de agricultură, se poate presupune că aceste înregistrări au conținut majoritatea bunurilor valoroase ale unei gospodării înainte de 1990. Datele pentru 2021 au fost obținute dintr-o bază de date fiscală anonimizată care detaliază în mod specific informațiile despre terenuri și clădiri.

Pentru a estima averea totală a unei singure gospodării i , am calculat o combinație liniară a tuturor valorilor înregistrate, așa cum este definită de Ecuația 5.1. Pentru a crea un proxy neîncălinat, am folosit zece seturi de factori de ponderare pentru a estima averea totală, presupunând că valoarea reală se află între valorile estimate minime și maxime. Această estimare exprimă averea într-o cantitate arbitrară (în figurile noastre o denumim $[a.u.]$), făcând-o incomparabilă între diferiții ani studiați.

$$W_i = \sum_{\{j\}} M_{j,i} \cdot P_j, \quad (5.1)$$

unde j reprezintă categoriile de valori, iar P_j indică coeficientul de ponderare corespunzător. Factorii de ponderare P_j îndeplinesc condiția de normalizare: $\sum_{\{j\}} P_j = 1$.

Pentru a oferi o prezentare mai clară a metodei de estimare aplicate și pentru a susține natura realistă presupusă a parametrilor de ponderare, am calculat componenta procentuală a averii totale a comunei. Această calculație a luat în considerare componentele valoroase incluse în estimarea averii gospodăriilor. Ponderea procentuală a unei singure categorii valoroase din averea totală deținută de întreaga comună poate fi calculată astfel:

$$S(j) = \frac{P_j \sum_{\{i\}} M_{j,i}}{\sum_{\{i\}} W_i} \cdot 100 \quad [\%], \quad (5.2)$$

unde i reprezintă suma peste gospodării, în timp ce j indică diferitele categorii de valori. Pentru fiecare categorie de valori j și pentru fiecare set de factori de ponderare considerați P_j , calculăm cantitățile $S(j)$ și le reprezentăm vizual pentru fiecare an studiat. În Figurile 5.1a,c,e, reprezentăm componenta procentuală a averii totale a comunei (calculată pe baza Ecuației 5.2) în cei trei ani analizați. Diferitele componente ale averii sunt listate în figură. Zonele umbrite la marginile culorilor diferite reprezintă incertitudinea indusă de diferențele dintre seturile de ponderare. Grosimea relativ mare a acestor zone de tranziție difuze în figură sugerează că seturile de ponderare alese acoperă un set considerabil diferit de metode de estimare, asigurând robustețea estimării. În plus, calculăm distribuțiile experimentale ale averii din averea estimată a gospodăriilor pentru fiecare set de parametri de ponderare. În Figurile 5.1b,d,f, reprezentăm mediile intervalelor și punctele extreme (pe ambele axe) cu puncte și bare de eroare.

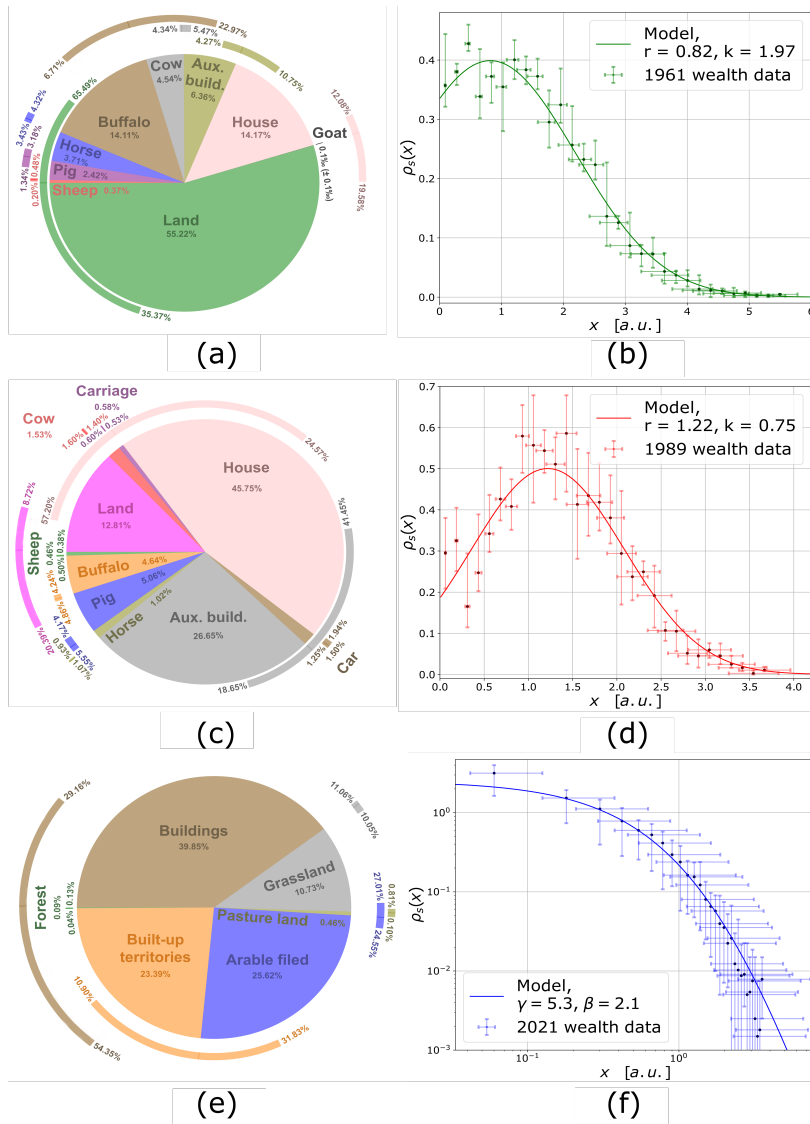


Figura 5.1: Panourile din coloana stângă ilustrează compoziția averii totale a comunei în (a) 1961, (c) 1989 și (e) 2021. Cotele diferitelor categorii ($S(X)$) sunt calculate pe baza Ecuației 5.2. Panourile din coloana dreaptă ilustrează distribuția experimentală a probabilității pentru avere în (b) 1961, (d) 1989 și (f) 2021. Barele de eroare sunt obținute prin combinarea rezultatelor diferitelor seturi de parametri de ponderare. Valorile averii sunt exprimate în unități arbitrară (a.u.), așa cum este explicat în Secțiunea 5.2. Distribuțiile teoretice (linii continue) definite de Ecuațiile 5.4 (b, d) și 5.4 (f) sunt ajustate la distribuțiile experimentale medii (puncte negre). Parametrii de ajustare apar în legenda figurilor.

5.3 Distribuțiile averii prin modelul LGGR

Având în vedere că anii 1961 și 1989 marchează sfârșitul unor condiții socio-economice distincte, iar anul cel mai recent, 2021, semnifică o situație care a apărut ca rezultat al a 32 de ani de economie de piață liberă după prăbușirea comunismului, deducem cu încredere că distribuția averii gospodăriilor a atins o stare de staționaritate. În datele prelucrate în acest capitol, nu există avere negativă. Aceasta simplifică într-o oarecare

măsură modelarea distribuțiilor de avere estimate. Prin definirea funcțiilor de rate realiste pentru creștere și resetare, calculul funcțiilor de densitate de probabilitate staționară pe baza Ecuației 2.4 este posibil. Ulterior, ajustăm parametrii modelului pentru a obține o aliniere satisfăcătoare între datele experimentale și model.

Distribuția averii într-un sistem economic controlat: 1961 și 1989

În comunism, creșterea economică a fost facilitată, dar și moderată de către guvern. Având în vedere aceste fapte, am aproximat creșterea economică a gospodăriilor printr-o valoare constantă ($\sigma(x) = k$), ceea ce înseamnă că creșterea averii nu depinde de averea actuală a gospodăriei.

În ceea ce privește rata de resetare, luăm în considerare din nou faptul că bunăstarea economică a populației era controlată de către guvern. Bazându-ne pe ideologia comunismului, exista o medie ideală a averii care caracteriza societatea, iar obiectivul guvernului era să mențină echilibrul financiar în cadrul societății. Pentru a realiza un astfel de scenariu în cadrul modelului LGGR, am optat pentru o rată de resetare liniară, decalată față de valoarea 0 a averii, cu o constantă: $\gamma(x) = x - r$. Această funcție simplă ia valori negative pentru avere (x) sub r și devine pozitivă pentru $x > r$, asigurând un scenariu inteligent de resetare, ilustrat în Figura 2.1a. Aceasta asigură apariția unor familii noi cu mai puțină avere decât r , iar când devin mai bogate decât această bunăstare optimă, devine probabil ca acestea să-și piardă averea sau să iasă din sistem.

Având în vedere aceste rate, soluția staționară a modelului LGGR (Ecuația 2.4) duce la o distribuție normală care este normalizată pe intervalul $[0, \infty)$ (Ecuația 5.3), deoarece avere negativă nu este prezentă în date.

$$\rho_{s1}(x) = \sqrt{\frac{2}{k\pi}} e^{-\frac{r^2}{2k}} e^{-\frac{x(x-2r)}{2k}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{2k}}\right) + 1 \right]^{-1}, \quad (5.3)$$

unde $\operatorname{erf}()$ este funcția de eroare ($\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$). Maximele acestei distribuții normale sunt la valoarea parametrului r , ceea ce este în acord cu explicația dată anterior referitoare la existența unei stări ideale de prosperitate în comunism. Funcția de densitate de probabilitate definită de Ecuația 5.3 este potrivită pentru ajustarea atât a distribuțiilor experimentale de avere din 1961, cât și din 1989. Pentru 1961, distribuția experimentală și teoretică a averii sunt prezentate în Figura 5.1b, în timp ce pentru 1989 în Figura 5.1d. În ambele cazuri, parametrii de ajustare sunt enumerați în legenda figurii.

Distribuția averii în economia de piață liberă: 2021

În economia de piață liberă, creșterea financiară poate fi considerată preferențială: $\sigma(x) = x + \beta$. Luând în considerare doar avere pozitivă în cadrul sistemului, cea mai simplă opțiune pentru rata de resetare este să presupunem că este constantă: $\gamma(x) = \gamma$. Acest lucru înseamnă că, indiferent de averea unui contribuabil, probabilitatea de a fi resetat într-o fereastră de timp dată rămâne aceeași. Aceste forme ale ratelor (folosind din nou Ecuația 2.4) conduc la o funcție de densitate de probabilitate staționară de tip Tsallis-Pareto definită de Ecuația 5.4.

$$\rho_{s2}(x) = \frac{\gamma}{\beta} \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-1-\gamma}, \quad (5.4)$$

Compararea vizuală a distribuțiilor teoretice și estimate experimental ale averii este prezentată în Figura 5.1f.

5.4 Inegalitatea socială prin măsurile cunoscute

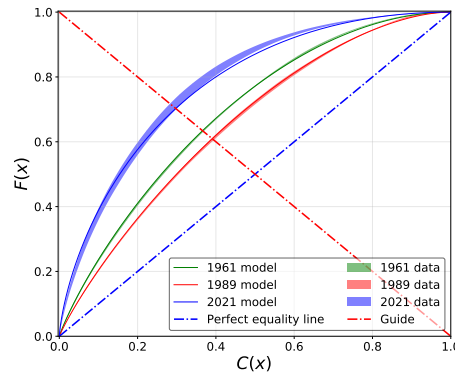


Figura 5.2: Curbele Lorenz, atât experimentale, cât și teoretice, pentru anii 1961, 1989 și 2021. Zona umbrită reprezintă intervalul acoperit de rezultatele experimentale în diferite seturi de parametri de ponderare. Curbele teoretice, derivate din distribuțiile ajustate, sunt reprezentate de linii continue.

Am calculat curbele Lorenz [34] pentru fiecare an studiat pe baza atât a curbelor teoretice, cât și a distribuțiilor experimentale ale averii. Figura 5.2 ilustrează curbele Lorenz corespunzătoare anilor analizați. Curbele Lorenz construite din funcțiile de densitate de probabilitate modelate, având în vedere parametrii optime, sunt indicate cu linii continue. Regiunile delimitate de extremele curbelor Lorenz observate experimental, corespunzând la diferite seturi de parametri de ponderare, sunt umbrite cu culorile respective. Curbele Lorenz teoretice se aliniază bine cu cele experimentale, la fel ca și funcțiile de distribuție a averii.

Am calculat valorile punctelor Pareto și indicii Gini atât din datele empirice ale averii, cât și din distribuțiile teoretice. Am stabilit intervale pentru valorile obținute experimental pentru fiecare dintre cei trei ani, constatând că valorile derivate din curbele modelate se încadrează în intervalele definite. Valorile punctelor Pareto și indicii Gini experimental și teoretici sunt listate în Tabelul 5.1.

Year	G		P	
	Data	Model	Data	Model
1961	[0.377;0.379]	0.378	[0.366;0.368]	0.367
1989	[0.304;0.315]	0.312	[0.390;0.395]	0.391
2021	[0.543;0.579]	0.552	[0.282;0.299]	0.298

Tabelul 5.1: Măsurile de inegalitate în decursul anilor examinați: coeficientul Gini (G) și punctul Pareto (P). Limitele derivate din date folosind diferiți parametri de ponderare și valoarea extrasă din funcția de densitate de probabilitate ajustată.

5.5 Rezumatul capitolului

Această studiu furnizează o a doua confirmare a aplicabilității dinamicii LGGR în modelarea distribuției averii în cadrul sistemelor socio-economice. Aspectul distinctiv al

acestei cercetări constă în aplicarea acestei dinamici cu rate de creștere și resetare diferite la diferite scenarii economice, dovedind eficacitatea modelului în ambele cazuri.

Indicii de inegalitate determinați experimental și teoretic prezintă o concordanță semnificativă (Figura 5.2), oferind o confirmare suplimentară a validității funcțiilor de densitate de probabilitate propuse dintr-un alt punct de vedere. Valorile măsurilor Gini și Pareto indică inegalități sociale minime în timpul regimului comunist. În 1961, Gini a fost aproximativ 0.38, scăzând la 0.31 în 1989. După 32 de ani de economie de piață în această regiune, Gini a crescut semnificativ la aproximativ 0.55. Acest lucru sugerează intensificarea actuală a inegalităților sociale. În plus față de demonstrarea capacității de modelare a modelului LGGR, am furnizat și date valoroase privind inegalitatea pentru o regiune geografică bine definită, cuprinzând diferite perioade istorice ale României. Realizarea unor studii similare în diverse regiuni din întreaga lume, în comunități bine delimitate, ar putea fi, de asemenea, interesantă.

CAPITOLUL 6

DINAMICA LGGR STAȚIONARĂ A LOTERIILOR

În acest capitol, prezentăm un studiu care este, de asemenea, strâns legat de domeniul științelor sociale și economice, dar diferă distinct de cele două subiecte precedente. Formele globale de jocuri de noroc au ajuns la un nivel atât de ridicat de complexitate încât este potrivit să le investigăm ca sisteme complexe. Loteriile, în general, sunt studiate în mod extensiv din numeroase puncte de vedere, cum ar fi matematic, care se ocupă de șansele de câștig [35]; psihologic, încercând să explice motivația psihologică a jocului [36]; economic, adaptându-și regulile pentru a îmbunătăți veniturile statului [37]. Cu toate acestea, ele nu au fost focalizate în fizica statistică, astfel încât această abordare simplă are un caracter nou.

În loterii, participanții au șansa de a câștiga un premiu Jackpot selectând un set de numere dintr-o gamă specificată. Selecția câștigătorilor se bazează pe extrageri periodice de numere aleatoare, care au loc de obicei săptămânal sau de două ori pe săptămână. În cazul în care un bilet are aceleași numere ca cele extrase, posesorul devine câștigător. În cazul în care nu există câștigător, fondul de premii continuă să crească prin extrageri succesive până când un câștigător este anunțat în cele din urmă [35]. Escaladarea Jackpot-ului după extragerile nereușite succesive contribuie la valori mai mari ale Jackpot-ului, care atrag natural mai mulți jucători să participe [38]. Acest lucru duce la o creștere accelerată până când Jackpot-ul este câștigat. Participanții pot califica pentru premii mai mici dacă potrivește mai puține numere decât cele necesare pentru a câștiga Jackpot-ul, dar totuși depășesc un prag minim. Finanțarea pentru aceste premii mai mici, în funcție de regulile specifice ale loteriei, poate proveni fie dintr-o parte a fondului de premii Jackpot, fie poate fi acoperită printr-un procentaj desemnat din vânzările săptămânale.

Deși regulile pot părea simple, combinația comportamentului jucătorilor, natura aleatoare și regulile ale jocului duc la dinamici complexe. Procesele de creștere și resetare pot fi identificate clar în Figura 6.1, care afișează un segment al seriilor de timp

ale valorii Jackpot-ului pentru loteria Powerball [39, 40]. Seria de timp afișată a valorilor Jackpot-ului caracterizează în întregime dinamica. Dinamica care guvernează valorile Jackpot-ului la loterii se aliniază cu principiile care stau la baza modelului dinamic de tip mean-field LGGR.

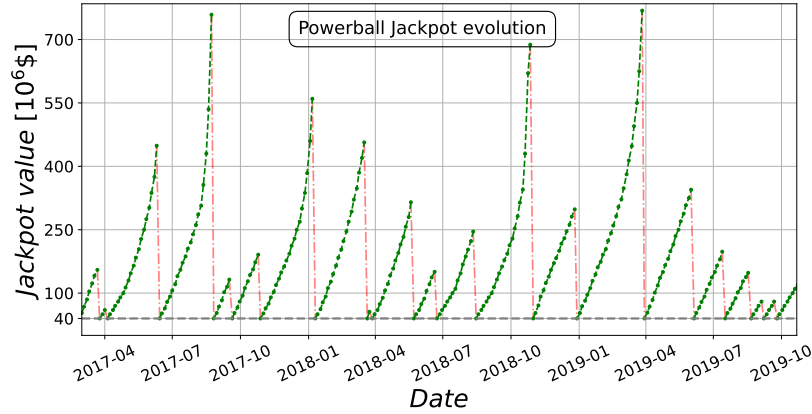


Figura 6.1: Datele de serie temporală care prezintă valoarea Jackpot-ului pentru Powerball, acoperind perioada martie 2017 - iulie 2019 [40].

6.1 Aplicabilitatea modelului și seriile temporale ale valorii Jackpot-ului

Datele seriei temporale ale Jackpot-ului pentru șase loterii, fiecare având seturi distincte de reguli și dimensiuni ale bazei de jucători, au fost colectate și procesate [39, 41–45]. Am colectat seria temporală completă pentru fiecare dintre cele șase loterii de la lansarea jocului până în prezent. Cu toate acestea, ne-am concentrat doar pe perioade mai scurte de timp în care regulile nu au fost modificate.

Am listat în Tabelul 6.1 perioadele de timp selectate pentru analiză și modelare, pentru fiecare dintre cele șase loterii. Am scris și în coloane separate șansele de a câștiga Jackpot-ul și regulile care definesc fiecare loterie: numărul de numere care trebuie alese și dimensiunea setului de numere selectabile. Prezintă, de asemenea, dimensiunea bazei de jucători și unele date statistice referitoare la valoarea medie a Jackpot-ului și timpul mediu dintre câștigarea consecutivă a Jackpot-ului. În plus, alături de caracteristicile menționate mai sus ale loteriilor, listăm și valoarea produsului $w = P_J \cdot Pop.$ pentru fiecare loterie într-o coloană separată. Acest parametru simplu ar putea oferi informații valoroase despre loterie. Unele dintre sursele de date pentru fiecare loterie sunt, de asemenea, listate în Tabelul 6.1. Pentru loteriile Powerball și UK, reprezentarea vizuală a seriei temporale considerate pentru modelare poate fi observată în secțiunile (A) ale Figurii 6.2.

În timp ce modelăm distribuția valorilor Jackpot-ului în acest studiu, ne referim exclusiv la distribuția valorilor Jackpot-ului rescalate prin valoarea medie a Jackpot-ului în timp ($J \rightarrow x = J/\langle J \rangle_{\{t\}}$). Modelul LGGR este aplicabil doar proceselor Markov ergodice. Prin urmare, mai întâi, demonstrăm ergodicitatea celor șase serii temporale introduse. Staționaritatea seriilor temporale studiate, manifestată prin convergența valorii medii a Jackpot-ului într-o fereastră de timp în continuă extindere $\langle x(t) \rangle_t \approx c$, este ilustrată în secțiunile (B) ale Figurii 6.2. Natura lor aperiodică este demonstrată prin absența autocorelației ($ACF(s) = Corr(x(t), x(t+s))$), așa cum este ilustrat în secțiunea (C) a Figurii 6.2. Același lucru este valabil și pentru celelalte patru loterii. Bazându-ne pe această argumentare, considerăm loteriile investigate ca fiind ergodice.

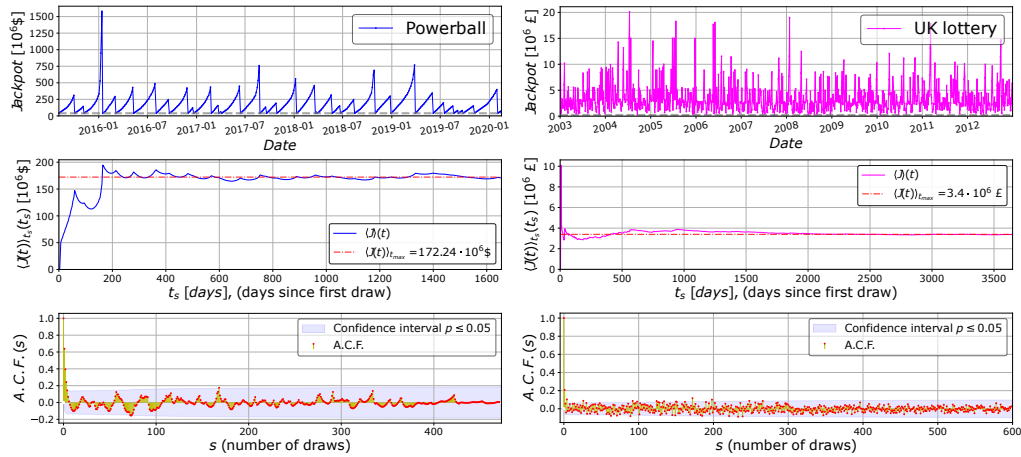


Figura 6.2: Sunt prezentate graficele seriilor temporale ale loteriilor studiate. Fiecare rând corespunde următoarelor aspecte: (A) Graficul seriei temporale al loteriilor într-o perioadă stabilă, în care regulile și bazele de jucători rămân constante. (B) Media seriei temporale $\langle x(t) \rangle_t$, însoțită de valoarea de convergență. (C) Funcția de autocorelație a seriei temporale $ACF(s)$ până la s zile, împreună cu un interval de încredere cu $p \leq 0.05$.

Lottery	Period	Format	$P_J (\approx)$	Pop. ($\approx$)	$\langle J \rangle (\approx)$	$\langle t_J \rangle$ [draws] ($\approx$)	$w (\approx)$	Source
Powerball	08.05.2015- 02.15.2020	5/69 + 1/26	$1/292 \cdot 10^{-6}$	$292.2 \cdot 10^6$	$172.2 M. \$$	14	1	[39, 46]
Megamillions	06.22.2005- 01.31.2010	5/56 + 1/46	$1/258 \cdot 10^{-6}$	$152.4 \cdot 10^6$	$66.8 M. \$$	9	0.58	[42, 47]
Euromillions	01.12.2012- 09.01.2016	5/50 + 2/9	$1/116 \cdot 10^{-6}$	$272.0 \cdot 10^6$	$46.4 M. €$	5	2.34	[41, 48]
Canada lotto	03.03.2007- 02.27.2019	6/49	$1/14 \cdot 10^{-6}$	$35.2 \cdot 10^6$	$9.8 M. \$$	3	2.70	[44]
UK lotto	01.07.1995- 09.09.2023	6/49	$1/14 \cdot 10^{-6}$	$62.5 \cdot 10^6$	$3.4 M. £$	2	4.80	[45]
Texas lotto	07.14.1994- 07.18.2000	6/50	$1/17 \cdot 10^{-6}$	$18.9 \cdot 10^6$	$12.6 M. \$$	4	1.12	[43, 49]

Tabelul 6.1: Loteriile examinate în acest articol, în intervale de timp cu reguli constante. Tabelul include informații despre formatul loteriei, probabilitatea de câștig cu un singur bilet (P_J), populația maximă potențială a jucătorilor (Pop.) și unele proprietăți statistice precum valoarea medie a Jackpot-ului ($\langle J \rangle$) și timpul mediu între câștigurile consecutive ale Jackpot-ului ($\langle t_J \rangle$). În plus, este listat și parametrul loteriei w , așa cum este discutat în Secțiunea 6.1. În antet, simbolul " $\approx$ " sugerează că valorile din coloană sunt doar aproximativ precise.

6.2 Modelarea dinamicii de creștere și resetare

Am stabilit forma matematică a funcțiilor kernel de creștere și resetare prin analiza datelor experimentale. Această abordare confirmă coerența internă a modelului propus.

Rata de creștere

Valoarea Jackpot-ului se acumulează dintr-o fracțiune a vânzărilor (care este determinată de numărul de bilete vândute) între două trageri consecutive. În plus, cu cât este mai mare Jackpot-ul, cu atât mai multe bilete sunt cumpărate de jucători. Prin urmare, ar fi natural să presupunem o formă preferențială de creștere a ratei: $\sigma(x) = a(1+b \cdot x)$.

Pentru a ne asigura de validitatea unei astfel de creșteri multiplicative a Jackpot-

ului, am calculat funcția de creștere (creșterea relativă medie a valorilor Jackpot-ului între trageri succesive) pe baza datelor seriei temporale pentru fiecare loterie. În Figura 6.3a, prezentăm rata de creștere determinată empiric pentru loteria Powerball. Incertitudinea asociată poziției fiecărui punct de date este indicată în figură, demonstrând deviația standard a datelor în intervalele respective pe ambele axe. Pentru fiecare loterie, determinăm valorile parametrilor folosind date din regiunea inferioară reprezentată în grafice (ratele de creștere experimentale ale altor loterii sunt incluse în teză). Rata de creștere determinată experimental în Figura 6.3 susține forma aleasă liniară pentru funcția kernel de creștere.

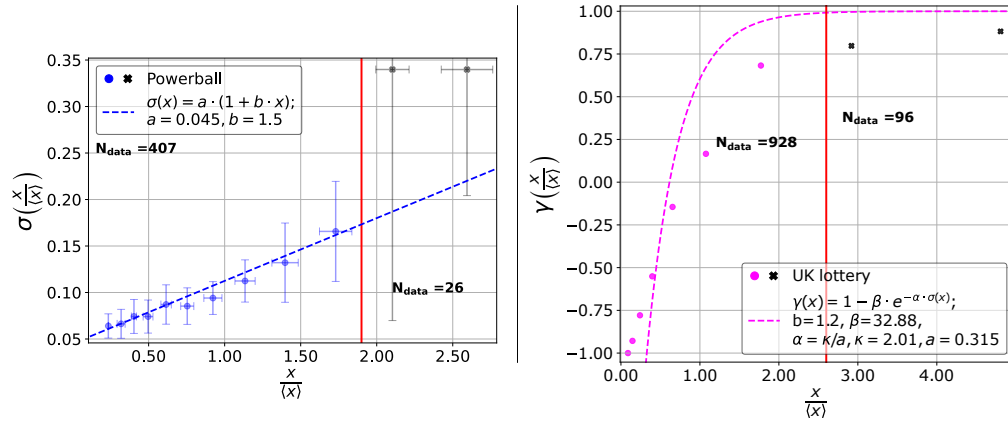


Figura 6.3: (a) Rata experimentală de creștere, denumită $\sigma(x)$ și exprimată ca o funcție de $x = J/\langle J \rangle_{\{t\}}$. Media datelor este însoțită de barele de eroare care reprezintă deviația standard a ansamblului. Funcțiile de creștere alese ($\sigma(x) = a(1 + b \cdot x)$) cu valorile parametrilor a și b folosite pentru ajustarea distribuțiilor relative ale Jackpot-ului sunt prezentate alături de rezultatele experimentale. (b) O comparație între rata de resetare experimentală și corespondentul său teoretic pentru loteria națională din Marea Britanie. Rata de resetare teoretică se bazează pe parametri obținuți din ajustarea funcțiilor de densitate de probabilitate și a ratelor de creștere. Acordul calitativ limitat poate fi atribuit calității scăzute a datelor. Furnizăm numărul de puncte de date, N_{data} , utilizate pentru calculul mediei. Această prezentare își propune să sublinieze că regiunile din dreapta liniilor verticale roșii nu sunt considerate fiabile pentru inferențele statistice.

Rata de resetare

Există o conexiune între ratele de creștere și resetare prin numărul de bilete vândute. Calcularea probabilității de resetare $\gamma(y)$ pentru un anumit număr de bilete vândute, denumit y , necesită luarea în considerare a numărului de bilete de loterie completate distinct. Numărul de bilete vândute (y) este proporțional cu creșterea valorii Jackpot-ului între trageri consecutive, care este însăși rata de creștere: $y = l \cdot \sigma(x)$, unde l este un parametru pozitiv care mapează creșterea la numărul de bilete. Rata de resetare ca funcție a valorii Jackpot-ului este dată de Ecuația 6.1.

$$\gamma(x) = \left(1 - \beta e^{-\kappa(1+b \cdot x)}\right), \quad (6.1)$$

cu $\kappa = l \cdot a \cdot \alpha$. Parametrul l este ascuns în κ .

Conexiunea dintre creștere și resetare introduce încă doi parametri ai modelului: α (sau $\kappa = l \cdot a \cdot \alpha$) și β . Natură procesului de resetare (total sau inteligent) este controlată de parametrul β .

Pentru a calcula experimental rata de resetare am avut suficiente date doar pentru loteriile din Canada și Marea Britanie. Figura 6.3b ilustrează ratele de resetare determinate experimental pentru loteria națională din Marea Britanie, reprezentate în funcție de Jackpot-ul rescalat $x/\langle x \rangle$. Subliniem din nou că ultimele puncte din aceste grafice sunt mai puțin fiabile. Pentru a demonstra consistența, în Figura 6.3b comparăm vizual ratele de resetare experimentale cu Ecuația 6.1. Acordul calitativ limitat poate fi atribuit calității slabe a datelor.

6.2 Funcția de densitate a probabilității staționare

Bazându-ne pe forma liniară a ratei de creștere susținută experimental și pe relația derivată între ratele de resetare și de creștere, forma analitică a funcției de densitate a probabilității staționare este:

$$\rho_s(x) = C (1 + bx)^{-\lambda-1} e^{\nu \text{Ei}(-\kappa(1+bx))}, \quad (6.2)$$

unde C este constanta de normalizare, iar parametri λ și ν sunt derivați din parametrii care apar în ratele de creștere și resetare: $\lambda = 1/(a \cdot b)$, $\nu = \beta \cdot \lambda$. $\text{Ei}(x)$ în exponent este funcția integrală exponențială, definită ca $\text{Ei}(x) = - \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Când $\beta = 1$, scenariul de resetare este convențional (rata de resetare este pozitivă), având întotdeauna loc la o valoare minimă a Jackpot-ului $x = J_0$. Când $\beta > 1$, rata de resetare poate fi negativă (pentru valori mai mici ale lui x), implicând faptul că, după procesul de resetare, dinamica de creștere începe din nou cu o valoare a Jackpot-ului $x > J_0$. Astfel de dinamici pot fi identificate în cazul loteriilor din Canada și Marea Britanie. Deficiența formei obținute a lui $\rho_s(x)$ constă în faptul că nici constanta de normalizare C , nici valoarea medie a lui x nu pot fi calculate analitic. Prin urmare, atunci când se ajustează datele experimentale, normalizarea la $\langle x \rangle = 1$ a funcției de densitate a probabilității trebuie efectuate numeric pentru valori fixe ale parametrilor (a , b , κ și β).

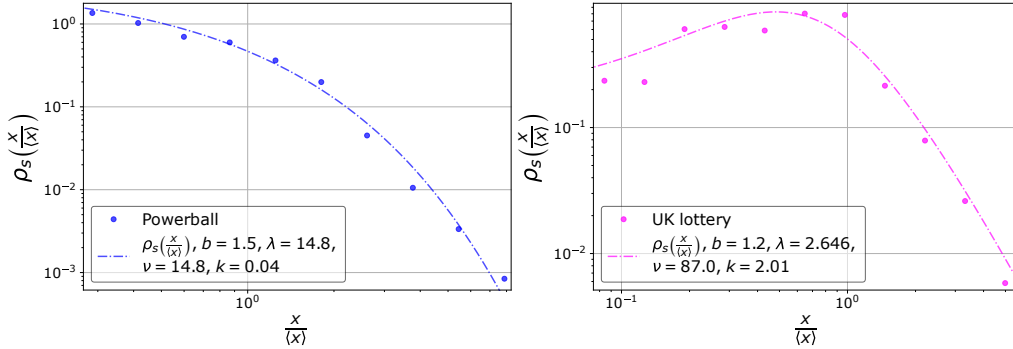


Figura 6.4: Distribuția de probabilitate la echilibru pentru premiile Jackpot $\rho_s(x)$ ca funcție de Jackpot-ul relativ pentru cele șase loterii examinate.

În Figura 6.4, prezentăm distribuțiile experimentale ale valorilor relative ale Jackpot-ului ($x/\langle x \rangle$) alături de funcția de densitate a probabilității descrisă de Ecuația 6.2. Compararea între datele experimentale și funcția de densitate a probabilității staționare obținută din model relevă o bună potrivire calitativă.

6.3 Discuții

Cu toate variațiile loteriilor, dinamica rezultată a sistemului colectiv care implică jucătorii și regulile stabilite de asociațiile de loterii este similară. Dinamica complexă rezul-

tată este aceeași cu cea modelată matematic prin abordarea LGGR. Pentru a selecta o rată de creștere liniară, am validat intuiția folosind datele din lumea reală, așa cum este ilustrat în Figura 6.3. În plus, relația descrisă în Ecuația 6.1 care leagă ratele de creștere și resetare a fost confirmată calitativ prin rata de resetare calculată empiric (Figura 6.3b). Folosind aceste rate, în limita stacionară, modelul LGGR a generat o funcție de distribuție a probabilității (Ecuația 6.2) care, cu parametri adecvați, se aliniază consecvent cu funcțiile de densitate a probabilității calculate ale valorilor Jackpot în toate cele șase loterii studiate. Procesul de potrivire a datelor a fost efectuat în mod consecvent, luând în considerare atât curbele de creștere experimentale, cât și distribuțiile Jackpot obținute pentru fiecare loterie în parte. Calitatea potrivirii pentru ratele de resetare nu a fost luată în considerare din cauza cantității limitate de date disponibile. Scopul nu a fost de a obține o potrivire perfectă pentru distribuțiile experimentale ale Jackpot-ului și datele de suport. Obiectivul nostru a fost să dezvoltăm un model statistic de câmp mediu care oferă o demonstrație coerentă a fluctuațiilor stationare ale valorilor Jackpot-ului. Un aspect de remarcă al acestui model este capacitatea sa de a ilustra două dinamici distincte ale loteriilor: una caracterizată printr-o resetare completă (Euromillions, Powerball, Megamillions, Texas lottery) și cealaltă printr-un proces de "resetare inteligentă" (UK Lotto și Canadian Lotto).

CAPITOLUL 7

DINAMICA LGGR STAȚIONARĂ ÎN SISTEMLILE BIOLOGICE

7.1 Introducere și motivația studiului

Sistemele biologice pot fi interpretate ca sisteme complexe, datorită numeroaselor lor componente și interacțiunilor complexe dintre acestea. În cazul ecosistemelor forestiere, cantitatea relevantă a cărei distribuție este studiată frecvent este dimensiunea arborilor, cuantificată ca Diametrul la Înălțimea Pieptului (Diameter at Breast Height - DBH). Procesele ecologice fundamentale prezente în toate sistemele biologice, care formează viziunea macroscopică a ecosistemelor forestiere, includ creșterea arborilor, mortalitatea acestora, recrutarea de noi arbori și diversificarea speciilor. Majoritatea modelelor existente în literatură iau în considerare doar primele două procese. Deși scala de timp a dinamicii ecosistemelor forestiere este mult mai lentă decât cea a sistemelor financiare, de exemplu, această dinamică este totuși firul care își lasă amprenta asupra viziunii unui astfel de ecosistem. Astfel, chiar dacă condițiile de echilibru (stationaritatea) necesită mult mai mult timp pentru a fi atinse, aceleași metodologii de modelare pot fi aplicate.

Luând în considerare primele trei procese, analogia dintre dinamica LGGR și aceasta este directă. Ultimul proces poate fi mai puțin evident de înțeles în contextul dinamicii LGGR, dar demonstrația efectului său ca un proces de resetare independent de dimensiune este dedusă în Capitolul 2. Prin luarea în considerare a ecosistemelor forestiere suficient de vechi, presupunem aplicabilitatea limitei staționare a modelului LGGR. Am luat în considerare modelarea ecosistemelor de arbori decidui de două tipuri diferite: păduri semi-naturale cu arbori maturi și pășuni forestiere vechi. Am-

bele ecosisteme sunt situate geografic în România centrală. Ne-am concentrat pe trei specii de arbori care sunt prezente în ambele tipuri de ecosisteme: stejar, carpen, și fag. În afară de cele două ecosisteme din România, pentru a confirma natura universală a concluziilor noastre, am analizat date din ecosisteme comparabile din Ungaria [53].

Conform literaturii, distribuția dimensiunilor arborilor în pădurile cu frunze căzătoare este în principal ajustată de distribuții Gamma sau Weibull. Aici, introducem o metodă de modelare matematică simplă și coerentă care oferă suport teoretic robust pentru validitatea distribuției Gamma în ceea ce privește diametrele trunchiurilor de arbori în aceste ecosisteme forestiere. Abordarea noastră integrează în mod cuprinzător cele patru procese ecologice menționate anterior. Pentru a evidenția contrastul între distribuțiile dimensiunilor arborilor în medii cu caracter semi-natural și matur, în comparație cu cele din ecosistemele forestiere artificiale unde influența umană este mai pronunțată și condițiile de mediu sunt mai omogene, am analizat și date din plantațiile de arbori de plop din estul Ungariei. Aceste măsurători au servit un dublu scop. Primul scop este de a evidenția contrastul în distribuția dimensiunilor arborilor între aceste ecosisteme controlate, care nu au atins încă starea de echilibru, și medii naturale forestiere mature unde se presupune o distribuție a dimensiunilor arborilor stabilă. Cel de-al doilea scop este de a obține indicii despre dinamica de creștere a arborilor genetic identici care se dezvoltă în medii controlate.

În plus față de seturile de date DBH pe care le-am descris mai sus, am avut acces și la seturi de date auxiliare de la Serviciul Parcului Național din Statele Unite (NPS), pe care le-am utilizat pentru a dezvălui forma funcțiilor de creștere și resetare.

7.2 Distribuții experimentale ale dimensiunilor copacilor

Bazele noastre de date conțin măsurători exhaustive ale diametrelor copacilor la înălțimea pieptului, formând opt seturi de date privind dimensiunile copacilor [55]. Pe baza acestor seturi de date, am calculat distribuțiile de DBH pentru fiecare specie și ecosistem în parte. În Figura 7.1, aceste distribuții de DBH sunt prezentate. Pe baza acestei figuri, se poate observa deja diferența semnificativă dintre distribuțiile de DBH în pășuni, păduri și plantații.

Rescalarea valorilor DBH cu media lor corespunzător ($x \rightarrow y = \frac{x}{\langle x \rangle}$) a dus la colapsul funcțiilor de distribuție rezultate (panourile inferioare ale Figurii 7.1). În ecosistemele naturale, această distribuție convergentă urmează distribuția Gamma, în timp ce în plantații corespunde distribuției Normale. Această suprapunere a distribuțiilor de DBH dezvăluie o universalitate intrigantă în aceste medii, oferind informații valoroase despre dinamica lor comparativă.

7.3 Modelare prin intermediul modelului LGGR

Pentru modelare, aplicăm din nou cadrul de modelare LGGR. Așa cum s-a anticipat în secțiunea care descrie datele experimentale, pădurile seminaturale studiate și medii vechi de pășune, datorită existenței lor îndelungate, se află deja într-o stare de echilibru.

Rata de creștere

Pentru a determina forma matematică a ratei de creștere, am utilizat date de la Serviciul Național al Parcurilor din Statele Unite [54]. Rata de creștere anuală, identificată din grosimea inelelor de creștere ale copacilor, a fost analizată pentru trei genuri

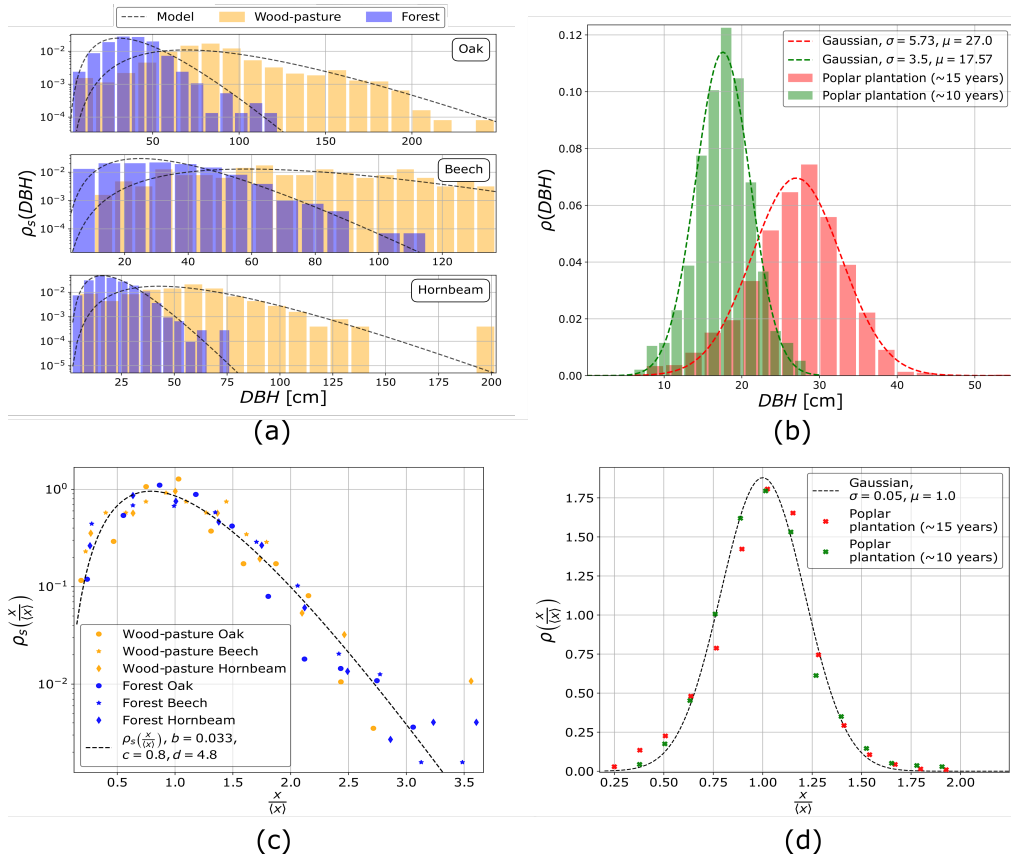


Figura 7.1: Funcțiile empirice de densitate a probabilității care reprezintă distribuțiile de DBH sunt ilustrate. În panoul (a), distribuțiile pentru pădurile naturale (albastru) și pășunile cu arbori (portocaliu) sunt prezentate alături de distribuția Gamma obținută din modelul LGGR (Ecuția 7.4). Panoul (b) afișează distribuția de DBH într-o plantație de plop de 10 ani (verde) și una de 15 ani (roșu), ambele cu antecedente ecologice similare. Distribuțiile experimentale sunt comparate cu distribuții Gaussiene. Graficul tip histogramă însoțitor servește ca un ajutor vizual suplimentar, accentuând diferențele în valorile medii ale DBH. Panourile (c) și (d) ilustrează distribuțiile valorilor relative ale DBH ($x \rightarrow y = \frac{x}{\langle x \rangle}$). Panoul (c) prezintă distribuția de DBH în pădurile seminaturale (aceleași date ca în panoul (a)), în timp ce panoul (d) corespunde celor două plantații (aceleași date ca în panoul (b)).

de arbori, după cum este ilustrat în Figura 7.2a. Rata de creștere anuală medie este reprezentată în funcție de $DBH/\langle DBH \rangle$ (DBH măsurat aproximativ la 1 m de la sol). O reprezentare matematică adecvată a ratei de creștere, care se aliniază cu datele, este:

$$\sigma(x) = d_1 \frac{x}{x + b}, \quad b \geq 0, \quad (7.1)$$

unde d_1 și b sunt constante pozitive. În Figura 7.2, trendul care se potrivește cu rata experimentală de creștere este definit de Ecuția 7.1.

Ratele de resetare și diversificare

Mortalitate și recrutare: Având în vedere că rata de recrutare prezintă o resetare semnificativă negativă pentru dimensiunile mai mici ale copacilor și rata de mortali-

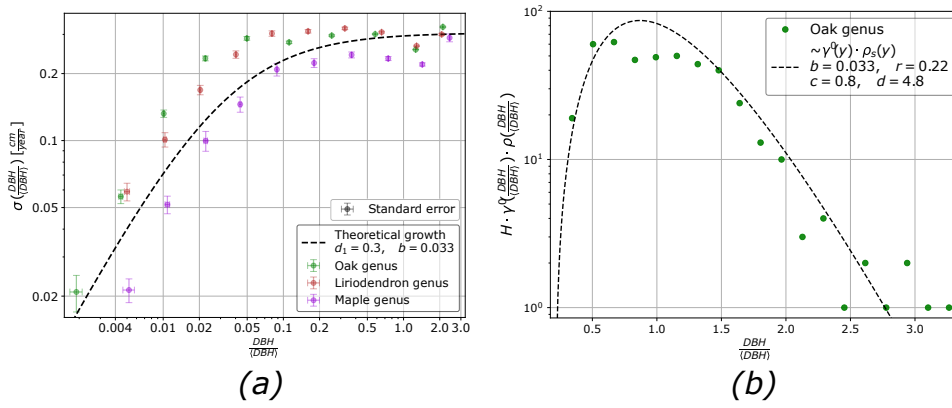


Figura 7.2: (a) Rata de creștere a fost dedusă din datele privind lățimea inelelor de creștere ale copacilor, reprezentată pe o scară logaritmică în funcție de diametrul relativ al trunchiului copacului la un metru deasupra solului pentru trei genuri de arbori (specificați în legendă). Linia punctată reprezintă trendul definit de Ecuația 7.1, cu parametrii asociați afișați în figură. Barele de eroare reprezintă eroarea standard în jurul punctelor de date. (b) Alinierea între distribuția dimensiunilor relativă a arborilor morți și produsul ratei de resetare aleasă și distribuția potrivită a dimensiunilor arborilor. Histograma ilustrează distribuția dimensiunilor arborilor de stejar morți în parcurile naționale din SUA, cu dimensiunile redimensionate în raport cu media. Potrivirea este definită ca $H \cdot \rho_s(y) \gamma'(y)$, incluzând o constantă H necesară pentru aliniere cu histograma experimentală. Potrivirea este determinată de $r = 0.22$ și parametrii estimați din funcția de densitate a probabilității experimentale (Figura 7.1a). Datele utilizate aici au fost obținute din [54].

tate este o funcție convergentă, având valori pozitive pentru dimensiunile mai mari ale copacilor [56, 57], impactul combinat al acestor funcții aproximează o funcție crescătoare, dar convergentă.

Diversificare: Prin diversificare, noi arbori tineri de diferite specii par să înlocuiască arborii bătrâni care mor. În consecință, numărul de arbori care aparțin unei specii scade multiplicativ. Această scădere multiplicativă a arborilor unei specii specifice duce la o scădere exponențială a abundenței acestora în timp. Această scădere exponențială a numărului de arbori introduce un termen similar cu resetarea, independent de starea inițială ($\kappa < 0$) în ecuația evolutivă.

Prin combinarea funcției de resetare motivat de procesele de mortalitate și recrutare cu rata negativă de diversificare (κ), forma rezultată a ratei de resetare va fi următoarea:

$$\gamma(x) = f_1 \frac{x - r}{x + b} + \kappa \equiv d_2 \frac{x - c}{x + b}, \quad (7.2)$$

where:

$$c = \frac{f_1 r - b \kappa}{f_1 + \kappa} > r > 0, \quad (7.3)$$

$$d_2 = (f_1 + \kappa) < f_1 \quad \text{and} \quad d_2 > 0.$$

În Ecuația 7.3, r , b și f_1 sunt constante pozitive.

Distribuția staționară a dimensiunilor

Având în vedere funcțiile de creștere (Ecuația 7.1) și de resetare (Ecuația 7.3), forma funcției de densitate de probabilitate staționară deja renormalizată la valoarea medie

a DBH-ului ($\rho_s(y)$) este:

$$\rho_s(y) = \frac{d^{cd}}{\left(\frac{c}{(1-c)d}\right)\Gamma[cd]} e^{-dy} y^{dc-1} \left(y + \frac{c}{(1-c)d} - c \right), \quad (7.4)$$

unde $d = d_2/d_1$. După cum este ilustrat în Figura 7.1c, distribuția $x/\langle x \rangle$ în păduri și pășuni forestiere se aliniază, prezentând o aproximare bună la forma dată de Ecuația 7.4. Parametrii de potrivire sunt enumerați în legenda figurii.

7.4 Discuții

Cu date referitoare la distribuția dimensiunilor arborilor morți în diverse păduri mature, putem evalua adecvarea ratei de resetare propuse. Utilizând $\rho_s(y)$ (Ecuația 7.4), ne așteptăm ca forma distribuției dimensiunilor arborilor morți să semene cu produsul $\rho_s(x) \cdot \gamma'(x)$, unde $\gamma'(x)$ este definită de Ecuația 7.3 când $\kappa = 0$. Pentru a evalua validitatea acestei rate de resetare, am utilizat din nou datele din [54], concentrându-ne în mod specific pe diametrul arborilor morți ($\rho_s(y) \cdot \gamma'(y)$). Figura 7.2b ilustrează histograma arborilor morți din specia de stejar. Linia punctată reprezintă o potrivire definită de $\rho_s(y) \cdot \gamma'(y)$, cu parametrii indicați în legenda. Parametrii de potrivire au fost determinați prin minimizarea Eroarei Logaritmice Medie Pătratică prin iterație pe o rețea fină în spațiul parametrilor. O considerație egală a fost acordată ajustării datelor de creștere (Figura 7.2a), datelor de rată de resetare (Figura 7.2b), și datelor de distribuție a DBH (Figura 7.1a) în selectarea parametrilor. În același timp, am minimizat Eroarea Logaritmă Medie Pătrată Radicale pentru toate cele trei cantități.

Înțelegerea modelelor de diversitate a dimensiunilor arborilor în medii naturale cu frunze căzătoare reprezintă o provocare complexă, necesitând noi date și modele matematice realiste. Contribuția noastră implică prezentarea unor dovezi noi pentru a susține validitatea distribuției Gamma [58] în pădurile cu frunze căzătoare. Am analizat date cuprinzătoare de măsurători pentru trei taxe de arbori în ecosisteme distincte. Am arătat o universalitate statistică intrigantă. Odată ce diametrele arborilor sunt redimensionate folosind diametrul mediu pentru fiecare specie în cadrul ecosistemului, toate seturile de date se unesc într-o distribuție unificată. Observațiile din plantațiile tinere de plop indică modele distincte de diversitate a dimensiunilor, asemănătoare unei distribuții Normale. Prin urmare, aceste rezultate implică utilizarea unei potriviri de tip Gamma a distribuției dimensiunilor arborilor ca indicator potențial al naturalității și maturității pădurilor. Am ales un model simplu, analitic rezolvabil cu doar doi parametri liberi în locul unui model cantitativ complex cu numeroase necunoscute. Deoarece accentul nostru principal nu a fost pe furnizarea unor analize statistice robuste, ci mai degrabă pe elaborarea unei abordări analitice fundamentate metodologic, optimizările noastre de parametri au fost îndreptate către asigurarea unei determinări consistente a parametrilor modelului în cadrul structurii acestuia. Pentru a întări încrederea în model, colectarea ulterioară de date de înaltă calitate este crucială.

CONCLUZII GENERALE

În rezumatul general al tezei repetăm principalele idei și rezultate prezentate în această teză. Teza actuală conține patru studii de modelare a fenomenelor observate în sisteme socio-economice și biologice. Aceste patru studii sunt legate prin faptul că pentru fiecare dintre ele a fost aplicat modelul de creștere locală și reset global. Teza oferă, de asemenea, o prezentare pedagogică a modelului LGGR.

Partea a doua a tezei conține modelarea fenomenelor din sistemele socio-economice. În cadrul acestei categorii, am prezentat modelarea distribuțiilor de avere în țări cu economii relativ stabile, precum și într-o comună din România. Primul studiu (Capitolul 3) aparținând acestei teme se ocupă de distribuția averii individuale în Statele Unite ale Americii, Rusia și Franța. În cazul SUA și Rusia, prezența averii negative în date sugerează existența datoriilor în aceste societăți și, de asemenea, Modelul nostru se potrivește întregului spectru de avere, depășind modelul Bouchaud și Mezard, în special pentru valori mici ale averii.

În al doilea studiu din această parte a tezei (Capitolul 5), am aplicat modelul LGGR pentru modelarea distribuției averii într-o mică comunitate din Transilvania. Analiza cuprinzătoare a modelelor de distribuție a averii oferă o privire revelatoare asupra dinamicii economice pe parcursul diferitelor perioade: 1961 - începutul comunismului; 1989 - ultimul an al comunismului; și 2021 - imaginea economică actuală a comunei. Studiul dezvăluie complexitatea dinamicii distribuției averii în diferite sisteme economice. Datele empirice colectate validează modelul teoretic.

Al treilea capitol, deși încă puternic legat de sistemele socio-economice, diferă semnificativ de cele două anterioare. În Capitolul 6 am folosit modelul LGGR pentru a descrie dinamica valorilor Jackpot-ului pentru șase loterii: Powerball, Megamillions, Euromillions, loteria canadiană, loteria britanică și loteria Texas. Evoluția emergentă a valorii Jackpot-ului este influențată de reguli simple, comportamentul jucătorilor care influențează vânzările de bilete și o rată de reset probabilistică declanșată de câștigurile ocazionale. Având în vedere creșterea liniară și o relație intrinsecă de creștere-resetare, modelul LGGR generează o funcție de densitate a probabilității în concordanță cu distribuțiile Jackpot observate.

Ultimul studiu (Capitolul 7) iese din sfera socio-economică și vizează sistemele biologice. Se ocupă de provocarea complexă a înțelegerii modelelor de diversitate în dimensiunile arborilor din medii naturale de pădure și pajiști cu arbori. Bazându-ne pe literatura existentă, confirmăm că distribuția diametrelor arborilor din specii specifice de foioase se aliniază cu o distribuție Gamma în pădurile naturale mature. Încorporând mecanisme care ghidează evoluția populațiilor de arbori, în forme matematice simple ale ratelor de creștere și resetare, modelul propus capturează cu succes această universalitate, sugerând parametri consistenti în cadrul taxonilor și mediilor. În plus, studiem plantațiile tinere de plop, observând modele distincte care seamănă cu o distribuție

normală. Această diferență se atribuie condițiilor artificial create, aproape identice pentru fiecare arbore și imaturitatea acestor plantații. Sugerăm investigații viitoare în dinamica creșterii, resetării și diversificării în medii forestiere similare.

Rezultatele prezentate aici subliniază faptul că modelul de Creștere Locală și Reset Global oferă un cadru cuprinzător pentru înțelegerea fenomenelor observate în sisteme socio-economice și biologice.

Publicații

Publicații în reviste ISI:

- István Gere, **Szabolcs Kelemen**, Géza Tóth, Tamás S. Biró, and Zoltán Neda. *Wealth distribution in modern societies: Collected data and a master equation approach*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 581, 126194, (2021)

Impact factor: 3.778

AIS: 0.530

- István Gere, **Szabolcs Kelemen**, Tamás S. Biró and Zoltán Neda. *Wealth Distribution in Villages. Transition From Socialism to Capitalism in View of Exhaustive Wealth Data and a Master Equation Approach*. Frontiers in Physics, Vol. 10, 827143, (2022)

Impact factor: 3.718

AIS: 0.815

- **Szabolcs Kelemen**, Máté Józsa, Tibor Hartel, György Csóka and Zoltán Neda. *Tree size distribution as the stationary limit of an evolutionary master equation*. Scientific Reports, Vol. 14, 1168, (2024)

Impact factor: 4.997

AIS: 1.132

- István Gere, **Szabolcs Kelemen**, Zoltán Neda and Tamás S. Biró. *Jackpot statistics, a physicist's approach*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 637, 129605, (2024)

Impact factor: 3.778

AIS: 0.530

Alte publicații:

- **Szabolcs Kelemen**, Levente Varga, and Zoltán Neda. *Cross-correlations in the Brownian motion of colloidal nanoparticles*. Studia Universitatis Babes-Bolyai, Physica Vol. 65, 27-34 (2020)

Prezentări orale la conferințe

- István Gere, **Szabolcs Kelemen**, Tamás S. Biró and Zoltán Neda. (24-26 August, 2022) *Wealth inequality patterns based on exhaustive sampling. Data mining and modeling*. Econophysics Colloquium 2022
- **Szabolcs Kelemen**, István Gere, Tamás S. Biró and Zoltán Neda. (17-18 November, 2023) *A brief review of the LGGR model and its possible applications*. ICAS 2023: The 16th International Conference on Applied Statistics

Prezentări poster

- **Szabolcs Kelemen**, Levente Varga, and Zoltán Nédá. (11-13 May, 2021) *Cross-correlations in the Brownian motion of colloidal nanoparticles* MECO46: 46th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics
- István Gere, **Szabolcs Kelemen**, Tamás S. Biró and Zoltán Nédá. (12-16 June, 2022) *Wealth inequalities in different socio-economical situations. Exhaustive data and a general modeling framework.* MECO47: 47th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics
- **Szabolcs Kelemen**, Máté Józsa, Tibor Hartel, György Csóka and Zoltán Nédá. (22-26 May, 2023) *Tree size distribution in the perspective of the Local Growth and Global Reset (LGGR) model.* MECO48: 48th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics
- **Szabolcs Kelemen**, Máté Józsa, József Benedek Cristian Litan and Zoltán Nédá. (10-14 July, 2023) *Handling incomplete information: Gini coefficient from coarse-grained data.* SigmaPhi 2023

BIBLIOGRAFIE SELECTATĂ

- [1] S.G. Brush et al., *Statistical Physics and the Atomic Theory of Matter: From Boyle and Newton to Landau and Onsager*, 1983.
- [2] Per Bak, *How Nature Works*, 1996.
- [3] Nino Boccara, *Modeling Complex Systems*, 2010.
- [4] J. van Brakel, *Archive for History of Exact Sciences*, 31, 1985, pp. 369–385.
- [5] Vitaly Vanchurin et al., *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 119, 2022, e2120042119.
- [6] Hong Qian and Lisa M. Bishop, *International Journal of Molecular Sciences*, 11, 2010, pp. 3472–3500.
- [7] Wolfgang Weidlich and Martin Braun, *Journal of Evolutionary Economics*, 2, 1992, pp. 233–265.
- [8] Zoltán Nédá et al., *PLOS ONE*, 12, 2017, e0179656.
- [9] Robert Brown, *A Brief Account of Microscopical Observations... on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies*, 1828.
- [10] W. Ebeling et al., *Acta Physica Polonica B*, B39, 2008.
- [11] Willy Feller, *Acta Biotheoretica*, 5, 1939, pp. 11–40.
- [12] A. Nordsieck et al., *Physica*, 7, 1940, pp. 344–360.
- [13] Markus F Weber and Erwin Frey, *Reports on Progress in Physics*, 80, 2017, p. 046601.
- [14] N. G. van Kampen, *Canadian Journal of Physics*, 39, 1961, pp. 551–567.
- [15] Tamás S. Biró and Zoltán Nédá, *Physical Review E*, 95, 2017.

- [16] T.S. Biró and Z. Nédá, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 499, 2018, pp. 335–361.
- [17] Tamás S. Biró and Zoltán Nédá, *Entropy*, 21, 2019, p. 993.
- [18] Zoltán Nédá et al., *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 549, 2020, p. 124491.
- [19] István Gere et al., *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 581, 2021, p. 126194.
- [20] Branko Milanovic, *Global Inequality*, 2016.
- [21] Géza Hegyi et al., *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 380, 2007, pp. 271–277.
- [22] Vilfredo Pareto, *Journal of political economy*, 5, 1897, pp. 485–502.
- [23] A. Drăgulescu and V.M. Yakovenko, *The European Physical Journal B*, 20, 2001, pp. 585–589.
- [24] Jean-Philippe Bouchaud and Marc Mézard, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 282, 2000, pp. 536–545.
- [25] Zoltán Nédá et al., *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 468, 2017, pp. 147–157.
- [26] Victor M. Yakovenko and J. Barkley Rosser, *Reviews of Modern Physics*, 81, 2009, pp. 1703–1725.
- [27] Dan Cao and Wenlan Luo, *Review of Economic Dynamics*, 26, 2017, pp. 301–326.
- [28] World Inequality Database, *Data - WID - World Inequality Database*, <https://wid.world/data/>, [Accessed 20-11-2023].
- [29] James B. Davies et al., *The Economic Journal*, 121, 2010, pp. 223–254.
- [30] F Clementi et al., *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2012, P12006.
- [31] Rosie Dunford et al., *The Race*, 2021.
- [32] Oren S. Klass et al., *Economics Letters*, 90, 2006, pp. 290–295.
- [33] Ernst Árpád Varga, *Erdély etnikai és felekezeti statisztikája. IV. Fehér, Beszterce-Naszód és Kolozs megye. Népszámlálási adatok 1850-1992 között*, 2001.
- [34] Max O. Lorenz, *Publications of the American Statistical Association*, 9, 1905, pp. 209–219.
- [35] Catalin Barboianu, *The Mathematics of Lottery: Odds, Combinations, Systems*, 2009.
- [36] V. Ariyabuddhipongs, *Journal of Gambling Studies*, 27, 2010, pp. 15–33.
- [37] Ian Walker, *Economic Policy*, 13, 1998, pp. 357–402.
- [38] Lisa Farrell et al., *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 61, 1999, pp. 513–526.
- [39] Aug 25, 2015 - Changing Powerball to make it obnoxiously harder to win. See why they have to change it. <https://lottoreport.com/PB2015Rule.htm>, [Accessed 08-10-2023].

-
- [40] 2017, 2016, 2015, 2014 Powerball and Powerplay draw sales, <https://lottoreport.com/powerballsales4.htm>, [Accessed 08-10-2023].
- [41] Euro-Millions.com, *Changes to EuroMillions*, <https://www.euro-millions.com/changes>, [Accessed 08-10-2023].
- [42] *LottoTexas.com - 2017 Mega Millions Rule Change. Obviously, the game is not intended to be won very often!*, <https://lottoreport.com/MMRules.htm>, [Accessed 08-10-2023].
- [43] *Texas Lotto Report - How Lotto Texas monies are distributed*. <https://lottoreport.com/ThePayouts.htm>, The Powerball, Megamillions, and Texas lotto rules and datasets were scraped from the <https://lottoreport.com> website, which is an open archive of US lotteries. [Accessed 08-10-2023].
- [44] Take That Ltd National-Lottery.com, *Canada 6/49 Draw Results Archive: 2012*, <https://www.national-lottery.com/canada-6-49/results/2012-archive>, [Accessed 08-10-2023].
- [45] BeatLottery.co.uk, *Lotto Jackpots History : Lotto Statistics : Beat Lottery*, <https://www.beatlottery.co.uk/lotto/statistics>, [Accessed 08-10-2023].
- [46] 2018, 2019, 2020, 2021 Powerball and Powerplay draw sales, <https://lottoreport.com/powerballsales5.htm>, [Accessed 08-10-2023].
- [47] *Mega Millions - 2012, 2011, 2010, 2009, 2008, 2007 Draw sales and jackpot amounts by date*. <https://lottoreport.com/mmsales3.htm>, [Accessed 08-10-2023].
- [48] *Téléchargement des résultats Euro Millions*, <https://www.loterieplus.com/euromillions/services/telechargement-resultat.php>, [Accessed 08-10-2023].
- [49] *Total sales and jackpot amounts for each of the Lotto Texas drawings*. https://lottoreport.com/lottosales1999_2001.htm, [Accessed 08-10-2023].
- [50] Shin-Ichi Yamamoto, *Journal of Forest Research*, 5, 2000, pp. 223–229.
- [51] Biman Chakraborty et al., *Journal of Biological Physics*, 48, 2022, pp. 295–319.
- [52] Takashi Kohyama et al., *Journal of Ecology*, 91, 2003, pp. 797–806.
- [53] Zsófia Szegleti et al., *Data in Brief*, 47, 2023, p. 108929.
- [54] John P. Schmit et al., *National Capital Region Network Long-Term Forest Vegetation Monitoring Protocol: Version 2.1 (March, 2014)*.
- [55] Szabolcs Kelemen et al., *Diameter at Breast Height (DBH) data of temperate zone trees from different woodland types*. Figshare DOI: <https://doi.org/10.6084/M9.FIGSHARE.24039429>.
- [56] David A. Coomes and Robert B. Allen, *Journal of Ecology*, 95, 2006, pp. 27–40.
- [57] Evan M. Gora and Adriane Esquivel-Muelbert, *Nature Plants*, 7, 2021, pp. 384–391.
- [58] Renato Augusto Ferreira de Lima et al., *Forest Science*, 61, 2015, pp. 320–327.
-