UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Noi rezultate în teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă

Teză de doctorat - Rezumat

Conducător ştiinţific:
Prof. Univ. Dr. Sălăgean Grigore Ştefan

Doctorand:
Szatmari (căs. Gavriş) Eszter

Cluj-Napoca
2023

Mulţumiri

Aş dori să îmi exprim recunoştinţa conducătorului meu de doctorat, profesor dr. Sălăgean Grigore Ştefan, pentru îndrumarea, sugestiile şi ideile sale preţioase pe parcursul studiilor mele de doctorat.

De asemenea, aş vrea să mulţumesc pentru ajutorul şi comentariile valoroase ale membrilor comisiei de îndrumare.

În final, dar nu în ultimul rând sunt recunoscătoare familiei mele pentru tot sprijinul lor.

Cuvinte cheie

funcţie analitică, funcţie univalentă, funcţie stelată, funcţie gama-stelată de ordin alfa, funcţie convexă, funcţie aproape convexă, funcţie meromorfă, funcţii cu argument variabil, funcţii bi-univalente, funcţii m-simetrice, compunerea funcţiilor, convoluţie, puncte extreme, subordonare diferenţială, operator diferenţial Sălăgean, operator diferenţial Ruscheweyh, operator fracţional, operator diferintegral fracţional, operator integral Sălăgean, operator integral Bernardi, operator integro-diferenţial, estimări ale coeficienţilor, inegalităţi Fekete-Szegő, determinant Hankel, medie aritmetică, medie geometrică, medie armonică, polinoame Chebyshev, serii de distribuţie Poisson.

Mathematics Subject Classification 2020: 30C45, 30C50, 30C80.

Cuprins

Introducere

Teoria geometrică a funcţiilor este o ramură a analizei complexe, care studiază proprietăţile geometrice ale funcţiilor analitice. Primele lucrări semnificative din teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă au apărut la începutul secolului al XX-lea. P. Koebe cu lucrarea publicată în anul 1907 ([68]), a atras atenţia cercetătorilor asupra studiului funcţiilor univalente. Ulterior a fost obţinut un rezultat important, teorema ariei, de către T. Gronwall ([47]) şi apoi de către L. Bieberbach ([16, 17]). L. Bieberbach a mai obţinut şi o delimitare pentru modulul coeficientului a_2 al unei funcţii univalente ([17]) şi a enunţat faimoasa ipoteză privind în general coeficienţii a_n, unde $n = 2, 3, \ldots$ (v. Conjectura 1.1.1), care a fost demonstrată abia în anul 1984, de către L. de Branges ([30]). De asemenea, L. Bieberbach în [17] a mai obţinut şi o delimitare exactă pentru modulul expresiei $a_3 - a_2^2$ în cazul unei funcţii univalente.

După publicarea acestor rezultate, direcţiile de cercetare au devenit din ce în ce mai variate. Mai mulţi matematicieni renumiţi au studiat şi au adus contribuţii importante în acest domeniu. S-au evidenţiat cu rezultatele lor deosebite şi unii matematicieni români, precum G. Călugăreanu şi P. T. Mocanu. G. Călugăreanu în [21, 22] a obţinut condiţii necesare şi suficiente de univalenţă a unei funcţii olomorfe într-un disc cu centrul în origine. P. T. Mocanu în [88] a stabilit o legătură între funcţiile stelate, respectiv convexe, prin introducerea funcţiilor alfa-convexe. O metodă revoluţionară, metoda subordonărilor diferenţiale (sau metoda funcţiilor admisibile) a fost obţinută de S. S. Miller şi P. T. Mocanu în [83, 84]. Cu ajutorul acestei metode o serie de rezultate cunoscute anterior s-au putut demonstra mai uşor, şi numeroase rezultate noi s-au obţinut ulterior.

Printre numeroasele tratate şi monografii consacrate analizei complexe, respectiv teoriei geometrice a funcţiilor de una sau mai multe variabile complexe, amintim pe cele ale lui P. T. Mocanu, G. Ş. Sălăgean şi T. Bulboacă [92], S. S. Miller şi P. T. Mocanu [85], I. Graham şi G. Kohr [46], C. Pommerenke [108], P. L. Duren [32], G. Kohr şi P. T. Mocanu [70], P. Hamburg, P. T. Mocanu şi N. Negoescu [50], P. T.

Mocanu, D. Breaz, G. I. Oros şi Gh. Oros [91], G. Ş. Sălăgean [118], G. Kohr [69], G. Kohr şi P. Liczberski [71], P. Curt [29], T. Bulboacă [18], A. W. Goodman [42], L. V. Ahlfors [2], D. J. Hallenbeck şi T. H. MacGregor [49].

În prezenta teză sunt continuate cercetările care fac parte din şcoala de matematică clujeană de teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă şi sunt obţinute unele rezultate care extind alte rezultate obţinute de matematicieni din ţară şi din alte ţări. Sunt studiate clase de funcţii analitice, meromorfe, respectiv biunivalente, unele dintre ele fiind definite cu ajutorul unor operatori. De asemenea, sunt obţinute rezultate referitoare la subordonări diferenţiale. Teza este structurată în patru capitole.

În primul capitol sunt prezentate atât noţiuni şi rezultate de bază din teoria geometrică a funcţiilor, cât şi clase speciale de funcţii, metoda subordonărilor diferenţiale, respectiv operatori diferenţiali şi integrali. Am încercat să fac o prezentare într-o formă unitară, urmărind în acelaşi timp să evidenţiez definiţiile şi rezultatele folosite în capitolele următoare.

Astfel, în paragraful 1.1 sunt prezentate noţiuni de bază referitoare la funcţii univalente şi funcţii meromorfe. Este enunţată conjectura lui Bieberbach privind estimarea coeficienţilor unei funcţii univalente, respectiv Teorema lui de Branges, inegalitatea Fekete-Szegő pentru funcţii univalente, un criteriu de univalenţă pentru o funcţie analitică, proprietatea privind relaţia de bijecţie existentă între clasa funcţiilor univalente şi o subclasă a clasei funcţiilor meromorfe.

În paragraful 1.2 sunt prezentate diferite clase de funcţii, precum clasa funcţiilor Carathéodory, clasa funcţiilor Schwarz, clasa funcţiilor stelate, convexe, aproape convexe, alfa-convexe, gama-stelate, stelate de ordin α, convexe de ordin α, gama-stelate de ordin alfa, tare stelate de ordin γ, tare convexe de ordin γ, δ-uniform convexe, δ-uniform stelate, precum şi alte clase de funcţii asociate stelarităţii şi convexităţii. Sunt enunţate şi proprietăţi pentru unele dintre aceste clase, precum estimări ale coeficienţilor, inegalităţi Fekete-Szegő, condiţii de apartenenţă a unei funcţii analitice la o anumită clasă.

În paragraful 1.3 este descrisă metoda subordonărilor diferenţiale (sau metoda funcţiilor admisibile).

În paragraful 1.4 sunt prezentate clasele de funcţii meromorfe stelate, respectiv convexe. Sunt enunţate condiţii necesare şi suficiente de stelaritate şi convexitate pentru funcţii meromorfe.

În paragraful 1.5 sunt prezentaţi operatori, precum operatorul diferenţial Sălăgean

$\mathcal{D}^n$, operatorul integral Sălăgean $\mathcal{I}^n$, operatorul Ruscheweyh $\mathcal{R}^\lambda$, operatorul diferintegral fracţional Ω_z^λ, operatorul fracţional $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$, operatorul diferenţial Al-Oboudi $\mathcal{D}_\delta^n$, operatorul integral Sălăgean generalizat $\mathcal{I}_\delta^n$ definit de J. Patel, operatorul integral Bernardi $\mathcal{L}_c$.
Cu excepţia Observaţiei 1.5.7, Observaţiei 1.5.9 şi Observaţiei 1.5.11, capitolul nu conţine rezultate originale. Observaţiile menţionate se găsesc în lucrarea [129].

În al doilea capitol sunt obţinute rezultate asupra funcţiilor analitice sau meromorfe folosind operatori.
În paragraful 2.1 sunt obţinute diferite rezultate utilizând operatorul fracţional $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$, care este compunerea operatorului diferintegral fracţional Ω_z^λ, operatorului Sălăgean $\mathcal{D}^n$ şi operatorului Ruscheweyh $\mathcal{R}^\nu$.
În cadrul subparagrafului 2.1.1 este introdusă o clasă de funcţii analitice definită de acest operator. Sunt obţinute relaţii de incluziune între diferite subclase ale clasei, condiţii de apartenenţă la clasă a convoluţiei a două funcţii analitice, este demonstrată convexitatea clasei, sunt obţinute punctele extreme ale clasei şi alte proprietăţi ale clasei. Cu excepţia Teoremei 2.1.1, rezultatele din acest paragraf sunt originale şi se găsesc în lucrarea [129], lucrare publicată în Mediterranean Journal of Mathematics, revistă cotată ISI cu factorul de impact 1,305.
În celelalte subparagrafe sunt investigate subordonări diferenţiale, sunt obţinute proprietăţi geometrice ale funcţiilor analitice, delimitări ale coeficienţilor şi inegalităţi Fekete-Szegő pentru clase de funcţii analitice. Toate rezultatele din aceste subparagrafe sunt obţinute folosind operatorul fracţional $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$. Cu excepţia Lemei 2.1.1, Corolarului 2.1.5, Corolarului 2.1.6, Corolarului 2.1.7, Corolarului 2.1.8, Corolarului 2.1.9 şi Corolarului 2.1.10, rezultatele din aceste subparagrafe sunt originale şi se găsesc în lucrările [39, 130, 131].
Majoritatea rezultatelor din acest paragraf sunt extinderi ale rezultatelor obţinute anterior de alţi matematicieni.
În paragraful 2.2 este introdusă o clasă de funcţii meromorfe definită cu ajutorul unui operator fracţional definit în mod similar cu operatorul $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$. Sunt obţinute relaţii de incluziune între unele subclase ale clasei şi condiţii de apartenenţă la clasă a unor operatori integrali. Rezultatele obţinute sunt generalizări ale unor rezultate obţinute de alţi matematicieni. Cu excepţia Lemei 2.2.1, rezultatele din acest paragraf sunt originale şi se găsesc în lucrarea [37].
În paragraful 2.3 este definit un nou operator, care generalizează mai mulţi operatori introduşi de alţi matematicieni. Noul operator este definit cu ajutorul operatorilor $\Omega_z^\lambda, \mathcal{D}^n, \mathcal{R}^\nu$. Este introdusă o clasă de funcţii analitice folosind noul operator şi

sunt obţinute proprietăţi ale acestei clase. Sunt de asemenea investigate subordonări diferenţiale folosind acest operator. Rezultatele din acest paragraf sunt originale şi se găsesc în lucrarea [133].

În paragraful 2.4 sunt obţinute relaţii de incluziune între clasele de funcţii δ-uniform convexe, δ-uniform stelate, clasele $\mathcal{S}^*_\lambda, \mathcal{C}_\lambda$ şi clasa $US(n,\alpha)$, clasă definită cu ajutorul operatorului diferenţial Sălăgean $\mathcal{D}^n$. Aceste relaţii de incluziune sunt asociate seriilor de distribuţie Poisson. Cu excepţia Teoremei 2.4.1, rezultatele din acest paragraf sunt originale şi se găsesc în lucrarea [36].

În paragraful 2.5 este introdus operatorul integro-diferenţial Sălăgean generalizat, folosind operatorul diferenţial Al-Oboudi $\mathcal{D}^n_\delta$ şi operatorul integral Sălăgean generalizat $\mathcal{I}^n_\delta$. Acest operator generalizează operatorul introdus de Á. O. Páll-Szabó în lucrarea [104]. Sunt investigate subordonări diferenţiale şi sunt generalizate rezultate cunoscute. Rezultatele din acest paragraf sunt originale şi se găsesc în lucrarea [38].

În al treilea capitol sunt obţinute diverse rezultate asupra unor clase de funcţii analitice asociate stelarităţii şi convexităţii.

În paragraful 3.1 sunt generalizate diverse subordonări diferenţiale implicând medii aritmetice, geometrice, respectiv armonice ale expresiilor $p(z)$ şi $p(z)+\frac{zp'(z)}{p(z)}$. Se obţine un criteriu de stelaritate şi un criteriu de tare stelaritate de ordin θ pentru funcţii analitice. Cu excepţia Lemei 3.1.1, rezultatele din acest paragraf sunt originale şi se găsesc în lucrarea [35], lucrare publicată în Mathematica Slovaca, revistă cotată ISI cu factorul de impact 0,996. În lucrarea [73] autorii au extins rezultatele din acest paragraf.

În paragraful 3.2, după prezentarea polinoamelor Chebyshev, sunt obţinute estimări ale coeficienţilor, respectiv o inegalitate Fekete-Szegő pentru o clasă de funcţii analitice care satisfac o condiţie de subordonare asociată polinoamelor Chebyshev. Rezultatele obţinute sunt generalizări ale unor rezultate cunoscute. Cu excepţia Corolarului 3.2.1, Corolarului 3.2.2 şi Corolarului 3.2.3, rezultatele din acest paragraf sunt originale şi se găsesc în lucrarea [132]. Autorii lucrărilor [54], [124] au extins rezultatele din acest paragraf.

În paragraful 3.3 sunt prezentate funcţiile bi-univalente, funcţiile m-simetrice. Apoi sunt obţinute estimări ale coeficienţilor şi inegalităţi Fekete-Szegő pentru o nouă subclasă de funcţii bi-univalente m-simetrice care satisfac condiţii de subordonare. Rezultatele obţinute generalizează alte rezultate cunoscute. Cu excepţia Corolarului 3.3.9, rezultatele din acest paragraf sunt originale şi se găsesc în lucrarea [41].

În paragraful 3.4 se obţine o delimitare pentru determinantul Hankel de ordinul doi pentru funcţii gama-stelate de ordin alfa, în cazul $0 \leq \gamma \leq 1$. Rezultatul obţinut extinde delimitările pentru determinantul Hankel de ordinul doi pentru alte clase de funcţii. Unele dintre aceste rezultate au fost obţinute de alţi matematicieni. Rezultatele din acest paragraf sunt originale şi se găsesc în lucrarea [40].

În ultimul capitol este definit un nou operator obţinut prin convoluţia operatorului Sălăgean $\mathcal{D}^n$ şi operatorului Ruscheweyh $\mathcal{R}^n$ şi este introdusă o clasă de funcţii analitice cu argument variabil definită de acest operator. Sunt de asemenea studiate proprietăţile imaginii acestei clase prin operatorul Bernardi. Rezultatele din acest capitol sunt originale şi se găsesc în lucrarea [106].

Bibliografia prezentei teze de doctorat conţine un număr de 147 titluri, 13 dintre acestea fiind semnate de autoare, 4 fiind în colaborare, iar 2 fiind publicate în reviste cotate ISI cu factor de impact.

Rezultatele originale prezentate în teză, sunt conţinute în următoarele articole:

1. **E. Szatmari**, *On a class of analytic functions defined by a fractional operator*, Mediterr. J. Math., 15:158, (2018). WoS, Factor de impact: 1,305

2. **E. Gavriş**, *Differential subordinations and Pythagorean means*, Math. Slovaca, 70 (2020). No. 5, 1135-1140. WoS, Factor de impact: 0,996

3. **E. Szatmari**, Ş. Altınkaya, *Coefficient estimates and Fekete-Szegő inequality for a class of analytic functions satisfying subordinate condition associated with Chebyshev polynomials*, Acta Univ. Sapientiae Math., 11 (2) (2019), 430-436. WoS

4. **E. Szatmari**, *Differential subordinations obtained by using a fractional operator*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 63 (4) (2018), 475-482. WoS

5. **E. Gavriş**, Ş. Altınkaya, *Coefficient estimates and Fekete-Szegő inequalities for a new subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions satisfying subordinate conditions*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 14 (2023) 1, 3145-3154 (electronic). WoS

6. **E. Gavriş**, *The second Hankel determinant for gamma-starlike functions of order alpha*, trimis spre publicare.

7. **E. Gavriş**, *On a class of meromorphic functions defined by using a fractional operator*, Mathematica (Cluj), 63 (86), No. 1, 2021, 77-84. Scopus

8. **E. Gavriş**, *Inclusion relations of analytic functions associated with Poisson distribution series and Sălăgean operator*, An. Univ. Oradea Fasc. Mat., 17 (2) 2020, 47-53. BDI

9. Á.O. Páll-Szabó, O. Engel, **E. Szatmari**, *Certain class of analytic functions with varying arguments defined by the convolution of Sălăgean and Ruscheweyh derivative*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform., 51 (2017), 61-74. BDI

10. **E. Gavriş**, *Differential subordinations obtained by using generalized Sălăgean integro-differential operator*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform., 71 (2022), 127-136. BDI

11. **E. Gavriş**, *Coefficient bounds and Fekete-Szegő problem for some classes of analytic functions defined by using a fractional operator*, trimis spre publicare.

12. **E. Szatmari**, *Some properties of analytic functions obtained by using a fractional operator*, Asia Pacific Journal of Mathematics, 5 (2) (2018), 151-172. Scopus

13. **E. Szatmari**, Á.O. Páll-Szabó, *Differential subordination results obtained by using a new operator*, General Mathematics, 25 (1-2) (2017), 119-131. BDI

O parte a rezultatelor originale, demonstrate în teză, au fost prezentate la următoarele conferinţe internaţionale:

1. 13th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications, 3-6 august 2017, Arad. Titlul prezentării: Some results using a fractional operator

2. 6th International Conference on Mathematics and Informatics, 7-9 septembrie 2017, Târgu Mureş. Titlul prezentării: Coefficient bounds and Fekete-Szegő problem for some classes of analytic functions defined by using a fractional operator

3. 3rd International Conference on Mathematics and Computer Science, 14-16 iunie 2018, Braşov. Titlul prezentării: Coefficient estimates and Fekete-Szegő inequalities for a new subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions satisfying subordinate conditions

4. XIX Conference on Analytic Functions and Related Topics, 25-29 iunie 2018, Rzeszów, Polonia. Titlul prezentării: Differential subordinations and Pythagorean means

5. 16th International Conference on Applied Mathematics and Computer Science, 3-6 iulie 2019, Cluj-Napoca. Titlul prezentării: The second Hankel determinant for gamma-starlike functions of order alpha

6. 7th International Conference on Mathematics and Informatics, 2-4 septembrie 2019, Târgu Mureş. Titlul prezentării: Differential subordinations obtained by using generalized Sălăgean integro-differential operator

Capitolul 1

Definiţii şi rezultate preliminare

Începem cu unele noţiuni şi rezultate din teoria geometrică a funcţiilor. Prezentăm prima dată clasa funcţiilor univalente, clasa funcţiilor meromorfe, clasa Carathéodory, clasa funcţiilor Schwarz, noţiunea de subordonare. Prezentăm clase variate de funcţii univalente, cum ar fi funcţii stelate, funcţii convexe, funcţii aproape convexe şi clase de funcţii asociate stelarităţii şi convexităţii. În următorul paragraf, metoda subordonării diferenţiale este descrisă. Subclase de funcţii meromorfe sunt de asemenea prezentate. Ultimul paragraf este dedicat unor operatori diferenţiali şi integrali.

1.1 Definiţii şi rezultate de bază din teoria funcţiilor univalente

Notăm planul complex cu $\mathbb{C}$ şi discul deschis de centru $z_0 \in \mathbb{C}$ şi rază $r > 0$ cu $\mathcal{U}(z_0, r)$,

$$\mathcal{U}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Notăm discul deschis $\mathcal{U}(0, r)$ cu $\mathcal{U}_r$ şi discul unitate $\mathcal{U}_1$ cu $\mathcal{U}$.

Fie $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ clasa funcţiilor analitice în $\mathcal{U}$. Pentru $a \in \mathbb{C}$ şi $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, fie

$$\mathcal{H}[a, n] = \{f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}) : f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots\}$$

şi

$$\mathcal{A}_n = \{f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}) : f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + \dots\},$$

cu $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$. Deci, dezvoltarea în serie a funcţiei $f \in \mathcal{A}$ este de forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.1}$$

Definiţia 1.1.1. *[92, p. I] O funcţie analitică într-un domeniu D spunem că este univalentă în acest domeniu dacă este injectivă în D.*

Vom nota cu $\mathcal{S}$ clasa funcţiilor univalente în $\mathcal{U}$, normate cu condiţiile $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$. Dezvoltarea în serie a unei funcţii $f \in \mathcal{S}$ este de forma (1.1).

Conjectura 1.1.1. ***(Conjectura lui Bieberbach)*** *[92, Conjectura 1.2.1, p. 6] Dacă funcţia $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ aparţine clasei $\mathcal{S}$, atunci $|a_n| \leq n, n = 2, 3, \ldots$.*

Conjectura lui Bieberbach a fost demonstrată de L. de Branges în 1984, folosind metoda lui Löwner.

Teorema 1.1.1. *[17] Dacă funcţia $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ aparţine clasei $\mathcal{S}$, atunci $|a_3 - a_2^2| \leq 1$. Rezultatul este exact.*

Unul dintre cele mai simple criterii de univalenţă este dat de teorema următoare, obţinută de K. Noshiro [95], S. Warschawski [145] şi J. Wolff [146].

Teorema 1.1.2. *[92, Teorema 4.5.1, p. 86] Dacă funcţia f este analitică în domeniul convex $D \subset \mathbb{C}$ şi există un număr $\gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\Re\left[e^{i\gamma} f'(z)\right] > 0, \quad z \in D,$$

atunci funcţia f este univalentă în D.

Notăm cu Σ clasa funcţiilor φ meromorfe cu un pol simplu $\xi = \infty$, univalente în $\mathcal{U}^- = \{\xi \in \mathbb{C}_\infty : |\xi| > 1\}$, care au dezvoltarea în serie Laurent de forma

$$\varphi(\xi) = \xi + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\xi} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\xi^n} + \ldots, \quad |\xi| > 1. \tag{1.2}$$

Fie

$$\Sigma_0 = \{\varphi \in \Sigma : \varphi(\xi) \neq 0, \xi \in \mathcal{U}^-\}.$$

Proprietatea 1.1.1. *[92, Proprietatea 1.1.2, p. 2] Există o bijecţie între clasele $\mathcal{S}$ şi Σ_0, deci clasa Σ este "mai largă" decât clasa $\mathcal{S}$.*

Observaţia 1.1.1. *[92, p. 3] Se observă că dacă $\varphi \in \Sigma$ şi $c \in \mathbb{C} \setminus \varphi(\mathcal{U}^-)$, atunci funcţia*

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(\frac{1}{z}) - c} = z + (c - \alpha_0) z^2 + \ldots, \quad z \in \mathcal{U}$$

are proprietatea $f \in \mathcal{S}$.

1.2 Clase de funcţii

1.2.1 Clasa funcţiilor Carathéodory. Clasa funcţiilor Schwarz. Subordonare

Definiţia 1.2.1. *[92, Definiţia 3.1.1, p. 35] Clasa Carathéodory este definită prin*

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{H}(\mathcal{U}) : p(0) = 1, \Re p(z) > 0, z \in \mathcal{U}\}.$$

Observaţia 1.2.1. *Dezvoltarea în serie a unei funcţii* $p \in \mathcal{P}$ *este de forma*

$$p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.3}$$

Exemplul 1.2.1. *[92, p. 35] Funcţia* $p(z) = \frac{1+z}{1-z} \in \mathcal{P}$, *pentru că transformă discul unitate în semiplanul drept* $\{w : \Re w > 0\}$.

Teorema 1.2.1. *[80] Fie* $p_1(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \in \mathcal{P}$. *Atunci*

$$|c_2 - \nu c_1^2| \leq \begin{cases} -4\nu + 2, & \nu \leq 0 \\ 2, & 0 \leq \nu \leq 1 \\ 4\nu - 2, & \nu \geq 1. \end{cases}$$

Dacă $\nu < 0$ *sau* $\nu > 1$, *egalitatea are loc dacă şi numai dacă* $p_1(z)$ *este* $\frac{1+z}{1-z}$ *sau una dintre rotaţiile sale. Dacă* $0 < \nu < 1$, *atunci egalitatea are loc dacă şi numai dacă* $p_1(z)$ *este* $\frac{1+z^2}{1-z^2}$ *sau una dintre rotaţiile sale. Inegalitatea devine egalitate pentru* $\nu = 0$ *dacă şi numai dacă*

$$p_1(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda\right)\frac{1+z}{1-z} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right)\frac{1-z}{1+z}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

sau una dintre rotaţiile sale. În timp ce pentru $\nu = 1$, *egalitatea are loc dacă şi numai dacă* $p_1(z)$ *este inversa uneia dintre funcţii pentru care egalitatea are loc în cazul* $\nu = 0$.

Observaţia 1.2.2. *[80] Se mai poate obţine un rezultat de aceeaşi formă cu cea din Teorema 1.2.1. Astfel, pentru* $0 < \nu < 1$ *au loc şi următoarele inegalităţi:*

$$|c_2 - \nu c_1^2| + \nu |c_1|^2 \leq 2, \quad 0 < \nu \leq \frac{1}{2}$$

şi

$$|c_2 - \nu c_1^2| + (1 - \nu)|c_1|^2 \leq 2, \quad \frac{1}{2} \leq \nu < 1.$$

Rezultat de acelaşi fel cu Teorema 1.2.1 se găseşte şi în [111]:

Lema 1.2.1. *[111] Dacă* $p_1(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ *este o funcţie cu parte reală pozitivă, atunci*

$$|c_2 - \nu c_1^2| \leq 2\max\{1; |2\nu - 1|\}.$$

Rezultatul este exact pentru funcţia $p_1(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2}$ *sau* $p_1(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

Teorema 1.2.2. *[108] Dacă* $p \in \mathcal{P}$ *este de forma* (1.3), *atunci*

$$|p_n| \leq 2, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

şi

$$\left| p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right| \leq 2 - \frac{|p_2|^2}{2}.$$

Teorema 1.2.3. *[79] Fie* $p \in \mathcal{P}$ *de forma* (1.3). *Atunci există* $x, z \in \mathbb{C}$ *cu* $|x| \leq 1$ *şi* $|z| \leq 1$ *astfel încât*

$$2p_2 = p_1^2 + x(4 - p_1^2),$$

$$4p_3 = p_1^3 + 2(4 - p_1^2)p_1 x - p_1(4 - p_1^2)x^2 + 2(4 - p_1^2)(1 - |x|^2)z.$$

Definiţia 1.2.2. *[92, Definiţia 3.1.1, p. 35] Clasa funcţiilor Schwarz este definită prin*

$$\mathcal{B} = \{\phi \in \mathcal{H}(\mathcal{U}) : \phi(0) = 0, |\phi(z)| < 1, z \in \mathcal{U}\}.$$

Teorema 1.2.4. *[65] Fie funcţia Schwarz* w *dată de*

$$w(z) = w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + \dots, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.4}$$

Atunci

$$|w_1| \leq 1, \ |w_2 - t w_1^2| \leq 1 + (|t| - 1)|w_1|^2 \leq \max\{1, |t|\},$$

unde $t \in \mathbb{C}$.

Definiţia 1.2.3. *[85, p. 4] Fie* $f, F \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$. *Funcţia* f *se numeşte subordonată lui* F, *notăm* $f \prec F$, *sau* $f(z) \prec F(z)$, *dacă există o funcţie Schwarz* w *astfel încât* $f(z) = F\big[w(z)\big], z \in \mathcal{U}$.

Observaţia 1.2.3. *[85, p.4] Dacă* F *este univalentă, atunci* $f \prec F$ *dacă şi numai dacă* $f(0) = F(0)$ *şi* $f(\mathcal{U}) \subset F(\mathcal{U})$.

1.2.2 Funcţii stelate, convexe şi aproape convexe

Definiţia 1.2.4. *[92, Definiţia 4.1.1, p. 49] Fie funcţia $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ cu $f(0) = 0$. Spunem că funcţia f este stelată în $\mathcal{U}$ în raport cu originea (sau, pe scurt, stelată) dacă funcţia f este univalentă în $\mathcal{U}$ şi $f(\mathcal{U})$ este un domeniu stelat în raport cu originea.*

Teorema 1.2.5. *[92, Teorema 4.1.2, p. 49] Fie funcţia $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ cu $f(0) = 0$. Atunci funcţia f este stelată dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Definiţia 1.2.5. *[92, Definiţia 4.1.3, p. 53] Vom nota cu $\mathcal{S}^*$ clasa funcţiilor $f \in \mathcal{A}$ care sunt stelate (şi normate) în discul unitate, adică*

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, z \in \mathcal{U} \right\}.$$

Observaţia 1.2.4. *[92, Observaţia 4.1.1, p. 53] Dacă $f \in \mathcal{A}$, folosind limbajul subordonărilor, avem*

$$f \in \mathcal{S}^* \iff \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}.$$

Definiţia 1.2.6. *[85, p. 8] Un domeniu D în $\mathbb{C}$ se numeşte convex dacă segmentul care uneşte oricare două puncte ale lui D se află în întregime în D.*

Definiţia 1.2.7. *[85, p. 8] Învelitoarea convexă a unei mulţimi E în $\mathbb{C}$ este intersecţia tuturor mulţimilor convexe care conţin E. Această cea mai mică mulţime convexă care conţine E va fi notată cu coE.*

Lema 1.2.2. *[4] Dacă $p(z)$ este analitică în $\mathcal{U}, p(0) = 1$ şi $\Re\big(p(z)\big) > \frac{1}{2}, z \in \mathcal{U}$, atunci pentru orice funcţie F analitică în $\mathcal{U}$, funcţia $p * F$ îşi ia valorile în învelitoarea convexă a lui $F(\mathcal{U})$.*

Definiţia 1.2.8. *[92, Definiţia 4.2.1, p. 55] Funcţia $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ se numeşte funcţie convexă în $\mathcal{U}$ (sau, pe scurt, convexă) dacă f este univalentă în $\mathcal{U}$ şi $f(\mathcal{U})$ este un domeniu convex.*

Teorema 1.2.6. *[92, Teorema 4.2.1, p. 56] Fie funcţia $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$. Atunci funcţia f este convexă dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\Re \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 1.2.7. ***(Teorema de dualitate a lui Alexander)*** *[9] Funcţia f este convexă în $\mathcal{U}$ dacă şi numai dacă funcţia $F(z) = zf'(z)$ este stelată în $\mathcal{U}$.*

Definiţia 1.2.9. *[92, Definiţia 4.2.2, p. 58] Vom nota cu $\mathcal{K}$ clasa funcţiilor $f \in \mathcal{A}$ care sunt convexe (şi normate) în discul unitate $\mathcal{U}$, adică*

$$\mathcal{K} = \{f \in \mathcal{A} : \Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0, z \in \mathcal{U}\}.$$

Definiţia 1.2.10. *[92, Definiţia 4.6.1, p. 90] Funcţia $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ se numeşte aproape convexă dacă există o funcţie ϕ convexă în $\mathcal{U}$, astfel încât*

$$\Re\frac{f'(z)}{\phi'(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

1.2.3 Clase de funcţii asociate stelarităţii şi convexităţii

Bine cunoscuta clasă a funcţiilor alfa-convexe, introdusă de P. T. Mocanu în 1969 (v. [88]) stabileşte o legătură între funcţiile stelate şi convexe.

Definiţia 1.2.11. *[85, p.10] Clasa funcţiilor alfa-convexe este definită de*

$$\mathcal{M}_\alpha = \{f \in \mathcal{A} : \Re J(\alpha, f; z) > 0\},$$

unde

$$J(\alpha, f; z) \equiv (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right),$$

pentru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observaţia 1.2.5. $\mathcal{M}_0 = \mathcal{S}^*$ *şi* $\mathcal{M}_1 = \mathcal{K}$.

Noţiunea de funcţii gama-stelate a fost introdusă de Z. Lewandowski et al (v. [77]) în 1974.

Definiţia 1.2.12. *[77] Clasa funcţiilor γ-stelate este definită de*

$$\mathcal{L}_\gamma = \{f \in \mathcal{A} : \Re\mathcal{L}(\gamma, f; z) > 0\},$$

unde

$$\mathcal{L}(\gamma, f; z) \equiv \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right)^{\gamma},$$

pentru $\gamma \in \mathbb{R}$.

Observaţia 1.2.6. $\mathcal{L}_0 = \mathcal{S}^*$ *şi* $\mathcal{L}_1 = \mathcal{K}$.

Definiţia 1.2.13. *[113] Clasa funcţiilor stelate de ordin α conţine funcţii analitice în $\mathcal{U}$, satisfăcând condiţiile $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ şi*

$$\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, \quad z \in \mathcal{U},$$

unde $0 \leq \alpha < 1$.

Definiţia 1.2.14. *[113] Clasa funcţiilor convexe de ordin α conţine funcţii analitice în $\mathcal{U}$, satisfăcând condiţiile $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\Re \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right) > \alpha, \quad z \in \mathcal{U},$$

unde $0 \leq \alpha < 1$.

Aceste clase au fost introduse de M. S. Robertson şi sunt notate cu $\mathcal{S}^*(\alpha)$, respectiv $\mathcal{K}(\alpha)$.

Definiţia 1.2.15. *[40] Fie $f \in \mathcal{A}$ dată de (1.1), şi fie $\gamma \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha < 1$. Atunci f aparţine clasei $\mathcal{L}_\gamma(\alpha)$, numită clasa funcţiilor gama-stelate de ordin alfa, dacă şi numai dacă*

$$\Re \left[\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^{1-\gamma} \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right)^{\gamma} \right] > \alpha, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.5}$$

Observaţia 1.2.7. $\mathcal{L}_0(\alpha) = \mathcal{S}^*(\alpha), \mathcal{L}_1(\alpha) = \mathcal{K}(\alpha)$ *şi* $\mathcal{L}_\gamma(0) = \mathcal{L}_\gamma$.

Următoarele două clase de funcţii au fost studiate de P. T. Mocanu şi M. Nunokawa (v. [89, 90, 96]).

Definiţia 1.2.16. *Fie $0 < \gamma \leq 1$. O funcţie $f \in \mathcal{A}$ se numeşte tare stelată de ordin γ dacă*

$$\left| \arg \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2}\gamma, \quad z \in \mathcal{U}.$$

O funcţie $f \in \mathcal{A}$ se numeşte tare convexă de ordin γ dacă

$$\left| \arg \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2}\gamma, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Notăm cu $\mathcal{Q}$ clasa funcţiilor $\phi \in \mathcal{P}$ astfel încât $\phi(\mathcal{U})$ este convexă şi simetrică în raport cu axa reală.

Definiţia 1.2.17. *[67, 80] Pentru $\phi \in \mathcal{Q}$, fie clasele $\mathcal{S}^*(\phi), \mathcal{K}(\phi)$ şi $\mathcal{C}(\phi, \psi)$ definite, respectiv, prin*

$$\mathcal{S}^*(\phi) = \left\{ f : f \in \mathcal{A}, \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \phi(z), z \in \mathcal{U} \right\},$$

$$\mathcal{K}(\phi) = \left\{ f : f \in \mathcal{A}, 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \phi(z), z \in \mathcal{U} \right\}$$

şi

$$\mathcal{C}(\phi, \psi) = \left\{ f : f \in \mathcal{A}, h \in \mathcal{K}(\psi), \frac{f'(z)}{h'(z)} \prec \phi(z), z \in \mathcal{U} \right\}.$$

Observaţia 1.2.8. *Notăm că $f \in \mathcal{K}(\phi)$ dacă şi numai dacă $zf' \in \mathcal{S}^*(\phi)$, iar $f \in \mathcal{C}(\phi, \psi)$ dacă şi numai dacă $\exists g \in \mathcal{S}^*(\psi)$ astfel încât $\frac{zf'(z)}{g(z)} \prec \phi(z)$ în $\mathcal{U}$.*

Definiţia 1.2.18. *[62] O funcţie f de forma* (1.1) *se numeşte δ-uniform convexă în $\mathcal{U}$ dacă satisface următoarea condiţie:*

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \delta \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right|, \quad \delta \geq 0.$$

Clasa tuturor funcţiilor δ-uniform convexe, notată cu $\delta - \mathcal{UCV}$, este studiată de S. Kanas şi A. Wisniowska [62].

Teorema 1.2.8. *[62] Fie $f \in \mathcal{A}$. Dacă pentru δ, $0 \leq \delta < \infty$, inegalitatea*

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_k| \leq \frac{1}{\delta + 2}$$

are loc, atunci $f \in \delta - \mathcal{UCV}$. Numărul $\frac{1}{\delta+2}$ nu poate fi majorat.

Definiţia 1.2.19. *[63] O funcţie f de forma* (1.1) *aparţine clasei $\delta - \mathcal{ST}$ dacă satisface următoarea condiţie*

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \delta \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right|, \quad \delta \geq 0.$$

Această clasă de asemenea este studiată de S. Kanas şi A. Wisniowska [63].

Teorema 1.2.9. *[63] Dacă pentru o funcţie de forma* (1.1) *condiţia*

$$\sum_{k=2}^{\infty} [k(\delta + 1) - \delta]|a_k| \leq 1$$

este adevărată pentru $\delta, 0 \leq \delta < \infty$, atunci $f \in \delta - \mathcal{ST}$.
Rezultatul este exact cu egalitate pentru funcţia $f(z) = z - \frac{z^k}{k(\delta+1)-\delta}$.

Observaţia 1.2.9. *Pentru* $\delta = 0$ *clasele* $\delta - \mathcal{UCV}$ *şi* $\delta - \mathcal{ST}$ *se reduc la clasele funcţiilor convexe şi stelate studiate de M. S. Robertson şi pentru* $\delta = 1$ *aceste clase se reduc la clasele de funcţii uniform convexe şi uniform stelate studiate de A. W. Goodman [43, 44].*

Definiţia 1.2.20. *[109] Clasele* $\mathcal{S}_\lambda^*$ *şi* $\mathcal{C}_\lambda$ *sunt definite prin*

$$\mathcal{S}_\lambda^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < \lambda, z \in \mathcal{U}, \lambda > 0 \right\}$$

şi

$$\mathcal{C}_\lambda = \left\{ f \in \mathcal{A} : \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| < \lambda, z \in \mathcal{U}, \lambda > 0 \right\}.$$

Observaţia 1.2.10. *Avem,*

$$f(z) \in \mathcal{C}_\lambda \iff zf'(z) \in \mathcal{S}_\lambda^*, \lambda > 0.$$

Teorema 1.2.10. *[109] Dacă pentru o funcţie de forma* (1.1) *condiţia*

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k + \lambda - 1)|a_k| \leq \lambda$$

este adevărată pentru $\lambda > 0$*, atunci* $f \in \mathcal{S}_\lambda^*$.

1.3 Subordonări diferenţiale

Definiţia 1.3.1. *[85, p. 15] Fie* Ω *şi* Δ *mulţimi din* $\mathbb{C}$*, fie* p *analitică în discul unitate* $\mathcal{U}$ *cu* $p(0) = a$ *şi fie* $\psi(r, s, t; z) : \mathbb{C}^3 \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$. *Dacă*

$$\{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) | z \in \mathcal{U}\} \subset \Omega \implies p(\mathcal{U}) \subset \Delta, \tag{1.6}$$

atunci ψ *se numeşte funcţie admisibilă.*

Observaţia 1.3.1. *[85, p. 15, 16] Dacă* Δ *este un domeniu simplu conex conţinând punctul* a *şi* $\Delta \neq \mathbb{C}$*, atunci există o transformare conformă* q *din* $\mathcal{U}$ *în* Δ *astfel încât* $q(0) = a$*. În acest caz* (1.6) *poate fi rescrisă ca*

$$\{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) | z \in \mathcal{U}\} \subset \Omega \implies p(z) \prec q(z).$$

Dacă Ω *este de asemenea un domeniu simplu conex şi* $\Omega \neq \mathbb{C}$*, atunci există o transformare conformă* h *din* $\mathcal{U}$ *în* Ω *astfel încât* $h(0) = \psi(a, 0, 0; 0)$*. Dacă în plus, funcţia* $\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ *este analitică în* $\mathcal{U}$*, atunci* (1.6) *poate fi rescrisă ca*

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z) \implies p(z) \prec q(z).$$

Definiţia 1.3.2. *[85, p. 16] Fie* $\psi : \mathbb{C}^3 \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *şi fie* h *univalentă în* $\mathcal{U}$. *Dacă* p *este analitică în* $\mathcal{U}$ *şi satisface subordonarea diferenţială (de ordinul doi)*

$$\psi\big(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z\big) \prec h(z), \tag{1.7}$$

atunci p *se numeşte soluţie a subordonării diferenţiale. Funcţia univalentă* q *se numeşte o dominantă a soluţiilor subordonării diferenţiale, sau mai simplu o dominantă, dacă* $p \prec q$ *pentru toţi* p *satisfăcând* (1.7). *O dominantă* $\tilde{q}$ *care satisface* $\tilde{q} \prec q$ *pentru toţi dominanţii* q *a lui* (1.7) *se numeşte cea mai bună dominantă a lui* (1.7). *(Notăm că cea mai bună dominantă este unică în raport cu o rotaţie a lui* $\mathcal{U}$*).*

Definiţia 1.3.3. *[85, Definiţia 2.2b, p.21] Notăm cu* Q *mulţimea funcţiilor* q *care sunt analitice şi injective pe* $\overline{\mathcal{U}} \setminus E(q)$, *unde*

$$E(q) = \left\{\zeta \in \partial\mathcal{U} : \lim_{z\to\zeta} q(z) = \infty\right\}$$

şi sunt astfel încât $q'(\zeta) \neq 0$ *pentru* $\zeta \in \partial\mathcal{U} \setminus E(q)$.

Lema 1.3.1. *[85, Lema 2.2d, p.24] Fie* $q \in Q$, *cu* $q(0) = a$ *şi fie* $p(z) = a + a_n z^n + \ldots$ *analitică în* $\mathcal{U}$ *cu* $p(z) \not\equiv a$ *şi* $n \geq 1$. *Dacă* p *nu este subordonată lui* q, *atunci există punctele* $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in \mathcal{U}$ *şi* $\zeta_0 \in \partial\mathcal{U} \setminus E(q)$ *şi un* $m \geq n \geq 1$ *pentru care* $p(\mathcal{U}(0, r_0)) \subset q(\mathcal{U})$,

$$p(z_0) = q(\zeta_0),$$

$$z_0 p'(z_0) = m\zeta_0 q'(\zeta_0),$$

$$\Re\frac{z_0 p''(z_0)}{p'(z_0)} + 1 \geq m\Re\left[\frac{\zeta_0 q''(\zeta_0)}{q'(\zeta_0)} + 1\right].$$

Definiţia 1.3.4. *[85, Cazul 1, p.33] Fie* k *un întreg pozitiv,* $a \in \mathbb{C}$ *cu* $|a| < M, M > 0$. *Clasa funcţiilor admisibile* $\Psi_k[M, a]$, *constă în acele funcţii* $\psi : \mathbb{C}^3 \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *care satisfac condiţia de admisibilitate:*

$$\big|\psi(r, s, t; z)\big| \geq M, \quad z \in \mathcal{U},$$

unde

$$r = Me^{i\theta},$$

$$s = m\frac{M\big|M - \overline{a}e^{i\theta}\big|^2}{M^2 - |a|^2}e^{i\theta},$$

$$\Re\frac{t}{s} + 1 \geq m\frac{|M - \overline{a}e^{i\theta}|^2}{M^2 - |a|^2},$$

$\theta \in \mathbb{R}$ *şi* $m \geq k$.

Teorema 1.3.1. *[85, Teorema 2.3 h, (ii), p. 34] Fie $p \in \mathcal{H}[a,k]$. Dacă $\psi \in \Psi_k[M,a]$, atunci*

$$\left|\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)\right| < M \implies \left|p(z)\right| < M.$$

Definiţia 1.3.5. *[85, Cazul 2, p. 34] Fie k un întreg pozitiv, $a \in \mathbb{C}$ cu $\Re a > 0$. Clasa funcţiilor admisibile $\Psi_k[a]$ constă în acele funcţii $\psi : \mathbb{C}^3 \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ care satisfac condiţia de admisibilitate:*

$$\Re\psi(\rho i, \sigma, \mu + i\nu; z) \leq 0, \quad z \in \mathcal{U},$$

unde $\rho, \sigma, \mu, \nu \in \mathbb{R}$,

$$\sigma \leq -\frac{k}{2}\frac{\left|a - i\rho\right|^2}{\Re a}, \sigma + \mu \leq 0.$$

Teorema 1.3.2. *[85, Teorema 2.3 i, (ii), p. 35] Fie $p \in \mathcal{H}[a,k]$. Dacă $\psi \in \Psi_k[a]$, atunci*

$$\Re\psi\big(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z\big) > 0 \implies \Re p(z) > 0.$$

Lema 1.3.2. *[83] Fie $\phi(u,v)$ o funcţie cu valoare complexă, $\phi : D \to \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C}^2$, şi fie $u = u_1 + \mathrm{i}u_2, v = v_1 + \mathrm{i}v_2$. Presupunem că funcţia $\phi(u,v)$ satisface următoarele condiţii*

(i) $\phi(u,v)$ este continuă în D,

(ii) $(1,0) \in D$ şi $\Re(\phi(1,0)) > 0$,

(iii) $\Re(\phi(\mathrm{i}u_2, v_1)) \leq 0$ pentru toţi $(\mathrm{i}u_2, v_1) \in D$ astfel încât $v_1 \leq \frac{-(1+u_2^2)}{2}$.

Fie $p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots$ olomorfă în $\mathcal{U}$ astfel încât $(p(z), zp'(z)) \in D$ pentru toţi $z \in \mathcal{U}$. Dacă

$$\Re(\phi(p(z), zp'(z))) > 0, \quad z \in \mathcal{U},$$

atunci $\Re(p(z)) > 0, z \in \mathcal{U}$.

Observaţia 1.3.2. *Funcţia $\phi(u,v)$ este un caz particular de funcţie admisibilă de acelaşi fel cum este cea din Definiţia 1.3.5, iar concluzia este din Teorema 1.3.2.*

Teorema 1.3.3. *[85, Teorema 3.1b, p.71] Fie h convexă în $\mathcal{U}$, cu $h(0) = a$, $\gamma \neq 0$ şi $\Re\gamma \geq 0$. Dacă $p \in \mathcal{H}[a,n]$ şi*

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\gamma} \prec h(z),$$

atunci

$$p(z) \prec q(z) \prec h(z),$$

unde

$$q(z) = \frac{\gamma}{nz^{\frac{\gamma}{n}}} \int_0^z h(t) t^{\frac{\gamma}{n}-1} dt.$$

Funcţia q este convexă şi este cea mai bună (a,n)-dominantă.

Lema 1.3.3. *[92, Lema 13.5.1, p. 419] Fie q o funcţie convexă în $\mathcal{U}$ şi fie*

$$h(z) = q(z) + m\alpha z q'(z),$$

unde $\alpha > 0$ şi m este un întreg pozitiv. Dacă $p \in \mathcal{H}[q(0), m]$ şi

$$p(z) + \alpha z p'(z) \prec h(z),$$

atunci

$$p(z) \prec q(z)$$

şi acest rezultat este exact.

1.4 Subclase de funcţii meromorfe

Fie funcţia φ de forma (1.2) o funcţie meromorfă în $\mathcal{U}^- = \{\xi \in \mathbb{C}_\infty : |\xi| > 1\}$, cu un pol simplu $\xi = \infty$. Notăm mulţimea $\mathbb{C} \setminus \varphi(\mathcal{U}^-)$ cu $E(\varphi)$.

Definiţia 1.4.1. *[92, Definiţia 4.8.1, p. 102] Spunem că funcţia φ de forma* (1.2) *este o funcţie stelată în $\mathcal{U}^-$ dacă φ este univalentă în $\mathcal{U}^-$ şi mulţimea $E(\varphi)$ este stelată în raport cu originea.*

Definiţia 1.4.2. *[92, Definiţia 4.8.3, p. 103] Fie funcţia $g(z) = \frac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots, 0 < |z| < 1$, o funcţie meromorfă în $\mathcal{U}^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$. Spunem că funcţia g este stelată în $\mathcal{U}^*$ dacă funcţia $\varphi(\xi) = g\left(\frac{1}{\xi}\right), \xi \in \mathcal{U}^-$ este stelată în $\mathcal{U}^-$.*

Teorema 1.4.1. *[92, Teorema 4.8.1, p. 103] Fie $g(z) = \frac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots, z \in \mathcal{U}^*$ o funcţie meromorfă în $\mathcal{U}$ cu $g(z) \neq 0, z \in \mathcal{U}^*$. Atunci funcţia g este stelată în $\mathcal{U}^*$ dacă şi numai dacă g este univalentă în $\mathcal{U}^*$ şi*

$$\Re\left(-\frac{zg'(z)}{g(z)} \right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}^*.$$

Definiţia 1.4.3. *[92, Definiţia 4.8.4, p. 104] Spunem că funcţia φ de forma* (1.2) *este o funcţie convexă în $\mathcal{U}^-$ dacă φ este univalentă în $\mathcal{U}^-$ şi mulţimea $E(\varphi)$ este convexă.*

Teorema 1.4.2. *[92, Teorema 4.8.2, p. 104] Fie* $g(z) = \frac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots, z \in \mathcal{U}^*$ *o funcţie meromorfă în* $\mathcal{U}$ *cu* $g(z) \neq 0, z \in \mathcal{U}^*$. *Atunci funcţia* g *este convexă în* $\mathcal{U}$ *dacă şi numai dacă* g *este univalentă în* $\mathcal{U}^*$ *şi*

$$\Re\left(-\left(\frac{zg''(z)}{g'(z)}+1\right)\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}^*.$$

1.5 Operatori diferenţiali şi integrali

O convoluţie (sau un produs Hadamard) " $*$ " între două funcţii $f, g \in \mathcal{A}$ de forma $f(z) = z + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+1} z^{k+1}$ şi $g(z) = z + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{k+1} z^{k+1}, z \in \mathcal{U}$ este definită prin

$$f(z) * g(z) = (f * g)(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} b_{k+1} z^{k+1}.$$

Definiţia 1.5.1. *[117] Pentru* $f \in \mathcal{A}$, *operatorul diferenţial Sălăgean* $\mathcal{D}^n$ *de ordin* n, $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, *este definit prin*

$$\mathcal{D}^0 f(z) = f(z),$$

$$\mathcal{D}^1 f(z) = \mathcal{D} f(z) = z f'(z),$$

$$\mathcal{D}^n f(z) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{n-1} f(z)), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Observaţia 1.5.1. *[117] Dezvoltarea în serie a operatorului* $\mathcal{D}^n$ *pentru funcţia* $f \in \mathcal{A}$ *de forma* (1.1) *este dată de*

$$\mathcal{D}^n f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^n a_{k+1} z^{k+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definiţia 1.5.2. *[117] Pentru* $f \in \mathcal{A}$, *operatorul integral Sălăgean* $\mathcal{I}^n$ *de ordin* n, $n \in \mathbb{N}$ *este definit prin*

$$\mathcal{I}^0 f(z) = f(z),$$

$$\mathcal{I}^1 f(z) = \mathcal{I} f(z) = \int_0^z f(t) t^{-1} dt,$$

$$\mathcal{I}^n f(z) = \mathcal{I}(\mathcal{I}^{n-1} f(z)).$$

Observaţia 1.5.2. *[117] Dezvoltarea în serie a operatorului* $\mathcal{I}^n$ *pentru funcţia* $f \in \mathcal{A}$ *de forma* (1.1) *este dată de*

$$\mathcal{I}^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{k^n} z^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definiţia 1.5.3. *[115] Operatorul Ruscheweyh* $\mathcal{R}^\lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\lambda \geq -1$, *este definit prin*

$$\mathcal{R}^\lambda f(z) = \frac{z}{(1-z)^{1+\lambda}} * f(z), \quad z \in \mathcal{U},$$

iar pentru $\lambda \in \mathbb{N}$ *acest operator este definit prin*

$$\mathcal{R}^\lambda f(z) = \frac{z(z^{\lambda-1}f(z))^{(\lambda)}}{\lambda!}, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Observaţia 1.5.3. *[115] Dezvoltarea în serie a operatorului Ruscheweyh pentru* $f \in \mathcal{A}$ *de forma* (1.1) *este dată de*

$$\mathcal{R}^\lambda f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1+\lambda)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(k+1)} a_{k+1} z^{k+1}, \quad \lambda > -1, z \in \mathcal{U},$$

şi Γ *este funcţia gama cunoscută.*

Următorii operatori au fost definiţi de S. Owa [101].

Definiţia 1.5.4. *[101] Operatorul integral fracţional* $D_z^{-\mu}$ *de ordin* $\mu, \mu > 0$, *pentru funcţia* $f \in \mathcal{A}$ *este definit de*

$$D_z^{-\mu} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^z \frac{f(t)}{(z-t)^{1-\mu}} dt, \quad z \in \mathcal{U},$$

unde multiplicitatea lui $(z-t)^{\mu-1}$ *este eliminată de necesitatea ca* $\log(z-t)$ *să fie real când* $z - t > 0$.

De asemenea, operatorul diferenţial fracţional D_z^λ *de ordin* $\lambda, \lambda \geq 0$, *este definit pentru funcţia* $f \in \mathcal{A}$ *prin*

$$D_z^\lambda f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(t)}{(z-t)^\lambda} dt, & 0 \leq \lambda < 1 \\ \frac{d^n}{dz^n} D_z^{\lambda-n} f(z), & n \leq \lambda < n+1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N},$$

unde multiplicitatea lui $(z-t)^{-\lambda}$ *este înţeleasă în mod similar.*

Următorul operator a fost definit de S. Owa şi H. M. Srivastava [102].

Definiţia 1.5.5. *[102] Operatorul diferintegral fracţional* $\Omega_z^\lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, -\infty < \lambda < 2$, *este definit prin*

$$\Omega_z^\lambda f(z) = \Gamma(2-\lambda) z^\lambda D_z^\lambda f(z), \quad z \in \mathcal{U},$$

unde $D_z^\lambda f(z)$ *este operatorul integral fracţional de ordin* $\lambda, -\infty < \lambda < 0$, *şi un operator diferenţial fracţional de ordin* $\lambda, 0 \leq \lambda < 2$.

Observaţia 1.5.4. *[102] Dezvoltarea în serie a operatorului* Ω_z^λ *pentru funcţia* $f \in \mathcal{A}$ *de forma* (1.1) *este dată de*

$$\Omega_z^\lambda f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(k+2)}{\Gamma(k+2-\lambda)} a_{k+1} z^{k+1}, \quad -\infty < \lambda < 2, z \in \mathcal{U}.$$

P. Sharma, R. K. Raina şi G. Ş. Sălăgean [120] au definit operatorul $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$ astfel:

Definiţia 1.5.6. *[120] Operatorul fracţional* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *pentru* $-\infty < \lambda < 2, \nu > -1, n \in \mathbb{N}$ *este compunerea operatorului diferintegral fracţional, operatorului Sălăgean şi operatorului Ruscheweyh.*

Observaţia 1.5.5. *[120]*

$$\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) = \mathcal{R}^\nu \mathcal{D}^n \Omega_z^\lambda f(z) = \begin{cases} \mathcal{D}^n \Omega_z^\lambda f(z), & \nu = 0 \\ (1-\frac{1}{\nu})\mathbb{D}_\lambda^{\nu-1,n} f(z) + \frac{1}{\nu} z(\mathbb{D}_\lambda^{\nu-1,n} f(z))', & \nu \neq 0 \end{cases}. \tag{1.8}$$

Observaţia 1.5.6. *[120] Dezvoltarea în serie a* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)$ *pentru* $f \in \mathcal{A}$ *de forma* (1.1) *este dată de*

$$\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu+1)_k}{(2-\lambda)_k} (k+1)^{n+1} a_{k+1} z^{k+1}, \tag{1.9}$$

$-\infty < \lambda < 2, \nu > -1, n \in \mathbb{N}, z \in \mathcal{U}$, *unde simbolul* $(\gamma)_k$ *reprezintă simbolul Pochhammer obişnuit, pentru* $\gamma \in \mathbb{C}$, *definit prin*

$$(\gamma)_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \gamma(\gamma+1)...(\gamma+k-1), & k \in \mathbb{N}^* \end{cases} = \frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma)}, \quad \gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-.$$

Observaţia 1.5.7. *[129] Folosind definiţia operatorului* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$, *respectiv relaţia* (1.9), *observăm că*

$$\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) = \mathcal{R}^\nu \mathcal{D}^n \Omega_z^\lambda f(z) = \begin{cases} \mathcal{R}^\nu \Omega_z^\lambda f(z), & n = 0 \\ z(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n-1} f(z))', & n \neq 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

şi

$$\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) = \mathcal{R}^\nu \mathcal{D}^n \Omega_z^\lambda f(z) = \begin{cases} \mathcal{R}^\nu \mathcal{D}^n f(z), & \lambda = 0 \\ \frac{1-\lambda}{2-\lambda}\mathbb{D}_{\lambda-1}^{\nu,n} f(z) + \frac{1}{2-\lambda} z(\mathbb{D}_{\lambda-1}^{\nu,n} f(z))', & \lambda \neq 0 \end{cases}. \tag{1.11}$$

Observaţia 1.5.8. *[120] Operatorul fracţional* $\mathbb{D}_0^{\nu,0}$ *este tocmai operatorul Ruscheweyh* $\mathcal{R}^\nu$ *de ordin* $\nu, \nu > -1$ *şi* $\mathbb{D}_\lambda^{0,0}$ *este operatorul diferintegral fracţional* Ω_z^λ *de ordin* $\lambda, -\infty < \lambda < 2$, *în timp ce* $\mathbb{D}_0^{0,n} = \mathcal{D}^n$ *şi* $\mathbb{D}_\lambda^{1-\lambda,n} = \mathcal{D}^{n+1}$ *sunt operatorii Sălăgean, de ordin n respectiv n+1,* $n \in \mathbb{N}$.

Observaţia 1.5.9. *[129] Operatorul fracţional* $\mathbb{D}_1^{1,n}$ *este operatorul Sălăgean* $\mathcal{D}^{n+2}$.

Observaţia 1.5.10. *[120] Operatorul* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$ *satisface următoarea identitate:*

$$\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z) = \frac{\nu}{\nu+1}\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) + \frac{1}{\nu+1} z(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z))', \tag{1.12}$$

unde $-\infty < \lambda < 2, \nu > -1, n \in \mathbb{N}$.

Observaţia 1.5.11. *[129] Folosind* (1.10) *şi* (1.11), *obţinem că operatorul* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$ *satisface următoarele identităţi:*

$$\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z) = z(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z))', \tag{1.13}$$

unde $-\infty < \lambda < 2, \nu > -1, n \in \mathbb{N}$

şi

$$\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z) = -\frac{\lambda}{1-\lambda}\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) + \frac{1}{1-\lambda} z(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z))', \tag{1.14}$$

unde $-\infty < \lambda < 1, \nu > -1, n \in \mathbb{N}$.

Definiţia 1.5.7. *[4] Pentru o funcţie* $f \in \mathcal{A}, \delta \geq 0$ *şi* $n \in \mathbb{N}$, *operatorul diferenţial Al-Oboudi* $\mathcal{D}_\delta^n f$ *este definit prin*

$$\mathcal{D}_\delta^0 f(z) = f(z),$$

$$\mathcal{D}_\delta^1 f(z) = (1-\delta) f(z) + \delta z f'(z) = \mathcal{D}_\delta f(z),$$

$$\mathcal{D}_\delta^n f(z) = \mathcal{D}_\delta\big(\mathcal{D}_\delta^{n-1} f(z)\big), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Observaţia 1.5.12. $\mathcal{D}_\delta^n$ *este un operator liniar şi pentru* $f \in \mathcal{A}$,

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k,$$

avem

$$\mathcal{D}_\delta^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \big[1 + (k-1)\delta\big]^n a_k z^k, \quad z \in \mathcal{U} \tag{1.15}$$

şi

$$\mathcal{D}_\delta^{n+1} f(z) = (1-\delta)\mathcal{D}_\delta^n f(z) + \delta z \big(\mathcal{D}_\delta^n f(z)\big)', \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.16}$$

Pentru $\delta = 1$, *obţinem operatorul diferenţial al lui Sălăgean (v. Definiţia* 1.5.1*).*

Observaţia 1.5.13. *Diferenţiind* (1.16), *obţinem*

$$\big(\mathcal{D}_\delta^{n+1} f(z)\big)' = \big(\mathcal{D}_\delta^n f(z)\big)' + \delta z \big(\mathcal{D}_\delta^n f(z)\big)'', \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.17}$$

Definiţia 1.5.8. *[103] Pentru o funcţie $f \in \mathcal{A}, \delta > 0$ şi $n \in \mathbb{N}$, operatorul $\mathcal{I}_\delta^n f$ este definit prin*

$$\mathcal{I}_\delta^0 f(z) = f(z),$$
$$\mathcal{I}_\delta^1 f(z) = \frac{1}{\delta} z^{1-\frac{1}{\delta}} \int_0^z t^{\frac{1}{\delta}-2} f(t)dt = \mathcal{I}_\delta f(z),$$
$$\mathcal{I}_\delta^n f(z) = \mathcal{I}_\delta\big(\mathcal{I}_\delta^{n-1} f(z)\big), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Observaţia 1.5.14. *Dacă $f \in \mathcal{A}$ şi $f(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, atunci*

$$\mathcal{I}_\delta^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{1+(k-1)\delta}\right]^n a_k z^k, \quad z \in \mathcal{U} \tag{1.18}$$

şi

$$\delta z\big(\mathcal{I}_\delta^n f(z)\big)' = \mathcal{I}_\delta^{n-1} f(z) - (1-\delta)\mathcal{I}_\delta^n f(z), \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.19}$$

Pentru $\delta = 1$, obţinem operatorul integral al lui Sălăgean (v. Definiţia 1.5.2).

Observaţia 1.5.15. *Folosind (1.19), avem*

$$\big(\mathcal{I}_\delta^n f(z)\big)' = \big(\mathcal{I}_\delta^{n+1} f(z)\big)' + \delta z\big(\mathcal{I}_\delta^{n+1} f(z)\big)'', \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.20}$$

Definiţia 1.5.9. *[92, p. 384] Definim operatorul integral Bernardi $\mathcal{L}_c : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$*

$$\mathcal{L}_c f(z) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z f(t) t^{c-1} dt, \quad c > -1.$$

Capitolul 2

Noi rezultate asupra funcţiilor analitice sau meromorfe obţinute cu ajutorul unor operatori

Rezultatele din acest capitol sunt obţinute cu ajutorul unor operatori.

În paragraful 2.1, obţinem diferite rezultate utilizând operatorul fracţional $\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n}$. Este introdusă o clasă de funcţii analitice definită de acest operator. Sunt obţinute relaţii de incluziune, o proprietate de convoluţie, puncte extreme ale clasei şi alte rezultate. Sunt investigate subordonări diferenţiale şi sunt obţinute proprietăţi geometrice ale funcţiilor analitice. În ultimul subparagraf, sunt obţinute delimitări ale coeficienţilor şi inegalităţi Fekete-Szegő pentru clase de funcţii analitice, implicând operatorul fracţional $\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n}$.

În paragraful 2.2, este introdusă o clasă de funcţii meromorfe definită cu ajutorul unui operator fracţional. Sunt investigate relaţii de incluziune şi alte proprietăţi ale clasei.

În paragraful 2.3, este definit un nou operator. Este de asemenea introdusă o anumită subclasă de funcţii analitice folosind noul operator şi sunt obţinute proprietăţi ale acestei clase. Sunt de asemenea investigate subordonări diferenţiale utilizând noul operator.

În paragraful 2.4, obţinem relaţii de incluziune între clasele de funcţii δ-uniform convexe, δ-uniform stelate şi clasa $\mathcal{US}(n,\alpha)$, definită într-un mod similar ca celelalte două, utilizând operatorul Sălăgean.

În paragraful 2.5, introducem operatorul integro-diferenţial Sălăgean generalizat, folosind operatorul diferenţial Al-Oboudi $\mathcal{D}_{\delta}^{n}$ şi operatorul integral Sălăgean generalizat $\mathcal{I}_{\delta}^{n}$. Sunt investigate subordonări diferenţiale şi sunt generalizate rezultate cunoscute anterior.

2.1 Operatorul fracţional $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$

În acest paragraf, sunt obţinute rezultate utilizând operatorul fracţional $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$ definit de (1.8) şi (1.9).

2.1.1 Asupra unei clase de funcţii analitice definită de operatorul $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$

Definiţia 2.1.1. *[129] Fie $f \in \mathcal{A}$. Spunem că funcţia f este în clasa $\mathbb{R}_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$, unde $0 \leq \alpha < 1, -\infty < \lambda < 2, \nu > -1, n \in \mathbb{N}$, dacă f satisface condiţia*

$$\Re\big(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\big)' > \alpha, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{2.1}$$

În investigaţia noastră, vom avea nevoie de următoarea definiţie şi teoremă:

Definiţia 2.1.2. *[4] Un şir $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ de numere nenegative se numeşte şir nul convex dacă $a_n \to 0$ când $n \to \infty$ şi $a_0 - a_1 \geq a_1 - a_2 \geq \cdots \geq a_n - a_{n+1} \geq \cdots \geq 0$.*

Următoarea teoremă datorată lui L. Fejér [34] este folosită şi de către F. M. Al-Oboudi [4].

Teorema 2.1.1. *[34] Fie $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ un şir nul convex. Atunci funcţia $p(z) = \frac{c_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k z^k$, $z \in \mathcal{U}$ este analitică şi $\Re p(z) > 0$ în $\mathcal{U}$.*

Teorema 2.1.2. *[129] $\mathbb{R}_\lambda^{\nu+1,n}(\alpha) \subset \mathbb{R}_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$.*

Observaţia 2.1.1. *[129] Teorema 2.1.2 poate fi exprimată sub forma următoare:*

$$\Re\left((\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z))' + \frac{1}{\nu+1} z(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z))''\right) > \alpha \implies \Re(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z))' > \alpha.$$

Dacă luăm $\nu = 1 - \lambda$ în Teorema 2.1.2, obţinem următorul rezultat.

Corolarul 2.1.1. *[129] Dacă $f \in \mathcal{A}, -\infty < \lambda < 2, n \in \mathbb{N}$ şi $0 \leq \alpha < 1$, atunci*

$$\Re\left[(\mathcal{D}^n f(z))' + \frac{4-\lambda}{2-\lambda} z(\mathcal{D}^n f(z))'' + \frac{1}{2-\lambda} z^2 (D^n f(z))'''\right] > \alpha$$

$$\implies \Re[(\mathcal{D}^n f(z))' + z(\mathcal{D}^n f(z))''] > \alpha,$$

unde $z \in \mathcal{U}$ şi $\mathcal{D}^n$ este operatorul Sălăgean definit în Definiţia 1.5.1.

Exemplul 2.1.1. *[129] Luând $n = 0$ în Corolarul 2.1.1, avem:*

$$\Re\left(f'(z) + \frac{4-\lambda}{2-\lambda} z f''(z) + \frac{1}{2-\lambda} z^2 f'''(z)\right) > \alpha \implies \Re(f'(z) + z f''(z)) > \alpha, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.3. *[129]* $\mathbb{R}_\lambda^{\nu,n+1}(\alpha) \subset \mathbb{R}_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$.

Observaţia 2.1.2. *[129] Teorema 2.1.3 poate fi exprimată sub forma următoare:*

$$\Re\big((\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z))' + z(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z))''\big) > \alpha \implies \Re(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z))' > \alpha.$$

Teorema 2.1.4. *[129]* $\mathbb{R}_{\lambda+1}^{\nu,n}(\alpha) \subset \mathbb{R}_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$, *pentru* $-\infty < \lambda < 1$.

Observaţia 2.1.3. *[129] Teorema 2.1.4 poate fi exprimată sub forma următoare:*

$$\Re\left((\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z))' + \frac{1}{1-\lambda} z(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z))''\right) > \alpha \implies \Re(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z))' > \alpha.$$

Teorema 2.1.5. *[129] Fie* $f \in \mathbb{R}_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$ *şi* $g \in \mathcal{K}$, *unde* $\mathcal{K}$ *indică clasa funcţiilor convexe. Atunci* $f * g \in \mathbb{R}_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$.

Teorema 2.1.6. *[129] Mulţimea* $\mathbb{R}_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$ *este convexă.*

Teorema 2.1.7. *[129] Punctele extreme ale lui* $\mathbb{R}_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$ *sunt*

$$f_x(z) = z + 2(1-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-\lambda)_k}{(k+1)^{n+2}(\nu+1)_k} x^k z^{k+1}, \quad |x| = 1, z \in \mathcal{U}. \tag{2.2}$$

Corolarul 2.1.2. *[129] Fie* $f \in \mathbb{R}_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$. *Atunci*

$$|a_{k+1}| \le \frac{2(1-\alpha)(2-\lambda)_k}{(k+1)^{n+2}(\nu+1)_k}, \quad k \ge 1.$$

Rezultatul este exact.

Corolarul 2.1.3. *[129] Fie* $f \in \mathbb{R}_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$. *Atunci*

$$|f(z)| \le r + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-\alpha)(2-\lambda)_k}{(k+1)^{n+2}(\nu+1)_k} r^{k+1}, \quad |z| = r,$$

$$|f'(z)| \le 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-\alpha)(2-\lambda)_k}{(k+1)^{n+1}(\nu+1)_k} r^{k}, \quad |z| = r.$$

Rezultatul este exact.

Teorema 2.1.8. *[129] Fie* $f \in \mathbb{R}_\lambda^{\nu+1,n}(\alpha)$. *Atunci* $f \in \mathbb{R}_\lambda^{\nu,n}(\beta)$, *unde*

$$\beta = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)(\nu+1)\int_0^1 \frac{t^\nu}{t+1} dt.$$

Dacă luăm $\lambda = 0, \nu = 1$ în Teorema 2.1.8, obţinem următorul rezultat.

Corolarul 2.1.4. *[129] Dacă* $f \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, *atunci*

$$\Re\left[(\mathcal{D}^n f(z))' + 2z(\mathcal{D}^n f(z))'' + \frac{1}{2}z^2(\mathcal{D}^n f(z))'''\right] > \alpha$$

$$\Longrightarrow \Re[(\mathcal{D}^n f(z))' + z(\mathcal{D}^n f(z))''] > \beta,$$

unde $z \in \mathcal{U}$, $\beta = 3 - 2\alpha - 4(1-\alpha)\ln 2$ *şi* $\mathcal{D}^n$ *este operatorul Sălăgean definit în Definiţia 1.5.1.*

Observaţia 2.1.4. *[129] Folosind rezultatul Corolarului 2.1.4, obţinem* $\beta > \alpha$. *Deci, Teorema 2.1.8 ne dă un rezultat mai bun decât Teorema 2.1.2.*

Exemplul 2.1.2. *[129] Dacă luăm* $\alpha = \frac{3}{4}$ *în Corolarul 2.1.4, obţinem:*

$$\Re\left[(\mathcal{D}^n f(z))' + 2z(\mathcal{D}^n f(z))'' + \frac{1}{2}z^2(\mathcal{D}^n f(z))'''\right] > \frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow \Re[(\mathcal{D}^n f(z))' + z(\mathcal{D}^n f(z))''] > \frac{3}{2} - \ln 2, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Observaţia 2.1.5. *[129] Dacă luăm* $\lambda = 1, \nu = 0, n = 0, \alpha = \frac{1}{2}$ *în Teorema 2.1.8, obţinem următorul rezultat obţinut în [28]:*

$$\Re[f'(z) + 3zf''(z) + z^2 f'''(z)] > \frac{1}{2} \Longrightarrow \Re[f'(z) + zf''(z)] > \ln 2, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.9. *[129] Fie* $f \in \mathbb{R}_\lambda^{\nu,n+1}(\alpha)$. *Atunci* $f \in \mathbb{R}_\lambda^{\nu,n}(\beta)$, *unde*

$$\beta = 2\alpha - 1 + 2(\alpha - 1)\ln 2.$$

Teorema 2.1.10. *[129] Fie* $f \in \mathbb{R}_{\lambda+1}^{\nu,n}(\alpha), -\infty < \lambda < 1$. *Atunci* $f \in \mathbb{R}_\lambda^{\nu,n}(\beta)$, *unde*

$$\beta = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)(1-\lambda)\int_0^1 \frac{t^{-\lambda}}{t+1}dt.$$

2.1.2 Subordonări diferenţiale obţinute cu ajutorul operatorului $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$

Teorema 2.1.11. *[130] Fie* g *o funcţie convexă,* $g(0) = 1$ *şi fie* h *o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + \frac{1}{\nu+1}zg'(z), \quad \nu > -1.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ *verifică subordonarea diferenţială*

$$\left(\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)\right)' \prec h(z), \tag{2.3}$$

atunci

$$\left(\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)\right)' \prec g(z)$$

şi rezultatul este exact.

Luând $\lambda = n = 0$ în Teorema 2.1.11 obţinem următorul rezultat, care este un caz particular al Teoremei 2.3 din [97].

Corolarul 2.1.5. *[97] Fie g o funcţie convexă, $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + \frac{1}{\nu+1} z g'(z).$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\mathcal{R}^{\nu+1} f(z)\right)' \prec h(z),$$

atunci

$$\left(\mathcal{R}^{\nu} f(z)\right)' \prec g(z)$$

şi rezultatul este exact.

Teorema 2.1.12. *[130] Fie g o funcţie convexă, $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + \frac{1}{1-\lambda} z g'(z), \quad -\infty < \lambda < 1.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)\right)' \prec h(z), \tag{2.4}$$

atunci

$$\left(\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)\right)' \prec g(z)$$

şi rezultatul este exact.

Teorema 2.1.13. *[130] Fie g o funcţie convexă, $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + z g'(z).$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+1} f(z)\right)' \prec h(z), \tag{2.5}$$

atunci

$$\left(\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)\right)' \prec g(z)$$

şi rezultatul este exact.

Luând $\lambda = \nu = 0$ în Teorema 2.1.13 obţinem următorul rezultat, care este un caz particular al Teoremei 2 din [98]:

Corolarul 2.1.6. *[98] Fie g o funcţie convexă, $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z).$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\mathcal{D}^{n+1} f(z)\right)' \prec h(z),$$

atunci

$$\left(\mathcal{D}^{n} f(z)\right)' \prec g(z)$$

şi rezultatul este exact.

Luând $\lambda = 0$ şi $\nu = n$ în Teorema 2.1.12 sau în Teorema 2.1.13 obţinem următorul rezultat din [7]:

Corolarul 2.1.7. *[7] Fie g o funcţie convexă astfel încât $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $n \in \mathbb{N}$ şi are loc subordonarea diferenţială

$$\frac{1}{z}\mathbb{D}_0^{n+1,n+1} f(z) + \frac{n}{n+1} z\left(\mathbb{D}_0^{n,n} f(z)\right)'' \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U},$$

atunci

$$\left(\mathbb{D}_0^{n,n} f(z)\right)' \prec g(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi acest rezultat este exact.

Teorema 2.1.14. *[130] Fie g o funcţie convexă, $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\right)' \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.6}$$

atunci

$$\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}{z} \prec g(z)$$

şi rezultatul este exact.

Luând $\lambda = \nu = 0$ în Teorema 2.1.14 obţinem următorul rezultat, care este un caz particular al Teoremei 4 din [98]:

Corolarul 2.1.8. *[98] Fie g o funcţie convexă astfel încât $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z).$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\mathcal{D}^n f(z)\right)' \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U},$$

atunci

$$\frac{\mathcal{D}^n f(z)}{z} \prec g(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi acest rezultat este exact.

Luând $\lambda = n = 0$ în Teorema 2.1.14 obţinem următorul rezultat care este un caz particular al Teoremei 2.5 din [97]:

Corolarul 2.1.9. *[97] Fie g o funcţie convexă, $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z).$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\mathcal{R}^\nu f(z)\right)' \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U},$$

atunci

$$\frac{\mathcal{R}^\nu f(z)}{z} \prec g(z)$$

şi rezultatul este exact.

Luând $\lambda = 0$ şi $\nu = n$ în Teorema 2.1.14 obţinem următorul rezultat din [7]:

Corolarul 2.1.10. *[7] Fie g o funcţie convexă, $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\mathbb{D}_0^{n,n} f(z)\right)' \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U},$$

atunci

$$\frac{\mathbb{D}_0^{n,n} f(z)}{z} \prec g(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi acest rezultat este exact.

Teorema 2.1.15. *[130] Fie g o funcţie convexă, $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\frac{z\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)}\right)' \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.7}$$

atunci

$$\frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)} \prec g(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi rezultatul este exact.

Teorema 2.1.16. *[130] Fie g o funcţie convexă, $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\frac{z\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)}\right)' \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U}, -\infty < \lambda < 1, \tag{2.8}$$

atunci

$$\frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)} \prec g(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi rezultatul este exact.

Teorema 2.1.17. *[130] Fie g o funcţie convexă, $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\frac{z\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)}\right)' \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.9}$$

atunci

$$\frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)} \prec g(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi rezultatul este exact.

2.1.3 Proprietăţi ale funcţiilor analitice obţinute cu ajutorul operatorului $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$

Teorema 2.1.18. *[131] Fie $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 2, M > 1, m \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$ şi fie $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\left|\phi\left(Me^{i\theta}, \frac{mMe^{i\theta}}{\nu + Me^{i\theta}} + Me^{i\theta}\right)\right| \geq M.$$

De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$ cu $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ şi $\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z) \neq 0$ pentru $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\left|\phi\left(\frac{z\big(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\big)'}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{z\big(\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)\big)'}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}\right)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U} \tag{2.10}$$

implică

$$\left|\frac{z\big(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\big)'}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{2.11}$$

Observaţia 2.1.6. *[131] Utilizând* (1.13), *inegalităţile* (2.10) *şi* (2.11) *din Teorema 2.1.18 devin:*

$$\left|\phi\left(\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}\right)\right| < M$$

şi

$$\left|\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}\right| < M.$$

Luând, respectiv, $\nu = n = \lambda = 0$ şi $\nu = \lambda = 0$, $n = 1$ în Teorema 2.1.18 obţinem următoarele corolarii.

Corolarul 2.1.11. *[131] Fie $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\left|\phi(Me^{i\theta}, m + Me^{i\theta})\right| \geq M,$$

unde $M > 1, m \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$, şi fie $f \in \mathcal{A}$, cu $f(z) \neq 0$ şi $\mathcal{R}^1 f(z) \neq 0$ pentru $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\left|\phi\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}, \frac{z\big(\mathcal{R}^1 f(z)\big)'}{\mathcal{R}^1 f(z)}\right)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Corolarul 2.1.12. *[131] Fie $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\left|\phi(Me^{i\theta}, m + Me^{i\theta})\right| \geq M,$$

unde $M > 1, m \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$, şi fie $f \in \mathcal{A}$, cu $\mathcal{D}^1 f(z) \neq 0$ şi $\mathcal{R}^1\mathcal{D}^1 f(z) \neq 0$ pentru $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\left|\phi\left(\frac{z\big(\mathcal{D}^1 f(z)\big)'}{\mathcal{D}^1 f(z)}, \frac{z\big(\mathcal{R}^1\mathcal{D}^1 f(z)\big)'}{\mathcal{R}^1\mathcal{D}^1 f(z)}\right)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\left|\frac{z\big(\mathcal{D}^1 f(z)\big)'}{\mathcal{D}^1 f(z)}\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.19. *[131] Fie $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 2, \rho, \sigma \in \mathbb{R}$ şi fie $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\Re\phi\left(\rho i, \frac{\sigma}{\nu + \rho i} + \rho i\right) \leq 0,$$

unde $\sigma \leq -\frac{1}{2}(1 + \rho^2)$. De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$ cu $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ şi $\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z) \neq 0$ pentru $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\Re\phi\left(\frac{z\big(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\big)'}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{z\big(\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)\big)'}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.12}$$

implică

$$\Re\frac{z\big(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\big)'}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{2.13}$$

Observaţia 2.1.7. *[131] Inegalităţile* (2.12) *şi* (2.13) *din Teorema 2.1.19 pot fi exprimate sub forma următoare:*

$$\Re\phi\left(\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}\right) > 0$$

şi

$$\Re\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)} > 0.$$

Luând, respectiv, $\nu = n = \lambda = 0$ şi $\nu = \lambda = 0, n = 1$ în Teorema 2.1.19, obţinem următoarele corolarii.

Corolarul 2.1.13. *[131] Fie* $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\Re\phi\left(\rho i, \frac{\sigma}{\rho i} + \rho i\right) \leq 0,$$

unde $\rho, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma \leq -\frac{1}{2}(1+\rho^2)$ *şi fie* $f \in \mathcal{A}$ *cu* $f(z) \neq 0$ *şi* $\mathcal{R}^1 f(z) \neq 0$ *pentru* $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\Re\phi\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}, \frac{z\big(\mathcal{R}^1 f(z)\big)'}{\mathcal{R}^1 f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Observaţia 2.1.8. *[131] Corolarul 2.1.13 este un criteriu de stelaritate.*

Corolarul 2.1.14. *[131] Fie* $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\Re\phi\left(\rho i, \frac{\sigma}{\rho i} + \rho i\right) \leq 0,$$

unde $\rho, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma \leq -\frac{1}{2}(1+\rho^2)$ *şi fie* $f \in \mathcal{A}$ *cu* $\mathcal{D}^1 f(z) \neq 0$ *şi* $\mathcal{R}^1\mathcal{D}^1 f(z) \neq 0$ *pentru* $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\Re\phi\left(\frac{z\big(\mathcal{D}^1 f(z)\big)'}{\mathcal{D}^1 f(z)}, \frac{z\big(\mathcal{R}^1\mathcal{D}^1 f(z)\big)'}{\mathcal{R}^1\mathcal{D}^1 f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\Re\frac{z\big(\mathcal{D}^1 f(z)\big)'}{\mathcal{D}^1 f(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Observaţia 2.1.9. *[131] Corolarul 2.1.14 este un criteriu de convexitate.*

Luând $\psi(p(z), zp'(z)) = p(z) + \delta\frac{zp'(z)}{p(z)}$ în demonstraţiile teoremelor 2.1.18 şi 2.1.19, obţinem următoarele corolarii.

Corolarul 2.1.15. *[131] Fie* $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 2, M > 1, \delta \in \mathbb{R}$ *şi fie* $f \in \mathcal{A}$ *cu* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ *şi* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z) \neq 0$ *pentru* $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\left|(1-\delta)\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)} + \delta\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+2} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\left|\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Corolarul 2.1.16. *[131] Fie* $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 2, \delta \in \mathbb{R}$ *şi fie* $f \in \mathcal{A}$ *cu* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ *şi* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z) \neq 0$ *pentru* $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\Re\left[(1-\delta)\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)} + \delta\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+2} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}\right] > 0, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\Re\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.20. *[131] Fie* $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 2, M > 1, m \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$ *şi fie* $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\left|\phi\left(Me^{i\theta}, m + Me^{i\theta}\right)\right| \geq M.$$

De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$ *cu* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ *şi* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z) \neq 0$ *pentru* $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\left|\phi\left(\frac{z\left(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\right)'}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{z\left(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)\right)'}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}\right)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U} \tag{2.14}$$

implică

$$\left|\frac{z\left(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\right)'}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{2.15}$$

Observaţia 2.1.10. *[131] Inegalităţile* (2.14) *şi* (2.15) *din Teorema 2.1.20 pot fi exprimate sub forma următoare:*

$$\left|\phi\left(\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+2} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}\right)\right| < M$$

şi

$$\left|\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}\right| < M.$$

Teorema 2.1.21. *[131] Fie* $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 2, \rho, \sigma \in \mathbb{R}$ *şi fie* $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\Re\phi\left(\rho i, \frac{\sigma}{\rho i} + \rho i\right) \leq 0,$$

unde $\sigma \leq -\frac{1}{2}(1+\rho^2)$. *De asemenea, fie* $f \in \mathcal{A}$ *cu* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ *şi* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z) \neq 0$ *pentru* $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\Re\phi\left(\frac{z\left(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\right)'}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{z\left(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)\right)'}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U} \tag{2.16}$$

implică

$$\Re\frac{z\big(\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n}f(z)\big)'}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n}f(z)} > 0, \quad z\in\mathcal{U}. \tag{2.17}$$

Observaţia 2.1.11. *[131] Inegalităţile* (2.16) *şi* (2.17) *din Teorema 2.1.21 pot fi exprimate sub forma următoare:*

$$\Re\phi\bigg(\frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+1}f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n}f(z)}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+2}f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+1}f(z)}\bigg) > 0$$

şi

$$\Re\frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+1}f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n}f(z)} > 0.$$

Teorema 2.1.22. *[131] Fie* $\nu > -1, n\in\mathbb{N}, -\infty < \lambda < 1, M > 1, m \geq 1, \theta\in\mathbb{R}$ *şi fie* $\phi:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ *o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\bigg|\phi\bigg(Me^{i\theta}, \frac{mMe^{i\theta}}{-\lambda+Me^{i\theta}} + Me^{i\theta}\bigg)\bigg| \geq M.$$

De asemenea, fie $f\in\mathcal{A}$ *cu* $\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n}f(z)\neq 0$ *şi* $\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n}f(z)\neq 0$ *pentru* $z\in\mathcal{U}\setminus\{0\}$.
Inegalitatea

$$\bigg|\phi\bigg(\frac{z\big(\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n}f(z)\big)'}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n}f(z)}, \frac{z\big(\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n}f(z)\big)'}{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n}f(z)}\bigg)\bigg| < M, \quad z\in\mathcal{U} \tag{2.18}$$

implică

$$\bigg|\frac{z\big(\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n}f(z)\big)'}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n}f(z)}\bigg| < M, \quad z\in\mathcal{U}. \tag{2.19}$$

Observaţia 2.1.12. *[131] Inegalităţile* (2.18) *şi* (2.19) *din Teorema 2.1.22 pot fi exprimate sub forma următoare:*

$$\bigg|\phi\bigg(\frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+1}f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n}f(z)}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n+1}f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n}f(z)}\bigg)\bigg| < M$$

şi

$$\bigg|\frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+1}f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n}f(z)}\bigg| < M.$$

Teorema 2.1.23. *[131] Fie* $\nu > -1, n\in\mathbb{N}, -\infty < \lambda < 1, \rho,\sigma\in\mathbb{R}$ *şi fie* $\phi:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ *o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\Re\phi\bigg(\rho i, \frac{\sigma}{-\lambda+\rho i} + \rho i\bigg) \leq 0,$$

unde $\sigma \leq -\frac{1}{2}(1+\rho^2)$. *De asemenea, fie* $f \in \mathcal{A}$ *cu* $\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z) \neq 0$ *şi* $\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z) \neq 0$ *pentru* $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\Re\phi\left(\frac{z\big(\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)\big)'}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)}, \frac{z\big(\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)\big)'}{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U} \tag{2.20}$$

implică

$$\Re\frac{z\big(\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)\big)'}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{2.21}$$

Observaţia 2.1.13. *[131] Inegalităţile* (2.20) *şi* (2.21) *din Teorema 2.1.23 pot fi exprimate sub forma următoare:*

$$\Re\phi\left(\frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}\right) > 0$$

şi

$$\Re\frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)} > 0.$$

Teorema 2.1.24. *[131] Fie* $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 2, M > 0, m \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$ *şi fie* $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ *o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\left|\phi\left(Me^{i\theta}, mMe^{i\theta}, mMe^{i\theta} + L\right)\right| \geq M,$$

unde $\Re(Le^{-i\theta}) \geq (m-1)mM$. *De asemenea, fie* $f \in \mathcal{A}$.
Inegalitatea

$$\left|\phi\left(\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z), \mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+1} f(z), \mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+2} f(z)\right)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\left|\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.25. *[131] Fie* $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 1, M > 0, m \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$ *şi fie* $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\left|\phi\left(Me^{i\theta}, \frac{-\lambda + m}{1-\lambda} Me^{i\theta}\right)\right| \geq M.$$

De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$.
Inegalitatea

$$\left|\phi\left(\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z), \mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)\right)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U},$$

implică

$$\left|\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.26. *[131] Fie $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 1, M > 1, m \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$ şi fie $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\left|\phi\left(Me^{i\theta}, Me^{i\theta}\left(1 + \frac{m}{(\nu+1)Me^{i\theta} - \nu - \lambda}\right)\right)\right| \geq M.$$

De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$ cu $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ şi $\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z) \neq 0$ pentru $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\left|\phi\left(\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}\right)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\left|\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.27. *[131] Fie $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 1, \rho, \sigma \in \mathbb{R}$ şi fie $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\Re\phi\left(\rho i, \rho i + \frac{\sigma}{(\nu+1)\rho i - \nu - \lambda}\right) \leq 0,$$

unde $\sigma \leq -\frac{1}{2}(1+\rho^2)$. De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$ cu $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ şi $\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z) \neq 0$ pentru $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\Re\phi\left(\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\Re\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.28. *[131] Fie $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 0, M > 1, m \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$ şi fie $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\left|\phi\left(Me^{i\theta}, \frac{1}{\lambda}\big(1 - (1-\lambda)Me^{i\theta} - m\big)\right)\right| \geq M.$$

De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$ cu $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ şi $\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z) \neq 0$ pentru $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\left|\phi\left(\frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda+2}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}\right)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\left|\frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.29. *[131] Fie $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 0, \rho, \sigma \in \mathbb{R}$ şi fie $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\Re\phi\bigg(\rho i, \frac{1}{\lambda}\bigg(1 - (1-\lambda)\rho i - \frac{\sigma}{\rho i}\bigg)\bigg) \leq 0,$$

unde $\sigma \leq -\frac{1}{2}(1+\rho^2)$. De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$ cu $\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z) \neq 0$ şi $\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z) \neq 0$ pentru $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\Re\phi\bigg(\frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda+2}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}\bigg) > 0, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\Re\frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.30. *[131] Fie $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 2, M > 1, m \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$ şi fie $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\bigg|\phi\bigg(Me^{i\theta}, (1+m)Me^{i\theta}, (1+3m)Me^{i\theta} + L\bigg)\bigg| \geq M,$$

unde $\Re(Le^{-i\theta}) \geq (m-1)mM$. De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$.
Inegalitatea

$$\bigg|\phi\bigg(\frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)}{z}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+1} f(z)}{z}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+2} f(z)}{z}\bigg)\bigg| < M, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\bigg|\frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)}{z}\bigg| < M, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.31. *[131] Fie $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 2, \rho, \sigma, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ şi fie $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\Re\phi\big(\rho i, \rho i + \sigma, \rho i + 3\sigma + \mu + i\nu\big) \leq 0,$$

unde $\sigma \leq -\frac{1}{2}(1+\rho^2), \sigma + \mu \leq 0$. De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$.
Inegalitatea

$$\Re\phi\bigg(\frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)}{z}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+1} f(z)}{z}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n+2} f(z)}{z}\bigg) > 0, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\Re\frac{\mathbb{D}_{\lambda}^{\nu,n} f(z)}{z} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.32. *[131] Fie $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 1, M > 1, m \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$ şi fie $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\left|\phi\left(Me^{i\theta}, \left(1 + \frac{m}{1-\lambda}\right)Me^{i\theta}\right)\right| \geq M.$$

De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$.
Inegalitatea

$$\left|\phi\left(\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}{z}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{z}\right)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\left|\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}{z}\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.33. *[131] Fie $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 1, \rho, \sigma \in \mathbb{R}$ şi fie $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\Re\phi\left(\rho i, \rho i + \frac{\sigma}{1-\lambda}\right) \leq 0,$$

unde $\sigma \leq -\frac{1}{2}(1+\rho^2)$. De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$.
Inegalitatea

$$\Re\phi\left(\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}{z}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{z}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\Re\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}{z} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.34. *[131] Fie $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 2, M > 1, m \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$ şi fie $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\left|\phi\left(Me^{i\theta}, Me^{i\theta}\left(1 + \frac{m}{(\nu+1)Me^{i\theta} - \nu}\right)\right)\right| \geq M.$$

De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$ cu $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ şi $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z) \neq 0$ pentru $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\left|\phi\left(\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}\right)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\left|\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.35. *[131] Fie $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 2, \rho, \sigma \in \mathbb{R}$ şi fie $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\Re\phi\left(\rho i, \rho i + \frac{\sigma}{(\nu+1)\rho i - \nu}\right) \leq 0,$$

unde $\sigma \leq -\frac{1}{2}(1+\rho^2)$. *De asemenea, fie* $f \in \mathcal{A}$ *cu* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ *şi* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z) \neq 0$ *pentru* $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\Re\phi\left(\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\Re\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.36. *[131] Fie* $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 1, M > 1, m \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$ *şi fie* $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\left|\phi\left(Me^{i\theta}, Me^{i\theta}\left(1 + \frac{m}{(1-\lambda)Me^{i\theta} + \nu + \lambda}\right)\right)\right| \geq M.$$

De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$ *cu* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ *şi* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z) \neq 0$ *pentru* $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\left|\phi\left(\frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}\right)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\left|\frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.37. *[131] Fie* $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 1, \rho, \sigma \in \mathbb{R}$ *şi fie* $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\Re\phi\left(\rho i, \rho i + \frac{\sigma}{(1-\lambda)\rho i + \nu + \lambda}\right) \leq 0,$$

unde $\sigma \leq -\frac{1}{2}(1+\rho^2)$. *De asemenea, fie* $f \in \mathcal{A}$ *cu* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ *şi* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z) \neq 0$ *pentru* $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\Re\phi\left(\frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu+1,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\Re\frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.38. *[131] Fie* $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 1, M > 1, m \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$ *şi fie* $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\left|\phi\left(Me^{i\theta}, Me^{i\theta}\left(1 + \frac{m}{(1-\lambda)Me^{i\theta} + \lambda}\right)\right)\right| \geq M.$$

De asemenea, fie $f \in \mathcal{A}$ *cu* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ *şi* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z) \neq 0$ *pentru* $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\left|\phi\left(\frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}\right)\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\left|\frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}\right| < M, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.39. *[131] Fie* $\nu > -1, n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 1, \rho, \sigma \in \mathbb{R}$ *şi fie* $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *o funcţie admisibilă care satisface condiţia*

$$\Re\phi\left(\rho i, \rho i + \frac{\sigma}{(1-\lambda)\rho i + \lambda}\right) \leq 0,$$

unde $\sigma \leq -\frac{1}{2}(1+\rho^2)$. *De asemenea, fie* $f \in \mathcal{A}$ *cu* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) \neq 0$ *şi* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z) \neq 0$ *pentru* $z \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.
Inegalitatea

$$\Re\phi\left(\frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}, \frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n+1} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}$$

implică

$$\Re\frac{\mathbb{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

2.1.4 Delimitări ale coeficienţilor şi problema Fekete-Szegő pentru clase de funcţii analitice definite cu ajutorul operatorului $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$

H. M. Srivastava, P. Sharma, R. K. Raina [126] au introdus următoarele clase de funcţii folosind operatorul liniar $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$ definit de (1.8) pentru $\eta, 0 \leq \eta < 1$ şi $\gamma \geq 0$ şi pentru $\phi \in \mathcal{Q}$ (v. pagina 14):

$$\mathcal{S}_\lambda^{\nu,n}(\eta, [\phi]) = \left\{f : f \in \mathcal{A}, \frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z\left(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\right)'}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)} - \eta\right) \prec \phi(z)\right\},$$

$$\mathcal{C}_\lambda^{\nu,n}(\eta, [\phi], [\psi]) = \left\{f : f \in \mathcal{A}, \mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} g \in \mathcal{S}^*(\psi), \frac{1}{1-\eta}\left(\frac{z\left(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\right)'}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} g(z)} - \eta\right) \prec \phi(z)\right\}$$

şi

$$\mathcal{R}_\lambda^{\nu,n}(\eta, \gamma, [\phi], [\psi]) = \left\{f : f \in \mathcal{A}, \mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} g \in \mathcal{S}^*(\psi),\right.$$

$$\left.\frac{1}{1-\eta}\left((1-\gamma)\frac{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)}{\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} g(z)} + \gamma\frac{\left(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\right)'}{\left(\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n} g(z)\right)'} - \eta\right) \prec \phi(z)\right\}.$$

Observaţia 2.1.14. *[39] Pentru $\eta = \lambda = \nu = n = 0$ se obţin*

$$\mathcal{S}_0^{0,0}(0, [\phi]) = \mathcal{S}^*(\phi),$$

$$\mathcal{C}_0^{0,0}(0, [\phi], [\psi]) = \mathcal{C}(\phi, \psi),$$

cele două clase fiind definite în Definiţia 1.2.17.

Vom folosi următoarea lemă pentru a demonstra unele dintre rezultatele noastre.

Lema 2.1.1. *[66] Presupunem că $\eta(z) = e_1 + e_2 z + \dots$ este analitică în $\mathcal{U}$ cu $|\eta(z)| \leq 1$. Atunci $|e_1|^2 + |e_2| \leq 1$.*

Teorema 2.1.40. *[39] Fie $f \in \mathcal{A}$ de forma* (1.1)*. Dacă funcţia f este în clasa $\mathcal{S}_\lambda^{\nu,n}(\eta, [\phi])$, atunci*

$$\left|a_{k+1}\right| \leq \frac{(2-\lambda)_k \prod_{j=0}^{k-1} \big(j + 2(1-\eta)\big)}{(1)_k(\nu+1)_k(k+1)^{n+1}}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Observaţia 2.1.15. *[39] Pentru $\lambda = \nu = n = 0, \phi(z) = \dfrac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}, 0 \leq \alpha < 1$, rezultatul Teoremei 2.1.40 a fost obţinut în [113].*

Teorema 2.1.41. *[39] Fie $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$, B_k numere reale, $k = 1, 2, \dots$ şi $B_1 > 0$. Dacă $f(z)$ dată prin* (1.1) *este în clasa $\mathcal{S}_\lambda^{\nu,n}(\eta, [\phi])$, atunci*

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{(1-\eta)(2-\lambda)(3-\lambda)}{2^2 3^{n+1}(\nu+1)(\nu+2)} \left|2B_2 - \dfrac{B_1^2}{2^{2n}(3-\lambda)(\nu+1)}\gamma_0\right|, & \text{dacă } \mu \leq \sigma_1 \\ \dfrac{(1-\eta)(2-\lambda)(3-\lambda)}{2 \cdot 3^{n+1}(\nu+1)(\nu+2)} B_1, & \text{dacă } \sigma_1 \leq \mu \leq \sigma_2 \\ \dfrac{(1-\eta)(2-\lambda)(3-\lambda)}{2^2 3^{n+1}(\nu+1)(\nu+2)} \left|-2B_2 + \dfrac{B_1^2}{2^{2n}(3-\lambda)(\nu+1)}\gamma_0\right|, & \text{dacă } \mu \geq \sigma_2. \end{cases}$$

În plus, dacă $\sigma_1 < \mu \leq \sigma_3$, atunci

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| + \frac{2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)}{3^{n+1}(1-\eta)(2-\lambda)(\nu+2)B_1} \left|1 - \frac{B_2}{B_1} + \frac{\gamma_0 B_1}{2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)}\right| |a_2|^2$$

$$\leq \frac{(1-\eta)(2-\lambda)(3-\lambda)}{2 \cdot 3^{n+1}(\nu+1)(\nu+2)} B_1.$$

Dacă $\sigma_3 \leq \mu < \sigma_2$, atunci

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| + \frac{2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)}{3^{n+1}(1-\eta)(2-\lambda)(\nu+2)B_1} \left|1 + \frac{B_2}{B_1} - \frac{\gamma_0 B_1}{2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)}\right| |a_2|^2$$

$$\leq \frac{(1-\eta)(2-\lambda)(3-\lambda)}{2\cdot 3^{n+1}(\nu+1)(\nu+2)}B_1,$$

unde

$$\sigma_1 = \frac{2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)\big[B_2 - B_1 + B_1^2(1-\eta)\big]}{3^{n+1}(1-\eta)(2-\lambda)(\nu+2)B_1^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)\big[B_2 + B_1 + B_1^2(1-\eta)\big]}{3^{n+1}(1-\eta)(2-\lambda)(\nu+2)B_1^2},$$

$$\sigma_3 = \frac{2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)\big[B_2 + B_1^2(1-\eta)\big]}{3^{n+1}(1-\eta)(2-\lambda)(\nu+2)B_1^2},$$

$$\gamma_0 = (1-\eta)\big[3^{n+1}\mu(2-\lambda)(\nu+2) - 2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)\big].$$

Aceste rezultate sunt exacte.

Observaţia 2.1.16. *[39] Pentru $\lambda = \nu = n = \eta = 0$, rezultatul Teoremei 2.1.41 a fost obţinut în [80] şi pentru $\lambda = \nu = 0$, în [45].*

Teorema 2.1.42. *[39] Fie $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots$, B_k numere reale, $k = 1, 2, \ldots$ şi $B_1 > 0$, şi fie $f(z)$ în clasa $\mathcal{S}_\lambda^{\nu,n}(\eta, [\phi])$. Pentru un număr complex μ avem:*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{(1-\eta)(2-\lambda)(3-\lambda)B_1}{2\cdot 3^{n+1}(\nu+1)(\nu+2)} \max\left\{1; \left| -\frac{B_2}{B_1} + \frac{\gamma_0 B_1}{2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)}\right|\right\},$$

unde

$$\gamma_0 = (1-\eta)\big(3^{n+1}\mu(2-\lambda)(\nu+2) - 2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)\big).$$

Rezultatul este exact.

Teorema 2.1.43. *[39] Fie $f \in \mathcal{A}$ de forma (1.1). Dacă funcţia f este în clasa $\mathcal{C}_\lambda^{\nu,n}(\eta, [\phi], [\psi])$, atunci*

$$\big|a_{k+1}\big| \leq \frac{(2-\lambda)_k\big(1 + k(1-\eta)\big)}{(\nu+1)_k(k+1)^{n+1}}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Teorema 2.1.44. *[39] Fie $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots$ analitică în $\mathcal{U}$ şi fie $\psi(z) = 1 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots$ univalentă în $\mathcal{U}$, C_k numere reale, $k = 1, 2, \ldots$ şi $C_1 > 0$. Dacă $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \in \mathcal{C}_\lambda^{\nu,n}(\eta, [\phi], [\psi])$, atunci*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq K(\mu, \lambda, \nu, n, C_1, C_2) + L(\mu, \lambda, \nu, n, \eta, B_1, B_2, C_1),$$

unde

$$K(\mu, \lambda, \nu, n, C_1, C_2) =$$

$$\begin{cases} \dfrac{(2-\lambda)(3-\lambda)}{2^2\cdot 3^{n+2}(\nu+1)(\nu+2)}\left|2C_2-\dfrac{C_1^2}{2^{2n}(3-\lambda)(\nu+1)}\gamma_0\right|, & \textit{dacă } \mu\le\sigma_1 \\[2ex] \dfrac{(2-\lambda)(3-\lambda)}{2\cdot 3^{n+2}(\nu+1)(\nu+2)}C_1, & \textit{dacă } \sigma_1\le\mu\le\sigma_2\ , \\[2ex] \dfrac{(2-\lambda)(3-\lambda)}{2^2\cdot 3^{n+2}(\nu+1)(\nu+2)}\left|-2C_2+\dfrac{C_1^2}{2^{2n}(3-\lambda)(\nu+1)}\gamma_0\right|, & \textit{dacă } \mu\ge\sigma_2 \end{cases}$$

$$L(\mu,\lambda,\nu,n,\eta,B_1,B_2,C_1)=$$

$$\begin{cases} \dfrac{(1-\eta)(2-\lambda)(3-\lambda)}{3^{n+2}(\nu+1)(\nu+2)}\left|B_2-\alpha_2B_1^2\right|+\dfrac{|\alpha_1|C_1(2-\lambda)}{2^{n+1}(\nu+1)}|B_1|, \\ \qquad \textit{dacă } \dfrac{|\alpha_1|C_1(2-\lambda)}{2^{n+1}(\nu+1)}|B_1|\ge\dfrac{2(1-\eta)(2-\lambda)(3-\lambda)}{3^{n+2}(\nu+1)(\nu+2)}\big(|B_1|-\left|B_2-\alpha_2B_1^2\right|\big) \\[2ex] \dfrac{(1-\eta)(2-\lambda)(3-\lambda)|B_1|}{3^{n+2}(\nu+1)(\nu+2)}+\dfrac{3^{n+2}(2-\lambda)(\nu+2)|B_1|^2C_1^2|\alpha_1|^2}{2^{2n+4}(1-\eta)(3-\lambda)(\nu+1)\big(|B_1|-\left|B_2-\alpha_2B_1^2\right|\big)}, \\ \qquad \textit{în caz contrar} \end{cases},$$

$$\sigma_1=\frac{2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)(C_2-C_1+C_1^2)}{3^{n+1}(2-\lambda)(\nu+2)C_1^2},$$

$$\sigma_2=\frac{2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)(C_2+C_1+C_1^2)}{3^{n+1}(2-\lambda)(\nu+2)C_1^2},$$

$$\gamma_0=\frac{3^{n+2}\mu(2-\lambda)(\nu+2)}{4}-2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1),$$

$$\alpha_1=\frac{2^{n+1}(1-\eta)(3-\lambda)}{3^{n+2}(\nu+2)}-\frac{\mu(1-\eta)(2-\lambda)}{2^{n+2}(\nu+1)},$$

$$\alpha_2=\frac{3^{n+2}\mu(1-\eta)(2-\lambda)(\nu+2)}{2^{2n+4}(3-\lambda)(\nu+1)}.$$

Observaţia 2.1.17. *[39] Pentru $\lambda=\nu=n=\eta=0$, rezultatul Teoremei 2.1.44 a fost obţinut în [66].*

Teorema 2.1.45. *[39] Fie $f\in\mathcal{A}$ de forma (1.1). Dacă funcţia f este în clasa $\mathcal{R}_\lambda^{\nu,n}(\eta,0,[\phi],[\psi])$, atunci*

$$\left|a_{k+1}\right|\le\frac{(2-\lambda)_k\big(1+k(1-\eta)\big)}{(\nu+1)_k(k+1)^n},\quad k\in\mathbb{N}^*.$$

Teorema 2.1.46. *[39] Fie $f \in \mathcal{A}$ dată de (1.1). Dacă funcţia f este în clasa $\mathcal{R}_{\lambda}^{\nu,n}(\eta, 1, [\phi], [\psi])$, atunci*

$$\left|a_{k+1}\right| \leq \frac{(2-\lambda)_k\big(3k+3+(1-\eta)k(2k+1)\big)}{3(\nu+1)_k(k+1)^{n+1}}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Teorema 2.1.47. *[39] Fie $\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots$ analitică în $\mathcal{U}$ şi fie $\psi(z) = 1 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots$ univalentă în $\mathcal{U}$, C_k numere reale, $k = 1, 2, \ldots$ şi $C_1 > 0$. Dacă $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \in \mathcal{R}_{\lambda}^{\nu,n}(\eta, \gamma, [\phi], [\psi])$, atunci*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq M(\mu, \lambda, \nu, n, C_1, C_2) + N(\mu, \lambda, \nu, n, \eta, \gamma, B_1, B_2, C_1),$$

unde

$$M(\mu, \lambda, \nu, n, C_1, C_2) =$$
$$\begin{cases} \dfrac{(2-\lambda)(3-\lambda)}{2^2 \cdot 3^{n+1}(\nu+1)(\nu+2)}\left|2C_2 - \dfrac{C_1^2}{2^{2n}(3-\lambda)(\nu+1)}\gamma_0\right|, & \text{dacă } \mu \leq \sigma_1 \\ \dfrac{(2-\lambda)(3-\lambda)}{2 \cdot 3^{n+1}(\nu+1)(\nu+2)}C_1, & \text{dacă } \sigma_1 \leq \mu \leq \sigma_2\ , \\ \dfrac{(2-\lambda)(3-\lambda)}{2^2 \cdot 3^{n+1}(\nu+1)(\nu+2)}\left|-2C_2 + \dfrac{C_1^2}{2^{2n}(3-\lambda)(\nu+1)}\gamma_0\right|, & \text{dacă } \mu \geq \sigma_2 \end{cases}$$

$$N(\mu, \lambda, \nu, n, \eta, \gamma, B_1, B_2, C_1) =$$
$$\begin{cases} \dfrac{(1-\eta)(2-\lambda)(3-\lambda)}{3^{n+1}(1+2\gamma)(\nu+1)(\nu+2)}\left|B_2 - \alpha_2 B_1^2\right| + \dfrac{C_1(2-\lambda)|\alpha_1|}{2^{n+1}(\nu+1)}|B_1|, \\ \qquad \text{dacă } \dfrac{C_1(2-\lambda)|\alpha_1|}{2^{n+1}(\nu+1)}|B_1| \geq \dfrac{2(1-\eta)(2-\lambda)(3-\lambda)}{3^{n+1}(1+2\gamma)(\nu+1)(\nu+2)}\Big(|B_1| - \left|B_2 - \alpha_2 B_1^2\right|\Big) \\ \\ \dfrac{(1-\eta)(2-\lambda)(3-\lambda)|B_1|}{3^{n+1}(1+2\gamma)(\nu+1)(\nu+2)} + \dfrac{3^{n+1}(1+2\gamma)(2-\lambda)(\nu+2)|B_1|^2 C_1^2 \left|\alpha_1\right|^2}{2^{2n+4}(1-\eta)(3-\lambda)(\nu+1)\big(|B_1| - \left|B_2 - \alpha_2 B_1^2\right|\big)}, \\ \qquad \text{în caz contrar} \end{cases},$$

$$\sigma_1 = \frac{2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)(C_2 - C_1 + C_1^2)}{3^{n+1}(2-\lambda)(\nu+2)C_1^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1)(C_2 + C_1 + C_1^2)}{3^{n+1}(2-\lambda)(\nu+2)C_1^2},$$

$$\gamma_0 = 3^{n+1}\mu(2-\lambda)(\nu+2) - 2^{2n+1}(3-\lambda)(\nu+1),$$

$$\alpha_1 = \frac{2^{n+1}(1-\eta)(1+3\gamma)(3-\lambda)}{3^{n+1}(1+\gamma)(1+2\gamma)(\nu+2)} - \frac{\mu(1-\eta)(2-\lambda)}{2^n(1+\gamma)(\nu+1)},$$

$$\alpha_2 = \frac{3^{n+1}\mu(1-\eta)(1+2\gamma)(2-\lambda)(\nu+2)}{2^{2n+2}(1+\gamma)^2(3-\lambda)(\nu+1)}.$$

2.2 Asupra unei clase de funcţii meromorfe definită folosind operatorul $\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n}$ şi anumiţi operatori integrali

Fie Σ clasa funcţiilor de forma

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

care sunt analitice în $\mathcal{U}^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$.

Motivaţi de [120], definim operatorul fracţional $\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n} : \Sigma \to \Sigma$, prin

$$\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)_{k+1}}{(2-\lambda)_{k+1}} (k+2)^{n+1} a_k z^k, \tag{2.22}$$

unde $-\infty < \lambda < 2, \nu > -1, n \in \mathbb{N}, z \in \mathcal{U}^*$ şi simbolul $(\gamma)_k$ reprezintă simbolul Pochhammer, pentru $\gamma \in \mathbb{C}$.

Notăm că operatorul

$$\mathcal{D}_0^{0,n} f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^n a_k z^k$$

a fost introdus şi studiat în [138].

Observaţia 2.2.1. *[37] Operatorul $\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n}$ satisface următoarele identităţi:*

$$\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z) = 2\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) + z\big(\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\big)', \tag{2.23}$$

$$\mathcal{D}_\lambda^{\nu+1,n} f(z) = \frac{\nu+2}{\nu+1}\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) + \frac{1}{\nu+1} z\big(\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\big)', \tag{2.24}$$

$$\mathcal{D}_{\lambda+1}^{\nu,n} f(z) = \frac{2-\lambda}{1-\lambda}\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n} f(z) + \frac{1}{1-\lambda} z\big(\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)\big)', \tag{2.25}$$

unde $-\infty < \lambda < 2, \nu > -1, n \in \mathbb{N}$.

Definiţia 2.2.1. *[37] O funcţie $f \in \Sigma$ este în clasa $SD_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$ dacă satisface*

$$\Re\left(\frac{\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}{\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)} - 2\right) < -\alpha, \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.26}$$

pentru α $(0 \le \alpha < 1), -\infty < \lambda < 2, \nu > -1, n \in \mathbb{N}$.

Pentru a demonstra rezultatele noastre, avem nevoie de următoarea lemă, cunoscută drept lema lui Jack. O extindere a acesteia este Lema Jack-Miller-Mocanu [84, 92].

Lema 2.2.1. *[51] Fie funcţia w olomorfă şi neconstantă în $|z| < 1$, cu $w(0) = 0$. Dacă $|w|$ îşi atinge valoarea maximă pe cercul $|z| = r < 1$ într-un punct z_0, atunci avem $z_0 w'(z_0) = kw(z_0)$, unde k este un număr real şi $k \geq 1$.*

Pentru a demonstra rezultatele noastre, folosim metodele utilizate în [24, 138].

Teorema 2.2.1. *[37] $SD_\lambda^{\nu,n+1}(\alpha) \subset SD_\lambda^{\nu,n}(\alpha), \quad n \in \mathbb{N}$.*

Observaţia 2.2.2. *[37] Luând $\lambda = 0$ şi $\nu = 0$, obţinem Teorema 2.1 din [138].*

Folosind Lema 1.3.2 în loc de Lema 2.2.1 vom obţine o îmbunătăţire a Teoremei 2.2.1.

Teorema 2.2.2. *[37] $SD_\lambda^{\nu,n+1}(\alpha) \subset SD_\lambda^{\nu,n}(\beta)$, pentru $n \in \mathbb{N}$, unde*

$$\beta = \frac{5 + 2\alpha - \sqrt{(3 - 2\alpha)^2 + 8}}{4}, \tag{2.27}$$

şi $\beta \in (\alpha, 1)$.

Observaţia 2.2.3. *[37] Luând $\lambda = 0$ şi $\nu = 0$, obţinem un caz particular al Teoremei 2.5 din [5].*

Teorema 2.2.3. *[37] $SD_\lambda^{\nu+1,n}(\alpha) \subset SD_\lambda^{\nu,n}(\alpha), \quad \nu > -1$.*

Teorema 2.2.4. *[37] $SD_{\lambda+1}^{\nu,n}(\alpha) \subset SD_\lambda^{\nu,n}(\alpha), \quad -\infty < \lambda < 1$.*

Teorema 2.2.5. *[37] Fie $f \in \Sigma$ satisfăcând condiţia*

$$\Re\left(\frac{\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n+1} f(z)}{\mathcal{D}_\lambda^{\nu,n} f(z)} - 2\right) < -\alpha + \frac{1-\alpha}{2(1-\alpha+c)}, \quad z \in \mathcal{U},$$
$$n \in \mathbb{N}, -\infty < \lambda < 2, \nu > -1, c > 0, \tag{2.28}$$

atunci

$$F(z) = \frac{c}{z^{c+1}} \int\limits_0^z t^c f(t)dt \in SD_\lambda^{\nu,n}(\alpha).$$

Observaţia 2.2.4. *[37] Luând $\lambda = 0$ şi $\nu = 0$, obţinem Teorema 2.2 din [138].*

Teorema 2.2.6. *[37] $f \in SD_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$ dacă şi numai dacă operatorul integral $F \in SD_\lambda^{\nu,n+1}(\alpha)$, unde $F(z) = \frac{1}{z^2} \int\limits_0^z t f(t)dt$.*

Observaţia 2.2.5. *[37] Luând $\lambda = 0$ şi $\nu = 0$, obţinem Teorema 2.3 din [138].*

Teorema 2.2.7. *[37] $f \in SD_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$ dacă şi numai dacă operatorul integral $F \in SD_\lambda^{\nu+1,n}(\alpha)$, unde $F(z) = \frac{\nu+1}{z^{\nu+2}} \int\limits_0^z t^{\nu+1} f(t)dt$.*

Teorema 2.2.8. *[37] $f \in SD_\lambda^{\nu,n}(\alpha)$ dacă şi numai dacă operatorul integral $F \in SD_{\lambda+1}^{\nu,n}(\alpha)$, unde $F(z) = \frac{1-\lambda}{z^{2-\lambda}} \int\limits_0^z t^{1-\lambda} f(t)dt$.*

2.3 Operatorul $\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n}$

Definiţia 2.3.1. *[133] Fie* $-\infty < \lambda < 2, \nu > -1, n \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \geq 0$. *Notăm cu* $\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n}$ *operatorul dat prin* $\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$,

$$\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z) = (1-\alpha-\beta)\mathcal{R}^{\nu}\mathcal{D}^{n} f(z) + \alpha\mathcal{R}^{\nu}\Omega_z^{\lambda} f(z) + \beta\mathcal{D}^{n}\Omega_z^{\lambda} f(z),$$

pentru $z \in \mathcal{U}$, *unde operatorii* $\mathcal{R}^{\nu}$, $\mathcal{D}^{n}$ *şi* Ω_z^{λ} *sunt definiţi în Definiţia 1.5.3, Definiţia 1.5.1 şi Definiţia 1.5.5, respectiv.*

Observaţia 2.3.1. *[133]* $\mathcal{R}^{\nu}\mathcal{D}^{n} f(z)$ *este compunerea operatorului Sălăgean şi operatorului Ruscheweyh,* $\mathcal{R}^{\nu}\Omega_z^{\lambda} f(z)$ *este compunerea operatorului diferintegral fracţional şi operatorului Ruscheweyh, şi* $\mathcal{D}^{n}\Omega_z^{\lambda} f(z)$ *este compunerea operatorului diferintegral fracţional şi operatorului Sălăgean.*

Observaţia 2.3.2. *[133] Dacă* $f \in \mathcal{A}, f(z) = z + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+1} z^{k+1}$, *atunci*

$$\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \left((1-\alpha-\beta)\frac{(\nu+1)_k}{(2)_k}(k+1)^{n+1} + \alpha\frac{(\nu+1)_k}{(2-\lambda)_k}(k+1) + \right.$$
$$\left. \beta\frac{(1)_k}{(2-\lambda)_k}(k+1)^{n+1} \right) a_{k+1} z^{k+1}, \tag{2.29}$$

pentru $z \in \mathcal{U}$.

Observaţia 2.3.3. *[133]* $\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z) = (1-\alpha-\beta)\mathbb{D}_0^{\nu,n} f(z) + \alpha\mathbb{D}_\lambda^{\nu,0} f(z) + \beta\mathbb{D}_\lambda^{0,n} f(z)$, *pentru* $z \in \mathcal{U}$, *unde* $\mathbb{D}_\lambda^{\nu,n}$ *este definit în* (1.8).

Observaţia 2.3.4. *[133] Pentru* $\alpha = 0$ *şi* $\beta = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{0,0}^{\lambda,\nu,n} f(z) = \mathcal{R}^{\nu}\mathcal{D}^{n} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\alpha = 1$ *şi* $\beta = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{1,0}^{\lambda,\nu,n} f(z) = \mathcal{R}^{\nu}\Omega_z^{\lambda} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\alpha = 0$ *şi* $\beta = 1$, *obţinem* $\mathscr{D}_{0,1}^{\lambda,\nu,n} f(z) = \mathcal{D}^{n}\Omega_z^{\lambda} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\beta = 0$ *şi* $\nu = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{\alpha,0}^{\lambda,0,n} f(z) = (1-\alpha)\mathcal{D}^{n} f(z) + \alpha\Omega_z^{\lambda} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\alpha = 0$ *şi* $n = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{0,\beta}^{\lambda,\nu,0} f(z) = (1-\beta)\mathcal{R}^{\nu} f(z) + \beta\Omega_z^{\lambda} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\alpha + \beta = 1$ *şi* $\lambda = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{1-\beta,\beta}^{0,\nu,n} f(z) = (1-\beta)\mathcal{R}^{\nu} f(z) + \beta\mathcal{D}^{n} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\alpha + \beta = 1, \lambda = 0$ *şi* $\nu = n$, *obţinem* $\mathscr{D}_{1-\beta,\beta}^{0,n,n} f(z) = (1-\beta)\mathcal{R}^{n} f(z) + \beta\mathcal{D}^{n} f(z), z \in \mathcal{U}$. *Acest operator a fost introdus şi studiat în [6].*

Pentru $\alpha = \beta = n = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{0,0}^{\lambda,\nu,0} f(z) = \mathcal{R}^{\nu} f(z)$ *şi pentru* $\beta = \lambda = n = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{\alpha,0}^{0,\nu,0} f(z) = \mathcal{R}^{\nu} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\alpha = \beta = \nu = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{0,0}^{\lambda,0,n} f(z) = \mathcal{D}^{n} f(z)$ *şi pentru* $\alpha = \lambda = \nu = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{0,\beta}^{0,0,n} f(z) = \mathcal{D}^{n} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\alpha = 0$ *şi* $\lambda = \nu = 1$, *obţinem* $\mathscr{D}_{0,\beta}^{1,1,n} f(z) = \mathcal{D}^{n+1} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\alpha = 1$ *şi* $\beta = \nu = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{1,0}^{\lambda,0,n} f(z) = \Omega_z^{\lambda} f(z)$ *şi pentru* $\alpha = n = 0$ *şi* $\beta = 1$, *obţinem* $\mathscr{D}_{0,1}^{\lambda,\nu,0} f(z) = \Omega_z^{\lambda} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\lambda = \nu = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{0,0,n} f(z) = (1-\alpha)\mathcal{D}^{n} f(z) + \alpha f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\lambda = n = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{0,\nu,0} f(z) = (1-\beta)\mathcal{R}^{\nu} f(z) + \beta f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\nu = n = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,0,0} f(z) = (1-\alpha-\beta) f(z) + (\alpha+\beta)\Omega_z^{\lambda} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\lambda = 0$ *şi* $\nu = 1$, *obţinem* $\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{0,1,n} f(z) = (1-\alpha-\beta)\mathcal{D}^{n+1} f(z) + \alpha\mathcal{D}^{1} f(z) + \beta\mathcal{D}^{n} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\lambda = 1$ *şi* $\nu = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{1,0,n} f(z) = (1-\alpha-\beta)\mathcal{D}^{n} f(z) + \alpha\mathcal{D}^{1} f(z) + \beta\mathcal{D}^{n+1} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\lambda = \nu = 1$, *obţinem* $\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{1,1,n} f(z) = (1-\alpha)\mathcal{D}^{n+1} f(z) + \alpha\mathcal{D}^{2} f(z)$, *unde* $z \in \mathcal{U}$.

Pentru $\lambda = \nu = n = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{0,0,0} f(z) = f(z)$, *pentru* $\alpha = \beta = \nu = n = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{0,0}^{\lambda,0,0} f(z) = f(z)$, *pentru* $\alpha = 1$ *şi* $\lambda = \nu = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{1,\beta}^{0,0,n} f(z) = f(z)$ *şi pentru* $\beta = 1$ *şi* $\lambda = n = 0$, *obţinem* $\mathscr{D}_{\alpha,1}^{0,\nu,0} f(z) = f(z)$, *pentru* $z \in \mathcal{U}$.

2.3.1 Asupra unei clase de funcţii analitice definită de operatorul $\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n}$

Definiţia 2.3.2. *[133] Fie* $f \in \mathcal{A}$. *Spunem că funcţia* f *aparţine clasei* $\mathscr{R}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n}(\delta)$, *unde* $0 \le \delta \le 1, \alpha, \beta \ge 0, -\infty < \lambda < 2, \nu > -1, n \in \mathbb{N}$, *dacă* f *satisface condiţia*

$$\Re(\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z))' > \delta, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{2.30}$$

Teorema 2.3.1. *[133] Fie* $f \in \mathscr{R}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n}(\delta)$ *şi* $g \in \mathcal{K}$, *unde* $\mathcal{K}$ *indică clasa funcţiilor convexe. Atunci* $f * g \in \mathscr{R}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n}(\delta)$.

Teorema 2.3.2. *[133] Mulţimea* $\mathscr{R}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n}(\delta)$ *este convexă.*

2.3.2 Subordonări diferenţiale obţinute cu ajutorul operatorului $\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n}$

Teorema 2.3.3. *[133] Fie* g *o funcţie convexă,* $g(0) = 1$ *şi fie* h *o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z)\right)' \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U} \tag{2.31}$$

atunci

$$\frac{\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z)}{z} \prec g(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi rezultatul este exact.

Teorema 2.3.4. *[133] Fie g o funcţie convexă, $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\frac{z\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu+1,n} f(z)}{\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z)}\right)' \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.32}$$

atunci

$$\frac{\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu+1,n} f(z)}{\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z)} \prec g(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi rezultatul este exact.

Teorema 2.3.5. *[133] Fie g o funcţie convexă, $g(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\left(\frac{z\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n+1} f(z)}{\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z)}\right)' \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.33}$$

atunci

$$\frac{\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n+1} f(z)}{\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z)} \prec g(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi rezultatul este exact.

Teorema 2.3.6. *[133] Fie g o funcţie convexă, $g(0) = 0$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n+1} f(z) + \mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z) + \alpha\left(\mathcal{D}\mathscr{D}_{1,0}^{\lambda,\nu,n} f(z) - \mathscr{D}_{1,0}^{\lambda,\nu,n} f(z)\right) \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.34}$$

atunci

$$\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z) \prec g(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi rezultatul este exact.

Teorema 2.3.7. *[133] Fie* $h(z) = \dfrac{1+(2\delta-1)z}{1+z}$ *o funcţie convexă în* U*, unde* $0 \leq \delta < 1$. *Dacă* $f \in \mathcal{A}$ *verifică subordonarea diferenţială*

$$\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n+1} f(z) + \mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z) + \alpha\big(\mathcal{D}\mathscr{D}_{1,0}^{\lambda,\nu,n} f(z) - \mathscr{D}_{1,0}^{\lambda,\nu,n} f(z)\big) \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.35}$$

atunci

$$\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z) \prec g(z), \quad z \in \mathcal{U},$$

unde g *este dată de* $g(z) = 2\delta - 1 + 2(1-\delta)\dfrac{\ln(1+z)}{z}, \quad z \in \mathcal{U}$.
Funcţia g *este convexă şi este cea mai bună dominantă.*

Teorema 2.3.8. *[133] Fie* g *o funcţie convexă,* $g(0) = 1$ *şi fie* h *o funcţie astfel încât*

$$h(z) = g(z) + zg'(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ *verifică subordonarea diferenţială*

$$\frac{1}{z}\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n+2} f(z) + \frac{1}{z}\alpha\big(\mathcal{D}^2\mathscr{D}_{1,0}^{\lambda,\nu,n} f(z) - \mathscr{D}_{1,0}^{\lambda,\nu,n} f(z)\big) \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.36}$$

atunci

$$\big(\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z)\big)' \prec g(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi rezultatul este exact.

Teorema 2.3.9. *[133] Fie* $h(z) = \dfrac{1+(2\delta-1)z}{1+z}$ *o funcţie convexă în* $\mathcal{U}$*, unde* $0 \leq \delta < 1$. *Dacă* $f \in \mathcal{A}$ *verifică subordonarea diferenţială*

$$\frac{1}{z}\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n+2} f(z) + \frac{1}{z}\alpha\big(\mathcal{D}^2\mathscr{D}_{1,0}^{\lambda,\nu,n} f(z) - \mathscr{D}_{1,0}^{\lambda,\nu,n} f(z)\big) \prec h(z), \tag{2.37}$$

atunci

$$\big(\mathscr{D}_{\alpha,\beta}^{\lambda,\nu,n} f(z)\big)' \prec g(z), \quad z \in \mathcal{U},$$

unde g *este dată de* $g(z) = 2\delta - 1 + 2(1-\delta)\dfrac{\ln(1+z)}{z}, \quad z \in \mathcal{U}$.
Funcţia g *este convexă şi este cea mai bună dominantă.*

2.4 Relaţii de incluziune a funcţiilor analitice asociate seriilor de distribuţie Poisson şi operatorului Sălăgean $\mathcal{D}^n$

În acest paragraf, sunt obţinute rezultate utilizând operatorul diferenţial Sălăgean $\mathcal{D}^n$ definit în Definiţia 1.5.1.

Utilizând operatorul Sălăgean, Kanas şi Yuguchi [64] au introdus clasa $\mathcal{US}(n,\alpha)$ ca

$$\mathcal{US}(n,\alpha)=\left\{f\in\mathcal{A}:\Re\left(\frac{z\big(\mathcal{D}^n f(z)\big)'}{\mathcal{D}^n f(z)}\right)>\alpha\left|\frac{z(\mathcal{D}^n f(z))'}{\mathcal{D}^n f(z)}-1\right|,\alpha\geq 0,z\in\mathcal{U}\right\}.$$

Este uşor de văzut că $\mathcal{US}(1,\alpha)=\alpha-\mathcal{UCV}$ şi $\mathcal{US}(0,\alpha)=\alpha-\mathcal{ST}$.

Porwal [110] a introdus seriile de distribuţie Poisson

$$K(m,z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{m^{k-1}}{(k-1)!}e^{-m}z^k.$$

Considerăm operatorul liniar $I(m):\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ (v. [122]) definit prin

$$I(m)f(z)=K(m,z)*f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{m^{k-1}}{(k-1)!}e^{-m}a_k z^k.$$

Stabilim relaţii de incluziune între clasele $\mathcal{US}(n,\alpha)$, $\delta-\mathcal{UCV}$ şi $\delta-\mathcal{ST}$.

Avem nevoie de următorul rezultat.

Teorema 2.4.1. *[64] Dacă $f\in\mathcal{US}(n,\alpha)$, atunci*

$$|a_k|\leq\frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n},\quad k\in\mathbb{N}^*-\{1\},$$

unde P_1 este coeficientul lui z în funcţia

$$p_k(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}P_k z^k=\frac{z(\mathcal{D}^n f_k(z))'}{\mathcal{D}^n f_k(z)},$$

unde $f_k(z)$ este funcţia extremală pentru clasa $\mathcal{US}(n,\alpha)$, şi simbolul $(\beta)_k$ reprezintă simbolul Pochhammer, pentru $\beta\in\mathbb{C}$.

Teorema 2.4.2. *[36] Dacă $m>0, f\in\mathcal{US}(n,\alpha)$ şi inegalitatea*

$$(1+\delta)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{m^{k-1}}{(k-2)!}\frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{m^{k-1}}{(k-1)!}\frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n}\leq e^m \tag{2.38}$$

este satisfăcută, atunci $I(m)f\in\delta-\mathcal{ST}$.

Teorema 2.4.3. *[36] Dacă $m>0, f\in\mathcal{US}(n,\alpha)$ şi inegalitatea*

$$(1+\delta)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{m^{k-1}}{(k-3)!}\frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n}+(3+2\delta)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{m^{k-1}}{(k-2)!}\frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{m^{k-1}}{(k-1)!}\frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n}\leq e^m$$

este satisfăcută, atunci $I(m)f\in\delta-\mathcal{UCV}$.

Teorema 2.4.4. *[36] Dacă $m > 0, f \in \mathcal{US}(n,\alpha)$ şi inegalitatea*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{(k-3)!} \frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n} + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{(k-2)!} \frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n} \leq \frac{e^m}{\delta+2}$$

este satisfăcută, atunci $I(m)f \in \delta - \mathcal{UCV}$.

Teorema 2.4.5. *[36] Dacă $m > 0, f \in \mathcal{US}(n,\alpha)$ şi inegalitatea*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{(k-2)!} \frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n} + \lambda\sum_{k=2}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{(k-1)!} \frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n} \leq \lambda e^m \tag{2.39}$$

este satisfăcută, atunci $I(m)f \in \mathcal{S}_\lambda^*$.

Teorema 2.4.6. *[36] Dacă $m > 0, f \in \mathcal{US}(n,\alpha)$ şi inegalitatea*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{(k-3)!} \frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n} + (2+\lambda)\sum_{k=2}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{(k-2)!} \frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n} + \lambda\sum_{k=2}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{(k-1)!} \frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n} \leq \lambda e^m$$

este satisfăcută, atunci $I(m)f \in \mathcal{C}_\lambda$.

În cele ce urmează, folosim operatorul integral

$$G(m,z) = \int_0^z \frac{I(m)f(t)}{t} dt$$

sau echivalent

$$G(m,z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{k!} e^{-m} a_k z^k, \tag{2.40}$$

definit în [122] şi obţinem relaţii de incluziune pentru $G(m,z)$ aparţinând claselor $\delta - \mathcal{UCV}$, $\mathcal{C}_\lambda$ şi $\mathcal{US}(n,\alpha)$.

Teorema 2.4.7. *[36] Dacă $m > 0, f \in \mathcal{US}(n,\alpha)$ atunci $G(m,z)$ definit în* (2.40) *este în $\delta - \mathcal{UCV}$ dacă* (2.38) *este satisfăcută.*

Teorema 2.4.8. *[36] Dacă $m > 0, f \in \mathcal{US}(n,\alpha)$ şi inegalitatea*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{(k-2)!} \frac{(P_1)_{k-1}}{\Gamma(k)k^n} \leq \frac{e^m}{\delta+2}$$

este satisfăcută, atunci $G(m,z) \in \delta - \mathcal{UCV}$.

Teorema 2.4.9. *[36] Dacă $m > 0, f \in \mathcal{US}(n,\alpha)$ şi inegalitatea* (2.39) *este satisfăcută, atunci $G(m,z) \in \mathcal{C}_\lambda$.*

2.5 Subordonări diferenţiale obţinute folosind operatorul integro-diferenţial Sălăgean generalizat $\mathcal{L}^n_{\lambda\delta}$

Multe lucrări recent apărute conţin studii privind operatori integro-diferenţiali (v. [1, 99, 100, 104]). În lucrarea [38] am generalizat operatorul din [104].

Definiţia 2.5.1. *[38] Fie $n \in \mathbb{N}, \delta \geq 0$ şi $\lambda \geq 0$ cu $\delta \neq \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Pentru $f \in \mathcal{A}$, fie*

$$\mathcal{L}^n_{\lambda\delta} f(z) = \frac{1}{1-\lambda+\lambda\delta}\big[(1-\lambda)\mathcal{D}^n_\delta f(z) + \lambda\delta\mathcal{I}^n_\delta f(z)\big], \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.41}$$

unde operatorul diferenţial $\mathcal{D}^n_\delta f$ şi operatorul integral $\mathcal{I}^n_\delta f$ sunt daţi în Definiţia 1.5.7 respectiv 1.5.8.

Observaţia 2.5.1. *[38] Avem*

$$\mathcal{L}^n_{0\delta} f(z) = \mathcal{D}^n_\delta f(z),$$

$$\mathcal{L}^n_{1\delta} f(z) = \mathcal{I}^n_\delta f(z),$$

$$\mathcal{L}^0_{\lambda\delta} f(z) = \mathcal{L}^n_{\lambda 0} f(z) = f(z)$$

şi

$$\mathcal{L}^n_{\lambda 1} f(z) = (1-\lambda)\mathcal{D}^n f(z) + \lambda\mathcal{I}^n f(z) \quad (v.\ [104]).$$

Observaţia 2.5.2. *[38] Pentru $f \in \mathcal{A}, f(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ folosind* (1.15) *şi* (1.18), *avem*

$$\mathcal{L}^n_{\lambda\delta} f(z) = z + \frac{1}{1-\lambda+\lambda\delta}\sum_{k=2}^{\infty}\left[\big(1-\lambda\big)\big(1+(k-1)\delta\big)^n + \frac{\lambda\delta}{\big(1+(k-1)\delta\big)^n}\right] a_k z^k, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{2.42}$$

Teorema 2.5.1. *[38] Dacă $0 \leq \alpha < 1, f \in \mathcal{A}_m$, $m \in \{1,2,3,\dots\}$ şi*

$$\Re\left[\big(\mathcal{L}^{n+1}_{\lambda\delta} f(z)\big)' + \frac{\lambda\delta}{1-\lambda+\lambda\delta}\delta z\Big(\big(\mathcal{I}^{n+1}_\delta f(z)\big)'' + \big(\mathcal{I}^n_\delta f(z)\big)''\Big)\right] > \alpha, \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.43}$$

atunci

$$\Re\big(\mathcal{L}^n_{\lambda\delta} f(z)\big)' > \gamma, \quad z \in \mathcal{U},$$

unde

$$\gamma = \gamma(\alpha) = 2\alpha - 1 + \frac{2(1-\alpha)}{\delta m}\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{\delta m}-1}}{1+t} dt.$$

Exemplul 2.5.1. *[38] Pentru* $m = 1, \lambda = \frac{1}{2}, \delta = \frac{1}{2}, n = 0$ *şi* $\alpha = \frac{1}{2}$ *obţinem inegalitatea*

$$\Re\left(f'(z) + \frac{zf''(z)}{2}\right) > \frac{1}{2}, \quad z \in \mathcal{U},$$

care implică

$$\Re f'(z) > 2 - 2ln2, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.5.2. *[38] Fie* q *o funcţie convexă,* $q(0) = 1$ *şi fie* h *o funcţie astfel încât*

$$h(z) = q(z) + m\delta zq'(z), m \in \mathbb{N}^*, \delta > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}_m$ *verifică următoarea subordonare*

$$\left(\mathcal{L}_{\lambda\delta}^{n+1} f(z)\right)' + \frac{\lambda\delta}{1 - \lambda + \lambda\delta}\delta z\left(\left(\mathcal{I}_{\delta}^{n+1} f(z)\right)'' + \left(\mathcal{I}_{\delta}^{n} f(z)\right)''\right) \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.44}$$

atunci

$$\left(\mathcal{L}_{\lambda\delta}^{n} f(z)\right)' \prec q(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi rezultatul este exact.

Observaţia 2.5.3. *[38] Luând* $m = 1$ *şi* $\delta = 1$*, obţinem Teorema 3 din [104].*

Observaţia 2.5.4. *[38] Luând* $\lambda = 0$*, obţinem Teorema 2.2 din [23].*

Teorema 2.5.3. *[38] Fie* q *o funcţie convexă,* $q(0) = 1$ *şi fie* h *o funcţie astfel încât*

$$h(z) = q(z) + mzq'(z), \quad m \in \mathbb{N}^*, z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}_m$ *verifică următoarea subordonare*

$$\left(\mathcal{L}_{\lambda\delta}^{n} f(z)\right)' \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.45}$$

atunci

$$\frac{\mathcal{L}_{\lambda\delta}^{n} f(z)}{z} \prec q(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi rezultatul este exact.

Observaţia 2.5.5. *[38] Luând* $m = 1$ *şi* $\delta = 1$*, obţinem Teorema 1 din [104].*

Observaţia 2.5.6. *[38] Luând* $\lambda = 0$*, obţinem Teorema 2.3 din [23].*

Teorema 2.5.4. *[38] Fie q o funcţie convexă, $q(0) = 1$ şi fie h o funcţie astfel încât*

$$h(z) = q(z) + mzq'(z), \quad m \in \mathbb{N}^*, z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}_m$ verifică următoarea subordonare

$$\left(\frac{z\mathcal{L}_{\lambda\delta}^{n+1} f(z)}{\mathcal{L}_{\lambda\delta}^{n} f(z)} \right)' \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.46}$$

atunci

$$\frac{\mathcal{L}_{\lambda\delta}^{n+1} f(z)}{\mathcal{L}_{\lambda\delta}^{n} f(z)} \prec q(z), \quad z \in \mathcal{U}$$

şi rezultatul este exact.

Observaţia 2.5.7. *[38] Luând $m = 1$ şi $\delta = 1$, obţinem Teorema 2 din [104].*

Capitolul 3

Noi rezultate asupra unor clase de funcţii analitice asociate stelarităţii şi convexităţii

În acest capitol, sunt obţinute noi rezultate asociate stelarităţii şi convexităţii.

În paragraful 3.1, sunt generalizate diverse subordonări diferenţiale, implicând medii aritmetice, geometrice şi armonice ale expresiilor $p(z)$ şi $p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)}$.

În paragraful 3.2, este definită o nouă clasă de funcţii analitice care satisfac o condiţie de subordonare asociată polinoamelor Chebyshev. Sunt date estimări ale coeficienţilor şi inegalităţi Fekete-Szegő pentru această clasă.

În paragraful 3.3, este introdusă o nouă subclasă de funcţii bi-univalente m-simetrice. Sunt obţinute estimări ale coeficienţilor Taylor-Maclaurin. Este investigată, de asemenea, problema funcţională Fekete-Szegő pentru funcţiile din această nouă subclasă.

În paragraful 3.4, se obţine o delimitare pentru determinantul Hankel de ordinul doi pentru funcţii gama-stelate de ordin α, pentru $0 \leq \gamma \leq 1$. Acest rezultat generalizează rezultate obţinute anterior pentru delimitările determinantului Hankel de ordin doi pentru diferite clase.

3.1 Subordonări diferenţiale şi medii pitagoreice

Cele trei medii "clasice", i.e. media aritmetică, media geometrică şi media armonică sunt câteodată numite medii pitagoreice. Toate aceste medii au fost generalizate de forma lor ponderată. Un caz special a lor, este media ponderată convexă.
Deci, pentru $0 \leq \alpha \leq 1$, avem

$$CWA(x_1, x_2) = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2,$$

$$CWG(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha},$$
$$CWH(x_1, x_2) = \frac{1}{\alpha \frac{1}{x_1} + (1-\alpha)\frac{1}{x_2}} = \frac{x_1 x_2}{\alpha x_2 + (1-\alpha) x_1},$$

unde CWA reprezintă media aritmetică ponderată convexă, CWG reprezintă media geometrică ponderată convexă şi CWH este media armonică ponderată convexă. Mediile pitagoreice sunt utilizate frecvent în teoria geometrică a funcţiilor.

Bine cunoscuta clasă a funcţiilor α-convexe (v. Definiţia 1.2.11) joacă un rol important în această direcţie, fiind definită folosind media aritmetică ponderată convexă şi în acelaşi timp fiind o tranziţie între funcţiile stelate şi funcţiile convexe.

Clasa funcţiilor gama-stelate (v. Definiţia 1.2.12) este definită într-un mod similar, folosind media geometrică ponderată convexă.

Există multe lucrări în teoria geometrică a funcţiilor, asociate cu mediile aritmetice şi geometrice (v. de exemplu [57–60, 75, 125, 136]).
În teoria geometrică a funcţiilor, mediile armonice sunt considerate în câteva lucrări (v. de exemplu [26, 27, 137]).

Subordonări diferenţiale implicând atât mediile aritmetice ponderate convexe cât şi mediile geometrice ponderate convexe au fost studiate în [56], în timp ce subordonări diferenţiale implicând medii armonice în [61], respectiv, medii armonice ponderate convexe în [55].

În acest paragraf, generalizăm unele dintre aceste rezultate.

Următoarea lemă datorată lui Nunokawa [96], este exprimată într-o formă diferită. Această formă este folosită în [56].

Lema 3.1.1. *[56] Fie $p \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ astfel încât $p(0) = 1, p(z) \not\equiv 1$. Dacă $z_0 \in \mathcal{U}$ verifică egalităţile*
$$|\arg p(z_0)| = \max\{\arg p(z) : |z| \le |z_0|\} = \theta\frac{\pi}{2},$$
$$p(z_0) = (ix)^{\theta},$$
atunci
$$|\arg[z_0 p'(z_0)]| = (\theta+1)\frac{\pi}{2},$$
$$|z_0 p'(z_0)| = \left|\frac{\theta x^{\theta}}{2}\Big(x + \frac{1}{x}\Big)\right|.$$

Teorema 3.1.1. *[35] Fie $p \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ astfel încât $p(0) = 1$. De asemenea, fie $\alpha \in [0;1], \beta \in [0;1], \delta \in [1;2], \gamma \in [0;1]$ şi $\theta \in (0;1]$.*
Dacă
$$\left|\arg\left(\alpha[p(z)]^{\delta} + (1-\alpha)\frac{[p(z)]^{\gamma}\left[p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)}\right]^{1-\gamma}}{\beta\frac{zp'(z)}{p^2(z)} + 1}\right)\right| < \theta\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}, \tag{3.1}$$

atunci

$$|\arg p(z)| < \theta\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{3.2}$$

Observaţia 3.1.1. *[35] Pentru $\beta = 0$, obţinem rezultatul Teoremei 2.4, p. 128 din [56].*

Observaţia 3.1.2. *[35] Pentru $\alpha = 0$ şi $\gamma = 0$, avem cazul particular al Teoremei 2.5, p. 1726, obţinută în [55].*

Observaţia 3.1.3. *[35] Pentru $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ şi $\beta = \frac{1}{2}$, obţinem rezultatul Teoremei 2.7, p.1251 din [61].*

Luând $\theta = 1$ în Teorema 3.1.1, obţinem următorul rezultat.

Corolarul 3.1.1. *[35] Fie $p \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ astfel încât $p(0) = 1$. De asemenea, fie $\alpha \in [0;1], \beta \in [0;1], \delta \in [1;2]$ şi $\gamma \in [0;1]$.*
Dacă

$$\Re\left(\alpha[p(z)]^{\delta} + (1-\alpha)\frac{[p(z)]^{\gamma}\left[p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)}\right]^{1-\gamma}}{\beta\frac{zp'(z)}{p^2(z)} + 1}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U},$$

atunci

$$\Re p(z) > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Considerând valori convenabile pentru α, β, γ în Corolarul 3.1.1, obţinem următoarele.

Observaţia 3.1.4. *[35] Pentru $\beta = 0$, obţinem rezultatul Teoremei 2.3, p. 127 din [56].*

Observaţia 3.1.5. *[35] Pentru $\alpha = 0$ şi $\gamma = 0$, obţinem cazul particular al Teoremei 2.4, p. 1724, obţinută în [55].*

Observaţia 3.1.6. *[35] Pentru $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ şi $\beta = \frac{1}{2}$, obţinem rezultatul Teoremei 2.3, p.1247 [61].*

Observaţia 3.1.7. *[35] Pentru $\alpha = 0$ şi $\beta = 0$, obţinem un rezultat obţinut în [78].*

Observaţia 3.1.8. *[35] Pentru $\delta = 1$, $\beta = 0$ şi $\gamma = 0$, obţinem un rezultat obţinut în [116].*

Punând $p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$ în Corolarul 3.1.1, obţinem următorul rezultat:

Corolarul 3.1.2. *[35] Fie $f \in \mathcal{A}$ şi de asemenea fie $\alpha \in [0;1], \beta \in [0;1], \delta \in [1;2]$ şi $\gamma \in [0;1]$.*
Dacă

$$\Re\left(\alpha\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\delta} + (1-\alpha)\frac{\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{1+\gamma}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]^{1-\gamma}}{\beta\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\beta)\frac{zf'(z)}{f(z)}}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U},$$

atunci

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Prin urmare f este stelată în $\mathcal{U}$.

Observaţia 3.1.9. *[35] Dacă punem $\alpha = 0$ şi $\beta = 0$ în Corolarul 3.1.2, obţinem bine cunoscutul rezultat că funcţiile α-convexe sunt stelate. Acest rezultat a fost demonstrat în mai multe moduri (v. [86–88]).*

Observaţia 3.1.10. *[35] Dacă punem $\delta = 1$, $\beta = 0$ şi $\gamma = 0$ în Corolarul 3.1.2, obţinem bine cunoscutul rezultat că funcţiile γ-stelate sunt stelate (v. [77, 78]).*

Punând $p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$ în Teorema 3.1.1, obţinem următorul rezultat:

Corolarul 3.1.3. *[35] Fie $f \in \mathcal{A}$ şi de asemenea fie $\alpha \in [0;1], \beta \in [0;1], \delta \in [1;2], \gamma \in [0;1]$ şi $\theta \in (0;1]$.*
Dacă

$$\left|\arg\left(\alpha\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\delta} + (1-\alpha)\frac{\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{1+\gamma}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]^{1-\gamma}}{\beta\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\beta)\frac{zf'(z)}{f(z)}}\right)\right| < \theta\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U},$$

atunci

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \theta\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Prin urmare f este tare stelată de ordin θ în $\mathcal{U}$.

3.2 Estimări ale coeficienţilor şi o inegalitate Fekete-Szegő pentru o clasă de funcţii analitice care satisfac o condiţie de subordonare asociată polinoamelor Chebyshev

Polinoamele Chebyshev sunt de patru tipuri, dar cele mai comune sunt polinoamele Chebyshev de primul tip,

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad x \in [-1, 1]$$

şi de al doilea tip,

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad x \in [-1, 1],$$

unde n reprezintă gradul polinomului şi $x = \cos\theta$.
Aplicaţii ale polinoamelor Chebyshev pentru funcţii analitice pot fi găsite în [11, 13, 20, 33].
Fie

$$\mathcal{H}(z, t) = \frac{1}{1 - 2tz + z^2},$$

unde $t = \cos\theta, \theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.
Avem

$$\mathcal{H}(z, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} z^n = 1 + 2\cos\theta z + (3\cos^2\theta - \sin^2\theta)z^2 + \dots$$

$$= 1 + U_1(t)z + U_2(t)z^2 + \dots, \quad z \in \mathcal{U}, t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \tag{3.3}$$

unde

$$U_{n-1} = \frac{\sin(n \arccos t)}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

sunt polinoamele Chebyshev de tipul al doilea.
Se ştie că

$$U_n(t) = 2tU_{n-1}(t) - U_{n-2}(t)$$

şi

$$U_1(t) = 2t, U_2(t) = 4t^2 - 1, \dots.$$

În cele ce urmează, definim o nouă clasă de funcţii analitice, fiind motivaţi de următorul rezultat:

Corolarul 3.2.1. *[56] Fie $f \in \mathcal{A}$ şi de asemenea fie $\alpha \in [0,1], a \in [0,1], \delta \in [1,2]$ şi $\mu \in [0,1]$. Dacă*

$$\Re\left(\alpha\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\delta} + (1-\alpha)\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\mu}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]^{1-\mu}\right) > a, \quad z \in \mathcal{U},$$

atunci

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > a, \quad z \in \mathcal{U},$$

deci f este stelată de ordin a în $\mathcal{U}$.

Definiţia 3.2.1. *[132] Spunem că $f \in \mathcal{A}$ de forma* (1.1) *aparţine clasei $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \alpha, \delta, \mu)$ dacă*

$$\left(\alpha\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\delta} + (1-\alpha)\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\mu}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]^{1-\mu}\right) \prec \mathcal{H}(z,t), \tag{3.4}$$

puterea este considerată să aibă valoare principală, $\alpha \in [0,1], \delta \in [1,2]$ şi $\mu \in [0,1]$.

Luând $\alpha = \delta = t = 1$ şi $w(z) = z$, obţinem următorul exemplu.

Exemplul 3.2.1. *[132] Funcţia $f(z) = \frac{z}{1-z}e^{\frac{z}{1-z}}$ cu dezvoltarea în serie $f(z) = z + 2z^2 + \frac{7}{2}z^3 + \ldots$ aparţine clasei $\mathcal{F}(\mathcal{H}, 1, 1, \mu)$.*

Observaţia 3.2.1. *Rezultatul din exemplul precedent se obţine folosind subordonarea* (3.4)*, în care luăm $\alpha = \delta = t = 1$ şi $w(z) = z$. Astfel, subordonarea* (3.4) *se reduce la egalitatea $\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{1-2z+z^2}$, ceea ce rezultă dintr-un calcul direct folosind funcţia din exemplu.*

Teorema 3.2.1. *[132] Fie $f \in \mathcal{A}$ de forma (1.1), care aparţine clasei $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \alpha, \delta, \mu)$. Atunci*

$$|a_2| \le \frac{2t}{\alpha\delta + (1-\alpha)(2-\mu)} \tag{3.5}$$

şi pentru $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\left|a_3 - \lambda a_2^2\right| \le \frac{t}{\alpha\delta + (1-\alpha)(3-2\mu)} \max\left\{1, \left|2t\left(\frac{2\lambda\big(\alpha\delta + (1-\alpha)(3-2\mu)\big)}{\big(\alpha\delta + (1-\alpha)(2-\mu)\big)^2} - \frac{3 + \frac{2(1-\alpha)(1-\mu) - \alpha(\delta^2-\mu^2) - \mu^2}{\alpha\delta + (1-\alpha)(2-\mu)}}{2\big(\alpha\delta + (1-\alpha)(2-\mu)\big)}\right) - \frac{4t^2-1}{2t}\right|\right\}. \tag{3.6}$$

Luând $\alpha = 1-\beta, \delta = 1$ şi $\mu = 0$ în Teorema 3.2.1, obţinem următorul rezultat:

Corolarul 3.2.2. *[11] Fie $f \in \mathcal{A}$ de forma (1.1) satisfăcând condiţia*

$$\left((1-\beta)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \beta\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right) \prec \mathcal{H}(z,t),$$

unde $\beta \in [0,1]$. Atunci

$$|a_2| \leq \frac{2t}{1+\beta}$$

şi pentru $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\left|a_3 - \lambda a_2^2\right| \leq \frac{t}{1+2\beta} \max\left\{1, \left|2t\left(\frac{2\lambda(1+2\beta)}{(1+\beta)^2} - \frac{1+3\beta}{(1+\beta)^2}\right) - \frac{4t^2-1}{2t}\right|\right\}.$$

Luând $\alpha = 0$ în Teorema 3.2.1, obţinem următorul rezultat:

Corolarul 3.2.3. *[13] Fie $f \in \mathcal{A}$ de forma (1.1) satisfăcând condiţia*

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\mu} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{1-\mu} \prec \mathcal{H}(z,t),$$

unde $\mu \in [0,1]$. Atunci

$$|a_2| \leq \frac{2t}{2-\mu}$$

şi pentru $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\left|a_3 - \lambda a_2^2\right| \leq \frac{t}{3-2\mu} \max\left\{1, \left|2t\left(\frac{2\lambda(3-2\mu)}{(2-\mu)^2} + \frac{\mu^2+5\mu-8}{2(2-\mu)^2}\right) - \frac{4t^2-1}{2t}\right|\right\}.$$

3.3 Estimări ale coeficienţilor şi inegalităţi Fekete-Szegő pentru o nouă subclasă de funcţii bi-univalente m-simetrice care satisfac condiţii de subordonare

Fiecare funcţie $f \in \mathcal{S}$ are o inversă f^{-1} definită prin

$$f^{-1}(f(z)) = z, \quad z \in \mathcal{U}$$

şi

$$f(f^{-1}(w)) = w, \quad |w| < r_0(f), r_0(f) \geq \frac{1}{4},$$

unde

$$f^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + \ldots.$$

O funcţie $f \in \mathcal{A}$ se numeşte bi-univalentă în $\mathcal{U}$ dacă atât $f(z)$ cât şi $f^{-1}(z)$ sunt univalente în $\mathcal{U}$. Clasa funcţiilor bi-univalente în $\mathcal{U}$ se notează cu σ.

O funcţie este m-simetrică (v. [107]) dacă are următoarea formă normată:

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1} z^{mk+1}, \quad m \in \mathbb{N}^*, \; z \in \mathcal{U}. \tag{3.7}$$

Clasa funcţiilor univalente m-simetrice, care sunt normate de dezvoltarea în serie de mai sus (3.7), se notează cu $\mathcal{S}_m$. Funcţiile din clasa $\mathcal{S}$ sunt unu-simetrice. Analog conceptului de funcţii univalente m-simetrice, este definit conceptul de funcţii bi-univalente m-simetrice. Fiecare funcţie f în clasa σ generează o funcţie bi-univalentă m-simetrică pentru fiecare număr întreg pozitiv m. Forma normată a lui f este dată în (3.7) şi f^{-1} este dată în cele ce urmează.

$$\begin{aligned} g(w) =& w - a_{m+1} w^{m+1} + \left[(m+1)a_{m+1}^2 - a_{2m+1}\right] w^{2m+1} \\ & - \left[\frac{1}{2}(m+1)(3m+2)a_{m+1}^3 - (3m+2)a_{m+1}a_{2m+1} + a_{3m+1}\right] w^{3m+1} + \ldots, \end{aligned} \tag{3.8}$$

unde $f^{-1} = g$. Clasa funcţiilor bi-univalente m-simetrice este notată cu σ_m.
Recent, mulţi autori au investigat estimări ale coeficienţilor şi problema funcţională Fekete-Szegő pentru subclasele de funcţii bi-univalente m-simetrice ([3, 8, 12, 14, 15, 19, 31, 74, 81, 93, 94, 119, 127, 128, 134, 139–144]).

Huo Tang *et al.* [134] au introdus următoarele subclase de funcţii bi-univalente m-simetrice.

Definiţia 3.3.1. *[134, Definiţia 1, p.1066] O funcţie $f(z)$, dată prin (3.7), aparţine clasei $\mathcal{H}_{\sigma,m}(\phi)$, dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

$$f \in \sigma_m, \qquad f'(z) \prec \phi(z) \qquad \text{şi} \qquad g'(w) \prec \phi(w),$$

unde funcţia $g(w)$ este definită prin (3.8).

Definiţia 3.3.2. *[134, Definiţia 3, p. 1078] O funcţie $f(z)$, dată prin (3.7), aparţine clasei $\mathcal{M}_{\sigma,m}(\lambda, \phi)$ dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

$$f \in \sigma_m, \qquad (1-\lambda)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \lambda\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \prec \phi(z)$$

şi

$$(1-\lambda)\frac{wg'(w)}{g(w)} + \lambda\left(1 + \frac{wg''(w)}{g'(w)}\right) \prec \phi(w),$$

unde funcţia $g(w)$ este definită prin (3.8).

Ş. Altınkaya şi S. Yalçın [10] au introdus următoarea subclasă de funcţii bi-univalente.

Definiţia 3.3.3. *[10] O funcţie $f \in \sigma$ aparţine clasei $\mathcal{S}_\sigma(\lambda, \phi), 0 \leq \lambda \leq 1$, dacă următoarele subordonări au loc*

$$\frac{zf'(z) + (2\lambda^2 - \lambda)\, z^2 f''(z)}{4(\lambda - \lambda^2)\, z + (2\lambda^2 - \lambda)\, zf'(z) + (2\lambda^2 - 3\lambda + 1)\, f(z)} \prec \phi(z)$$

şi

$$\frac{wg'(w) + (2\lambda^2 - \lambda)\, w^2 g''(w)}{4(\lambda - \lambda^2)\, w + (2\lambda^2 - \lambda)\, wg'(w) + (2\lambda^2 - 3\lambda + 1)\, g(w)} \prec \phi(w),$$

unde $g = f^{-1}$.

Motivaţi de definiţia subclaselor de funcţii bi-univalente de mai sus, introducem mai jos o nouă subclasă de funcţii bi-univalente m-simetrice într-un mod similar.

Definiţia 3.3.4. *[41] O funcţie $f \in \sigma_m$ aparţine clasei $\mathcal{S}_{\sigma_m}(\lambda, \phi)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ dacă următoarele subordonări au loc*

$$\frac{zf'(z) + (2\lambda^2 - \lambda)\, z^2 f''(z)}{4(\lambda - \lambda^2)\, z + (2\lambda^2 - \lambda)\, zf'(z) + (2\lambda^2 - 3\lambda + 1)\, f(z)} \prec \phi(z)$$

şi

$$\frac{wg'(w) + (2\lambda^2 - \lambda)\, w^2 g''(w)}{4(\lambda - \lambda^2)\, w + (2\lambda^2 - \lambda)\, wg'(w) + (2\lambda^2 - 3\lambda + 1)\, g(w)} \prec \phi(w),$$

unde $g = f^{-1}$.

Observaţia 3.3.1. *[41]*

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\sigma_m}(0, \phi) &= \mathcal{M}_{\sigma,m}(0, \phi),\\
\mathcal{S}_{\sigma_m}\left(\frac{1}{2}, \phi\right) &= \mathcal{H}_{\sigma,m}(\phi),\\
\mathcal{S}_{\sigma_m}(1, \phi) &= \mathcal{M}_{\sigma,m}(1, \phi),\\
\mathcal{S}_{\sigma_1}(\lambda, \phi) &= \mathcal{S}_{\sigma}(\lambda, \phi).
\end{aligned}$$

În cele ce urmează, introducem o funcţie ϕ folosită în [134].
ϕ este o funcţie analitică cu partea reală pozitivă în discul unitate $\mathcal{U}$ astfel încât

$$\phi(0) = 1 \qquad \text{şi} \qquad \phi'(0) > 0$$

şi $\phi(\mathcal{U})$ este simetrică în raport cu axa reală. Această funcţie are o dezvoltare în serie de forma:

$$\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \ldots, \quad B_1 > 0.$$

Fie $u(z)$ şi $v(z)$ două funcţii analitice în discul unitate $\mathcal{U}$ cu

$$u(0) = v(0) = 0, \quad \max\{|u(z)|, |v(z)|\} < 1$$

şi

$$u(z) = b_m z^m + b_{2m} z^{2m} + b_{3m} z^{3m} + \ldots,$$
$$v(w) = c_m w^m + c_{2m} w^{2m} + c_{3m} w^{3m} + \ldots.$$

Avem următoarele inegalităţi (v. [134])

$$|b_m| \leq 1, |b_{2m}| \leq 1 - |b_m|^2, |c_m| \leq 1 \text{ and } |c_{2m}| \leq 1 - |c_m|^2. \tag{3.9}$$

Prin calcule simple, sunt obţinute următoarele

$$\phi(u(z)) = 1 + B_1 b_m z^m + (B_1 b_{2m} + B_2 b_m^2) z^{2m} + \ldots, \quad |z| < 1, \tag{3.10}$$

şi

$$\phi(v(w)) = 1 + B_1 c_m w^m + (B_1 c_{2m} + B_2 c_m^2) w^{2m} + \ldots, \quad |w| < 1. \tag{3.11}$$

Începem cu căutarea estimărilor coeficienţilor $|a_{m+1}|$ şi $|a_{2m+1}|$ pentru funcţiile din clasa $\mathcal{S}_{\sigma_m}(\lambda, \phi)$.

Teorema 3.3.1. *[41] Fie funcţia $f(z)$, dată prin (3.7), în clasa $\mathcal{S}_{\sigma_m}(\lambda, \phi)$. Atunci*

$$|a_{m+1}| \leq \frac{B_1\sqrt{2B_1}}{\sqrt{\left|\big(\beta(m+1) - 2\alpha\gamma\big)B_1^2 - 2\alpha^2 B_2\right| + 2B_1\alpha^2}} \tag{3.12}$$

şi

$$|a_{2m+1}| \leq$$

$$\begin{cases} \dfrac{\left(|\beta(m+1) - \alpha\gamma| + |\alpha\gamma|\right) B_1}{\left|\beta(\beta(m+1) - 2\alpha\gamma)\right|}, \\ \\ \qquad \text{dacă } |\beta|(m+1)|B_2| \leq \left(|\beta(m+1) - \alpha\gamma| + |\alpha\gamma|\right) B_1 \\ \\ \dfrac{\big(|\beta(m+1) - \alpha\gamma| + |\alpha\gamma|\big)\left|(\beta(m+1) - 2\alpha\gamma)B_1^2 - 2\alpha^2 B_2\right| B_1 + 2\alpha^2|\beta|(m+1)|B_2| B_1}{\left|\beta(\beta(m+1) - 2\alpha\gamma)\right|\Big(\left|(\beta(m+1) - 2\alpha\gamma)B_1^2 - 2\alpha^2 B_2\right| + 2B_1\alpha^2\Big)}, \\ \\ \qquad \text{dacă } |\beta|(m+1)|B_2| > \left(|\beta(m+1) - \alpha\gamma| + |\alpha\gamma|\right) B_1 \end{cases}, \tag{3.13}$$

unde

$$\alpha = m + 2\lambda^2 m^2 - \lambda m^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda,$$
$$\beta = 2(m + 4\lambda^2 m^2 - 2\lambda m^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda),$$
$$\gamma = \big(2\lambda - 1\big)\big((m+2)\lambda - 1\big).$$

Luând $m = 1$ în Teorema 3.3.1, obţinem următorul corolar.

Corolarul 3.3.1. *[41] Fie funcţia $f(z)$, dată de (3.7), aparţinând clasei $\mathcal{S}_\sigma(\lambda, \phi)$. Atunci*

$$\left|a_2\right| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|\left(\beta-\alpha\gamma\right)B_1^2-\alpha^2B_2\right|+B_1\alpha^2}}$$

şi

$$\left|a_3\right| \leq \begin{cases} \dfrac{\left(|2\beta-\alpha\gamma|+|\alpha\gamma|\right)B_1}{2\left|\beta(\beta-\alpha\gamma)\right|}, \\ \qquad \text{dacă } 2|\beta||B_2| \leq \left(|2\beta-\alpha\gamma|+|\alpha\gamma|\right)B_1 \\ \\ \dfrac{\left(|2\beta-\alpha\gamma|+|\alpha\gamma|\right)\left|(\beta-\alpha\gamma)B_1^2-\alpha^2B_2\right|B_1+2\alpha^2|\beta||B_2|B_1}{2\left|\beta(\beta-\alpha\gamma)\right|\left(\left|(\beta-\alpha\gamma)B_1^2-\alpha^2B_2\right|+B_1\alpha^2\right)}, \\ \qquad \text{dacă } 2|\beta||B_2| > \left(|2\beta-\alpha\gamma|+|\alpha\gamma|\right)B_1 \end{cases},$$

unde

$$\alpha = 1+3\lambda-2\lambda^2,$$

$$\beta = 2(1+2\lambda^2),$$

$$\gamma = (2\lambda-1)(3\lambda-1).$$

Observaţia 3.3.2. *[41] Estimarea pentru $\left|a_2\right|$ din Corolarul 3.3.1 este obţinută în Teorema 1 în [10].*

Luând $\lambda = 0$ în Teorema 3.3.1, obţinem următorul corolar.

Corolarul 3.3.2. *[41] Fie funcţia $f(z)$, dată de (3.7), aparţinând clasei $\mathcal{M}_{\sigma,m}(0, \phi)$. Atunci*

$$\left|a_{m+1}\right| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{m\sqrt{\left|B_1^2-B_2\right|+B_1}}$$

şi

$$\left|a_{2m+1}\right| \leq \begin{cases} \dfrac{m+1}{2m^2}B_1, & \text{dacă } |B_2| \leq B_1 \\ \\ \dfrac{(m+1)B_1\left(|B_1^2-B_2|+|B_2|\right)}{2m^2\left(|B_1^2-B_2|+B_1\right)}, & \text{dacă } |B_2| > B_1 \end{cases}.$$

Observaţia 3.3.3. *[41] Rezultatele Corolarului 3.3.2 sunt obţinute luând $\lambda = 0$ în Teorema 5 în [134].*

Luând $\lambda = \frac{1}{2}$ în Teorema 3.3.1, obţinem următorul corolar.

Corolarul 3.3.3. *[41] Fie funcţia $f(z)$, dată de (3.7), aparţinând clasei $\mathcal{H}_{\sigma,m}(\phi)$. Atunci*

$$\left|a_{m+1}\right| \leq \frac{B_1\sqrt{2B_1}}{\sqrt{(m+1)\big(2(m+1)B_1 + \left|(2m+1)B_1^2 - 2(m+1)B_2\right|\big)}}$$

şi

$$\left|a_{2m+1}\right| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{2m+1}, & \text{dacă } |B_2| \leq B_1 \\ \dfrac{2(m+1)^3|B_2|B_1(2m+1) + \left|(2m+1)B_1^2 - 2(m+1)B_2\right|B_1}{(2m+1)\big(|(2m+1)B_1^2 - 2(m+1)B_2| + 2B_1(m+1)\big)}, & \text{dacă } |B_2| > B_1 \end{cases}.$$

Observaţia 3.3.4. *[41] Estimarea pentru $\left|a_{m+1}\right|$ din Corolarul 3.3.3 este obţinută în Teorema 1 în [134].*

Luând $\lambda = 1$ în Teorema 3.3.1, obţinem următorul corolar.

Corolarul 3.3.4. *[41] Fie funcţia $f(z)$, dată de (3.7), aparţinând clasei $\mathcal{M}_{\sigma,m}(1,\phi)$. Atunci*

$$\left|a_{m+1}\right| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{m\sqrt{(m+1)\big(\left|B_1^2 - (m+1)B_2\right| + B_1(m+1)\big)}}$$

şi

$$\left|a_{2m+1}\right| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{2m^2}, & \text{dacă } |B_2| \leq B_1 \\ \dfrac{\left|B_1^2 - (m+1)B_2\right|B_1 + (m+1)|B_2|B_1}{2m^2\big(\left|B_1^2 - (m+1)B_2\right| + B_1(m+1)\big)}, & \text{dacă } |B_2| > B_1 \end{cases}.$$

Observaţia 3.3.5. *[41] Rezultatele Corolarului 3.3.4 sunt obţinute luând $\lambda = 1$ în Teorema 5 în [134].*

În cele ce urmează vom prezenta o soluţie pentru problema Fekete-Szegő pentru funcţiile din clasa $\mathcal{S}_{\sigma_m}(\lambda,\phi)$.

Teorema 3.3.2. *[41] Fie funcţia $f(z)$, dată de (3.7), aparţinând clasei $\mathcal{S}_{\sigma_m}(\lambda,\phi)$. De asemenea fie $\delta \in \mathbb{R}$. Atunci*

$$\left|a_{2m+1} - \delta a_{m+1}^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{|\beta|}, & \text{pentru } 0 \leq \left|h(\delta)\right| < \dfrac{1}{2|\beta|} \\ 2B_1\left|h(\delta)\right|, & \text{pentru } \left|h(\delta)\right| \geq \dfrac{1}{2|\beta|} \end{cases}, \tag{3.14}$$

unde

$$h(\delta)=\frac{B_1^2(m+1-2\delta)}{2\left[\big(\beta(m+1)-2\alpha\gamma\big)B_1^2-2\alpha^2B_2\right]},$$

$$\alpha=m+2\lambda^2m^2-\lambda m^2-4\lambda^2+4\lambda,$$

$$\beta=2(m+4\lambda^2m^2-2\lambda m^2-2\lambda^2+2\lambda)\neq 0,$$

$$\gamma=\big(2\lambda-1\big)\big((m+2)\lambda-1\big).$$

Luând $m=1$ în Teorema 3.3.2, obţinem următorul corolar.

Corolarul 3.3.5. *[41] Fie funcţia $f(z)$, dată prin* (3.7)*, în clasa $\mathcal{S}_\sigma(\lambda,\phi)$. De asemenea, fie $\delta\in\mathbb{R}$. Atunci*

$$\left|a_3-\delta a_2^2\right|\leq\begin{cases}\dfrac{B_1}{2(2\lambda^2+1)}, & \textit{pentru } 0\leq\left|h(\delta)\right|<\dfrac{1}{4(2\lambda^2+1)}\\ 2B_1\left|h(\delta)\right|, & \textit{pentru } \left|h(\delta)\right|\geq\dfrac{1}{4(2\lambda^2+1)}\end{cases},$$

unde

$$h(\delta)=\frac{B_1^2(1-\delta)}{2\left[(12\lambda^4-28\lambda^3+15\lambda^2+2\lambda+1)B_1^2-(1+3\lambda-2\lambda^2)^2B_2\right]}.$$

Luând $\delta=1$, respectiv $\delta=0$ în Teorema 3.3.2, avem următoarele corolarii:

Corolarul 3.3.6. *[41] Fie funcţia $f(z)$, dată de* (3.7)*, aparţinând clasei $\mathcal{S}_{\sigma_m}(\lambda,\phi)$. Atunci*

$$\left|a_{2m+1}-a_{m+1}^2\right|\leq\begin{cases}\dfrac{B_1}{|\beta|}, & \textit{pentru } 0\leq\left|h(1)\right|<\dfrac{1}{2|\beta|}\\ 2B_1\left|h(1)\right|, & \textit{pentru } \left|h(1)\right|\geq\dfrac{1}{2|\beta|}\end{cases},$$

unde

$$h(1)=\frac{B_1^2(m-1)}{2\left[\big(\beta(m+1)-2\alpha\gamma\big)B_1^2-2\alpha^2B_2\right]},$$

$$\alpha=m+2\lambda^2m^2-\lambda m^2-4\lambda^2+4\lambda,$$

$$\beta=2(m+4\lambda^2m^2-2\lambda m^2-2\lambda^2+2\lambda)\neq 0,$$

$$\gamma=\big(2\lambda-1\big)\big((m+2)\lambda-1\big).$$

Corolarul 3.3.7. *[41] Fie funcţia $f(z)$, dată de* (3.7)*, aparţinând clasei $\mathcal{S}_{\sigma_m}(\lambda,\phi)$. Atunci*

$$\left|a_{2m+1}\right|\leq$$

$$\begin{cases} \dfrac{B_1}{|\beta|}, \\ \qquad \textit{pentru } \dfrac{B_2}{B_1^2} \in \left(-\infty; -\dfrac{(m+1)(|\beta|-\beta)+2\alpha\gamma}{2\alpha^2}\right) \cup \left(\dfrac{(m+1)(|\beta|+\beta)-2\alpha\gamma}{2\alpha^2}; +\infty\right) \\ \dfrac{B_1^3(m+1)}{\left|(\beta(m+1)-2\alpha\gamma)B_1^2 - 2\alpha^2 B_2\right|}, \\ \qquad \textit{pentru } \dfrac{B_2}{B_1^2} \in \left(-\dfrac{(m+1)(|\beta|-\beta)+2\alpha\gamma}{2\alpha^2}; \dfrac{\beta(m+1)-2\alpha\gamma}{2\alpha^2}\right) \cup \\ \qquad\qquad \left(\dfrac{\beta(m+1)-2\alpha\gamma}{2\alpha^2}; \dfrac{(m+1)(|\beta|+\beta)-2\alpha\gamma}{2\alpha^2}\right) \end{cases},$$

unde

$$\alpha = m + 2\lambda^2 m^2 - \lambda m^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda,$$
$$\beta = 2(m + 4\lambda^2 m^2 - 2\lambda m^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda) \neq 0,$$
$$\gamma = \big(2\lambda - 1\big)\big((m+2)\lambda - 1\big).$$

Luând $\lambda = 0$ în Teorema 3.3.2, obţinem următorul corolar:

Corolarul 3.3.8. *[41] Fie funcţia $f(z)$, dată prin* (3.7)*, în clasa $\mathcal{M}_{\sigma,m}(0,\phi)$. De asemenea fie $\delta \in \mathbb{R}$. Atunci*

$$\left|a_{2m+1} - \delta a_{m+1}^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{2m}, & \textit{pentru } 0 \leq \left|h(\delta)\right| < \dfrac{1}{4m} \\ 2B_1\left|h(\delta)\right|, & \textit{pentru } \left|h(\delta)\right| \geq \dfrac{1}{4m} \end{cases},$$

unde

$$h(\delta) = \frac{B_1^2(m+1-2\delta)}{4m^2\big(B_1^2 - B_2\big)}.$$

Observaţia 3.3.6. *[41] Rezultatul Corolarului 3.3.8 este obţinut luând $\lambda = 0$ în Teorema 6 în [134].*

Luând $\lambda = \frac{1}{2}$, Teorema 3.3.2 se reduce la rezultatul corespondent al lui Huo Tang *et al.* [134].

Corolarul 3.3.9. *[134, Th. 2, p. 1070] Fie funcţia $f(z)$, dată de* (3.7)*, aparţinând clasei $\mathcal{H}_{\sigma,m}(\phi)$. De asemenea fie $\delta \in \mathbb{R}$. Atunci*

$$\left|a_{2m+1} - \delta a_{m+1}^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{2m+1}, & \textit{pentru } 0 \leq \left|h(\delta)\right| < \dfrac{1}{2(2m+1)} \\ 2B_1\left|h(\delta)\right|, & \textit{pentru } \left|h(\delta)\right| \geq \dfrac{1}{2(2m+1)} \end{cases},$$

unde

$$h(\delta) = \frac{B_1^2(m+1-2\delta)}{2(m+1)\big[(2m+1)B_1^2 - 2(m+1)B_2\big]}.$$

Luând $\lambda = 1$ în Teorema 3.3.2, obţinem următorul corolar:

Corolarul 3.3.10. *[41] Fie funcţia $f(z)$, dată de* (3.7)*, aparţinând clasei $\mathcal{M}_{\sigma,m}(1,\phi)$. De asemenea fie $\delta \in \mathbb{R}$. Atunci*

$$\left|a_{2m+1} - \delta a_{m+1}^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{2m(2m+1)}, & \text{pentru } 0 \leq \left|h(\delta)\right| < \dfrac{1}{4m(2m+1)} \\ 2B_1\left|h(\delta)\right|, & \text{pentru } \left|h(\delta)\right| \geq \dfrac{1}{4m(2m+1)} \end{cases},$$

unde

$$h(\delta) = \frac{B_1^2(m+1-2\delta)}{4m^2(m+1)\left[B_1^2 - (m+1)B_2\right]}.$$

Observaţia 3.3.7. *[41] Rezultatul Corolarului 3.3.10 este obţinut luând $\lambda = 1$ în Teorema 6 în [134].*

3.4 Determinantul Hankel de ordinul doi pentru funcţii gama-stelate de ordin alfa

Determinantul Hankel de ordin q pentru $f \in \mathcal{A}, q \geq 1, n \geq 1$ este definit prin

$$H_q(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2q-2} \end{vmatrix}.$$

Considerăm

$$H_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2a_4 - a_3^2.$$

Există multe articole care conţin rezultate de delimitări pentru $H_2(2)$ pentru diferite clase de funcţii analitice (v. de exemplu [25, 52, 53, 72, 76, 82, 112, 123, 135, 147]).

Pentru a demonstra teorema următoare, folosim metoda utilizată în [53].

Teorema 3.4.1. *[40] Fie $f \in \mathcal{L}_\gamma(\alpha), 0 \leq \gamma \leq 1, 0 \leq \alpha < 1$, de forma* (1.1)*. Atunci*

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \leq \begin{cases} \psi(2), & \text{dacă } \gamma \in [0,\epsilon] \text{ şi } \alpha = h(\gamma) \\ & \text{sau } \gamma \in (0,\epsilon) \text{ şi } \alpha \in \left[0, h(\gamma)\right) \\ & \text{sau } \frac{-B}{2A} > 4 \\ \psi\left(\sqrt{\frac{-B}{2A}}\right), & \text{în caz contrar} \end{cases}, \tag{3.15}$$

unde

$\psi : [0,2] \to \mathbb{R}, \psi(p) = \frac{(1-\alpha)^2(Ap^4+Bp^2+C)}{144(1+\gamma)^4(1+2\gamma)^2(1+3\gamma)}$,

$A = |S| - 3(1+\gamma)^2\big(3(1+\gamma)(7\gamma^2+4\gamma+1) + 2(1-\alpha)\gamma(-7\gamma^2+8\gamma+11)\big)$,

$S = (1-\alpha)^2(37\gamma^5 + 25\gamma^4 - 45\gamma^3 - 361\gamma^2 - 220\gamma - 12)$

$+6(1-\alpha)(1+\gamma)^2\gamma(-7\gamma^2+8\gamma+11) + 3(1+\gamma)^3(7\gamma^2+4\gamma+1)$,

$B = 24\gamma(1+\gamma)^2\big((1-\alpha)(-7\gamma^2+8\gamma+11) + 6\gamma(1+\gamma)\big)$,

$C = 144(1+\gamma)^4(1+3\gamma)$,

$\epsilon \approx 0.01471$ *este o soluţie a ecuaţiei* $-37\gamma^4 - 253\gamma^3 - 603\gamma^2 - 263\gamma + 4 = 0$,

$h : [0,1) \to \mathbb{R}, h(\gamma) = \frac{5\gamma^5+11\gamma^4-75\gamma^3+181\gamma^2+154\gamma+12-4(\gamma+1)(2\gamma+1)\sqrt{3(\gamma+1)(-7\gamma^5-25\gamma^4+190\gamma^2+55\gamma+3)}}{-37\gamma^5-25\gamma^4+45\gamma^3+361\gamma^2+220\gamma+12}$.

Luând $\gamma = 0$ în Teorema 3.4.1, avem următorul rezultat obţinut în [25, 72, 76].

Corolarul 3.4.1. *[40] Fie* $f \in \mathcal{S}^*(\alpha), 0 \le \alpha < 1$, *de forma* (1.1). *Atunci*

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le (1-\alpha)^2.$$

Luând $\gamma = 0$ şi $\alpha = 0$ în Teorema 3.4.1, avem următorul rezultat obţinut în [53].

Corolarul 3.4.2. *[40] Fie* $f \in \mathcal{S}^*$, *de forma* (1.1). *Atunci*

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le 1.$$

Luând $\gamma = 1$ în Teorema 3.4.1, avem următorul rezultat obţinut în [72].

Corolarul 3.4.3. *[40] Fie* $f \in \mathcal{K}(\alpha), 0 \le \alpha < 1$, *de forma* (1.1). *Atunci*

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le (1-\alpha)^2\frac{36 - 36\alpha + 17\alpha^2}{144(2 - 2\alpha + \alpha^2)}.$$

Luând $\gamma = 1$ şi $\alpha = 0$ în Teorema 3.4.1, avem următorul rezultat obţinut în [53].

Corolarul 3.4.4. *[40] Fie* $f \in \mathcal{K}$, *de forma* (1.1). *Atunci*

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le \frac{1}{8}.$$

Luând $\alpha = 0$ în Teorema 3.4.1, avem următorul rezultat.

Corolarul 3.4.5. *[40] Fie $f \in \mathcal{L}_\gamma, 0 \leq \gamma \leq 1$, de forma* (1.1). *Atunci*

$$\left|a_2 a_4 - a_3^2\right| \leq$$

$$\begin{cases} \frac{(16\gamma^4+80\gamma^3+257\gamma^2+142\gamma+9)(1-\gamma)}{9(1+\gamma)^4(1+2\gamma)^2(1+3\gamma)}, & \textit{dacă } 0 \leq \gamma \leq \epsilon \textit{ sau } \frac{3(1+\gamma)^2(-\gamma^2+14\gamma+11)}{37\gamma^4+253\gamma^3+603\gamma^2+263\gamma-4} > 1 \\ \\ \frac{112\gamma^5+768\gamma^4+2236\gamma^3+1700\gamma^2+372\gamma-4}{(1+2\gamma)^2(1+3\gamma)(37\gamma^4+253\gamma^3+603\gamma^2+263\gamma-4)}, & \textit{în caz contrar} \end{cases},$$

unde $\epsilon \approx 0.01471$ este o soluţie a ecuaţiei $-37\gamma^4 - 253\gamma^3 - 603\gamma^2 - 263\gamma + 4 = 0$.

Capitolul 4

Asupra unei clase de funcţii analitice cu argument variabil definită de convoluţia operatorilor Sălăgean şi Ruscheweyh

În acest capitol, este definit un nou operator obţinut prin convoluţia operatorului Sălăgean $\mathcal{D}^n$ şi operatorului Ruscheweyh $\mathcal{R}^n$ şi este introdusă o clasă de funcţii analitice cu argument variabil definită de acest operator. Sunt de asemenea studiate proprietăţile imaginii acestei clase prin operatorul Bernardi.

Definiţia 4.1. *[106] Fie $n \in \mathbb{N}$. Notăm cu $\mathcal{DR}^n$ operatorul exprimat prin produsul Hadamard (convoluţia) operatorilor Sălăgean $\mathcal{D}^n$ şi Ruscheweyh $\mathcal{R}^n$, $\mathcal{DR}^n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$,*

$$\mathcal{DR}^n f(z) = \mathcal{D}^n \left(\frac{z}{1-z} \right) * \mathcal{R}^n f(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Observaţia 4.1. *[106] Dacă $f \in \mathcal{A}$ şi $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, atunci*

$$\mathcal{DR}^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^n (n+k-1)!}{n! (k-1)!} a_k z^k, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Definiţia 4.2. *[106] Pentru $\lambda \geq 0; -1 \leq A < B \leq 1; 0 < B \leq 1; n \in \mathbb{N}$ fie $P(n, \lambda, A, B)$ subclasa funcţiilor $\mathcal{A}$ care conţine funcţii f de forma (1.1) astfel încât*

$$(1-\lambda)(\mathcal{DR}^n f(z))' + \lambda(\mathcal{DR}^{n+1} f(z))' \prec \frac{1+Az}{1+Bz}.$$

Definiţia 4.3. *[121] O funcţie f de forma (1.1) se spune că aparţine clasei $V(\theta_k)$ dacă $f \in A$ şi $arg(a_k) = \theta_k$,$\forall k \geq 2$. Dacă $\exists \delta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\theta_k + (k-1)\delta \equiv$*

$\pi(mod\ 2\pi), \forall k \geq 2$ *atunci se spune că* f *aparţine clasei* $V(\theta_k, \delta)$. *Reuniunea tuturor mulţimilor* $V(\theta_k, \delta)$ *în raport cu toate şirurile posibile* $\{\theta_k\}$ *şi toate numerele reale posibile* δ *este notată cu* V.

Se notează cu $VP(n, \lambda, A, B)$ subclasa lui V unde $f(z) \in P(n, \lambda, A, B)$.

Teorema 4.1. *[106] Fie funcţia* f *de forma* (1.1), *care aparţine clasei* V. *Atunci* $f(z) \in VP(n, \lambda, A, B)$, *dacă şi numai dacă*

$$T(f) = \sum_{k=2}^{\infty} k^{n+1} C_k (1 + B) |a_k| \leq B - A, \tag{4.1}$$

unde

$$C_k = [n + 1 + \lambda (k - 1) (n + k + 1)] \frac{(n + k - 1)!}{(n + 1)! (k - 1)!}.$$

Funcţiile extremale sunt:

$$f(z) = z + \frac{B - A}{k^{n+1} C_k (1 + B)} e^{i\theta_k} z^k, \quad k \geq 2.$$

Corolarul 4.1. *[106] Fie funcţia* f *de forma* (1.1), *care aparţine clasei* $VP(n, \lambda, A, B)$. *Atunci*

$$|a_k| \leq \frac{B - A}{k^{n+1} C_k (1 + B)}, \quad k \geq 2.$$

Rezultatul (4.1) *este exact pentru funcţiile*

$$f(z) = z + \frac{B - A}{k^{n+1} C_k (1 + B)} e^{i\theta_k} z^k, \quad k \geq 2.$$

Teorema 4.2. *[106] Fie funcţia* f *de forma* (1.1), *care aparţine clasei* $VP(n, \lambda, A, B)$. *Atunci*

$$|z| - \frac{B - A}{2^{n+1} C_2 (1 + B)} |z|^2 \leq |f(z)| \leq |z| + \frac{B - A}{2^{n+1} C_2 (1 + B)} |z|^2.$$

Rezultatul este exact.

Corolarul 4.2. *[106] Fie funcţia* f *de forma* (1.1), *care aparţine clasei* $VP(n, \lambda, A, B)$. *Atunci* $f(z) \in \mathcal{U}(0, r_1)$, *unde* $r_1 = 1 + \dfrac{B - A}{2^{n+1} C_2 (1 + B)}$.

Teorema 4.3. *[106] Fie funcţia* f *de forma* (1.1), *care aparţine clasei* $VP(n, \lambda, A, B)$. *Atunci*

$$1 - \frac{B - A}{2^n C_2 (1 + B)} |z| \leq |f'(z)| \leq 1 + \frac{B - A}{2^n C_2 (1 + B)} |z|.$$

Rezultatul este exact.

Corolarul 4.3. *[106] Fie funcţia f de forma (1.1), care aparţine clasei $VP(n,\lambda,A,B)$. Atunci $f'(z)\in\mathcal{U}(0,r_2)$, unde $r_2 = 1+\dfrac{B-A}{2^nC_2\,(1+B)}$.*

Teorema 4.4. *[106] Fie funcţia f de forma (1.1), care aparţine clasei $VP(n,\lambda,A,B)$, cu $arg(a_k)=\theta_k$, unde $\theta_k\equiv\pi, \forall k\geq 2$. Definim*

$$f_1(z)=z$$

şi

$$f_k(z)=z-\frac{B-A}{k^{n+1}C_k\,(1+B)}z^k,\quad k\geq 2, z\in\mathcal{U}.$$

Atunci $f(z)\in VP(n,\lambda,A,B)$ dacă şi numai dacă $f(z)$ poate fi exprimată prin

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k f_k(z),\ \textit{unde}\ \mu_k\geq 0\ \textit{şi}\ \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k=1.$$

Corolarul 4.4. *[106] Fie $VP_\pi(n,\lambda,A,B)=VP(n,\lambda,A,B)\cap V(\pi,0)$. Punctele extreme ale lui $VP_\pi(n,\lambda,A,B)$ sunt*

$$f_1(z)=z\quad \textit{şi}\quad f_k(z)=z-\frac{B-A}{k^{n+1}C_k(1+B)}z^k,\quad k\geq 2,\ z\in\mathcal{U}.$$

Dacă combinăm teorema 4.4 cu teorema 5 a lui Silverman din [121] obţinem următorul corolar:

Corolarul 4.5. *[106] Învelitoarea convexă şi închisă a clasei $VP(n,\lambda,A,B)$ este*

$$cl\ co\ VP(n,\lambda,A,B)=\left\{f\ |f\in\mathcal{A},\ \sum_{k=2}^{\infty}k^{n+1}C_k\,(1+B)\,|a_k|\leq B-A\right\}.$$

Punctele extreme ale lui $cl\ co\ VP(n,\lambda,A,B)$ sunt

$$\boldsymbol{E}(cl\ co\ VP(n,\lambda,A,B))=\left\{z+\frac{B-A}{k^{n+1}C_k(1+B)}\xi z^k,\ |\xi|=1,\ k\geq 2\right\}.$$

Teorema 4.5. *[106] Dacă $f\in VP(n,\lambda,2\alpha-1,B)$, atunci $\mathcal{L}_cf\in VP(n,\lambda,2\beta-1,B)$, unde*

$$\beta=\beta(\alpha)=\frac{B+1+2\alpha(c+1)}{2(c+2)}\geq\alpha.$$

Rezultatul este exact.

Teorema 4.6. *[106] Dacă $f\in VP(n,\lambda,A,B)$, atunci $\mathcal{L}_cf\in VP(n,\lambda,A^*,B)$, unde*

$$A^*=\frac{B+A(c+1)}{c+2}>A.$$

Rezultatul este exact.

Teorema 4.7. *[106] Dacă $f \in VP(n, \lambda, A, B)$, atunci $\mathcal{L}_c f \in VP(n, \lambda, A, B^*)$,unde*

$$B^* = \frac{A\,(1+B)\,(c+2) + (B-A)\,(c+1)}{(1+B)\,(c+2) - (B-A)\,(c+1)} < B.$$

Rezultatul este exact.

Concluzii şi direcţii viitoare de cercetare

În prezenta teză sunt studiate clase de funcţii analitice, meromorfe, respectiv bi-univalente, unele dintre ele fiind definite cu ajutorul unor operatori. Sunt obţinute şi rezultate referitoare la subordonări diferenţiale.

În cele ce urmează vom prezenta direcţii viitoare de cercetare care pot fi abordate pentru a extinde rezultatele originale din teză, respectiv pentru a obţine altele noi. S-ar putea obţine rezultate de felul următor:

- diverse rezultate folosind operatorul din paragraful 2.1 pentru clase de funcţii cu coeficienţi negativi;
- mai multe rezultate cu ajutorul operatorilor din paragrafele 2.2 şi 2.5;
- relaţii de incluziune a funcţiilor analitice asociate seriilor de distribuţie Poisson, asemănătoare celor din paragraful 2.4, folosind alţi operatori diferenţiali;
- alte subordonări diferenţiale implicând mediile pitagoreice;
  De exemplu în lucrarea [73] autorii au extins rezultatele din [35] (paragraful 3.1 din prezenta teză).
- estimări ale coeficienţilor şi inegalităţi Fekete-Szegő pentru diverse clase de funcţii m-simetrice, bi-univalente sau asociate polinoamelor Chebyshev;
  Pot fi de asemenea extinse rezultatele din paragrafele 3.2 şi 3.3. Autorii din lucrările [54], [124] au extins rezultatele din [132] (paragraful 3.2 din prezenta teză).
- estimări ale determinantului Hankel de ordinul doi pentru diferite clase de funcţii definite prin subordonare.

Un alt domeniu în care pot fi obţinute rezultate interesante este cel al funcţiilor univalente armonice, respectiv meromorfe armonice. Pot fi definite clase de funcţii armonice cu ajutorul operatorilor folosiţi în teză şi se pot studia proprietăţi ale acestora.

Bibliografie

[1] Acu, M., Oros, Gh.: *Starlikeness condition for a new differential-integral operator*, Mathematics, 8 (5) (2020), 694.

[2] Ahlfors, L. V.: *Conformal invariants. Topics in geometric function theory*, Mc. Graw-Hill Book Comp., New York, 1973.

[3] Akgül, A.: *A new general subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions given by subordination*, Turkish J. Math., 43 (2019), no. 3, 1688-1698.

[4] Al-Oboudi, F.M.: *On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator*, Int. J. Math. Math. Sci., 27 (2004), 1429-1436.

[5] Al-Oboudi, F. M., Al-Zkeri, H. A.: *On some classes of meromorphic starlike functions defined by a differential operator*, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 3 (1) (2007), 1-11.

[6] Alb Lupaş, A.: *On special differential subordinations using Sălăgean and Ruscheweyh operators*, Math. Inequal. Appl., 12 (4) (2009), 781-790.

[7] Alb Lupaş, A.: *Certain differential subordinations using Sălăgean and Ruscheweyh operators*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform., 29 (2012), 125-129.

[8] Aldawish, I., Swamy, S. R., Frasin, B. A.: *A special family of m-fold symmetric bi-univalent functions satisfying subordination condition*, Fractal Fract., 6 (2022), no.5, 271.

[9] Alexander, J. W.: *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. of Math., 17 (1915), 12-22.

[10] Altınkaya, Ş., Yalçın, S.: *On a new subclass of bi-univalent functions satisfying subordinate conditions*, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 7 (1) (2015), 5-14.

[11] Altınkaya, Ş., Yalçın, S.: *On the Chebyshev polynomial bounds for classes of univalent functions*, Khayyam J. Math., 2 (1) (2016), 1-5.

[12] Altınkaya, Ş., Yalçın, S.: *On some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat., 67 (2018), no.1, 29-36.

[13] Altınkaya, Ş., Yalçın, S.: *On the Chebyshev coefficients for a general subclass of univalent functions*, Turkish J. Math., 42 (2018), 2885-2890.

[14] Atshan, W. G., Kazim, S. K.: *Coefficient estimates for some subclasses of bi-univalent functions related to m-fold symmetry*, Journal of Al-Qadisiyah for computer science and mathematics, 11 (2019), no. 2, 81-86.

[15] Atshan, W. G., Yalçın, S., Hadi, R. A.: *Coefficient estimates for special subclasses of k-fold symmetric bi-univalent functions*, Math. Appl., 9 (2020), 83-90.

[16] Bieberbach, L.: *Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung*, Math. Ann., 77 (1916), 153-172.

[17] Bieberbach, L.: *Über die Koeffizientem derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsb., (1916), 940-955.

[18] Bulboacă, T.: *Differential subordinations and superordinations, Recent results*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005.

[19] Bulut, S.: *Coefficient estimates for a new subclass of m-fold symmetric analytic bi-univalent functions*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat., 68 (2019), no. 2, 1401-1410.

[20] Bulut, S., Magesh, N.: *On the sharp bounds for a comprehensive class of analytic and univalent functions by means of Chebyshev polynomials*, Khayyam J. Math., 2 (2) (2016), 194-200.

[21] Călugăreanu, G.: *Sur la condition nécessaire et suffisante pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un circle*, C. R. Acad. Sci. Paris, 193 (1931), 1150-1153.

[22] Călugăreanu, G.: *Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un circle*, Mathematica, 6 (1932), 75-79.

[23] Cătaş, A.: *A note on subclasses of univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform., 12 (2006), 73-78.

[24] Cho, N. E., Kim, J. A.: *On certain classes of meromorphically starlike functions*, Int. J. Math. Math. Sci., 18 (3) (1995), 463-468.

[25] Cho, N. E., Kowalczyk, B., Kwon, O. S., Lecko, A., Sim, Y. J.: *The bounds of some determinants for starlike functions of order alpha*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 41 (2018), 523-535.

[26] Cho, N. E., Lecko, A.: *Differential subordination of harmonic mean*, Comput. Methods Funct. Theory, 15 (3) (2015), 427-437.

[27] Chojnacka, O., Lecko, A.: *Some differential subordination of harmonic mean to a linear function*, Rocky Mountain J. Math., 48 (5) (2018), 1475-1484.

[28] Crişan, O.: *Differential subordinations obtained by using Al-Oboudi and Ruscheweyh operators*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 56 (3) (2011), 45-51.

[29] Curt, P.: *Capitole speciale de teoria geometrică a funcţiilor de mai multe variabile complexe*, Editura S. C. Albastra Casă de Editură, Cluj-Napoca, 2001.

[30] de Branges, L.: *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math., 154 (1985), 137-152.

[31] Dong, G., Huo, T., En, A., Liang-Peng, X.: *Coefficient estimates for a class of m-fold symmetric bi-univalent function defined by subordination*, Commun. Math. Res., 35 (2019), no. 1, 57-64.

[32] Duren, P. L.: *Univalent functions*, Springer-Verlag, 1984.

[33] Dziok, J., Raina, R. K., Sokol, J.: *Application of Chebyshev polynomials to classes of analytic functions*, C. R. Acad. Sci. Paris, 353 (2015), 433-438.

[34] Fejér, L.: *Über die positivität von summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen funktionen fortschreiten I*, Acta Szeged, 2 (1925), 75-86.

[35] **Gavriş, E.**: *Differential subordinations and Pythagorean means*, Math. Slovaca, 70 (2020). No. 5, 1135-1140.

[36] **Gavriş, E.**: *Inclusion relations of analytic functions associated with Poisson distribution series and Sălăgean operator*, An. Univ. Oradea Fasc. Mat., 17 (2020), no. 2, 47-53.

[37] **Gavriş, E.**: *On a class of meromorphic functions defined by using a fractional operator*, Mathematica (Cluj), 63 (86), No 1, 2021, 77-84.

[38] **Gavriş, E.**: *Differential subordinations obtained by using generalized Sălăgean integro-differential operator*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform., 71 (2022), 127-136.

[39] **Gavriş, E.**: *Coefficient bounds and Fekete-Szegő problem for some classes of analytic functions defined by using a fractional operator*, trimis spre publicare.

[40] **Gavriş, E.**: *The second Hankel determinant for gamma-starlike functions of order alpha*, trimis spre publicare.

[41] **Gavriş, E.**, Altınkaya, Ş.: *Coefficient estimates and Fekete-Szegő inequalities for a new subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions satisfying subordinate conditions*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 14 (2023) 1, 3145-3154 (electronic).

[42] Goodman, A. W.: *Univalent functions*, Mariner Publ. Comp., Tampa, Florida, 1984.

[43] Goodman, A. W.: *On uniformly starlike functions*, J. Math. Anal. Appl., 155 (2) (1991), 364-370.

[44] Goodman, A. W.: *On uniformly convex functions*, Ann. Polon. Math., 56 (1) (1991), 87-92.

[45] Goyal, S. P., Kumar, S.: *Fekete-Szegő problem for a class of complex order related to Sălăgean operator*, Bull. Math. Anal. Appl., 3 (4) (2011), 240-246.

[46] Graham, I., Kohr, G.: *Geometric function theory in one and higher dimensions*, Marcel Dekker Inc., New York - Basel, 2003.

[47] Gronwall, T.: *Some remarks on conformal representation*, Ann. of Math., (2) 16 (1914-15), 72-76.

[48] Hallenbeck, D. J.: *Convex hulls and extreme points of some families of univalent functions*, Trans. Am. Math. Soc., 192 (1974), 285-292.

[49] Hallenbeck, D. J., MacGregor, T. H.: *Linear problems and convexity techniques in geometric function theory*, Pitman Adv. Publ. Program, Boston-London-Melbourne, 1984.

[50] Hamburg, P., Mocanu, P.T., Negoescu, N.: *Analiză matematică (Funcţii complexe)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[51] Jack, I. S.: *Functions starlike and convex of order α*, J. Lond. Math. Soc., (2) 3 (1971), 469-474.

[52] Janteng, A., Halim, S. A., Darus, M.: *Coefficient inequality for function whose derivative has a positive real part*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7 (2) 2006, 50.

[53] Janteng, A., Halim, S. A., Darus, M.: *Hankel determinant for starlike and convex functions*, Int. J. Math. Anal., 1 (13) 2007, 619-625.

[54] Kamali, M., Caglar, M., Deniz, E.: *Fekete-Szegő problem for a new subclass of analytic functions satisfying subordinate condition associated with Chebyshev polynomials*, Turk. J. Math., (2021), 45: 1195-1208.

[55] Kanas, S.: *Weighted Harmonic Means*, Complex Anal. Oper. Theory, 11 (2017), 1715-1728.

[56] Kanas, S., Crişan, O.: *Differential subordinations involving arithmetic and geometric means*, Appl. Math. Comput., 222 (2013), 123-131.

[57] Kanas, S., Lecko, A.: *Univalence criteria connected with arithmetic and geometric means, II*, Folia Sci. Univ. Tech. Resov., 20 (1996), 49-59.

[58] Kanas, S., Lecko, A.: *Univalence criteria connected with arithmetic and geometric means, II*, Proceedings of the Second Int. Workshop of Transform Methods and Special Functions, Varna '96, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia 1996, p. 201-209.

[59] Kanas, S., Lecko, A., Stankiewicz, J.: *Differential subordinations and geometric means*, Compl. Var. Theor. Appl., 28 (1996), 201-209.

[60] Kanas, S., Stankiewicz, J.: *Arithmetic means with reference to convexity conditions*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź 47, Ser. Rech. Deform., 24 (1997), 73-82.

[61] Kanas, S., Tudor, A. E.: *Differential Subordinations and Harmonic Means*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 38 (2015), 1243-1253.

[62] Kanas, S., Wisniowska, A.: *Conic regions and k-uniform convexity*, J. Comput. Appl. Math., 105 (1999), 327-336.

[63] Kanas, S., Wisniowska, A.: *Conic domains and starlike functions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 45 (4) (2000), 647-657.

[64] Kanas, S., Yuguchi, T.: *Subclasses of k-uniformly convex and starlike functions defined by generalized derivative, I*, Indian J. Pure Appl. Math., 32 (9) (2001), 1275-1282.

[65] Keogh, F. R., Merkes, E. P.: *A coefficient inequality for certain classes of analytic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1) (1969), 8-12.

[66] Kim, Y. C., Choi, J. H., Sugawa, T.: *Coefficient bounds and convolution properties for certain classes of close-to-convex functions*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 76 (6) (2000), 95-98.

[67] Kim, Y. C., Sugawa, T.: *Norm estimates of the pre-Schwarzian derivatives for certain classes of univalent functions*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 49 (1) (2006), 131-143.

[68] Koebe, P.: *Über die Uniformisierung Beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys., (1907), 191-210.

[69] Kohr, G.: *Basic topics in holomorphic functions of several complex variables*, Cluj University Press, 2003.

[70] Kohr, G., Mocanu, P. T.: *Capitole speciale de analiză complexă*, Presa Universitară Clujeană, 2005.

[71] Kohr, G., Liczberski, P.: *Univalent mappings of several complex variables*, Cluj University Press, 1998.

[72] Krishna, D. V., Ramreddy, T.: *Hankel determinant for starlike and convex functions of order alpha*, Tbil. Math. J., 5 (1) (2012), 65-76.

[73] Kumar, S. S., Goel, P.: *Application of Pythagorean means and differential subordination*, va apărea.

[74] Kumar, T. R. K., Karthikeyan, S., Vijayakumar, S., Ganapathy, G.: *Initial coefficient estimates for certain subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions*, Adv. Dyn. Syst. Appl., 16 (2021), no. 2, 789-800.

[75] Lecko, A., Lecko, M.: *Differential subordinations of arithmetic and geometric means of some functionals related to a sector*, Int. J. Math. Math. Sci., 2011 (2011), Article ID 205845, 19 pages.

[76] Lee, S. K., Ravichandran, V., Supramaniam, S.: *Bounds for the second Hankel determinant of certain univalent functions*, J. Inequal. Appl., (281) 2013.

[77] Lewandowski, Z., Miller, S., Złotkiewicz, E.: *Gamma-starlike functions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, 28 (1974), 32-36.

[78] Lewandowski, Z., Miller, S. S., Złotkiewicz, E.: *Generating functions for some classes of univalent functions*, Proc. Am. Math. Soc., 56 (1976), 111-117.

[79] Libera, R. J., Złotkiewicz, E. J.: *Early coefficients of the inverse of a regular convex function*, Proc. Am. Math. Soc., 85 (2) (1982), 225-230.

[80] Ma, W., Minda, D.: *A unified treatment of some special classes of univalent functions*, Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Z. Li, F. Ren, L. Yang and S. Zhang (Eds.), Int. Press (1994), 157-169.

[81] Mazi, E., Altınkaya, Ş.: *On a new sbclass of m-fold symmetric biunivalent functions equipped with subordinate conditions*, Khayyam J. Math., 4 (2018), no. 2, 187-197.

[82] Mehrok, B. S., Singh, G.: *Estimate of second Hankel determinant for certain classes of analytic functions*, Sci. Magna, 8 (3) (2012), 85-94.

[83] Miller, S. S., Mocanu, P. T.: *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl., 65 (1978), 289-305.

[84] Miller, S. S., Mocanu, P. T.: *Differential subordinations and univalent functions*, Michig. Math. J., 28 (1981), 157-171.

[85] Miller, S. S., Mocanu, P. T.: *Differential Subordinations: Theory and Applications*, Pure and Applied Mathematics, no. 225, Marcel Dekker, New York, 2000.

[86] Miller, S. S., Mocanu, P. T., Reade, M. O.: *All α-convex functions are starlike*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 17 (9) (1972), 1395-1397.

[87] Miller, S. S., Mocanu, P. T., Reade, M. O.: *All α-convex functions are univalent and starlike*, Proc. Amer. Math. Soc., 37 (2) (1973), 553-554.

[88] Mocanu, P. T.: *Une propriété de convexité généralisée dans la théorie de la représentation conforme*, Mathematica (Cluj), 11 (34) (1969), 127-133.

[89] Mocanu, P. T.: *On strongly starlike and strongly convex functions*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 31 (1986), 16-21.

[90] Mocanu, P. T.: *Alpha-convex integral operators and strongly starlike functions*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 34 (1989), 18-24.

[91] Mocanu, P. T., Breaz, D., Oros, G. I., Oros, Gh.: *Analiză complexă*, Editura Aeternitas, Alba Iulia, 2009.

[92] Mocanu, P. T., Bulboacă, T., Sălăgean, G. Ş.: *Teoria geometrică a funcţiilor univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2006.

[93] Motamednezhad, A., Salehian, S.: *Coefficient estimates for a general subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions*, Tbilisi Math. J. 12 (2019), no. 2, 163-176.

[94] Motamednezhad, A., Salehian, S., Magesh, N.: *The Fekete-Szegő problems for a subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions*, TWMS J. Appl. Eng. Math., 11 (2021), no. 2, 514-523.

[95] Noshiro, K.: *On the theory of schlicht functions*, J. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ. Jap. (1), 2 (1934-1935), 129-155.

[96] Nunokawa, M.: *On the order of strongly starlikeness of strongly convex functions*, Proc. Japan. Acad. Ser. A, 69 (1993), 234-237.

[97] Oros, G. I.: *On a class of holomorphic functions defined by the Ruscheweyh derivative*, Int. J. Math. Math. Sci., 65 (2003), 4139-4144.

[98] Oros, G. I.: *On a class of holomorphic functions defined by Sălăgean differential operator*, Complex Variables, 50 (2005), no. 4, 257-264.

[99] Oros, G. I.: *New differential subordinations obtained by using a differential-integral Ruscheweyh-Libera operator*, Miskolc Math. Notes, 21 (1) (2020), 303-317.

[100] Oros, G. I., Alb Lupaş, A.: *Sufficient conditions for univalence obtained by using Briot-Bouquet differential subordination*, Math. Stat., 8 (2020), 126-136.

[101] Owa, S.: *On the distortion theorems I*, Kyungpook Math. J., 18 (1978), 53-59.

[102] Owa, S., Srivastava, H. M.: *Univalent and starlike generalized hypergeometric functions*, Can. J. Math., 39 (1987), 1057-1077.

[103] Patel, J.: *Inclusion relations and convolution properties of certain subclasses of analytic functions defined by a generalized Sălăgean operator*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 15 (2008), 33-47.

[104] Páll-Szabó, Á. O.: *On a class of univalent functions defined by Sălăgean integro-differential operator*, Miskolc Math. Notes, 19 (2) (2018), 1095-1106.

[105] Páll-Szabó, Á. O., Engel, O.: *Certain class of analytic functions with varying arguments defined by Sălăgean derivative*, Proceedings of the 8th International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics, IC-TAMI 2015, Alba Iulia, Romania,17th-20th of September, 2015, 113-120.

[106] Páll-Szabó, Á. O., Engel, O., **Szatmari, E.**: *Certain class of analytic functions with varying arguments defined by the convolution of Sălăgean and Ruscheweyh derivative*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform., 51 (2017), 61-74.

[107] Pommerenke, C.: *On the coefficients of close-to-convex functions*, Michigan. Math. J., 9 (1962), 259-269.

[108] Pommerenke, C.: *Univalent functions*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.

[109] Ponnusamy, S., Rønning, F.: *Starlikeness properties for convolutions involving hypergeometric series*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, L. II, 1 (16) (1998), 141-155.

[110] Porwal, S.: *An application of a Poisson distribution series on certain analytic functions*, J. Complex Anal., 2014, Art. ID 984135, 3 pp.

[111] Ravichandran, V., Polatoglu, Y., Bolcal, M., Sen, A.: *Certain subclasses of starlike and convex functions of complex order*, Hacet. J. Math. Stat., 34 (2005), 9-15.

[112] Răducanu, D., Zaprawa, P.: *Second Hankel determinant for the close-to-convex functions*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 355 (10) (2017), 1063-1071.

[113] Robertson, M. S.: *On the theory of univalent functions*, Ann. Math., 37 (2) (1936).

[114] Rogosinski, W. W.: *On the coefficients of subordinate functions*, Proc. London Math. Soc., 48 (1943), 48-82.

[115] Ruscheweyh, S.: *New criteria for univalent functions*, Proc. Am. Math. Soc., 49 (1975), 109-115.

[116] Sakaguchi, K.: *A note on p-valent functions*, J. Math. Soc. Japan, 14 (1962), 312-321.

[117] Sălăgean, G. Ş.: *Subclasses of univalent functions*, Lecture Notes in Math. (Springer Verlag), 1013 (1983), 362-372.

[118] Sălăgean, G. Ş.: *Geometria planului complex*, Pro Media-Plus, 1997.

[119] Shaba, T. G., Patil, A. B.: *Coefficient estimates for certain subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions associated with pseudo-starlike functions*, Earthline Journal of Mathematical Sciences, 6 (2021), no. 2, 209-223.

[120] Sharma, P., Raina, R. K., Sălăgean, G. Ş.: *Some geometric properties of analytic functions involving a new fractional operator*, Mediterr. J. Math., 13 (2016), 4591-4605.

[121] Silverman, H.: *Univalent functions with varying arguments*, Houston J. Math., 17 (1981), 283-287.

[122] Singh, M. K., Porwal, S.: *Some inclusion relations of analytic univalent functions associated with Poisson distribution series*, An. Univ. Oradea Fasc. Mat., 26 (2) (2019), 77-84.

[123] Sokól, J., Thomas, D. K.: *The second Hankel determinant for alpha-convex functions*, Lithuanian Math. J., 58 (2) (2018), 212-218.

[124] Srivastava, H. M., Kamali, M., Urdaletova, A.: *A study of the Fekete-Szegő functional and coefficient estimates for subclasses of analytic functions satisfying a certain subordination condition and associated with the Gegenbauer polynomials*, AIMS Mathematics, 7 (2) (2021), 2568-2584.

[125] Srivastava, H. M., Magesh, N., Yamini, J.: *Initial coefficient estimates for bi-λ-convex and bi-μ-starlike functions connected with arithmetic and geometric means*, Elect. J. Math. Anal. Appl., 2 (2) (2014), 152-162.

[126] Srivastava, H. M., Sharma, P., Raina, R. K.: *Inclusion results for certain classes of analytic functions associated with a new fractional differintegral operator*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. A., (2017). http://dx.doi.org/10.1007/s13398-017-0377-8.

[127] Srivastava, H. M., Wanas, A. K.: *Initial Maclaurin coefficient bounds for new subclasses of analytic and m-fold symmetric bi-univalent functions defined by a linear combination*, Kyungpook Math. J., 59 (2019), 493-503.

[128] Swamy, S. R., Frasin, B. A., Aldawish, I.: *Fekete-Szegö functional problem for a special family of m-fold symmetric bi-univalent functions*, Mathematics, 10 (2022), 1165.

[129] **Szatmari, E.**: *On a class of analytic functions defined by a fractional operator*, Mediterr. J. Math., 15:158, (2018).

[130] **Szatmari, E.**: *Differential subordinations obtained by using a fractional operator*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 63 (4) (2018), 475-482.

[131] **Szatmari, E.**: *Some properties of analytic functions obtained by using a fractional operator*, Asia Pacific Journal of Mathematics, 5 (2) (2018), 151-172.

[132] **Szatmari, E.**, Altınkaya, Ş.: *Coefficient estimates and Fekete-Szegő inequality for a class of analytic functions satisfying subordinate condition associated with Chebyshev polynomials*, Acta Univ. Sapientiae Math., 11 (2) (2019), 430-436.

[133] **Szatmari, E.**, Páll-Szabó, Á.O.: *Differential subordination results obtained by using a new operator*, General Mathematics, 25 (1-2) (2017), 119-131.

[134] Tang, H., Srivastava, H. M., Sivasubramanian, S., Gurusamy, P.: *The Fekete-Szegő functional problems for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions*, J. Math. Inequal., 10 (2016), 1063-1092.

[135] Thomas, D. K.: *On the coefficients of gamma-starlike functions*, J. Korean Math. Soc., 55 (1) (2018), 175-184.

[136] Tudor, A. E.: *Bi-univalent functions connected with arithmetic and geometric means*, Journal of Global Research in Mathematical Archives, 1 (2) (2013), 78-83.

[137] Tudor, A. E., Răducanu, D.: *On a subclass of analytic functions involving harmonic means*, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, 23 (1) (2015), 267-275.

[138] Uralegaddi, B. A., Somanatha, C.: *New criteria for meromorphic starlike univalent functions*, Bull. Aust. Math. Soc., 43 (1991), 137-140.

[139] Wanas, A. K.: *Bounds for initial Maclaurin coefficients for a new subclasses of analytic and m-fold symmetric bi-univalent functions*, TWMS J. Appl. Eng. Math., 10 (2020), no. 2, 305-311.

[140] Wanas, A. K., Majeed, A. H.: *Certain new subclasses of analytic and m-fold symmetric bi-univalent functions*, Appl. Math. E-Notes, 18 (2018), 178-188.

[141] Wanas, A. K., Majeed, A. H.: *On subclasses of analytic and m-fold symmetric bi-univalent functions*, Iran. J. Math. Sci. Inform., 15 (2020), no. 2, 51-60.

[142] Wanas, A. K., Páll-Szabó, Á. O.: *Coefficient bounds for new subclasses of analytic and m-fold symmetric bi-univalent functions*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 66 (2021), no. 4, 659-666.

[143] Wanas, A. K., Tang, H.: *Initial coefficient estimates for a classes of m-fold symmetric bi-univalent functions involving Mittag-Leffler function*, Math. Morav., 24 (2020), no. 2, 51-61.

[144] Wanas, A. K., Yalçın, S.: *Initial coefficient estimates for a new subclasses of analytic and m-fold symmetric bi-univalent functions*, Malaya J. Mat., 7 (2019), no. 3, 472-476.

[145] Warschawski, S. E.: *On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping*, Trans. Amer. Math. Soc., 38 (1935), 310-340.

[146] Wolff, J.: *L'intégrale d'une fonction holomorphe et à partie réelle positive dans un demi plan est univalente*, C. R. Acad. Sci. Paris, 198, 13 (1934), 1209-1210.

[147] Zaprawa, P.: *Second Hankel determinants for the class of typically real functions*, Abstr. Appl. Anal. 2016 (2016), 3792367.