Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

Tehnici de teoria potenţialului şi teoria geometrică a funcţiilor în studiul unor probleme din mecanica fluidelor

TEZĂ DOCTORAT - REZUMAT

Conducător Ştiinţific
Prof. Univ. Dr. Mirela Kohr

Doctorand
Denisa Gabriela Fericean

Cluj-Napoca
2012

Cuprins

Introducere

Teoria funcţiilor univalente reprezintă o parte importantă a analizei complexe, fiind una dintre cele mai atractive direcţii din teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă. Lucrarea lui Koebe (1907) joacă un rol important în teoria funcţiilor univalente, conţinând o teoremă de acoperire pentru clasa S a funcţiilor normate şi univalente pe discul unitate U al planului complex. În 1914 Gronwall a obţinut *Teorema ariei*. Utilizând această teoremă, Bieberbach [6] a demonstrat în 1916 estimarea exactă a coeficientului a_2 pentru funcţiile din clasa S, adică $|a_2| \leq 2$. De asemenea, Bieberbach [6] a formulat bine cunoscuta conjectură: *Dacă $f \in S$ şi $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $z \in U$, atunci $|a_n| \leq n$, $n \geq 2$. Egalitatea $|a_n| = n$, pentru $n \geq 2$, are loc dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei Koebe*. Până atunci au fost obţinute multe rezultate parţiale şi au fost formulate şi alte conjecturi fundamentale pentru a demonstra conjectura lui Bieberbach. Primul pas important în această direcţie a fost făcut de Loewner [66] în 1923, care a demonstrat că $|a_3| \leq 3$. În 1936 Robertson a propus o conjectură mai puternică referitoare la funcţiile impare din clasa S. În continuare, menţionăm conjectura lui Millin care implică conjectura lui Robertson, care conduce mai apoi la conjectura lui Bieberbach. În final, conjectura lui Bieberbach a fost soluţionată cu succes de L. de Branges [8] în 1985, utilizând metoda lui Loewner şi câteva rezultate fundamentale din teoria funcţiilor speciale.

Henry Shelby Hele-Shaw (1854-1941) a definit celula Hele-Shaw sub forma unui instrument de investigare pentru studiul mişcării unui fluid vâscos incompresibil între două plăci paralele transparente situate la o distanţă suficient de mică. Studiul lui Hele-Shaw a fost continuat de P. Ya. Polubarinova-Kochina [87] şi L.A. Galin [34]. Ei au realizat o formulare conformă a problemei Hele-Shaw în absenţa tensiunii de suprafaţă, aplicând Teorema lui Riemann (a se vedea Teorema 1.1.6) dintr-un domeniu canonic (în general discul unitate) într-un domeniu fază. Alte contribuţii importante în domeniul mişcării de tip Hele-Shaw au fost obţinute de Yu. P. Vinogradov şi P. Kufarev (a se vedea [38]) care au demonstrat existenţa şi unicitatea ecuaţiei Polubarinova-Galin. O abordare interesantă a fost realizată de M. Reissig şi L. von Wolfersdorf [95] în 1993. Saffman şi Taylor [99] au formulat în 1958 prima soluţie stabilă exactă a problemei slab definite.

Problema Hele-Shaw are aplicaţii multiple în diferite domenii ale ştiinţelor naturii şi inginerie, precum: fizică, stiinţa materialelor, medicină, biologie, etc. De exemplu, problema Hele-Shaw reprezintă un model matematic pentru anumite situaţii fizice, precum: creşterea tumorilor care au structura unui mediu poros, distilarea uleiurilor, fabricarea sticlei.

Teoria funcţiilor univalente reprezintă un instrument puternic în studiul diverselor probleme referitoare la evoluţia în timp a frontierei libere a unui fluid vâscos pentru mişcări plane în celule de tip Hele-Shaw, în cazul injecţiei. Menţionăm că evoluţia în timp a domeniilor stelate, în absenţa tensiunii de suprafaţă, a fost studiată de Hohlov, Prokhorov şi Vasil'ev [42]. Cazul în care tensiunea de suprafaţă este diferită de zero rămâne de asemenea valabil şi poate fi consultat în [114] (a se vedea şi [92]). Gustafsson, Prokhorov şi Vasil'ev [37] au demonstrat că în absenţa tensiunii de suprafaţă, momentul "blow-up" (momentul "exploziei") pentru domeniile stelate este ∞. Cazul funcţiilor tare stelate de ordinul $\alpha \in (0, 1]$, în absenţa tensiunii de suprafaţă, a fost studiat de Gustafsson, Prokhorov şi Vasil'ev [37], iar cazul în care tensiunea de suprafaţă nu este zero a fost studiat în [114] (a se vedea şi [38]). În plus, V. M. Entov şi P.I. Etingov [24] au obţinut invarianţa în timp a unor proprietăţi geometrice cu frontieră liberă pentru cazul exterior (domenii nemărginite cu complementul mărginit). Ei au demonstrat că în absenţa tensiunii de suprafaţă, dacă domeniul iniţial are un complement convex, atunci familia domeniilor ocupate de fluid la diferite momente de timp are aceeaşi proprietate, atât timp cât problema Hele-Shaw există (a se vedea şi [38]).

Această teză este structurată pe două părţi. Scopul principal al primei părţi este de a prezenta aplicaţii ale teoriei funcţiilor univalente în studiul unor probleme Hele-Shaw referitoare la invarianţa în timp a unor proprietăţi geometrice cu frontiere libere, în ambele cazuri, când tensiunea de suprafaţă este zero, respectiv diferită de zero. A doua parte a tezei tratează aplicaţii ale teoriei potenţialului pentru sisteme Stokes şi Brinkman în studiul problemelor cu valori pe frontieră asociate pe domenii Lipschitz din spaţiul Euclidian sau de pe varietăţi Riemanniene compacte, cu datele pe frontieră în spaţii L^p sau Sobolev.

Partea I se referă la funcţiile univalente şi problemele Hele-Shaw.

- **Capitolul 1** prezintă definiţii, noţiuni şi rezultate fundamentale referitoare la funcţiile univalente şi problemele Hele-Shaw, care vor fi folosite în capitolele următoare. Toate rezultatele din acest capitol sunt prezentate fără demonstraţii. Prima secţiune conţine idei de bază şi rezultate din teoria funcţiilor univalente, iar a doua secţiune tratează studiul unor subclase de funcţii univalente pe discul unitate. Multe dintre aceste subclase conţin caracterizări analitice şi geometrice. De asemenea, sunt prezentate diferite clase de funcţii univalente pe discul unitate: subclasa S a funcţiilor normate şi univalente, subclasa S^* a lui S a funcţiilor stelate în raport cu originea, subclasa K a lui S formată din funcţiile convexe, etc. Acest capitol nu conţine rezultate originale. Totuşi, menţionăm că noţiunea de Φ-likeness pe exteriorul discului unitate a fost introdusă recent de P. Curt şi D. Fericean [15] (a se vedea Definiţia 1.2.28). De asemenea, noţiunea de tare Φ-likeness de ordinul α a fost introdusă de P. Curt, D. Fericean şi T. Groşan [16] (a se vedea Definiţia 1.2.29). În a treia secţiune prezentăm una dintre cele mai importante tehnici din teoria funcţiilor univalente, bazată pe lanţuri Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner. Ultima secţiune tratează problema Hele-Shaw, câteva aplicaţii practice ale modelului Hele-Shaw în diferite domenii ale ştiinţei şi ingineriei, precum şi ecuaţia Polubarinova-Galin pentru ambele cazuri ale domeniilor mărginite şi ale celor nemărginite cu complementul mărginit, în prezenţa şi în absenţa tensiunii de suprafaţă. Menţionăm că ecuaţia Polubarinova-Galin este analogul ecuaţiei diferenţiale Loewner.

- **Capitolul 2** conţine rezultate originale obţinute în [15], [16] şi [27], referitoare la invarianţa în timp a proprietăţilor de Φ-likeness şi tare Φ-likeness de ordinul $\alpha \in (0, 1]$, în cazul domeniilor mărginite, precum şi cazul domeniilor nemărginite cu complementul mărginit. Prezentăm ambele modele, când tensiunea de suprafaţă este zero, respectiv diferită de zero. Rezultatele prezentate în acest capitol generalizează diferite rezultate datorate lui Hohlov, Prokhorov şi Vasil'ev [42], Vasil'ev şi Markina [114], Vasil'ev [112], [113], Gustafsson şi Vasil'ev [38], Kornev şi Vasil'ev [62].

  Prima secţiune a acestui capitol are la bază rezultatele originale datorate lui P. Curt şi D. Fericean [15], care se referă la evoluţia în timp a frontierei unui fluid în problema Hele-Shaw. Aplicând metode din teoria funcţiilor univalente, demonstrăm invarianţa în timp a proprietăţii de Φ-likeness (o proprietate geometrică ce include stelaritatea şi spiralitatea). Principalele rezultate prezentate în Secţiunea 2.1 sunt Teorema 2.1.1, Corolarul 2.1.2, Teorema 2.1.4, Corolarul 2.1.7, Teorema 2.1.8. Menţionăm că Teorema 2.1.1 este o generalizare a Teoremei 1, [42] (a se vedea şi Teorema 1.4.3) la cazul funcţiilor Φ-like, presupunând absenţa tensiunii de suprafaţă. Teorema 2.1.4 este o generalizare a Teoremei 1, [114] (a se vedea şi Teorema 1.4.4) la cazul funcţiilor Φ-like, presupunând existenţa tensiunii de suprafaţă. În plus, Teorema 2.1.8 este o generalizare a Teoremei 3 [113], iar Teorema 2.1.10 este o generalizare a Teoremei 3.1, [114] (a se vedea şi Teorema 1.4.4).

Secţiunea 2.2 conţine rezultate originale obţinute de D. Fericean [27], respectiv P. Curt, D. Fericean şi T. Groşan [16]. Demonstrăm că proprietatea de tare Φ-likeness de ordinul $\alpha \in (0, 1]$ (o proprietate geometrică care include stelaritatea de ordinul α şi respectiv tare spiralitatea de ordinul α) rămâne invariantă în timp în două cazuri: problema interioară şi problema exterioară, în absenţa tensiunii de suprafaţă (a se vedea [16]). Cazul în care tensiune de suprafaţă este diferită de zero, dar suficient de mică, este de asemenea tratat în Secţiunea 2.2 (a se vedea [27]). Principalele rezultate prezentate în Secţiunea 2.2 sunt Teorema 2.2.1, Corollarul 2.2.3, Teorema 2.2.4, Corolarul 2.2.6, Teorema 2.2.8 şi Teorema 2.2.10.

Secţiunea 2.3 a acestui capitol conţine rezultate referitoare la evoluţia în timp a unui domeniu fluid în absenţa tensiunii de suprafaţă. Exemplele se referă la soluţia frontierei libere în cazul injecţiei, considerând polinoame de gradul 4 şi 5. De asemenea prezentăm câteva rezultate numerice în cazul acestor polinoame, obţinute utilizând programele Matlab şi Mathematica. Menţionăm că Polubarinova-Kochina [87] şi Galin [34] au considerat cazul polinomului de gradul 2. Ei au obţinut soluţia problemei cu frontieră liberă în cazul sucţiunii. Cazul polinomului de gradul 3 a fost studiat de Huntingford [45]. Cazul polinoamelor de gradul 4 a fost studiat în [16], iar a polionoamelor de gradul 5 în [27]. Se obţin rezultate numerice în cazul injecţiei pentru domenii stelate şi convexe (a se vedea [16] şi [27]).

Tehnicile de teoria potenţialului au fost utilizate cu succes în analiza problemelor cu valori pe frontieră pentru ecuaţii eliptice pe domenii Lipschitz. Printre contribuţiile valoaroase din acest domeniu menţionăm acelea referitoare la ecuaţiile Stokes şi Brinkman. Fabes, Kenig şi Verchota [26] au utilizat metode de teoria potenţialului pentru a trata problema L^2-Dirichlet pentru sistemul Stokes pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Fischer, Hsiao şi Wendland [32] au utilizat metode de perturbaţie singulare şi metode de teoria potenţialului pentru a studia probleme care privesc mişcări fluide exterioare tridimensionale lente ale fluidelor vâscoase. Russo [98] s-a referit la problema cu valori pe frontieră asociată sistemului Stokes pe domenii Lipschitz din spaţiul Euclidian şi în diverse spaţii de funcţii. Mitrea şi Wright [79] au utilizat teoria potenţialului pentru a demonstra rezultate de existenţă, unicitate şi dependenţa de date pentru probleme cu valori pe frontieră (probleme de tip Dirichlet, Neumann, Regularitate şi transmisie) asociate sistemului Stokes pe domenii Lipschitz din spaţiul Euclidian şi cu datele pe frontieră în diferite spaţii de funcţii precum spaţii Hardy, Sobolev şi Besov. Kohr, Lanza De Cristoforis şi Wendland [54] au utilizat o analiză a teoriei potenţialului şi teoria gradului Leray-Schauder pentru a demonstra un rezultat de existenţă pentru o problemă neliniară de tip Neumann transmisie pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz mărginite în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, cu datele pe frontieră în spaţii L^p, Sobolev sau Besov.

Diverse probleme cu valori pe frontieră pentru operatori eliptici pe domenii netede sau chiar Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte au fost studiate utilizând teoria potenţialului. Mitrea, Mitrea şi Qiang Shi [73] au arătat existenţa, unicitatea şi dependenţa de date a soluţiilor problemelelor de transmisie pentru ecuaţia Laplace-Beltrami pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte. Recent, Hofmann, Mitrea şi Taylor [41] au studiat probleme eliptice cu valori pe frontieră pe clasa domeniilor NTA (în sensul lui Jerison şi Kenig [46]) cu frontiere regulate Ahlfors şi oscilaţii mici ale normalei, în spaţiul Euclidian, dar şi pe varietăţi Riemanniene compacte, utilizând metode ale teoriei potenţialului. Kohr, Pintea şi Wendland [57] au dezvoltat o analiză a teoriei potenţialului pentru anumiţi operatori matriciali pseudodiferenţiali pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte şi au utilizat această analiză pentru a trata probleme cu valori pe frontieră corespunzătoare.

Partea II conţine patru capitole (Capitolele 3-6) şi tratează aplicaţii ale teoriei potenţialului în studiul problemelor cu valori pe frontieră pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz din spaţiul Euclidian sau de pe varietăţi Riemanniene compacte, cu datele pe frontieră în spaţii L^p sau Sobolev.

- **Capitolul 3** prezintă definiţii, noţiuni şi rezultate care vor fi folosite în elaborarea capitolelor următoare, şi are la bază principalele proprietăţi ale operatorilor potenţiali de simplu şi dublu strat asociaţi ecuaţiilor Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz din spaţiul Euclidian sau de pe varietăţi Riemanniene compacte. Acest capitol nu conţine rezultate originale ale autoarei acestei teze. Secţiunea 3.1 conţine definiţia unui domeniu Lipschitz în $\mathbb{R}^n$ şi spaţii Sobolev asociate domeniilor Lipschitz în $\mathbb{R}^n$. Aceste spaţii joacă un rol semnificativ pe tot parcursul acestei teze. În plus, această secţiune prezintă operatorul urmă şi operatorul de derivare conormală asociat sistemelor Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$, precum şi formulele Green corespunzătoare. Menţionăm că ecuaţia Stokes este o formă liniară a ecuaţiei Navier-Stokes şi descrie mişcarea unui fluid vâscos incompresibil la numere Reynolds neglijabile (pentru mai multe detalii ne referim la [59]). De asemenea, ecuaţia Brinkman descrie mişcarea unui fluid vâscos incompresibil într-un mediu poros, având forma similară cu cea a ecuaţiei Stokes, exceptând un termen de ordinul zero. Secţiunea 3.2 începe cu definiţia operatorului compact şi proprietăţile lui. Această secţiune reprezintă o introducere în teoria a operatorilor pseudodiferenţiali pe $\mathbb{R}^n$, cu o atenţie specială pentru operatorii eliptici şi sistemele eliptice în sens Agmon-Douglis-Nirenberg pe $\mathbb{R}^n$. În Secţiunea 3.3 descriem clasa operatorilor pseudodiferenţiali pe varietăţi Riemanniene compacte şi proprietăţi fundamentale ale acestor operatori. Ne referim de asemenea la operatori pseudodiferenţiali eliptici şi sisteme eliptice în sens Agmon-Douglis-Nirenberg pe varietăţi Riemanniene compacte. A patra secţiune este dedicată operatorilor Fredholm şi proprietăţilor fundamentale ale acestora pe spaţii Banach, iar Secţiunea 3.5 conţine rezultate importante din teoria potenţialului pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Unul dintre acestea se referă la proprietatea de compactitate a operatorilor complementari asociaţi. Acesta a fost obţinut de Kohr, Lanza de Cristoforis şi Wendland în [54]. De asemenea, prezentăm rezultate de inversabilitate a unor operatori din teoria potenţialului pentru sistemul Stokes pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$, obţinute de Mitrea şi Wright [79]. În ultima secţiune prezentăm proprietăţi din teoria potenţialului pentru operatorii pseudodiferenţiali Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte.

- **Capitolul 4** conţine rezultate originale ale autoarei acestei teze referitoare la studiul problemelor cu valori pe frontieră de tip Dirichlet-transmisie pentru ecuaţiile Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, cu datele pe frontieră din spaţii L^p sau Sobolev. Aceste rezultate au fost obţinute recent de D. Fericean şi W.L. Wendland [31]. Acest capitol este structurat pe patru secţiuni.

  În prima secţiune formulăm problema Dirichlet-transmisie (4.1.1), iar în cea de-a doua secţiune prezentăm rezultatul de unicitate pentru această problemă. În secţiunea următoare obţinem un rezultat de existenţă pentru problema Dirichlet transmisie. Pentru a demonstra acest rezultat utilizăm teoria potenţialului pentru ecuaţiile Stokes şi Brinkman, deci o metodă a aceastei teorii, care reduce problema la o ecuaţie matricială unic rezolvabilă. În ultima secţiune analizăm două cazuri speciale. Primul caz se referă la o mişcare exterioară tridimensională de tip Stokes în prezenţa un corp poros care conţine un obstacol solid, când permeabilitatea corespunzătoare este mare. De asemenea, se obţin rezultate asimptotice pentru câmpul viteză al mişcării fluide în interiorul corpului poros, precum şi pentru forţa exercitată asupra corpului poros. Al doilea caz se referă la o mişcare similară de tip Stokes, dar în ipoteza permeabilităţii mici a mediului poros. Noutatea studiului nostru este dată de faptul că condiţiile de transmisie în (4.1.1) sunt exprimate în termenii unui parametru $\mu \in (0, 1]$, iar datele pe frontieră sunt alese în diverse spaţii de funcţii, precum spaţiile Sobolev sau L^p, cu p într-o vecinătate a lui 2. Pentru $n = 3$ şi $\mu = 1$, această problemă cu valori pe frontieră descrie o mişcare exterioară de tip Stokes peste o particulă poroasă care conţine un corp solid, toate domeniile implicate fiind Lipschitz. O problemă similară, dar într-o situaţie mai particulară a fost analizată în [103]. Principalele rezultate prezentate în acest capitol sunt Teorema 4.2.1, care prezintă unicitatea soluţiei pentru problema Dirichlet transmisie (4.1.1), Teorema 4.3.1 şi Teorema 4.3.2, care prezintă rezultatul de existenţă pentru problema Dirichlet transmisie în spaţii Sobolev sau L^p, în fiecare din cazurile $\mu \in (0,1)$ şi $\mu = 1$, precum şi rezultate de existenţă şi unicitate pentru probleme cu valori pe frontieră care apar în analiza asimptotică a unor cazuri speciale prezentate în Secţiunea 4.4.

Problemele de transmisie pentru operatorii pseudodiferenţiali Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte au fost studiate de Kohr, Pintea şi Wendland [57], utilizând teoria potenţialului. Russo şi Tartaglione [97] au analizat problema Robin pentru ecuaţiile Navier-Stokes într-un domeniu exterior $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ de clasă C^1. Ei au arătat că dacă datele pe frontieră aparţin spaţiului $L^q(\partial\Omega)$, $q > \frac{3}{2}$, atunci problema are o soluţie care converge la un vector constant la infinit şi ia valorile menţionate pe frontiera $\partial\Omega$ în sensul convergenţei netangenţiale. Angot [4] a utilizat o analiză asimptotică pentru a demonstra că problema Stokes/Brinkman cu condiţii de interfaţă de tip Ochoa-Tapya şi Whitaker, care descrie mişcarea unui fluid vâscos în prezenţa unui mediu poros, este bine pusă. Alazmi şi Vafai [3] au analizat diferite tipuri de condiţii de interfaţă dintre un mediu poros şi unul fluid, incluzând condiţii de tip Ochoa-Tapya şi Whitaker (5.0.1).

- **Capitolul 5** este dedicat studiului unor probleme cu valori pe frontieră de tip Robin-transmisie pentru sisteme Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, când datele pe frontieră aparţin unor spaţii Sobolev sau L^p. Acest capitol se bazează pe rezultatele originale obţinute de D. Fericean et al. în [30], [29] şi este structurat în două secţiuni. În prima secţiune utilizăm o metodă de teoria potenţialului pentru a demonstra rezultatul de existenţă pentru o problemă cu valori pe frontieră de tip Robin-transmisie pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz Euclidiene, cu date pe frontieră în spaţii Sobolev sau L^p. Problema este formulată în trei domenii Lipschitz adiacente, cu condiţii la infinit şi condiţii de transmisie pe interfaţa dintre domenii. Una dintre ele este o condiţie de tip Robin-transmisie şi este formulată în termenii unui operator matricial de multiplicare nenegativ P cu coeficienţi din L^∞. Importanţa studiului nostru este dată de faptul că pentru a anumită alegere a acestui operator obţinem condiţiile de salt pe interfaţă (5.1.13) datorate lui Ochoa-Tapia şi Whitaker [84], [85]. Acestea sunt condiţiile fizice relevante de transmisie care apar pe interfaţa dintre un mediu fluid şi un mediu poros, când mişcarea în mediul poros este guvernată de ecuaţia Brinkman (pentru detalii, a se vedea, de exemplu, [90]). Într-adevăr, ca un caz particular, considerăm problema cu valori pe frontieră care descrie o mişcare de tip Stokes a unui fluid vâscos incompresibil peste două sfere poroase, una dintre ele fiind încorporată în cealaltă, când condiţiile de salt (5.1.13) sunt impuse la interfaţa dintre mediul fluid şi cel poros. Soluţia acestei probleme este determinată explicit împreună cu liniile de curent ale mişcării. Principalele rezultate din în Secţiunea 5.1 sunt incluse în Teorema 5.1.1, care menţionează existenţa soluţiei problemei de interfaţă de tip Robin-transmisie (5.1.2), când datele de pe frontieră aparţin spaţiului Sobolev $\mathcal{X}_\nu$ dat în (5.1.3), şi Teorema 5.1.2, care precizează existenţa soluţiei problemei de interfaţă (5.1.9), când datele pe frontieră aparţin spaţiului $\mathfrak{X}_{\nu;p}$ dat de (5.1.8), unde $p \in \left(\max\left\{1, \frac{2(n-1)}{n+1} - \varepsilon\right\}, 2+\varepsilon\right)$, $n \geq 3$, pentru un anumit parametru $\varepsilon > 0$.

  A doua secţiune a acestui capitol se referă la analiza printr-o metodă din teoria potenţialului a unei probleme cu valori pe frontieră, cu condiţii de tip Dirichlet şi Robin - transmisie, pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. În particular, considerăm mişcarea exterioară de tip Stokes a unui fluid vâscos incompresibil în prezenţa unei sfere poroase care conţine un corp solid în interior, când condiţiile de salt ale lui Ochoa-Tapia şi Whitaker [84], [85] sunt impuse la interfaţa dintre mediul fluid-poros.

Analiza problemelor cu valori pe frontieră pentru ecuaţiile Stokes şi Brinkman pe varietăţi au un rol important, datorită numeroaselor aplicaţii practice ale acestor probleme. Printre contribuţii valoroase în acest domeniu menţionăm faptul că Ebin şi Marsden [23] au studiat mişcările fluide pe suprafeţe, Temam şi Ziane [109] au analizat ecuaţiile Navier-Stokes pe domenii sferice subţiri. Analiza problemelor cu valori pe frontieră pe suprafeţe compacte, în particular pe sfera $\mathfrak{S}^2$, este motivată de mişcările fluide vâscose incompresibile prin solul poros sau prin roci poroase de pe Pământ. Kohr, Pintea şi Wendland [56], [57] au utilizat metode ale teoriei potenţialului în studiul unor probleme cu valori pe frontieră pentru operatori pseudodiferenţiali Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte, cu date pe frontieră în spaţii L^p sau Sobolev.

- **Capitolul 6** conţine rezultate originale ale autoarei acestei teze prezentate în [28] şi este consacrat unei analize printr-o metodă din teoria potenţialului pentru o problemă cu valori pe frontieră de tip Neumann asociată sistemului Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte, cu date pe frontieră în anumite spaţii Sobolev. Acest capitol este structurat pe trei secţiuni. În prima secţiune formulăm problema de tip Neumann (6.1.1), iar în cea de-a doua secţiune prezentăm rezultatul de unicitate a acestei probleme. În cea de-a treia secţiune obţinem rezultatul de existenţă pentru problema Neumann studiată. Principalele rezultate ale acestui capitol sunt incluse în Teorema 6.2.1, referitoare la unicitatea soluţiei problemei cu valori pe frontieră (6.1.1), şi Teorema 6.3.1, care prezintă proprietatea de existenţă şi unicitate a soluţiei (până la o constantă aditivă pentru presiune) problemei (6.1.1), când datele pe frontieră aparţin unor spaţii L^2-Sobolev arbitrare.

Rezultatele originale prezentate în această teză au la bază următoarele lucrări:

- P. Curt, **D. Fericean**, *A special class of univalent functions in Hele-Shaw flow problems*, Abstract and Applied Analysis (**ISI**), Volume 2011, Article ID 948236, 10 pages; doi:10.1155/2011/948236.

- P. Curt, **D. Fericean**, T. Groşan, *Φ-like functions in two dimensional free boundary problems*, Mathematica (Cluj), **53 (76)** (2011), 121-130.

- **D. Fericean**, *Strongly Φ-like functions of order α in two-dimensional free boundary problems*, Appl. Math. Comput. (**ISI**), **218** (2012), 7856-7863.

- **D. Fericean**, *Layer potential analysis of a Neumann problem for the Brinkman system*, Mathematica (Cluj), to appear.

- **D. Fericean**, *Boundary value problems with Dirichlet and Robin-transmission conditions. Well-posedness results*, in preparation.

- **D. Fericean**, T. Groşan, M. Kohr, W.L. Wendland, *Interface boundary value problems of Robin-transmission type for the Stokes and Brinkman systems on n-dimensional Lipschitz domains: applications*, Math. Meth. Appl. Sci. (**ISI**), to appear.

- **D. Fericean**, W.L. Wendland, *Layer potential analysis for a Dirichlet-transmission problem in Lipschitz domains in $\mathbb{R}^n$*, submitted.

Cuvinte cheie

Mişcare fluidă Hele-Shaw, problemă cu frontieră liberă, ecuaţia Polubarinova-Galin, funcţie univalentă, funcţie Φ-like, domeniu Lipschitz, sistemul Stokes, sistemul Brinkman, operator Fredholm, teoria potenţialului, varietate Riemanniană compactă, problemă de transmisie.

Partea I

Funcţii univalente şi proprietăţi ale mişcărilor fluide de tip Hele-Shaw

Capitolul 1

Rezultate generale referitoare la funcţii univalente şi mişcări fluide de tip Hele-Shaw

În acest capitol prezentăm definiţii, noţiuni şi rezultate fundamentale referitoare la funcţii univalente şi probleme Hele-Shaw, care vor fi folosite în capitolele următoare.

Prima secţiune conţine rezultate de bază referitoare la funcţiile olomorfe şi univalente, în timp ce a doua secţiune conţine anumite rezultate referitoare la subclase speciale de funcţii univalente care pot fi caracterizate de condiţii geometrice şi analitice. De asemenea, sunt prezentate rezultate generale din teoria funcţiilor univalente, condiţii suficiente de univalenţă pentru funcţii olomorfe pe domenii din $\mathbb{C}$, precum şi exemple de funcţii univalente. Un rol important este jucat de bine cunoscuta teoremă a lui Riemann referitoare la conform echivalenţa domeniilor simplu conexe din $\mathbb{C}$. De asemenea, sunt menţionate diverse clase de funcţii univalente pe discul unitate: clasa S a funcţiilor normate şi univalente, clasa S^* a funcţiilor normate şi stelate pe discul unitate U, clasa K a funcţiilor normate şi convexe pe U, clasa $\mathcal{C}$ a funcţiilor normate şi aproape convexe, clasa M_α a funcţiilor α convexe, clasa $\hat{S}_\gamma$ a funcţiilor spiralate de tipul γ şi clasa funcţiilor Φ-like. În secţiunea trei sunt prezentate rezultate fundamentale din teoria lanţurilor Loewner, precum şi ecuaţia diferenţială Loewner. Ultima secţiune se referă la problema Hele-Shaw, modelul Stokes-Leibenzon şi ecuaţia Polubarinova-Galin. Toate rezultatele sunt prezentate fără demonstraţii. Acest capitol nu conţine rezultate originale. Noţiunea de Φ-likeness în exteriorul discului unitate a fost recent introdusă de P. Curt şi D. Fericean [15] (a se vedea Definiţia 1.2.28). De asemenea, noţiunea de tare Φ-likeness de ordinul α a fost introdusă de P. Curt, D. Fericean şi T. Groşan [16] (a se vedea Definiţia 1.2.29).

Menţionăm că principalele surse bibliografice utilizate în pregătirea acestui capitol sunt [22], [35], [37], [38], [39], [53], [81], [88] şi [114].

1.1 Rezultate preliminarii

Această secţiune prezintă idei de bază şi rezultate din teoria funcţiilor univalente. Aceste rezultate vor fi utilizate în secţiunile următoare. Pentru mai multe detalii a se vedea [22], [35], [39], [53] şi [88], surse de bază utilizate în pregătirea acestei secţiuni.

Notaţii

În continuare vom prezenta câteva notaţii utilizate în capitolele următoare.

- $\mathbb{C}$ reprezintă planul complex;
- $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ reprezintă planul complex extins;

- $\mathcal{H}(D)$ reprezintă mulţimea funcţiilor olomorfe definite pe o mulţime deschisă $D \subseteq \mathbb{C}$ cu valori în $\mathbb{C}$;
- $U = U(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ reprezintă discul unitate;
- $U^- = \{z : |z| > 1\}$ reprezintă exteriorul discului unitate;
- $U_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ reprezintă dicul cu centrul în origine şi de rază r;
- $U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ reprezintă discul cu centrul în z_0 şi de rază r.

Definiţia 1.1.1 Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \to \mathbb{C}$. Spunem că f este *univalentă* dacă f este olomorfă şi injectivă pe D.
Notăm cu $\mathcal{H}_u(D)$ mulţimea funcţiilor univalente pe D.

Următorul rezultat prezintă o condiţie necesară de univalenţă.

Teorema 1.1.2 **[39]** *Fie D un domeniu din $\mathbb{C}$ şi $f \in \mathcal{H}_u(D)$. Atunci $f'(z) \neq 0$ pentru $z \in D$.*

Rezultatul precedent prezintă o condiţie necesară dar nu şi suficientă de univalenţă globală pentru funcţii olomorfe. Într-adevăr, funcţia $f(z) = e^z$ este local univalentă pe $\mathbb{C}$ ($f'(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$), dar f nu este univalentă pe întreg planul complex.

Rezultatele următoare se referă la condiţii suficiente de univalenţă pentru funcţii olomorfe. Teorema 1.1.3 a fost obţinută de Alexander, Noshiro, Warschawski şi Wolff (a se vedea [81], [35]).

Teorema 1.1.3 *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu convex şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Dacă $\operatorname{Re} f'(z) > 0$, $z \in D$, atunci f este univalentă pe D.*

Următorul rezultat datorat lui Ozaki şi Kaplan [50] este o generalizare a Teoremei 1.1.3. Dacă D este un domeniu convex şi $g(z) \equiv z$ în Teorema 1.1.4, obţinem Teorema 1.1.3.

Teorema 1.1.4 (**[50]**) *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f, g \in \mathcal{H}(D)$ astfel încât $g \in \mathcal{H}_u(D)$ şi $g(D)$ este un domeniu convex. Dacă $\operatorname{Re}\left[\dfrac{f'(z)}{g'(z)}\right] > 0$, $z \in D$, atunci f este univalentă pe D.*

De asemenea, reamintim că o funcţie local univalentă este conformă, adică conservă unghiurile şi orientarea. Aceasta conduce la noţiunea de conform echivalenţă. În continuare vom prezenta două rezultate fundamentale referitoare la această noţiune (a se vedea [22], [39], [53], [88]).

Definiţia 1.1.5 (**[39]**) Fie D_1 şi D_2 două domenii din $\mathbb{C}$. Funcţia $f : D_1 \to D_2$ se numeşte *reprezentare conformă* a lui D_1 pe D_2 dacă f este univalentă pe D_1 şi $f(D_1) = D_2$. În acest caz domeniile D_1 şi D_2 se numesc *conform echivalente*. Dacă f este o reprezentare conformă a unui domeniu $D \subseteq \mathbb{C}$ pe el însuşi, atunci f se numeşte *automorfism (automorfism conform)* al lui D.

Unul dintre cele mai importante rezultate din teoria funcţiilor univalente este *teorema lui Riemann* referitoare la conform echivalenţa domeniilor simplu conexe din $\mathbb{C}$. Pentru aplicaţii diverse ale acestui rezultat fundamental, a se consulta [96].

Teorema 1.1.6 (**[35], [39]**) *Fie D un domeniu simplu conex din $\mathbb{C}$ astfel încât $D \neq \mathbb{C}$. Atunci D şi discul unitate U sunt conform echivalente. În plus, dacă $\eta \in D$ este un punct dat, atunci există o unică reprezentare conformă f a lui D pe U astfel încât $f(\eta) = 0$ şi $f'(\eta) > 0$.*

Corolarul 1.1.7 **[39]** *Orice două domenii simplu conexe D_1, D_2 din $\mathbb{C}$, $D_j \neq \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, sunt conform echivalente.*

1.2 Subclase de funcţii univalente pe U

Această secţiune se referă la studiul unor subclase de funcţii univalente pe discul unitate. Multe dintre aceste subclase pot fi caracterizate atât geometric cât şi analitic. În continuare ne referim la clasa S a funcţiilor normate şi univalente pe U, subclasa S^* a lui S a funcţiilor stelate în raport cu originea, subclasa K a lui S a funcţiilor convexe, subclasa $\mathcal{C}$ a lui S a funcţiilor aproape convexe. De asemenea, prezentăm clasa M_α a funcţiilor α convexe (funcţiile lui Mocanu), clasa $\hat{S}_\gamma$ a funcţiilor spiralate de tipul γ, precum şi clasa funcţiilor Φ-like pe U. În plus, reamintim definiţiile acestor subclase, precum şi unele proprietăti de bază ale acestor subclase de funcţii univalente. Motivaţia studiului acestor subclase de funcţii se bazează pe faptul că ultima secţiune a acestui capitol tratează următoarea problemă: determinarea evoluţiei în timp a frontierei unui fluid pentru o problemă de tip Hele-Shaw în cazul injecţiei (a se vedea [38]). Este cunoscut faptul că noţiunile de stelaritate, tare stelaritate de ordinul α, convexitate într-o direcţie, se conservă în timp atât pentru domenii interioare, cât şi pentru domenii exterioare (a se vedea [38]).

Principalele surse bibliografice utilizate în această secţiune sunt [22], [35], [80], [81], [88].

1.2.1 Clasele S şi Σ

În continuare prezentăm clasa S a funcţiilor f univalente pe U care sunt normate cu condiţiile $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$ (a se vedea [22] şi [88]). Prin urmare,

$$S = \{f \in \mathcal{H}_u(U) : f(0) = f'(0) - 1 = 0\}. \tag{1.2.1}$$

Fie Σ clasa funcţiilor φ univalente pe U^- date de

$$\varphi(z) = z + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{z^n}, \quad |z| > 1,$$

astfel încât aceste funcţii au un pol simplu la ∞ (a se vedea [22] şi [88]). Clasa Σ joacă un rol important în studiul unor proprietăţi ale clasei S (a se vedea [22] şi [88]).

Observaţia 1.2.1 (i) Dacă $f \in S$ şi $g(\zeta) = \dfrac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$, $\zeta \in U^-$, atunci funcţia g aparţine clasei Σ şi $g(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in U^-$ (a se vedea [81]).

(ii) Dacă $g \in \Sigma$ şi $g(\zeta) \neq 0,\ \zeta \in U^-$, atunci funcţia f aparţine clasei S, unde $f(z) = \dfrac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$, $0 < |z| < 1$, şi $f(0) = 0$ (a se vedea [81]).

Următorul rezultat, cunoscut sub numele de *Teorema Ariei*, a fost obţinut de Gronwall în 1914 şi reprezintă un rezultat fundamental în studiul proprietăţilor elementare ale claselor S şi Σ.

Teorema 1.2.2 **[39]** *Dacă* $g \in \Sigma$ *este dat de* $g(z) = z + a_0 + \dfrac{a_1}{z} + ... + \dfrac{a_n}{z^n} + ...$, $|z| > 1$, *atunci* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leq 1.$

Utilizând teorema ariei, Bieberbach [6] a demonstrat în 1916 estimarea exactă a coeficientului a_2 pentru funcţiile din clasa S, $|a_2| \leq 2$. Acest rezultat a fost utilizat la obţinerea unor rezultate clasice referitoare la clasa S, precum teoremele de acoperire şi deformare pentru clasa S (a se vedea [22], [88]). Aceste rezultate fundamentale relative la clasa S au fost obţinute de Koebe (1907) şi Bieberbach [6] (pentru detalii, a se vedea [22], [35] şi [88]).

Teorema 1.2.3 **[6]** *Dacă $f \in S$ este dată de $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $z \in U$, atunci $|a_2| \leq 2$. Egalitatea $|a_2| = 2$ are loc dacă şi numai dacă $f = k_\theta$ pentru $\theta \in \mathbb{R}$.*

Bieberbach [6] a formulat următoarea conjectură:

Conjectura lui Bieberbach: *Dacă $f \in S$ şi $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $z \in U$, atunci $|a_n| \leq n$, $n \geq 2$. Egalitatea $|a_n| = n$ pentru $n \geq 2$ are loc dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei Koebe.*

În continuare, reamintim teoremele de deformare şi acoperire pentru clasa S. Pentru mai multe detalii, a se vedea [22], [88].

Teorema 1.2.4 (**[6]**; a se vedea şi **[22], [88]**) *Dacă $f \in S$ atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(i) $\dfrac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \dfrac{|z|}{(1-|z|)^2}$, $z \in U$,

(ii) $\dfrac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \dfrac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$, $z \in U$,

(iii) $\dfrac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$, $z \in U$.

Egalitatea are loc în fiecare din relaţiile de mai sus pentru un punct $z \neq 0$ dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei Koebe.

Având în vedere rezultatele precedente, precum şi teorema lui Hurwitz pentru funcţii univalente, obţinem un rezultat de compactitate referitor la clasa S.

Corolarul 1.2.5 **[81]** *Clasa S este compactă.*

1.2.2 Clasa S^* a funcţiilor stelate

În această secţiune prezentăm clasa S^* a funcţiilor normate şi stelate pe discul unitate şi reamintim câteva rezultate importante referitoare la această clasă, estimarea coeficienţilor, rezultatele de acoperire şi deformare. Pentru detalii, a se vedea [22], [81], [88].

Definiţia 1.2.6 **[81]** Fie $f \in \mathcal{H}(U)$ astfel încât $f(0) = 0$. Funcţia f se numeşte *stelată* dacă f este univalentă pe U, $f(0) = 0$ şi $f(U)$ este un domeniu stelat în raport cu originea.

Un domeniu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ este stelat în raport cu $z_0 \in \Omega$ dacă segmentul închis dintre z_0 şi z este conţinut în Ω, pentru orice $z \in \Omega$.

Următorul rezultat se referă la caracterizarea analitică a stelarităţii (a se vedea [22], [35], [81] şi [88]):

Teorema 1.2.7 (caracterizarea analitică a stelarităţii) *Fie $f \in \mathcal{H}(U)$ astfel încât $f(0) = 0$. Atunci f este stelată dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \quad z \in U. \tag{1.2.2}$$

Notăm cu S^* clasa funcţiilor normate şi stelate pe U. Astfel,

$$S^* = \{f : U \to \mathbb{C} : \ f \text{ stelată}, \ f(0) = f'(0) - 1 = 0\ \}.$$

Obţinem că $S^* \subset S$. De asemenea, funcţia Koebe şi orice rotaţie a sa aparţin lui S^*.

Teorema 1.2.8 (**[66]**) *Dacă funcţia $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots$ aparţine clasei S^* atunci $|a_n| \leq n$, $n \geq 2$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei Koebe.*

Definiţia 1.2.9 **[88]** Fie $F(\zeta) = a\zeta + a_0 + \dfrac{a_{-1}}{\zeta} + \ldots$, $|\zeta| > 1$, unde $a \neq 0$. Funcţia F este *stelată* pe U^- dacă F este univalentă pe U^- şi mulţimea $E = \mathbb{C} \setminus F(U^-)$ este stelată în raport cu $0 \in E$.

Observaţia 1.2.10 **[88]** Fie F o funcţie olomorfă pe $U^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ astfel încât $F(\zeta) = a\zeta + a_0 + \dfrac{a_{-1}}{\zeta} + \ldots$, $|\zeta| > 1$, unde $a \neq 0$. Atunci F este stelată pe U^- dacă şi numai dacă (a se vedea [88])

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right] > 0, \quad |\zeta| > 1.$$

Este natural să considerăm următoarea subclasă a clasei funcţiilor stelate, formată din funcţiile tare stelate de ordinul $\alpha \in (0, 1]$ (a se vedea [81]):

Definiţia 1.2.11 Fie f o funcţie olomorfă pe discul unitate U astfel încât $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ şi fie $\alpha \in (0, 1]$. Funcţia f se numeşte *tare stelată de ordinul α pe U* dacă

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad z \in U. \tag{1.2.3}$$

În acest caz, $f(U)$ se numeşte *domeniu tare stelat de ordinul α.*

Fie $\hat{S}^*(\alpha)$ clasa funcţiilor tare stelate de ordinul α pe U.

Noţiunea de tare stelaritate de ordinul α va fi folosită în secţiunea următoare.

1.2.3 Clasa K a funcţiilor convexe

Noţiunea de convexitate a fost introdusă de E. Study (1913). Studiul său a fost continuat de T. Gronwall şi K. Loewner [66]. Această secţiune conţine definiţia clasei K a funcţiilor convexe şi normate pe discul unitate, teorema lui Alexander referitoare la legătura dintre clasele S^* şi K, estimarea coeficienţilor pentru funcţiile din clasa K, precum şi teorema de deformare a clasei K. Pentru mai multe detalii, a se vedea [22], [35], [81], [88]).

Definiţia 1.2.12 **[81]** Fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Funcţia f se numeşte *convexă* dacă f este univalentă pe U şi $f(U)$ este un domeniu convex.

Următorul rezultat referitor la caracterizarea analitică a convexităţii pe discul unitate este util în multe aplicaţii referitoare la funcţiile convexe pe U (a se vedea [22], [81], [88]):

Teorema 1.2.13 (caracterizarea analitică a convexităţii). *Fie $f \in \mathcal{H}(U)$. Atunci funcţia f este convexă dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \quad z \in U.$$

Fie K o submulţime a lui S constând în funcţiile convexe. Atunci $K \subset S^* \subset S$. De asemenea, este evident că funcţia Koebe $k : U \to \mathbb{C}$, $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$, aparţine lui S^* dar nu este în K.

Utilizând Teoremele 1.2.7 şi 1.2.13, obţinem următoarea conexiune dintre clasele S^* şi K, cunoscută sub numele de Teorema de dualitate a lui Alexander (a se vedea [81]):

Teorema 1.2.14 **[81]** *Fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă astfel încât $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$. Atunci $f \in K$ dacă şi numai dacă $F \in S^*$, unde $F(z) = zf'(z)$, $z \in U$.*

De asemenea, menţionăm următoarea teoremă de acoperire pentru clasa K (a se vedea [81]).

Teorema 1.2.15 *Dacă $f \in K$, atunci $f(U) \supseteq U\left(0, \frac{1}{2}\right)$.*

Următoarea estimare exactă a coeficienţilor areloc pentru clasa K:

Teorema 1.2.16 [66] *Dacă funcţia $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots$ aparţine clasei K, atunci $|a_n| \leq 1$, $n = 2, 3, \ldots$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă f are forma*

$$f(z) = \frac{z}{1 + e^{i\theta}z}, \quad z \in U, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

În final, menţionăm noţiunea de convexitate în exteriorul discului unitate.

Definiţia 1.2.17 [88] Fie $F(\zeta) = a\zeta + a_0 + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \ldots$, $|\zeta| > 1$, unde $a \neq 0$. Funcţia F se numeşte *convexă* pe U^- dacă F este univalentă pe U^- iar mulţimea $E = \mathbb{C} \setminus F(U^-)$ este convexă.

Observaţia 1.2.18 [88] Fie F o funcţie olomorfă pe $U^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ astfel încât $F(\zeta) = a\zeta + a_0 + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \ldots$, $|\zeta| > 1$, unde $a \neq 0$. Atunci F este convexă pe U^- dacă şi numai dacă

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{\zeta F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right] > 0, \quad |\zeta| > 1.$$

1.2.4 Clasa $\mathcal{C}$ a funcţiilor aproape convexe

Noţiunea următoare de aproape convexitate a fost introdusă de Kaplan:

Definiţia 1.2.19 [50] Fie $f \in \mathcal{H}(U)$. Funcţia f se numeşte *aproape convexă* dacă există o funcţie g convexă pe U astfel încât

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f'(z)}{g'(z)}\right] > 0, \ z \in U. \tag{1.2.4}$$

Din Teorema 1.1.4 rezultă că orice funcţie aproape convexă este univalentă pe U.

1.2.5 Clasa M_α a funcţiilor α-convexe

Noţiunea de α-convexitate a fost introdusă de P.T. Mocanu [80] în 1969. Această noţiune furnizează o trecere continuă între stelaritate şi convexitate, prin schimbarea parametrului α. Prezentăm definiţia α-convexităţii pe discul unitate, precum şi proprietăţi de bază ale funcţiilor α-convexe. Principalele surse bibliografice utilizate în această subsecţiune sunt [35], [80], [81].

Definiţia 1.2.20 [80] Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie normată şi olomorfă. Funcţia f se numeşte *α-convexă* dacă

$$\mathrm{Re}\left[(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right)\right] > 0, \ z \in U. \tag{1.2.5}$$

Fie M_α clasa funcţiilor α-convexe. Atunci $M_0 = S^*$ şi $M_1 = K$.

În continuare prezentăm rezultate de bază legate de funcţiile α-convexe. Pentru mai multe detalii, a se vedea [35] şi [81]. Din primul rezultat se deduce că orice funcţie α-convexă este stelată, pentru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.2.21 (**[80]**, **[81]**) *Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $M_\alpha \subseteq S^*$. În plus, $M_\beta \subseteq M_\alpha$, pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \frac{\alpha}{\beta} < 1$.*

Pentru $\alpha \geq 0$, obţinem următorul rezultat referitor la dualitatea dintre clasele S^* şi M_α.

Teorema 1.2.22 (**[80]**, **[81]**) *Fie $\alpha \geq 0$. Atunci $f \in M_\alpha$ dacă şi numai dacă funcţia g definită prin*

$$g(z) = f(z)\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^\alpha, \quad z \in U,$$

aparţine clasei S^*. Ramura olomorfă a funcţiei putere este aleasă astfel încât

$$\left.\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^\alpha\right|_{z=0} = 1.$$

1.2.6 Clasa $\hat{S}_\gamma$ a funcţiilor spiralate de tipul γ

Această secţiune este dedicată unei alte subclase speciale de funcţii univalente şi anume subclasa funcţiilor spiralate, care a fost introdusă de Špaček în 1933. În această subsecţiune prezentăm definiţia domeniului spiralat de tipul γ, definiţia funcţiei spiralate de tipul γ, o condiţie necesară şi suficientă de spiralitate de tipul γ în discul unitate, o teoremă de dualitate dintre clasa funcţiilor stelate şi clasa funcţiilor spiralate de tipul γ, precum şi un exemplu de funcţie spiralată de tipul γ.

Noţiunea de spiralitate de tipul γ a fost introdusă de Špaček (a se vedea [22]).

Definiţia 1.2.23 **[81]** Dacă $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, γ-spirala logaritmică este o curbă dată de

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-(\cos\gamma - i\sin\gamma)t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $\omega_0 \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Un domeniu $D \subset \mathbb{C}$, care conţine originea, se numeşte *spiralat de tipul* γ, unde $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, dacă pentru fiecare $\omega_0 \in D \setminus \{0\}$, arcul de γ-spirală ce uneşte punctul ω_0 cu originea este inclus în D.

Definiţia 1.2.24 **[81]** (1) Fie $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $f \in \mathcal{H}(U)$ astfel încât $f(0) = 0$. Funcţia f este *spiralată de tipul* γ dacă f este univalentă pe U iar domeniul $f(U)$ este spiralat de tipul γ.
(2) Fie $f \in \mathcal{H}(U)$ astfel încât $f(0) = 0$. Spunem că f este *spiralată* dacă există $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât f este spiralată de tipul γ.

Fie $\gamma \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $\hat{S}_\gamma$ clasa funcţiilor notmate şi spiralate de tipul γ:

$$\hat{S}_\gamma = \left\{ f \in \mathcal{H}(U) : \ f(0) = f'(0) - 1 = 0, \ \mathrm{Re}\left[e^{i\gamma}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, z \in U \right\}.$$

Utilizând caracterizarea analitică a spiralităţii, putem prezenta următorul rezultat, referitor la conexiunea dintre clasele S^* şi $\hat{S}_\gamma$ (a se vedea [35], [81]).

Teorema 1.2.25 *Fie $\gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât $-\dfrac{\pi}{2} < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$. De asemenea, fie $f \in \mathcal{H}(U)$ o funcţie normată. Atunci $f \in \hat{S}_\gamma$ dacă şi numai dacă $g \in S^*$, unde $g(z) = z\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{1+i\,\mathrm{tg}\,\gamma}$.*

1.2.7 Clasa funcţiilor Φ-like

Această secţiune este dedicată funcţiilor Φ-like pe discul unitate. În acest sens, prezentăm legătura dintre noţiunile de Φ-likeness şi univalenţă.

Noţiunea de "Φ-like" a fost introdusă de L. Brickman [9] în 1973, ca o generalizare a stelarităţii şi spiralităţii. Pentru mai multe detalii, a se vedea [9].

Definiţia 1.2.26 **[9]** Fie f o funcţie olomorfă pe U astfel încât $f(0) = 0$ şi $f'(0) \neq 0$. Fie Φ o funcţie olomorfă pe $f(U)$ astfel încât $\Phi(0) = 0$ şi $\operatorname{Re}\Phi'(0) > 0$. Atunci f este Φ-*like pe* U (sau Φ-*like*) dacă

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{\Phi(f(z))}\right] > 0, \quad z \in U. \tag{1.2.6}$$

Următorul rezultat, datorat lui Brickman (a se vedea [9], [35]), arată că orice funcţie Φ-like este univalentă pe U, şi reciproc, orice funcţie univalentă pe U este Φ-like pentru unele valori ale lui Φ.

Teorema 1.2.27 **[9]** *Următoarele afirmaţii au loc:*
(i) *Dacă f este Φ-like, atunci $f \in \mathcal{H}_u(U)$.*
(ii) *Dacă $f \in \mathcal{H}_u(U)$, atunci există o funcţie $\Phi \in \mathcal{H}(f(U))$ astfel încât $\Phi(0) = 0$, $\operatorname{Re}\Phi'(0) > 0$, iar f este Φ-like.*

Noţiunea de "Φ-like" poate fi definită nu numai pe discul unitate ci şi pe exteriorul discului unitate. Această noţiune a fost introdusă pe exteriorul discului unitate de P. Curt and D. Fericean [15], astfel:

Definiţia 1.2.28 **[15]** Fie F o funcţie olomorfă pe $U^- = \{\zeta \mid |\zeta| > 1\}$ astfel încât $F(\zeta) = a\zeta + a_0 + \dfrac{a_{-1}}{\zeta} + \ldots$, unde $a \neq 0$. Fie $\tilde{\Phi}$ o funcţie olomorfă pe $F(U^-)$ astfel încât $\lim\limits_{\zeta\to\infty} \tilde{\Phi}(\zeta) = \infty$ şi $\lim\limits_{\zeta\to\infty} \tilde{\Phi}'(\zeta) > 0$. Spunem că F este $\tilde{\Phi}$-*like pe* U^- dacă

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\zeta F'(\zeta)}{\tilde{\Phi}(F(\zeta))}\right] > 0, \quad \zeta \in U^-. \tag{1.2.7}$$

1.2.8 Clasa funcţiilor tare Φ-like de ordinul α

Noţiunea de tare Φ-likeness de ordinul α a fost introdusă de P. Curt, D. Fericean şi T. Groşan în [16], ca o generalizare a tare stelarităţii şi spiralităţii de ordinul α.

Definiţia 1.2.29 **[16]** Fie f o funcţie olomorfă pe discul unitate U astfel încât $f(0) = 0$ şi $f'(0) \neq 0$. Fie Φ o funcţie olomorfă pe $f(U)$ astfel încât $\Phi(0) = 0$ şi $|\arg\Phi'(0)| < \dfrac{\alpha\pi}{2}$, unde $\alpha \in (0, 1]$. Spunem că f este *tare Φ-like de ordinul α pe U* dacă

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{\Phi(f(z))}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad z \in U. \tag{1.2.8}$$

În acest caz, $f(U)$ se numeşte *domeniu tare Φ-like de ordinul α*.

Noţiunea de tare Φ-likeness de ordinul α poate fi de asemenea definită în exteriorul discului unitate, nu doar pe discul unitate. Această noţiune a fost introdusă de P. Curt, D. Fericean şi T. Groşan (a se vedea [16]).

Definiţia 1.2.30 **[16]** Fie F o funcţie olomorfă pe $U^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ astfel încât

$$F(\zeta) = a\zeta + a_0 + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \ldots, \quad |\zeta| > 1,$$

unde $a \neq 0$. Fie $\alpha \in (0, 1]$ şi Φ o funcţie olomorfă pe $F(U^-)$ astfel încât

$$\lim_{\zeta\to\infty} \Phi(\zeta) = \infty \text{ şi } \lim_{\zeta\to\infty} \Phi'(\zeta) > 0.$$

Spunem că F este *tare Φ-like de ordinul α pe U^-* dacă

$$\left|\arg\frac{\zeta F'(\zeta)}{\Phi(F(\zeta))}\right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \ \forall\, \zeta \in U^-. \tag{1.2.9}$$

1.3 Lanţuri Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner. Aplicaţii

În această secţiune prezentăm una dintre cele mai importante metode din teoria funcţiilor univalente, bazată pe lanţurile Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner. Demonstraţia conjecturii lui Bieberbach, datorată lui L. de Branges [8], se bazează pe ecuaţia diferenţială Loewner. Această secţiune conţine noţiuni şi rezultate referitoare la lanţurile Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner.

Definiţia 1.3.1 **[81]** Fie $f, g : U \to \mathbb{C}$ două funcţii olomorfe. Funcţia f este *subordonată* lui g (notăm $f \prec g$ sau $f(z) \prec g(z)$) dacă există funcţia $w \in \mathcal{H}(U)$ cu $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1, z \in U$ (deci, w este o funcţie Schwarz), astfel încât $f(z) = g(w(z))$, $z \in U$.

Dacă funcţia g este univalentă obţinem următorul rezultat:

Teorema 1.3.2 **[81]** *Dacă $f, g \in \mathcal{H}(U)$, iar funcţia g este univalentă pe U, atunci $f \prec g$ dacă şi numai dacă $f(0) = g(0)$ şi $f(U) \subseteq g(U)$.*

În continuare prezentăm definiţia lanţului Loewner (lanţ univalent de subordonare) (a se vedea [35], [81], [88]):

Definiţia 1.3.3 (**[88]**) O funcţie $f = f(z,t) : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ se numeşte *lanţ univalent de subordonare* (sau *lanţ Loewner*) dacă $f(\cdot,t)$ este univalentă pe U, $f(0,t) = 0$ pentru $t \geq 0$, şi

(1.3.1) $$f(\cdot,s) \prec f(\cdot,t), \quad 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Subordonarea (1.3.1) este echivalentă cu existenţa unei familii unice de funcţii Schwarz $v(z,s,t)$, numite *funcţii de tranziţie* asociate lanţului $f(z,t)$, astfel încât

$$f(z,s) = f(v(z,s,t),t), \quad z \in U,\ 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Exemplul 1.3.4 **[88]** Funcţia $f(z,t) = \dfrac{e^t z}{(1-z)^2}$, $z \in U$, $t \geq 0$, este un lanţ Loewner.

În continuare prezentăm ecuaţia diferenţială Loewner, precum şi legătura cu lanţurile Loewner. Mai întâi, reamintim clasa Carathéodory a funcţiilor olomorfe cu partea reală pozitivă pe discul unitate (a se vedea [35], [81], [88]). Fie

$$\mathcal{P} = \left\{ p \in \mathcal{H}(U) : p(0) = 1,\ \mathrm{Re}\, p(z) > 0,\ z \in U \right\}$$

clasa Carathéodory a funcţiilor olomorfe cu partea reală pozitivă pe U.

Următorul rezultat reprezintă o caracterizare a lanţurilor Loewner prin intermediul ecuaţiei diferenţiale Loewner. Acest rezultat a fost obţinut de Pommerenke ([88]; pentru detalii şi aplicaţii, a se vedea şi [35]).

Teorema 1.3.5 **[88]** *Fie $f = f(z,t) : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$, astfel încât $f(0,t) = 0$ şi $f'(0,t) = e^t$, $t \geq 0$. Atunci $f(z,t)$ este un lanţ Loewner dacă şi numai dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

(i) Există $r \in (0,1)$ şi $K > 0$ astfel încât $f(\cdot,t) \in \mathcal{H}(U_r)$ pentru $t \geq 0$, $f(z,\cdot)$ este local absolut continuă pe $[0,\infty)$ local uniform în raport cu $z \in U_r$ şi $|f(z,t)| \leq Ke^t$, $z \in U_r$, $t \geq 0$.

(ii) Există o funcţie $p(z,t)$ astfel încât $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$ pentru $t \geq 0$, $p(z,\cdot)$ este măsurabilă pe $[0,\infty)$ pentru $z \in U$, şi

(1.3.2) $$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zf'(z,t)p(z,t), \quad \textit{a.p.t.} \quad t \in [0,\infty),\ \forall\, z \in U_r.$$

Remarcăm faptul că $f'(z,t) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z,t)$. De asemenea, menţionăm că ecuaţia (1.3.2) se numeşte *ecuaţia diferenţială Loewner* (ecuaţia Loewner-Kufarev).

1.4 Rezultate generale referitoare la problema mişcării fluide de tip Hele-Shaw

În această secţiune prezentăm problema mişcării fluide de tip Hele-Shaw, câteva aplicaţii practice ale modelului Hele-Shaw în diferite domenii ale ştiinţei şi ingineriei, precum şi ecuaţia Polubarinova-Galin pentru ambele cazuri, ale domeniilor mărginite dar şi ale celor nemărginite cu complementul mărginit, în prezenţa respectiv în absenţa tensiunii de suprafaţă γ. Ecuaţia Polubarinova-Galin este analogul ecuaţiei diferenţiale Loewner, care a fost studiată în secţiunea precedentă. Menţionăm că principalele surse bibliografice utilizate în această secţiune sunt [37], [38], [92], [112], [113], [114].

În 1898 Henry Shelby Hele-Shaw (1854-1941) a definit celula Hele-Shaw ca fiind un instrument de investigare în studiul mişcării unui fluid vâscos incompresibil între două plăci paralele transparente situate la o distanţă suficient de mică. În acest model fluidul vâscos ocupă un domeniu fază cu frontieră liberă. O cantitate suplimentară de fluid este injectată sau extrasă printr-un punct fixat. Frontiera liberă începe să se mişte datorită injecţiei/sucţiunii. Problema Hele-Shaw se reduce la determinarea evoluţiei în timp a domeniului iniţial ocupat de fluid. Pentru mai multe detalii, a se vedea [38], [112], [113], [114].

1.4.1 Domenii mărginite

Începem această secţiune prezentând noţiuni de bază referitoare la cazul domeniilor mărginite (pentru detalii, a se vedea [38]). În acest caz studiem mişcarea unui fluid vâscos într-o celulă Hele-Shaw în cazul injecţiei printr-o sursă de intensitate $Q < 0$, localizată în origine. Putem presupune că intensitatea sursei este constantă (altfel printr-o schimbare convenabilă de variabilă se poate reduce la cazul unei surse de intensitate constantă). Presupunem că la momentul iniţial domeniul $\Omega(0)$ ocupat de fluid este simplu conex şi mărginit de o curbă analitică şi netedă $\Gamma(0) = \partial\Omega(0)$. Utilizând Teorema lui Riemann (a se vedea Teorema 1.1.6), domeniul $\Omega(t)$ (ocupat de fluid la momentul t) este conform echivalent cu discul unitate $U = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, prin urmare, poate fi descris printr-o unică funcţie univalentă $f(\zeta, t)$ care reprezintă conform discul unitate U pe $\Omega(t)$ şi este normată de $f(0, t) = 0$, $f'(0, t) > 0$. Fie $\Gamma(t)$ frontiera domeniului $\Omega(t)$. Funcţia $f(\zeta, 0) = f_0(\zeta)$ produce o parametrizare a lui $\Gamma(0)$, dată de $\Gamma(0) = \{f_0(e^{i\theta}),\ \theta \in [0, 2\pi)\}$. În plus, frontiera liberă are parametrizarea $\Gamma(t) = \{f(e^{i\theta}, t),\ \theta \in [0, 2\pi)\}$.

Modelul în cazul absenţei tensiunii de suprafaţă

În acest caz, ecuaţia satisfăcută de frontiera liberă $\Gamma(t)$ a fost prima dată studiată de L. A. Galin [34], P. Polubarinova-Kochina ([87]) şi este dată de:

$$\text{(1.4.1)} \qquad \mathrm{Re}[\dot{f}(\zeta, t)\overline{\zeta f'(\zeta, t)}] = -\frac{Q}{2\pi}, \quad \zeta = e^{i\theta} \in \partial U.$$

Menţionăm că în egalitatea precedentă am folosit următoarele notaţii: $f' = \dfrac{\partial f}{\partial \zeta}$, $\dot{f} = \dfrac{\partial f}{\partial t}$.

Ţinând cont de formula lui Schwarz-Poisson, ecuaţia (1.4.1) poate fi rescrisă sub următoarea formă, care este analogul ecuaţiei Loewner-Kufarev (a se vedea [38, pagina 18]):

$$\text{(1.4.2)} \qquad \dot{f}(\zeta, t) = -\zeta f'(\zeta, t)\frac{Q}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|f'(e^{i\theta}t)|^2} \cdot \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta,\ \zeta \in U.$$

Dacă considerăm în relaţia (1.4.2) limita lui ζ către un punct pe cercul unitate şi utilizăm formulele Plemelj-Sokhotsky [82], ecuaţia (1.4.2) se reduce la ecuaţia (1.4.1) (a se vedea [38]).

Definiţia 1.4.1 [38] O *soluţie tare sau clasică* în intervalul $[0, T)$ este o funcţie $f(\zeta, t)$, $t \in [0, T)$, care este univalentă într-o vecinătate a lui $\overline{U}$ şi este de clasă C^1 în raport cu $t \in [0, T)$, unde T se numeşte *momentul* $($*timpul*$)$ *"blow-up"*.

Modelul în cazul tensiunii de suprafaţă diferită de zero

În cazul problemei injecţiei de fluid $Q < 0$ într-un domeniu mărginit simplu conex cu tensiune de suprafaţă suficient de mică $\gamma > 0$, ecuaţia Polubarinova-Galin ce descrie evoluţia în timp a frontierei libere [114] este de forma (a se vedea şi [38], [87]):

$$\text{(1.4.3)} \qquad \mathrm{Re}[\dot{f}(\zeta, t)\overline{\zeta f'(\zeta, t)}] = -\frac{Q}{2\pi} + \gamma H\left[i\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}(e^{i\theta}, t)\right](\theta), \quad \zeta = e^{i\theta},$$

unde κ este curbura frontierei, definită prin relaţia

$$\text{(1.4.4)} \qquad \kappa(e^{i\theta}, t) = \frac{1}{|f'(e^{i\theta}, t)|}\mathrm{Re}\left(1 + \frac{e^{i\theta} f''(e^{i\theta}, t)}{f'(e^{i\theta}, t)}\right), \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

iar transformata Hilbert în (1.4.3) este dată de (a se vedea [38])

$$\text{(1.4.5)} \qquad H[\Phi](\theta) := \frac{1}{\pi} p.v. \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(e^{i\theta'})}{1 - e^{i(\theta - \theta')}} d\theta',$$

unde simbolul $p.v.$ se referă la partea principală.

Observaţia 1.4.2 Un fenomen important se referă la studiul cazului $\gamma \to 0$. Soluţia în cazul limită $\gamma \to 0$ nu este întotdeauna aceeaşi cu aceea din cazul absenţei tensiunii de suprafaţă (a se vedea [105], [113]). Din acest punct de vedere, este important să tratăm ambele cazuri, atât când tensiunea de suprafaţă e zero, respectiv diferită de zero.

1.4.2 Cazul domeniilor nemărginite cu complementul mărginit

În continuare notăm cu $\Omega(t)$ domeniul ocupat de fluid la momentul t şi $\Gamma(t) = \partial\Omega(t)$. Folosind Teorema lui Riemann, domeniul $\Omega(t)$ poate fi descris de o funcţie univalentă $F(\zeta, t)$, care reprezintă conform exteriorul discului unitate $U^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ pe $\Omega(t)$, astfel încât $F(\zeta, t) = a\zeta + a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \ldots$, $|\zeta| > 1$, unde $a > 0$ (vezi şi definiţia clasei Σ din Secţiunea 1.2.1).

• Ecuaţia Polubarinova-Galin satisfăcută de frontiera liberă, în cazul absenţei teniunii de suprafaţă, este (a se vedea [112], [114]):

$$\text{(1.4.6)} \qquad \mathrm{Re}[\dot{F}(\zeta, t)\overline{\zeta F'(\zeta, t)}] = \frac{Q}{2\pi}, \quad \zeta = e^{i\theta}.$$

Existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei Polubarinova-Galin (1.4.6) a fost studiată de J. Escher şi G. Simonett (a se vedea [38]).

• În cazul modelului cu tensiunea de suprafaţă suficient de mică γ, ecuaţia Polubarinova-Galin are următoarea formă (a se vedea [38]):

$$\text{(1.4.7)} \qquad \mathrm{Re}[\dot{F}(\zeta, t)\overline{\zeta F'(\zeta, t)}] = \frac{Q}{2\pi} - \gamma H\left[i\frac{\partial \kappa}{\partial t}(e^{i\theta}, t)\right](\theta), \quad \zeta = e^{i\theta}.$$

Existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei Polubarinova-Galin (1.4.7) a fost studiată de M. Kimura în [52].

1.4.3 Invarianţa în timp a unor domenii speciale

Domenii stelate

Cazul domeniilor stelate a fost studiat de Hohlov, Prokhorov şi Vasil'ev în [42] în cazul în care tensiunea de suprafaţă este zero. Presupunem că funcţia iniţială f_0 este analitică pe $\overline{U}$. Atunci are loc următorul rezultat (a se vedea şi [112]):

Teorema 1.4.3 [42] *Fie $Q < 0$ şi $f_0 \in S^*$ o funcţie analitică şi univalentă într-o vecinătate a lui $\overline{U}$. Atunci orice domeniu $\Omega(t)$ rămâne stelat $(f(\cdot, t) \in S^*)$ atât timp cât soluţia ecuaţiei Polubarinova-Galin există.*

În continuare prezentăm cazul domeniilor stelate în prezenţa unei tensiuni de suprafaţă suficient de mică γ. Următorul rezultat are loc (a se vedea [114, Teorema 1], [92, Teorema 3.1]).

Teorema 1.4.4 [114] *Fie $Q < 0$ şi tensiunea de suprafaţă γ suficient de mică. Dacă domeniul iniţial $\Omega(0)$ este stelat, atunci există $t(\gamma) \leq T$, astfel încât familia domeniilor $\Omega(t)$ (familia funcţiilor univalente $f(\zeta, t)$) conservă această proprietate la orice moment $t \in [0, t(\gamma)]$, unde T este momentul "blow-up".*

Domenii tare stelate de ordinul α

Cazul domeniilor tare stelate de ordinul α a fost studiat de Gustafsson, Prokhorov, Vasil'ev în [37] (a se vedea şi [38, p 79]). Aceştia au demonstrat următorul rezultat (a se vedea [37]):

Teorema 1.4.5 [37] *Fie $f_0 \in \hat{S}^*(\alpha)$, $\alpha \in (0, 1]$, o funcţie analitică şi univalentă într-o vecinătate a lui $\overline{U}$. Atunci soluţia tare $f(\zeta, t)$ a ecuaţiei Polubarinova-Galin (1.4.1) determină un lanţ univalent de subordonare de funcţii tare stelate de ordinul $\alpha(t)$, unde $\alpha(t)$ este o funcţie strict descrescătoare de t, iar $\alpha(0) = \alpha$.*

În continuare prezentăm următorul rezultat referitor la domeniile tare stelate de ordinul $\alpha \in (0, 1]$, în prezenţa tensiunii de suprafaţă γ (a se vedea [38, Teorema 4.3.4]):

Teorema 1.4.6 [38] *Fie $Q < 0$ şi tensiunea de suprafaţă γ suficient de mică. Dacă domeniul iniţial $\Omega(0)$ este tare stelat de ordinul α, atunci există $t(\gamma) \leq T$, astfel încât familia domeniilor $\Omega(t)$ (familia funcţiilor univalente $f(\zeta, t)$) conservă această proprietate pentru fiecare $t \in [0, t(\gamma)]$, unde T este momentul "blow-up".*

Domenii convexe

Pentru cazul exterior (a domeniilor nemărginite cu complementul mărginit), primul rezultat, în studiul invarianţei în timp a unor proprietăţi geometrice ale frontierei libere, a fost obţinut de V. M. Entov şi P.I. Etingov în [24]. Ei au demonstrat că în cazul în care tensiunea de suprafaţă este zero, dacă domeniul iniţial are complementul convex, atunci familia domeniilor ocupate de fluid la diferite momente de timp are aceeaşi proprietate, atât timp cât soluţia ecuaţiei Polubarinova-Galin există (a se vedea şi [38]).

Capitolul 2

Proprietăţi geometrice invariante în probleme de mişcare fluidă de tip Hele-Shaw

Acest capitol conţine rezultate originale referitoare la invarianţa în timp a proprietăţilor de Φ-likeness şi tare Φ-likeness de ordinul α în cazul domeniilor mărginite, precum şi în cazul domeniilor nemărginite cu complementul mărginit. Prezentăm atât cazul în care tensiunea de suprafaţă este zero, cât şi cazul în care tensiunea de suprafaţă este diferită de zero. De asemenea, prezentă şi anumite cazuri particulare referitoare la stelaritate, tare stelaritate de ordinul α, spiralitate. O situaţie interesantă apare în cazul $\gamma \to 0$, unde γ este tensiunea de suprafaţă. Este de remarcat faptul că soluţia în cazul $\gamma \to 0$ nu coincide întotdeauna cu soluţia în cazul absenţei tensiunii de suprafaţă (a se vedea [105]). Acest fapt este justificat de aplicaţii numerice obţinute recent în [93] (a se vedea şi [38], [113]). Aceste argumente motivează alegerea noastră de a studia invarianţa în timp a proprietăţilor de Φ-likeness şi tare Φ-likeness de ordinul α în ambele cazuri, atât în absenţa, cât şi în prezenţa tensiunii de suprafaţă.

2.1 Clase speciale de funcţii univalente în probleme de mişcare fluidă de tip Hele-Shaw

Rezultatele din această secţiune au fost recent obţinute de P. Curt şi D. Fericean [15].

2.1.1 Problema interioară

În această secţiune prezentăm invarianţa în timp a proprietăţii de Φ-likeness pentru problema interioară.

În cele ce urmează studiem mişcarea plană a unui fluid vâscos într-o celulă de tip Hele-Shaw, în cazul injecţiei printr-o sursă de intensitate constantă $Q < 0$, aflată în origine. Presupunem că la momentul iniţial $t = 0$ domeniul $\Omega(0)$, ocupat de fluid, este simplu conex, conţine originea şi este mărginit de o curbă analitică şi netedă $\Gamma(0) = \partial\Omega(0)$. Utilizând Teorema lui Riemann (a se vedea Teorema 1.1.6), domeniul $\Omega(t)$ (ocupat de fluid la momentul t) este conform echivalent cu discul unitate $U = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$. Prin urmare, $\Omega(t)$ poate fi descris de o unică funcţie univalentă $f(\zeta, t)$, care reprezintă conform discul unitate U în $\Omega(t)$ şi este normată de $f(0, t) = 0$, $f'(0, t) > 0$. Fie $\Gamma(t)$ frontiera domeniului $\Omega(t)$. Funcţia $f(\zeta, 0) = f_0(\zeta)$ produce o parametrizare a lui $\Gamma(0)$, $\Gamma(0) = \{f_0(e^{i\theta}),\ \theta \in [0, 2\pi)\}$. În plus, frontiera liberă este parametrizată de $\Gamma(t) = \{f(e^{i\theta}, t), \theta \in [0, 2\pi)\}$.

Fiind dat un domeniu iniţial $\Omega(0)$, mărginit şi Φ-like, demonstrăm că la fiecare moment $t \in$

$[0, T)$, domeniul $\Omega(t)$ este Φ-like (atât în cazul absenţei, cât şi în cazul prezenţei tensiunii de suprafaţă). Rezultatele prezentate în această secţiune sunt datorate lui P. Curt şi D. Fericean [15].

• Următorul rezultat este o generalizare a [42, Teorema 1] (a se vedea şi Teorema 1.4.3) pentru funcţiile Φ-like, în absenţa tensiunii de suprafaţă.

Teorema 2.1.1 **[15]**. *Fie $Q < 0$ şi f_0 o funcţie Φ-like pe U şi univalentă pe $\overline{U}$. Fie $f(\zeta, t)$ soluţia clasică a ecuaţiei Polubarinova-Galin* $(1.4.1)$, *cu condiţia iniţială $f(\zeta, 0) = f_0(\zeta)$. De asemenea, fie $\Omega = \bigcup\limits_{0 \le t < T} \Omega(t) = \bigcup\limits_{0 \le t < T} f(U, t)$, unde T este momentul "blow-up". Dacă Φ este olomorfă pe $\overline{\Omega}$ şi satisface condiţia*

$$\mathrm{Re}\Phi'(w) > 0, \ \forall\, w \in \overline{\Omega}, \tag{2.1.1}$$

atunci $f(\zeta, t)$ este Φ-like pentru $t \in [0, T)$.

Corolarul 2.1.2 **[15]** *Fie $Q < 0$ şi f_0 o funcţie spiralată de tipul $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pe U şi univalentă pe $\overline{U}$. Atunci soluţia clasică a ecuaţiei Polubarinova-Galin* $(1.4.1)$, *cu condiţia iniţială $f(\zeta, 0) = f_0(\zeta)$, este spiralată de tipul α pentru $t \in [0, T)$, unde T este momentul "blow-up".*

Observaţia 2.1.3 **[15]** Conform Teoremei 2.1.1, deducem că dacă domeniul iniţial $\Omega(0) = f(U, 0)$ este Φ-like, atunci orice domeniu $\Omega(t) = f(U, t)$ rămâne Φ-like pentru $t \in [0, T)$, unde T este *momentul "blow-up"*.

• Următorul rezultat este o generalizare a [114, Teorema 1] (a se vedea şi Teorema 1.4.4) pentru cazul funcţiilor Φ-like, în absenţa tensiunii de suprafaţă.

Teorema 2.1.4 **[15]** *Fie $Q < 0$ şi tensiunea de suprafaţă γ suficient de mică. Dacă f_0 este Φ-like pe U şi univalentă pe $\overline{U}$, atunci există $t(\gamma) \le T$ astfel încât soluţia clasică $f(\zeta, t)$ a ecuaţiei* $(1.4.3)$, *cu condiţia iniţială $f(\zeta, 0) = f_0(\zeta)$, este Φ-like pentru $t \in [0, t(\gamma))$, unde T este momentul "blow-up", $\Omega = \bigcup\limits_{0 \le t < t(\gamma)} \Omega(t) = \bigcup\limits_{0 \le t < t(\gamma)} f(U, t)$, iar Φ este o funcţie olomorfă pe $\overline{\Omega}$ care satisface condiţia* $(2.1.1)$.

Observaţia 2.1.5 **[15]** Fie $Q < 0$ şi f_0 o funcţie Φ-like pe U şi univalentă pe $\overline{U}$. Dacă f_0 satisface condiţia $(1.2.6)$, pentru orice $\zeta \in \overline{U}$, atunci există o tensiune de suprafaţă γ (care depinde de f_0) suficient de mică şi $t(\gamma) \le T$, astfel încât soluţia clasică $f(\zeta, t)$ a ecuaţiei $(1.4.3)$, cu condiţia iniţială $f(\zeta, 0) = f_0(\zeta)$, este Φ-like pentru $t \in [0, t(\gamma))$, unde T este momentul "blow-up".

Observaţia 2.1.6 **[15]** Conform Teoremei 2.1.4, deducem că dacă domeniul iniţial $\Omega(0) = f(U, 0)$ este Φ-like, atunci există $t(\gamma) \le T$ astfel încât domeniul $\Omega(t) = f(U, t)$ rămâne Φ-like pentru $t \in [0, t(\gamma))$, unde T este momentul "blow-up".

Corolarul 2.1.7 **[15]** *Fie $Q < 0$ şi tensiunea de suprafaţă α suficient de mică. Dacă f_0 este o funcţie spiralată de tipul $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pe U şi univalentă pe $\overline{U}$, atunci există $t(\gamma) \le T$ astfel încât soluţia clasică $f(\zeta, t)$ a ecuaţiei* $(1.4.3)$, *cu condiţia iniţială $f(\zeta, 0) = f_0(\zeta)$, este spiralată de tipul α pentru $t \in [0, t(\gamma))$, unde T este momentul "blow-up".*

2.1.2 Problema exterioară

În această secţiune obţinem invarianţa în timp a aceleiaşi proprietăţi geometrice de tip Φ-like, în cazul problemei exterioare (cazul domeniilor nemărginite cu complementul mărginit). Cazul domeniilor nemărginite cu complementul mărginit poate fi văzut ca dinamica unei bule contractante într-o celulă Hele-Shaw, când fluidul ocupă o vecinătate a punctului de la infinit, iar injecţia (de intensitate constantă $Q < 0$) se presupune că are loc la infinit.

• Mai întâi, considerăm cazul în care tensiunea de suprafaţă este zero. Următorul rezultat este o generalizare a Teoremei 3, [113]. Teorema menţionată poate fi obţinută considerând $\tilde{\Phi}(w) \equiv w$ în Teorema 2.1.8.

Teorema 2.1.8 [15] *Fie F_0 o funcţie $\tilde{\Phi}$-like pe U^- şi univalentă pe $\overline{U^-}$. Atunci soluţia $F(\zeta, t)$ a ecuaţiei Polubarinova-Galin* (1.4.6)*, cu condiţia iniţială $F(\zeta, 0) = F_0(\zeta)$, este $\tilde{\Phi}$-like pentru $t \in [0, T)$, unde T este momentul "blow-up", $\Omega = \bigcup\limits_{0 \le t < T} \Omega(t) = \bigcup\limits_{0 \le t < T} F(U^-, t)$, iar $\tilde{\Phi}$ este o funcţie olomorfă pe $\overline{\Omega}$ ce satisface următoarele condiţii:*

$$\mathrm{Re}\frac{\tilde{\Phi}(\omega)}{\omega} > 0 \quad \textit{and} \quad \mathrm{Re}\tilde{\Phi}'(\omega) < 2\mathrm{Re}\frac{\tilde{\Phi}(\omega)}{\omega}, \ \forall\, \omega \in \overline{\Omega}. \tag{2.1.2}$$

Observaţia 2.1.9 Conform Teoremei 2.1.8, deducem că dacă domeniul iniţial $\Omega(0) = F(U^-, 0)$ este Φ-like, atunci fiecare domeniu $\Omega(t) = F(U^-, t)$ rămâne Φ-like pentru $t \in [0, T)$, unde T este momentul "blow-up".

• În continuare considerăm cazul existenţei tensiunii de suprafaţă suficient de mică. Următorul rezultat este o generalizare a [114, Teoremei 3.1] (a se vedea şi Teorema 1.4.4). Teorema menţionată se obţine considerând $\tilde{\Phi}(w) \equiv w$ în Teorema 2.1.10 următoare.

Teorema 2.1.10 [15] *Fie $Q < 0$ şi tensiunea de suprafaţă γ suficient de mică. Dacă F_0 este o funcţie $\tilde{\Phi}$-like pe U^- şi univalentă pe $\overline{U^-}$, atunci există $t(\gamma) \le T$ astfel încât soluţia $F(\zeta, t)$ a ecuaţiei* (1.4.7)*, cu condiţia iniţială $F(\zeta, 0) = F_0(\zeta)$, este $\tilde{\Phi}$-like pentru $t \in [0, t(\gamma))$, unde T este momentul "blow-up", $\Omega = \bigcup\limits_{0 \le t < t(\gamma)} \Omega(t) = \bigcup\limits_{0 \le t < t(\gamma)} F(U^-, t)$, iar $\tilde{\Phi}$ este o funcţie olomorfă pe $\overline{\Omega}$ care satisface condiţiile* (2.1.2).

Observaţia 2.1.11 [15] Conform Teoremei 2.1.10, deducem că dacă domeniul iniţial $\Omega(0) = F(U^-, 0)$ este Φ-like, atunci există $t(\gamma) \le T$ astfel încât fiecare domeniu $\Omega(t) = F(U^-, t)$ rămâne Φ-like pentru $t \in [0, t(\gamma))$, unde T este momentul "blow-up".

Observaţia 2.1.12 [15] Fie $Q < 0$, iar F_0 o funcţie $\tilde{\Phi}$-like pe U^- şi univalentă pe $\overline{U^-}$. Dacă F_0 satisface condiţia (1.2.7) pentru fiecare $\zeta \in \overline{U^-}$, atunci există o tensiune de suprafaţă γ (care depinde de F_0) suficient de mică şi $t(\gamma) \le T$, astfel încât soluţia clasică $F(\zeta, t)$ a ecuaţiei (1.4.7), cu condiţia iniţială $F(\zeta, 0) = F_0(\zeta)$, este $\tilde{\Phi}$-like pentru $t \in [0, t(\gamma))$, unde T este momentul "blow-up".

2.2 Funcţii tare Φ-like de ordinul α în probleme bidimensionale cu frontieră liberă

Această secţiune conţine rezultate originale obţinute de D. Fericean [27] şi de P. Curt, D. Fericean şi T. Groşan (a se vedea [16]). Arătăm că proprietatea de tare Φ-likeness de ordinul $\alpha \in (0, 1]$ (o proprietate geometrică ce include tare stelaritatea de ordinul α şi tare spiralitatea de ordinul α) rămâne invariantă în timp în două cazuri: problema interioară precum şi problema exterioară, în absenţa tensiunii de suprafaţă (a se vedea [16]). De asemenea, tratăm şi cazul în care tensiunea de suprafaţă este diferită de zero, dar suficient de mică (a se vedea [27]).

2.2.1 Problema interioară

În continuare prezentăm rezultate referitoare la evoluţia în timp a proprietăţii de tare Φ-likeness de ordinul $\alpha \in (0,1]$ pentru problema interioară, în absenţa tensiunii de suprafaţă.

Considerăm mişcarea planară a unui fluid vâscos într-o celulă Hele-Shaw în cazul injecţiei printr-o sursă de intensitate constantă $Q < 0$, care este plasată în origine.

Următorul rezultat generalizează [112, Teorema 1] (a se vedea, [38, Teorema 4.3.2]) la cazul funcţiilor tare Φ-like de ordinul α.

Teorema 2.2.1 **[16]** *Fie $\alpha \in (0,1]$, $Q < 0$, iar f_0 o funcţie tare Φ-like de ordinul α pe U şi univalentă pe $\overline{U}$. Fie $f(\zeta,t)$ soluţia clasică a ecuaţiei Polubarinova-Galin* $(1.4.1)$*, cu condiţia iniţială $f(\zeta,0) = f_0(\zeta)$. De asemenea fie $\Omega = \bigcup\limits_{0\le t<T} \Omega(t) = \bigcup\limits_{0\le t<T} f(U,t)$ unde T este momentul "blow-up". Dacă Φ este olomorfă pe $\overline{\Omega}$ şi satisface condiţia $|\arg \Phi'(w)| < \dfrac{\alpha\pi}{2}$, $\forall\, w \in \overline{\Omega}$, atunci $f(\zeta,t)$ este tare Φ-like de ordinul α, pentru $t \in [0,T)$.*

Observaţia 2.2.2 **[16]** Conform Teoremei 2.2.1, deducem că dacă domeniul iniţial $\Omega(0) = f(U,0)$ este tare Φ-like de ordinul α, atunci orice domeniu $\Omega(t) = f(U,t)$ rămâne tare Φ-like de ordinul α, pentru $t \in [0,T)$, unde T este momentul "blow-up".

Corolarul 2.2.3 **[16]** *Fie $Q < 0$ şi f_0 o o funcţie tare spiralată de tipul β şi ordinul α pe U şi univalentă pe $\overline{U}$, unde $\alpha \in (0,1]$ şi $\beta \in \left(-\frac{\alpha\pi}{2}, \frac{\alpha\pi}{2}\right)$. Atunci soluţia clasică a ecuaţiei Polubarinova-Galin* $(1.4.1)$*, cu condiţia iniţială $f(\zeta,0) = f_0(\zeta)$, este tare spiralată de tipul β şi ordinul α for $t \in [0,T)$, unde T este momentul "blow-up".*

Următorul rezultat, datorat lui D. Fericean [27], generalizează [114, Teorema 3.1] (a se vedea şi [38, Teorema 4.3.4]) la cazul funcţiilor tare Φ-like de ordinul α, în prezenţa unei tensiuni de suprafaţă suficient de mică.

Teorema 2.2.4 **[27]** *Fie $\alpha \in (0,1]$, $Q < 0$, iar tensiunea de suprafaţă γ suficient de mică. Fie f_0 o funcţie tare Φ-like de ordinul α pe U şi univalentă pe $\overline{U}$. Atunci există $t(\gamma) \le T$, astfel încât soluţia clasică $f(\zeta,t)$ a ecuaţiei Polubarinova-Galin* $(1.4.3)$*, cu condiţia iniţială $f(\zeta,0) = f_0(\zeta)$, este tare Φ-like de ordinul α, pentru $t \in [0,t(\gamma))$, unde T este momentul "blow-up", $\Omega = \bigcup\limits_{0\le t<t(\gamma)} \Omega(t) = \bigcup\limits_{0\le t<t(\gamma)} f(U,t)$, iar Φ este o funcţie olomorfă pe $\overline{\Omega}$, care satisface condiţia $|\arg \Phi'(w)| < \dfrac{\alpha\pi}{2}$, $\forall\, w \in \overline{\Omega}$.*

Observaţia 2.2.5 **[27]** Conform Teoremei 2.2.4, deducem că dacă domeniul iniţial $\Omega(0) = f(U,0)$ este tare Φ-like de ordinul α, atunci există $t(\gamma) \le T$ astfel încât domeniul $\Omega(t) = f(U,t)$ rămâne tare Φ-like de ordinul α pentru $t \in [0,t(\gamma))$, unde T este momentul "blow-up".

Corolarul 2.2.6 **[27]** *Fie $Q < 0$ şi tensiunea de suprafaţă γ suficient de mică. De asemenea, fie f_0 o funcţie tare spiralată de tipul β şi ordinul α pe U şi univalentă pe $\overline{U}$, unde $\alpha \in (0,1]$ şi $\beta \in \left(-\frac{\alpha\pi}{2}, \frac{\alpha\pi}{2}\right)$. Atunci există $t(\gamma) \le T$ astfel încât soluţia clasică a ecuaţiei Polubarinova-Galin* $(1.4.3)$ *cu condiţia iniţială $f(\zeta,0) = f_0(\zeta)$ este tare spiralată de tipul β şi ordinul α pentru $t \in [0,t(\gamma))$, unde T este momentul "blow-up".*

Observaţia 2.2.7 **[27]** Conform Corolarului 2.2.6, dacă domeniul iniţial $\Omega(0) = f(U,0)$ este tare spiralat de tipul β şi ordinul α, atunci există $t(\gamma) \le T$, astfel încât familia domeniilor $\Omega(t) = f(U,t)$ rămâne tare spiralată de tipul β şi ordinul α, pentru $t \in [0,t(\gamma))$, unde T este momentul "blow-up".

2.2.2 Problema exterioară

În această secţiune obţinem invarianţa în timp a proprietăţii de tare Φ-likeness de ordinul α pentru problema exterioară (cazul domeniilor nemărginite cu complementul mărginit).

În continuare obţinem analogul Teoremei 2.2.1 pentru cazul domeniilor nemărginite cu complementul mărginit, în absenţa tensiunii de suprafaţă. Acest rezultat este o generalizare a [62, Teorema 3] (a se vedea şi [16, Teorema 4.3.5]). Teorema menţionată poate fi obţinută considerând $\Phi(w) \equiv w$ şi $\alpha = 1$ în Teorema 2.2.8. Cazul $\alpha = 1$ a fost considerat în [15] (a se vedea şi Teorema 2.1.8).

Teorema 2.2.8 [16] *Fie $\alpha \in (0,1]$ şi F_0 o funcţie tare Φ-like de ordinul α pe U^- şi univalentă pe $\overline{U^-}$. Atunci soluţia $F(\zeta,t)$ a ecuaţiei Polubarinova-Galin $(1.4.6)$, cu condiţia iniţială $F(\zeta,0) = F_0(\zeta)$, este tare Φ-like de ordinul α pentru $t \in [0,T)$, unde T este momentul "blow-up", $\Omega = \bigcup\limits_{0\le t<T} \Omega(t) = \bigcup\limits_{0\le t<T} F(U^-,t)$, iar funcţia Φ este olomorfă pe $\overline{\Omega}$ ce satisface următoarele condiţii: $\left|\arg\dfrac{\Phi(w)}{w}\right| < \dfrac{\alpha\pi}{2}$, $\forall\, w \in \overline{\Omega}$, şi $\left|\arg\left(2\dfrac{\Phi(w)}{w} - \Phi'(w)\right)\right| < \dfrac{\alpha\pi}{2}$, $\forall\, w \in \overline{\Omega}$.*

Observaţia 2.2.9 [16] Conform Teoremei 2.2.8, deducem că dacă domeniul iniţial $\Omega(0) = F(U^-,0)$ este tare Φ-like de ordinul α, atunci fiecare din domeniile $\Omega(t) = F(U^-,t)$ rămâne tare Φ-like de ordinul α,, pentru $t \in [0,T)$, unde T este momentul "blow-up".

În continuare prezentăm analogul Teoremei 2.2.4 în cazul domeniilor nemărginite cu complementul mărginit, în prezenţa tensiunii de suprafaţă. Acest rezultat generalizează [113, Teorema 3] (a se vedea şi [38, Teorema 4.3.5]) la cazul funcţiilor tare Φ-like de ordinul α.

Teorema 2.2.10 [27] *Fie $Q < 0$ şi tensiunea de suprafaţă γ suficient de mică. Fie $\alpha \in (0,1]$ şi F_0 o funcţie tare Φ-like de ordinul α pe U^- şi univalentă pe $\overline{U^-}$. Atunci există $t(\gamma) \le T$, astfel încât soluţia $F(\zeta,t)$ a ecuaţiei Polubarinova-Galin $(1.4.3)$, cu condiţia iniţială $F(\zeta,0) = F_0(\zeta)$, este tare Φ-like de ordinul α pentru $t \in [0,t(\gamma))$, unde T este momentul "blow-up", $\Omega(t) = F(U^-,t)$, $\Omega = \bigcup\limits_{0\le t<t(\gamma)} \Omega(t)$, iar Φ este o funcţie olomorfă pe $\overline{\Omega}$ astfel încât $\left|\arg\dfrac{\Phi(w)}{w}\right| < \dfrac{\alpha\pi}{2}$, $\forall\, w \in \overline{\Omega}$, şi $\left|\arg\left(2\dfrac{\Phi(w)}{w} - \Phi'(w)\right)\right| < \dfrac{\alpha\pi}{2}$, $\forall\, w \in \overline{\Omega}$.*

Observaţia 2.2.11 [27] Conform Teoremei 2.2.10, dacă domeniul iniţial $\Omega(0) = F(U^-,0)$ este tare Φ-like de ordinul α, atunci există $t(\gamma) \le T$, astfel încât familia domeniilor $\Omega(t) = F(U^-,t)$ rămâne tare Φ-like de ordinul α, pentru $t \in [0,t(\gamma))$, unde T este momentul "blow-up".

2.3 Aplicaţii numerice

În această secţiune prezentăm câteva exemple referitoare la evoluţia în timp a unui domeniu fluid în absenţa tensiunii de suprafaţă. Aceste rezultate numerice au fost obţinute în [16] şi [27]. Cazul polinomului de gradul 2 a fost studiat de Polubarinova-Kochina [87] şi Galin [34]. Ei au obţinut soluţia problemei cu frontieră liberă în cazul sucţiunii. Cazul polinoamelor de gradul 3 a fost studiat de Huntingford [45].

În continuare studiem cazul polinoamelor de gradul 4 (a se vedea [16]) şi a polinoamelor de gradul 5 (a se vedea [27]). De asemenea, prezentăm şi câteva aplicaţii numerice în cazul injecţiei pentru domenii stelate şi convexe.

Considerăm polinomul de gradul 4

$$F(\zeta,t) = a_1(t)\zeta + a_2(t)\zeta^2 + a_3(t)\zeta^3 + a_4(t)\zeta^4.$$

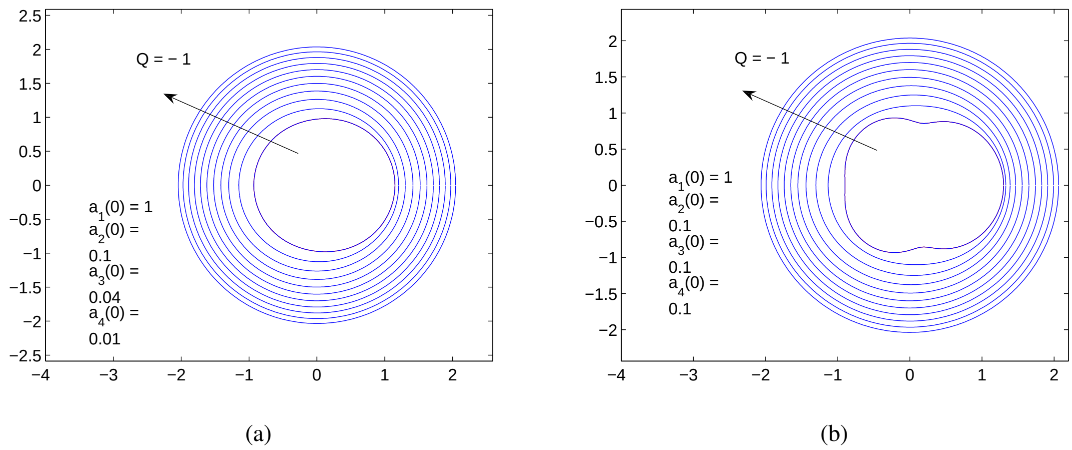


Figura 2.1: Domeniu iniţial convex, injecţie şi domeniu iniţial stelat, injecţie.

Acest polinom trebuie să satisfacă ecuaţia Polubarinova-Galin (1.4.1), care conduce la un sistem de ecuaţii diferenţiale obţinut utilizând softul Mathematica. Acest sistem a fost rezolvat pornind de la un domeniu iniţial $F(U,0)$ definit de $F(\zeta,0) = a_1(0)\zeta + a_2(0)\zeta^2 + a_3(0)\zeta^3 + a_4(0)\zeta^4$.

Sistemul obţinut a fost rezolvat numeric utilizând softul Matlab pentru două domenii iniţiale diferite, un domeniu convex, respectiv unul stelat. De asemenea, considerăm o valoare negativă pentru Q (injecţie de fluid). În cazul injecţiei, după un timp domeniul ia forma unui disc. În Figurile 2.1 (a) şi (b) sunt prezentate variaţiile domeniilor. Observăm că coeficienţii $a_k(0)$, $k = 1, \dots, 4$, au fost aleşi astfel încât $\sum_{k=2}^{4} k|a_k(0)| \leq 1$, deducându-se că domeniul iniţial $F(U,0)$ este stelat (a se vedea [35]). De asemenea, alegând coeficienţii $a_k(0)$, $k = 1, \dots, 4$, astfel încât $\sum_{k=2}^{4} k^2|a_k(0)| \leq 1$, se deduce că domeniul iniţial $F(U,0)$ este convex (a se vedea [35]).

În continuare considerăm polinomul de gradul 5

$$F(\zeta,t) = a_1(t)\zeta + a_2(t)\zeta^2 + a_3(t)\zeta^3 + a_4(t)\zeta^4 + a_5(t)\zeta^5.$$

Impunând condiţia ca polinomul de mai sus să fie o soluţie a ecuaţiei Polubarinova-Galin (1.4.1), şi utilizând softul Mathematica, obţinem un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 similar sistemului obţinut în cazul polinomului de gradul 4. Astfel, considerăm domeniul iniţial $F(U,0)$, unde $F(\zeta,0) = a_1(0)\zeta + a_2(0)\zeta^2 + a_3(0)\zeta^3 + a_4(0)\zeta^4 + a_5(0)\zeta^5$. Considerăm de asemenea o valoare negativă pentru Q (injecţie de fluid). În cazul injecţiei, după un timp domeniul ia forma unui disc. Remarcăm faptul că am impus condiţia $\sum_{k=2}^{5} k|a_k| \leq |a_1|$, care conduce la faptul că domeniul iniţial $F(U,0)$ este stelat (a se vedea [35]).

Partea II

Teoria potenţialului pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz. Aplicaţii

Capitolul 3

Teoria potenţialului pentru ecuaţiile Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz

În acest capitol prezentăm principalele proprietăţi ale operatorilor din teoria potenţialului asociaţi ecuaţiilor Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz Euclidiene sau de pe varietăţi Riemanniene compacte. Introducem soluţiile fundamentale pentru ecuaţiile Stokes şi Brinkman şi definim potenţialele de strat asociate pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, respectiv de pe varietăţi Riemanniene compacte. Unul dintre principalele rezultate se referă la proprietatea de compactitate a unor operatori complementari din teoria potenţialului. De asemenea, sunt prezentate şi rezultate de inversabilitate utile (a se vedea [54], [57], [59], [79] pentru detalii). În plus prezentăm definiţii, noţiuni şi rezultate ce vor fi folosite în capitolele următoare. Principalele surse bibliografice utilizate în pregătirea acestui capitol sunt [19], [44], [54], [55], [56], [57], [59], [78], [79], [111].

Acest capitol este structurat după cum urmează. Prima secţiune conţine definiţia domeniului Lipschitz în $\mathbb{R}^n$ şi prezintă spaţii Sobolev asociate domeniilor Lipschitz, care vor fi utilizate în această teză. A doua secţiune este o introducere în teoria operatorilor pseudodiferenţiali în $\mathbb{R}^n$, cu o atenţie deosebită asupra operatorilor eliptici în $\mathbb{R}^n$ şi sistemelor eliptice în sens Agmon-Douglis-Nirenberg în $\mathbb{R}^n$. Următoarea secţiune prezintă principalele proprietăţi ale operatorilor pseudodiferenţiali pe varietăţi Riemanniene compacte. Secţiunea a patra este dedicată operatorilor Fredholm şi principalelor proprietăţi ale acestora pe spaţii Banach. Secţiunea a cincea conţine rezultate din teoria potenţialului pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz din $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Prezentăm soluţiile fundamentale pentru sistemele Stokes şi Brinkman, precum şi proprietăţile de mărginire pentru operatori de simplu şi de dublu strat corespunzători. Unul dintre cele mai importante rezultate se referă la proprietatea de compactitate a operatorilor complementari de simplu şi dublu strat. În următoarea secţiune este prezentat operatorul pseudodiferenţial Brinkman pe o varietate Riemanniană compactă, ţinând cont de ideile din [56], [57]. Operatorul pseudodiferenţial Brinkman poate fi interpretat ca o extensie a operatorului diferenţial Brinkman din spaţiul Euclidian la varietăţi Riemanniene compacte. În continuare prezentăm principalele rezultate referitoare la teoria potenţialului pentru operatorii pseudodiferenţiali Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte, care includ soluţia fundamentală a operatorului Brinkman, proprietatea de compactitate a operatorilor complementari de simplu şi dublu strat. Acest capitol nu conţine rezultate originale ale autoarei acestei teze.

3.1 Domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$ şi spaţii Sobolev asociate

Această secţiune conţine definiţia domeniului Lipschitz în $\mathbb{R}^n$ şi descrie câteva spaţii Sobolev speciale pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$, care au un rol semnificativ de-a lungul acestei lucrări.

3.1.1 Domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$

Definiţia 3.1.1 Fie X un spaţiu metric. O funcţie $f : X \to \mathbb{C}$ se numeşte *Lipschitz* dacă există o constantă $c > 0$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq c\,\mathrm{dist(x,y)},\ \forall\, x, y \in X$.

Definiţia 3.1.2 (**[51], [70], [79]**) O mulţime deschisă $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ se numeşte *domeniu Lipschitz mărginit* dacă există o constantă $c > 0$ şi o familie de hiperplane $\Xi_i,\ i = 1, ..., m$, o alegere a normalei $\mathbf{n}_i$ pe Ξ_i, şi o funcţie Lipschitz $\varphi_i : \Xi_i \to \mathbb{R}$ cu constanta Lipschitz c, deci $|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| < c|x - y|$ pentru toţi $x, y \in Z_i$, astfel încât

(i) Pentru fiecare i, în sistemul de coordonate determinat de $(\Xi_i, \mathbf{n}_i)$, există un cilindru deschis, vertical, dublu trunchiat, circular Z_i astfel încât $\{Z_i\}_{i=1}^m$ este o acoperire deschisă a frontierei $\partial\mathfrak{D}$

(ii) Dacă $\mathfrak{D}_i$ este domeniul situat deasupra graficului funcţiei φ_i, atunci, lucrând din nou în sistemul de coordonate determinat de $(\Xi_i, \mathbf{n}_i)$ în $\mathbb{R}^n$, şi notând cu ξZ_i dilataţia concentrică a lui $\mathcal{Z}_i$ cu un factor $\xi > 0$, avem, pentru orice i,

$$\mathfrak{D} \cap 2(c+1)\mathcal{Z}_i = \mathfrak{D}_i \cap 2(c+1)\mathcal{Z}_i,$$
$$\partial\mathfrak{D} \cap 2(c+1)\mathcal{Z}_i = \partial\mathfrak{D}_i \cap 2(c+1)\mathcal{Z}_i.$$

Perechea $(\mathcal{Z}_i, \varphi_i)$ se numeşte *hartă de coordonate a lui* $\mathfrak{D}$, iar $\partial\mathfrak{D}_i$ este graficul lui φ_i în sistemul de coordonate indus de $\mathcal{Z}_i$.

Fie $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu Lipschitz mărginit. Folosim notaţiile $\mathfrak{D}_- := \mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_+ := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathfrak{D}}$. Pentru un parametru fixat $k_0 = k_0(\partial\mathfrak{D}) > 1$ suficient de mare, definim *regiunile netangenţiale* $\gamma_\pm(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\mathfrak{D}$, prin $\gamma_\pm(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathfrak{D}_\pm : \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < k_0\,\mathrm{dist}(\mathbf{y}, \partial\mathfrak{D})\}$ (a se vedea [79, p. 27]), iar pentru $u : \mathfrak{D}_\pm \to \mathbb{R}$ arbitrară, funcţia netangenţială maximală corespunzătoare $\mathcal{N}_{k_0}(u)$ este definită astfel: $\mathcal{N}_{k_0}(u)(\mathbf{x}) := \sup\{|u(\mathbf{y})| : \mathbf{y} \in \gamma_\pm(\mathbf{x})\},\ \mathbf{x} \in \partial\mathfrak{D}$, unde $\mathcal{N} := \mathcal{N}_{k_0}$ se numeşte *operator netangenţial maximal*.

Observaţia 3.1.3 Dacă în Definiţia 3.1.2 funcţiile φ_i sunt din clasa C^1, atunci domeniul $\mathfrak{D}$ este de clasă C^1.

3.1.2 Spaţii de funcţii pe $\mathbb{R}^n$

În această secţiune prezentăm unele notaţii care vor fi folosite în capitolele următoare. Notăm cu $\mathbb{Z}$ mulţimea numerelor întregi şi cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale. De-a lungul acestei teze considerăm spaţiul $\mathbb{R}^n$ înzestrat cu norma $|x| := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2},\ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi cu baza canonică ortonormată $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, unde $\mathbf{e}_j := (\delta_{1j}, \ldots, \delta_{nj}),\ 1 \leq j \leq n$. Notaţia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se referă la dualitatea perechii de două spaţii duale X şi X^*. În plus, aceeaşi notaţie este uneori folosită pentru produsele scalare în spaţii Hilbert, inclusiv în $\mathbb{R}^n$.

Fie Ω o mulţime deschisă şi $C^0(\Omega)$ spaţiul funcţiilor continue cu valori reale pe Ω. Spaţiul funcţiilor continue, de r ori diferenţiabile cu valori reale pe Ω se notează cu $C^r(\Omega),\ r \in \mathbb{N}$, şi $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{r\in\mathbb{N}} C^r(\Omega)$.

Spaţiul funcţiilor $\varphi \in C^r(\Omega)$ cu suport compact este notat cu $C_0^r(\Omega)$, iar $\mathcal{D}'(\Omega)$ este spaţiul distribuţiilor pe Ω, dualul spaţiului $C_0^\infty(\Omega)$ înzestrat cu o anumită topologie. De asemenea, notăm cu $\mathrm{supp}(u)$ suportul lui $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ în Ω definit ca mulţimea de puncte fără vecinătăţi deschise în care u se anulează.

Fie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mulţimea funcţiilor netede rapid descrescătoare. Această mulţime se numeşte *spaţiul Schwartz*. Spaţiul dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se numeşte *spaţiul distribuţiilor temperate* în $\mathbb{R}^n$ (a se vedea [117]). În plus, cu $\mathcal{F}:\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ notăm transformata Fourier definită pe spaţiul distribuţiilor temperate şi cu $\mathcal{F}^{-1}$ inversa ei (mai multe detalii sunt precizate în Secţiunea 4.1). De asemenea notăm cu $\Delta=\partial_1^2+\cdots+\partial_n^2$ Laplacianul, unde toate derivatele parţiale sunt considerate în sensul distribuţiilor.

3.1.3 O trecere în revistă a spaţiilor Sobolev pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$

În continuare considerăm un domeniu Lipschitz mărginit $\mathfrak{D}:=\mathfrak{D}_-\subset\mathbb{R}^n, n\geq 3$, frontiera sa $\Gamma:=\partial\mathfrak{D}$ fiind, local, graficul unei funcţii Lipschitz, şi fie $\mathfrak{D}_+:=\mathbb{R}^n\setminus\overline{\mathfrak{D}}$. De asemenea fie $\mathbf{n}_\Gamma$ normala exterioară la Γ, care este definită a.p.t., în raport cu elementul de suprafaţă $d\sigma$, pe Γ. Pentru $p\in(1,\infty)$ notăm cu $L^p(\mathbb{R}^n)$ spaţiul funcţiilor p integrabile Lebesgue pe $\mathbb{R}^n$, iar pentru $p\in(1,\infty)$ şi $s\in\mathbb{R}$, notăm cu $L^p_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}):=L^p_s(\mathbb{R}^n)$ spaţiul Sobolev (potenţial Bessel) de netezime s în $\mathbb{R}^n$, definit prin (a se vedea [44], [75])

$$
\begin{aligned}
L^p_s(\mathbb{R}^n) &:=\left\{(I-\Delta)^{-s/2}g:\ g\in L^p(\mathbb{R}^n)\right\}\\
&=\left\{\mathcal{F}^{-1}\left(1+|\zeta|^2\right)^{-s/2}\mathcal{F}g:\ g\in L^p(\mathbb{R}^n)\right\}.
\end{aligned}\tag{3.1.1}
$$

Spaţiul definit în (3.1.1) este înzestrat cu norma $||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}:=||\mathcal{F}^{-1}\left(1+|\zeta|^2\right)^{-s/2}\mathcal{F}f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Dacă indexul de netezime este un număr natural, $s=r\in\mathbb{N}$, atunci spaţiul Sobolev clasic poate fi definit prin (a se vedea [44])

$$
L^p_r(\mathbb{R}^n):=\left\{f\in L^p(\mathbb{R}^n):\ ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}:=\sum_{|\gamma|\leq r}||\partial^\gamma f||_{L^p(\mathbb{R}^n)},\ r\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ 1<p<\infty\right\}.
$$

Pentru $k\geq 2$, fie

$$
L^p_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k):=\{u=(u_1,\cdots,u_k):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k:u_j\in L^p_s(\mathbb{R}^n),\ j=1,\ldots,k\}.\tag{3.1.2}
$$

Pentru $p\in(1,\infty)$ şi $s\geq 0$, considerăm spaţiile de funcţii L^p-Sobolev, cu netezimea s în $\mathfrak{D}_\pm$,

$$
L^p_s(\mathfrak{D}_\pm):=\{f|_{\mathfrak{D}_\pm}:f\in L^p_s(\mathbb{R}^n)\},\ \tilde{L}^p_s(\mathfrak{D}_\pm):=\{f\in L^p_s(\mathbb{R}^n):\mathrm{supp}f\subseteq\overline{\mathfrak{D}}_\pm\},\tag{3.1.3}
$$

unde $\mathrm{supp}f$ este suportul funcţiei f, închiderea mulţimii de puncte unde f nu se anulează. Pentru $p\in(1,\infty)$ acestea sunt spaţii Banch. În plus, pentru $p=2$ ele devin spaţii Hilbert. Notăm prin[1] $L^p_{-s}(\mathfrak{D}_\pm)=\left(\tilde{L}^q_s(\mathfrak{D}_\pm)\right)^*$ dualul spaţiului $\tilde{L}^q_s(\mathfrak{D}_\pm)$, unde $q\in(1,\infty)$ satisface $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. În plus, $L^p_s(\mathfrak{D}_\pm,\mathbb{R}^k)$ şi $\tilde{L}^p_s(\mathfrak{D}_\pm,\mathbb{R}^k)$ sunt spaţiile Sobolev ale funcţiilor vectoriale $\mathbf{u}:\mathfrak{D}_\pm\to\mathbb{R}^k$ având componentele în $L^p_s(\mathfrak{D}_\pm)$ şi $\tilde{L}^p_s(\mathfrak{D}_\pm)$, respectiv, şi $L^p_{-s}(\mathfrak{D}_\pm,\mathbb{R}^k):=(\tilde{L}^q_s(\mathfrak{D}_\pm,\mathbb{R}^k))^*$. Pentru $p=2$ folosim notaţiile uzuale $L^2_s(\mathbb{R}^n):=H^s(\mathbb{R}^n)$, $L^2_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k):=H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$, $L^2_s(\mathfrak{D}_\pm):=H^2(\mathfrak{D}_\pm)$. Pentru o descriere completă a acestor spaţii ne referim la [44], [67], [118].

Spaţiile Sobolev $L^p_s(\mathbb{R}^{n-1})$ cu $1<p<\infty$ şi $0\leq s\leq 1$ sunt stabile în raport cu operaţia de compunere de difeomorfisme Lipschitz. În plus, ele sunt invariante în raport cu operaţia de multiplicare prin funcţîi Lipschitz. Aceste proprietăţi conduc la definiţia naturală a spaţiilor Sobolev pe frontiere Lipschitz. Astfel, dacă $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ o regiune nemărginită în $\mathbb{R}^n$ situată deasupra graficului funcţiei Lipschitz $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, atunci pentru orice $1<p<\infty$ şi $0\leq s\leq 1$ (a se vedea [44], [75], [107])

$$
\begin{aligned}
&f\in L^p_s(\partial\Omega)\Leftrightarrow f(\cdot,\varphi(\cdot))\in L^p_s(\mathbb{R}^{n-1}),\\
&g\in L^p_{-s}(\partial\Omega)\Leftrightarrow g(\cdot,\varphi(\cdot))\sqrt{1+|\nabla\varphi(\cdot)|^2}\in L^p_{-s}(\mathbb{R}^{n-1}).
\end{aligned}\tag{3.1.4}
$$

[1] Dacă X este un spaţiu Banach dat, notăm cu X^* spaţiul dual.

Aceste proprietăţi pot fi extinse la cazul domeniilor Lipschitz mărginite. Astfel, păstrând aceleaşi notaţii ca mai sus, dacă $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ este un domeniu Lipschitz cu frontiera Γ, atunci (a se vedea [75], [79])

$$
\begin{aligned}
&L_1^p(\Gamma) := \{f \in L^p(\Gamma) : \nabla_{\tan} f \in L^p(\Gamma)\}\,,\ 1 < p < \infty, \\
&L_{-s}^p(\Gamma) = (L_s^q(\Gamma))^*\,,\ 1 < p < \infty,\ 0 \le s \le 1,
\end{aligned} \tag{3.1.5}
$$

unde $\nabla_{\tan}$ este gradientul tangenţial pe Γ şi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Considerăm spaţiul[2] [54]

$$
\begin{aligned}
L_{s+\frac{1}{p}}^p(\mathfrak{D}_-, \mathcal{L}_{\mathrm{St}}) := \ & \big\{(\mathbf{u}, \pi) \in L_{s+\frac{1}{p}}^p(\mathfrak{D}_-, \mathbb{R}^n) \times L_{s+\frac{1}{p}-1}^p(\mathfrak{D}_-) : \\
& \mathcal{L}_{\mathrm{St}}(\mathbf{u}, \pi) = \mathbf{0}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ în } \mathfrak{D}_-\big\}, \\
L_{s+\frac{1}{p}}^p(\mathfrak{D}_+, \mathcal{L}_{\mathrm{St}}) := \ & \big\{(\mathbf{u}, \pi) \in L_{s+\frac{1}{p},\mathrm{loc}}^p(\overline{\mathfrak{D}}_+, \mathbb{R}^n) \times L_{s+\frac{1}{p}-1,\mathrm{loc}}^p(\overline{\mathfrak{D}}_+) : \\
& \mathcal{L}_{\mathrm{St}}(\mathbf{u}, \pi) = \mathbf{0}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathfrak{D}_+\big\},
\end{aligned} \tag{3.1.6}
$$

unde $\mathcal{L}_{\mathrm{St}}(\mathbf{u}, \pi) := -\Delta \mathbf{u} + \nabla \pi$. În particular, pentru $p = 2$ şi $\beta := s - \frac{1}{2} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, obţinem

$$
H^{1+\beta}(\mathfrak{D}_-, \mathcal{L}_{\mathrm{St}}) := L_{1+\beta}^2(\mathfrak{D}_-, \mathcal{L}_{\mathrm{St}}),\ H^{1+\beta}(\mathfrak{D}_+, \mathcal{L}_{\mathrm{St}}) := L_{1+\beta}^2(\mathfrak{D}_+, \mathcal{L}_{\mathrm{St}}).
$$

3.1.4 Operatorul netangenţial urmă şi operatorul de derivare conormală pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$

Pentru o constantă fixată $k_0 = k_0(\Gamma) > 1$, suficient de mare, definim *funcţia maximală netangenţială* $\mathcal{N}u$ prin (a se vedea [79, (2.3)-(2.6)]): $\mathcal{N}(u)(\mathbf{x}) := \sup\{|u(\mathbf{y})| : \mathbf{y} \in \gamma_\pm(\mathbf{x})\},\ \mathbf{x} \in \Gamma$, pentru $u : \mathfrak{D}_+ \to \mathbb{R}$ arbitrar, unde $\gamma_\pm(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathfrak{D}_\pm : \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < k_0 \operatorname{dist}(\mathbf{y}, \Gamma)\},\ \mathbf{x} \in \Gamma$, sunt regiuni de aproximare netangenţiale situate în $\mathfrak{D}_+ = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathfrak{D}}$, respectiv $\mathfrak{D}_-$. În plus, *operatorii netangenţiali pe frontiera* Γ, notaţi $\mathrm{Tr}^\pm$, sunt definiţi prin $(\mathrm{Tr}^\pm u)(\mathbf{x}) := \lim\limits_{\gamma_\pm(\mathbf{x}) \ni \mathbf{y} \to \mathbf{x}} u(\mathbf{y}),\ \mathbf{x} \in \Gamma$.

În particular, notând cu $\cdot|_\Gamma$ restricţia uzuală la frontiera Γ, avem

$$
\mathrm{Tr}^\pm v = v|_\Gamma,\ \forall\, v \in C^\infty(\overline{\mathfrak{D}}_\pm). \tag{3.1.7}
$$

Lema 3.1.4 (**[2], [14], [44], [79], [83]**) *Fie $\mathfrak{D}_- := \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu Lipschitz mărginit cu frontiera Γ şi fie $\mathfrak{D}_+ := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathfrak{D}}$. Atunci au loc următoarele proprtietăţi:*

(a) Pentru orice $s \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ există un operator liniar şi mărginit $\mathrm{Tr}^- : H^s(\mathfrak{D}_-) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ a cărui acţiune este compatibilă cu cea a restricţiei la frontieră în (3.1.7). Acestă este surjectiv şi are o inversă la dreapta $\mathcal{Z}^- : H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^s(\mathfrak{D}_-),\ \mathrm{Tr}^-(\mathcal{Z}^-\phi) = \phi,\ \forall\, \phi \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Pentru $s > \frac{3}{2}$, operatorul $\mathrm{Tr}^- : H^s(\mathfrak{D}_-) \to H^1(\Gamma)$ este de asemenea liniar şi mărginit.

(b) Dacă $s \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, atunci există un operator $\mathrm{Tr}^+ : H^s_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathfrak{D}}_+) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, care este liniar şi continuu, cu o acţiune compatibilă cu cea din (3.1.7). Acesta este surjectiv având o inversă la dreapta[3] $\mathcal{Z}^+ : H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^s_0(\overline{\mathfrak{D}}_+)$.

[2]Prin definiţie $F \in L^p_{s+\frac{1}{p},\mathrm{loc}}(\overline{\mathfrak{D}}_+, \mathbb{R}^n)$ dacă şi numai dacă $F \in L^p_{s+\frac{1}{p}}(B \cap \mathfrak{D}_+)$ pentru orice bilă deschisă $B \subseteq \mathbb{R}^n$ cu $B \cap \mathfrak{D}_+ \neq \emptyset$.

[3]Dacă $p \in (1, \infty)$ şi $s \in (0, 1)$, $L^p_{s,0}(X)$ este mulţimea tuturor elementelor $f \in L^p_s(\mathbb{R}^n)$ cu suportul compact în $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Fie $s \in [0,1]$ dat. Deoarece $\mathbf{n}_\Gamma \in L^\infty(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, funcţionala $\nu_\Gamma \in H^{-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n) := \big(H^s(\Gamma, \mathbb{R}^n)\big)^*$, dată de $\langle \nu_\Gamma, \mathbf{w}\rangle_{\partial\mathcal{D}} := \int_{\partial\mathfrak{D}} \langle \mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{w}\rangle d\sigma$, $\forall\, \mathbf{w} \in H^s(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, este bine definită, liniară şi mărginită, precizând conormala exterioară ν_Γ la Γ. Are loc următorul rezultat datorat lui Mitrea şi Wright [79, Teorema 10.10] pentru sistemul Stokes pe spaţii Sobolev sau Besov generale (a se vedea şi [56, Lema 2.2] pentru extensia la sistemul Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte)[4]:

Lema 3.1.5 **[79]** *Fie* $\mathfrak{D}_- := \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ *un domeniu Lipschitz mărginit cu frontiera* Γ. *Atunci pentru orice* $\beta \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ operatorul de derivare conormală $\partial_{\nu_\Gamma}^- : H^{1+\beta}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_{\mathrm{St}}) \to H^{-\frac{1}{2}+\beta}(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ *dat de*

(3.1.8)
$$\left\langle \partial_{\nu_\Gamma}^-(\mathbf{u}, \pi), \mathbf{\Psi} \right\rangle_\Gamma := 2\int_{\mathfrak{D}} E_{jk}(\mathbf{u}) E_{jk}(\mathcal{Z}^- \mathbf{\Psi}) d\mathbf{x} - \int_{\mathfrak{D}} \pi \mathrm{div}(\mathcal{Z}^- \mathbf{\Psi}) d\mathbf{x},\ \forall\, \mathbf{\Psi} \in H^{\frac{1}{2}+\beta}(\Gamma, \mathbb{R}^n)$$

este bine definit, liniar şi mărginit, unde $E_{jk}(\mathbf{u}) := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$. *În plus, pentru orice* $(\mathbf{u}, \pi) \in H^{1+\beta}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_{\mathrm{St}})$ *şi* $\mathbf{w} \in H^{1-\beta}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)$, *are loc formula lui Green*

$$2\int_{\mathfrak{D}} E_{jk}(\mathbf{u}) E_{jk}(\mathbf{w}) d\mathbf{x} = \int_{\mathfrak{D}} \pi\ \mathrm{div}\ \mathbf{w} d\mathbf{x} - \left\langle \partial_{\nu_\Gamma}^-(\mathbf{u}, \pi), \mathrm{Tr}^- \mathbf{w} \right\rangle_\Gamma. \tag{3.1.9}$$

Observaţia 3.1.6 Pentru orice $(\mathbf{u}, \pi) \in H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathfrak{D}}_+, \mathbb{R}^n) \times L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathfrak{D}}_+)$ satisfăcând sistemul Stokes şi condiţia de creştere la infinit: $\nabla^k \mathbf{u}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{2-n-k})$, $\pi(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{1-n})$, $|\mathbf{x}| \to \infty$, $k = 0, 1$ şi $n \geq 3$, sau $\nabla^k \mathbf{u}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1-k})$, $\pi(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-2})$, $|\mathbf{x}| \to \infty$, pentru $k = 0, 1$ şi $n = 2$, obţinem formula lui Green (a se vedea [79])

$$2\int_{\mathfrak{D}_+} E_{jk}(\mathbf{u}) E_{jk}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} = \int_{\mathfrak{D}_+} \pi \mathrm{div} \mathbf{u} d\mathbf{x} - \langle \partial_{\nu_\Gamma}^+(\mathbf{u}, \pi), \mathrm{Tr}^+ \mathbf{u}\rangle_\Gamma. \tag{3.1.10}$$

3.2 Operatori pseudodiferenţiali pe $\mathbb{R}^n$

În această secţiune prezentăm proprietăţi importante ale operatorilor pseudodiferenţiali pe $\mathbb{R}^n$. Principalele surse utilizate în pregătirea acestei secţiuni sunt [44, Capitolul 6], [47], [117, Capitolul 7]. Alte surse importante în acest domeniu sunt cărtile lui Taylor [106] şi Wong [118].

3.2.1 Operatori compacţi

3.2.2 Proprietăţi de bază ale operatorilor pseudodiferenţiali în $\mathbb{R}^n$

Fie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mulţimea funcţiilor infinit diferenţiabile $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ astfel încât, pentru toţi multi indicii α şi β, să avem

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta u)(x)| < \infty. \tag{3.2.1}$$

Această mulţime[5] se numeşte *spaţiul Schwartz*. Familia seminormelor $|\cdot|_{k;\mathcal{S}}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, definite pe $\mathcal{S}$ prin

$$|u|_{k;\mathcal{S}} := \max_{|\alpha|+|\beta| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta u)(x)|, \tag{3.2.2}$$

[4] De întreg parcursul acestei teze, utilizăm convenţia lui Einstein de însumare după indicele care se repetă.
[5] Mulţimea $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ a funcţiilor infinit diferenţiabile pe $\mathbb{R}^n$ cu suport compact este incusă în $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

conduce la o topologie pe mulţimea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, înzestrând-o cu o structură de spaţiu Frechét (a se vedea şi [117, p. 233]).

Menţionăm că transformata Fourier $\mathcal{F}$ este o reprezentare bine definită pe spaţiul $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pentru o funcţie $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avem

$$(\mathcal{F}u)(\zeta) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\zeta} u(x)dx, \tag{3.2.3}$$

unde $x \cdot \zeta := \sum_{k=1}^{n} x_k \zeta_k$, pentru $x = (x_1, \ldots, x_n),\ \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$, şi $i^2 = -1$. Utilizăm notaţia $\hat{u}$ în loc de $\mathcal{F}u$.

Transformata Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ este un izomorfism liniar şi topologic. Deci există inversa $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dată de formula

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\zeta\cdot x} \hat{u}(\zeta)d\zeta. \tag{3.2.4}$$

Menţionăm că izomorfismul liniar topologic $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se extinde la spaţiul dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Notând cu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dualitatea dintre spaţiile $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ şi $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, obţinem $\langle \mathcal{F}u, \Psi \rangle = \langle u, \mathcal{F}\Psi \rangle$ pentru orice $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (a se vedea [117, p. 233]).

Clasele S^m

Considerăm un operator diferenţial de ordinul $m \in \mathbb{N}$,

$$T(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2.5}$$

unde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ este un multi indice, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, $D_k = i^{-1} \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ şi $|\alpha| := \alpha_1 + ...\alpha_n$ este ordinul lui D^α. Presupunem că $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ţinând cont de transformata Fourier avem (a se vedea [117, p. 236])

$$T(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\zeta} T(x, \zeta)\hat{u}(\zeta)d\zeta, \tag{3.2.6}$$

unde $\zeta^\alpha := \zeta_1^{\alpha_1}...\zeta_n^{\alpha_n}$. Polinomul $T(x, \zeta) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\zeta^\alpha$ se numeşte *simbol* a lui $T(x, D)$, iar *simbolul principal* $\sigma_m(T)$ a lui T este $(\sigma_m(T))(x, \zeta) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\zeta^\alpha$ (a se vedea şi [117, p. 236]). Dacă coeficienţii a_α ai operatorului diferenţial (3.2.5) sunct funcţii de clasă C^∞, cu derivatele de orice ordin mărginite, $a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, atunci simbolul $T(x, \zeta)$ aparţine clasei S^m, $m \in \mathbb{N}$, definită mai jos.

Definiţia 3.2.1 [117] Fie $m \in \mathbb{R}$. Atunci mulţimea $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ formată din funcţiile $T \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ astfel încât, pentru toţi multi indicii α, β, să avem

$$|D_\zeta^\alpha D_x^\beta T(x, \zeta)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\zeta|)^{m-|\alpha|},\ \forall\, x, \zeta \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2.7}$$

se numeşte *spaţiul simbolurilor de ordinul* m.

Utilizăm notaţiile $S^{-\infty} := \bigcap S^m,\ S^\infty := \bigcup S^m$.

În continuare folosim notaţia simplificată $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Menţionăm următorul rezultat:

Propoziţia 3.2.2 [117] *Fie $T \in S^m$ dat. Dacă $u \in \mathcal{S}$, atunci*

$$T(x, D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\zeta} T(x, \zeta)\hat{u}(\zeta)d\zeta, \tag{3.2.8}$$

este o funcţie $T(x, D)u(x) \in \mathcal{S}$. În plus, reprezentarea $T(x, D) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ este continuă. Reprezentarea biliniară $S^m \times \mathcal{S} \ni (T, u) \mapsto T(x, D)u \in \mathcal{S}$ este de asemenea continuă.

Observaţia 3.2.3 Operatorul $T(x, D)$ dat de (3.2.8) se numeşte *operator pseudodiferenţial* $(p.d.o.)$ *de ordinul* m *pe* $\mathbb{R}^n$. Mulţimea operatorilor pseudodiferenţiali de ordinul m pe $\mathbb{R}^n$ se notează cu $OPS^m(\mathbb{R}^n)$. Pentru o descriere detaliată a acestei clase ne referim la [44, Capitolul 6], [47], [78], [117, Capitolul 7], [118].

Definiţia 3.2.4 [117] Fie $m \in \mathbb{R}$. Atunci funcţia $A(x, \zeta)$ aparţine lui $J^m = J^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:

(i) $A(x, \zeta)$ este (pozitiv) omogenă de ordinul m, adică $A(x, c\zeta) = c^m A(x, \zeta),\ \forall\, c > 0,\ \zeta \neq 0,$

(ii) $A \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0))$

(iii) Orice derivată $D^\alpha_\zeta D^\beta_x A(x, \zeta)$ este mărginită pe $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{S}^{n-1}$, $A \in C^\infty_b(\mathbb{R}^n \times \mathfrak{S}^{n-1})$, unde $\mathfrak{S}^{n-1} := \{\zeta \in \mathbb{R}^n : |\zeta| = 1\}$ este sfera unitate în $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 3.2.5 [117] Fie $T(x, \zeta) \in S^m$ dat. Atunci T se numeşte (-1) *simbol clasic* dacă există funcţiile omogene $H_m \in J^m$, un simbol $T_{m-1} \in S^{m-1}$, şi o funcţie de separare χ, astfel încât T admite reprezentarea $T(x, \zeta) = \chi(\zeta) H_m(x, \zeta) + T_{m-1}(x, \zeta)$.

Existenţa reprezentării precedente nu depinde de alegerea funcţiei χ (a se vedea [117, p. 258]).

Mulţimea (-1) simbolurilor clasice se notează cu $Cl^{-1}S^m$. Un simbol $T \in Cl^{-1}S^m$ are *partea principală* dată de $\pi T(x, \zeta) := H_m(x, \zeta),\ H_m \in J^m$. Menţionăm că spaţiul Sobolev $L^2_s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, este definit prin (a se vedea [117, p. 260])

$$L^2_s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) : ||u||^2_s := \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\zeta)|^2 (1 + |\zeta|^2)^s d\zeta < \infty \right\}. \tag{3.2.9}$$

Un rezultat fundamental referitor la operatorii pseudodiferenţiali arată că orice operator pseudodiferenţial $T(x, D) \in OPS^m$ se extinde la un operator continuu pe orice spaţiu Sobolev:

Teorema 3.2.6 (**[43], [117]**) *Fie $T \in S^m$ un simbol dat. Atunci operatorul pseudodiferenţial asociat $T(x, D)$ se extinde la un operator continuu, notat în acelaşi fel,*

$$T(x, D) : L^2_s(\mathbb{R}^n) \to L^2_{s-m}(\mathbb{R}^n),\ \ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

3.2.3 Operatori eliptici pe $\mathbb{R}^n$

Mulţimea operatorilor pseudodiferenţiali conţine o clasă de operatori ce intervin în multe aplicaţii dedicate problemelor cu valori pe frontieră pentru ecuaţii cu derivate parţiale şi care au inverse modulo operatori compacţi. Aceştia sunt de asemenea operatori pseudodiferenţiali. Aceasta este clasa operatorilor eliptici. Principalele surse utilizate în pregătirea acestui capitol sunt [44], [117]. În continuare, prezentăm definiţia parametrixului:

Definiţia 3.2.7 [117] Fie $T = T(x, D) \in OPS^m(\mathbb{R}^n)$ un operator pseudodiferenţial. Dacă există un operator $B \in OPS^{-m}(\mathbb{R}^n)$ asfel încât

$$TB - I \in OPS^{-\infty}(\mathbb{R}^n),\ BT - I \in OPS^{-\infty}(\mathbb{R}^n), \tag{3.2.10}$$

atunci B se numeşte *parametrix* al lui T.

Menţionăm că $OPS^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} OPS^m(\mathbb{R}^n)$ şi $A \in OPS^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ dacă şi numai dacă A este un operator neted (a se vedea [44, Teorema 6.1.10]).

Definiţia 3.2.8 [117] Un operator $T \in OPS^m(\mathbb{R}^n)$ se numeşte *eliptic de ordinul m* dacă există un operator $B \in OPS^{-m}(\mathbb{R}^n)$ astfel încât $TB - I \in OPS^{-1}(\mathbb{R}^n),\ BT - I \in OPS^{-1}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.2.9 (**[43], [44], [106], [117]**) *Fie $T \in OPS^m(\mathbb{R}^n)$. Atunci operatorul T este eliptic de ordinul m dacă şi numai dacă admite un parametrix, adică un operator $B \in OPS^{-m}(\mathbb{R}^n)$ satisfăcând condiţia* (3.2.10).

Exemplul 3.2.10 Laplacianul $\triangle := \sum_{j=1}^n D_{x_j}^2$ şi orice perturbaţie a sa de ordinul zero, $\triangle + \lambda\mathbb{I}$, $\lambda > 0$, au simbolul principal $\sum_{j=1}^n \zeta_j^2$. Prin urmare, aceşti operatori sunt eliptici. În plus, dacă $g_{ij}(x)$ este o metrică Riemanniană pe $\mathbb{R}^n$ cu inversa $g^{ij}(x)$, atunci Laplacianul cu coeficienţi variabili $\triangle := \sum_{j=1}^n g^{ij} D_{x_i} D_{x_j} + A$, A fiind un operator diferenţial de ordinul întâi, are partea principală $\sum_{j=1}^n g^{ij}\zeta_i\zeta_j$, şi deci este eliptic.

3.2.4 Operatori eliptici pe domenii în $\mathbb{R}^n$

3.2.5 Sisteme eliptice în sensul Agmon-Douglis-Nirenberg pe $\mathbb{R}^n$

În această secţiune prezentăm definiţia sistemelor eliptice în sensul Agmon-Douglis-Nirenberg pe domenii din $\mathbb{R}^n$, precum şi proprietăţile lor de bază. Acestea apar în multe aplicaţii dedicate problemelor cu valori pe frontieră pe domenii Lipschitz. Principalele surse utilizate în pregătirea acestei părţi sunt [44], [117].

Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un domeniu şi $T(x, D) = (T_{jk}(x, D))_{j,k=1,\dots,p},\ \ x \in \Omega$ o matrice de operatori pseudodiferenţiali $T_{jk}(x, D)$ cu simbolurile $T^{jk} = T^{jk}(x, \zeta)$. Presupunem că există numerele $s_j, t_k \in \mathbb{R}$, $j, k = 1, \dots, p$, astfel încât aceste simboluri satisfac condiţia $T^{jk} \in \mathbf{S}^{s_j+t_k}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. În particular, considerăm *sistemul Agmon-Douglis-Nirenberg* de ecuaţii cu derivate parţiale (a se vedea [44, p. 328])

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{|\beta|=0}^{s_j+t_k} T_\beta^{jk}(x) D^\beta u_k(x) = f_j(x),\ j = 1, \dots, p, \tag{3.2.11}$$

cu matricea operatorilor psedudodiferenţiali $T = (T_{jk})_{j,k=1,\dots,p}$ dată de $T_{jk} := \sum_{|\beta|=0}^{s_j+t_k} T_\beta^{jk}(x) D^\beta$, şi simbolurile corespunzătoare $T^{jk}(x) \in \mathbf{S}^{s_j+t_k}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Presupunem că $s_j \leq 0$.

Definiţia 3.2.11 (**[44], [117]**) Matricea $(T^{jk}(x, \zeta))_{j,k=1,\dots,p}$,

$$T^{jk}(x, \zeta) := \sum_{|\beta|=0}^{s_j+t_k} T_\beta^{jk}(x) i^{|\beta|} \zeta^\beta, \tag{3.2.12}$$

se numeşte *matricea simbolurilor* sistemului (3.2.11). *Partea principală* este definită prin $T_{s_j+t_k}^{jk}(x, \zeta) := \sum_{|\beta|=s_j+t_k} T_\beta^{jk}(x) i^{|\beta|} \zeta^\beta$, unde $T_{s_j+t_k}^{jk}(x, \zeta)$ este egală cu zero dacă $T^{jk}(x, \zeta)$ are ordinul $\leq s_j + t_k$.

Definiţia 3.2.12 (**[44], [117]**) Fie $(T_{jk})_{j,k=1,\dots p}$ o matrice de operatori pseudodiferenţiali. Atunci

- *Determinantul caracteristic* $H(x, \zeta)$ se definit de $H(x, \zeta) := \det[(\tilde{T}_{s_j+t_k}^{jk}(x, \zeta))]_{p\times p}$, unde $\tilde{T}_{s_j+t_k}^{jk}(x, \zeta) := |\zeta|^{s_j+t_k} T_{s_j+t_k}^{jk}\left(x, \dfrac{\zeta}{|\zeta|}\right)$.
- Sistemul (T_{jk}) este *eliptic în sens Agmon-Douglis -Nirenberg* dacă $H(x, \zeta) \neq 0,\ \forall\ x \in \Omega,\ \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Observaţia 3.2.13 Având în vedere Definiţia 3.2.12 *rezultă că Definiţia* 3.2.7 *a parametrixului $Q_0 = (Q_{jk})_{j,k=1,\dots,p}$ pentru operatorul $T = (T_{jk})_{j,k=1,\dots,p}$, cu $T_{jk} \in OPS^{s_j+t_k}(\Omega)$, şi existenţa unui parametrix au loc şi pentru sistemele eliptice Agmon-Douglis-Nirenberg.*

3.3 Operatori pseudodiferenţiali pe varietăţi Riemanniene compacte

În această secţiune prezentăm clasa operatorilor pseudodiferenţiali pe varietăţi Riemanniene compacte, precum şi câteva proprietăţi fundamentale referitoare la aceşti operatori. Principalele surse utilizate în pregătirea acestei secţiuni sunt [44, Capitolul 8], [47], [117].

3.3.1 Rezultate generale referitoare la operatori pseudodiferenţiali pe varietăţi Riemanniene compacte

Un spaţiu topologic M cu proprietatea că orice punct M are o vecinătate omeomorfă cu o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte *spaţiu local Euclidian*. În plus, o pereche (U, q), cu $U \subset M$ mulţime deschisă şi q omeomorfism a lui U pe o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, se numeşte *hartă*. Dacă cel puţin două hărţi sunt implicate, utilizăm notaţiile $q : U_q \to V_q$, unde V_q este imaginea lui U_q prin q. În continuare, reamintim definiţia unei structuri C^s a unui spaţiu local Euclidian.

Definiţia 3.3.1 [117] Dacă $s \in \mathbb{N}$, sau $s = \infty$, atunci o *structură* C^s *pe un spaţiu local Euclidian* M este o familie $\mathfrak{F}$ de transformări de coodonate $q : U_q \to V_q$ astfel încât următoarele afirmaţii au loc:

(i) Domeniile U_q acoperă M, $M = \bigcup_{q\in\mathfrak{F}} U_q$.

(ii) Fie $q_1, q_2 \in \mathfrak{F}$ astfel încât $U_{q_1} \cap U_{q_2} \neq \emptyset$. Atunci aplicaţia $q_2 \circ q_1{}^{-1} : q_1(U_{q_1} \cap U_{q_2}) \to q_2(U_{q_1} \cap U_{q_2})$ este de clasă C^s.

(iii) Dacă q_0 este o transformare de coordonate astfel încât $q_0 \circ q^{-1}$ şi $q \circ q_0^{-1}$ sunt de clasă C^s, pentru orice $q \in \mathfrak{F}$, atunci $q_0 \in \mathfrak{F}$, adică familia $\mathfrak{F}$ este maximală în raport cu (ii).

Se arată că o structură C^s poate fi definită printr-o familie arbitrară $\mathfrak{E}$ care satisface numai condiţiile (i) şi (ii) din Definiţia 3.3.1 (a se vedea şi [117, p. 114]). O astfel de familie $\mathfrak{E}$ se numeşte *atlas* C^s.

Definiţia 3.3.2 [117] O pereche $(M, \mathfrak{F})$ se numeşte *varietate* C^s, dacă M este un spaţiu topologic Hausdorff, care are o bază numărabilă de mulţimi deschise[6] şi este local Euclidian , iar $\mathfrak{F}$ este o structură C^s pe M.

Exemplul 3.3.3 Spaţiul Euclidian $\mathbb{R}^n$ este o varietate cu un atlas dat de o singură hartă ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{I}$), care conduce la *structura* C^∞ *standard pe* $\mathbb{R}^n$.

În continuare notăm cu $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ *fibratul tangent*, unde T_pM este spaţiul tangent în punctul $p \in M$ şi cu $T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$ spaţiul dual, adică *fibratul cotangent*. Atunci:

Definiţia 3.3.4 [117] O varietate M cu o metrică Riemanniană g pe spaţiul fibrat tangent TM se numeşte *varietate Riemanniană*.

Fie (M, g) o varietate Riemanniană compactă de dimensiune $p \geq 2$ înzestrată cu un tensor metric Riemannian [7] $g := \sum_{j,k=1}^{p} g_{jk} dx_j \otimes dx_k =: g_{jk} dx_j \otimes dx_k$, şi fie (g^{jk}) inversul lui (g_{jk}). Menţionăm că elementul de volum pe M este dat de $\mathrm{dVol} = \sqrt{g} dx_1 \ldots dx_p$, unde $g := \det(g_{jk})$. În continuare definim produsul scalar pe spaţiul 1-formelor $\Lambda^1 TM$ (a se vedea [78], [117]): $\langle dx_j, dx_k\rangle = g^{jk}$, $\langle X, Y\rangle = X_j g^{jk} Y_k$, unde câmpul vectorial $X = X^k \partial_k \in TM$ este identificat cu 1-forma $X_r dx_r = X^k g_{kr} dx_r$, $X_r = g_{kr} X^k$, iar notaţia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ este folosită pentru produsul scalar.

[6] Există o bază numărabilă pentru topologia lui M.

[7] De-a lungul acestei teze utilizăm regula de însumare după indicele care se repetă.

Fie X o mulţime deschisă în M. Notăm cu $C_0^\infty(X) = C^\infty(X, \mathbb{C})$ spaţiul funcţiilor de clasă C^∞ pe X cu suport compact. Utilizând faptul că M este compactă, obţinem că $C_0^\infty(M) = C^\infty(M)$. În continuare, definim spaţiile Sobolev de funcţii cu valori complexe definite pe varietatea Riemanniană compactă M.

Definiţia 3.3.5 **[117]** Presupunem că M este o varietate Riemaniană compactă şi fie $s \geq 0$. *Spaţiul Sobolev* $L_s^2(M)$ este mulţimea funcţiilor $u : M \to \mathbb{C}$ astfel încât $(\varphi \circ u) \circ q^{-1} \in L_s^2(\mathbb{R}^n)$ pentru fiecare hartă locală (U, q), $q : U \to V$, şi orice $\varphi \in C_0^\infty(U)$.

Presupunem că $q : U \to V$ defineşte o hartă a lui M. Notăm cu $q^* f = f \circ q$ aplicaţia *pull-back* a lui $f \in C^\infty(V)$ şi $q^{*-1}h = h \circ q^{-1}$ aplicaţia *push-forward* a lui $h \in C^\infty(U)$.

Definiţia 3.3.6 **[117]** Fie $T : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ un operator liniar. T se numeşte *operator pseudodiferenţial de ordinul* $m \in \mathbb{R}$ *pe* M dacă operatorul push-forward $Q(\varphi T\psi, q) := q^{*-1}(\varphi T\psi)q^*$ este un operator pseudodiferenţial de ordinul m pe $\mathbb{R}^n$, adică $Q(\varphi T\psi, q) \in OPS^m(\mathbb{R}^n)$, pentru orice hartă (U, q) pe M, şi pentru toţi $\varphi, \psi \in C_0^\infty(U)$.

Spaţiul operatorilor pseudodiferenţiali de ordinul m pe M se notează cu $OPS^m(M)$. În plus, similar cu cazul Euclidian, notăm cu $\sigma_m(T)(x, \zeta)$ *simbolul principal* a lui $\varphi T\psi$. De asemenea, fie $OC^\infty(M)$ mulţimea operatorilor integrali pe M cu nucleul în $C^\infty(M \times M)$.

Teorema 3.3.7 **[117]** *Dacă* $T \in OPS^m(M)$*, atunci transformarea* $T : L_s^2(M) \to L_{s-m}^2(M)$ *este continuă, pentru orice* $s \in \mathbb{R}$.

Definiţia 3.3.8 **[117]** Un operator $T \in OPS^m(M)$ se numeşte (-1) *operator pseudodiferenţial clasic pe* M dacă pentru orice hartă (U, q) pe M şi $\varphi, \psi \in C_0^\infty(M)$, $(\varphi T\psi)_q \in OPS^m(\mathbb{R}^n)$, adică operatorul push-forward $(\varphi T\psi)_q$ este (-1) clasic pe $\mathbb{R}^n$.

Mulţimea operatorilor pseudodiferenţiali clasici de ordinul m pe M se notează cu $OPS_{\text{cl}}^m(M)$. Similar cu cazul Euclidian, un operator pseudodiferenţial clasic T pe M este *eliptic* dacă simbolul principal nu se anulează (pentru mai multe detalii a se vedea [117, p. 307], [47]). În plus este posibilă considerarea unui parametrix pentru un operator eliptic $T \in OPS_{\text{cl}}^m(M)$, adică un operator $T' \in OPS_{\text{cl}}^{-m}(M)$ astfel încât $TT' = \mathbb{I} - R$, unde $R \in OPS_{\text{cl}}^{-1}(M)$.

Teorema 3.3.9 **[47]** *Dacă* T *este un operator eliptic de ordinul* m *pe o varietate Riemanniană compactă* M*, atunci, pentru orice* $s \in \mathbb{R}$*,* $T : H^s(M) \to H^{s-m}(M)$ *este un operator Fredholm, iar indexul lui depinde numai de simbolul principal* T.

Menţionăm că, utilizând lema de compactitate a lui Rellich (a se vedea [47, Teorema 11.6]), se deduce că incluziunea $i : H^t(M) \to H^s(M)$ este compactă, pentru orice $t > s$. Astfel:

Corolarul 3.3.10 **[47]** *Dacă* T *este un operator pseudodiferenţial de ordin negativ, atunci* T *este compact pe orice spaţiu Sobolev.*

3.3.2 Sisteme eliptice de operatori pseudodiferenţiali pe varietăţi Riemanniene compacte

3.3.3 Sisteme eliptice de tipul Agmon-Douglis-Nirenberg pe varietăţi Riemanniene compacte

Un sistem important de operatori pseudodiferenţiali pe varietăţi Riemanniene este sistemul eliptic Agmon-Douglis-Nirenberg. În continuare, prezentăm această noţiune şi proprietăţi fundamentale corespunzătoare, ca existenţa unui parametrix, utilizând [44], [117, p. 334].

Fie $s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_p$ numere reale. Considerăm o matrice de operatori $T = (T_{ij})_{p\times p}$ astfel încât fiecare componentă $T_{ij} \in OPS^{m_{ij}}_{\text{cl}}(M)$ este un operator (-1) pseudodiferenţial clasic pe M de ordinul $m_{ij} \leq s_i + t_j$. *Partea principală* a sistemului Agmon-Douglis-Nirenberg este matricea $\pi_D(T(x,\zeta)) := (t_{ij}(x,\zeta))_{p\times p}$, cu componentele $t_{ij}(x,\zeta) = \pi_{s_i+t_j}T_{ij}$ dacă ordinul operatorului T_{ij} este $s_i + t_j$, şi 0 în rest. Utilizăm notaţiile $s := (s_1, \ldots, s_p)$ şi $t := (t_1, \ldots, t_p)$. Clasa operatorilor matriciali definiţi mai sus se notează cu $OClS^{s+t}(M, p \times p)$ (pentru mai multe detalii ne referim la [117, Capitolul 8]).

Operatorul matricial T se numeşte *eliptic în sens Agmon-Douglis-Nirenberg* dacă există numerele reale $s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_p$, astfel încât $T \in OCIS^{s+t}(M, p \times p)$ şi

$$\det(\pi_D(T(x,\zeta))) \neq 0,\ \forall\, (x,\zeta) \in T^*(M) \setminus \{0\} \tag{3.3.1}$$

(a se vedea [117, p. 334]). Are loc următoarea proprietate:

Teorema 3.3.11 [117] *Fie $T = (T_{ij}) \in OCIS^{s+t}(M, p \times p)$ o matrice de operatori pseudodiferenţiali de tipul Agmon-Douglis-Nirenberg cu numere ADN $s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_p$. Dacă T este operator eliptic în sens Agmon-Douglis-Nirenberg, atunci $T : L^2_{\ell+t_1}(M) \oplus \ldots \oplus L^2_{\ell+t_p}(M) \to L^2_{\ell-s_1}(M) \oplus \ldots \oplus L^2_{\ell-s_p}(M)$ este Fredholm pentru orice $\ell \in \mathbb{R}$.*

3.4 Operatori Fredholm

În această subsecţiune prezentăm noţiunea de operator Fredholm şi proprietăţi asociate acestuia. Principalele surse utilizate în această secţiune sunt [79, p. 205] şi [117].

Fie X şi Y spaţii Banach şi $\mathcal{L}(X,Y)$ mulţimea operatorilor liniari, continui $T : X \to Y$. De asemenea fie X^* spaţiul dual a lui X, adică mulţimea $X^* := \{f : X \to \mathbb{R} : f$ liniar şi continuu$\}$. Pentru $f \in X^*$, utilizăm notaţia $f(x) := \langle f, x\rangle_X$. Dacă $F \in \mathcal{L}(X,Y)$, definim *operatorul dual* $F^* : Y^* \to X^*$ prin $\langle F^*y^*, x\rangle_X = \langle y^*, Fx\rangle_Y$. Menţionăm că $||F^*|| = ||F||$ şi $F^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

Definiţia 3.4.1 (**[79], [117]**) Fie $F \in \mathcal{L}(X,Y)$. Atunci F este *operator Fredholm* dacă satisface următoarele condiţii:

(i) Nucleul lui F, $\text{Ker}(F) := \{x \in X : Fx = 0\}$, este finit dimensional

(ii) Rangul lui F, $FX := \{y \in Y : \exists\, x \in X$ astfel încât $Fx = y\}$, este închis în Y

(iii) Conucleul lui F, $\text{Coker}(F) := Y/FX$, este finit dimensional.

Numărul

$$\text{ind}(F) := \dim(\text{Ker}(F)) - \dim(\text{Coker}(F)) < \infty \tag{3.4.1}$$

se numeşte *indexul* operatorului Fredholm F.

Fie $\Phi(X,Y) := \{F \in \mathcal{L}(X,Y) : F$ Fredholm$\}$ mulţimea operatorilor Fredholm definiţi pe X cu valori în Y.

Definiţia 3.4.2 [79] Fie X şi Y spaţii Banach. Considerăm mulţimile

$$\Phi_+(X,Y) := \Big\{F \in \mathcal{L}(X,Y) : F \text{ are rangul închis şi nucleul finit dimensional}\Big\}, \tag{3.4.2}$$

$$\Phi_-(X,Y) := \{F \in \mathcal{L}(X,Y) : F \text{ are rangul închis şi conucleul finit dimensional}\}. \tag{3.4.3}$$

Prin urmare, mulţimea operatorilor semi-Fredholm este $\Phi_-(X,Y)\cup\Phi_+(X,Y)$, iar funcţia index $\mathrm{ind}:\Phi(X,Y)\to\mathbb{Z}$, dată de (3.4.1), poate fi extinsă la mulţimea tuturor operatorilor semi-Fredholm, astfel (a se vedea [79, Definiţia 11.34]):

(3.4.4) $\mathrm{ind}:\Phi_-(X,Y)\cup\Phi_+(X,Y)\to\mathbb{Z}\cap\{\pm\infty\},\ \mathrm{ind(F)}:=\mathrm{dim(Ker(F))}-\mathrm{dim(Coker(F))}.$

Menţionăm că dacă $F\in\mathcal{L}(X,Y)$, atunci FX are codimensiune finită în $Y \Longleftrightarrow \dim(Y/FX)<\infty$, adică dimensiunea spaţiului Y/FX este *codimensiunea* lui FX în Y.

În continuare prezentăm principalele proprietăţi referitoare la operatorii Fredholm, care sunt utile în aplicaţii ale teoriei potenţialului în studiul problemelor eliptice cu valori pe frontieră. Aceste proprietăţi pot fi găsite în [79] şi [117].

Teorema 3.4.3 (**[79], [117]**) *Fie X şi Y spaţii Banach şi $F\in\mathcal{L}(X,Y)$. Au loc urătoarele proprietăţi:*

(i) Fie $F\in\Phi_\pm(X,Y)$, $S\in\Phi_\pm(Y,Z)$. Atunci $SF\in\Phi_\pm(X,Z)$, $\mathrm{ind}(SF)=\mathrm{ind}(S)+\mathrm{ind}(F)$.

(ii) $F\in\Phi_+(X,Y)$ dacă şi numai dacă F este mărginit la stânga modulo operatori compacţi. Prin urmare, există un spaţiu Banach Z, un operator compact $K:X\to Z$ şi o constantă $C>0$ astfel încât $||x||_X\le C||Fx||_Y+||Kx||_Z,\ \forall\, x\in X$.

(iiii) $F\in\Phi(X,Y)$ dacă şi numai dacă există operatorii $S_1,S_2\in\mathcal{L}(X,Y)$, $K_1\in\mathcal{K}(Y,Y)$ şi $K_2\in\mathcal{K}(X,X)$ astfel încât $FS_1=I_Y+K_1,\ \ S_2F=I_X+K_2$, unde $\mathcal{K}(X,X)$ este mulţimea operatorilor compacţi de la X la X, iar $I_X:X\to X$ este operatorul identitate pe X.

Lema 3.4.4 **[79]** *Fie X, Y, Z şi W spaţii Banach. Presupunem că următoarea diagramă*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & W \end{array} \tag{3.4.5}$$

este comutativă, unde toate săgeţile reprezintă operatori liniari şi mărginiţi. Dacă trei din ei sunt operatori Fredholm atunci şi al patrulea este de asemenea operator Fredholm.

Lema 3.4.5 **[79]** *Fie X_j, Y_j, $j=1,2$, spaţii Banach astfel încât incluziunile $X_1\hookrightarrow X_2$ şi $Y_1\hookrightarrow Y_2$ sunt continue. Presupunem că incluziunea $Y_1\hookrightarrow Y_2$ are imaginea densă în Y. Fie $F\in\Phi(X_1,Y_1)\cap\Phi(X_2,Y_2)$ cu proprietatea că $\mathrm{ind(F:X_1\to Y_1)}=\mathrm{ind(F:X_2\to Y_2)}$. Atunci $\mathrm{Ker(F:X_1\to Y_1)}=\mathrm{Ker(F:X_2\to Y_2)}$.*

Următorul rezultat este dedicat stabilităţii indexului şi proprietăţii Fredholm (a se vedea [12] pentru cazul spaţiilor Banach. Extinderea la spaţii cvasi-Banach a fost obţinută de Kalton, Mayboroda şi Mitrea [48], utilizând rezultate din [49], [79, Theorem 11.43]).

Teorema 3.4.6 **[12]** *Fie (X_0, X_1) şi (Y_0, Y_1) două perechi compatibile de spaţii Banach. Presupunem că X_0+X_1 şi Y_0+Y_1 sunt convexe. Fie $F:X_j\to Y_j$, $j=0,1$ un operator liniar şi mărginit. Fie*[8] *$X_\theta:=[X_0,X_1]_\theta$ şi $Y_\theta:=[Y_0,Y_1]_\theta$, $\theta\in(0,1)$. Atunci:*

- *F induce un operator liniar $F_\theta:X_\theta\to Y_\theta,\ \forall\,\theta\in(0,1)$. În plus, are loc inegalitatea de interpolare*

$$||F_\theta||_{\mathcal{L}(X_\theta,Y_\theta)}\le ||F||^{1-\theta}_{\mathcal{L}(X_0,X_0)}||F||^{\theta}_{\mathcal{L}(X_1,X_1)},\ \ \theta\in(0,1). \tag{3.4.6}$$

[8] Parantezele $[\cdot,\cdot]_\theta$ corespund metodei de interpolare complexă (pentru detalii, a se vedea [110]).

- *Dacă există* $\theta_0 \in (0,1)$ *astfel încât* $F_{\theta_0} : X_{\theta_0} \to Y_{\theta_0}$ *este izomorfism, atunci există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât* $F_\theta : X_\theta \to Y_\theta$ *este de asemenea izomorfism, pentru orice* $\theta \in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$.

Menţionăm că spaţiul Sobolev $L^p_s(X, \mathbb{R}^n)$, $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ poate fi obţinut din interpolarea complexă a spaţiilor $L^p_1(X, \mathbb{R}^n)$ şi $L^p(X, \mathbb{R}^n)$ (a se vedea [110]):

$$L^p_s(X, \mathbb{R}^n) = \left[L^p_1(X, \mathbb{R}^n), L^p(X, \mathbb{R}^n)\right]_s .$$

În plus spaţiul $L^p_1(X, \mathbb{R}^n)$ se scufundă dens în spaţiul $L^p_s(X, \mathbb{R}^n)$, pentru orice $s \in (0,1)$ şi $p \in (1,\infty)$ (a se vedea şi [17], [110]).

Următorul rezultat a fost obţinut de Kalton şi Mitrea [49] (a se vedea şi [79, Teorema 11.45]).

Teorema 3.4.7 [49] *În ipoteza Teoremei* 3.4.6, *presupunem că spaţiul* $Y_0 \cap Y_1$ *este dens în fiecare*[9] Y_θ, $\theta \in (0,1)$. *Dacă există* $\theta_0 \in (0,1)$ *astfel încât* F_{θ_0} *este Fredholm, atunci există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât* F_θ *este Fredholm pentru orice* $\theta \in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$, *iar indexul este constant, adică* $\mathrm{ind}(F_\theta) = \mathrm{ind}(F_{\theta_0})$, *pentru orice* $\theta \in (0,1)$.

În plus avem următorul rezultat:

Lema 3.4.8 [79] *Fie* $F : X \to Y$ *un operator Fredholm cu index zero. Atunci* F *este inversabil dacă şi numai dacă* F *este injectiv.*

Teorema 3.4.9 [117] *Fie* X, Y *spaţii Banach. Dacă* $F : X \to Y$ *este un operator Fredholm şi* $K : X \to Y$ *este compact atunci* $F + K : X \to Y$ *este de asemenea operator Fredholm cu acelaşi index,*

$$\mathrm{ind}(F + K) = \mathrm{ind}(F). \tag{3.4.7}$$

3.5 Teoria potenţialului pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$

Această secţiune conţine rezultate fundamentale şi proprietăţi de bază referitoare la teoria potenţialului pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Principalele surse utilizate în pregătirea acestei secţiuni sunt [54], [59], [79], [111].

3.5.1 Soluţiile fundamentale pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$

Această secţiune este dedicată soluţiilor fundamentale pentru sistemele Stokes şi Brinkman. Principalele surse utilizate în pregătirea acestei secţiuni sunt [54], [59], [111].

Soluţia fundamentală pentru sistemul Brinkman

Dacă $\chi > 0$ este o constantă dată, notăm cu $\mathcal{G}^{\chi^2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ şi $\Pi^{\chi^2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tensorul fundamental şi vectorul presiune fundamental pentru sistemul Brinkman în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Acesştia satisfac ecuaţiile

$$\left(-\triangle_{\mathbf{x}} + \chi^2 \mathbb{I}\right) \mathcal{G}^{\chi^2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{x}} \Pi^{\chi^2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{Dirac}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\ \ \mathrm{div}_{\mathbf{x}} \mathcal{G}^{\chi^2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \tag{3.5.1}$$

în sens distribuţional, unde $\mathrm{Dirac}_{\mathbf{y}}$ este distribuţia Dirac cu masa în $\mathbf{y}$. Indicele $\mathbf{x}$ adăgat operatorilor precedenţi precizează acţiunea acestor operatori în raport cu $\mathbf{x}$.

[9] Această condiţie este totdeauna satisfăcută în cazul spaţiilor de interpolare complexă.

Componentele lui $\mathcal{G}^{\chi^2}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ şi cele ale $\Pi^{\chi^2}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ sunt date de (a se vedea [59, Capitolul 2], [111, pp. 58-60])

$$\mathcal{G}_{jk}^{\chi^2}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{\omega_n}\left\{\frac{\delta_{jk}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-2}}A_1(\chi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + \frac{(x_j-y_j)(x_k-y_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}A_2(\chi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\right\}, \tag{3.5.2}$$

$$\Pi_j^{\chi^2}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{\omega_n}\frac{x_j-y_j}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}, \tag{3.5.3}$$

unde δ_{jk} este simbolul lui Kronecker, $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{if } j=k \\ 0, & \text{if } j\neq k, \end{cases}$ ω_n este aria sferei unitate $\mathfrak{S}^{n-1}$ în $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$. În plus, cu notaţia $\mathbf{z} := \mathbf{x}-\mathbf{y} = (z_1,\ldots,z_n)$, avem

$$\begin{aligned} A_1(z) &:= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}K_{\frac{n}{2}-1}(z)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + 2\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n}{2}}K_{\frac{n}{2}}(z)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)z^2} - \frac{1}{z^2}, \\ A_2(z) &:= \frac{n}{z^2} - 4\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}K_{\frac{n}{2}+1}(z)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)z^2}, \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

De asemenea, K_ℓ este funcţia Bessel function de speţa a doua şi ordinul $\ell\geq 0$, iar Γ este funcţia Gamma (a se vedea [1]).

Tensorul tensiune şi tensorul presiune asociaţi $\mathbf{S}^{\chi^2}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ şi $\mathbf{\Lambda}^{\chi^2}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ au componenetele (a se vedea [59, Capitolul 2], [111, pp. 58-60]):

$$\begin{aligned} S_{ijk}^{\chi^2}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= -\Pi_j^{\chi^2}(\mathbf{x},\mathbf{y})\delta_{ik} + \frac{\partial\mathcal{G}_{ij}^{\chi^2}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial x_k} + \frac{\partial\mathcal{G}_{kj}^{\chi^2}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial x_i} \\ &= -\frac{1}{\omega_n}\left\{\delta_{jk}\frac{x_j-y_j}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}D_1(\chi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + \frac{\delta_{ik}x_j+\delta_{jk}x_i}{|\mathbf{x}|^n}D_2(\chi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\right. \\ &\quad\left. + \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)(x_k-y_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n+2}}D_3(\chi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\right\}, \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{jk}^{\chi^2}(\mathbf{x},\mathbf{y})n_k(\mathbf{y}) &= -\Xi^{\chi^2}(\mathbf{z})n_k(\mathbf{y}) + \left(\frac{\partial\Pi_j}{\partial y_k} + \frac{\partial\Pi_k}{\partial y_j}\right)(\mathbf{y})n_k(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{-(\chi^2|\mathbf{z}|^2\ln|\mathbf{z}|+2)\frac{n_j(\mathbf{y})}{|\mathbf{z}|^2} + 4\frac{z_j\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y})}{|\mathbf{z}|^4}\right\}, \quad n=2 \\ \Lambda_{jk}^{\chi^2}(\mathbf{x},\mathbf{y})n_k(\mathbf{y}) &= -\frac{1}{\omega_n}\left\{2n\frac{z_j\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y})}{|\mathbf{z}|^{n+2}} + \chi^2 n_j(\mathbf{y})\frac{|\mathbf{z}|^{2-n}}{n-2} - 2\frac{n_j(\mathbf{y})}{|\mathbf{z}|^n}\right\}, \ n\geq 3, \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

unde

$$\begin{aligned} D_1(z) &:= 8\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}K_{\frac{n}{2}+1}(z)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)z^2} - \frac{2n}{z^2} + 1 \\ D_2(z) &:= 8\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}K_{\frac{n}{2}+1}(z)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)z^2} + 2\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n}{2}}K_{\frac{n}{2}}(z)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} - \frac{2n}{z^2} \\ D_3(z) &:= -16\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n}{2}+2}K_{\frac{n}{2}+2}(z)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)z^2} + \frac{2n(n+2)}{z^2}. \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Menţionăm că

$$\left(-\triangle_{\mathbf{x}} + \chi^2\mathbb{I}\right)S_{jk\ell}^{\chi^2}(\mathbf{y},\mathbf{x}) + \frac{\partial\Lambda_{j\ell}^{\chi^2}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial S_{jk\ell}^{\chi^2}(\mathbf{y},\mathbf{x})}{\partial x_k} = 0 \ \text{pentru } \mathbf{x}\neq\mathbf{y}. \tag{3.5.8}$$

Soluţia fundamentală pentru sistemul Stokes pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$

Componentele tensorului fundamental Stokes $\mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ şi vectorul presiune asociat $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, care determină soluţia fundamentală $(\mathcal{G},\mathbf{\Pi})$ a sistemului Stokes în $\mathbb{R}^n,\ n\geq 2$, sunt date de (a se vedea [59, Capitolul 2], [64], [111, pp. 38,39])

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{G}_{jk}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{2\omega_n}\left\{\frac{\delta_{kj}}{(n-2)|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-2}}+\frac{(x_j-y_j)(x_k-y_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\right\},\\
&\Pi_j(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{\omega_n}\frac{x_j-y_j}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n},
\end{aligned}\qquad n\geq 3, \tag{3.5.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{G}_{jk}(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{(x_j-y_j)(x_k-y_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}-\delta_{kj}\ln(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\right\},\\
&\Pi_j(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\frac{1}{2\pi}\frac{x_j-y_j}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2},
\end{aligned}\qquad n=2. \tag{3.5.10}
$$

Tensorii tensiune şi presiune corespunzători $\mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ şi $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ au componentele (a se vedea [59, Capitolul 3], [111, p. 132])

$$
S_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y})=-\frac{n}{\omega_n}\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)(x_k-y_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n+2}},\ \ n\geq 2, \tag{3.5.11}
$$

$$
\Lambda_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y})=-\frac{2}{\omega_n}\left(-\frac{\delta_{ik}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}+n\frac{(x_i-y_i)(x_k-y_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n+2}}\right),\ \ n\geq 2. \tag{3.5.12}
$$

3.5.2 Operatorii potenţiali de simplu şi dublu strat pentru ecuaţiile Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$

În continuare considerăm sistemul Brinkman

$$
\mathrm{div}\mathbf{u}=0,\ \ (\triangle-\chi^2\mathbb{I})\mathbf{u}-\nabla\pi=\mathbf{0}, \tag{3.5.13}
$$

care descrie mişcarea unui fluid vâscos incompresibil într-un mediu poros. Prima ecuaţie în (3.5.13) reprezintă ecuaţia de continuitate (sau condiţia de incompresibilitate), iar a doua reprezintă ecuaţia Brinkman. De asemenea, constanta $\chi>0$ este legată de proprietăţile fizice ale mediului poros implicat. Dacă a este lungimea caracteristică a domeniului ocupat de mediul poros cu permeabilitatea κ, atunci $\chi=\frac{a}{\sqrt{\kappa}}$.

Ca în secţiunile precedente, notăm cu $\mathfrak{D}\subset\mathbb{R}^n,\ n\geq 2$, un domeniu Lipschitz mărginit cu frontiera $\Gamma:=\partial\mathfrak{D}$ şi $\mathfrak{D}_+:=\mathbb{R}^n\setminus\overline{\mathfrak{D}}$. Definim potenţialele de simpu şi de dublu strat, $\mathbf{V}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g},\ \mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}:\mathbb{R}^n\setminus\Gamma\to\mathbb{R}^n$, asociate sistemului Brinkman şi având densităţile $\mathbf{g}$ şi $\mathbf{h}$, astfel (a se vedea [59, Capitolul 3]):

$$
\big(\mathbf{V}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g}\big)(\mathbf{x}):=\big\langle\mathcal{G}^{\chi^2}(\mathbf{x},\cdot),\mathbf{g}\big\rangle_\Gamma\ \ \big(\mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}\big)_k(\mathbf{x}):=\int_\Gamma S^{\chi^2}_{jk\ell}(\mathbf{y},\mathbf{x})n_\ell(\mathbf{y})h_j(\mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{y}),\ \ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\backslash\Gamma. \tag{3.5.14}
$$

De asemenea fie $P^s_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g},\ P^d_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}:\mathbb{R}^n\setminus\Gamma\to\mathbb{R}$ funcţiile date de

$$
\big(P^s_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g}\big)(\mathbf{x}):=\big\langle\Pi^{\chi^2}(\mathbf{x},\cdot),\mathbf{g}\big\rangle_\Gamma\ \ \big(P^d_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}\big)(\mathbf{x}):=\int_\Gamma\Lambda^{\chi^2}_{j\ell}(\mathbf{x},\mathbf{y})n_\ell(\mathbf{y})h_j(\mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{y}),\ \ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\Gamma. \tag{3.5.15}
$$

Menţionăm că $(\mathbf{g},\mathbf{h})$ sunt alese în unul dintre spaţiile următoare spaţii:

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \ H^{-\frac{1}{2}+\beta}(\Gamma,\mathbb{R}^n)\times H^{\frac{1}{2}+\beta}_{\mathbf{n}_\Gamma}(\Gamma,\mathbb{R}^n),\ \beta\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\
&(ii)\ \ L^p(\Gamma,\mathbb{R}^n)\times L^p_{\mathbf{n}_\Gamma}(\Gamma,\mathbb{R}^n),\ p\in(2-\epsilon,2+\epsilon)\ \text{pentru un anumit}\ \epsilon:=\epsilon(\Gamma)>0.
\end{aligned} \tag{3.5.16}
$$

Perechile $(\mathbf{V}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g}, P^s_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g})$ şi $(\mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}, P^d_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h})$ satisfac sistemul Brinkman în $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$,

$$\begin{aligned} &(\triangle - \chi^2\mathbb{I})\mathbf{V}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g} - \nabla P^s_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g} = \mathbf{0},\ \mathrm{div}\mathbf{V}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g} = 0 \\ &(\triangle - \chi^2\mathbb{I})\mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h} - \nabla P^d_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h} = \mathbf{0},\ \mathrm{div}\mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h} = 0 \end{aligned} \quad \text{în } \mathbb{R}^n \setminus \Gamma. \tag{3.5.17}$$

Menţionăm că în fiecare din cazurile de mai sus, există valoarea principală (sau varianta pe frontieră) a potenţialului de dublu strat $\mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}$, aproape peste tot pe Γ, şi este dată de:

$$(\mathbf{K}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h})_k(\mathbf{x}) := \mathrm{p.v.}\int_\Gamma S^{\chi^2}_{jk\ell}(\mathbf{y},\mathbf{x})n_\ell(\mathbf{y})h_j(\mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{y}),\ a.e.\ \mathbf{x} \in \Gamma, \tag{3.5.18}$$

unde p.v. semnifică valoarea principală a unei integrale singulare[10].

În plus, utilizăm notaţiile $(\mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h})^\pm := \mathrm{Tr}^\pm(\mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h})$.

Teorema 3.5.1 (**[14], [26], [44], [54], [79]**) *Fie $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu Lipschitz mărginit $(n \geq 2)$ cu frontiera Γ şi $\chi \geq 0$, $p \in (1,\infty)$, $r \in [0,1]$, $\mathbf{g} \in L^p_{r-1}(\Gamma,\mathbb{R}^n)$ şi $\mathbf{h} \in L^p_r(\Gamma,\mathbb{R}^n)$. Atunci au loc următoarele relaţii a.p.t. pe Γ:*

$$\mathrm{Tr}^+\big(\mathbf{V}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g}\big) = \mathrm{Tr}^-\big(\mathbf{V}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g}\big) := \mathcal{V}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g}, \tag{3.5.19}$$

$$\big(\mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}\big)^\pm = \left(\pm\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_{\chi^2;\Gamma}\right)\mathbf{h}, \tag{3.5.20}$$

$$\partial^\pm_{\nu_\Gamma}\left(\mathbf{V}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g}, P^s_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g}\right) = \left(\mp\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}^*_{\chi^2;\Gamma}\right)\mathbf{g}, \tag{3.5.21}$$

$$\partial^+_{\nu_\Gamma}\left(\mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}, P^d_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}\right) = \partial^-_{\nu_\Gamma}\left(\mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}, P^d_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}\right) := \mathbf{D}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}. \tag{3.5.22}$$

În plus, următorii operatori de simplu şi dublu strat sunt continui:

$$\begin{aligned} &\mathbf{V}_{\chi^2;\Gamma} : L^p_{r-1}(\Gamma,\mathbb{R}^n) \to L^p_{\frac{1}{p}+r}(\mathfrak{D}_-,\mathbb{R}^n),\ \mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma} : L^p_r(\Gamma,\mathbb{R}^n) \to L^p_{\frac{1}{p}+r}(\mathfrak{D}_-,\mathbb{R}^n),\\ &\mathbf{V}_{\chi^2;\Gamma} : L^p_{r-1}(\Gamma,\mathbb{R}^n) \to L^p_{\frac{1}{p}+r,\mathrm{loc}}(\overline{\mathfrak{D}}_+,\mathbb{R}^n),\ \mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma} : L^p_r(\Gamma,\mathbb{R}^n) \to L^p_{\frac{1}{p}+r,\mathrm{loc}}(\overline{\mathfrak{D}}_+,\mathbb{R}^n),\\ &\mathcal{V}_{\chi^2;\Gamma} : L^p_{r-1}(\Gamma,\mathbb{R}^n) \to L^p_r(\Gamma,\mathbb{R}^n),\ \mathbf{K}_{\chi^2;\Gamma} : L^p_r(\Gamma,\mathbb{R}^n) \to L^p_r(\Gamma,\mathbb{R}^n),\\ &\mathbf{K}^*_{\chi^2;\Gamma} : L^p_{r-1}(\Gamma,\mathbb{R}^n) \to L^p_{r-1}(\Gamma,\mathbb{R}^n),\ \mathbf{D}_{\chi^2;\Gamma} : L^p_r(\Gamma,\mathbb{R}^n) \to L^p_{r-1}(\Gamma,\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Menţionăm că exponentul + (respectiv -) în formulele precedente se aplică pentru valoarea limită a unui câmp evaluat din exteriorul (respectiv din interiorul) lui Γ.

Rezultatul de mai jos a fost obţinut în [79] în cazul $\chi = 0$ (a se vedea şi [59], [111] pentru $\chi > 0$).

Teorema 3.5.2 (**[59], [79], [111]**) *Dacă $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$, este un domeniu Lipschitz mărginit cu frontiera Γ, $n \geq 2$, atunci pentru orice $p \in (1,\infty)$ şi $r \in [0,1]$, avem*

$$\mathrm{Ker}\left(\mathcal{V}_{\chi^2;\Gamma} : L^p_{r-1}(\Gamma,\mathbb{R}^n) \to L^p_r(\Gamma,\mathbb{R}^n)\right) = \mathbb{R}\mathbf{n}_\Gamma,\ \mathbb{R}\mathbf{n}_\Gamma := \{c\mathbf{n}_\Gamma : c \in \mathbb{R}\}. \tag{3.5.23}$$

Potenţialele de simplu şi dublu strat $\mathbf{V}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g}$, $\mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}$, $P^s_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g}$, $P^d_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}$ au următorul comportament la infinit pentru $\chi > 0$ (a se vedea [54, p. 1067], [59, Capitolul 3]):

$$\begin{aligned} &\big(\mathbf{V}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g}\big)(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-n}),\ \big(\mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}\big)(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{1-n}),\ |\mathbf{x}| \to \infty, n \geq 2\\ &\big(P^s_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g}\big)(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}),\ \big(P^d_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}\big)(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\ln|\mathbf{x}|),\ |\mathbf{x}| \to \infty, n = 2\\ &\big(P^s_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{g}\big)(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{1-n}),\ \big(P^d_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}\big)(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{2-n}),\ |\mathbf{x}| \to \infty, n \geq 3. \end{aligned} \tag{3.5.24}$$

[10]Menţionăm că $\mathrm{p.v.}\int_\Gamma S^{\chi^2}_{jk\ell}(\mathbf{y},\mathbf{x})n_\ell(\mathbf{y})h_j(\mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{y}) := \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_\epsilon} S^{\chi^2}_{jk\ell}(\mathbf{y},\mathbf{x})n_\ell(\mathbf{y})h_j(\mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{y})$, unde Γ_ϵ este porţiunea din Γ localizată în interiorul bilei $\mathbb{R}^n$ de rază ϵ şi centru $\mathbf{x} \in \Gamma$.

În plus, dacă $\langle \mathbf{h}, \mathbf{n}_\Gamma \rangle_\Gamma = 0$, avem:

$$\big(\mathbf{W}_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}\big)(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-n}),\ \big(P^d_{\chi^2;\Gamma}\mathbf{h}\big)(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{1-n}),\ \ |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{3.5.25}$$

Pentru $\chi = 0$, obţinem următoarea formulă asimptotică

$$\begin{array}{l} (\mathbf{V}_\Gamma \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\ln|\mathbf{x}|),\ \big(P^s_\Gamma \mathbf{h}\big)(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1})\ \ |\mathbf{x}| \to \infty, n = 2 \\ (\mathbf{V}_\Gamma \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{2-n}),\ \big(P^s_\Gamma \mathbf{h}\big)(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{1-n})\ \ |\mathbf{x}| \to \infty, n \geq 3 \\ (\mathbf{W}_\Gamma \mathbf{h})(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{1-n}),\ \big(P^d_\Gamma \mathbf{h}\big)(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-n}),\ \ |\mathbf{x}| \to \infty, n \geq 2. \end{array} \tag{3.5.26}$$

3.5.3 Compactitatea operatorilor potenţiali complementari pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$

În continuare prezentăm rezultatul de compactitate a operatorilor potenţiali de simplu şi dublu strat asociaţi sistemelor Stokes şi Brinkman pe spaţii Sobolev $\{L^p_s(\Gamma, \mathbb{R}^n)\}$, $\{L^p_{-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n)\}$, $s \in (0,1)$, precum şi pe spaţiile $\{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)\}$, $\{L^p_1(\Gamma, \mathbb{R}^n)\}$, $p \in (1, \infty)$. Precizăm că printr-un operator potenţial complementar se înţelege diferenţa dintre un operator potenţial pentru sistemul Brinkman şi operatorul potenţial corespunzător pentru sistemul Stokes. Cwikel [17] a arătat că proprietatea de compactitate se extrapolează în cazul interpolării complexe de spaţii Banach. În continuare prezentăm următorul rezultat de compactitate, care a fost obţinut recent de Kohr, Lanza de Cristoforis şi Wendland [54].

Teorema 3.5.3 [54] *Dacă $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ este un domeniu Lipschitz mărginit cu frontiera Γ, $\lambda > 0$ este o constantă dată, atunci pentru orice $p \in (1, \infty)$ următorii operatori sunt compacţi:*

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{V}_{\chi^2,0;\Gamma} : L^p_{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \to L^p_s(\Gamma, \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{K}_{\chi^2,0;\Gamma} : L^p_s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \to L^p_s(\Gamma, \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{K}^*_{\chi^2,0;\Gamma} : L^p_{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \to L^p_{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{D}_{\chi^2,0;\Gamma} : L^p_s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \to L^p_{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \end{array}\right. \ \forall\, s \in (0,1) \tag{3.5.27}$$

şi

$$\begin{array}{l} \mathbf{K}_{\chi^2,0;\Gamma} : L^p_1(\Gamma, \mathbb{R}^n) \to L^p_1(\Gamma, \mathbb{R}^n),\ \mathbf{K}_{\chi^2,0;\Gamma} : L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \to L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n), \\ \mathcal{V}_{\chi^2,0;\Gamma} : L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \to L^p_1(\Gamma, \mathbb{R}^n),\ \mathcal{V}_{\chi^2,0;\Gamma} : L^p_{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \to L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{K}^*_{\chi^2,0;\Gamma} : L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \to L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n),\ \mathbf{K}^*_{\chi^2,0;\Gamma} : L^p_{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \to L^p_{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n), \\ \mathbf{D}_{\chi^2,0;\Gamma} : L^p_1(\Gamma, \mathbb{R}^n) \to L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n),\ \mathbf{D}_{\chi^2,0;\Gamma} : L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \to L^p_{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n). \end{array} \tag{3.5.28}$$

3.5.4 Inversabilitatea unor operatori din teoria potenţialului pe domenii Lipschitz din $\mathbb{R}^n$

Următorul rezultat a fost obţinut de Mitrea şi Wright [79, Teoremele 9.3, 10.13]:

Teorema 3.5.4 [79] *Fie $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ un domeniu Lipschitz mărginit cu frontiera conexă $\partial\mathfrak{D}$. Atunci există $\varepsilon = \varepsilon(\partial\mathfrak{D}) > 0$ astfel încât, pentru orice $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ următoarele proprietăţi au loc:*

(i) *Operatorii*

$$\gamma\mathbb{I} + \mathbf{K}_{\partial\mathfrak{D}} : L^p_1(\partial\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) \to L^p_1(\partial\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n),\ \gamma\mathbb{I} + \mathbf{K}^*_{\partial\mathfrak{D}} : L^p(\partial\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) \to L^p(\partial\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n),$$
$$\pm\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}^*_{\partial\mathfrak{D}} : L^p(\partial\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)/\mathbb{R}\nu \to L^p(\partial\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)/\mathbb{R}\nu,$$

sunt inversabili pentru orice $p \in \left(\max\left\{1, \frac{2(n-1)}{n+1} - \varepsilon\right\}, 2 + \varepsilon\right)$.

(ii) *Pentru orice $s \in (0,1)$ şi $p \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$, următorii operatori sunt inversabili*

$$\gamma\mathbb{I} + \mathbf{K}_{\partial\mathfrak{D}} : L^p_s(\partial\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) \to L^p_s(\partial\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n),\ \gamma\mathbb{I} + \mathbf{K}^*_{\partial\mathfrak{D}} : L^p_{s-1}(\partial\mathfrak{D}) \to L^p_{s-1}(\partial\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n),$$
$$\pm\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}^*_{\partial\mathfrak{D}} : L^p_{s-1}(\partial\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)/\mathbb{R}\nu \to L^p_{s-1}(\partial\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)/\mathbb{R}\nu.$$

3.6 Teoria potenţialului pentru operatori pseudodiferenţiali Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte

În această secţiune prezentăm principalele rezultate din teoria potenţialului pentru operatorii pseudodiferenţiali Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene, care include inversabilitatea operatorului Brinkman, soluţia fundamentală a operatorului Brinkman şi compactitatea operatorilor potenţiali complementari. Aceste rezultate au fost recent obţinute de [55]-[58]. Operatorii pseudodiferenţiali Brinkman sunt operatori cu coeficienţi variabili care extind operatorul diferenţial Brinkman de la spaţiul Eucliden la cazul varietăţilor Riemanniene compacte. Principalele surse utilizate în pregătirea acestui capitol sunt [19], [55], [56], [57].

3.6.1 Operatori pseudodiferenţiali Brinkman pe varietăţi Riemanniene compacte

Considerăm o varietate compactă fără frontieră (M, g) de dimensiune $m \geq 2$ înzestrată cu tensorul metric Riemannian neted $g = \sum_{j,k=1}^m g_{jk}dx_j \otimes dx_k =: g_{jk}dx_j \otimes dx_k$, şi fie (g^{jk}) inversul lui (g_{jk}). Menţionăm că elementul de volum pe M este dat de $\mathrm{dVol} = \sqrt{g}dx_1 \dots dx_m$, unde $g := \det(g_{jk})$. Reamintim că spaţiul fibrat tangent se notează cu $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$, iar spaţiul fibrat cotangent cu $T^*M = \bigcup_{p\in M} T^*_pM$. Fie $\mathcal{X}(M) = C^\infty(M, TM)$ mulţimea câmpurilor vectoriale netede pe M. În mod natural identificăm T^*M cu TM şi Λ^1TM cu $\mathcal{X}(M)$. În continuare definim următorul produs pe Λ^1TM (a se vedea [117]):

$$\langle dx_j, dx_k\rangle = g^{jk}, \quad \langle X, Y\rangle = X_j g^{jk} Y_k, \tag{3.6.1}$$

unde câmpul vectorial $X = X^k\partial_k \in TM$ este identificat cu 1-forma $X_rdx_r = X^kg_{kr}dx_r$, $X_r = g_{kr}X^k$, iar notaţia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ este utilizată pentru produsul scalar. În consecinţă operatorul gradient $\mathrm{grad} : C^\infty(M) \to \mathcal{X}(M)$ este identificat cu *operatorul de derivare exterioară* $d : C^\infty(M) \to C^\infty(M, \Lambda^1TM)$, $d = \partial_j dx_j$. În plus, $-\mathrm{div} : \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ este identificat cu *operatorul de co-derivare exterioară* $\delta : C^\infty(M, \Lambda^1TM) \to C^\infty(M)$, $\delta = d^*$. Notăm cu ∇ conexiunea Levi-Civita pe M (pentru detalii ne referim la [107, Capitolul 2]).

Fie $X \in \mathcal{X}(M)$. Partea simetrică a câmpului tensorial

$$\nabla X : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M, TM \otimes TM),\ (\nabla X)(Y, Z) = \langle\nabla_Y X, Z\rangle,$$

se numeşte *deformare* a lui X şi se notează cu $\mathrm{Def}\ X$ (a se vedea [20], [107]). Deci

$$(\mathrm{Def}\ X)(Y, Z) = \frac{1}{2}\{\langle\nabla_Y X, Z\rangle + \langle\nabla_Z X, Y\rangle\}, \quad \forall\, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \tag{3.6.2}$$

Definiţia 3.6.1 (**[107]**) Un câmp vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ astfel încât $\mathrm{Def}\ X = 0$ on M, se numeşte *câmp Killing*.

De-a lungul acestei teze, presupunem că [19, 78]

(3.6.3) Varietatea M nu are câmpuri Killing netriviale.

De fapt, dacă $\Omega \subset M$ este un domeniu Lipschitz dat, atunci M poate fi deformată departe de $\overline{\Omega}$ astfel încât condiţia (3.6.3) să fie satisfăcută (ne referim la [78, p. 959] pentru mai multe detalii despre astfel de varietăţi).

Considerăm operatorul diferenţial de ordinul doi [19, 78]

$$\mathfrak{L} : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M), \ \ \mathfrak{L} := 2\mathrm{Def}^*\mathrm{Def} = -\triangle + \mathrm{d}\delta - 2\mathrm{Ric}, \tag{3.6.4}$$

unde Def^* este adjunctul lui Def, $\triangle := -(\mathrm{d}\delta + \delta d)$ este Hodge Laplacianul şi Ric este tensorul Ricci. $\mathfrak{L}$ este *operatorul natural asociat sistemului Stokes pe o varietate Riemanniană arbitrară* (a se vedea [23]).

Pentru o descriere completă a operatorilor diferenţiali pe varietăţi Riemanniene compacte ne referim la [20], [65], [107, Capitolul 2].

Reamintim că OPS^{ℓ}_{cl} este clasa operatorilor pseudodiferenţiali clasici de ordinul ℓ pe M (a se vedea Definiţia 3.3.8). Fie $P \in OPS^0_{\mathrm{cl}}(\Lambda^1 TM, \Lambda^1 TM)$ un operator autoadjunct şi nenegativ în raport cu produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pe $L^2(M, \Lambda^1 TM)$, adică

$$\langle Pu, w\rangle = \langle u, Pw\rangle, \ \ \langle Pu, u\rangle \geq 0 \ \text{ pentru toţi } \ u, w \in L^2(M, \Lambda^1 TM). \tag{3.6.5}$$

Atunci *operatorul pseudodiferenţial Brinkman* pe M este dat de (a se vedea [56])

$$B_P := \begin{pmatrix} \mathfrak{L} + P & d \\ \delta & 0 \end{pmatrix} : C^\infty(M, \Lambda^1 TM) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M, \Lambda^1 TM) \times C^\infty(M). \tag{3.6.6}$$

De-a lungul acestei teze considerăm operatorul pseudodiferenţial P de forma $P = \lambda^2 \mathbb{I}$, unde $\lambda \neq 0$ este o constantă. Deci operatorul (3.6.6) devine

$$B_\lambda := \begin{pmatrix} \mathfrak{L} + \lambda^2 \mathbb{I} & d \\ \delta & 0 \end{pmatrix} : C^\infty(M, \Lambda^1 TM) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M, \Lambda^1 TM) \times C^\infty(M). \tag{3.6.7}$$

3.6.2 Spaţii Sobolev pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte

Fie $\Omega_+ := \Omega \subset M$ un domeniu Lipschitz (frontiera mulţimii deschise şi conexe Ω poate fi reprezentată în coordonate locale utilizând grafice de funcţii Lipschitz) şi presupunem că $\Omega_- := M \setminus \overline{\Omega}$ este conexă. Aşadar, mulţimile $\Omega_\pm$ sunt domenii Lipschitz.

Pentru o constantă $\kappa = \kappa(\partial\Omega) > 0$ fixată notăm cu $\gamma_\pm(x) := \{y \in \Omega_\pm : |x - y| < (1 + \kappa)\mathrm{dist}(y, \partial\Omega)\}$, $x \in \partial\Omega$ regiunile de aproximare netangenţiale din Ω_+ şi Ω_-. Similar cu cazul Euclidian se poate defini operatorul urmă pe o varietate Riemanniană compactă. Mai exact, utilizând aceleaşi notaţii ca în cazul Euclidian, fie $\mathrm{Tr}^\pm$ operatorii urmă netangenţiali pe frontiera $\partial\Omega$, definiţi prin (a se vedea [76]) $(\mathrm{Tr}^\pm u)(x) := \lim\limits_{\gamma_\pm(x) \ni y \to x} u(y)$, $x \in \partial\Omega$.

În continuare, pentru $s \geq 0$, considerăm spaţiile Sobolev de funcţii

$$H^s(\Omega_\pm) := \{f|_{\Omega_\pm} : f \in H^s(M)\}, \ \ \tilde{H}^s(\Omega_\pm) := \{f \in H^s(M) : \mathrm{supp} f \subseteq \overline{\Omega}_\pm\},$$

şi notăm cu $H^{-s}(\Omega_\pm)$ spaţiul dual al lui $\tilde{H}^s(\Omega_\pm)$ în raport cu dualitatea $L^2(\Omega_\pm)$, $H^{-s}(\Omega_\pm) = \big(\tilde{H}^s(\Omega_\pm)\big)^*$. În plus, considerăm spaţiile Sobolev a 1-formelor (a se vedea [77]):

$$\begin{aligned} H^s(\Omega_\pm, \Lambda^1 TM|_{\Omega_\pm}) &:= H^s(\Omega_\pm) \otimes \Lambda^1 TM|_{\Omega_\pm}, \\ \tilde{H}^s(\Omega_\pm, \Lambda^1 TM|_{\Omega_\pm}) &:= \tilde{H}^s(\Omega_\pm) \otimes \Lambda^1 TM|_{\Omega_\pm}, \\ H^{-s}(\Omega_\pm, \Lambda^1 TM) &:= (\tilde{H}^s(\Omega_\pm, \Lambda^1 TM))^*. \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

Prin urmare, $H^s(\Omega_\pm, \Lambda^1 TM|_{\Omega_\pm})$ este mulţimea tuturor 1-formelor având coeficienţii în $H^s(\Omega_\pm)$.

Presupunem că $\lambda \geq 0$ este o constantă dată. Atunci pentru orice $\beta \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, considerăm spaţiile

$$\tilde{H}^{-1+\beta}(\Omega_\pm, \Lambda^1 TM) := \{\mathbf{f} \in H^{-1+\beta}(M, \Lambda^1 TM) : \operatorname{supp} \mathbf{f} \subseteq \overline{\Omega}_\pm\}, \tag{3.6.9}$$

$$\begin{aligned} H^{1+\beta}(\Omega_\pm, \mathcal{L}_\lambda) := \big\{(\mathbf{u}, \pi, \mathbf{f}) :& \mathbf{u} \in H^{1+\beta}(\Omega_\pm, \Lambda^1 TM), \pi \in H^\beta(\Omega_\pm), \mathbf{f} \in \tilde{H}^{-1+\beta}(\Omega_\pm, \Lambda^1 TM) \\ & \text{astfel încât } \mathcal{L}_\lambda(\mathbf{u}, \pi) = \mathbf{f}|_{\Omega_\pm},\ \delta\mathbf{u} = 0 \text{ în } \Omega_\pm\big\}, \end{aligned} \tag{3.6.10}$$

unde $\mathcal{L}_\lambda(\mathbf{u}, \pi) := \mathfrak{L}\mathbf{u} + \lambda^2 \mathbf{u} + d\pi$.

3.6.3 Operatorul netangenţial urmă şi operatorul de derivare conormală pe varietăţi Riemanniene compacte

Lema 3.6.2 ([19], [78]) *Pentru orice $s \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, restricţia la frontieră,*

$$C^\infty(\overline{\Omega}_\pm, \Lambda^1 TM) \to C^0(\partial\Omega_\pm, \Lambda^1 TM),\ u \mapsto u|_{\partial\Omega_\pm},$$

se extinde la un operator liniar şi mărginit $\mathrm{Tr}^\pm : H^s(\Omega_\pm, \Lambda^1 TM) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\pm, \Lambda^1 TM)$, care este inversabil şi are o inversă la dreapta $\mathcal{Z}^\pm : H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\pm, \Lambda^1 TM) \to H^s(\Omega_\pm, \Lambda^1 TM)$ mărginită. Pentru $s > \frac{3}{2}$, operatorul $\mathrm{Tr}^\pm : H^s(\Omega_\pm, \Lambda^1 TM) \to H^1(\partial\Omega_\pm, \Lambda^1 TM)$ este mărginit.

Operatorul de derivare conormală pentru sistemul Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte a fost introdus de Kohr, Pintea şi Wendland în [56, Lema 2.2], ca o extensie a noţiunii de operator de derivare conormală pentru sistemul Stokes pe spaţiul Euclidian[11] datorată lui Mitrea şi Wright [79, Teorema 10.10] (a se vedea şi [19, 55, 56, 78]):

Lema 3.6.3 **[56]** *Fie $\lambda \geq 0$ o constantă dată. Atunci pentru orice $\beta \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$* operatorul de derivare conormală

$$\partial_\nu^\pm : H^{1+\beta}(\Omega_\pm, \mathcal{L}_\lambda) \to H^{-\frac{1}{2}+\beta}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM), \tag{3.6.11}$$

$$\begin{aligned} \pm\langle \partial_\nu^\pm(\mathbf{u}, \pi, \mathbf{f}), \Phi\rangle_{\partial\Omega} :=& 2\int_{\Omega_\pm} \langle \mathrm{Def}\, \mathbf{u}, \mathrm{Def}\, (\mathcal{Z}^\pm\Phi)\rangle \mathrm{dVol} + \lambda^2 \int_{\Omega_\pm} \langle \mathbf{u}, \mathcal{Z}^\pm\Phi\rangle \mathrm{dVol} \\ &+ \int_{\Omega_\pm} \langle \pi, \delta(\mathcal{Z}^\pm\Phi)\rangle \mathrm{dVol} - \langle \mathbf{f}, \mathcal{Z}^\pm\Phi\rangle_{\Omega_\pm},\ \forall\, \Phi \in H^{\frac{1}{2}-\beta}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM), \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

este bine definit şi mărginit. De asemenea, are loc următoarea formulă Green:

$$\begin{aligned} \pm\langle \partial_\nu^\pm(\mathbf{u}, \pi, \mathbf{f}), \mathrm{Tr}^\pm\, \mathbf{v}\rangle_{\partial\Omega} - 2\int_{\Omega_\pm} \langle \mathrm{Def}\, \mathbf{u}, \mathrm{Def}\, \mathbf{v}\rangle \mathrm{dVol} - \lambda^2 \int_{\Omega_\pm} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \mathrm{dVol} \\ = \int_{\Omega_\pm} \langle \pi, \delta\mathbf{v}\rangle \mathrm{dVol} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle_{\Omega_\pm} \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

pentru toţi $(\mathbf{u}, \pi, \mathbf{f}) \in H^{1+\beta}(\Omega_\pm, \mathcal{L}_\lambda)$ şi $\mathbf{v} \in H^{1-\beta}(\Omega_\pm, \Lambda^1 TM)$.

[11] Pentru $s \in [0, 1]$ şi $X \subseteq M$, notăm cu $\langle\cdot,\cdot\rangle_X := {}_{H^s(X,\Lambda^1 TM)}\langle\cdot,\cdot\rangle_{(H^s(X,\Lambda^1 TM))^*}$ perechea dintre două spaţii Sobolev duale $H^s(X, \Lambda^1 TM)$ şi $\left(H^s(X, \Lambda^1 TM)\right)^*$.

3.6.4 Inversabilitatea operatorului Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte

Operatorul Brinkman (3.6.7) este eliptic în sens Agmon-Douglis-Nirenberg (a se vedea [55]) şi, utilizând Teorema 3.3.11, se extinde la un operator Fredholm de index zero

$$B_\lambda : H^1(M,\Lambda^1 TM)\times L^2(M)\to H^{-1}(M,\Lambda^1 TM)\times L^2(M).$$

Nucleul acestui operator este mulţimea $\{0\}\times\mathbb{R}$, iar rangul este $H^{-1}(M,\Lambda^1 TM)\times L^2_*(M)$, unde

$$L^2_*(M):=\{q\in L^2(M):\langle q,1\rangle=0\}.$$

În plus, restricţia operatorului Brinkman la $H^1(M,\Lambda^1 TM)\times L^2_*(M)$, notată cu B^0_λ, este inversabil (pentru mai multe detalii a se vedea [55]). În continuare ne referim la operatorul diferenţial de ordinul doi

$$\mathfrak{L}_\lambda = 2\mathrm{Def}^*\mathrm{Def}+\lambda^2\mathbb{I} : H^1(M,\Lambda^1 TM)\to H^{-1}(M,\Lambda^1 TM) \tag{3.6.14}$$

care este Fredholm de index zero şi injectiv (bazându-ne pe (3.6.3)), şi astfel inversabil (a se vedea [55, Lema 5.8] pentru mai multe detalii).

Lema 3.6.4 (**[55], [56]**) *Fie M o varietate Riemanniană compactă fără frontieră şi fie $\lambda\geq 0$ o constantă dată. Atunci operatorii*

$$\Upsilon_\lambda : L^2_*(M)\to L^2_*(M),\ \ \Upsilon_\lambda := \delta L_\lambda^{-1} d, \tag{3.6.15}$$

$$B^0_\lambda : H^1(M,\Lambda^1 TM)\times L^2_*(M)\to H^{-1}(M,\Lambda^1 TM)\times L^2_*(M), \tag{3.6.16}$$

sunt inversabili. În plus, inversul lui B^0_λ este operatorul

$$\begin{aligned} &B^0_\lambda : H^{-1}(M,\Lambda^1 TM)\times L^2_*(M)\to H^1(M,\Lambda^1 TM)\times L^2_*(M),\\ &(B^0_\lambda)^{-1} := \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_\lambda & \mathfrak{B}_\lambda \\ \mathfrak{C}_\lambda & \mathfrak{D}_\lambda \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.6.17}$$

unde $\mathfrak{A}_\lambda\in OPS^{-2}_{\mathrm{cl}}$, $\mathfrak{B}_\lambda\in OPS^{-1}_{\mathrm{cl}}$, $\mathfrak{C}_\lambda\in OPS^{-1}_{\mathrm{cl}}$, $\mathfrak{D}_\lambda\in OPS^{0}_{\mathrm{cl}}$ sunt operatorii pseudodiferenţiali definiţi astfel

$$\mathfrak{A}_\lambda := L_\lambda^{-1} - L_\lambda^{-1} d\,\Upsilon_\lambda^{-1}\,\delta L_\lambda^{-1},\ \ \mathfrak{B}_\lambda := L_\lambda^{-1} d\Upsilon_\lambda^{-1}, \tag{3.6.18}$$

$$\mathfrak{C}_\lambda := \Upsilon_\lambda^{-1}\delta L_\lambda^{-1},\ \ \mathfrak{D}_\lambda := -\,\Upsilon_\lambda^{-1}\,. \tag{3.6.19}$$

Pentru $\lambda = 0$, utilizăm următoarea notaţie pentru inversul operatorului B^0_0 asociat sistemului Stokes

$$(B^0_0)^{-1} := \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_0 & \mathfrak{B}_0 \\ \mathfrak{C}_0 & \mathfrak{D}_0 \end{pmatrix}. \tag{3.6.20}$$

3.6.5 Soluţia fundamentală pentru operatorul Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte

Ţinând cont de Lema 3.6.4, obţinem următoarele relaţii pe M:

$$\mathfrak{L}_\lambda\mathfrak{A}_\lambda + \mathrm{d}\mathfrak{C}_\lambda = \mathbb{I},\quad \delta\mathfrak{A}_\lambda = 0, \tag{3.6.21}$$

unde $\mathbb{I}$ este operatorul identitate pe $H^{-1}(M,\Lambda^1 TM)$. Notăm cu $\mathcal{G}_\lambda(x,y)$ şi $\Pi_\lambda(x,y)$ nucleele Schwartz[12] ale operatorilor pseudodiferenţiali $\mathfrak{A}_\lambda$ şi $\mathfrak{C}_\lambda$. În plus, fie $\mathcal{G}(x,y)$ şi $\Pi(x,y)$ nucleele Schwartz ale $\mathfrak{A}_0$ şi $\mathfrak{C}_0$. Utilizând (3.6.21) obţinem următoarea ecuaţie pe M:

$$(\mathfrak{L}_x+\lambda^2\mathbb{I})\mathcal{G}_\lambda(x,y)+d_x\Pi_\lambda(x,y)=\mathrm{Dirac}_y(x),\quad \delta_x\mathcal{G}_\lambda(x,y)=0, \tag{3.6.22}$$

unde Dirac_y este distribuţia Dirac cu masa în y. Perechea $(\mathcal{G}_\lambda(x,y),\Pi_\lambda(x,y))$ este *soluţia fundamentală a sistemului Brinkman pe M* (pentru mai mute detalii a se vedea [56, 57]).

3.6.6 Operatorii de simplu şi de dublu strat pentru sistemul Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte

În această secţiune prezentăm principalele proprietăţi ale operatorilor de simplu şi de dublu strat pentru sistemul Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte.

Pentru $s\in[0,1]$, $\mathbf{f}\in H^{s-1}(\partial\Omega,\Lambda^1TM)$ şi $\mathbf{h}\in H^{s}(\partial\Omega,\Lambda^1TM)$, *potenţialul de simplu strat* $\mathbf{V}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f}$ este 1-forma definită pe $M\setminus\partial\Omega$ prin

$$(\mathbf{V}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f})(x):=\langle\mathcal{G}_\lambda(x,\cdot),\mathbf{f}\rangle_{\partial\Omega},\ \ x\in M\setminus\partial\Omega. \tag{3.6.23}$$

În plus, potenţialul presiune corespunzător are forma

$$Q_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f}:=\langle\Pi_\lambda(x,\cdot),\mathbf{f}\rangle_{\partial\Omega},\ \ x\in M\setminus\partial\Omega. \tag{3.6.24}$$

Similar, *potenţialul de dublu strat* este definit în orice punct $x\in M\setminus\partial\Omega$ prin

(3.6.25)
$$(\mathbf{W}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{h})(x):=\int_{\partial\Omega}\big\langle-2\big[(\mathrm{Def}_y\,\mathcal{G}_\lambda(x,\cdot))\nu_{\partial\Omega}\big](y)+(\Pi_\lambda)^\top(y,x)\nu_{\partial\Omega}(y),\mathbf{h}(y)\big\rangle d\sigma(y),$$

şi potenţialul presiune corespunzător

$$(\mathcal{P}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{h})(x):=\int_{\partial\Omega}\langle-2[(\mathrm{Def}_y\,\Pi_\lambda(x,\cdot))\nu_{\partial\Omega}](y)-E_\lambda(x,y)\nu_{\partial\Omega}(y),\mathbf{h}(y)\rangle d\sigma(y), \tag{3.6.26}$$

unde $E_\lambda(x,y)$ este nucleul Schwartz al $(-\mathfrak{D}_\lambda)^\top\in OPS^0_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Menţionăm că

$$\left.\begin{aligned}&\delta(\mathbf{V}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f})=0,\ (L+\lambda^2\mathbb{I})\mathbf{V}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f}+dQ_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f}=0\\ &\delta\mathbf{W}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{h}=0,\ (L+\lambda^2\mathbb{I})\mathbf{W}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{h}+d\mathcal{P}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{h}=0\end{aligned}\right.\quad \text{pe } M\setminus\partial\Omega. \tag{3.6.27}$$

În plus, valoarea principală a potenţialului de dublu strat $\mathbf{W}_{P;\partial\Omega}\mathbf{h}$ este dată a.p.t. $x\in\partial\Omega$ prin (a se vedea [19])

$$(\mathbf{K}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{h})(x):=\text{p.v.}\int_{\partial\Omega}\big\langle-2\big[(\mathrm{Def}_y\,\mathcal{G}_\lambda(x,\cdot))\nu_{\partial\Omega}\big](y)+(\Pi_\lambda)^\top(y,x)\otimes\nu_{\partial\Omega}(y),\mathbf{h}(y)\big\rangle d\sigma_y,$$

unde simbolul $\mathrm{p.v.}$ se referă la valoarea principală a unei integrale singulare. Obţinem astfel

$$\begin{aligned}(\mathbf{K}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{h})(x)=\lim_{\epsilon\to0}\int_{\{y\in\partial\Omega\,:\,r(x,y)>\varepsilon\}}&\big\langle-2\big[(\mathrm{Def}_y\,\mathcal{G}_\lambda(x,\cdot))\nu_{\partial\Omega}\big](y)\\ &+(\Pi_\lambda)^\top(y,x)\otimes\nu_{\partial\Omega}(y),\mathbf{h}(y)\big\rangle d\sigma_y,\end{aligned} \tag{3.6.28}$$

[12] Menţionăm că nucleul Schwartz al unei reprezentări $T:\mathcal{S}\to\mathcal{S}'$ este o distribuţie $K\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ care satisface relaţia $\langle Tu,v\rangle=\langle K,u\otimes v\rangle$, $u,v\in\mathcal{S}$ (a se vedea [118]).

unde $r(x,y)$ este distanţa geodezică dintre punctele x şi y în M. În plus, obţinem următoarea relaţie de salt a.e. pe $\partial\Omega$ (a se vedea [19, 55, 57])

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}^{\pm}(\mathbf{W}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{h}) = \Big(\pm\tfrac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_{\lambda;\partial\Omega}\Big)\mathbf{h},\\
&\partial_{\nu}^{\pm}(\mathbf{W}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{h}, \mathcal{P}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{h}) := \mathbf{D}^{\pm}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{h},\ \ \mathbf{D}^{+}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{h} - \mathbf{D}^{-}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{h} \in \mathbb{R}\nu_{\partial\Omega}\\
&\mathrm{Tr}^{+}(\mathbf{V}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f}) = \mathrm{Tr}^{-}(\mathbf{V}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f}) := \mathcal{V}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f},\\
&\partial_{\nu}{}^{\pm}(\mathbf{V}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f}, Q_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f}) = \mp\tfrac{1}{2}\mathbf{f} + \mathbf{K}^{*}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f},
\end{aligned}
\tag{3.6.29}
$$

unde

$$(\mathbf{K}^{*}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f})(x) := \mathrm{p.v.}\int_{\partial\Omega}\Big\langle -2[\mathrm{Def}_x\mathcal{G}_{\lambda}(\cdot,y)\nu](x) + \Pi_{\lambda}(x,y)\otimes\nu(x), \mathbf{f}(y)\Big\rangle_y d\sigma(y),\ \ \text{a.e. } x \in \partial\Omega.$$

Teorema 3.6.5 ([55], [57]) *Fie $\Omega \subset M$ un domeniu Lipschitz şi $\lambda \geq 0$ o constantă dată. Atunci pentru orice $s \in [0,1]$ şi $\mathbf{f} \in H^{-s}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM)$, obţinem*

$$\mathrm{Tr}^{+}(\mathbf{V}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f}) = \mathrm{Tr}^{-}(\mathbf{V}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f}) = \mathcal{V}_{\lambda;\partial\Omega}\mathbf{f}. \tag{3.6.30}$$

Teorema 3.6.6 ([55], [57]) *Dacă $\Omega \subset M$ este un domeniu Lipschitz, atunci pentru orice $s \in [0,1]$ nucleul operatorului de simplu strat $\mathcal{V}_{\lambda,\partial\Omega} : H^{-s}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM) \to H^{1-s}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM)$ este dat de*

$$\mathrm{Ker}\left(\mathcal{V}_{\lambda,\partial\Omega} : H^{-s}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM) \to H^{1-s}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM)\right) = \mathbb{R}\nu,\ \mathbb{R}\nu := \{c\nu : c \in \mathbb{R}\}. \tag{3.6.31}$$

În plus, următoarea proprietate are loc $\mathbf{V}_{\lambda,\partial\Omega}\nu = 0$ pe M.

În cazul $\lambda = 0$ obţinem rezultatul lui Mitrea şi Taylor [78, Lemma 6.1].

3.6.7 Compactitatea operatorilor potenţiali complementar pe domenii Lipschitz de pe varietăţ Riemanniene compacte

În continuare, menţionăm proprietatea de compactitate a operatorului potenţial complementar. Printr-un *operator potenţial complementar* înţelegem diferenţa dintre un operator potenţial al sistemului Brinkman şi operatorul potenţial corespunzător sistemului Stokes. Atunci obţinem următorul rezultat de compactitate pe spaţii Sobolev:

Teorema 3.6.7 [57] *Fie $\Omega \subset M$ un domeniu Lipschitz şi $\lambda > 0$ o constantă dată. Atunci pentru orice $s \in [0,1]$ următorii operatori sunt compacţi:*

- *Operatorii potenţiali complementari de simplu şi de dublu strat*

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}_{\lambda,0;\partial\Omega} := \mathcal{V}_{\lambda;\partial\Omega} - \mathcal{V}_{\partial\Omega} : H^{s-1}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM) \to H^{s}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM)\\
&\mathbf{K}_{\lambda,0;\partial\Omega} := \mathbf{K}_{\lambda;\partial\Omega} - \mathbf{K}_{\partial\Omega} : H^{s}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM) \to H^{s}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM)
\end{aligned}
\tag{3.6.32}
$$

- *Adjunctul operatorului potenţial complementar de dublu strat*

$$\mathbf{K}^{*}_{\lambda,0;\partial\Omega} := \mathbf{K}^{*}_{\lambda;\partial\Omega} - \mathbf{K}^{*}_{\partial\Omega} : H^{s-1}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM) \to H^{s-1}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM)$$

- *Operatorul potenţial complementar hipersingular*

$$\mathbf{D}_{\lambda,0;\partial\Omega} := \mathbf{D}_{\lambda;\partial\Omega} - \mathbf{D}_{\partial\Omega} : H^{s}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM) \to H^{s-1}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM). \tag{3.6.33}$$

3.6.8 Inversabilitatea unor operatori potenţiali pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte

Rezultatele referitoare la operatorii Fredholm şi cei inversabili prezentat mai jos a fost recent obţinut:

Teorema 3.6.8 [57] *Fie $\Omega \subset M$ un domeniu Lipschitz şi $\lambda > 0$, $\mu \in [0,1)$ constante date. Atunci pentru orice $s \in (0,1)$ următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(i) *Operatorii*

$$\tilde{\mathbf{K}}^{\pm}_{\lambda;\partial\Omega;\mu} := \mp\frac{1}{2}\frac{1+\mu}{1-\mu}\mathbb{I} + \mathbf{K}_{\lambda;\partial\Omega} : H^s(\partial\Omega, \Lambda^1 TM) \to H^s(\partial\Omega, \Lambda^1 TM) \tag{3.6.34}$$

sunt Fredholm de index zero.

(ii) *Operatorii*

$$\tilde{\mathbf{K}}^{\pm}_{\lambda;\partial\Omega;\mu} := \mp\frac{1}{2}\frac{1+\mu}{1-\mu}\mathbb{I} + \mathbf{K}_{\lambda;\partial\Omega} : H^s_\nu(\partial\Omega, \Lambda^1 TM) \to H^s_\nu(\partial\Omega, \Lambda^1 TM) \tag{3.6.35}$$

sunt izomorfisme, unde

$$H^s_\nu(\partial\Omega, \Lambda^1 TM) := \{\Phi \in H^s(\partial\Omega, \Lambda^1 TM) : \langle \Phi, \nu \rangle_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{3.6.36}$$

Observaţia 3.6.9 O extensie a rezultatelor obţinute în Teoremele 3.6.7 şi 3.6.8 la un caz mai general implicând varietăţile Riemanniene compacte fărăfrontieră de dimensiune $m \geq 2$ şi un operator pseudodiferenţial $P \in OPS^0_{\mathrm{cl}}(M, \Lambda^1 TM)$ de forma $P = \lambda\mathbb{I}$, $\lambda \in C^\infty(M)$, sau sfera unitate m-dimensională $\mathfrak{S}^m$ şi un operator pseudodiferenţial arbitrar $P \in OPS^0_{\mathrm{cl}}(\mathfrak{S}^m, \Lambda^1 TM)$, a fost obţinut în [57].

Capitolul 4

Probleme Dirichlet transmisie pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$

Acest capitol conţine rezultate originale referitoare la studiul unei probleme Dirichlet-transmisie pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Noutatea acestui studiu este oferită de faptul că condiţiile de transmisie sunt exprimate în funcţie de un parametru $\mu \in (0, 1]$ şi datele pe frontieră sunt alese în diverse spaţii de funcţii, spaţii Sobolev sau spaţii L^p, cu p într-o vecinătate a lui 2. Utilizăm rezultate din teoria potenţialului prezentate în capitolul precedent pentru a obţine proprietatea de existenţă şi unicitate a soluţiei pentru această problemă. Studiul nostru conţine şi câteva cazuri particulare cu aplicaţii practice importante. De exemplu, alegând $n = 3$ şi $\mu = 1$ această problemă cu valori pe frontieră descrie o mişcare de tip Stokes a unui fluid peste o particulă poroasă care conţine un corp solid în interior, toate domeniile implicate fiind Lipschitz. Menţionăm că o problemă similară, dar într-o situaţie mai particulară, problema unei mişcări de tip Stokes peste o sferă poroasă care conţine un corp solid a fost analizată de Srivastava and Srivastava [103]. Studiul nostru poate fi considerat o extensie a studiului lor la o situaţie mai generală. În plus, analizăm două cazuri speciale. Primul caz este dedicat unei mişcări de tip Stokes tridimensionale a unui fluid peste un mediu poros ce conţine un corp solid în interior, în cazul în care permeabilitatea este mare. În al doilea caz considerăm o problemă similară de tip Stokes în ipoteza unei permeabilităţi mici. Pentru a demonstra existenţa şi unicitatea soluţiei problemei cu valori pe frontieră corespunzătoare, utilizăm teoria potenţialului pentru ambele sisteme, Stokes şi Brinkman, şi astfel metoda teoriei potenţialului reduce problema la un sistem unic rezolvabil de ecuaţii integrale Fredholm. Principalele rezultate prezentate în acest capitol au fost obţinute recent de Fericean şi Wendland în [31]. În pregătirea acestui capitol am utilizat următoarele surse bibliografice [54], [59], [60], [61].

4.1 Formularea problemei

Fie $\Omega, \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$, domenii Lipschitz mărginite astfel încât $\overline{\mathfrak{D}} \subset \Omega$ şi fie Γ frontiera lui $\mathfrak{D}$. De asemenea, fie $\Omega^- := \Omega \setminus \overline{\mathfrak{D}}$ şi $\Omega_+ := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Notăm cu $\partial\Omega$ frontiera lui Ω. Presupunem că $\partial\Omega$ şi Γ sunt conexe. De asemenea, presupunem că $\mu \in (0, 1]$ este un parametru de transmisie dat, $\chi > 0$ este o constantă dată şi $\mathbf{H}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ sunt funcţii vectoriale date în spaţii specificate mai jos. În continuare considerăm problema cu valori pe frontieră pentru sistemele Stokes şi Brinkman, cu condiţii de tip Dirichlet şi transmise. Această problemă presupune găsirea perechilor

$((\mathbf{u}_+,\pi_+),(\mathbf{u}_-,\pi_-))$ care satisfac

$$(4.1.1)\qquad \begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{u}_+=0,\ \ -\nabla\pi_+ + \Delta\mathbf{u}_+ = 0 \text{ în } \Omega_+,\\ \operatorname{div}\mathbf{u}_-=0,\ \ -\nabla\pi_- + (\Delta-\chi^2\mathbb{I})\mathbf{u}_- = 0 \text{ în } \ \Omega^-,\\ \mathrm{Tr}^+\mathbf{u}_+ - \mathrm{Tr}^-\mathbf{u}_- = \mathbf{H},\ \ \partial_\nu^+(\mathbf{u}_+,\pi_+) - \mu\partial_\nu^-(\mathbf{u}_-,\pi_-) = \mathbf{F} \ \text{ pe } \ \partial\Omega,\\ \mathrm{Tr}_\Gamma^+\mathbf{u}_- = \mathbf{G} \ \text{ pe } \ \Gamma,\\ \nabla^k\mathbf{u}_+(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{2-n-k}),\ \ \pi_+(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{1-n}),\ |\mathbf{x}|\to\infty,\ k=0,1,\end{cases}$$

unde $\mathrm{Tr}^+,\mathrm{Tr}^-$ sunt operatorii urmă care acţionează pe $\partial\Omega$, Tr_Γ^+ operatorul urmă care acţionează pe Γ, $\partial_\nu^+(\mathbf{u}_+,\pi_+)$ şi $\partial_\nu^-(\mathbf{u}_-,\pi_-)$ sunt operatorii de derivare conormală asociaţi perechilor $(\mathbf{u}_+,\pi_+)$, respectiv $(\mathbf{u}_-,\pi_-)$ şi care corespund lui $\partial\Omega$. În cazul tridimensional $(n=3)$, problema cu valori pe frontieră (4.1.1) descrie mişcarea exterioară de tip Stokes a unui fluid vâscos incompresibil în prezenţa unei particule poroase care conţine în interior un corp solid $(\mathfrak{D})$. În acest caz $\chi := \frac{a}{\sqrt{\kappa}}$, unde a este o lungime caracteristică a particulei poroase cu permeabilitate κ.

Considerăm următoarele spaţii:

1. Spaţii Sobolev

(4.1.2)

$$\begin{aligned} &Y := Y_{\nu,1,\beta} := H^{\frac12+\beta}_{\mathbf{n}_{\partial\Omega}}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)\times H^{-\frac12+\beta}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)\times H^{-\frac12+\beta}_{\mu_\Gamma}(\Gamma,\mathbb{R}^n),\\ &Y^{(1)} := Y^{(1)}_{\nu,1,\beta} := H^{\frac12+\beta}_{\mathbf{n}_{\partial\Omega}}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)\times H^{-\frac12+\beta}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)\times H^{\frac12+\beta}_{\mathbf{n}_\Gamma}(\Gamma,\mathbb{R}^n),\\ &Z := \Big(H^{1+\beta}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}_+,\mathbb{R}^n)\times H^{\beta}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}_+)\Big)\times\big(H^{1+\beta}(\Omega^-,\mathbb{R}^n)\times H^{\beta}(\Omega^-)\big)\,,\ \beta\in(-\tfrac12,\tfrac12).\end{aligned}$$

2. Spaţii L^p

$$(4.1.3)\qquad \begin{aligned} &Y := Y_{\nu,1,p} := L^p_{1,\mathbf{n}_{\partial\Omega}}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)\times L^p(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)\times L^p_{\mu_\Gamma}(\Gamma,\mathbb{R}^n),\\ &Y^{(1)} := Y^{(1)}_{\nu,1,p} := L^p_{1,\mathbf{n}_{\partial\Omega}}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)\times L^p(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)\times L^p_{1,\mathbf{n}_\Gamma}(\Gamma,\mathbb{R}^n),\\ &Z := \Big(C^2(\Omega_+,\mathbb{R}^n)\times C^1(\Omega_+)\Big)\times\Big(C^2(\Omega^-,\mathbb{R}^n)\times C^1(\Omega^-)\Big).\end{aligned}$$

pentru $p\in(2-\epsilon,2+\epsilon)$, $n\geq 2$ şi un anumit $\epsilon=\epsilon(\Gamma)>0$, care va fi specific ulterior. Pentru a avea o problemă corect formulată în acest caz, cerem ca (a se vedea [79, Teorema 4.13])

$$(4.1.4)\qquad \mathcal{N}_{\partial\Omega}\big(\nabla\mathbf{u}_\pm\big),\ \mathcal{N}_{\partial\Omega}\big(\pi_\pm\big)\in L^p(\partial\Omega),\ \mathcal{N}_\Gamma\big(\nabla\mathbf{u}_-\big),\ \mathcal{N}_\Gamma\big(\pi_-\big)\in L^p(\Gamma),$$

unde $\mathcal{N}_{\partial\Omega}$ este operatorul netangenţial maximal pentru $\partial\Omega$, iar $\mathcal{N}_\Gamma$ este cel ce corespunde lui Γ. În plus, în acest caz, operatorul de derivare conormală corespunzător lui $\partial\Omega$ este dat de

$$(4.1.5)\qquad \partial_\nu^\pm(\mathbf{u},\pi) := \Big(-\pi\mathbb{I}+\nabla\mathbf{u}+\nabla^\top\mathbf{u}\Big)\Big|_{\partial\Omega^\pm}\mathbf{n}_{\partial\Omega}\ \text{a.p.t. pe } \partial\Omega$$

în sensul limitei netangenţiale.

Funcţiile μ_Γ and $\mu_{\partial\Omega}$ sunt alese astfel încât[1] $\langle\mathbf{n}_\Gamma,\mu_\Gamma\rangle_\Gamma = 1$ şi $\langle\mathbf{n}_{\partial\Omega},\mu_{\partial\Omega}\rangle_{\partial\Omega}=1$. Pentru orice $s\in[0,1]$ şi $p\in(1,\infty)$ definim

$$(4.1.6)\qquad \begin{aligned} &L^p_{s,\mathbf{n}_{\partial\Omega}}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n) := \{\mathbf{f}\in L^p_s(\partial\Omega,\mathbb{R}^n) : \langle\mathbf{f},\mathbf{n}_{\partial\Omega}\rangle_{\partial\Omega}=0\},\\ &L^p_{-s,\mu_{\partial\Omega}}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n) := \{\mathbf{g}\in L^p_{-s}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n) : \langle\mathbf{g},\mu_{\partial\Omega}\rangle_{\partial\Omega}=0\},\end{aligned}$$

iar spaţiile $L^p_{s,\mathbf{n}_\Gamma}(\Gamma,\mathbb{R}^n)$, $L^p_{-s,\mu_\Gamma}(\Gamma,\mathbb{R}^n)$ sunt definite similar. În fiecare din cazurile următoare, presupunem că $(\mathbf{H},\mathbf{F},\mathbf{G})\in Y^{(1)}$.

[1] Notaţia ${}_{X^*}\langle\cdot,\cdot\rangle_X := \langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ se referă la perechea dintre două spaţii duale X^* şi X, definite în raport cu Γ.

4.2 Rezultatul de unicitate pentru problema cu valori pe frontieră (**4.1.1**)

Teorema 4.2.1 [31] *Problema cu valori pe frontieră* (4.1.1) *are cel mult o soluţie* $((\mathbf{u}_+,\pi_+),(\mathbf{u}_-,\pi_-))$ *în cazul spaţiilor Sobolev date în* (4.1.2) *cu* $\beta \geq 0$. *Acelaşi rezultat de unicitate are loc pentru problema* (4.1.1), (4.1.4) *în cazul spaţiilor* L^p *date în* (4.1.3) *cu* $p \geq 2$.

4.3 Formularea problemei prin potenţiale

În fiecare din cazurile (4.1.2), (4.1.3) vom demonstra existenţa soluţiilor problemei cu valori pe frontieră (4.1.1), utilizând următoarele reprezentări prin potenţiale:

$$\begin{array}{lcl}\mathbf{u}_+ = \mathbf{W}_{\partial\Omega}\mathbf{h} + \mathbf{V}_{\partial\Omega}\mathbf{f}, & \text{în } \Omega_+, & \mathbf{u}_- := \mathbf{W}_{\chi^2,\partial\Omega}\mathbf{h} + \mathbf{V}_{\chi^2,\partial\Omega}\mathbf{f} + \mathbf{V}_{\chi^2,\Gamma}\mathbf{g}, \\ \pi_+ = P^d_{\partial\Omega}\mathbf{h} + P^s_{\partial\Omega}\mathbf{f}, & & \pi_- = P^d_{\chi^2,\partial\Omega}\mathbf{h} + P^s_{\chi^2,\partial\Omega}\mathbf{f} + P^s_{\chi^2,\Gamma}\mathbf{g},\end{array} \quad \text{în } \Omega^-, \tag{4.3.1}$$

cu densităţile $(\mathbf{h},\mathbf{f},\mathbf{g}) \in Y$ necunoscute. Astfel, determinăm câmpul vectorial necunoscut $\mathbf{u}_+$ ca o combinaţie a unui potenţial de dublu strat $\mathbf{W}_{\partial\Omega}\mathbf{h}$ cu un potenţial de simplu strat $\mathbf{V}_{\partial\Omega}\mathbf{f}$, fiecare din ele satisfăcând ecuaţia de continuitate şi ecuaţia lui Stokes în (4.1.1). Similar, $\mathbf{u}_-$ este determinat ca o combinaţie dintre un potenţial de dublu strat $\mathbf{W}_{\chi^2,\partial\Omega}\mathbf{h}$ şi două potenţiale de simplu strat, $\mathbf{V}_{\chi^2,\partial\Omega}\mathbf{f}$ şi $\mathbf{V}_{\chi^2,\Gamma}\mathbf{g}$, fiecare din ele satisfăcând ecuaţia de continuitate şi ecuaţia Brinkman din (4.1.1).

4.3.1 Ecuaţiile integrale pe frontieră generate de reprezentările prin potenţiale

În continuare ne referim la cazul $\mu \in (0,1)$. În acest caz obţinem următoarea ecuaţie matricială:

$$\mathbb{M}_{\chi^2,0}\,(\mathbf{h},\mathbf{f},\mathbf{g})^\top = (\mathbf{H},\mathbf{F},\mathbf{G})^\top, \text{ unde } \mathbb{M}_{\chi^2,0} : Y \to Y^{(1)}, \tag{4.3.2}$$

$$\mathbb{M}_{\chi^2,0} := \begin{pmatrix} \mathbb{I} - \mathbf{K}_{\chi^2,0,\partial\Omega} & -\mathcal{V}_{\chi^2,0,\partial\Omega} & -\mathcal{V}_{\chi^2,\Gamma,\partial\Omega} \\ (1-\mu)\mathbf{D}_{\partial\Omega} - \mu\mathbf{D}_{\chi^2,0,\partial\Omega} & (1-\mu)\mathcal{K}^*_{\mu;\partial\Omega} - \mu\mathbf{K}^*_{\chi^2,0,\partial\Omega} & -\mu\mathbf{K}^*_{\chi^2,\Gamma,\partial\Omega} \\ \mathbf{K}^*_{\chi^2,\partial\Omega,\Gamma} & \mathcal{V}_{\chi^2,\partial\Omega,\Gamma} & \mathcal{V}_\Gamma + \mathcal{V}_{\chi^2,0,\Gamma} \end{pmatrix},$$

şi $\mathcal{K}^*_{\mu;\partial\Omega} := -\frac{1}{2}\frac{1+\mu}{1-\mu}\mathbb{I} + \mathbf{K}^*_{\partial\Omega}$. Utilizând Teorema 3.5.3, operatorul $\mathbb{P} : Y \to Y^{(1)}$ este compact. În plus, ţinând cont de inversabilitatea lui $-\frac{1}{2}\frac{1+\mu}{1-\mu}\mathbb{I} + \mathbf{K}^*_{\partial\Omega} : H^{-\frac{1}{2}+\beta}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n) \to H^{-\frac{1}{2}+\beta}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ şi $\mathcal{V}_\Gamma : H^{-\frac{1}{2}+\beta}_{\mu_\Gamma}(\Gamma,\mathbb{R}^n) \to H^{\frac{1}{2}+\beta}_{\mathbf{n}_\Gamma}(\Gamma,\mathbb{R}^n)$ pentru orice $\beta \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (a se vedea [79]), obţinem că $\mathbb{M}_0 : Y \to Y^{(1)}$ este inversabil, unde Y şi $Y^{(1)}$ sunt date în (4.1.2). Un rezultat de inversabilitate similar are loc în cazul (4.1.3).

4.3.2 Inversabilitatea operatorului $\mathbb{M}_{\chi^2,0}$

• Demonstrăm inversabilitatea operatorului $\mathbb{M}_{\chi^2,0} : Y_{\nu,1} \to Y^{(1)}_{\nu,1}$ în cazul în care spaţiile $Y_{\nu,1}$ ş $Y^{(1)}_{\nu,1}$ sunt definite în (4.1.2). Cum am menţionat mai sus, $\mathbb{P} : Y_{\nu,1} \to Y^{(1)}_{\nu,1}$ este compact şi $\mathbb{M}_0 : Y_{\nu,1} \to Y^{(1)}_{\nu,1}$ este Fredholm de index zero. Astfel, operatorul

$$\mathbb{M}_{\chi^2,0} := \mathbb{M}_0 + \mathbb{P} : Y_{\nu,1} \to Y^{(1)}_{\nu,1} \tag{4.3.3}$$

este de asemenea Fredholm de index zero şi injectiv. În consecinţă, în cazul (4.1.2), obţinem următorul rezultat de existenţă şi unicitate:

$$\forall\,(\mathbf{H},\mathbf{F},\mathbf{G})^\top \in Y^{(1)},\ \exists!\,(\mathbf{h},\mathbf{f},\mathbf{g})^\top \in Y \text{ astfel încât } \mathbb{M}_{\chi^2,0}\,(\mathbf{h},\mathbf{f},\mathbf{g})^\top = (\mathbf{H},\mathbf{F},\mathbf{G})^\top.$$

În plus, reprezentările prin potenţiale (4.3.1) obţinute cu denistăţile $(\mathbf{h}, \mathbf{f}, \mathbf{g})^T$ determină soluţia unică $((\mathbf{u}_+, \pi_+), (\mathbf{u}_-, \pi_-)) \in Z$ a problemei (4.1.1).

• Operatorul $\mathbb{M}_{\chi^2,0} : Y \to Y^{(1)}$ este inversabil când spaţiile $Y, Y^{(1)}$ şi Z sunt date de (4.1.2) cu $\beta > 0$, sau (4.1.3). În acelaşi caz (4.1.3) cu $p \geq 2$, reprezentările prin potenţiale (4.3.1) determină unica soluţie a problemei cu valori pe frontieră (4.1.1), care statisface condiţiile (4.1.4) şi estimarea (a se vedea [78, Teorema 3.1], [79]):

$$\begin{aligned}\|\mathcal{N}_{\partial\Omega}(\nabla \mathbf{u}_+)\|_{L^p(\partial\Omega)} &+ \|\mathcal{N}_{\partial\Omega}(\pi_+)\|_{L^p(\partial\Omega)} + \|\mathcal{N}_{\partial\Omega}(\nabla \mathbf{u}_-)\|_{L^p(\partial\Omega)} + \|\mathcal{N}_{\partial\Omega}(\pi_-)\|_{L^p(\partial\Omega)} \\ &+ \|\mathcal{N}_{\Gamma}(\nabla \mathbf{u}_-)\|_{L^p(\Gamma)} + \|\mathcal{N}_{\Gamma}(\pi_-)\|_{L^p(\Gamma)} \leq C\,\|(\mathbf{H}, \mathbf{F}, \mathbf{G})\|_{Y}, \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

cu constanta $C > 0$ independentă de $\mathbf{H}$, $\mathbf{F}$ şi $\mathbf{G}$. În consecinţă obţinem:

Teorema 4.3.1 **[31]** *Fie $\Omega, \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$, domenii Lipschitz mărginite cu frontierele $\partial\Omega$ şi Γ conexe, astfel încât $\overline{\mathfrak{D}} \subset \Omega$. De asemenea, fie $\Omega^- := \Omega \setminus \overline{\mathfrak{D}}$ şi $\Omega_+ := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Pentru $\mu \in (0, 1)$ şi $\lambda > 0$ date, considerăm problema Dirichlet-transmisie* (4.1.1)*. Atunci:*

(a) Pentru orice $\beta \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ şi $(\mathbf{H}, \mathbf{F}, \mathbf{G})^\top \in Y^{(1)}$, ecuaţia (4.3.2) *are o soluţie unică $(\mathbf{h}, \mathbf{f}, \mathbf{g})^\top \in Y$, unde Y este spaţiul dat în* (4.1.2).

(b) Pentru $p > 1$ există $\epsilon = \epsilon(\Gamma) > 0$ astfel încât ecuaţia (4.3.2) *are o soluţie unică $(\mathbf{h}, \mathbf{f}, \mathbf{g})^\top \in Y$, unde Y este spaţiul dat în* (4.1.3).

Densităţile $\mathbf{h}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ şi reprezentările prin potenţiale (4.3.1) *determină o soluţie $\big((\mathbf{u}_+, \pi_+), (\mathbf{u}_-, \pi_-)\big) \in Z$ a problemei Dirichlet transmisie* (4.1.1)*, unde Z este spaţiul descris în* (4.1.2)*. Acelaşi rezultat de existenţă are loc pentru problema* (4.1.1), (4.1.4)*, unde spaţiul Z este dat în* (4.1.3)*. În primul caz,* (4.1.2)*, cu $\beta \geq 0$, soluţia este unică. În cazul* (4.1.3) *cu $p \geq 2$, soluţia problemei* (4.1.1), (4.1.4) *este de asemenea unică şi satisface estimarea* (4.3.4).

4.3.3 Cazul $\mu = 1$

Matricea de ecuaţii (4.3.2) are în acest caz următoarea formă:

$$\mathbb{M}_{\chi^2,0}\,(\mathbf{h}, \mathbf{f}, \mathbf{g})^\top = (\mathbf{H}, \mathbf{F}, \mathbf{G})^\top, \tag{4.3.5}$$

unde

$$\mathbb{M}_{\chi^2,0} := \begin{pmatrix} \mathbb{I} - \mathbf{K}_{\chi^2,0,\partial\Omega} & -\mathcal{V}_{\chi^2,0,\partial\Omega} & -\mathcal{V}_{\chi^2,\Gamma,\partial\Omega} \\ -\mathbf{D}_{\chi^2,0,\partial\Omega} & -\mathbf{K}^*_{\chi^2,0,\partial\Omega} & -\mathbf{K}^*_{\chi^2,\Gamma,\partial\Omega} \\ \mathbf{K}^*_{\chi^2,\partial\Omega,\Gamma} & \mathcal{V}_{\chi^2,\partial\Omega,\Gamma} & \mathcal{V}_{\Gamma} + \mathcal{V}_{\chi^2,0,\Gamma} \end{pmatrix} : Y \to Y^{(1)}. \tag{4.3.6}$$

Teorema 4.3.2 **[31]** *Fie $\Omega, \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$, domenii Lipschitz cu frontierele $\partial\Omega$ şi Γ conexe astfel încât $\overline{\mathfrak{D}} \subset \Omega$. De asemenea, fie $\Omega^- := \Omega \setminus \overline{\mathfrak{D}}$ şi $\Omega_+ := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Pentru $\lambda > 0$ dat, considerăm problema* (4.1.1)*, cu $\mu = 1$ şi $(\mathbf{H}, \mathbf{F}, \mathbf{G})^\top \in Y^{(1)}$, unde Y şi $Y^{(1)}$ sunt spaţiile date de relaţiile* (4.1.2) *sau* (4.1.3)*. Atunci:*

(a) Pentru orice $\beta \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ şi $(\mathbf{H}, \mathbf{F}, \mathbf{G})^\top \in Y^{(1)}$, ecuaţia (4.3.5) *are o soluţie unică $(\mathbf{h}, \mathbf{f}, \mathbf{g})^\top \in Y$, unde Y este spaţiul dat în* (4.1.2).

(b) Pentru $p > 1$ există $\epsilon = \epsilon(\Gamma) > 0$ astfel încât (4.3.5) *are o soluţie unică $(\mathbf{h}, \mathbf{f}, \mathbf{g})^\top \in Y$, unde Y este spaţiul dat în* (4.1.3).

Densităţile $\mathbf{h}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ şi reprezentările prin potenţiale (4.3.1) *determină o soluţie $\big((\mathbf{u}_+, \pi_+), (\mathbf{u}_-, \pi_-)\big) \in Z$ a problemei Dirichlet transmisie* (4.1.1) *cu $\mu = 1$, unde Z este spaţiul descris în* (4.1.2)*. Acelaşi rezultat de existenţă are loc pentru problema* (4.1.1), (4.1.4)*, cu $\mu = 1$ şi spaţiul Z definit în* (4.1.3)*. În primul caz,* (4.1.2)*, cu $\beta \geq 0$, soluţia este unică. În cazul* (4.1.3) *cu $p \geq 2$, soluţia problemei* (4.1.1), (4.1.4) *este de asemenea unică şi satisface estimarea* (4.3.4).

4.3.4 Rezultatul de unicitate în cazul particular când Γ lipseşte şi $\chi = 0$

4.4 Mişcarea de tip Stokes peste un mediu poros cu un corp solid în interior

În această secţiune ne referim din nou la problema cu valori pe frontieră (4.1.1) pentru $n = 3$ în două cazuri speciale. Primul caz descriere o mişcare de tip Stokes peste un mediu poros cu un corp solid în interior şi permeabilitate mare, iar al doilea caz corespunde unei mişcări similare peste un mediu poros cu permeabilitate mică. Menţionăm că problema analizată în primul caz a fost studiată de Srivastava şi Srivastava [103], însă doar pentru geometria sferică a domeniilor implicate. Tratăm această problemă într-un cadru mai general al domeniilor Lipschitz.

4.4.1 Mişcarea de tip Stokes a unui mediu poros cu un corp solid în interior şi permeabilitate mare

Presupunem că $\Omega, \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^3$ sunt domenii Lipschitz mărginite astfel încât $\overline{\mathfrak{D}} \subset \Omega$ şi fie Γ frontiera lui $\mathfrak{D}$. De asemenea, fie $\Omega^- := \Omega \setminus \overline{\mathfrak{D}}$ şi $\Omega_+ := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Notăm cu $\partial\Omega$ frontiera lui Ω. De asemenea, pentru $\mu = 1$ considerăm problema cu valori pe frontieră (4.1.1) in $\mathbb{R}^3$, cu condiţiile la infinit

$$\nabla^k(\mathbf{u}_+(\mathbf{x}) - \mathbf{U}_\infty) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1-k}),\ \ \pi_+(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-2}),\ |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{4.4.1}$$

Această problemă descrie mişcarea de tip Stokes a unui fluid vâscos incompresibil peste un mediu poros în prezenţa unui corp solid fixat $\mathfrak{D}$. În plus, mişcarea la infinit este uniformă având câmpul viteză $\mathbf{U}_\infty$ constant şi presiunea p_∞ constantă. Pentru simplitate, alegem $p_\infty = 0$. Utilizând relaţiile

$$\mathbf{u}_+ = \mathbf{U}_\infty + \mathbf{v}_+,\ \pi_+ = q_+ \text{ în } \Omega_+,\ \mathbf{u}_- = \mathbf{v}_-,\ \pi_- = q_- \text{ în } \Omega^-, \tag{4.4.2}$$

problema menţionată anterior se reduce la problema neomogenă Dirichlet transmisie

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v}_+ = 0,\ -\nabla q_+ + \Delta \mathbf{v}_+ = 0 \text{ în } \Omega_+ \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_- = 0,\ -\nabla q_- + (\Delta - \chi^2\mathbb{I})\mathbf{v}_- = 0 \text{ în } \Omega^- \\ \mathrm{Tr}^+\mathbf{v}_+ - \mathrm{Tr}^-\mathbf{v}_- = -\mathbf{U}_\infty \in H_\nu^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega, \mathbb{R}^3), \\ \partial_\nu^+(\mathbf{v}_+, q_+) - \partial_\nu^-(\mathbf{v}_-, q_-) = 0 \text{ pe } \partial\Omega \\ \mathrm{Tr}^+\mathbf{v}_- = 0 \ \text{ pe } \ \Gamma \\ \nabla^s\mathbf{v}_+(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1-s}),\ q_+(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-2}),\ |\mathbf{x}| \to \infty,\ \ s = 0, 1. \end{cases} \tag{4.4.3}$$

Ţinând cont de Teorema 4.3.2, obţinem că (4.4.3) are o soluţie unică $((\mathbf{v}_+, q_+), (\mathbf{v}_-, q_-)) \in (H^1_{\rm loc}(\overline{\Omega}_+, \mathbb{R}^3) \times L^2_{\rm loc}(\overline{\Omega}_+)) \times (H^1(\Omega^-, \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega^-))$.

În continuare, presupunem că particula poroasă are permeabilitatea κ mare, $\chi \ll 1$, unde $\chi := \frac{a}{\sqrt{\kappa}}$, a este lungimea caracteristică a particulei şi fie dezvoltările (în raport cu χ suficient de mic):

$$\mathbf{u}_\pm = \mathbf{u}_\pm^{(0)} + \chi\mathbf{u}_\pm^{(1)} + \chi^2\mathbf{u}_\pm^{(2)} + \ldots,\ \pi_\pm = \pi_\pm^{(0)} + \chi\pi_\pm^{(1)} + \chi^2\pi_\pm^{(2)} + \ldots \tag{4.4.4}$$

Înlocuind aceste dezvoltări în ecuaţiile şi condiţiile pe frontieră din (4.4.3), şi selectând termenii de ordinul k, $k = 0, 1, 2$, în raport cu valori mici ale lui χ, obţinem:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u}_+^{(k)} = 0, -\nabla\pi_+^{(k)} + \Delta\mathbf{u}_+^{(k)} = \mathbf{0} \text{ în } \Omega_+ \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_-^{(k)} = 0, -\nabla\pi_-^{(k)} + \Delta\mathbf{u}_-^{(k)} = \mathbf{u}^{(k)} \text{ în } \Omega^- \\ \mathrm{Tr}^+\mathbf{u}_+^{(k)} = \mathrm{Tr}^-\mathbf{u}_-^{(k)} \ \text{ pe } \ \partial\Omega \\ \partial_\nu^+(\mathbf{u}_+^{(k)}, \pi_+^{(k)}) = \partial_\nu^-(\mathbf{u}_-^{(0)}, \pi_-^{(k)}) \text{ pe } \partial\Omega \\ \mathrm{Tr}^+\mathbf{u}_-^{(k)} = 0 \text{ pe } \Gamma \\ \nabla^s(\mathbf{u}_+^{(k)} - \mathbf{U}_\infty)(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1-s}),\ |\mathbf{x}| \to \infty,\ s = 0, 1 \end{cases},\ k = 0, 1, 2, \tag{4.4.5}$$

unde $\mathbf{u}^{(k)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & k=0,1 \\ \mathbf{u}_-^{(0)}, & k=2. \end{cases}$ Ne referim în continuare la cazul $k=0$. Utilizând Teorema 4.2.1, problema cu valori pe frontieră (4.4.5) corespunzătoare termenului de ordinul 0 are cel mult o soluţie. Pentru a demonstra existenţa soluţiei, considerăm reprezentările

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_+^{(0)} &= \mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma\mathbf{f},\ \pi_+^{(0)} = -Q_\Gamma^s\mathbf{f} \text{ în } \Omega_+, \\ \mathbf{u}_-^{(0)} &= \mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma\mathbf{f},\ \pi_-^{(0)} = -Q_\Gamma^s\mathbf{f} \text{ în } \Omega^-, \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

unde $\mathbf{f} \in H_{\mu_\Gamma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma,\mathbb{R}^3)$ este o densitate necunoscută şi $\mu_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma,\mathbb{R}^3)$ este ales astfel încât $\langle\mu_\Gamma,\mathbf{n}_\Gamma\rangle_\Gamma = 1$. Aceste reprezentări satisfac ecuaţiile, precum şi condiţiile de transmisie în (4.4.5) corespunzătoare lui $k=0$. Impunând condiţia Dirichlet pe Γ, şi aplicând operatorul urmă netangenţial în (4.4.6), obţinem următoarea ecuaţie cu necunoscuta $\mathbf{f}$:

$$\mathcal{V}_\Gamma\mathbf{f} = \mathbf{U}_\infty \text{ pe } \Gamma. \tag{4.4.7}$$

Deoarece operatorul potenţial de simplu strat $\mathcal{V}_\Gamma : H_{\mu_\Gamma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma,\mathbb{R}^3) \to H_{\mathbf{n}_\Gamma}^{\frac{1}{2}}(\Gamma,\mathbb{R}^3)$ este inversabil (a se vedea Teorema 3.5.2, [78, Teorema 6.1], [79]) şi $\mathbf{U}_\infty \in H_{\mathbf{n}_\Gamma}^{\frac{1}{2}}(\Gamma,\mathbb{R}^3)$, concluzionăm că ecuaţia (4.4.7) are o soluţie unică $\mathbf{f} \in H_{\mu_\Gamma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma,\mathbb{R}^3)$. Astfel, reprezentările (4.4.6) determină unica soluţie $((\mathbf{u}_+^{(0)},\pi_+^{(0)}),(\mathbf{u}_-^{(0)},\pi_-^{(0)}))$ a problemei (4.4.5) pentru $k=0$. Similar,

$$((\mathbf{u}_+^{(1)},\pi_+^{(1)}),(\mathbf{u}_-^{(1)},\pi_-^{(1)})) = ((0,0),(0,0)). \tag{4.4.8}$$

În continuare ne referim la problema cu valori pe frontieră (4.4.5) pentru $k=2$, şi arătăm că este de asemenea unic rezolvabilă. Reprezentările (4.4.6) conduc la sistemul neomogen

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_-^{(2)} = 0,\ -\nabla\pi_-^{(2)} + \Delta\mathbf{u}_-^{(2)} = \mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma\mathbf{f} \ \text{ în } \ \Omega^-, \tag{4.4.9}$$

unde $\mathbf{f} \in H_{\mu_\Gamma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma,\mathbb{R}^3)$ este soluţia unică a ecuaţiei (4.4.7). Determinăm soluţia corespunzătoare $((\mathbf{u}_+^{(2)},\pi_+^{(2)}),(\mathbf{u}_-^{(2)},\pi_-^{(2)}))$ în forma

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_+^{(2)} &= -\int_{\Omega^-}\mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot(\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma\mathbf{f})(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \mathbf{u}_{+,0}^{(2)}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega_+ \\ \pi_+^{(2)} &= -\int_{\Omega^-}\Pi(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot(\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma\mathbf{f})(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \pi_{+,0}^{(2)}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega_+, \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

şi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_-^{(2)} &= -\int_{\Omega^-}\mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot(\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma\mathbf{f})(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \mathbf{u}_{-,0}^{(2)}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega^- \\ \pi_-^{(2)} &= -\int_{\Omega^-}\Pi(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot(\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma\mathbf{f})(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \pi_{-,0}^{(2)}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega^-, \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

unde integralele pe Ω^- sunt potenţiale Newtoniene. Astfel, obţinem

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{u}_{+,0}^{(2)} = 0, -\nabla\pi_{+,0}^{(2)} + \Delta\mathbf{u}_{+,0}^{(2)} = \mathbf{0} \ \text{ în } \ \Omega_+ \\ \operatorname{div}\mathbf{u}_{-,0}^{(2)} = 0, -\nabla\pi_{-,0}^{(2)} + \Delta\mathbf{u}_{-,0}^{(2)} = \mathbf{0} \ \text{ în } \ \Omega^- \\ \mathrm{Tr}^+\mathbf{u}_{+,0}^{(2)} = \mathrm{Tr}^-\mathbf{u}_{-,0}^{(2)} \text{ pe } \partial\Omega \\ \partial_\nu^+(\mathbf{u}_{+,0}^{(2)},\pi_{+,0}^{(2)}) = \partial_\nu^-(\mathbf{u}_{-,0}^{(2)},\pi_{-,0}^{(2)}) \text{ pe } \partial\Omega \\ \mathrm{Tr}^+\mathbf{u}_{-,0}^{(2)} = \displaystyle\int_{\Omega^-}\mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot(\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma\mathbf{f})(\mathbf{y})d\mathbf{y} \text{ pe } \Gamma \\ \nabla^s\mathbf{u}_{+,0}^{(2)}(\mathbf{x}) = 0,\ |\mathbf{x}|\to\infty,\ s=0,1. \end{cases} \tag{4.4.12}$$

Pentru a analiza problema (4.4.12), considerăm următoarea problemă Dirichlet auxiliară:

$$
\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0, -\nabla \pi_0 + \Delta \mathbf{u}_0 = 0 \text{ în } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathfrak{D}} \\ \mathrm{Tr}^+ \mathbf{u}_0 = \int_{\Omega^-} \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma \mathbf{f})(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \text{ pe } \Gamma \\ \nabla^s \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1-s}), \ |\mathbf{x}| \to \infty, \ s = 0, 1. \end{cases} \tag{4.4.13}
$$

Aplicând rezultatul de unicitate al soluţiei problemei Dirichlet exterioare pentru sistemul Stokes (a se vedea [79, Teorema 10.15]), obţinem că există o soluţie unică $(\mathbf{u}_0, \pi_0) \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3 \setminus \mathfrak{D}, \mathbb{R}^3) \times L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3 \setminus \mathfrak{D})$ a problema cu valori pe frontieră (4.4.13). Această soluţie este dată de reprezentările prin potenţiale

$$
\mathbf{u}_0 = \mathbf{V}_\Gamma(\mathcal{V}_\Gamma^{-1} \mathcal{N}_{\Omega^-}), \ \ \pi_0 = Q^s_\Gamma(\mathcal{V}_\Gamma^{-1} \mathcal{N}_{\Omega^-}) \text{ în } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathfrak{D}}. \tag{4.4.14}
$$

Perechile $(\mathbf{u}^{(2)}_{+,0}, \pi^{(2)}_{+,0}) \in (H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}_+, \mathbb{R}^3) \times L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}_+)), (\mathbf{u}^{(2)}_{-,0}, \pi^{(2)}_{-,0}) \in (H^1(\Omega^-, \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega^-))$,

$$
\begin{aligned} \mathbf{u}^{(2)}_{+,0} &:= \mathbf{u}_0|_{\Omega_+}, \pi^{(2)}_{+,0} := \pi_0|_{\Omega_+} \text{ în } \Omega_+ \\ \mathbf{u}^{(2)}_{-,0} &:= \mathbf{u}_0|_{\Omega^-}, \pi^{(2)}_{-,0} := \pi_0|_{\Omega^-} \text{ în } \Omega^- \end{aligned} \tag{4.4.15}
$$

determină soluţia unică a problemei cu valori pe frontieră (4.4.12).

Utilizând din nou Teorema 4.2.1, obţinem că unica soluţie a problemei cu valori pe frontieră (4.4.5) corespunzătoare cazului $k = 2$ este dată de (4.4.10), (4.4.11), (4.4.14) şi (4.4.15), adică

$$
\begin{aligned} \mathbf{u}^{(2)}_+ &= -\int_{\Omega^-} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma \mathbf{f})(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \mathbf{V}_\Gamma(\mathcal{V}_\Gamma^{-1} \mathcal{N}_{\Omega^-}), \ \mathbf{x} \in \Omega_+ \\ \pi^{(2)}_+ &= -\int_{\Omega^-} \Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma \mathbf{f})(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + Q^s_\Gamma(\mathcal{V}_\Gamma^{-1} \mathcal{N}_{\Omega^-}), \ \ \mathbf{x} \in \Omega_+, \\ \mathbf{u}^{(2)}_- &= -\int_{\Omega^-} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma \mathbf{f})(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \mathbf{V}_\Gamma(\mathcal{V}_\Gamma^{-1} \mathcal{N}_{\Omega^-}), \ \mathbf{x} \in \Omega^- \\ \pi^{(2)}_- &= -\int_{\Omega^-} \Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma \mathbf{f})(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + Q^s_\Gamma(\mathcal{V}_\Gamma^{-1} \mathcal{N}_{\Omega^-}), \ \ \mathbf{x} \in \Omega^- \end{aligned} \tag{4.4.16}
$$

unde $\mathbf{f} \in H^{-\frac{1}{2}}_{\mu_\Gamma}(\Gamma, \mathbb{R}^3)$ este soluţia unică a ecuaţiei (4.4.7). De asemenea, obţinem

$$
\big(\mathbf{u}^{(2l+1)}_+, \pi^{(2l+1)}_+\big) = (\mathbf{0}, 0) \text{ în } \Omega_+, \ \big(\mathbf{u}^{(2l+1)}_-, \pi^{(2l+1)}_-\big) = (\mathbf{0}, 0) \text{ în } \Omega^-, \ \forall\, l \geq 0. \tag{4.4.17}
$$

Folosind (4.4.6), (4.4.8), (4.4.16) şi (4.4.17) obţinem următoarea dezvoltare a câmpului viteză interioară $\mathbf{u}_-$ în raport cu χ mic, până la ordinul $\mathcal{O}(\chi^4)$:

$$
\mathbf{u}_- = (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma \mathbf{f}) - \chi^2 \int_{\Omega^-} \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma \mathbf{f})(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \chi^2 \mathbf{V}_\Gamma(\mathcal{V}_\Gamma^{-1} \mathcal{N}_{\Omega^-}) + \mathcal{O}(\chi^4). \tag{4.4.18}
$$

4.4.2 Forţa exercitată de mişcarea Stokes asupra particulei poroase

Utilizând dezvoltarea (4.4.18), obţinem următoarea formulă asimptotică a forţei adimensionale $\mathbf{F}$ exercitată de mişcarea fluidă Stokes asupra particulei poroase:

$$
\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{\partial\Omega} \partial^+_\nu(\mathbf{u}_+, \pi_+) d\sigma = \chi^2 \int_{\Omega^-} (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma \mathbf{f}) d\mathbf{x} - \chi^4 \int_{\Omega^-} \int_{\Omega^-} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{U}_\infty - \mathbf{V}_\Gamma \mathbf{f})(\mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &\quad + \chi^4 \int_{\Omega^-} \mathbf{V}_\Gamma(\mathcal{V}_\Gamma^{-1} \mathcal{N}_{\Omega^-}) d\mathbf{x} + \int_\Gamma \partial^+_\nu(\mathbf{u}_-, \pi_-) d\Gamma + \mathcal{O}(\chi^6). \end{aligned} \tag{4.4.19}
$$

În absenţa corpului solid, deci când $\Omega^- = \Omega := \Omega_-$, formulele (4.4.18) şi (4.4.19) devin (a se vedea [60, (139),(147)]):

$$\mathbf{u}_- = \mathbf{U}_\infty - \chi^2 \int_{\Omega_-} \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{U}_\infty d\mathbf{y} + \mathcal{O}(\chi^4),$$

$$F_k = \chi^2 |\Omega_-| U_{\infty,k} - \chi^4 U_{\infty,k} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \left(-\delta_{jk} n_l(\mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) + n_k(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{y})\right) r d\sigma(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{y}) + \mathcal{O}\left(\chi^6\right),$$

unde $|\Omega_-|$ este volumul lui Ω_-.

4.4.3 Mişcarea de tip Stokes peste un mediu poros cu permeabilitate mică şi un corp solid în interior

În continuare presupunem că $\chi \gg 1$, $\frac{1}{\chi^2} = \frac{\kappa}{a^2} \ll 1$, unde κ este permeabilitatea mediului poros cu lungimea caracteristică a. De asemenea, considerăm $\mu = 1$ şi următoarea formă echivalentă a problemei cu valori pe frontieră (4.1.1):

$$(4.4.20) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u}_+ = 0, \ -\nabla \pi_+ + \Delta \mathbf{u}_+ = 0 \text{ în } \Omega_+ \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_- = 0, \ -\frac{1}{\chi^2} \nabla \pi_- + (\frac{1}{\chi^2} \Delta - \mathbb{I}) \mathbf{u}_- = 0 \text{ în } \Omega^- \\ \mathrm{Tr}^+ \mathbf{u}_+ - \mathrm{Tr}^- \mathbf{u}_- = 0, \ \partial_\nu^+(\mathbf{u}_+, \pi_+) - \partial_\nu^-(\mathbf{u}_-, \pi_-) = 0 \text{ pe } \partial\Omega \\ \mathrm{Tr}^+ \mathbf{u}_+ = 0 \text{ pe } \Gamma \\ \nabla^s(\mathbf{u}_+ - \mathbf{U}_\infty)(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1-s}), \ \pi_+(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-2}), \ |\mathbf{x}| \to \infty. \end{cases}$$

Acestei probleme îi asociem dezvoltările formale (în raport cu valori mici ale lui χ^{-2}):

$$(4.4.21) \qquad \mathbf{u}_\pm = \tilde{\mathbf{u}}_\pm^{(0)} + \frac{1}{\chi^2} \tilde{\mathbf{u}}_\pm^{(1)} + \frac{1}{\chi^4} \tilde{\mathbf{u}}_\pm^{(2)} + \dots, \ \pi_\pm = \tilde{\pi}_\pm^{(0)} + \frac{1}{\chi^2} \tilde{\pi}_\pm^{(1)} + \frac{1}{\chi^4} \tilde{\pi}_\pm^{(2)} + \dots$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţiile şi condiţiile ale problemei cu valori pe frontieră (4.4.20), şi colectând termenul de ordinul i, ($i = 0, 1, 2$), în raport cu χ^{-2} obţinem:

(4.4.22)

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_-^{(0)} = 0 \ \text{ în } \ \Omega^- \\ -\nabla \tilde{\pi}_-^{(0)} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}_-^{(0)} = \tilde{\mathbf{u}}_-^{(1)} \ \text{ în } \ \Omega^- \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_-^{(1)} = 0 \text{ în } \Omega^-, \end{cases} \quad \begin{cases} -\nabla \pi_+^{(j)} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}_+^{(j)} = 0 \ \text{ în } \ \Omega_+ \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_+^{(j)} = 0 \ \text{ în } \ \Omega_+, \ j \geq 0 \\ \tilde{\mathbf{u}}_+^{(0)}(\mathbf{x}) \to \mathbf{U}_\infty \text{ şi } \tilde{\mathbf{u}}_+^{(j)}(\mathbf{x}) \to \mathbf{0} \ |\mathbf{x}| \to \infty, j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Astfel, obţinem o problemă de perturbaţie singulară. Ţinând cont de prima relaţie în (4.4.22), deducem că termenul de ordin dominant din dezvoltarea câmpului de viteze $\mathbf{u}_-^0$ al mişcării fluide interioare este egal cu zero în Ω^-, deci că, la acest ordin, mişcarea exterioară de tip Stokes peste un mediu poros staţionar, care conţine un corp solid în interior, poate fi interpretată ca o mişcare fluidă de tip Stokes doar peste un corp solid staţionar având aceeaşi geometrie (ca $\Omega^- \cup \overline{\mathfrak{D}}$).

Capitolul 5

Problema Robin-transmisie pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$

Acest capitol este dedicat problemelor cu valori pe frontieră de tip Robin-transmisie pentru sisteme Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cu date pe frontieră aparţin unor spaţii Sobolev. Principalele surse utilizate în pregătirea acestui capitol sunt [29], [30], [36], [57].

Studiul problemei Robin-transmisie pentru sistemele Stokes şi Brinkman este motivat de faptul că, condiţiile pe frontieră, care trebuie impuse pe interfaţa dintre un mediu poros omogen, descris de ecuaţia Brinkman, şi un fluid vâscos, revin la saltul tensiunii tangenţiale şi continuitatea câmpului de viteze şi a tensiunii normale la traversarea acelei interfeţe. Această condiţie de salt, care este o condiţie de tip Robin-transmisie, a fost obţinută de Ochoa-Tapia şi Whitaker [84], [85], utilizând tehnici de mediere de volume. Ea a fost construită pentru a face conexiunea dintre legea lui Darcy şi ecuaţia Brinkman (perturbaţie de ordinul zero a ecuaţiei Stokes), înlocuind condiţia uzuală de continuitate a tensiunii la interfaţa dintre mediul fluid şi mediul poros (pentru alte detalii fizice ne referim la [90]). Condiţiile Ochoa-Tapia şi Whitaker la interfaţa dintre un mediu fluid şi un mediu poros Σ au forma [84], [85] (a se vedea şi [4])

$$\left(\mu \nabla \mathbf{v}^f \cdot \mathbf{n} - \frac{\mu}{\phi} \nabla \mathbf{v}^p \cdot \mathbf{n}\right)\Big|_{\Sigma} \cdot \tau = \frac{\mu \beta}{\sqrt{\kappa}} \mathbf{v}_{\Sigma} \cdot \tau,\ \mathbf{v}^f = \mathbf{v}^p = \mathbf{v}_{\Sigma}, \tag{5.0.1}$$

unde exponenţii f şi p se referă la mediul fluid, respectiv mediul poros, μ este vâscozitatea, κ permeabilitatea, ϕ este un parametru fizic al regiunii poroase, iar β este un parametru dimensional de ordinul unu. De asemenea, $\mathbf{n}$ este vectorul normal la Σ şi τ este un vector tangent arbitrar al unei baze locale pe Σ. Angot [4] a utilizat o analiză asimptotică pentru a arăta că problema de tip Stokes/Brinkman cu condiţii pe interfaţă de tip Ochoa-Tapia şi Whitaker, care descrie o mişcare fluidă de tip Stokes cuplată cu o missşare fluidă vâscoasă într-un mediu poros, este corect formulată.

Alazmi şi Vafai [3] au analizat diferite tipuri de condiţii de interfaţă dintre un mediu poros şi unul fluid, incluzând condiţiile Ochoa-Tapia şi Whitaker.

5.1 Probleme de interfaţă de tip Robin-transmisie pentru sisteme Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$

Această secţiune conţine rezultate originale obţinute de D. Fericean, T. Groşan, M. Kohr şi W. L. Wendland [30]. Utilizăm o metodă din teoria potenţialului pentru a demonstra un rezultat de existenţă pentru o problemă de interfaţă de tip Robin-transmisie pentru sisteme Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz din spaţiul Euclidian, când datele pe frontieră aparţin unor spaţii

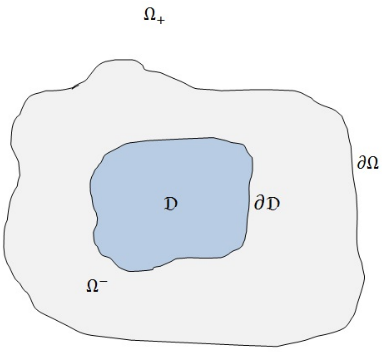


Figura 5.1: Geometry of the problem: domains and boundaries.

Sobolev sau L^p. Problema este formulată în trei domenii Lipschitz adiacente, cu condiţii la infinit şi condiţii de transmisie la interfaţa dintre aceste domenii. Una dintre ele este o condiţie de tip Robin-transmisie, care este formulată în termenii unui operator matricial de multiplicare nenegativ P cu coeficienţi în L^∞. În particular, considerăm problema cu valori pe frontieră care descrie mişcarea exterioară de tip Stokes a unui fluid vâscos incompresibil peste două sfere poroase, una dintre ele fiind încorporată în cealaltă, când condiţiile de salt datorate lui Ochoa-Tapia şi Whitaker [84], [85] sunt impuse la interfaţa mediu fluid/poros. Soluţia acestei probleme este determinată explicit împreună cu liniile de curent ale mişcării pentru diferite valori ale parametrilor ζ, λ_1 şi λ_2.

5.1.1 Formularea problemei

Fie $\mathfrak{D}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) domenii Lipschitz mărginite cu frontiere conexe, astfel încât $\overline{\mathfrak{D}} \subset \Omega$. Fie $\Omega^- := \Omega \setminus \overline{\mathfrak{D}}$, $\Omega_+ := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, iar $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$, $\mathbf{n}_{\partial\mathfrak{D}}$ normalele exterioare la $\partial\Omega$, respectiv $\partial\mathfrak{D}$. Fie $P \in L^\infty(\partial\Omega, \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)$ definind un operator matricial de multiplicare (de tipul $n \times n$ cu coeficienţi în $L^\infty(\partial\Omega)$), satisfăcând condiţia de nenegativitate

$$\langle P\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{\partial\Omega} \geq 0,\ \forall\, \mathbf{v} \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^n). \tag{5.1.1}$$

Reamintim că $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\Omega}$ este produsul scalar din spaţiul $L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, deci $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\sigma$.

Fie $\alpha \in (0,1]$, λ_1, $\lambda_2 > 0$ şi $\mathbf{U}_\infty \in \mathbb{R}^n$ constante date. Considerăm o problemă cu valori pe frontieră de tip Robin-transmisie pentru sistemele Stokes şi Brinkman. Această probleme cere determinarea perechilor $((\mathbf{u}, \tilde{\pi}), (\mathbf{u}_-, \tilde{\pi}_-), (\mathbf{u}_+, \tilde{\pi}_+)) \in Z$ astfel încât

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,\ -\nabla\tilde{\pi} + (\triangle - \lambda_1^2\mathbb{I})\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ în } \mathfrak{D}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_- = 0,\ -\nabla\tilde{\pi}_- + (\triangle - \lambda_2^2\mathbb{I})\mathbf{u}_- = \mathbf{0} \text{ în } \Omega^-, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_+ = 0,\ -\nabla\tilde{\pi}_+ + \triangle\mathbf{u}_+ = \mathbf{0} \text{ în } \Omega_+, \\ \mathrm{Tr}^+_{\partial\mathfrak{D}}\mathbf{u}_- - \mathrm{Tr}^-_{\partial\mathfrak{D}}\mathbf{u} = \mathbf{H} \in L^2_{s;\nu_{\partial\mathfrak{D}}}(\partial\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) \text{ pe } \partial\mathfrak{D}, \\ \partial^+_{\nu_{\partial\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}_-, \tilde{\pi}_-) - \alpha\partial^-_{\nu_{\partial\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}, \tilde{\pi}) = \mathbf{F} \in L^2_{s-1}(\partial\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) \text{ pe } \partial\mathfrak{D}, \\ \mathrm{Tr}^+_{\partial\Omega}\mathbf{u}_+ - \mathrm{Tr}^-_{\partial\Omega}\mathbf{u}_- = \mathbf{U} \in L^2_{s;\nu_{\partial\Omega}}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ pe } \partial\Omega, \\ \partial^+_{\nu_{\partial\Omega}}(\mathbf{u}_+, \tilde{\pi}_+) - \partial^-_{\nu_{\partial\Omega}}(\mathbf{u}_-, \tilde{\pi}_-) - P\mathrm{Tr}^+_{\partial\Omega}\mathbf{u}_+ = \mathbf{G} \in L^2_{s-1}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ pe } \partial\Omega, \\ \nabla^k(\mathbf{u}_+ - \mathbf{U}_\infty)(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{2-n-k}),\ \tilde{\pi}_+(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{1-n}),\ |\mathbf{x}| \to \infty,\ k = 0, 1, \end{cases} \tag{5.1.2}$$

unde $\mathrm{Tr}^\pm_{\partial\Omega}$ şi $\mathrm{Tr}^\pm_{\partial\mathfrak{D}}$ sunt operatorii urmă netangenţiali pe $\partial\Omega$, respectiv $\partial\mathfrak{D}$. Presupunem că $\mathbf{U}$ şi $\mathbf{H}$ satisfac condiţiile $\langle \mathbf{U}, \nu_{\partial\Omega}\rangle_{\partial\Omega} = 0$, $\langle \mathbf{H}, \nu_{\partial\mathfrak{D}}\rangle_{\partial\mathfrak{D}} = 0$ (care sunt triviale în cazul fizic relevant: $n = 3$, $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ and $\mathbf{H} = \mathbf{0}$). Deci admitem că $(\mathbf{H}, \mathbf{F}, \mathbf{U}, \mathbf{G})^\top \in \mathcal{X}_\nu$ şi definim spaţiul urmă$\mathcal{X}_\nu$ şi spaţiul soluţiilor Z astfel

(5.1.3)

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_\nu &= L^2_{s;\nu_{\partial\mathfrak{D}}}(\partial\mathfrak{D},\mathbb{R}^n)\times L^2_{s-1}(\partial\mathfrak{D},\mathbb{R}^n)\times L^2_{s;\nu_{\partial\Omega}}(\partial\mathfrak{D},\mathbb{R}^n)\times L^2_{s-1}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n),\\ Z &= \Big(L^2_{s+\frac12}(\mathfrak{D},\mathbb{R}^n)\times L^2_{s-\frac12}(\mathfrak{D})\Big)\times\Big(L^2_{s+\frac12}(\Omega^-,\mathbb{R}^n)\times L^2_{s-\frac12}(\Omega^-)\Big)\times \\ &\qquad \Big(L^2_{s+\frac12,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}_+,\mathbb{R}^n)\times L^p_{s-\frac12,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}_+)\Big),\end{aligned} \quad , \ s\in(0,1).$$

5.1.2 Reprezentările prin potenţiale pentru problema Robin-transmisie $(5.1.2)$

Pentru a demonstra existenţa soluţiilor problemei cu valori pe frontieră de tip Robin-transmisie $(5.1.2)$, considerăm următoarele reprezentări prin potenţiale:

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}=\mathbf{W}_{\lambda_1;\partial\mathfrak{D}}\mathbf{g}+\mathbf{V}_{\lambda_1;\partial\mathfrak{D}}\mathbf{r},\ \tilde\pi=P^d_{\lambda_1;\partial\mathfrak{D}}\mathbf{g}+P^s_{\lambda_1;\partial\mathfrak{D}}\mathbf{r}\ \text{ în }\ \mathfrak{D},\\ &\mathbf{u}_-=\mathbf{W}_{\lambda_2;\partial\Omega}\mathbf{h}+\mathbf{V}_{\lambda_2;\partial\Omega}\mathbf{f}+\mathbf{W}_{\lambda_2;\partial\mathfrak{D}}\mathbf{g}+\mathbf{V}_{\lambda_2;\partial\mathfrak{D}}\mathbf{r}\ \text{ şi}\\ &\tilde\pi_-=P^d_{\lambda_2;\partial\Omega}\mathbf{h}+P^s_{\lambda_2;\partial\Omega}\mathbf{f}+P^d_{\lambda_2;\partial\mathfrak{D}}\mathbf{g}+P^s_{\lambda_2;\partial\Omega}\mathbf{r}\ \text{ în }\ \Omega^-,\\ &\mathbf{u}_+=\mathbf{U}_\infty+\mathbf{W}_{\partial\Omega}\mathbf{h}+\mathbf{V}_{\partial\Omega}\mathbf{f},\ \tilde\pi_+=P^d_{\partial\Omega}\mathbf{h}+P^s_{\partial\Omega}\mathbf{f}\ \text{ în }\ \Omega_+,\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

unde $(\mathbf{g},\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{f})^\top\in\mathcal{X}_\nu$ sunt densităţi necunoscute. Aceste reprezentări prin potenţiale de simplu şi dublu strat satisfac ecuaţiile din $(5.1.2)$ pentru orice alegere a densităţilor $(\mathbf{g},\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{f})^\top\in\mathcal{X}_\nu$.

Condiţiile pe frontieră conduc la următoarea ecuaţie în formă matricială

$$\mathfrak{R}_{\lambda_1,\lambda_2;\alpha}\Phi=\mathcal{B}, \tag{5.1.5}$$

cu data pe frontieră $\mathcal{B}:=(\mathbf{H},-\mathbf{F},\mathbf{U}-\mathbf{U}_\infty,-\mathbf{G})^\top\in\mathcal{X}_\nu$ şi necunoscuta $\Phi:=(\mathbf{g},\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{f})^\top\in\mathcal{X}_\nu$. De asemenea operatorul $\mathfrak{R}_{\lambda_1,\lambda_2;\alpha}:\mathcal{X}_\nu\to\mathcal{X}_\nu$ este dat de

(5.1.6)

$$\begin{pmatrix}\mathbb{I}+\mathbf{K}_{\lambda_2;\lambda_1;\partial\mathfrak{D}} & \mathcal{V}_{\lambda_2;\lambda_1;\partial\mathfrak{D}} & \mathbf{K}_{\lambda_2;\partial\Omega;\partial\mathfrak{D}} & \mathcal{V}_{\lambda_2;\partial\Omega;\partial\mathfrak{D}}\\ -\mathbf{D}_{\lambda_2;\partial\mathfrak{D}}+\alpha\mathbf{D}_{\lambda_1;\partial\mathfrak{D}} & \mathcal{K}^*_{\lambda_2;\lambda_1;\alpha;\partial\mathfrak{D}} & \mathbf{D}_{\lambda_2;\partial\Omega;\partial\mathfrak{D}} & \mathbf{K}^*_{\lambda_2;\partial\Omega;\partial\mathfrak{D}}\\ -\mathbf{K}_{\lambda_1;\partial\mathfrak{D};\partial\Omega} & -\mathcal{V}_{\lambda_1;\partial\mathfrak{D};\partial\Omega} & \mathbb{I}-\mathbf{K}_{\lambda_1;0;\partial\Omega} & -\mathcal{V}_{\lambda_2;0;\partial\Omega}\\ \mathbf{D}_{\lambda_2;\partial\mathfrak{D};\partial\Omega} & \mathbf{K}^*_{\lambda_2;\partial\mathfrak{D};\partial\Omega} & \mathbf{D}_{\lambda_2;0;\partial\Omega}+P\Big(\frac12\mathbb{I}+\mathbf{K}_{\partial\Omega}\Big) & \mathbb{I}+\mathbf{K}^*_{\lambda_2;0;\partial\Omega}+P\mathcal{V}_{\partial\Omega}\end{pmatrix}.$$

Teorema 5.1.1 [30] *Presupunem că $\mathfrak{D},\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geq 3)$ sunt domenii Lipschitz cu frontiere conexe $\partial\mathfrak{D}$ şi $\partial\Omega$, astfel încât $\overline{\mathfrak{D}}\subset\Omega$. Fie $\Omega^-:=\Omega\setminus\overline{\mathfrak{D}}$ şi $\Omega_+:=\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}$. De asemenea, fie $P\in L^\infty(\partial\Omega,\mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^n)$ un operator matricial de multiplicare care satisface condiţia* $(5.1.1)$*. Fie $\alpha\in(0,1]$ şi $\lambda_1,\lambda_2>0$ constante date. Atunci pentru orice $s\in(0,1)$ ecuaţia* $(5.1.5)$ *are o soluţie unică $(\mathbf{g},\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{f})^\top\in\mathcal{X}_\nu$ şi reprezentările prin potenţiale* $(5.1.4)$ *determină o soluţie $((\mathbf{u},\tilde\pi),(\mathbf{u}_-,\tilde\pi_-),(\mathbf{u}_+,\tilde\pi_+))\in Z$ a problemei de interfaţă de tip Robin-transmisie* $(5.1.2)$*, unde $\mathcal{X}_\nu$ şi Z sunt spaţiile date în* $(5.1.3)$*. Pentru $s\in[\frac12,1)$ soluţia este unică, iar pentru orice $\Omega_R:=B_R\cap\Omega_+$, unde $B_R\subseteq\mathbb{R}^n$ este o bilă deschisă arbitrară astfel încât $\overline{\Omega}\subset B_R$, există o constantă $C>0$ astfel încât*[1]

$$\begin{aligned}&\|(\mathbf{u},\tilde\pi)\|_{L^2_{s+\frac12}(\mathfrak{D},\mathcal{L}_{\lambda_1})}+\|(\mathbf{u}_-,\tilde\pi_-)\|_{L^2_{s+\frac12}(\Omega^-,\mathcal{L}_{\lambda_2})}+\|(\mathbf{u}_+,\tilde\pi_+))\|_{L^2_{s+\frac12}(\Omega_R,\mathcal{L}_{\mathrm{St}})}\\ &\qquad\leq C\|(\mathbf{H},-\mathbf{F},\mathbf{U}-\mathbf{U}_\infty,-\mathbf{G})\|_{\mathcal{X}_\nu}.\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

5.1.3 Problema Robin-transmisie cu datele pe frontieră din spaţii L^p

Fie $p\in\Big(\max\Big\{1,\frac{2(n-1)}{n+1}-\varepsilon\Big\},2+\varepsilon\Big)$, $n\geq 3$, unde $\varepsilon=\varepsilon(\partial\mathfrak{D})>0$ este ales ca în Teorema 3.5.4. În continuare considerăm problema de interfaţă de tip Robin-transmisie $(5.1.2)$ cu datele pe

[1] Reamintim că spaţiul $L^2_{s+\frac12}(\Omega_+,\mathcal{L}_{\mathrm{St}})$ este definit ca şi în (3.1.6). Spaţiile $L^2_{s+\frac12}(\mathfrak{D},\mathcal{L}_{\lambda_1})$ şi $L^2_{s+\frac12}(\mathfrak{D},\mathcal{L}_{\lambda_1})$ pot fi definite similar, înlocuind operatorul $\mathcal{L}_{\mathrm{St}}$ by $\mathcal{L}_{\lambda_i}$, unde $\mathcal{L}_{\lambda_i}(\mathbf{u},\pi):=\nabla\pi-(\triangle-\lambda_i^2\mathbb{I})\mathbf{u}=0$, $i=1,2$.

frontieră $(\mathbf{H}, -\mathbf{F}, \mathbf{U}-\mathbf{U}_\infty, -\mathbf{G})^\top \in \mathfrak{X}_{\nu;p}$, unde $\mathfrak{X}_{\nu;p}$ este spaţiul

$$\mathfrak{X}_{\nu;p} := L^p_{1;\nu_{\partial\mathfrak{D}}}(\partial\mathfrak{D},\mathbb{R}^n)\times L^p(\partial\mathfrak{D},\mathbb{R}^n)\times L^p_{1;\nu_{\partial\Omega}}(\partial\mathfrak{D},\mathbb{R}^n)\times L^p(\partial\Omega,\mathbb{R}^n). \tag{5.1.8}$$

De asemenea, notăm cu $\mathcal{M}_{\partial\Omega}$ şi $\mathcal{M}_{\partial\mathfrak{D}}$ operatorii netangenţiali maximali corespunzători lui $\partial\Omega$ şi $\partial\mathfrak{D}$. În plus, în acest caz considerăm

$$\partial^{\pm}_{\nu_{\partial\Omega}}(\mathbf{v},q) := \big(-q\mathbb{I}+\big(\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^\top\big)\big)\big|_{\partial\Omega_\pm}\mathbf{n}_{\partial\Omega} \text{ a.p.t. pe } \partial\Omega \text{ în sensul limitei netangenţiale.}$$

Menţionăm că dacă $p\in(1,\infty)$ şi $(\mathbf{v},q)$ satisface sistemul Stokes în domeniul Lipschitz Ω, astfel încât $\mathcal{M}_{\partial\Omega}(\nabla\mathbf{v}),\ \mathcal{M}_{\partial\Omega}q\in L^p(\partial\Omega)$, atunci $\mathrm{Tr}^-\mathbf{v}\in L^p_1(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ şi $\partial^-_{\nu_{\partial\Omega}}(\mathbf{v},q)\in L^p(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ (a se vedea [79, Theorem 4.13]). Un rezultat similar poate fi obţinut şi în cazul sistemului Brinkman.

Teorema 5.1.2 [30] *Admiţând aceeaşi ipoteză ca în Teorema* 5.1.1*, există* $\varepsilon=\varepsilon(\partial\mathfrak{D})>0$ *astfel încât pentru orice* $p\in\left(\max\left\{1,\frac{2(n-1)}{n+1}-\varepsilon\right\},2+\varepsilon\right)$*, ecuaţia* (5.1.5) *are o soluţie unică* $(\mathbf{g},\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{f})^\top\in\mathcal{X}_{\nu;p}$*, iar reprezentările potenţiale* (5.1.4) *determină o soluţie* $((\mathbf{u},\tilde\pi),(\mathbf{u}_-,\tilde\pi_-),(\mathbf{u}_+,\tilde\pi_+))\in\big(C^2(\mathfrak{D},\mathbb{R}^n)\times C^1(\mathfrak{D})\big)\times\big(C^2(\Omega^-,\mathbb{R}^n)\times C^1(\Omega^-)\big)\times\big(C^2(\Omega_+,\mathbb{R}^n)\times C^1(\Omega_+)\big)$ *a problemei de interfaţă de tip Robin-transmisie*

$$\begin{cases}
\operatorname{div}\mathbf{u}=0,\ -\nabla\tilde\pi+(\triangle-\lambda_1^2\mathbb{I})\mathbf{u}=\mathbf{0} \textit{ în } \mathfrak{D},\\
\operatorname{div}\mathbf{u}_-=0,\ -\nabla\tilde\pi_-+(\triangle-\lambda_2^2\mathbb{I})\mathbf{u}_-=\mathbf{0} \textit{ în } \Omega^-,\\
\operatorname{div}\mathbf{u}_+=0,\ -\nabla\tilde\pi_++\triangle\mathbf{u}_+=\mathbf{0} \textit{ în } \Omega_+,\\
\mathcal{M}_{\partial\Omega}\big(\nabla\mathbf{u}_\pm\big),\mathcal{M}_{\partial\Omega}\big(\tilde\pi_\pm\big)\in L^p(\partial\Omega),\\
\mathcal{M}_{\partial\mathfrak{D}}\big(\nabla\mathbf{u}_-\big),\mathcal{M}_{\partial\mathfrak{D}}\big(\nabla\mathbf{u}\big),\mathcal{M}_{\partial\mathfrak{D}}\big(\tilde\pi_-\big),\mathcal{M}_{\partial\mathfrak{D}}(\tilde\pi)\in L^p(\partial\mathfrak{D}),\\
\mathrm{Tr}^+_{\partial\mathfrak{D}}\mathbf{u}_--\mathrm{Tr}^-_{\partial\mathfrak{D}}\mathbf{u}=\mathbf{H}\in L^p_{1;\nu_{\partial\mathfrak{D}}}(\partial\mathfrak{D},\mathbb{R}^n) \textit{ pe } \partial\mathfrak{D},\\
\partial^+_{\nu_{\partial\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}_-,\tilde\pi_-)-\alpha\partial^-_{\nu_{\partial\mathfrak{D}}}(\mathbf{u},\tilde\pi)=\mathbf{F}\in L^p(\partial\mathfrak{D},\mathbb{R}^n) \textit{ pe } \partial\mathfrak{D},\\
\mathrm{Tr}^+_{\partial\Omega}\mathbf{u}_+-\mathrm{Tr}^-_{\partial\Omega}\mathbf{u}_-=\mathbf{U}\in L^p_{1;\nu_{\partial\Omega}}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n) \textit{ pe } \partial\Omega,\\
\partial^+_{\nu_{\partial\Omega}}(\mathbf{u}_+,\tilde\pi_+)-\partial^-_{\nu_{\partial\Omega}}(\mathbf{u}_-,\tilde\pi_-)-P\mathrm{Tr}^+_{\partial\Omega}\mathbf{u}_+=\mathbf{G}\in L^p(\partial\Omega,\mathbb{R}^n) \textit{ pe } \partial\Omega,\\
\nabla^k(\mathbf{u}_+-\mathbf{U}_\infty)(\mathbf{x})=\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{2-n-k}),\ \tilde\pi_+(\mathbf{x})=\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{1-n}),\ |\mathbf{x}|\to\infty,\ k=0,1,
\end{cases} \tag{5.1.9}$$

unde $\mathfrak{X}_{\nu;p}$ *este spaţiul dat de* (5.1.8)*. Pentru orice* $p\in[2,2+\varepsilon)$ *soluţia este unică şi există o constantă* $C>0$ *astfel încât următoarea estimăre are loc:*

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{M}_{\partial\mathcal{D}}(\nabla\mathbf{u})\|_{L^p(\partial\mathfrak{D})}+\|\mathcal{M}_{\partial\mathfrak{D}}(\tilde\pi)\|_{L^p(\partial\mathfrak{D})}+\|\mathcal{M}_{\partial\Omega}\big(\nabla\mathbf{u}_\pm\big)\|_{L^p(\partial\Omega)}+\|\mathcal{M}_{\partial\Omega}(\tilde\pi_\pm)\|_{L^p(\partial\Omega)}\\
&+\|\mathcal{M}_{\partial\mathfrak{D}}(\nabla\mathbf{u}_-)\|_{L^p(\partial\mathfrak{D})}+\|\mathcal{M}_{\partial\mathfrak{D}}(\tilde\pi_-)\|_{L^p(\partial\mathfrak{D})}\le C\|(\mathbf{H},-\mathbf{F},\mathbf{U}-\mathbf{U}_\infty,-\mathbf{G})\|_{\mathcal{X}_{\nu;p}}.
\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

5.1.4 Mişcarea de tip Stokes peste două sfere poroase concentrice

În continuare presupunem că $\Omega,\mathfrak{D}\subset\mathbb{R}^3$ sunt două sfere concentrice, astfel încât $\overline{\mathfrak{D}}\subset\Omega$ şi considerăm operatorul matricial de multiplicare P de forma

$$P=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\zeta&0\\0&0&\zeta\end{pmatrix},\ \zeta\in(0,\infty) \text{ este o constantă dată,} \tag{5.1.11}$$

în raport cu un sistem de coordonate sferice $(\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\phi)$ având originea în centrul sferelor şi axa Ox_1 în direcţia lui $\mathbf{U}_\infty$. De asemenea, alegem $\alpha=1,\mathbf{H}=\mathbf{0},\mathbf{F}=\mathbf{0},\mathbf{U}=\mathbf{0}\ \mathbf{G}=\mathbf{0}$ şi $U_\infty=1$ în (5.1.9). Atunci problema de interfaţă (5.1.9) descrie mişcarea exterioară de tip Stokes a unui fluid vâscos incompresibil peste două sfere poroase concentrice, cu condiţii de salt pentru tensiunile tangenţiale şi continuitatea componentelor vitezei şi tensiunilor normale pe interfaţa $\partial\Omega$ dintre mediul poros şi mediul fluid, respectiv continuitatea câmpurilor viteză şi tensiune pe interfaţa $\partial\mathfrak{D}$ dintre mediile poroase. Determinăm soluţia acestei probleme utilizând geometria domeniilor implicate. Utilizând (5.1.11), condiţiile de transmisie în (5.1.2), corespunzătoare interfeţei $\partial\Omega$ dintre mediul poros şi mediul fluid, iau forma

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{u}_+)_r = (\mathbf{u}_-)_r,\ (\mathbf{u}_+)_\theta = (\mathbf{u}_-)_\theta,\ (\mathbf{u}_+)_\phi = (\mathbf{u}_-)_\phi,\\
&T_{rr}(\mathbf{u}_+,\tilde{\pi}_+) = T_{rr}(\mathbf{u}_-,\tilde{\pi}_-),\\
&T_{r\theta}(\mathbf{u}_+,\tilde{\pi}_+) - T_{r\theta}(\mathbf{u}_-,\tilde{\pi}_-) = \zeta(\mathbf{u}_+)_\theta,\\
&T_{r\phi}(\mathbf{u}_+,\tilde{\pi}_+) - T_{r\phi}(\mathbf{u}_-,\tilde{\pi}_-) = \zeta(\mathbf{u}_+)_\phi,
\end{aligned}
\tag{5.1.12}
$$

unde $(\mathbf{u}_\pm)|_{\partial\Omega} := ((\mathbf{u}_\pm)_r,(\mathbf{u}_\pm)_\theta,(\mathbf{u}_\pm)_\phi)$ este câmpul vitezelor $\partial\Omega$. În plus, operatorii de derivare conormală $\partial^\pm_{\nu_{\partial\Omega}}(\mathbf{u}_\pm,\tilde{\pi}_\pm) := \left(-\tilde{\pi}_\pm\mathbb{I} + \left(\nabla\mathbf{u}_\pm + (\nabla\mathbf{u}_\pm)^\top\right)\right)\big|_{\partial\Omega}\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ au componentele $(t_r(\mathbf{u}_\pm,\tilde{\pi}_\pm), t_\theta(\mathbf{u}_\pm,\tilde{\pi}_\pm), t_\phi(\mathbf{u}_\pm,\tilde{\pi}_\pm)) = (T_{rr}(\mathbf{u}_\pm,\tilde{\pi}_\pm), T_{r\theta}(\mathbf{u}_\pm,\tilde{\pi}_\pm), T_{r\phi}(\mathbf{u}_\pm,\tilde{\pi}_\pm))$ în raport cu sistemul de coordonate sferice $(\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\phi)$. Prin urmare, condiţiile de tip Robin-transmisie din (5.1.12) se reduc la continuitatea tensiunii normale, $T_{rr}(\mathbf{u}_+,\tilde{\pi}_+) = T_{rr}(\mathbf{u}_-,\tilde{\pi}_-)$, şi condiţiile de salt (5.0.1) pentru tensiunea tangenţială pe interfaţa $\partial\Omega$ dintre mediul fluid şi mediul poros, condiţii datorate lui Ochoa-Tapia şi Whitaker [84], [85]:

$$
\frac{\partial(\mathbf{u}_+)_\theta}{\partial r} - \frac{\partial(\mathbf{u}_-)_\theta}{\partial r} = \zeta(\mathbf{u}_+)_\theta,\ \frac{\partial(\mathbf{u}_+)_\phi}{\partial r} - \frac{\partial(\mathbf{u}_-)_\phi}{\partial r} = \zeta(\mathbf{u}_+)_\phi,
\tag{5.1.13}
$$

cu coeficientul de salt $\zeta > 0$. Menţionăm că $\zeta = 0$ corespunde continuităţii câmpului tensiune pe $\partial\Omega$ (pentru aplicaţii în acest caz a se vedea [36]).

Presupunem că sferele poroase concentrice $\mathfrak{D}$ şi Ω au razele adimensionale $r = 1$ (corespunzătoare lui $\partial\mathfrak{D}$) şi $r = R > 1$ (corespunzătoare lui $\partial\Omega$). Configuraţia axial-simetrică a mişcării implică $\frac{\partial}{\partial\phi} \equiv 0$, $(\mathbf{u}_\pm)_\phi = 0$ şi $u_\phi = 0$. În consecinţă, a doua condiţie din (5.1.13) este identic satisfăcută. Pe de altă parte, ecuaţiile Stokes şi Brinkman în (5.1.2) pot fi scrise în coordonate sferice, în forma (a se vedea [36])

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial r} &= \chi^2 v_r - \Big\{\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + 2\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}\\
&\qquad + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - 2\frac{v_\theta\cot\theta}{r^2}\Big\},\\
-\frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial\theta} &= \chi^2 v_\theta - \Big\{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\\
&\qquad + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - v_\theta\frac{\mathrm{cosec}^2\theta}{r^2}\Big\},
\end{aligned}
\tag{5.1.14}
$$

unde v_r şi v_θ sunt coordonatele sferice ale $\mathbf{v}$ şi

$$
(\mathbf{v},q) := \begin{cases} (\mathbf{u},\tilde{\pi}) & \text{în } \mathfrak{D}\\ (\mathbf{u}_-,\tilde{\pi}_-) & \text{în } \Omega^-\\ (\mathbf{u}_+,\tilde{\pi}_+) & \text{în } \Omega_+,\end{cases}\quad \chi := \begin{cases}\lambda_1 & \text{în } \mathfrak{D}\\ \lambda_2 & \text{în } \Omega^-\\ 0 & \text{în } \Omega_+.\end{cases}
\tag{5.1.15}
$$

De asemenea, $\lambda_1 = a/\sqrt{\kappa_0}$ şi $\lambda_2 = a/\sqrt{\kappa_-}$ sunt parametrii asociaţi mediilor poroase, cu permeabilitatea κ_0 în $\mathfrak{D}$, respectiv κ_- în Ω_-, iar a este o lungime caracteristică (de exemplu, raza dimensională a lui $\mathfrak{D}$). În plus, condiţiile pe frontieră din (5.1.2) iau forma

(5.1.16)

$$
\begin{cases}(\mathbf{u}_+)_r = (\mathbf{u}_-)_r,\ (\mathbf{u}_+)_\theta = (\mathbf{u}_-)_\theta,\\ T_{rr}(\mathbf{u}_+,\tilde{\pi}_+) = T_{rr}(\mathbf{u}_-,\tilde{\pi}_-), \text{ pentru } r = R,\\ T_{r\theta}(\mathbf{u}_+,\tilde{\pi}_+) - T_{r\theta}(\mathbf{u}_-,\tilde{\pi}_-) = \zeta u_\theta,\end{cases}\quad \begin{cases}(\mathbf{u}_-)_r = u_r,\ (\mathbf{u}_-)_\theta = u_\theta,\\ T_{rr}(\mathbf{u}_-,\tilde{\pi}_-) = T_{rr}(\mathbf{u},\tilde{\pi}),\quad \text{pentru } r = 1.\\ T_{r\theta}(\mathbf{u}_-,\tilde{\pi}_-) = T_{r\theta}(\mathbf{u},\tilde{\pi}),\end{cases}
$$

Pentru a satisface ecuaţia de continuitate $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, considerăm funcţiile de curent ψ, ψ_- şi ψ_+

date de relaţiile (a se vedea [59, p. 13])

$$
\begin{aligned}
&u_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta},\ u_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad \text{în } \mathfrak{D},\\
&(\mathbf{u}_-)_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \psi_-}{\partial \theta},\ (\mathbf{u}_-)_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_-}{\partial r} \quad \text{in } \Omega^-,\\
&(\mathbf{u}_+)_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \psi_+}{\partial \theta},\ (\mathbf{u}_+)_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_+}{\partial r} \quad \text{în } \Omega_+.
\end{aligned}
\tag{5.1.17}
$$

În plus ţinând cont de condiţiile

$$(\mathbf{u}_+)_r \to \cos\theta,\ (\mathbf{u}_+)_\theta \to -\sin\theta,\ r\to\infty, \tag{5.1.18}$$

şi relaţiile (5.1.17), obţinem următorul comportament asimptotic al funcţiei de curent ψ_+ la infinit, în raport cu termenul de ordin dominant în r: $\psi_+(r,\theta) \approx \frac{r^2}{2}\sin^2\theta$. Bazându-ne pe acest comportament determinăm funcţiile $\psi_\pm$ şi ψ în forma

$$\psi_\pm = f_\pm(r)\sin^2\theta \ \text{ şi } \ \psi = f(r)\sin^2\theta. \tag{5.1.19}$$

Utilizând ecuaţiile (5.1.14)-(5.1.15) şi relaţiile (5.1.17), (5.1.19), obţinem următoarea ecuaţie diferenţială ordinară:

$$g^{(iv)} - \frac{4}{r^2}g'' + \frac{8}{r^3}g' - \frac{8}{r^4}g - \zeta\left(g'' - \frac{2}{r^2}g\right) = 0. \tag{5.1.20}$$

Utilizând transformări adecvate, ecuaţia diferenţială (5.1.20) se reduce la o ecuaţie de tip Bessel iar soluţia sa în fiecare din domeniile Ω_+, Ω_- şi $\mathfrak{D}$ este dată de

$$
\begin{aligned}
&f_+(r) = A_+ r + B_+ r^4 + D_+ r^2 + \frac{C_+}{r},\\
&f_-(r) = \frac{C_-}{r} + D_- r^2 + A_- \frac{\sqrt{r}}{\lambda_2^2} I_{\frac32}(\lambda_2 r) + B_- \frac{\sqrt{r}}{\lambda_2^2} K_{\frac32}(\lambda_2 r),\\
&f(r) = \frac{C}{r} + D r^2 + A\frac{\sqrt{r}}{\lambda_1^2} I_{\frac32}(\lambda_1 r) + B\frac{\sqrt{r}}{\lambda_1^2} K_{\frac32}(\lambda_1 r),
\end{aligned}
\tag{5.1.21}
$$

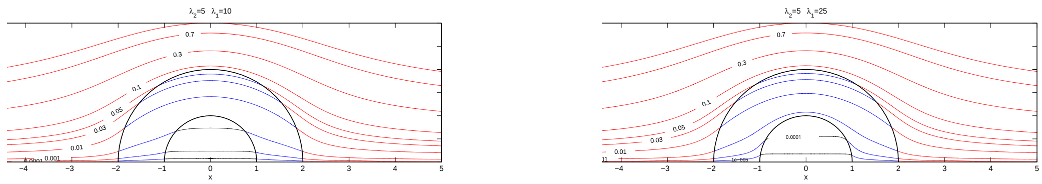
unde D, $B_\pm, C_\pm, D_\pm$ sunt constante reale necunoscute. Menţionăm că formulele (5.1.21) au aceeaşi formă ca şi soluţiile generale obţinute de Zlatanovski [119, (19a)-(19b)] pentru ecuaţiile Stokes şi Brinkman în domenii sferice. Forţa (adimensională) datorată mişcării Stokes pe sfera exterioaă este

$$F|_{r=R} = \int_0^\pi \left(T_{rr}(\mathbf{u}_+, \tilde{\pi}_+)\cos\theta - T_{r\theta}(\mathbf{u}_+, \tilde{\pi}_+)\sin\theta\right)|_{r=R}\sin\theta d\theta = -\frac{4}{R^2}A_+. \tag{5.1.22}$$

Pentru a detemina constantele necunoscute $A_+, C_+, A_-, B_-, C_-, D_-, A$ şi D utilizăm condiţiile de interfaţă (5.1.16), care, în virtutea relaţiilor (5.1.17), devin

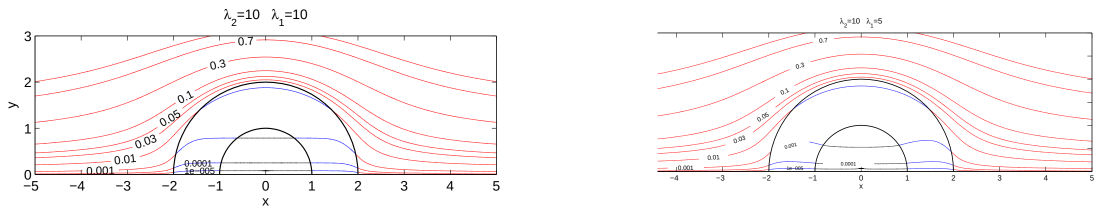
$$
\left\{
\begin{aligned}
&f_+(R) = f_-(R)\\
&f'_+(R) = f'_-(R)\\
&f''_-(R) - f''_+(R) = \zeta f'_-(R)\\
&f'''_-(R) - f'''_+(R) = -\lambda_2^2 f'_-(R),
\end{aligned}
\right.
\quad
\left\{
\begin{aligned}
&f_-(1) = f(1)\\
&f'_-(1) = f'(1)\\
&f''_-(1) = f''(1)\\
&f'''(1) - f'''_-(1) = -\lambda_2^2 f'_-(1) + \lambda_1^2 f'(1).
\end{aligned}
\right.
\tag{5.1.23}
$$

Sistemul (5.1.23) a fost rezolvat pentru mai multe valori ale parametrilor implicaţi utilizând programul Mathematica. În plus, utilizând expresia (5.1.19) a funcţiilor de curent, am obţinut liniile de curent ale mişcării pentru diferite valori ale parametrilor implicaţi ζ, λ_1 şi λ_2. Figurile 5.2 (a) şi (b) corespund cazului $\lambda_1 > \lambda_2$, Figura 5.3 (a) se referă la cazul $\lambda_1 = \lambda_2$ şi Figura 5.3 (b) prezintă liniile de curent în cazul $\lambda_1 < \lambda_2$. Concluzionăm că:



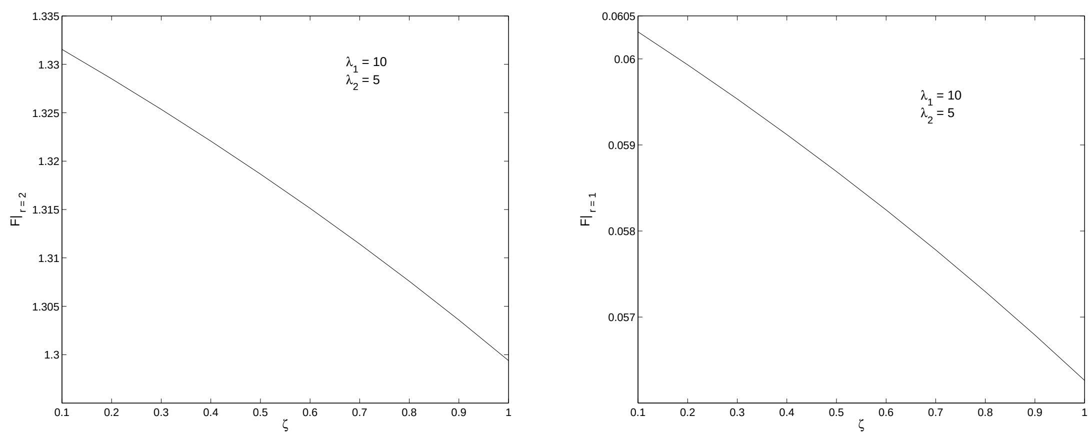
(a) (b)

Figura 5.2: Liniile de curent pentru $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$ şi $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 5$.



(a) (b)

Figura 5.3: Liniile de curent pentru $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 10$ şi $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$.



(a) (b)

Figura 5.4: Variaţia coeficientului de rezistenţă în raport cu ζ.

(a) În cazul $\lambda_1 > \lambda_2$ liniile de curent ale mişcării fluide în domeniul Ω_- (între sferele poroase) au o structură similară cu cea a mişcării fluide peste o sferă solidă.

(b) Când $\lambda_1 = \lambda_2$, prezenţa sferei poroase mai mici nu modifică mişcarea fluidă în interiorul sferei poroase mai mari, deoarece în acest caz ambele sfere au aceleaşi proprietăţi fizice.

(c) În cazul $\lambda_1 < \lambda_2$ liniile de curent sunt îndreptate în jos în sfera poroasă mai mică, datorită proprietăţilor fizice ale sferelor poroase.

În plus, variaţia coeficientului adimensional de rezistenţă sferele interioară şi exterioară, în raport cu ζ, λ_2 şi λ_1, pentru $r = 1$, $R = 2$, este prezentată în Figurile 5.4.

5.2 Probleme cu valori pe frontieră cu condiţii de tip Dirichlet şi Robin-transmisie pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$

Această secţiune conţine rezultate originale ale lui D. Fericean [29] şi se referă la o analiză de teoria potenţialului pentru o problemă cu valori pe frontieră cu condiţii de tip Dirichlet şi Robin-transmisie pentru sistemele Stokes şi Brinkman pe domenii Lipschitz în $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. În particular, ne referim la problema privind mişcarea fluidă de tip Stokes peste un mediu poros cu un corp solid în interior, când condiţiile de salt (5.1.13) sunt impuse pe interfaţa dintre fluid şi mediul poros. În acest caz special, obţinem atât existenţa, unicitatea şi dependenţa de date a soluţiei acestei probleme, cât şi rezultate numerice. Menţionăm că problema cu valori pe frontieră tratată în această secţiune este similară cu problema cu valori pe frontieră (4.1.1). Diferenţa dintre aceste probleme este dată de condiţiile de transmisie implicate. În cazul tridimensional particular corespunzător unui mediu poros sferic, care conţine în interior o sferă solid fixă, condiţiile de transmisie pe interfaţa dintre mediul poros şi mediul fluid se referă la saltul tensiunii tangenţiale şi continuitatea vitezei şi a tensiunii normale, în locul condiţiilor uzuale de continuitate a câmpurilor viteză şi tensiune pe interfeţa dintre mediul fluid şi mediul poros, care intervin în (4.1.1). Aceste condiţii de salt [84], [85] sunt condiţiile fizice care trebuie impuse pe interfaţa dintre mediul fluid şi mediul poros când mişcarea în mediul poros este determinată de ecuaţia Brinkman.

Capitolul 6

Analiza unei probleme de tip Neumann pentru sistemul Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte utilizând teoria potenţialului

Acest capitol se bazează pe rezultatele originale ale autoarei acestei teze prezentate în [28] şi este dedicat unei analize bazată pe teoria potenţialului pentru o problemă cu valori pe frontieră de tip Neumann asociată sistemului Brinkman pe domenii Lipschitz de pe varietăţi Riemanniene compacte, cu date pe frontieră aparţinând unor spaţii Sobolev. Utilizând o metodă din teoriei potenţialului, obţinem rezultatul de existenţă şi unicitate (până la o presiune constantă) pentru această problemă. Principalele surse bibilografice utilizate în pregătirea acestui capitol sunt [41], [56], [73].

6.1 Formularea problemei

Fie $\Omega \subset M$ un domeniu Lipschitz pe o varietate Riemanniană compactă fără frontieră M, $\dim(M) \geq 2$, şi fie $G \in H^{-\frac{1}{2}+\beta}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM)$. De-a lungul acestui capitol presupunem că $\lambda > 0$ este o constantă dată. Pentru $\beta \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ considerăm următoarea problemă cu valori pe frontieră de tip Neumann asociată sistemului Brinkman:

$$(6.1.1) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{L} + \lambda^2 \mathbb{I})\mathbf{u} + \mathrm{d}\pi = 0, \ \delta\mathbf{u} = 0 \text{ în } \Omega \\ \\ [\partial_\nu^+(\mathbf{u}, \pi)] = [G] \in H^{-\frac{1}{2}+\beta}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM)/\mathbb{R}\nu. \end{cases}$$

Condiţia $[\partial_\nu^+(\mathbf{u}, \pi)] = [G]$ este echivalentă cu $\partial_\nu^+(\mathbf{u}, \pi) - G \in \mathbb{R}\nu$ pe $\partial\Omega$.

6.2 Rezultatul de unicitate pentru problema Neumann (6.1.1)

Teorema 6.2.1 **[28]** *Fie $\Omega \subset M$ un domeniu Lipschitz pe o varietate Riemanniană compactă fără frontieră M, $dim(M) \geq 2$, şi fie $\lambda > 0$, $\beta \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ şi $G \in H^{-\frac{1}{2}+\beta}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM)$ date. Atunci problema cu valori pe frontieră de tip Neumann* $(6.1.1)$ *are cel mult o soluţie* $(\mathbf{u}, \pi) \in H^{1+\beta}(\Omega, \Lambda^1 TM) \times H^\beta(\Omega)$ *(până la o presiune constantă).*

6.3 Formularea problemei prin intermediul unor potenţiale

În continuare demonstrăm existenţa soluţiei $(\mathbf{u}, \pi) \in H^{1+\beta}(\Omega, \Lambda^1 TM) \times H^{\beta}(\Omega)$ problemei Neumann $(6.1.1)$, utilizând teoria potenţialului. Folosim proprietatea de inversabilitate a operatorilor

$$\pm\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_{\lambda,\partial\Omega} : H_{\nu}^{\frac{1}{2}+\beta}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM) \to H_{\nu}^{\frac{1}{2}+\beta}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM),$$

pentru orice $\beta \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, aşa cum rezultă din Teorema 3.6.8 (a se vedea şi [57, Lema 5.4]). Considerăm potenţialul de dublu strat şi presiunea asociată:

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}_{\lambda,\partial\Omega}\mathbf{h}, \pi = \mathcal{P}_{\lambda,\partial\Omega}\mathbf{h} \text{ în } \Omega, \tag{6.3.1}$$

cu densitatea $\mathbf{h} \in H_{\nu}^{\frac{1}{2}+\beta}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM)$ în forma

$$\mathbf{h} := \left(\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_{\lambda,\partial\Omega}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_{\lambda,\partial\Omega}\right)^{-1}\mathcal{V}_{\lambda,\partial\Omega}G \tag{6.3.2}$$

şi $G \in H_{\nu}^{-\frac{1}{2}+\beta}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM)$ dat. Prin urmare, $(\mathbf{u}, \pi) \in H^{1+\beta}(\Omega, \Lambda^1 TM) \times H^{\beta}(\Omega)$. În final, utilizând proprietatea (3.6.31), obţinem că $[\partial_{\nu}^{+}(\mathbf{u}, \pi)] = [G]$. În consecinţă, perechea $(\mathbf{u}, \pi)$ dată de $(6.3.1)$, $(6.3.2)$ este o soluţie a problemei Neumann $(6.1.1)$, în spaţiul $H^{1+\beta}(\Omega, \Lambda^1 TM) \times H^{\beta}(\Omega)$. Utilizând Teorema 6.2.1, aceasta este unica soluţie (până la o presiune constantă) a problemei Neumann (6.1.1). Proprietăţile de mărginire ale reprezentărilor prin potenţiale (6.3.1) şi cele ale operatorilor din (6.3.2) conduc la existenţa unei constante $C > 0$ astfel încât

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{1+\beta}(\Omega,\Lambda^1 TM)} + \|\pi\|_{H^{\beta}(\Omega)} \leq C\| \,[G]\, \|_{H^{-\frac{1}{2}+\beta}(\partial\Omega,\Lambda^1 TM)/\mathbb{R}\nu}. \tag{6.3.3}$$

Teorema 6.3.1 **[28]** *Fie $\Omega \subset M$ un domeniu Lipschitz pe o varietate Riemanniană compactă fără frontieră M, $dim(M) \geq 2$, $\lambda > 0$, $\beta \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ şi $G \in H^{-\frac{1}{2}+\beta}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM)$ date. Atunci reprezentările prin potenţiale* $(6.3.1)$ *cu densitatea $\mathbf{h} \in H_{\nu}^{\frac{1}{2}+\beta}(\partial\Omega, \Lambda^1 TM)$ dată de* $(6.3.2)$ *determină soluţia unică $(\mathbf{u}, \pi) \in H^{1+\beta}(\Omega, \Lambda^1 TM) \times H^{\beta}(\Omega)$ (până la o presiune constantă) a problemei cu valori pe frontieră de tip Neumann* $(6.1.1)$*, care satisface estimarea* $(6.3.3)$.

Bibliografie

Listă selectivă

[1] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.

[2] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[3] B. Alazmi, K. Vafai, *Analysis of fluid flow and heat transfer interfacial conditions between a porous medium and a fluid layer*, Int. J. Heat Mass Transfer, **44** (2001), 1735-1749.

[4] P. Angot, *Well-posed Stokes/Brinkman and Stokes/Darcy problems for coupled fluid-porous viscous flows*, AIP Conf. Proc., **1281**, 2208-2211; doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.3498412 (4 pages)

[5] C. Băcuţă, A. L. Mazzucato, V. Nistor, L. Zikatanov, *Interface and mixed boundary value problems on n-dimensional polyhedral domains,* Documenta Math., **15**(2010), 689-747.

[6] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen welche eine schlicte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsb., **138** (1916), 940-955.

[7] L. Boutet de Monvel, *Boundary problems for pseudodifferential operators*, Acta Math., **126** (1971), 11-51.

[8] L. de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta. Math., **154**, 1-2 (1985), 137-152.

[9] L. Brickman, *Φ-like analytic functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **79**(1973), 555-558.

[10] R. Brown, I. Mitrea, M. Mitrea, M. Wright, *Mixed boundary value problems for the Stokes system*, Trans. Amer. Math. Soc., **362** (2010), 1211-1230.

[11] Y. Cao, M. Gunzburger, Xiaoming He, Xiaoming Wang, *Robin-Robin domain decomposition methods for the steady-state Stokes-Darcy system with the Beavers-Joseph interface condition*, Numer. Math., **117** (2011), 601-629.

[12] W. Cao, Y. Sagher, *Stability of Fredholm properties on interpolation scales*, Ark. für Math., **28** (1990), 249-258.

[13] A. Cordoba, D. Cordoba, F. Gancedo, *Interface evolution: the Hele-Shaw and Muskat problems*, Ann. Math., **173** (2011), 477-542.

[14] M. Costabel, *Boundary integral operators on Lipschitz domains: Elementary results*, SIAM J. Math. Anal., **19** (1988), 613-626.

[15] P. Curt, **D. Fericean**, *A special class of univalent functions in Hele-Shaw flow problems*, Abstract and Applied Analysis (**ISI**), Volume 2011, Article ID 948236, 10 pages; doi:10.1155/2011/948236.

[16] P. Curt, **D. Fericean**, T. Groşan, *Φ-like functions in two dimensional free boundary problems*, Mathematica (Cluj), **53 (76)** (2011), 121-130.

[17] M. Cwikel, *Real and complex interpolation and extrapolation of compact operators*, Duke Math. J., **65** (1992), 333-343.

[18] B.E.J. Dahlberg, C. Kenig, *Hardy spaces and the Neumann problem in L^p for Laplace's equation in Lipschitz domains*, Ann. Math., **125** (1987), 437-465.

[19] M. Dindoš, M. Mitrea, *The stationary Navier-Stokes system in non-smooth manifolds: the Poisson problem in Lipschitz and C^1 domains*, Arch. Ration. Mech. Anal., **174** (2004), 1-47.

[20] R.L. Duduchava, D. Mitrea, M. Mitrea, *Differential operators and boundary value problems on hypersurfaces*, Math. Nachr., **279** (2006), 996-1023.

[21] L. Dragoş, *Principiile Mecanicii Mediilor Continue*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1987.

[22] P. Duren, *Univalent Functions*, Springer, New York, 1983.

[23] D.G. Ebin, J. Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the notion of an incompressible fluid*, Ann. Math., **92** (1970), 102-163.

[24] V.M. Entov, P.I. Etingof, *Bubble contraction in Hele-Shaw cells*, Q. J. Mech. Appl. Math., **44** (1991), 507-535.

[25] L. Escauriaza, M. Mitrea, *Transmission problems and spectral theory for singular integral operators on Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **216** (2004), 141-171.

[26] E. Fabes, C. Kenig, G. Verchota, *The Dirichlet problem for Stokes system on Lipschitz domains*, Duke Math. J., **57** (1988), 769-793.

[27] **D. Fericean**, *Strongly Φ-like functions of order α in two-dimensional free boundary problems*, Appl. Math. Comput. (**ISI**), **218** (2012), 7856-7863.

[28] **D. Fericean**, *Layer potential analysis of a Neumann problem for the Brinkman system*, Mathematica (Cluj), to appear.

[29] **D. Fericean**, *Boundary value problems with Dirichlet and Robin-transmission conditions. Well-posedness results*, in preparation.

[30] **D. Fericean**, T. Groşan, M. Kohr, W.L. Wendland, *Interface boundary value problems of Robin-transmission type for the Stokes and Brinkman systems on n-dimensional Lipschitz domains: applications*, Math. Meth. Appl. Sci. (**ISI**), to appear.

[31] **D. Fericean**, W.L. Wendland, *Layer potential analysis for a Dirichlet-transmission problem in Lipschitz domains in $\mathbb{R}^n$*, submitted.

[32] T. Fischer, G.C. Hsiao, W.L. Wendland, *Singular perturbations for the exterior three-dimensional slow viscous flow problem*, J. Math. Anal. Appl., **110** (1985) 583-603.

[33] G.P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Vol. I: Linearized Steady Problems; Vol. II: Nonlinear Steady Problems*, Springer-Verlag, New York, 1994

[34] L.A. Galin, *Unsteady filtration with a free surface*, Dokl. Akad. Nauk USSR, **47** (1945), 246-249.

[35] I. Graham, G. Kohr, *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2003.

[36] T. Groşan, A. Postelnicu, I. Pop, *Brinkman flow of a viscous fluid through a spherical porous medium embedded in another porous medium*, Transp. Porous Med., **81** (2010), 89-103.

[37] B. Gustafsson, D. Prokhorov, A. Vasil'ev, *Infinite lifetime for the starlike dynamics in Hele-Shaw cells*, Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004), 2661-2669.

[38] B. Gustafsson, A. Vasil'ev, *Conformal and Potential Analysis in Hele-Shaw Cells*, Birkhaüser, 2006.

[39] P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu, *Analiză Matematică* (*Funcţii Complexe*), Bucureşti, 1982.

[40] J.J.L. Higdon, M. Kojima, *On the calculation of Stokes flow past porous particles*, Int. J. Multiphase Flow, **7** (1981), 719-727.

[41] S. Hofmann, M. Mitrea, M. Taylor, *Singular integrals and elliptic boundary problems on regular Semmes-Kenig-Toro domains*, Int. Math. Res. Notices, **14** (2010), 2567-2865.

[42] Yu. E. Hohlov, D. V. Prokhorov, A. Vasil'ev, *On geometrical properties of free boundaries in the Hele-Shaw flows moving boundary problem*, Lobacevski J. Math., **1** (1998), 3-12.

[43] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Springer, New York, 1983.

[44] G.C. Hsiao, W.L. Wendland, *Boundary Integral Equations: Variational Methods*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2008.

[45] C. Huntingford, *An exact solution to the one phase zero surface tension Hele-Shaw free boundary problem*, Comp. Math. Appl., **29** (1995), 45-50.

[46] D.S. Jerison, K.E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accesible domains*, Adv. Math., **46** (1982), 80-147.

[47] M.S. Joshi, *Introduction to Pseudo-Differential Operators*, arXiv:/math/9906155v1.

[48] N.J. Kalton, S. Mayboroda, M. Mitrea, *Interpolation of Hardy-Sobolev-Besov-Triebel-Lizorkin spaces and applications to problems in partial differential equations*, Contemp. Math., **445** (2007), 121-177.

[49] N. Kalton, M. Mitrea, *Stability results on the interpolation scales of quasi-Banach spaces and applications*, Trans. Amer. Math. Soc., **350** (1998), 3903-3922.

[50] W. Kaplan, *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Math. J., **2** (1952), 169-185.

[51] C.E. Kenig, *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems*, American Mathematical Society CBMS, **83** (1994).

[52] M. Kimura, *Time local existence of a moving boundary of the Hele-Shaw flow with suction*, Euro. J. Appl. Math., **10** (1999), 581-605.

[53] G. Kohr, P. T. Mocanu, *Capitole Speciale de Analiză Complexă*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2005.

[54] M. Kohr, M. Lanza de Cristoforis, W.L. Wendland, *Nonlinear Neumann-transmission problems for Stokes and Brinkman equtions on Euclidean Lipschitz domains*, Potential Analysis, 2012, DOI:10.1007/s11118-012-9310-0, to appear.

[55] M. Kohr, C. Pintea, W.L. Wendland, *Stokes-Brinkman transmission problems on Lipschitz and C^1 domains in Riemann manifolds*, Commun. Pure Appl. Anal., **9** (2010), 493-537.

[56] M. Kohr, C. Pintea, W.L. Wendland, *Brinkman-type operators on Riemann manifolds: Transmission problems in Lipschitz and C^1 domains*, Potential Analysis, **32** (2010), 229-273.

[57] M. Kohr, C. Pintea, W.L. Wendland, *Layer potential analysis for pseudodifferential matrix operators in Lipschitz domains on compact Riemannian manifolds: Applications to pseudodifferential Brinkman operators*, International Mathematics Research Notices, 90 pages, 2012, DOI 10.1093/imrn/RNS158, to appear.

[58] M. Kohr, C. Pintea, W.L. Wendland, *Dirichlet-transmission problems for pseudodifferential Brinkman operators on Sobolev and Besov spaces associated to Lipschitz domains in Riemannian manifolds*, Z. Angew. Math. Mech., 2012, DOI 10.1002/zamm.201100194, to appear.

[59] M. Kohr, I. Pop, *Viscous Incompressible Flow for Low Reynolds Numbers*, WIT Press, Southampton (UK), 2004.

[60] M. Kohr, G. P. Raja Sekhar, W.L. Wendland, *Boundary integral methods for Stokes flow past a porous body*, Math. Meth. Appl. Sci., **31** (2008), 1065-1097.

[61] M. Kohr, G.P. Raja Sekhar, W.L. Wendland, *Boundary integral equations for a three-dimensional Stokes-Brinkman cell model*, Math. Models Methods Appl. Sci., **18** (2008), 2055-2085.

[62] K. Kornev, A. Vasil'ev, *Geometric properties of the solutions of a Hele-Shaw type equation*, Proc. Amer. Math. Soc., **128** (2000), 2683-2685.

[63] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[64] O.A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, New York, 1969.

[65] S. Lang, *Differential Manifolds*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1985.

[66] K. Loewner, *Untersuchungen über schlichte Abbildungen des Einheitskkreises*, Math. Ann., **89** (1923), 103-121.

[67] V.G. Maz'ya, *Sobolev Spaces*, Springer, Berlin, 1985.

[68] V. Maz'ya , M. Mitrea, T. Shaposhnikova, *The inhomogeneous Dirichlet problem for the Stokes system in Lipschitz domains with unit normal close to VMO*, Funct. Anal. Appl., **43** (2009), 217-235.

[69] V. Maz'ya, J. Rossmann, *Mixed boundary value problems for the Navier-Stokes system in polyhedral domains*, Arch. Rational Mech. Anal., **194** (2009), 669-712.

[70] W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[71] D. Medková, *Transmission problem for the Laplace equation and the integral equation method*, J. Math. Anal. Appl., **387** (2012), 837-843.

[72] S.E. Mikhailov, *Traces, extensions and co-normal derivatives for elliptic systems on Lipschitz domains*, J. Math. Anal. Appl., **378** (2011), 324-342.

[73] D. Mitrea, M. Mitrea, Qiang Shi, *Variable coefficient transmission problems and singular integral operators on non-smooth manifolds*, J. Int. Equ. Appl., **18** (2006), 361-397.

[74] D. Mitrea, M. Mitrea, M. Taylor, *Layer Potentials, the Hodge Laplacian and Global Boundary Problems in Non-Smooth Riemannian Manifolds*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., **150** (2001).

[75] I. Mitrea, M. Mitrea, *The Poisson problem with mixed boundary conditions in Sobolev and Besov spaces in non-smooths domains*, Trans. Amer. Math. Soc., **359** (2007), 4143-4182.

[76] M. Mitrea, M. Taylor, *Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal., **163** (1999), 181-251.

[77] M. Mitrea, M. Taylor, *Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Sobolev-Besov space results and the Poisson problem*, J. Funct. Anal., **176** (2000), 1-79.

[78] M. Mitrea, M. Taylor, *Navier-Stokes equations on Lipschitz domains in Riemannian manifolds*, Math. Ann., **321** (2001), 955-987.

[79] M. Mitrea, M. Wright, *Boundary value problems for the Stokes system in arbitrary Lipschitz domains*, Astérisque, **344** (2012): viii+241 pp.

[80] P.T. Mocanu, *Une propriété de convexité géneralisée dans la théorie de la représentation conforme*, Mathematica (Cluj), **11**(**34**) (1969), 127-133.

[81] P.T. Mocanu, T. Bulboacă, G. Sălăgean, *Teoria Geometrică a Funcţiilor Univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2006.

[82] N.I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, P. Noordhoff, Groningen, Netherlands, 1953.

[83] J. Nečas, *Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*, Academia, Prague 1967.

[84] J.A. Ochoa-Tapia, S. Whitaker, *Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid I: Theoretical development*, Int. J. Heat Mass Trans., **38** (1995), 2635-2646.

[85] J.A. Ochoa-Tapia, S. Whitaker, *Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid II: Comparison with experiment*, Int. J. Heat Mass Trans., **38** (1995), 2647-2655.

[86] B.S. Padmavathi, T. Amaranath, S.D. Nigam, *Stokes flow past a porous sphere using Brinkman's model*, ZAMP, **44** (1993), 929-939.

[87] P. Ya. Polubarinova-Kochina, *On a problem of the motion of the contour of a petroleum shell*, Dokl. Akad. Nauk USSR, **47** (1945), 254-257 (in Russian).

[88] Ch. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[89] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, 1992.

[90] I. Pop, D.B. Ingham, *Convective Heat Transfer: Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluids and Porous Media*, Pergamon, 2001.

[91] H. Power, L.C. Wrobel, *Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics*, WIT Press: Computational Mechanics Publications, Southampton, 1995.

[92] D. Prokhorov, A. Vasil'ev, *Convex dynamics in Hele-Shaw cells*, Intern. J. Math. and Math. Sci., **31** (2002), 639-650.

[93] N. Qing, Fei Ran Tian, *Singularities in Hele-Shaw flows*, SIAM J. Appl. Math., **58** (1998), 34-54.

[94] Yu Qing, P.N. Kaloni, *A cartesian-tensor solution of the Brinkman equation*, J. Eng. Math., **22** (1988), 177-188.

[95] M. Reissig, L. von Wolfersdorf, *A simplified proof for a moving boundary problem for Hele-Shaw flows in the plane*, Ark. Mat., **31**(1993), 101-116.

[96] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, third edition, McGraw- Hill, New York, 1987.

[97] A. Russo, A. Tartaglione, *On the Oseen and Navier-Stokes systems with a slip boundary condition*, Appl. Math. Letters, **22** (2009), 674-678.

[98] R. Russo, *On Stokes' Problem. In: Advances in Mathematical Fluid Mechanics*, R. Rannacher, A. Sequeira (eds.). Springer-Verlag, Berlin, 473-511 (2010).

[99] P.G. Saffman, G.I. Taylor, *The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid*, Proc. Royal Soc. London, Ser. A, **245** (1958), 312-329.

[100] Z. Shen, *A note on the Dirichlet problem for the Stokes system in Lipschitz domains*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 801-815.

[101] Z. Shen, *Necessary and sufficient conditions for the solvability of the L^p Dirichlet problem on Lipschitz domains*, Math. Ann., **336** (2006), 697-725.

[102] H. Shor, *The Navier-Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach*, Birkhäuser, Basel, 2001.

[103] A.C. Srivastava, N. Srivastava, *Flow of a viscous fluid at small Reynolds number past a porous sphere with a solid core*, Acta Mechanica, **186** (2006), 161-172.

[104] G. Starita, A. Tartaglione, *On the traction problem for the Stokes system*, Math. Models Methods Appl. Sci., **12** (2002), 813-834.

[105] S. Tanveer, *Evolution of Hele-Shaw for small surface tension*, Phil. Trans. R., Soc. London, A, **343** (1993), 155-204.

[106] M. Taylor, *Pseudodifferential Operators*, Princeton Univ. Press, 1981.

[107] M. Taylor, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996-1997, vols 1-3.

[108] R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[109] R. Temam, M. Ziane, *Navier-Stokes equations in thin spherical domains*. In: Optimization Methods in Partial Differential Equations, Contemp. Math., vol. 209 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997), 281-314.

[110] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland publ. Co. Amsterdam, 1978.

[111] W. Varnhorn, *The Stokes Equations*, Akademie Verlag, Berlin, 1994.

[112] A. Vasil'ev, *Univalent functions in the dynamics of viscous flows*, Comp. Methods and Func. Theory, **1** (2001), 311-337.

[113] A. Vasil'ev, *Univalent functions in two-dimensional free boundary problems*, Acta Appl. Math., **79** (2003), 249-280.

[114] A. Vasil'ev, I. Markina, *On the geometry of Hele-Shaw flows with small surface tension*, Interfaces and Free Boundaries, **5** (2003), 182-192.

[115] G. Verchota, *Layer potentials and boundary value problems for Laplace's equation in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **59** (1984), 572-611.

[116] G. Verchota, *The biharmonic Neumann problem in Lipschitz domains*, Acta Math., **194** (2005), no. 2, 217-279.

[117] J.T. Wloka, B. Rowley, B. Lawruk, *Boundary Value Problems for Elliptic Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[118] M.W. Wong, *An Introduction to Pseudo-Differential Operators*, World Scientific, Singapore, 1991.

[119] T. Zlatanovski, *Axisymmetric creeping flow past a porous prolate spheroidal particle using the Brinkman model*, Q. J. Mech. Appl. Math., **52** (1999), 111-126.