UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI DIN CLUJ-NAPOCA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Obiecte de tip Rickart în categorii abeliene

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific
Prof. Dr. Septimiu Crivei

Doctorandă
Simona-Maria Radu

Cluj-Napoca
2022

Cuprins

Cuvinte cheie

- obiect CS-Rickart
- obiect tare CS-Rickart
- obiect CS-Baer
- obiect tare CS-Baer
- categorie abeliană
- principiul dualităţii
- functor deplin fidel
- functori adjuncţi
- categoria modulelor
- inelul endomorfismelor

Introducere

Scopul acestei teze a fost introducerea şi studierea noţiunii de obiect CS-Rickart în categorii abeliene ca o generalizare comună a celor de obiect Rickart şi obiect extending. De asemenea, am considerat o particularizare relevantă şi anume cea de obiect CS-Baer, care unifică teoriile obiectelor Baer şi ale obiectelor extending. Toate aceste concepte au fost considerate anterior în categoria modulelor, dar noi am dezvoltat noi tehnici specifice pentru a le aborda categorial. Principalul avantaj al studiului la nivelul de generalitate al categoriilor abeliene este că rezultatele duale au loc în mod automat în baza principiului dualităţii. În acest fel dăm o abordare unificată a noţiunilor duale, care au fost tratate separat în literatură pentru categoriile de module. În subsidiar, se prezintă şi consecinţe în categorii abeliene particulare, altele decât categoriile de module.

Un rezultat de bază în teoria modulelor arată că un modul M este semisimplu dacă şi numai dacă orice submodul al lui M este sumand direct al său. Se pot obţine diferite generalizări a semisimplicităţii considerând doar unele submodule ale unui modul dat ca fiind sumanzi direcţi. Spre exemplu, dacă M este R-modulul drept R, atunci R este regular (von Neumann) dacă şi numai dacă orice submodul finit generat al lui M (i.e., ideal drept al lui R) este sumand direct. De asemenea, se poate defini pentru un modul M, o extindere a semisimplicităţii prin utilizarea anumitor submodule raportate la endomorfismele lui M. Drept urmare, un modul M se numeşte Rickart dacă nucleul oricărui endomorfism al lui M este sumand direct al lui M [56]. Utilizând o abordare diferită, se poate considera o altă generalizare a semisimplicităţii, şi anume: un modul M este extending (sau modul-CS) dacă orice submodul al său este esenţial într-un sumand direct [37].

O întrebare firească este ce se întâmplă când se restricţionează definiţia unui modul extending M doar la unele submodule raportate la endomorfismele lui M în acelaşi stil în care se obţine conceptul de modul Rickart din cel de modul semisimplu? Aceasta este modalitatea de a obţine aşa numitele module CS-Rickart, introduse şi studiate de Abyzov, Nhan şi Quynh [1, 2], care sunt definite ca module M pentru care nucleul oricărui endomorfism al lui M este esenţial într-un sumand direct al lui M. Menţionăm că modulele CS-Rickart pot fi privite ca jucând rolul modulelor extending în lumea modulelor Rickart. Proprietăţile modulelor CS-Rickart sunt uneori similare cu cele ale modulelor Rickart, dar este nevoie de tehnici diferite pentru a le obţine, în acelaşi mod în care se utilizează abordări diferite pentru studiul modulelor extending faţă de cel al modulelor semisimple.

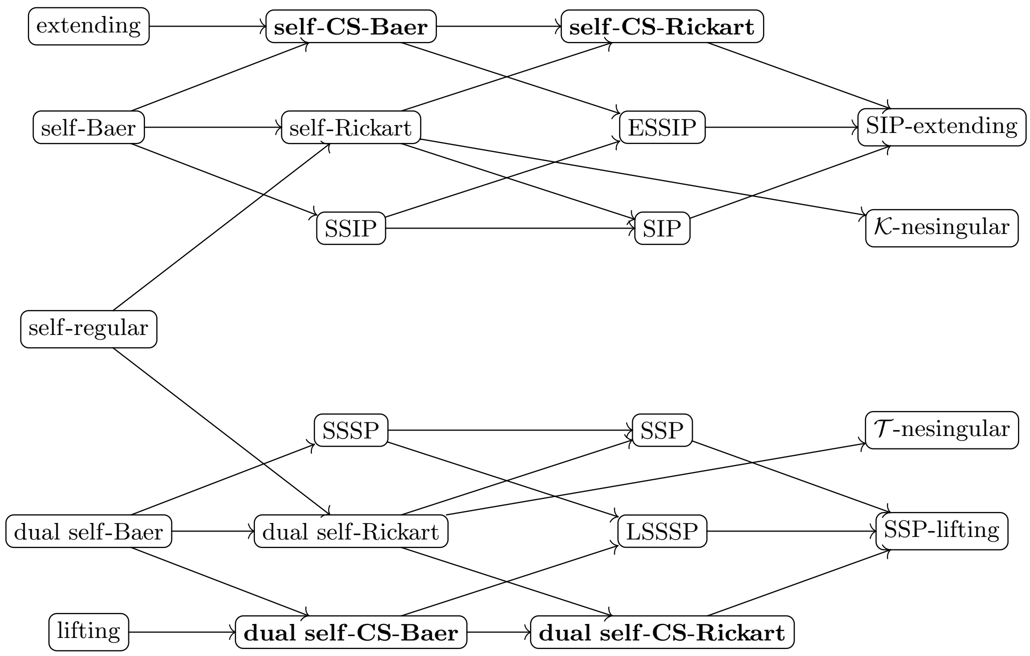
Obiectele Rickart şi dual Rickart în categorii abeliene au fost introduse şi studiate de Crivei, Kör şi Olteanu [22, 23]. Pe de o parte, ele generalizează obiectele regulare în categorii abeliene în sensul lui Dăscălescu, Năstăsescu, Tudorache şi Dăuş [34]. Astfel, un obiect este regular dacă şi numai dacă el este atât Rickart cât şi dual Rickart. Principalul interes în studiul lor provine din lucrarea lui von Neumann [77] despre inele regulare şi Fieldhouse [40] şi Zelmanowitz [81] despre anumite concepte de module regulare. Principala abordare din [22] a fost împărţirea studiului obiectelor regulare în două direcţii, una a obiectelor Rickart şi alta a obiectelor dual Rickart. Deoarece ele sunt concepte duale, este suficient să studiem unul dintre ele şi să utilizăm principiul dualităţii în categorii abeliene.

Pe de altă parte, obiectele Rickart şi dual Rickart generalizează la categorii abeliene modulele Rickart şi dual Rickart în sensul lui Lee, Rizvi şi Roman [56, 57] şi în particular, modulele Baer şi dual Baer studiate atât de Rizvi şi Roman [69, 70] cât şi de Keskin Tütüncü şi Tribak [53]. Originea modulelor (dual) Baer şi modulelor (dual) Rickart poate fi găsită în lucrarea lui Kaplansky [50] despre inele Baer şi în lucrarea lui Maeda [58] despre inele Rickart. Exemplele de inele Baer includ inelele self-injective drepte regulare von Neumann, algebrele von Neumann, inelele de endomorfisme ale modulelor semisimple, în timp ce exemplele de inele Rickart includ inelele Baer, inelele regulare von Neumann, inelele ereditare drepte şi inelele de endomorfisme ale sumelor directe arbitrare de copii ale unui inel ereditar drept. Teoria generală a obiectelor (dual) Rickart în categorii abeliene poate fi aplicată eficient atât în studiul obiectelor regulare, cât şi în studiul obiectelor (dual) Baer în categorii abeliene, după cum este subliniat în [22, 23].

Întorcându-ne la teoria modulelor, studiul modulelor extending şi al modulelor lifting a fost un domeniu de cercetare fructuos în ultimele decenii datorită aplicaţiilor lor importante în teoria inelelor şi a modulelor. Exemplele de module extending includ modulele uniforme şi modulele injective, în timp ce exemplele de module lifting includ modulele hollow şi modulele proiective peste inele perfecte. Monografiile [13, 37] sunt referinţe clasice pentru mai multe informaţii despre modulele extending şi lifting. Recent, Abyzov, Nhan şi Quynh au introdus şi studiat conceptele de module CS-Rickart şi dual CS-Rickart [1, 2], Tribak a considerat modulele dual CS-Rickart peste domenii Dedekind [75], iar Nhan a studiat modulele CS-Baer (sub numele de module esenţial Baer) [63].

Noţiunile de mai sus au versiuni tari, obţinute înlocuind sumanzii direcţi prin sumanzi direcţi deplin invarianţi în definiţiile lor. De exemplu, a se vedea lucrările lui Al-Saadi şi Ibrahiem despre module (dual) tare Rickart [3, 4], Ebrahimi Atani, Khoramdel şi Dolati Pish Hesari [39] despre module tare extending, Wang [78] despre module tare lifting, Crivei şi Olteanu despre obiecte (dual) tare Rickart în categorii abeliene [24, 25]. În acelaşi stil, introducem şi studiem obiectele (dual) tare CS-Rickart şi (dual) tare CS-Baer în categorii abeliene.

Motivaţi de toate cele de mai sus, introducem şi studiem obiectele (dual) CS-Rickart şi obiectele (dual) CS-Baer în categorii abeliene, precum şi versiunile tari ale lor. În acest scop, vom folosi unele tehnici utilizate pentru obiecte (dual) Rickart şi (dual) Baer şi vom dezvolta unele noi inspirate din teoria modulelor extending şi lifting. Reprezentăm în diagrama următoare conceptele principale ale tezei şi legăturile dintre ele.



În cele ce urmează prezentăm pe scurt structura şi principalele contribuţii ale tezei. Toate rezultatele sunt originale, cu excepţia celor citate sau reamintite explicit. Rezultatele noastre şi demonstraţiile lor vor fi prezentate în special pentru obiectele CS-Rickart şi CS-Baer, cele duale urmând din principiul dualităţii în categorii abeliene. Versiunile pentru obiectele tare CS-Rickart şi tare CS-Baer nu sunt menţionate în mod explicit în introducere, dar au fost date pe parcursul tezei.

În Capitolul 1 introducem şi studiem obiectele CS-Rickart în categorii abeliene. Începem cu o secţiune de preliminarii, unde reamintim unele noţiuni şi notaţii necesare care vor fi utilizate pe parcursul tezei. În Secţiunea 2 definim obiectele relativ CS-Rickart şi obiectele self-CS-Rickart în categorii abeliene, exemplificăm şi delimităm conceptele noastre. Arătăm că un obiect M este tare self-CS-Rickart dacă şi numai dacă M este self-CS-Rickart şi weak duo dacă şi numai dacă M este self-CS-Rickart şi inelul $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ este abelian (Corolarul 1.2.3, Propoziţia 1.2.4). De asemenea, pentru orice obiect M, arătăm că obiectele M-Rickart sunt exact obiectele M-CS-Rickart M-$\mathcal{K}$-nesingulare (Teorema 1.2.8). Secţiunea 3 arată cum clasa obiectelor CS-Rickart se comportă bine cu privire la sumanzii direcţi (Teorema 1.3.1). Arătăm că orice obiect self-CS-Rickart este SIP-extending, proprietate corespunzătoare asupra sumanzilor direcţi care generalizează proprietatea intersecţiei sumanzilor (SIP) (Corolarul 1.3.6). În Secţiunea 4 arătăm că pentru orice obiecte M şi $N_1, \ldots, N_n$ ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$ avem că $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ este M-CS-Rickart dacă şi numai dacă N_i este M-CS-Rickart pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ (Teorema 1.4.2). În general, coprodusele obiectelor self-CS-Rickart nu trebuie să fie self-CS-Rickart, dar avem următorul rezultat. Dacă $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ este o descompunere în sumă directă într-o categorie abeliană $\mathcal{A}$ astfel încât $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_i, M_j) = 0$ pentru fiecare $i, j \in I$ cu $i \neq j$, atunci M este self-CS-Rickart dacă şi numai dacă M_i este self-CS-Rickart pentru fiecare $i \in I$ (Teorema 1.4.7). Secţiunea 5 se ocupă cu clase ale căror obiecte sunt self-CS-Rickart. Spre exemplu, pentru o categorie abeliană $\mathcal{A}$ cu suficiente obiecte injective şi o clasă $\mathcal{C}$ de obiecte ale lui $\mathcal{A}$ care este închisă la sume directe binare şi conţine toate obiectele injective ale lui $\mathcal{A}$, demonstrăm că orice obiect al lui $\mathcal{C}$ este extending dacă şi numai dacă orice obiect al lui $\mathcal{C}$ este self-CS-Rickart dacă şi numai dacă fiecare obiect al lui $\mathcal{C}$ este SIP-extending (Teorema 1.5.1). De asemenea, deducem caracterizări ale inelelor drepte slab (semi)ereditare şi perfecte în termenii proprietăţilor self-CS-Rickart sau dual self-CS-Rickart (Corolarele 1.5.4, 1.5.7).

În Capitolul 2 cercetăm transferul proprietăţilor CS-Rickart prin functori între categorii abeliene. În Secţiunea 1 arătăm că un functor între categorii abeliene nu păstrează sau reflectă proprietăţile CS-Rickart. Cu toate acestea, dacă se consideră functori deplin fideli sau perechi de functori adjuncţi cu unele proprietăţi suplimentare rezonabile, putem obţine rezultatele asupra transferului proprietăţilor CS-Rickart. În Secţiunea 1 considerăm functori deplin fideli între categorii abeliene. Fie $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor covariant exact la dreapta şi deplin fidel între categorii abeliene şi M şi N obiecte ale categoriei $\mathcal{A}$. Dacă $\mathrm{Im}(F)$ este închisă la subobiecte sau obiecte factor şi N este M-CS-Rickart, arătăm că $F(N)$ este $F(M)$-CS-Rickart. De asemenea, dacă $\mathrm{Im}(F)$ este închisă la sumanzi direcţi şi $F(N)$ este $F(M)$-CS-Rickart, atunci N este M-CS-Rickart (Teorema 2.1.3). În Secţiunea 2 considerăm o pereche (L, R) de functori adjuncţi covarianţi $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ şi $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ între categorii abeliene astfel încât L este exact şi $M, N \in \mathrm{Stat}(R) = \{B \in \mathcal{B} \mid \varepsilon_B \text{ este izomorfism}\}$. Arătăm că în condiţiile în care N este M-CS-Rickart în $\mathcal{B}$, $R(N)$ este $R(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{A}$. De asemenea, demonstrăm că în condiţiile în care R reflectă obiectele zero, în particular dacă R este fidel, şi $R(N)$ este $R(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{A}$, atunci N este M-CS-Rickart în $\mathcal{B}$ (Teorema 2.2.1). Ca o consecinţă deducem că dacă L este exact şi R este deplin fidel, atunci N este M-CS-Rickart în $\mathcal{B}$ dacă şi numai dacă $R(N)$ este $R(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{A}$ (Teorema 2.2.2). Teoremele noastre sunt aplicabile pe scară largă şi le exemplificăm în mai multe contexte relevante în Secţiunea 3. Tratăm aplicaţii la subcategorii Giraud şi co-Giraud (Corolarul 2.3.1), categorii de functori, subcategorii localizante şi colocalizante, triplete de functori adjuncţi, functori Frobenius şi recollement între categorii abeliene (Corolarul 2.3.6). Prezentăm consecinţe la categoriile Grothendieck şi în particular la categoriile de comodule şi module (graduate). În Secţiunea 4 dăm proprietăţi legate de transferul proprietăţilor CS-Rickart la inelul endomorfismelor de module (graduate) şi comodule. Printre alte rezultate, pentru un R-modul drept M cu $S = \mathrm{End}_R(M)$, demonstrăm că dacă M este im-local-retractabil şi S este S-modul drept self-CS-Rickart, atunci M este R-modul drept self-CS-Rickart (Corolarul 2.4.2). De asemenea, dacă M este R-modul drept self-CS-Rickart care este plat ca S-modul stâng, atunci S este S-modul drept self-CS-Rickart (Corolarul 2.4.3).

În Capitolul 3 introducem şi studiem obiectele CS-Baer într-o categorie abeliană $\mathcal{A}$ cu AB3*. În Secţiunea 1 introducem aceste concepte şi le exemplificăm printr-o serie de exemple. Arătăm că un obiect M este tare self-CS-Baer dacă şi numai dacă M este self-CS-Baer şi weak duo dacă şi numai dacă M este self-CS-Baer şi $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ este abelian (Corolarul 3.1.3). Secţiunile 2 şi 3 sunt dedicate comparării obiectelor relativ CS-Baer cu cele mai importante particularizări ale lor şi anume obiectele relativ Baer şi extending. Pentru obiectele M şi N, arătăm că N este M-Baer dacă şi numai dacă N este M-CS-Baer şi M-$\mathcal{K}$-nesingular (Teorema 3.2.2). Considerăm unele forme tari ale M-$\mathcal{K}$-nesingularităţii şi M-$\mathcal{K}$-conesingularităţii, numite $\mathcal{E}$-M-$\mathcal{K}$-nesingularitate şi respectiv $\mathcal{E}$-M-$\mathcal{K}$-conesingularitate. Arătăm că dacă N este M-CS-Baer şi $\mathcal{E}$-M-$\mathcal{K}$-conesingular, atunci M este extending (Corolarul 3.3.4). De asemenea, demonstrăm că dacă un obiect M este extending şi $\mathcal{E}$-M-$\mathcal{K}$-nesingular, atunci M este self-CS-Baer şi $\mathcal{E}$-M-$\mathcal{K}$-conesingular (Corolarul 3.3.6). Caracterizăm inelele dual self-CS-Baer ca fiind inelele lifting, sau echivalent, inelele semiperfecte (Propoziţia 3.3.7). Secţiunile 4 şi 5 prezintă relaţia dintre obiectele relativ CS-Baer şi două generalizări importante, şi anume obiectele cu anumite proprietăţi ale intersecţiei sumanzilor numite ESSIP şi SSIP-extending şi obiectele relativ CS-Rickart. Demonstrăm că orice obiect self-CS-Baer este ESSIP, iar dacă A şi B sunt obiecte astfel încât $A \oplus B$ este ESSIP, atunci B este A-CS-Baer (Corolarul 3.4.4, Lema 3.4.5). De asemenea, dacă M este self-CS-Rickart şi SSIP-extending, atunci M este self-CS-Baer, în timp ce reciproca este adevărată dacă $\mathrm{Soc}(M)$ este subobiect esenţial al lui M (Teorema 3.5.3, Corolarul 3.5.4). În particular, dacă M este R-modul drept finit cogenerat sau R este inel semiartinian drept, atunci M este self-CS-Baer dacă şi numai dacă M este self-CS-Rickart şi SSIP-extending. De asemenea, dacă M este R-modul drept finit generat sau R este inel max drept, atunci M este dual self-CS-Baer dacă şi numai dacă M este dual self-CS-Rickart şi SSSP-lifting (Corolarul 3.5.5). În Secţiunea 6 studiem produsele şi coprodusele de obiecte relativ CS-Baer. Clasa obiectelor relativ CS-Baer este închisă la sumanzi direcţi (Corolarul 3.6.2), dar în general nu este închisă la coproduse. Cu toate acestea, arătăm că $\bigoplus_{i=1}^n N_i$ este M-CS-Baer dacă şi numai dacă fiecare N_i este M-CS-Baer (Teorema 3.6.4). Dacă $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ este o descomunere în sumă directă astfel încât $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_i, M_j) = 0$ pentru fiecare $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distincte, demonstrăm că M este self-CS-Baer dacă şi numai dacă fiecare M_i este self-CS-Baer (Teorema 3.6.6). În Secţiunea 7 determinăm structura modulelor dual self-CS-Baer peste domenii Dedekind (Teoremele 3.7.1, 3.7.2, 3.7.3). În Secţiunea 8 dăm câteva rezultate (precum Teorema 3.8.1) asupra claselor ale căror obiecte sunt self-CS-Baer, de aceeaşi natură ca rezultatele corespunzătoare pentru proprietatea self-CS-Rickart. În Secţiunea 9 studiem în ce condiţii proprietatea CS-Baer se transferă prin functori între categorii abeliene. Principalele noastre rezultate se referă la functori deplin fideli şi la functori adjuncţi între categorii abeliene, cu aceleaşi ipoteze rezonabile ca în cazul proprietăţilor CS-Rickart (Teoremele 3.9.1, 3.9.3). În Secţiunea 10 studiem transferul proprietăţii CS-Baer la inelul endomorfismelor modulelor (graduate) şi comodulelor. Printre alte rezultate, pentru un R-modul drept M cu $S = \mathrm{End}_R(M)$, demonstrăm că dacă M este im-local-retractabil şi S este S-modul drept self-CS-Baer, atunci M este R-modul drept self-CS-Baer (Corolarul 3.10.3). De asemenea, dacă M este R-modul drept self-CS-Baer care este proiectiv şi finit generat ca S-modul stâng, atunci S este S-modul drept self-CS-Baer (Corolarul 3.10.4).

Această teză se bazează pe rezultatele articolele proprii [18, 26, 27, 28] şi preprinturile [29, 30]. Articolele au fost publicate sau acceptate spre publicare în *Journal of Algebra and its Applications*, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society "Simon Stevin"*, *Quaestiones Mathematicae* şi *Communications in Algebra*. În plus, părţi ale acestei teze au fost comunicate la mai multe conferinţe internaţionale.

În acest rezumat am omis afirmaţiile rezultatelor duale în categorii abeliene.

Capitolul 1

Obiecte CS-Rickart în categorii abeliene

Introducem şi studiem conceptul de obiect CS-Rickart în categorii abeliene ca o generalizare comună a celor de obiect Rickart şi obiect extending. Stabilim mai multe caracterizări ale obiectelor CS-Rickart, studiem sumanzi direcţi şi (co)produse de astfel de obiecte şi analizăm clase ale căror obiecte sunt CS-Rickart. Cu excepţia rezultatelor citate, toate celelalte rezultate sunt originale şi sunt incluse în articolele proprii [26] şi [28].

1.1 Preliminarii

Începem prin a stabili unele notaţii şi terminologii, care vor fi utilizate pe parcursul tezei.

Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană. Pentru fiecare morfism $f : M \to N$ în $\mathcal{A}$ notăm cu $\ker(f) : \mathrm{Ker}(f) \to M$, $\mathrm{coker}(f) : N \to \mathrm{Coker}(f)$, $\mathrm{coim}(f) : M \to \mathrm{Coim}(f)$ şi $\mathrm{im}(f) : \mathrm{Im}(f) \to N$ nucleul, conucleul, coimaginea şi respectiv imaginea lui f. Reţinem că $\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{Coim(f)}$, deoarece $\mathcal{A}$ este abeliană. Pentru un şir exact scurt $0 \to A \to B \to C \to 0$ in $\mathcal{A}$, scriem, de asemenea, $C = B/A$. Un morfism $f : A \to B$ se numeşte *secţiune* dacă exisă un morfism $f' : B \to A$ astfel încât $f'f = 1_A$, şi *retractă* dacă există un morfism $f' : B \to A$ astfel încât $ff' = 1_B$.

O categorie abeliană este numită *AB3* (*AB3**) dacă are coproduse (produse) arbitrare. Reţinem despre categoriile abeliene AB3 (AB3*) că au sume (intersecţii) arbitrare. Categoria $\mathrm{Mod}(R)$ a modulelor drepte peste un inel unitar R şi categoria ${}^{C}\mathcal{M}$ a comodulelor stângi peste o coalgebră C peste un corp comutativ (a se vedea [33, Corolarul 2.2.8]) sunt exemple tipice de categorii Grothendieck şi prin urmare categorii abeliene AB3 şi AB3*. Pentru mai multe informaţii despre categorii abeliene, se pot consulta [41, 72].

1.2 Obiecte relativ CS-Rickart

Acum introducem conceptele de bază ale tezei, şi anume obiectele (tare) relativ CS-Rickart, care generalizează atât obiectele (tare) relativ Rickart cât şi obiectele (tare) extending în categorii abeliene. Dăm de asemenea şi dualele lor.

Definiţia 1.2.1. Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Atunci N se numeşte:

(1) *(tare) M-CS-Rickart* dacă pentru orice morfism $f : M \to N$ există un monomorfism esenţial $e : \mathrm{Ker}(f) \to L$ şi o secţiune (deplin invariantă) $s : L \to M$ în $\mathcal{A}$ astfel încât $\ker(f) = se$. În mod echivalent, N este M-CS-Rickart dacă şi numai dacă pentru orice morfism $f : M \to N$, $\mathrm{Ker}(f)$ este esenţial într-un sumand direct (deplin invariant) al lui M.

(2) *dual (tare) M-CS-Rickart* dacă pentru orice morfism $f : M \to N$ există o retractă (deplin coinvariantă) $r : N \to P$ şi un epimorfism superfluu $t : P \to \mathrm{Coker}(f)$ în $\mathcal{A}$ astfel încât $\mathrm{coker}(f) = tr$. În mod echivalent, N este dual M-CS-Rickart dacă şi numai dacă pentru orice morfism $f : M \to N$, $\mathrm{Im}(f)$ stă deasupra unui sumand direct (deplin invariant) al lui N.

(3) *(tare) self-CS-Rickart* dacă N este (tare) N-CS-Rickart.

(4) *dual (tare) self-CS-Rickart* dacă N este dual (tare) N-CS-Rickart.

În continuare vom vedea cum obiectele relativ CS-Ricart şi cele relativ tare CS-Rickart se relaţionează între ele.

Propoziţia 1.2.2. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că fiecare sumand direct al lui M este izomorf cu un subobiect al lui N. Atunci N este tare M-CS-Rickart dacă şi numai dacă N este M-CS-Rickart şi M este weak duo.*

Corolarul 1.2.3. *Fie M un obiect al unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Atunci M este tare self-CS-Rickart dacă şi numai dacă M este self-CS-Rickart şi weak duo.*

Propoziţia 1.2.4. *Fie M un obiect al unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Atunci M este tare self-CS-Rickart dacă şi numai dacă M este self-CS-Rickart şi $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ este abelian.*

Acum considerăm câteva exemple în categorii de module.

Exemplul 1.2.5. Considerăm inelul matriceal $R = \begin{pmatrix} K & M \\ 0 & D \end{pmatrix}$, unde K este un corp comutativ, D este un domeniu de integritate care nu este corp şi conţine pe K, radicalul Jacobson $\mathrm{Rad}(D) = 0$, şi M este un D-modul fără torsiune. Spre exemplu, se poate considera $R = \begin{pmatrix} K & K[X] \\ 0 & K[X] \end{pmatrix}$.

În aceste condiţii R este un R-modul drept self-Rickart ,şi prin urmare este R-modul drept self-CS-Rickart, dar nu este R-modul drept tare self-CS-Rickart, deoarece R nu este abelian. De asemenea, R nu este R-modul drept dual (tare) self-CS-Rickart.

Exemplul 1.2.6. Fie A un inel şi G un subgrup al grupului $\mathrm{Aut}(A)$ al automorfismelor de inele ale lui A. Inelul grupal strâmb este dat de $A * G = \bigoplus_{g \in G} Ag$ cu adunarea dată pe componente şi înmulţirea definită prin $(ag)(bh) = ab^{g^{-1}}gh \in Agh$ pentru fiecrare $a, b \in A$ şi $g, h \in G$. Dacă $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, $a \in A$ şi $\beta = a_1g_1 + a_2g_2 + \dots + a_ng_n \in A * G$ cu $a_i \in A$, atunci

$$a \cdot \beta = a^{g_1}a_1^{g_1} + a^{g_2}a_2^{g_2} + \dots + a^{g_n}a_n^{g_n}.$$

Avem astfel că A este $A * G$-modul drept.

Urmând [56, Example 3.13], considerăm inelul $A = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}$. Dacă $g \in \mathrm{Aut}(A)$ este conjugarea prin $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, urmează că $G = \{1, g\}$ este subgrup al lui $\mathrm{Aut}(A)$. Considerăm inelul grupal strâmb $R = A * G$ şi R-modulul drept $M = A$. Atunci R-modulul drept M este self-CS-Rickart şi inelul endomorfismelor sale este abelian. Prin urmare R-modulul drept M este tare self-CS-Rickart conform Propoziţiei 1.2.4, dar el nu este tare self-Rickart [56, Example 3.13].

Exemplul 1.2.7. Dacă M este obiect uniserial (i.e., laticea subobiectelor sale este un lanţ) al unei categorii abeliene, atunci este clar că M este tare self-CS-Rickart şi dual tare self-CS-Rickart, dar el nu este nici (tare) self-Rickart şi nici dual (tare) self-Rickart. Dăm un exemplu în categoria comodulelor, care este cunoscută a fi Grothendieck [33, Corollary 2.2.8]. Fie C un spaţiu vectorial cu baza $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ peste un corp comutativ K. Atunci C este coalgebră peste K cu comultiplicarea şi counitatea definită pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ prin $\Delta(c_n) = \sum_{i=0}^{n} c_i \otimes c_{n-i}$ şi respectiv $\varepsilon(c_n) = \delta_{0n}$ (simbolul Kronecker). Aceasta este o coalgebră numită coalgebra divided power [33, Example 1.1.4], pentru care algebra duală C^* este izomorfă cu algebra $K[[X]]$ a seriilor de puteri formale şi categoria de C-comodule este izomorfă cu categoria $K[[X]]$-modulelor cu torsiune [33, Examples 1.3.8, 3.2.7]. Deoarece C este C-comodul uniserial (drept şi stâng)[31, Example 1.4], C este C-comodul tare self-CS-Rickart şi dual tare self-CS-Rickart.

Alte exemple în categorii abeliene pot fi obţinute utilizând transferul proprietăţii (tare) CS-Rickart prin functori, dezvoltat în Capitolul 2.

Următoarea teoremă, care generalizează [1, Lemmas 6,7], stabileşte alte legături între obiectele relativ Rickart şi cele relativ CS-Rickart.

Teorema 1.2.8. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Atunci N ete (tare) M-CS-Rickart şi N este M-$\mathcal{K}$-nesingular dacă şi numai dacă N este (tare) M-Rickart.*

Teorema 1.2.8 dă următorul corolar în categoria modulelor.

Corolarul 1.2.9. *Orice R-modul drept nesingular (tare) self-CS-Rickart este (tare) self-Rickart şi orice R-modul drept necosingular dual (tare) self-CS-Rickart este dual (tare) self-Rickart.*

1.3 Sumanzi direcţi ai obiectelor relativ CS-Rickart

Ca în cazul obiectelor (tare) relativ Rickart şi a obiectelor (tare) extending, vedem că obiectele (tare) relativ CS-Rickart se comportă bine cu privire la sumanzii direcţi.

Teorema 1.3.1. *Fie $r : M \to M'$ un epimorfism şi $s : N' \to N$ un monomorfism într-o categorie abeliană $\mathcal{A}$. Dacă r este retractă şi N este (tare) M-CS-Rickart, atunci N' este (tare) M'-CS-Rickart.*

Următoarea consecinţă a Teoremei 1.3.1 generalizează [1, Lemma 1] de la categoria modulelor la categoriile abeliene.

Corolarul 1.3.2. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$, M' un sumand direct al lui M şi N' un sumand direct al lui N. Dacă N este (tare) M-CS-Rickart, atunci N' este (tare) M'-CS-Rickart.*

În cazul obiectelor self-CS-Rickart, avem nevoie de următoarele generalizări ale proprietăţii SIP (SSIP), inspirate de noţiunile corespunzătore din teoriei modulelor [2, 51].

Definiţia 1.3.3. Un obiect M al unei categorii abeliene $\mathcal{A}$ se numeşte *SSIP-extending* (*SIP-extending*) dacă pentru orice familie de (două) subobiecte ale lui M care sunt esenţiale în sumanzi direcţi ai lui M, intersecţia lor este esenţială într-un sumand direct al lui M.

În continuare luăm în considerare unele versiuni stricte ale obiectelor SSIP-extending şi SIP-extending în categorii abeliene.

Definiţia 1.3.4. Un obiect M al unei categorii abeliene $\mathcal{A}$ se numeşte *strict SSIP-extending* (*strict SIP-extending*) dacă pentru orice familie de (două) subobiecte ale lui M care sunt esenţiale în sumanzi direcţi ai lui M, intersecţia lor este esenţială într-un sumnad direct deplin invariant al lui M.

Propoziţia 1.3.5. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că fiecare sumand direct al lui M este izomorf cu un subobiect al lui N şi N este (tare) M-CS-Rickart. Atunci M este (strict) SIP-extending.*

Următoarea consecinţă generalizează [1, Propositions 1,2].

Corolarul 1.3.6. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană. Orice obiect (tare) self-CS-Rickart al lui $\mathcal{A}$ este (strict) SIP-extending.*

Următoarea lemă, care generalizează [2, Proposition 3.7], va fi utilă.

Lema 1.3.7. *Fie A şi B obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Dacă $A \oplus B$ este (strict) SIP-extending, atunci B este (tare) A-CS-Rickart.*

Corolarul 1.3.8. *Fie M un obiect al unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Dacă $M \oplus M$ este (strict) SIP-extending, atunci M este (tare) self-CS-Rickart.*

1.4 Coproduse ale obiectelor relativ CS-Rickart

Analizăm acum comportarea obiectelor relativ (tare) CS-Rickart şi in particular, al celor (tare) self-CS-Rickart cu privire la coproduse. Începem cu studiul coproduselor finite de obiecte (tare) relativ CS-Rickart.

Teorema 1.4.1. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană. Fie M, N_1 şi N_2 obiecte ale lui $\mathcal{A}$ astfel încât N_1 şi N_2 sunt (tare) M-CS-Rickart. Atunci $N_1 \oplus N_2$ este tare M-CS-Rickart.*

Acum putem deduce imediat principalele noastre teoreme legate de coproduse finite care implică obiectele relativ CS-Rickart.

Teorema 1.4.2. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană. Fie M şi $N_1, \dots, N_n$ obiecte ale lui $\mathcal{A}$. Atunci $\bigoplus_{i=1}^n N_i$ este (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă N_i este (tare) M-CS-Rickart pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Exemplificăm rezultatele de mai sus cu o aplicaţie la categoriile de module. Urmând din nou [37, 74] şi utilizând notaţiile care preced Corolarul 3.2.4, pentru orice R-modul drept M, notăm prin $Z_2(M)$ şi $\overline{Z}^2(M)$ submodulele lui M determinate de egalităţile $Z_2(M)/Z(M) = Z(M/Z(M))$ şi $\overline{Z}^2(M) = \overline{Z}(\overline{Z}(M))$.

Corolarul 1.4.3. *Fie M un R-modul drept. Atunci:*

(1) $Z_2(M)$ şi $M/Z_2(M)$ sunt (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă $Z_2(M)$ este sumand direct al lui M şi M este (tare) self-CS-Rickart.

(2) M este dual (tare) $\overline{Z}^2(M)$-CS-Rickart şi dual (tare) $M/\overline{Z}^2(M)$-CS-Rickart dacă şi numai dacă $\overline{Z}^2(M)$ este sumand direct al lui M şi M este dual (tare) self-CS-Rickart.

Sub anumite condiţii de finititudine avem următorul rezultat.

Corolarul 1.4.4. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană. Presupunem că $\mathcal{A}$ are coproduse, M este un obiect finit generat al lui $\mathcal{A}$ şi $(N_i)_{i\in I}$ este o familie de obiecte ale lui $\mathcal{A}$. Atunci $\bigoplus_{i\in I} N_i$ este (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă N_i este (tare) M-CS-Rickart pentru fiecare $i \in I$.*

Avem de asemenea următoarea teoremă în legătură cu produsele de obiecte relativ CS-Rickart.

Teorema 1.4.5. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană. Fie M un obiect (strict) SSIP-extending al lui $\mathcal{A}$ şi $(N_i)_{i\in I}$ o familie de obiecte ale lui $\mathcal{A}$ care au produs. Atunci $\prod_{i\in I} N_i$ este (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă N_i este (tare) M-CS-Rickart pentru fiecare $i \in I$.*

În general coprodusul a două obiecte (tare) self-CS-Rickart nu este (tare) self-CS-Rickart, aşa cum putem vedea în următorul exemplu.

Exemplul 1.4.6. Considerăm inelul $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ şi R-modulele drepte $M_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$. Atunci M_1 şi M_2 sunt self-Rickart, prin urmare şi R-module drepte self-CS-Rickart [56, Example 2.9]. Deoarece $\mathrm{End}(M_1) \cong \mathbb{Z} \cong \mathrm{End}(M_2)$, M_1 şi M_2 sunt tare self-CS-Rickart din Propoziţia 1.2.4. Dar am văzut că $R = M_1 \oplus M_2$ nu este R-modul drept self-CS-Rickart, deci $R = M_1 \oplus M_2$ nu este tare self-CS-Rickart din nou conform Propoziţiei 1.2.4.

Cu toate acestea, avem următoarele rezultate.

Teorema 1.4.7. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană şi $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ o descompunere în sumă directă în $\mathcal{A}$ astfel încât $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_i, M_j) = 0$ pentru fiecare $i, j \in I$ cu $i \neq j$. Atunci M este self-CS-Rickart dacă şi numai dacă M_i este self-CS-Rickart pentru fiecare $i \in I$.*

Teorema 1.4.8. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană şi $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ o descompunere în sumă directă în $\mathcal{A}$.*

(1) Atunci M este tare self-CS-Rickart dacă şi numai dacă M_i este tare self-CS-Rickart pentru fiecare $i \in I$ şi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_i, M_j) = 0$ pentru fiecare $i, j \in I$ cu $i \neq j$.

(2) Presupunem că I este finită. Atunci M este dual tare self-CS-Rickart dacă şi numai dacă M_i este dual tare self-CS-Rickart pentru fiecare $i \in I$ şi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_i, M_j) = 0$ pentru fiecare $i, j \in I$ cu $i \neq j$.

Vom încheia această secţiune cu unele rezultate despre structura modulelor (dual) tare self-CS-Rickart peste domenii Dedekind.

Corolarul 1.4.9. *Fie R un domeniu Dedekind cu corpul de fracţii K şi M un R-modul nenul.*

(i) Presupunem că M este cu torsiune. Următoarele sunt echivalente:

(1) M este tare self-CS-Rickart.

(2) M este dual tare self-CS-Rickart.

(3) M este weak duo.

(4) $M \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$, unde pentru fiecare $i \in I$, fie $M_i \cong E(R/P_i)$ fie $M_i \cong R/P_i^{n_i}$ pentru idealele maximale distincte P_i ale lui R şi întregii pozitivi n_i.

(ii) Presupunem că M este finit generat.

(1) Următoarele sunt echivalente:

(a) M este tare self-CS-Rickart.

(b) M este weak duo.

(c) $M \cong J$ pentru ideale J ale lui R sau $M \cong \bigoplus_{i=1}^{k} R/P_i^{n_i}$ pentru idealele maximale distincte $P_1, \dots, P_k$ ale R şi întregii pozitivi $n_1, \dots, n_k$.

(2) Următoarele sunt echivalente:

(a) M este dual tare self-CS-Rickart.

(b) $M \cong \bigoplus_{i=1}^{k} R/P_i^{n_i}$ pentru idealele maximale distincte P_i ale lui R şi întregii pozitivi $n_1, \dots, n_k$.

(iii) Presupunem că M este injectiv. Atunci următoarele sunt echivalente:

(1) M este tare self-CS-Rickart.

(2) M este dual tare self-CS-Rickart.

(3) $M \cong K$ sau $M \cong \bigoplus_{i\in I} E(R/P_i)$ pentru idealele maximale distincte P_i ale lui R.

1.5 Clase ale căror obiecte sunt self-CS-Rickart

În această secţiune obţinem diverse caracterizări ale unor clase ale căror obiecte sunt (dual) (tare) self-CS-Rickart, în special în legătură cu obiectele (weak duo) injective, (weak duo) proiective, (tare) extending şi (tare) lifting.

Teorema 1.5.1. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană. Presupunem că $\mathcal{A}$ are suficiente obiecte injective. Fie $\mathcal{C}$ o clasă de obiecte ale lui $\mathcal{A}$ care este închisă la sumele directe binare şi conţine toate obiectele injective ale lui $\mathcal{A}$. Atunci următoarele sunt echivalente:*

(i) Orice obiect al lui $\mathcal{C}$ este (tare) extending.

(ii) Orice obiect al lui $\mathcal{C}$ este (tare) self-CS-Rickart.

(iii) Orice obiect al lui $\mathcal{C}$ este (strict) SIP-extending.

Deducem un număr de corolare ale Teoremei 1.5.1.

Corolarul 1.5.2. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană. Următoarele sunt echivalente:*

(i) Orice obiect al lui $\mathcal{A}$ are anvelope injective.

(ii) $\mathcal{A}$ are suficiente obiecte injective şi orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este extending.

(iii) $\mathcal{A}$ are suficiente obiecte injective şi orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este self-CS-Rickart.

(iv) $\mathcal{A}$ are suficiente obiecte injective şi orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este SIP-extending.

Reţinem că orice obiect al unei categorii Grothendieck $\mathcal{A}$ are o anvelopă injectivă, deci orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este extending, şi în consecinţă self-CS-Rickart, din Corolarul 1.5.2.

Obţinem următoarele consecinţe ale Teoremei 1.5.1 şi ale Corolarului 1.5.2, care sunt parţial cunoscute în categoriile de module (a se vedea [1, Lemmas 5, 11]).

Corolarul 1.5.3. *Următoarele sunt echivalente pentru un inel unitar R cu radicalul Jacobson $J(R)$:*

(i) Orice R-modul drept este extending.

(ii) Orice R-modul drept este self-CS-Rickart.

(iii) Orice R-modul drept este SIP-extending.

(iv) Orice R-modul drept este lifting.

(v) Orice R-modul drept este dual self-CS-Rickart.

(vi) Orice R-modul drept este SSP-lifting.

(vii) R este un inel serial artinian stâng şi drept cu $(J(R))^2 = 0$.

Corolarul 1.5.4. *Următoarele sunt echivalente pentru un inel unitar R:*

(i) R este perfect drept.

(ii) Orice R-modul drept proiectiv este lifting.

(iii) Orice R-modul drept proiectiv este dual self-CS-Rickart.

(iv) Orice R-modul drept proiectiv este SSP-lifting.

Corolarul 1.5.5. *Următoarele sunt echivalente pentru o coalgebră C peste un corp comutativ:*

(i) C este prfectă la dreaptă.

(ii) C este semiperfectă la dreapta şi fiecare C-comodul drept proiectiv este lifting.

(iii) C este semiperfectă la dreapta şi fiecare C-comodul drept proiectiv este dual self-CS-Rickart.

(iv) C este semiperfectă la dreapta şi fiecare C-comodul drept proiectiv este SSP-lifting.

Teorema 1.5.6. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck.*

(1) Presupunem că $\mathcal{A}$ are o familie de generatori proiectivi finit generaţi. Atunci următoarele sunt echivalente:

(i) Orice obiect proiectiv (finit generat) al lui $\mathcal{A}$ este slab (semi)ereditar.

(ii) Orice obiect proiectiv (finit generat) al lui $\mathcal{A}$ este slab (semi)ereditar self-CS-Rickart.

(iii) Orice obiect proiectiv (finit generat) al lui $\mathcal{A}$ este slab (semi)ereditar SIP-extending.

(2) Presupunem că $\mathcal{A}$ este local finit generată. Atunci următoarele sunt echivalente:

(i) Orice obiect injectiv (finit cogenerat) al lui $\mathcal{A}$ este slab (semi)coereditar.

(ii) Orice obiect injectiv (finit cogenerat) al lui $\mathcal{A}$ este dual self-CS-Rickart.

(iii) Orice obiect injectiv (finit cogenerat) al lui $\mathcal{A}$ este SSP-lifting.

Următorul corolar extinde o parte din [1, Theorem 8]. De asemenea, poate fi comparat cu [2, Theorems 3.11, 3.12] pentru inele (semi)ereditare nesingulare drepte. Reţinem că un inel slab ereditar drept coincide cu un inel Σ-extending drept (sau co-H-inel drept) [37, Corollary 11.13].

Corolarul 1.5.7. *Fie R un inel unitar.*

(1) Următoarele sunt echivalente:

(i) R este slab (semi)ereditar drept.

(ii) Orice R-modul drept proiectiv (finit generat) este slab (semi)ereditar.

(iii) Orice R-modul drept proiectiv (finit generat) este self-CS-Rickart.

(iv) Orice R-modul drept proiectiv (finit generat) este SIP-extending.

(2) Următoarele sunt echivalente:

(i) Orice R-modul drept injectiv (finit cogenerat) este slab (semi)coereditar.

(ii) Orice R-modul drept injectiv (finit cogenerat) este dual self-CS-Rickart.

(iii) Orice R-modul drept injectiv (finit cogenerat) este SSP-lifting.

Corolarul 1.5.8. *Fie C o coalgebră peste un corp comutativ.*

(1) Presupunem că C este semiperfectă la stânga şi la dreapta. Atunci următoarele sunt echivalente:

(i) Orice C-comodul drept proiectiv (finit generat) este slab (semi)ereditar.

(ii) Orice C-comodul drept proiectiv (finit generat) este self-CS-Rickart.

(iii) Orice C-comodul drept proiectiv (finit generat) este SIP-extending.

(2) Următoarele sunt echivalente:

(i) Orice C-comodul drept injectiv (finit cogenerat) este slab (semi)coereditar.

(ii) Orice C-comodul drept injectiv (finit cogenerat) este dual self-CS-Rickart.

(iii) Orice C-comodul drept injectiv (finit cogenerat) este SSP-lifting.

Continuăm cu unele rezultate despre clase ale căror obiecte sunt (dual) tare self-CS-Rickart.

Teorema 1.5.9. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck local finit generată.*

(1) Următoarele sunt echivalente:

(i) Orice obiect finit cogenerat al lui $\mathcal{A}$ este weak duo semisimplu.

(ii) Orice obiect finit cogenerat al lui $\mathcal{A}$ este tare self-CS-Rickart.

(iii) Orice obiect finit cogenerat al lui $\mathcal{A}$ este weak duo şi orice obiect finit cogenerat injectiv al lui $\mathcal{A}$ este tare self-CS-Rickart.

(2) Următoarele sunt echivalente:

(i) Orice obiect finit generat al lui $\mathcal{A}$ este weak duo regular.

(ii) Orice obiect finit generat al lui $\mathcal{A}$ este dual tare self-CS-Rickart.

(iii) Orice obiect finit generat al lui $\mathcal{A}$ este weak duo şi orice obiect proiectiv finit generat al lui $\mathcal{A}$ este dual tare self-CS-Rickart.

Teorema 1.5.10. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck local finit generată.*

(1) Următoarele sunt echivalente:

(i) Orice subobiect (finit generat) al unui obiect proiectiv al lui $\mathcal{A}$ este weak duo proiectiv.

(ii) Orice obiect proiectiv (finit generat) al lui $\mathcal{A}$ este tare self-CS-Rickart.

(2) Următoarele sunt echivalente:

(i) Orice obiect factor (finit cogenerat) al unui obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este weak duo injectiv.

(ii) Orice obiect injectiv (finit cogenerat) al lui $\mathcal{A}$ este dual tare self-CS-Rickart.

Capitolul 2

Transferul proprietăţii CS-Rickart prin functori

În acest capitol studiem transferul proprietăţii CS-Rickart prin functori între categorii abeliene. Considerăm functori deplin fideli şi perechi de functori adjuncţi între categorii abeliene, sub anumite ipoteze rezonabile. Tratăm aplicaţii la subcategorii Giraud şi co-Giraud, categorii de functori, subcategorii localizante şi colocalizante, triplete de functori adjuncţi, functori Frobenius şi recollement între categorii abeliene. Obţinem consecinţe pentru inelul endomorfismelor modulelor (graduate) şi comodulelor. Cu excepţia rezultatelor citate, toate celelalte rezultate sunt originale şi sunt incluse în articolele proprii [27, 29].

2.1 Transferul prin functori deplin fideli

În general, un functor între categorii abeliene nu păstrează şi nu reflectă proprietăţile (tare) CS-Rickart, cum putem vedea în următoarele exemple.

Exemplul 2.1.1. Considerăm inelul $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16}$ şi functorul covariant uituc $F : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ între categorii de module. Avem astfel că F este un functor fidel şi exact care nu este plin. Reţinem că $\mathbb{Z}_2$ şi $\mathbb{Z}_{16}$ sunt inele drepte self-injective [54, Corollary 3.13]. Atunci $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16}$ este de asemenea un inel drept self-injectiv [54, Corollary 3.11B]. Prin urmare R-modulul drept R este extending [54, Corollary 6.80] şi deci el este self-CS-Rickart. Este de asemenea tare self-CS-Rickart conform Propoziţiei 1.2.4. Dar $\mathbb{Z}$-modul $F(R) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16}$ nu este (tare) self-CS-Rickart.

Exemplul 2.1.2. Pentru orice $\mathbb{Z}$-modul M, notăm cu $t(M)$ cel mai mare submodul cu torsiune al lui M şi prin $d(M)$ cel mai mare submodul divizibil (i.e., injectiv) al lui M. Fie $\mathcal{A}$ categoria $\mathbb{Z}$-modulelor şi $\mathcal{B}$ categoria $\mathbb{Z}$-modulelor cu torsiune. Reţinem că atât $\mathcal{A}$ cât şi $\mathcal{B}$ sunt categorii abeliene. Considerăm functorul covariant $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definit prin $F(M) = t(d(M))$ pe obiecte M ale lui $\mathcal{A}$ şi corespunzător pe omomorfisme. Atunci F este un functor exact la stânga. De asemenea, F este plin, dar nu este fidel [21, Example 4.1]. Considerăm $\mathbb{Z}$-modulul $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ pentru un număr prim p. Atunci $F(M) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ este un $\mathbb{Z}$-modul injectiv cu torsiune, prin urmare el este un obiect injectiv în categoria $\mathcal{B}$. Mai mult, este bine cunoscut faptul că fiecare obiect al lui $\mathcal{B}$ are o anvelopă injectivă, şi anume anvelopa injectivă a unui $\mathbb{Z}$-modul cu torsiune A este $t(E(A))$, unde $E(A)$ este anvelopa injectivă a lui A în $\mathcal{A}$. Atunci obiectul injectiv $F(M)$ al lui $\mathcal{B}$ este obiect self-CS-Rickart în $\mathcal{B}$ conform Corolarului 1.5.2. El este de asemenea tare self-CS-Rickart. Din Corolarul 1.3.2, $\mathbb{Z}$-modulul M nu este self-CS-Rickart, deoarece sumandul său direct $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16}$ nu este self-CS-Rickart. Prin urmare $\mathbb{Z}$-modulul M nu este tare self-CS-Rickart.

Continuăm cu un rezultat despre păstrarea şi reflectarea proprietăţilor (tare) CS-Rickart şi ale dualelor lor prin functori deplin fideli în anumite condiţii potrivite. Pentru un functor covariant $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, notăm cu $\mathrm{Im}(F)$ imaginea esenţială a lui F, care conţine toate obiectele B ale lui $\mathcal{B}$ astfel încât $B \cong F(A)$ pentru un obiect A al lui $\mathcal{A}$.

Teorema 2.1.3. *Fie $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor covariant deplin fidel între categorii abeliene. Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{A}$.*

- *(i) Presupunem că $\mathrm{Im}(F)$ este închisă la subobiecte sau obiecte factor. Dacă F este exact la stânga şi N este (tare) M-CS-Rickart, atunci $F(N)$ este (tare) $F(M)$-CS-Rickart.*
- *(ii) Presupunem că $\mathrm{Im}(F)$ este închisă la sumanzi direcţi. Dacă F este exact la stânga şi $F(N)$ este (tare) $F(M)$-CS-Rickart, atunci N este (tare) M-CS-Rickart.*

Următorul rezultat este imediat.

Corolarul 2.1.4. *Fie $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ o echivalenţă de categorii abeliene, şi fie M, N obiecte ale lui $\mathcal{A}$. Atunci N este (dual) (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă $F(N)$ este (dual) (tare) $F(M)$-CS-Rickart.*

Teorema 2.1.3 poate fi utilizată pentru a produce noi exemple de obiecte (tare) relativ CS-Rickart şi de duale ale lor. Exemplificăm aceasta în următorul exemplu.

Exemplul 2.1.5. Fie $\mathcal{T}$ o clasă de torsiune ereditară (i.e., clasă închisă la subobiecte, coproduse, obiecte factor şi extensii) a unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Atunci $\mathcal{T}$ este categorie abeliană. Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{T}$. Utilizând Teorema 2.1.3 pentru functorul de scufundare $F : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$, urmează astfel că N este (tare) M-CS-Rickart în $\mathcal{T}$ dacă şi numai dacă $F(N)$ este (tare) $F(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{A}$. Spre exemplu, considerăm grupul abelian $G = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{q^n}$ pentru numerele prime diferite p şi q şi întregii pozitivi n. Atunci G este un grup abelian tare self-CS-Rickart. Prin urmare G este tare self-CS-Rickart şi în $\mathcal{T}$.

2.2 Transferul prin functori adjuncţi

În continuare studiem transferul proprietăţilor (dual) relativ CS-Rickart prin functori adjuncţi, impunând anumite condiţii rezonabile. Fie (L, R) o pereche adjunctă de functori covarianţi $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ şi $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ între categorii abeliene. Notăm cu $\varepsilon : LR \to 1_{\mathcal{B}}$ şi $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to RL$ counitatea şi unitatea adjuncţiei respective. Urmând [11], notăm cu $\mathrm{Stat}(R)$ subcategoria plină a lui $\mathcal{B}$ constând din obiectele *R-statice*, adică, obiectele B ale lui $\mathcal{B}$ pentru care $\varepsilon_B : LR(B) \to B$ este izomorfism. De asemenea, notăm cu $\mathrm{Adst}(R)$ subcategoria plină a lui $\mathcal{A}$ care constă din obiecte R-*adstatice*, adică obiectele A din $\mathcal{A}$ pentru care $\eta_A : A \to RL(A)$ este izomorfism. Reţinem că R este deplin fidel dacă şi numai dacă orice obiect al lui $\mathcal{B}$ este R-static, în timp ce L este deplin fidel dacă şi numai dacă orice obiect al lui A este R-adstatic.

Teorema 2.2.1. *Fie $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ categorii abeliene şi (L, R) o pereche adjunctă de functori covarianţi $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ şi $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Presupunem că L este exact şi $M, N \in \mathrm{Stat}(R)$.*

(i) Dacă N este (tare) M-CS-Rickart în $\mathcal{B}$, atunci $R(N)$ este (tare) $R(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{A}$.

(ii) Dacă R reflectă obiectele zero, în particular dacă R este fidel, şi $R(N)$ este (tare) $R(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{A}$, atunci N este (tare) M-CS-Rickart în $\mathcal{B}$.

Principala consecinţă a Teoremei 2.2.1 este următorul rezultat.

Teorema 2.2.2. *Fie $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ categorii abeliene şi (L, R) o pereche adjunctă de functori covarianţi $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ şi $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Presupunem că L este exact şi R este deplin fidel şi M şi N sunt obiecte ale lui $\mathcal{B}$. Atunci N este (tare) M-CS-Rickart în $\mathcal{B}$ dacă şi numai dacă $R(N)$ este (tare) $R(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{A}$.*

2.3 Aplicaţii

Dăm mai multe aplicaţii ale teoremelor noastre, arătând că ipotezele lor sunt adevărate într-o serie de situaţii relevante.

Subcategorii Giraud şi co-Giraud

Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană şi $\mathcal{C}$ o subcategorie plină a lui $\mathcal{A}$. Atunci $\mathcal{C}$ se numeşte subcategorie *reflectivă* (*coreflectivă*) a lui $\mathcal{A}$ dacă functorul incluziune $i : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ are un adjunct la stânga (dreapta). În oricare dinte cele două cazuri, i este deplin fidel. Dacă $\mathcal{C}$ este subcategorie reflectivă (coreflectivă) a lui $\mathcal{A}$ şi adjunctul la stânga (dreapta) al functorului incluziune i păstrează nucleele (conucleele), atunci subcategoria $\mathcal{C}$ se numeşte *Giraud* (*co-Giraud*). În acest caz, adjunctul la sânga (dreapta) al lui i este exact.

Corolarul 2.3.1. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană, $\mathcal{C}$ o subcategorie plină a lui $\mathcal{A}$ şi $i : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ functorul incluziune. Presupunem că $\mathcal{C}$ este subcategorie Giraud a lui $\mathcal{A}$. Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{C}$. Atunci N este (tare) M-CS-Rickart în $\mathcal{C}$ dacă şi numai dacă $i(N)$ este (tare) $i(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{A}$.*

Pentru categorii Grothendieck avem următorul corolar.

Corolarul 2.3.2. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck cu un generator U cu $R = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(U)$. Fie $S = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, -) : \mathcal{A} \to \mathrm{Mod}(R)$, $T : \mathrm{Mod}(R) \to \mathcal{A}$ adjunctul la stânga al lui S şi M şi N obiecte ale lui $\mathcal{A}$. Atunci N este obiect (tare) M-CS-Rickart al lui $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă $S(N)$ este R-modul drept (tare) $S(M)$-CS-Rickart.*

Urmând [33, Section 2.2], fie C o coalgebră peste un corp comutativ k şi ${}^C\mathcal{M}$ categoria (Grothendieck) a C-comodulelor stângi. C-comodulele stângi vor fi identificate cu C^*-modulele raţionale drepte, unde $C^* = \mathrm{Hom}_k(C,k)$. Fie $i : {}^C\mathcal{M} \to \mathrm{Mod}(C^*)$ functorul incluziune şi $\mathrm{Rat} : \mathrm{Mod}(C^*) \to {}^C\mathcal{M}$ functorul care asociază fiecărui C^*-modul drept C^*-submodulul său raţional. Atunci (i, Rat) este o pereche adjunctă. Prin urmare ${}^C\mathcal{M}$ este o subcategorie coreflectivă a lui $\mathrm{Mod}(C^*)$. Dacă C este coalgebră semiperfectă la dreapta, atunci functorul Rat este exact [33, Corollary 3.2.12], prin urmare ${}^C\mathcal{M}$ este o subcategorie co-Giraud a lui $\mathrm{Mod}(C^*)$. Atunci Corolarul 2.3.1 are următoarea consecinţă.

Corolarul 2.3.3. *Fie C o coalgebră semiperfectă la dreapta peste un corp comutativ. Fie M şi N C-comodule stângi. Atunci N este C-comodul stâng dual (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă $i(N)$ este C^*-modul drept dual (tare) $i(M)$-CS-Rickart.*

Categoriile de functori

Reamintim câteva lucruri despre categoriile de functori asociate categoriilor de module, urmând [7, 45]. Fie $\mathrm{Mod}(R)$ şi $\mathrm{Mod}(R^{\mathrm{op}})$ categoriile de R-module drepte şi respectiv R-module stângi. Fie de asemenea $\mathrm{mod}(R)$ categoria R-modulelor drepte finit prezentate. Fie $(\mathrm{mod}(R), \mathrm{Ab})$ categoria functorilor covarianţi de la $\mathrm{mod}(R)$ la categoria Ab a grupurilor abeliene şi $((\mathrm{mod}(R))^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ categoria functorilor contravarianţi de la $\mathrm{mod}(R)$ la Ab. Este bine cunoscut faptul că $(\mathrm{mod}(R), \mathrm{Ab})$ şi $((\mathrm{mod}(R))^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ sunt categorii Grothendieck.

Corolarul 2.3.4.
(1) Fie M şi N R-module drepte. Atunci N este R-modul drept (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ este obiect (tare) $\mathrm{Hom}_R(-,M)$-CS-Rickart în $((\mathrm{mod}(R))^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$.

(2) Fie M şi N R-module stângi. Atunci N este R-modul stâng dual (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă $- \otimes_R N$ este un obiect dual (tare) $- \otimes_R M$-CS-Rickart al lui $(\mathrm{mod}(R), \mathrm{Ab})$.

Subcategorii localizante şi colocalizante

Avem acum următoarea consecinţă a Teoremei 2.2.2 (sau a Corolarului 2.3.1).

Corolarul 2.3.5. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană local mică, $\mathcal{C}$ o subcategorie Serre a lui $\mathcal{A}$, $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ functorul cât şi M şi N obiecte ale lui $\mathcal{A}/\mathcal{C}$. Presupunem că $\mathcal{C}$ este o subcategorie localizantă a lui $\mathcal{A}$ cu functorul secţiune $S : \mathcal{A}/\mathcal{C} \to \mathcal{A}$. Atunci N este (tare) M-CS-Rickart în $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ dacă şi numai dacă $S(N)$ este (tare) $S(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{A}$.*

Triplete adjuncte

Reamintim că un *triplet adjunct* de functori este un triplet (L, F, R) de functori covarianţi $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ şi $L, R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ astfel încât (L, F) şi (F, R) sunt perechi adjuncte de functori. Atunci F este un functor exact. Se ştie că L este deplin fidel dacă şi numai dacă la fel este şi R [38, Lemma 1.3]. Acum Teorema 2.2.2 are următoarea consecinţă.

Corolarul 2.3.6. *Fie (L, F, R) un triplet adjunct de functori covarianţi $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ şi $L, R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ între categorii abeliene.*

(i) Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{A}$ şi presupunem că F este deplin fidel. Dacă L este exact, atunci N este (tare) M-CS-Rickart în $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă $F(N)$ este (tare) $F(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{B}$.

(ii) Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{B}$ şi presupunem că L sau R este deplin fidel. Atunci N este (tare) M-CS-Rickart în $\mathcal{B}$ dacă şi numai dacă $R(N)$ este (tare) $R(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{A}$.

Fie acum A, C inele şi ${}_CB_A$ un bimodul. Fie $R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ inelul matriceal formal triunghiular construit din A, B, C. Urmând [44, Chapter 4, Section A, Exercises 19 and 20], considerăm functorii covarianţi:

$$\begin{aligned} &J_{23} : \mathrm{Mod}(C) \to \mathrm{Mod}(R), \quad J_{23}(N) = \begin{pmatrix} N\otimes_C B & 0 \\ & N \end{pmatrix}, \\ &J_3 : \mathrm{Mod}(C) \to \mathrm{Mod}(R), \quad J_3(N) = J_{23}(N)/\begin{pmatrix} N\otimes_C B & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}, \\ &P_3 : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(C), \quad P_3(M) = M\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

Atunci (J_{23}, P_3, J_3) este un triplet adjunct [44, Chapter 4, Section A, Exercise 22].

Corolarul 2.3.7. *Considerăm inelul $R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$, unde A, C sunt inele şi ${}_CB_A$ este bimodul. Fie M şi N C-module drepte. Atunci:*

(1) N este C-modul drept (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă $J_3(N)$ este R-modul drept (tare) $J_3(M)$-CS-Rickart.

(2) N este C-modul drept dual (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă $J_{23}(N)$ este R-modul drept dual (tare) $J_{23}(M)$-CS-Rickart.

Urmând [62], reamintim unele noţiuni şi terminologii despre modulele graduate. În cele ce urmează G va fi un grup cu elemenul unitate e şi R va fi un inel G-graduat. Pentru un inel G-graduat $R = \bigoplus_{\sigma\in G} R_\sigma$, notăm prin $\mathrm{gr}(R)$ categoria (Grothendieck) care are ca obiecte R-modulele drepte unitare G-graduate şi ca morfisme morfismele de R-module drepte unitare G-graduate. Considerăm următorii functori:

1. *Functorul indus* $\mathrm{Ind} : \mathrm{Mod}(R_e) \to \mathrm{gr}(R)$ definit după cum urmează: pentru R_e-modul drept N, $\mathrm{Ind}(N)$ este R-modul drept graduat $M = N \otimes_{R_e} R$, unde graduarea lui $M = \bigoplus_{\sigma\in G} M_\sigma$ este dată de $M_\sigma = N_\sigma \otimes_{R_e} R$ pentru fiecare $\sigma \in G$.

2. *Functorul coindus* $\mathrm{Coind} : \mathrm{Mod}(R_e) \to \mathrm{gr}(R)$ definit după cum urmează: pentru un R_e-modul drept N, $\mathrm{Coind}(N)$ este R-modulul drept graduat $M^* = \bigoplus_{\sigma\in G} M'_\sigma$, unde

$$M'_\sigma = \{f \in \mathrm{Hom}_{R_e}(R, N) \mid f(R_{\sigma'}) = 0 \text{ pentru fiecare } \sigma' \neq \sigma^{-1}\}.$$

Corolarul 2.3.8. *Fie R un inel G-graduat şi M şi N R_e-module drepte. Atunci:*

(1) N este R_e-modul drept (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă R-modulul drept graduat $\mathrm{Coind}(N)$ *este (tare)* $\mathrm{Coind}(M)$*-CS-Rickart.*

(2) N este R_e-modul drept dual (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă R-modulul drept graduat $\mathrm{Ind}(N)$ *este dual (tare)* $\mathrm{Ind}(M)$*-CS-Rickart.*

Functori Frobenius

Reamintim că un functor covariant $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se numeşte *Frobenius* dacă există un functor covariant $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ pentru care (F, G, F) (sau (G, F, G)) este triplet adjunct [10]. Atunci F şi G sunt functori exact şi Corolarul 2.3.6 are următoarea consecinţă.

Corolarul 2.3.9. *Fie $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor Frobenius deplin fidel între categorii abeliene şi M şi N obiecte ale lui $\mathcal{A}$. Atunci N este (dual) (tare) M-CS-Rickart în $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă $F(N)$ este (dual) (tare) $F(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{B}$.*

Exemplificăm rezultatul de mai sus cu unele situaţii din categoriile modulelor graduate şi a comodulelor.

Corolarul 2.3.10. *Fie R un inel G-graduat, U :* $\mathrm{gr}(R) \to \mathrm{Mod}(R)$ *functorul uituc şi M, N obiecte ale lui* $\mathrm{gr}(R)$.

(1) Presupunem că G este finit. Atunci N este R-modul drept graduat (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă $U(N)$ este R-modul drept (tare) $U(M)$-CS-Rickart.

(2) N este R-modul drept graduat dual (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă $U(N)$ este R-modul drept dual (tare) $U(M)$-CS-Rickart.

Corolarul 2.3.11. *Fie C o coalgebră finit-dimensională peste un corp comutativ şi $i : {}^{C}\mathcal{M} \to$* $\mathrm{Mod}(C^*)$ *functorul incluziune. Fie M şi N C-comodule stângi. Atunci N este C-comodul stâng (dual) (tare) M-CS-Rickart dacă şi numai dacă $i(N)$ este C^*-modul drept (dual) (tare) $i(M)$-CS-Rickart.*

Recollement

Să ne amintim acum conceptul de recollement de categorii abeliene, urmând [68]. Pentru un functor aditiv $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ între categorii abeliene, notăm cu $\mathrm{Ker}(F)$ nucleul lui F, care constă din toate obiectele A ale lui $\mathcal{A}$ pentru care $F(A) = 0$. Un *recollement* al categoriilor abeliene $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$, notat cu $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, este o diagramă de functori:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "i"] & \mathcal{B} \arrow[l, bend right, "q"'] \arrow[l, bend left, "p"] \arrow[r, "e"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right, "l"'] \arrow[l, bend left, "r"] \end{tikzcd}$$

care satisface următoatrele condiţii: (i) (l, e, r) este un triplet adjunct; (ii) (q, i, p) este un triplet adjunct; (iii) i, l şi r sunt deplin fideli; (iv) $\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(e)$.

Acum Corolarul 2.3.6 are următoarea consecinţă.

Corolarul 2.3.12. *Fie $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ un recollement de categorii abeliene ca mai sus.*

(i) Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{A}$. Dacă q este exact, atunci N este (tare) M-CS-Rickart în $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă $i(N)$ este (tare) $i(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{B}$.

(ii) Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{C}$. Atunci N este (tare) M-CS-Rickart în $\mathcal{C}$ dacă şi numai dacă $r(N)$ este (tare) $r(M)$-CS-Rickart în $\mathcal{B}$.

Exemplul 2.3.13. Urmând [56, Example 3.13], considerăm inelul $A = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}$ şi subgrupul $G = \{1, g\}$ al lui $\mathrm{Aut}(A)$, unde g este conjugarea prin $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Considerăm inelul grupal strâmb $A * G$ şi inelul A^G al elementelor lui A fixate de automorfismele lui G. Reţinem că A este un $A * G$-modul stâng şi drept, precum şi un A^G-modul stâng şi drept. Urmând [68, Example 2.9], există omomorfismele de bimodule $\phi : A \otimes_{A^G} A \to A * G$ şi $\psi : A \otimes_{A*G} A \to A^G$, care dau inelul Morita $\Lambda = \Lambda_{(\phi,\psi)} = \begin{pmatrix} A^G & A \\ A & A * G \end{pmatrix}$. Mai mult, utilizând idempotentul $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ al lui Λ, acesta ne dă următorul recollement de categorii de module (a se vedea [68, Definition 2.1]):

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathrm{Mod}(A^G/\mathrm{Im}(\psi)) \arrow[r, "i"] & \mathrm{Mod}(\Lambda) \arrow[l, bend right, "-\otimes_\Lambda (A^G/\mathrm{Im}(\psi))"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_\Lambda(A^G/\mathrm{Im}(\psi), -)"] \arrow[r, "(-)e"] & \mathrm{Mod}(A * G) \arrow[l, bend right, "-\otimes_{A*G} e\Lambda"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{A*G}(\Lambda e, -)"]
\end{tikzcd}$$

Se ştie că A este un $A * G$-modul drept self-CS-Rickart din Exemplul 1.2.6. Atunci $\mathrm{Hom}_{A*G}(\Lambda e, A)$ este Λ-modul drept self-CS-Rickart conform Corolarului 2.3.12.

2.4 Inele de endomorfisme ale obiectelor self-CS-Rickart

În această secţiune dăm unele aplicaţii la inelele de endomorfisme ale modulelor (graduate) şi ale comodulelor. Începem cu un rezultat particular pentru module, pentru care avem nevoie să introducem următoarele concepte.

Definiţia 2.4.1. Un R-modul drept M se numeşte:

(1) *im-local-retractabil* dacă pentru fiecare monomorfism $k : K \to M$ şi pentru fiecare $x \in K$, există un omomorfism $h : M \to K$ astfel încât $x \in \mathrm{Im}(hk)$.

(2) *im-local-coretractabil* dacă pentru orice epimorfism $c : M \to C$ şi pentru fiecare $z \in C$, există un omomorfism $h : C \to M$ astfel încât $z \in \mathrm{Im}(ch)$.

Corolarul 2.4.2. *Fie M un R-modul drept şi $S = \mathrm{End}_R(M)$.*

(1) Dacă M este im-local-retractabil şi S este un S-modul drept (tare) self-CS-Rickart, atunci M este un R-modul (tare) self-CS-Rickart.

(2) Dacă M este im-local-coretractabil şi S este S-modul stâng dual (tare) self-CS-Rickart, atunci M este R-modul drept dual (tare) self-CS-Rickart.

Urmând [47], un functor covariant $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ între categorii abeliene se numeşte *exact fidel* arătând că şirul $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$ este exact dacă şi numai dacă şirul $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ este exact. Fie ${}_SM_R$ un bimodul. R-modulul drept M se numeşte *proiectiv fidel* dacă functorul $\mathrm{Hom}_R(M,-) : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S)$ este exact fidel. R-modulul drept M se numeşte *injectiv fidel* dacă functorul $\mathrm{Hom}_R(-,M) : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(S^{\mathrm{op}})$ este exact fidel. S-modulul stâng M se numeşte *plat fidel* dacă functorul $- \otimes_S M : \mathrm{Mod}(S) \to \mathrm{Mod}(R)$ este exact fidel.

Corolarul 2.4.3. *Fie M un R-modul drept şi $S = \mathrm{End}_R(M)$.*

(1) Presupunem că M este S-modul stâng plat.

- *(i) Dacă M este R-modul drept (tare) self-CS-Rickart, atunci S este S-modul drept (tare) self-CS-Rickart.*
- *(ii) Dacă M este R-modul drept proiectiv fidel şi S este S-modul drept (tare) self-CS-Rickart, atunci M este R-modul drept (tare) self-CS-Rickart.*

(2) Presupunem că M este R-modul drept proiectiv.

- *(i) Dacă S este S-modul drept (tare) dual self-CS-Rickart, atunci M este R-modul drept dual (tare) self-CS-Rickart.*
- *(ii) Dacă M este S-modul stâng plat fidel şi M este R-modul drept dual (tare) self-CS-Rickart, atunci S este S-modul drept dual (tare) self-CS-Rickart.*

(3) Presupunem că M este un S-modul stâng injectiv.

- *(i) Dacă M este R-modul drept dual (tare) self-CS-Rickart, atunci S este un S-modul stâng (tare) self-CS-Rickart.*
- *(ii) Dacă M este R-modul drept injectiv fidel şi S este S-modul stâng (tare) self-CS-Rickart, atunci M este R-modul drept dual (tare) self-CS-Rickart.*

Capitolul 3

Obiecte CS-Baer în categorii abeliene

Introducem şi studiem obiectele CS-Baer în categorii abeliene, care formează o subclasă de obiecte CS-Rickart, şi generalizează atât obiectele Baer cât şi obiectele extending. Arătăm că teoria despre obiecte CS-Rickart poate fi aplicată în studiul obiectelor CS-Baer. Cercetăm obiectele CS-Baer în relaţie cu obiectele Baer, obiectele extending, obiecte care au anumite proprietăţi ale intersecţiei sumanzilor şi obiecte CS-Rickart. Studiem de asemenea (co)produse de obiecte CS-Baer şi determinăm structura completă a modulelor dual self-CS-Baer peste domenii Dedekind. În final, tratăm clase ale căror obiecte sunt self-CS-Baer, transferul proprietăţii CS-Baer prin functori şi dăm aplicaţii la inelele de endomorfisme. Exceptând rezultatele citate, toate celelalte rezultate sunt originale şi sunt incluse în articolele proprii [18] şi [30].

3.1 Obiecte relativ CS-Baer

Introducem noţiunile de bază ale acestui capitol, şi anume obiectele (tare) CS-Baer şi dualele lor în categorii abeliene.

Definiţia 3.1.1. Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$.

(1) Dacă $\mathcal{A}$ este AB3*, atunci N se numeşte:

 (i) *(tare) M-CS-Baer* dacă pentru fiecare familie $(f_i)_{i\in I}$ de morfisme $f_i : M \to N$, $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(f_i)$ este esenţial într-un sumand direct (deplin invariant) al lui M.

 (ii) *(tare) self-CS-Baer* dacă N este (tare) N-CS-Baer.

(2) Dacă $\mathcal{A}$ este AB3, atunci N se numeşte:

 (i) *dual (tare) M-CS-Baer* dacă pentru fiecare familie $(f_i)_{i\in I}$ de morfisme $f_i : M \to N$, $\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(f_i)$ stă deasupra unui sumand direct (deplin invariant) al lui N.

 (ii) *dual (tare) self-CS-Baer* dacă N este dual (tare) N-CS-Baer.

Obiectele relativ CS-Baer sunt legate de obiectele tare relativ CS-Baer precum urmează.

Propoziţia 3.1.2. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*, şi fiecare sumand direct al lui M este izomorf cu un subobiect al lui N. Atunci N este tare M-CS-Baer dacă şi numai dacă N este M-CS-Baer şi M este weak duo.*

Următorul corolar generalizează rezultatul [63, Theorem 2] din teoria modulelor şi va fi utilizat implicit de mai multe ori pe parcursul tezei.

Corolarul 3.1.3. *Fie M un obiect al unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*. Atunci următoarele sunt echivalente:*

(i) M este tare self-CS-Baer.

(ii) M este self-CS-Baer şi weak duo.

(iii) M este self-CS-Baer şi $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ *este abelian.*

În continuare vom da unele exemple şi contraexemple de obiecte (dual) relativ CS-Baer şi de obiecte (dual) tare relativ CS-Baer. Alte exemple în legătură cu celelalte concepte ale lucrării vor fi date mai târziu, în secţiunile corespunzătoare.

Exemplul 3.1.4. Acum considerăm unele exemple în categoriile de module.

Ca în Exemplul 1.2.5, considerăm inelul matriceal $R = \begin{pmatrix} K & M \\ 0 & D \end{pmatrix}$, unde K este un corp comutativ, D este un domeniu de integritate care nu este corp şi conţine pe K, radicalul Jacobson $\mathrm{Rad}(D) = 0$, şi M este un D-modul fără torsiune. Un exemplu particular poate fi $R = \begin{pmatrix} K & K[X] \\ 0 & K[X] \end{pmatrix}$. Atunci R este R-modul drept self-CS-Baer. Nu este R-modul drept tare self-CS-Baer, deoarece $\mathrm{End}_R(R) \cong R$ nu este abelian. Reţinem de asemenea că R-modul drept R nu este dual (tare) self-CS-Baer, deoarece nu este dual (tare) self-CS-Rickart din Exemplul 1.2.5.

Exemplul 3.1.5. Orice obiect uniserial al unei categorii abeliene este tare self-CS-Baer şi dual tare self-CS-Baer, dar nu este nici (tare) self-Baer şi nici dual (tare) self-Baer. În particular, coalgebra divided power C (a se vedea Exemplul 1.2.7) este un C-comodul tare self-CS-Baer şi dual tare self-CS-Baer.

3.2 Obiecte relativ CS-Baer şi obiecte relativ Baer

Orice obiect relativ Baer al unei categorii abeliene este relativ CS-Baer, dar reciproca nu este întotdeauna adevărată după cum arată exemplul următor.

Exemplul 3.2.1. Fie $n > 1$ un întreg, p un număr prim, $M_1 = \mathbb{Z}_{p^n}$ şi $M_2 = \mathbb{Z}_{p^n} \oplus \mathbb{Z}_{p^{n+1}}$. Atunci M_1 şi M_2 sunt extending şi weak duo (a se vedea [60, Proposition A.12] şi [65, Theorem 3.10]) şi prin urmare ele sunt tare self-CS-Baer din Corolarul 3.1.3. Mai mult, M_1 şi M_2 nu sunt tare self-Baer conform [25, Corollary 6.7].

Teorema 3.2.2. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*. Atunci N este (tare) M-CS-Baer şi N este M-$\mathcal{K}$-nesingular dacă şi numai dacă N este (tare) M-Baer.*

Următorul corolar generalizează rezultatul [63, Theorem 1] din teoria modulelor.

Corolarul 3.2.3. *Fie M un obiect al unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*. Atunci M este (tare) self-CS-Baer şi M-$\mathcal{K}$-nesingular dacă şi numai dacă M este (tare) self-Baer.*

Corolarul 3.2.4. *Orice R-modul drept nesingular (tare) self-CS-Baer este (tare) self-Baer şi orice R-modul drept necosingular dual (tare) self-CS-Baer este dual (tare) self-Baer.*

3.3 Obiecte relativ CS-Baer şi obiecte extending

În această secţiune suntem interesaţi de relaţionarea proprietăţii (dual) relativ CS-Baer cu proprietatea extending (lifting). Reţinem că orice obiect (dual) self-Rickart şi orice obiect extending (lifting) al unei categorii abeliene $\mathcal{A}$ este (dual) self-CS-Rickart conform definiţiilor.

Exemplul 3.3.1. (i) Am văzut că $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ este self-CS-Baer, dar nu este weak duo. El nu este nici extending (a se vedea [60, p. 19]) şi nici tare extending.

(ii) $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Q}$ este dual tare self-CS-Baer, dar nu este (tare) lifting. Reţinem că pentru orice $0 \neq f \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q})$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Q}$ este indecompozabil.

Pentru obiectele M şi N ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$, notăm $U = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$.

Pentru orice subobiect X al lui M şi orice subobiect Z al lui U, notăm:

$$l_U(X) = \{f \in U \mid X \subseteq \mathrm{Ker}(f)\}, \quad r_M(Z) = \bigcap_{f \in Z} \mathrm{Ker}(f).$$

Pentru orice subobiect Y al lui N şi orice subobiect Z al lui U, notăm:

$$l'_U(Y) = \{f \in U \mid \mathrm{Im}(f) \subseteq Y\}, \quad r'_N(Z) = \sum_{f \in Z} \mathrm{Im}(f).$$

Definiţia 3.3.2. Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Atunci N se numeşte:

(i) *$\mathcal{E}$-M-$\mathcal{K}$-nesingular* dacă pentru orice morfism $f : M \to N$ din $\mathcal{A}$, $\mathrm{Ker}(f)$ esenţial într-un sumand direct al lui M implică $f = 0$.

(ii) *$\mathcal{E}$-M-$\mathcal{K}$-conesingular* dacă pentru orice subobiecte X şi Y ale lui M astfel încât $X \subseteq Y$, $l_U(X) = l_U(Y)$ implică X esenţial în Y.

Teorema 3.3.3. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*. Dacă N este (tare) M-CS-Baer şi $\mathcal{E}$-M-$\mathcal{K}$-conesingular, atunci M este (tare) extending.*

Corolarul 3.3.4. *Fie M un obiect ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*. Dacă M este (tare) self-CS-Baer şi $\mathcal{E}$-M-$\mathcal{K}$-conesingular, atunci M este (tare) extending.*

Teorema 3.3.5. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3* şi orice sumand direct al lui M este izomorf cu un subobiect al lui N. Dacă M este (tare) extending şi N este $\mathcal{E}$-M-$\mathcal{K}$-nesingular, atunci N este (tare) M-CS-Baer şi $\mathcal{E}$-M-$\mathcal{K}$-conesingular.*

Corolarul 3.3.6. *Fie M un obiect al unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*. Dacă M este (tare) extending şi $\mathcal{E}$-M-$\mathcal{K}$-nesingular, atunci M este (tare) self-CS-Baer şi $\mathcal{E}$-M-$\mathcal{K}$-conesingular.*

Continuăm cu următorul rezultat în categoria modulelor, care arată, de asemenea, că proprietatea dual (tare) self-CS-Baer este simetrică stânga-dreapta pentru inele.

Propoziţia 3.3.7. *Fie R un inel unitar. Atunci următoarele sunt echivalente:*

(i) R este R-modul drept dual (tare) self-CS-Baer.

(ii) R este R-modul (tare) lifting.

(iii) R este un inel (abelian) semiperfect.

Dăm, de asemenea, o caracterizare legată de inelele dual (tare) self-CS-Rickart, care arată că proprietatea dual (tare) self-CS-Rickart este simetrică stânga-dreapta pentru inele (a se vedea [75, Proposition 2.12] pentru o demonstraţie diferită).

Propoziţia 3.3.8. *Fie R un inel unitar. Atunci R este R-modul drept dual (tare) self-CS-Rickart dacă şi numai dacă R este inel (abelian) semiregular.*

3.4 Obiecte relativ CS-Baer şi obiecte ESSIP

Vom vedea în secţiunea următoare că obiectele CS-Baer şi CS-Rickart pot fi legate prin intermediul unor condiţii care implică sumanzii direcţi. Pentru a ajunge acolo trebuie să pregătim cadrul necesar.

În studiul obiectelor (tare) self-CS-Rickart, este util să considerăm următoarele concepte care generalizează SIP (SSIP).

Definiţia 3.4.1. Un obiect M al unei categorii abeliene $\mathcal{A}$ cu AB3* se numeşte:

(1) *SIP-extending* (*SSIP-extending*) dacă pentru orice două (familie de) subobiecte ale M care sunt esenţiale în sumanzi direcţi ai lui M, intersecţia lor este esenţială într-un sumand direct al lui M.

(2) *strict SIP-extending* (*strict SSIP-extending*) dacă pentru orice două (familie de) subobiecte ale lui M care sunt esenţiali în sumanzi direcţi ai lui M, intersecţia lor este esenţială într-un sumand direct deplin invariant al lui M.

(3) *ESIP* (*ESSIP*) dacă pentru orice doi (familie de) sumanzi direcţi ai lui M, intersecţia lor este esenţială într-un sumand direct al lui M.

(4) *strict ESIP* (*strict ESSIP*) dacă pentru orice doi (familie de) sumanzi direcţi ai lui M, intersecţia lor este esenţială într-un sumand direct deplin invariant al lui M.

Lema 3.4.2. *Fie M un obiect al unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3* şi soclul* $\mathrm{Soc}(M)$ *al lui M este esenţial în M. Atunci M este (strict) SSIP-extending dacă şi numai dacă M este (strict) ESSIP.*

Teorema 3.4.3. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3* şi orice sumand direct al lui M este izomorf cu un subobiect al lui N. Dacă N este (tare) M-CS-Baer, atunci M este (strict) $ESSIP$.*

Corolarul 3.4.4. *Fie M un obiect al unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*. Atunci orice obiect (tare) self-CS-Baer este (strict) $ESSIP$.*

În general reciproca corolarului de mai sus nu este adevărată. Cu toate acestea, avem următoarea proprietate.

Lema 3.4.5. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Dacă $\mathcal{A}$ este AB3* şi $M \oplus N$ este (strict) ESSIP, atunci N este (tare) M-CS-Baer.*

Corolarul 3.4.6. *Fie M un obiect al unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Dacă $\mathcal{A}$ este AB3* şi $M \oplus M$ este (strict) ESSIP, atunci M este (tare) self-CS-Baer.*

3.5 Obiecte relativ CS-Baer şi obiecte relativ CS-Rickart

Orice obiect relativ CS-Baer este, în mod evident, relativ CS-Rickart. Reciproca nu este în general adevărată, după cum putem vedea în exemplul următor.

Exemplul 3.5.1. Considerăm $\mathbb{Z}$-modulul $M = \mathbb{Z}^{(\mathbb{R})}$. Din [56, Remark 2.28], M nu este self-Baer, dar el este self-Rickart şi prin urmare M este self-CS-Rickart. Deoarece $\mathbb{Z}$ este nesingular, la fel este şi M [44, Proposition 1.22]. Acum Corolarul 3.2.4 ne permite să deducem că M nu este self-CS-Baer.

Următoarea propoziţie arată că putem utiliza teoria obiectelor relativ CS-Rickart pentru a dezvolta teoria obiectelor relativ CS-Baer în categorii abeliene. Exemplificăm aplicaţiile ei de mai multe ori pe parcursul tezei.

Propoziţia 3.5.2. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*. Atunci N este (tare) M-CS-Baer dacă şi numai dacă N^I este (tare) M-CS-Rickart pentru orice mulţime I.*

În continuare arătăm cum noţiunile de obiect (strict) SSIP-extending şi cele de obiect (strict) ESSIP sunt legate de cea de obiect (tare) CS-Baer.

Teorema 3.5.3. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*. Dacă N este (tare) M-CS-Rickart şi M este (strict) SSIP-extending, atunci N este (tare) M-CS-Baer. Reciproca este adevărată dacă orice sumand direct al lui M este izomorf cu un subobiect al lui N şi* $\mathrm{Soc}(M)$ *este un subobiect esenţial al lui M.*

Următorul corolar generalizează rezultatul [63, Theorem 3] din teoria modulelor.

Corolarul 3.5.4. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*. Dacă M este (tare) self-CS-Rickart şi (strict) SSIP-extending, atunci M este (tare) self-CS-Baer. Reciproca este adevărată dacă* $\mathrm{Soc}(M)$ *este un subobiect esenţial al lui M.*

Prezentăm câteva exemplificări ale Corolarului 3.5.4 în categoria modulelor şi în cea a comodulelor.

Corolarul 3.5.5. *Fie R un inel unitar şi M un R-modul drept.*

(1) Presupunem că M este finit cogenerat sau R este un inel semiartinian drept. Atunci M este (tare) self-CS-Baer dacă şi numai dacă M este (tare) self-CS-Rickart şi (strict) SSIP-extending.

(2) Presupunem că M este finit generat sau R este inel max drept. Atunci M este dual (tare) self-CS-Baer dacă şi numai dacă M este dual (tare) self-CS-Rickart şi (strict) SSSP-lifting.

Corolarul 3.5.6. *Fie C o coalgebră peste un corp comutativ şi fie M un C-comodul stâng. Atunci:*

(1) M este (tare) self-CS-Baer dacă şi numai dacă M este (tare) self-CS-Rickart şi (strict) SSIP-extending.

(2) Dacă C este semiperfectă la dreapta, atunci M este dual (tare) self-CS-Baer dacă şi numai dacă M este dual (tare) self-CS-Rickart şi (strict) SSSP-lifting.

3.6 Coproduse ale obiectelor relativ CS-Baer

Acum analizăm comportarea obiectelor (tare) relativ CS-Baer cu privire la sumanzi direcţii şi (co)produse.

Corolarul 3.6.1. *Fie $r : M \to M'$ un epimorfism şi $s : N' \to N$ un monomorfism într-o categorie abeliană $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3* şi r este retractă. Dacă N este (tare) M-CS-Baer, atunci N' este (tare) M'-CS-Baer.*

Următorul corolar generalizează rezultatul [63, Theorem 4] din teoria modulelor.

Corolarul 3.6.2. *Fie M şi N obiecte ale unei categorii abeliene $\mathcal{A}$, M' un sumand direct al lui M şi N' un sumand direct al lui N. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*. Dacă N este (tare) M-CS-Baer, atunci N' este (tare) M'-CS-Baer.*

Exemplul 3.6.3. Considerăm inelul $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ şi R-modulele drepte $M_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$. Deoarece M_1 şi M_2 sunt R-module drepte self-Baer, M_1 şi M_2 sunt self-CS-Baer. Dar am văzut în Exemplul 1.4.6 că $R = M_1 \oplus M_2$ nu este R-modul drept self-CS-Rickart, prin urmare R nu este R-modul drept self-CS-Baer.

Teorema 3.6.4. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*. Fie $M, N_1, \ldots, N_n$ obiecte ale lui $\mathcal{A}$. Atunci $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ este (tare) M-CS-Baer dacă şi numai dacă N_i este (tare) M-CS-Baer pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Teorema 3.6.5. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană. Presupunem că $\mathcal{A}$ este AB3*. Fie M un obiect (strict) SSIP-extending al lui $\mathcal{A}$ şi $(N_i)_{i\in I}$ o familie de obiecte ale lui $\mathcal{A}$. Atunci $\prod_{i\in I} N_i$ este (tare) M-CS-Baer dacă şi numai dacă N_i este (tare) M-CS-Baer pentru fiecare $i \in I$.*

În continuare studiem comportarea proprietăţii (tare) self-CS-Baer cu privire la descompunerile în sume directe.

Teorema 3.6.6. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană şi $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ o descompunere în sumă directă în $\mathcal{A}$ pentru o mulţime finită I.*

(i) Dacă $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_i, M_j) = 0$ pentru fiecare $i, j \in I$ cu $i \neq j$, atunci M este self-CS-Baer dacă şi numai dacă M_i este self-CS-Baer pentru fiecare $i \in I$.

(ii) M este tare self-CS-Baer dacă şi numai dacă M_i este tare self-CS-Baer pentru fiecare $i \in I$ şi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_i, M_j) = 0$ pentru fiecare $i, j \in I$ cu $i \neq j$.

În cazul categoriilor de module, putem adăuga condiţii care ne permit să ne ocupăm de descompuneri în sume directe (posibil) infinite după cum urmează.

Teorema 3.6.7. *Fie R un inel unitar şi $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ o descompunere în sumă directă a R-modulului drept M în submodulele M_i astfel încât pentru fiecare submodul L al lui M, $L = \bigoplus_{i\in I}(L \cap M_i)$. Atunci M este (tare) self-CS-Baer dacă şi numai dacă M_i este (tare) self-CS-Baer pentru fiecare $i \in I$.*

3.7 Module dual self-CS-Baer peste domenii Dedekind

Scopul acestei secţiuni este să determinăm structura modulelor dual (tare) self-CS-Baer peste domenii Dedekind. Următoarea teoremă arată că putem reduce problema la cazul modulelor peste inele de valuare discretă.

Fie M un modul peste un domeniu Dedekind R. Notăm cu $T(M)$ submodulul cu torsiune al lui M, i.e., $T(M) = \{x \in M \mid \mathrm{Ann}_R(x) \neq 0\}$, iar cu $\mathbf{P}$ notăm mulţimea idealelor prime nenule ale lui R. Pentru orice $\mathfrak{p} \in \mathbf{P}$, componenta $\mathfrak{p}$-primară a lui M va fi notată $T_{\mathfrak{p}}(M)$, adică, $T_{\mathfrak{p}}(M) = \{x \in M \mid \mathfrak{p}^n x = 0$ pentru un întreg $n \geq 0\}$.

Teorema 3.7.1. *Fie R un domeniu Dedekind care nu este inel local cu corpul de fracţii K şi M un R-modul. Atunci următoarele sunt echivalente:*

(i) M este un modul dual self-CS-Baer;

(ii) $M = T(M) \oplus L$ astfel încât $T(M)$ este modul dual self-CS-Baer şi $L \cong K^{(I)}$ pentru o mulţime I;

(iii) $M = \left(\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathbf{P}} T_{\mathfrak{p}}(M)\right) \oplus L$ *astfel încât fiecare* $T_p(M)$ $(\mathfrak{p} \in \mathbf{P})$ *este* $R_{\mathfrak{p}}$*-modul dual self-CS-Baer şi* $L \cong K^{(I)}$ *pentru o mulţime* I.

Acum scopul nostru este de a descrie structura modulelor duale self-CS-Baer peste inele de valuare discretă. În restul acestei secţiuni presupunem că R este un inel de valuare discretă cu idealul maximal $\mathfrak{m}$, corpul de fracţii K şi $Q = K/R$.

Pentru numerele naturale n_1, n_2, ..., n_s, notăm cu $B(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ suma directă de copii arbitrare ale lui $R/\mathfrak{m}^{n_1}$, $R/\mathfrak{m}^{n_2}$, ..., $R/\mathfrak{m}^{n_s}$.

Teorema 3.7.2. *Fie* R *un inel de valuare discretă cu idealul maximal* $\mathfrak{m}$*, corpul de fracţii* K *şi* $Q = K/R$*. Fie* I_1 *şi* I_2 *două mulţimi şi* a, b, c *şi* n *întregi nenuli. Atunci un* R*-modul* M *este dual self-CS-Baer dacă şi numai dacă* M *este izomorf cu unul dintre următoarele module: (i)* $K^a \oplus Q^b \oplus R^c$ *cu* $a \leq 1$ *dacă* R *este incomplet, sau; (ii)* $K^{(I_1)} \oplus Q^{(I_2)} \oplus B(n)$*, sau; (iii)* $K^{(I_1)} \oplus B(n, n+1)$.

Fie R un domeniu Dedekind cu corpul de fracţii K şi $\mathfrak{p}$ un ideal prim al lui R. Prin $B_{\mathfrak{p}}(n_1, \ldots, n_s)$ notăm suma directă de copii arbitrare ale lui $R/\mathfrak{p}^{n_1}$, $R/\mathfrak{p}^{n_2}$, ..., $R/\mathfrak{p}^{n_s}$ pentru întregii nenuli n_1, n_2, ..., n_s. Vom nota cu $R(\mathfrak{p}^{\infty})$ componenta $\mathfrak{p}$-primară a R-modulului cu torsiune K/R. Combinând Teoremele 3.7.1 şi 3.7.2, obţinem următorul rezultat.

Teorema 3.7.3. *Fie* R *un domeniu Dedekind care nu este inel local cu corpul de fracţii* K *şi* R*-modulul* M*. Atunci următoarele sunt echivalente:*

(i) M *este modul dual self-CS-Baer;*

(ii) $M = (\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathbf{P}} T_{\mathfrak{p}}(M)) \oplus L$ *astfel încât* $L \cong K^{(\Lambda)}$ *pentru o mulţime* Λ *şi pentru fiecare ideal prim nenul* $\mathfrak{p}$ *al lui* R, $T_{\mathfrak{p}}(M) \cong R(\mathfrak{p}^{\infty})^{(\Lambda)} \oplus B_{\mathfrak{p}}(n)$ *sau* $T_{\mathfrak{p}}(M) \cong B_{\mathfrak{p}}(n, n+1)$*, unde* Λ *este o mulţime şi* n *este un întreg pozitiv.*

În continuare, expunem câteva exemple de module dual self-CS-Rickart care nu sunt dual self-CS-Baer.

Exemplul 3.7.4. Fie R un inel de valuare discretă cu corpul de fracţii K. Comparând [75, Theorem 3.14] cu Teorema 3.7.2, obţinem mai multe exemple de R-module dual self-CS-Rickart care nu sunt dual self-CS-Baer. Spre exemplu, pentru orice întreg pozitiv n, R-modulele $K^{(\mathbb{N})} \oplus R^n$, $(K/R)^{(\mathbb{N})} \oplus R^n$ şi $K^{(\mathbb{N})} \oplus (K/R)^{(\mathbb{N})} \oplus R^n$ sunt dual self-CS-Rickart, dar nu sunt dual self-CS-Baer.

Combinând Teoremele 3.6.6 şi 3.6.7, Teoremele 3.7.2 şi 3.7.3, obţinem următorul corolar.

Corolarul 3.7.5. *Fie* R *un domeniu Dedekind cu corpul de fracţii* K *şi fie* M *un* R*-modul.*

(i) Dacă R *este un inel de valuare discretă, atunci* M *este dual tare self-CS-Baer dacă şi numai dacă* $M \cong R$ *sau* $M \cong K$ *sau* $M \cong K/R$ *sau* $M \cong R/\mathfrak{m}^n$ *sau* $M \cong K \oplus R/\mathfrak{m}^n$ *pentru un întreg pozitiv* n.

(ii) Dacă R *nu este local, atunci* M *este dual tare self-CS-Baer dacă şi numai dacă una dintre următoarele condiţii este îndeplinită:*

(a) $M = \left(\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathbf{P}} T_{\mathfrak{p}}(M)\right) \oplus L$ *cu* $L \cong K$ *şi pentru fiecare ideal prim nenul* $\mathfrak{p}$ *al lui* R*, există un întreg pozitiv* n_p *depinzând de* $\mathfrak{p}$ *astfel încât* $T_{\mathfrak{p}}(M) \cong R/\mathfrak{p}^{n_p}$.

(b) $M = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathbf{P}} T_{\mathfrak{p}}(M)$ *astfel încât pentru fiecare ideal prim nenul* $\mathfrak{p}$ *al lui* R*,* $T_{\mathfrak{p}}(M) \cong R(\mathfrak{p}^{\infty})$ *sau* $T_{\mathfrak{p}}(M) \cong R/\mathfrak{p}^{n_p}$ *pentru un întreg pozitiv* n_p *care depinde de* $\mathfrak{p}$.

Exemplul 3.7.6. Fie R un domeniu Dedekind cu corpul de fracţii K. Comparând Teorema 3.7.3 şi Corolarul 3.7.5, vedem că $K^{(\mathbb{N})}$ este dual self-CS-Baer, dar nu este dual tare self-CS-Baer.

3.8 Clase ale căror obiecte sunt self-CS-Baer

În această secţiune obţinem rezultate despre clase ale căror obiecte sunt (tare) self-CS-Baer.

Teorema 3.8.1. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană. Presupunem că $\mathcal{A}$ are AB3* şi suficiente obiecte injective. Fie $\mathcal{C}$ o clasă de obiecte ale lui $\mathcal{A}$ care este închisă la sume directe binare şi conţine toate obiectele injective ale lui $\mathcal{A}$. Atunci următoarele sunt echivalente:*

(i) *Orice obiect al lui $\mathcal{C}$ este (tare) self-CS-Baer.*

(ii) *Orice obiect al lui $\mathcal{C}$ este (strict) ESSIP.*

(iii) *Orice obiect al lui $\mathcal{C}$ este (tare) self-CS-Rickart.*

(iv) *Orice obiect al lui $\mathcal{C}$ este (strict) SIP-extending.*

(v) *Orice obiect al lui $\mathcal{C}$ este (tare) extending.*

Corolarul 3.8.2. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană. Dacă $\mathcal{A}$ are AB3* , atunci următoarele sunt echivalente:*

(i) *Orice obiect al lui $\mathcal{A}$ are o anvelopă injectivă.*

(ii) *$\mathcal{A}$ are suficiente obiecte injective şi orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este self-CS-Baer.*

(iii) *$\mathcal{A}$ are suficiente obiecte injective şi orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este ESSIP.*

(iv) *$\mathcal{A}$ are suficiente obiecte injective şi orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este self-CS-Rickart.*

(v) *$\mathcal{A}$ are suficiente obiecte injective şi orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este SIP-extending.*

(vi) *$\mathcal{A}$ are suficiente obiecte injective şi orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este extending.*

Exemplificăm aceste rezultate în categoria modulelor după cum urmează.

Corolarul 3.8.3. *Următoarele sunt adevărate pentru un inel unitar R cu radicalul Jacobson $J(R)$:*

(i) *Orice R-modul drept este self-CS-Baer.*

(ii) *Orice R-modul drept este ESSIP.*

(iii) *Orice R-modul drept este self-CS-Rickart.*

(iv) Orice R-modul drept este SIP-extending.

(v) Orice R-modul drept este extending.

(vi) Orice R-modul drept este dual self-CS-Baer.

(vii) Orice R-modul drept este LSSSP.

(viii) Orice R-modul drept este dual self-CS-Rickart.

(ix) Orice R-modul drept este SSP-lifting.

(x) Orice R-modul drept este lifting.

(xi) R este un inel serial artinian stâng şi drept cu $(J(R))^2 = 0$.

Corolarul 3.8.4. *Următoarele sunt adevărate pentru un inel unitar R:*

(i) R este perfect drept.

(ii) Orice R-modul drept proiectiv este dual self-CS-Baer.

(iii) Orice R-modul drept proiectiv este LSSSP.

(iv) Orice R-modul drept proiectiv este dual self-CS-Rickart.

(v) Orice R-modul drept proiectiv este SSP-lifting.

(vi) Orice R-modul drept proiectiv este lifting.

Teorema 3.8.5. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie Grothendieck.*

(1) Presupunem că $\mathcal{A}$ are suficiente obiecte proiective şi clasa obiectelor proiective este închisă la produse. Atunci următoarele sunt echivalente:

(i) Orice obiect proiectiv al lui $\mathcal{A}$ este slab ereditar.

(ii) Orice obiect proiectiv al lui $\mathcal{A}$ este self-CS-Baer.

(iii) Orice obiect proiectiv al lui $\mathcal{A}$ este ESSIP.

(iv) Orice obiect proiectiv al lui $\mathcal{A}$ este self-CS-Rickart.

(v) Orice obiect proiectiv al lui $\mathcal{A}$ este SIP-extending.

(2) Presupunem că $\mathcal{A}$ are suficiente obiecte injective şi clasa obiectelor injective este închisă la coproduse. Atunci următoarele sunt echivalente:

(i) Orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este slab coereditar.

(ii) Orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este dual self-CS-Baer.

(iii) Orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este LSSSP.

(iv) Orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este dual self-CS-Rickart.

(v) Orice obiect injectiv al lui $\mathcal{A}$ este SSP-lifting.

Corolarul 3.8.6. *Fie R un inel unitar.*

(1) Presupunem că R este perfect drept şi coerent stâng. Atunci următoarele sunt echivalente:

(i) Orice R-modul drept proiectiv este slab ereditar.

(ii) Orice R-modul drept proiectiv este self-CS-Baer.

(iii) Orice R-modul drept proiectiv este ESSIP.

(iv) Orice R-modul drept proiectiv este self-CS-Rickart.

(v) Orice R-modul drept proiectiv este SIP-extending.

(2) Presupunem că R este noetherian drept. Atunci următoarele sunt echivalente:

(i) Orice R-modul drept injectiv este slab coereditar.

(ii) Orice R-modul drept injectiv este dual self-CS-Baer.

(iii) Orice R-modul drept injectiv este LSSSP.

(iv) Orice R-modul drept injectiv este dual self-CS-Rickart.

(v) Orice R-modul drept injectiv este SSP-lifting.

3.9 Transferul proprietăţii CS-Baer prin functori

În această secţiune studiem când proprietăţile relativ CS-Baer se transferă prin functori între categorii abeliene. Se poate vedea că nu este întotdeauna cazul, trecând în revistă aceleaşi exemple din Capitolul 2 din punctul de vedere al proprietăţilor relativ CS-Baer.

Ca în cazul proprietăţii CS-Rickart, considerăm acum functori deplin fideli şi perechi adjuncte de functori între categorii abeliene.

Teorema 3.9.1. *Fie $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor covariant deplin fidel între categorii abeliene. Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{A}$.*

(i) Presupunem că $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ au AB3 şi $\mathrm{Im}(F)$ este închisă la subobiecte sau obiecte factor. Dacă F este exact la stânga, păstrează produsele şi N este (tare) M-CS-Baer, atunci $F(N)$ este (tare) $F(M)$-CS-Baer.*

(ii) Presupunem că $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ au AB3 şi $\mathrm{Im}(F)$ este închisă la sumanzi direcţi. Dacă F este exact la stânga, păstrează produsele şi $F(N)$ este (tare) $F(M)$-CS-Baer, atunci N este (tare) M-CS-Baer.*

Corolarul 3.9.2. *Fie $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ o echivalenţă de categorii abeliene, şi fie M, N obiecte ale lui $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ au AB3*. Atunci N este (tare) M-CS-Baer dacă şi numai dacă $F(N)$ este (tare) $F(M)$-CS-Baer.*

Pentru o pereche adjunctă de functori avem şi următorea teoremă. Am văzut în Propoziţia 3.5.2 că dacă $\mathcal{A}$ este AB3*, atunci N este (tare) M-CS-Baer dacă şi numai dacă N^I este (tare) M-CS-Rickart pentru orice mulţime I. Această caracterizare ne permite să deducem proprietăţi ale obiectelor CS-Baer din proprietăţile corespunzătoare ale obiectelor CS-Rickart.

Teorema 3.9.3. *Fie $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ categorii abeliene şi (L, R) o pereche adjunctă de functori covarianţi $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ şi $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ au AB3*, L este exact şi M, N sunt obiecte ale lui $\mathcal{B}$ astfel încât $M, N^I \in \mathrm{Stat}(R)$ pentru fiecare I.*

(i) Dacă N este (tare) M-CS-Baer în $\mathcal{B}$, atunci $R(N)$ este (tare) $R(M)$-CS-Baer în $\mathcal{A}$.

(ii) Dacă R reflectă obiectele zero, în particular dacă R este fidel, şi $R(N)$ este (tare) $R(M)$-CS-Baer în $\mathcal{A}$, atunci N este (tare) M-CS-Baer în $\mathcal{B}$.

Ca o consecinţă imediată a Teoremei 3.9.3 avem următorul rezultat.

Teorema 3.9.4. *Fie $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ categorii abeliene şi (L, R) o pereche adjunctă de functori covarianţi $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ şi $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ au AB3*, L este exact şi R este deplin fidel. Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{B}$. Atunci N este (tare) M-CS-Baer în $\mathcal{B}$ dacă şi numai dacă $R(N)$ este (tare) $R(M)$-CS-Baer în $\mathcal{A}$.*

Corolarul 3.9.5. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană, $\mathcal{C}$ o subcategorie plină a lui $\mathcal{A}$ şi $i : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ functorul incluziune. Presupunem că $\mathcal{A}$ are AB3* şi $\mathcal{C}$ este o subcategorie Giraud a lui $\mathcal{A}$. Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{C}$. Atunci N este (tare) M-CS-Baer în $\mathcal{C}$ dacă şi numai dacă $i(N)$ este (tare) $i(M)$-CS-Baer în $\mathcal{A}$.*

Corolarul 3.9.6. *Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană local mică, $\mathcal{C}$ o subcategorie Serre a lui $\mathcal{A}$ şi $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ functorul cât. Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{A}/\mathcal{C}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ are AB3* şi $\mathcal{C}$ este subcategorie localizantă a lui $\mathcal{A}$ cu functorul secţiune $S : \mathcal{A}/\mathcal{C} \to \mathcal{A}$. Atunci N este (tare) M-CS-Baer în $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ dacă şi numai dacă $S(N)$ este (tare) $S(M)$-CS-Baer în $\mathcal{A}$.*

Corolarul 3.9.7. *Fie (L, F, R) un triplet adjunct de functori covarianţi $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ şi $L, R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ între categorii abeliene. Presupunem că $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ au AB3*.*

(i) Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{A}$ şi presupunem că F este deplin fidel. Dacă L este exact, atunci N este (tare) M-CS-Baer în $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă $F(N)$ este (tare) $F(M)$-CS-Baer în $\mathcal{B}$.

(ii) Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{B}$ şi presupunem că L sau R este deplin fidel. Atunci N este (tare) M-CS-Baer în $\mathcal{B}$ dacă şi numai dacă $R(N)$ este (tare) $R(M)$-CS-Baer în $\mathcal{A}$.

Corolarul 3.9.8. *Fie $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor Frobenius deplin fidel între categorii abeliene şi M şi N obiecte ale lui $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ au AB3*. Atunci N este (tare) M-CS-Baer în $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă $F(N)$ este (tare) $F(M)$-CS-Baer în $\mathcal{B}$.*

Corolarul 3.9.9. *Fie $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ un recollement de categorii abeliene dat de următoarea diagramă de functori:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "i"] & \mathcal{B} \arrow[l, bend right=50, "q"'] \arrow[l, bend left=50, "p"] \arrow[r, "e"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right=50, "l"'] \arrow[l, bend left=50, "r"] \end{tikzcd}$$

(i) Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ au AB3. Dacă q este exact, atunci N este (tare) M-CS-Baer în $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă $i(N)$ este (tare) $i(M)$-CS-Baer în $\mathcal{B}$.*

(ii) Fie M şi N obiecte ale lui $\mathcal{C}$. Presupunem că $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$ au AB3. Atunci N este (tare) M-CS-Baer în $\mathcal{C}$ dacă şi numai dacă $r(N)$ este (tare) $r(M)$-CS-Baer în $\mathcal{B}$.*

3.10 Inele de endomorfisme ale obiectelor self-CS-Baer

În această secţiune dăm unele aplicaţii la inelul endomorfismelor de obiecte, în special în categorii de module. Vom începe cu o generalizare utilă a Corolarului 2.4.2 la module (tare) relativ CS-Rickart.

Teorema 3.10.1. *Fie M un R-modul drept cu $S = \mathrm{End}_R(M)$ şi fie A, B R-module drepte.*

(1) Dacă A este im-local-retractabil, $A \in \mathrm{Stat}(\mathrm{Hom}_R(M, -))$ şi $\mathrm{Hom}_R(M, B)$ este S-modul drept (tare) $\mathrm{Hom}_R(M, A)$-CS-Rickart, atunci B este R-modul drept (tare) A-CS-Rickart.

(2) Dacă B este im-local-coretractabil, $B \in \mathrm{Refl}(\mathrm{Hom}_R(-, M))$ şi $\mathrm{Hom}_R(A, M)$ este S-modul stâng dual (tare) $\mathrm{Hom}_R(B, M)$-CS-Rickart, atunci B este R-modul drept dual (tare) A-CS-Rickart.

Corolarul 3.10.2. *Fie M un R-modul drept cu $S = \mathrm{End}_R(M)$ şi fie A, B R-module drepte.*

(1) Dacă A este im-local-retractabil, $A \in \mathrm{Stat}(\mathrm{Hom}_R(M, -))$ şi $\mathrm{Hom}_R(M, B)$ este un S-modul drept (tare) $\mathrm{Hom}_R(M, A)$-CS-Baer, atunci B este R-modul drept (tare) A-CS-Baer.

(2) Dacă B este im-local-coretractabil, $B \in \mathrm{Refl}(\mathrm{Hom}_R(-, M))$ şi $\mathrm{Hom}_R(A, M)$ este un S-modul stâng dual (tare) $\mathrm{Hom}_R(B, M)$-CS-Baer, atunci B este un R-modul drept dual (tare) A-CS-Baer.

Avem imediat următorul corolar pentru inele de endomorfisme.

Corolarul 3.10.3. *Fie M un R-modul drept şi $S = \mathrm{End}_R(M)$.*

(1) Dacă M este im-local-retractabil şi S este S-modul drept (tare) self-CS-Baer, atunci M este R-modul drept (tare) self-CS-Baer.

(2) Dcă M este im-local-coretractabil şi S este S-modul stâng dual (tare) self-CS-Baer, atunci M este R-modul drept dual (tare) self-CS-Baer.

În continuare prezentăm unele condiţii în care reciprocele rezultatelor de mai sus sunt adevărate.

Corolarul 3.10.4. *Fie M un R-modul drept şi $S = \mathrm{End}_R(M)$.*

(1) Presupunem că M este un S-modul stâng proiectiv finit generat.

(i) Dacă M este R-modul drept (tare) self-CS-Baer, atunci S este S-modul drept (tare) self-CS-Baer.

(ii) Dacă M este R-modul drept proiectiv fidel şi S este S-modul drept (tare) self-CS-Baer, atunci M este R-modul drept (tare) self-CS-Baer.

(2) Presupunem că M este un R-modul drept proiectiv finit generat.

(i) Dacă S este S-modul drept (tare) dual self-CS-Baer, atunci M este R-modul drept dual (tare) self-CS-Baer.

(ii) Dcaă M este S-modul stâng plat fidel şi M este un R-modul drept dual (tare) self-CS-Baer, atunci S este S-modul drept dual (tare) self-CS-Baer.

Bibliografie

[1] A.N. Abyzov and T.H.N. Nhan, *CS-Rickart modules*, Lobachevskii J. Math. **35** (2014), 317–326.

[2] A.N. Abyzov, T.H.N. Nhan and T.C. Quynh, *Modules close to SSP- and SIP-modules*, Lobachevskii J. Math. **38** (2017), 16–23.

[3] S.A. Al-Saadi, T.A. Ibrahiem, *Strongly Rickart modules*, J. Adv. Math. **9** (2014), 2506–2514.

[4] S.A. Al-Saadi, T.A. Ibrahiem, *Dual strongly Rickart modules*, J. Adv. Math. **11** (2015), 3923–3930.

[5] F.W. Anderson and K.R. Fuller, Rings and categories of modules, Graduate Texts in Mathematics **13**, Springer-Verlag, New York, 1974.

[6] A. Ardizzoni, C. Menini, S. Caenepeel and G. Militaru, *Naturally full functors in nature*, Acta Math. Sinica **22** (2005), 233–250.

[7] M. Auslander, *Coherent functors* In: Proc. Conf. on Categorical Algebra (La Jolla, 1965), pp. 189–231, Springer, New York, 1966.

[8] T. Bühler, *Exact categories*, Expo. Math. 28 (2010), 1–69.

[9] F. Castaño Iglesias, *On a natural duality between Grothendieck categories*, Comm. Algebra **36** (2008), 2079–2091.

[10] F. Castaño Iglesias, J. Gómez-Torrecillas and C. Năstăsescu, *Frobenius functors and applications*, Comm. Algebra **27** (1999), 4879–4900.

[11] F. Castaño Iglesias, J. Gómez-Torrecillas and R. Wisbauer, *Adjoint functors and equivalences of subcategories*, Bull. Sci. Math. **127** (2003), 379–395.

[12] S.U. Chase, *Direct products of modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **97** (1960), 457–473.

[13] J. Clark, C. Lomp, N. Vanaja and R. Wisbauer, Lifting modules, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, 2006.

[14] R. Colpi, L. Fiorot and F. Mattiello, *On tilted Giraud subcategories*, J. Pure Appl. Algebra **220** (2016), 346–363.

[15] S. Crivei, *Σ-extending modules, Σ-lifting modules, and proper classes*, Comm. Algebra **36** (2008), 529–545.

[16] S. Crivei and D. Keskin Tütüncü, *Weak Rickart and dual weak Rickart objects in abelian categories*, Comm. Algebra **46** (2018), 2912–2926.

[17] S. Crivei, D. Keskin Tütüncü and G. Olteanu, *F-Baer objects with respect to a fully invariant short exact sequence in abelian categories*, Comm. Algebra **49** (2021), 5041–5060.

[18] S. Crivei, D. Keskin Tütüncü, S.M. Radu and R. Tribak, *CS-Baer and dual CS-Baer objects in abelian categories*, J. Algebra Appl. (2022), accepted for publication. DOI: 10.1142/S0219498823502201

[19] S. Crivei, D. Keskin Tütüncü and R. Tribak, *Transfer of splitness with respect to a fully invariant short exact sequence in abelian categories*, Comm. Algebra **48** (2020), 2639–2654.

[20] S. Crivei, D. Keskin Tütüncü and R. Tribak, *Split objects with respect to a fully invariant short exact sequence in abelian categories*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **147** (2022). DOI: 10.4171/RSMUP/88

[21] S. Crivei, D. Keskin Tütüncü and R. Tribak, *Baer-Kaplansky classes in categories: transfer via functors*, Comm. Algebra **48** (2020), 3157–3169.

[22] S. Crivei and A. Kör, *Rickart and dual Rickart objects in abelian categories*, Appl. Categor. Struct. **24** (2016), 797–824.

[23] S. Crivei and G. Olteanu, *Rickart and dual Rickart objects in abelian categories: Transfer via functors*, Appl. Categor. Struct. **26** (2018), 681–698.

[24] S. Crivei and G. Olteanu, *Strongly Rickart objects in abelian categories*, Comm. Algebra **46** (2018), 4326-4343.

[25] S. Crivei and G. Olteanu, *Strongly Rickart objects in abelian categories: Applications to strongly regular objects and Baer objects*, Comm. Algebra **46** (2018), 4426–4447.

[26] S. Crivei and S.M. Radu, *CS-Rickart and dual CS-Rickart objects in abelian categories*, Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin **29** (2022). DOI: 10.36045/j.bbms.210902. *arXiv:2007.11059.*

[27] S. Crivei and S.M. Radu, *Transfer of CS-Rickart and dual CS-Rickart properties via functors between abelian categories*, Quaest. Math. (2022), accepted for publication. DOI: 10.2989/16073606.2021.1925990

[28] S. Crivei and S.M. Radu, *Strongly CS-Rickart and dual strongly CS-Rickart objects in abelian categories*. Comm. Algebra **50** (2022), 903–919.

[29] S. Crivei and S.M. Radu, *Transfer of (dual) strongly CS-Rickart properties via functors between abelian categories*, preprint, 2022.

[30] S. Crivei and S.M. Radu, *Classes and endomorphism rings of (dual) CS-Baer objects in abelian categories*, preprint, 2022.

[31] J. Cuadra and J. Gómez-Torrecillas, *Serial coalgebras*, J. Pure Appl. Algebra **189** (2004), 89–107.

[32] J. Cuadra and D. Simson, *Flat comodules and perfect coalgebras*, Comm. Algebra **35** (2007), 3164–3194.

[33] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and Ş. Raianu, Hopf Algebras. An Introduction, Marcel Dekker, New York, 2001.

[34] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, A. Tudorache and L. Dăuş, *Relative regular objects in categories*, Appl. Categor. Struct. **14** (2006), 567–577.

[35] L. Dăuş, C. Năstăsescu and F. Van Oystaeyen, *V-categories: Applications to graded rings*, Comm. Algebra **37** (2009), 3248–3258.

[36] N.V. Dung, *Modules with indecomposable decompositions that complement maximal direct summands*, J. Algebra **197** (1997) 449-467.

[37] N.V. Dung, D.V. Huynh, P.F. Smith and R. Wisbauer, Extending modules, Pitman Research Notes, **313**, Longman Scientific and Technical, 1994.

[38] R. Dyckhoff and W. Tholen, *Exponentiable morphisms, partial products and pullback complements*, J. Pure Appl. Algebra **49** (1987), 103–116.

[39] S. Ebrahimi Atani, M. Khoramdel, S. Dolati Pish Hesari, *On strongly extending modules*, Kyungpook Math. J. **54** (2014), 237–247.

[40] D.J. Fieldhouse, *Regular rings and modules*, J. Aust. Math. Soc. **13** (1972), 477–491.

[41] P. Freyd, Abelian categories. An introduction to the theory of functors, Harper & Row, New York, 1964.

[42] J.L. García, *Properties of direct summands of modules*, Comm. Algebra **17** (1989), 73–92.

[43] J.L. Gómez Pardo and P.A. Guil Asensio, *Indecomposable decompositions of finitely presented pure-injective modules*, J. Algebra **192** (1997), 200–208.

[44] K.R. Goodearl, Ring theory: nonsingular rings and modules, Marcel Dekker, New York, 1976.

[45] L. Gruson, C.U. Jensen, *Dimensions cohomologiques reliées aux foncteurs* $\varinjlim^{(i)}$. In: Lecture Notes in Mathematics, 867, pp. 234–294, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[46] A. Haghany and K. Varadarajan, *A study of formal triangular matrix rings*, Comm. Algebra **27** (1999), 5507-5525.

[47] T. Ishikawa, *Faithfully exact functors and their applications to projective modules and injective modules*, Nagoya Math. J. **24** (1964), 29–42.

[48] M.A. Kamal and B.J. Müller, *The structure of extending modules over noetherian rings*, Osaka J. Math. **25** (1988), 539–551.

[49] I. Kaplansky, *Modules over Dedekind rings and valuation rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 327–340.

[50] I. Kaplansky, Rings of operators, W.A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam, 1968.

[51] F. Karabacak, *On generalizations of extending modules*, Kyungpook Math. J. **49** (2009), 557–562.

[52] D. Keskin Tütüncü, I. Kikumasa, Y. Kuratomi and Y. Shibata, *On dual of square free modules*, Comm. algebra **46** (2018), 3365–3376.

[53] D. Keskin Tütüncü and R. Tribak, *On dual Baer modules*, Glasgow Math. J. **52** (2010), 261–269.

[54] T.Y. Lam, Lectures on modules and rings, Springer, New York, 1999.

[55] G. Lee and S.T. Rizvi, *Endoprime modules and their direct sums*, Taiwanese J. Math. **21** (2017), 1277–1281.

[56] G. Lee, S.T. Rizvi and C. Roman, *Rickart modules*, Comm. Algebra **38** (2010), 4005–4027.

[57] G. Lee, S.T. Rizvi and C. Roman, *Dual Rickart modules*, Comm. Algebra **39** (2011), 4036–4058.

[58] S. Maeda, *On a ring whose principal right ideals generated by idempotents form a lattice*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A **24** (1960), 509–525.

[59] B. Mitchell, Theory of categories, Academic Press, New York, 1965.

[60] S.H. Mohamed and B.J. Müller, Continuous and discrete modules, Cambridge University Press, New York, 1990.

[61] C. Năstăsescu, M. Van den Bergh and F. Van Oystaeyen, *Separable functors applied to graded rings*, J. Algebra **123** (1989), 397–413.

[62] C. Năstăsescu and F. Van Oystaeyen, Methods of graded rings, Lect. Notes Math. **1836**, Springer, Berlin, 2004.

[63] T.H.N. Nhan, *Essentially Baer modules*, Chebyshevskii Sb. **16** (2015), 355–375.

[64] K. Oshiro, *Lifting modules, extending modules and their applications to QF-rings*, Hokkaido Math. J. **13** (1984), 310–338.

[65] Özcan, A. Ç., Harmancı, A., Smith, P. F. (2006). Duo modules. *Glasgow Math. J.* 48:533–545.

[66] N. Popescu, Abelian categories with applications to rings and modules, Academic Press, London, 1973.

[67] M. Prest, Purity, spectra and localisation, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[68] C. Psaroudakis, *Homological theory of recollements of abelian categories*, J. Algebra **398** (2014), 63–110.

[69] S.T. Rizvi and C. Roman, *Baer and quasi-Baer modules*, Comm. Algebra **32** (2004), 103–123.

[70] S.T. Rizvi and C. Roman, *On direct sums of Baer modules*, J. Algebra **321** (2009), 682–696.

[71] D.W. Sharpe and P. Vámos, Injective modules, Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

[72] B. Stenström, Rings of quotients, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

[73] M. Takeuchi, *Morita theorems for categories of comodules*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **24** (1977), 629–644.

[74] Y. Talebi and N. Vanaja, *The torsion theory cogenerated by M-small modules*, Comm. Algebra **30** (2002), 1449–1460.

[75] R. Tribak, *Dual CS-Rickart modules over Dedekind domains*, Algebr. Represent. Theory, 2019. DOI: 10.1007/s10468-018-09845-5

[76] R. Tribak, Y. Talebi and M. Hosseinpour, *Quasi-dual Baer modules*, Arab. J. Math. **2021** (2021), 497–504.

[77] J. von Neumann, *On regular rings*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **22** (1936), 707–712.

[78] Y. Wang, *Strongly lifting modules and strongly dual Rickart modules*, Front. Math. China **12** (2017), 219–229.

[79] J. Wei, *Almost abelian rings*, Comm. Math. **21** (2013), 15–30.

[80] R. Wisbauer, Foundations of module and ring theory, Gordon and Breach, Reading, 1991.

[81] J. Zelmanowitz, *Regular modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972), 341–355.