Universitatea Babeș–Bolyai, Cluj-Napoca
Institutul de Studii Doctorale
Școala Doctorală de Matematică și Informatică

Reprezentări de tip arbore ale algebrelor de drumuri peste tolbe blânde

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat: **Prof. dr. Andrei Marcus**

Doctorand: **Ábel Lőrinczi**

Cluj-Napoca
2022

Cuprins

Cuvinte cheie

Tolbe, reprezentări de tolbe, algebre de drumuri, module indecompozabile, module excepționale, reprezentări de tip arbore, teoria Auslander–Reiten, module preproiective, module preinjective, module regulare.

Introducere

Scopul principal al teoriei reprezentării algebrelor asociative finit dimensionale este de a înțelege structura categoriilor de module finit dimensionale, pentru a clasifica toate modulele indecompozabile ale unei algebre date și toate morfismele dintre ele, până la izomorfism. În această teză luăm în considerare algebrele de drumuri peste tolbe și scopul nostru este să studiem și să descriem cât mai explicit posibil categoria modulelor indecompozabile peste algebra de drumuri. Această categorie este echivalentă cu categoria reprezentărilor tolbei, care în multe situații este mai ușor de studiat, de aceea ne vom concentra în principal pe descrierea acestora.

Fiind dat o reprezentare de tolbă, alegem baze pentru spațiile vectoriale asociate vârfurilor și considerăm funcțiile liniare restricționate la aceste elemente de bază. Definim tolba de coeficienți acestei reprezentări, în care vârfurile sunt elementele de bază și avem o săgeată între două vârfuri dacă coeficientul matricei corespunzător acestor două elemente de bază nu este nenul. Crawley-Boevey a considerat tolbe de coeficienți ca să se ocupe de probleme matriceale și de reprezentări de tolbe (vezi [5]).

În [27] Ringel a demonstrat că fiecare modul excepțional indecompozabil, adică unul fără autoextensii, are baze adecvate, astfel încât tolba de coeficienți a reprezentării sale este un arbore. Aceasta înseamnă că aceste reprezentări, numite reprezentări de tip arbore, pot fi date folosind matrice $0-1$, astfel încât numărul de coeficienți nenuli să fie $d-1$, unde d este lungimea modulului. Unul dintre pașii din demonstrație implică o alegere de bază, care pare să depindă de corpul considerat și Ringel a întrebat dacă există reprezentări de tip arbore care sunt independente de această alegere, deci fiind independente de corp. În această teză răspundem pozitiv la această întrebare, în cazul tolbelor blânde de tip $\widetilde{\mathbb{E}}_6$ și $\widetilde{\mathbb{D}}_m$.

Ringel a dat mai târziu o demonstrație mai simplă a rezultatului său, folosind teoria acoperirii în [29]. El a mai presupus în [28] că, dacă d este o rădăcină pozitivă a sistemului de rădăcină Kac-Moody, atunci există un modul de tip arbore indecompozabil cu vectorul de dimensiune d, iar în cazul ereditar sălbatic, dacă d este imaginar, atunci ar trebui să existe mai mult de o clasă de izomorfism de module de tip arbore cu același vector de dimensiune. Această presupunere a fost demonstrată în cazul tolbei n-Kronecker, unde $n \geq 3$ de către Weist în [40], unde el a dat și o construcție explicită a tolbelor de coeficienți ale modulelelor de tip arbore indecompozabile. Aceasta este o generalizare a rezultatelor prezentate în disertația lui Fahr, vezi [10], unde sunt considerate reprezentări 3-Kronecker cu vectori de dimensiune (d, e), unde $d < e < 2d$. Mai târziu, Weist a demonstrat existența a mai multor clase de izomorfism de module de tip arbore indecompozabile pentru fiecare rădăcină Schur imaginară în [41], unde a prezentat și metode explicite pentru construirea modulelor de tip arbore.

În [11] Gabriel a prezentat o listă completă de reprezentări indecompozabile pentru tolbe Dynkin folosind matrice $0-1$. Toate reprezentările date, în afară de 4, au fost reprezentări de tip arbore. Această listă a fost completată de Crawley-Boevey în [5]. În ceea ce privește cazul euclidian, Mróz a dat o listă completă a reprezentărilor de tip arbore indecompozabile pentru tolba $\widetilde{\mathbb{D}}_4$ în [22]. Rezultatele sale au fost ulterior generalizate de autor și Szántó, oferind o listă completă de reprezentări de tip arbore pentru modulele preproiective și preinjective indecompozabile pentru tolba $\widetilde{\mathbb{D}}_m$ peste un corp închis k, vezi

[19]. Menționăm că indecompozabilitatea a fost demonstrată doar pentru una dintre reprezentări, toate celelalte au fost verificate de calculator pentru valori fixe de n, astfel verificarea nu a fost completă.

În [14], Kussin și Meltzer au descris o metodă pentru a determina în mod explicit reprezentările preproiective și preinjective indecompozabile ale $\widetilde{\mathbb{D}}_m$ și $\widetilde{\mathbb{E}}_6$ peste un corp arbitrar, dar aceste reprezentări nu sunt reprezentări de tip arbore în general. Mai târziu, în [13] Kędzierski și Meltzer au generalizat aceste rezultate și au dat o metodă de a calcula reprezentările preproiective și preinjective indecompozabile ale lui $\widetilde{\mathbb{E}}_8$ peste orice corp și toate reprezentările indecompozabile pentru corpuri algebric închise. Cu toate acestea, metodele prezentate nu produc reprezentări de tip arbore în general.

Folosind o demonstrație generată de calculator, autorul tezei împreună cu Lénárt și Szöllősi au reușit să descrie în mod explicit, într-o manieră independentă de corp, toate reprezentările de tip arbore excepționale în cazul tolbei orientate canonic $\widetilde{\mathbb{E}}_6$ în [17], răspunzând astfel la întrebarea pusă de Ringel în mod pozitiv. De asemenea, am presupus că fiecare reprezentare de tip arbore a unei tolbe euclidiene este independentă de corp. Ulterior am oferit o listă completă și generală corespunzătoare modulelor excepționale peste algebra de drumuri a tolbei euclidiene cu orientare canonică $\widetilde{\mathbb{D}}_6$ și o metodă de a obține reprezentări de tip arbore pentru module excepționale în cazul general pentru tolba $\widetilde{\mathbb{D}}_m$ orientată canonic din acea listă, vezi [16].

Această teză este împărțită în 4 capitole, având următoarea structură.

Capitolul I conține noțiunile și definițiile de bază, împreună cu câteva rezultate binecunoscute referitoare la teoria reprezentării algebrele asociative finit dimensionale, pe care le vom folosi în restul tezei. Principalele noastre referințe pentru acest capitol au fost cărțile [35] și [36].

În Capitolul II, pe baza articolului [17] și a anexei acestuia [15] prezentăm o listă completă și generală de reprezentări de tip arbore corespunzătoare modulelor excepționale peste peste algebra de drumuri a tolbei euclidiene orientate canonic $\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)$. În Definiția II.2.1 introducem noțiunea de independență de corp pentru module și pentru șiruri exacte scurte. Lemele II.2.2 și II.2.4 și Propoziția II.2.3 constituie elementele teoretice ale tehnicilor utilizate pentru a demonstra corectitudinea reprezentărilor de tip arbore prezentate în secțiunea II.3. Prezentăm apoi schița metodelor utilizate în obținerea reprezentărilor de tip arbore independente de corp ale modulelor excepționale pentru tolba $\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)$. Principalul rezultat al acestui capitol este Secțiunea II.3, unde listăm reprezentări arbore independente de corp pentru fiecare modul excepțional indecompozabil peste algebra de drumuri a tolbei $\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)$.

În capitolul III, pe baza articolului [16] și a anexei acestuia [15], pe lângă o listă completă de reprezentări de tip arbore pentru modulele excepționale peste algebra de drumuri a tolbei orientate canonic $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$, descriem, de asemenea, o metodă în Secțiunea III.2 pentru construirea reprezentărilor de tip arbore pentru $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$, unde $m \geq 4$ folosind reprezentări de tip arbore ale lui $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$.

În sfârșit, în Capitolul IV, pe baza articolului [18] verificăm computațional o conjectură privind independența de corp a reprezentărilor de tip arbore ale tolbelor euclidiene de tip $\widetilde{\mathbb{D}}_4$, $\widetilde{\mathbb{D}}_5$ și $\widetilde{\mathbb{E}}_6$, cu vectorul de dimensiune mărginit de vectorul radical minim al tolbei. Aceasta include o clasă mare de reprezentări excepționale, în special toate excepționalele neomogene regulare.

Unele dintre rezultatele acestei teze au fost prezentate la diferite conferințe naționale și internaționale.

Capitolul I

Preliminarii

În acest capitol prezentăm noțiunile de bază, alături de câteva rezultate binecunoscute referitoare la teoria reprezentării algebrelor asociative.

I.1 Tolbe și module

I.2 Teoria Auslander–Reiten

I.3 Tolbe de tip reprezentare finită și infinită

I.4 Extensii ale reprezentărilor de tolbe

I.5 Reprezentări de tip arbore și șiruri Schofield

Capitolul II

Reprezentări de tip arbore ale tolbei $\widetilde{\mathbb{E}}_6$

În acest capitol vom prezenta o listă completă și generală a reprezentărilor de tip arbore corespunzătoare modulelor excepționale peste algebra de drumuri a tolbei euclidiene cu orientare canonică $\widetilde{\mathbb{E}}_6$. Demonstrația (care implică inducție și calcul simbolic cu matrice bloc) a fost parțial generată de un software de calculator dezvoltat intenționat și este disponibil pe arXiv ca anexă. Toate reprezentările enumerate rămân valabile peste orice corp de bază, răspunzând la o întrebare pusă de Ringel în [27]. Rezultatele prezentate aici au fost publicate în articolul [17] și în anexa acestuia [15].

II.1 Noțiuni de bază și definiții

Considerăm tolba euclidiană orientată canonic de tip $\widetilde{\mathbb{E}}_6$, notat de acum înainte cu $\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)$, având următoarea formă:

$$\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6): \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 7 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 6 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longleftarrow & 4 & \longleftarrow & 5 \end{array}$$

Prin urmare, avem $\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_0 = \{1, \ldots, 7\}$ pentru mulțimea de vârfuri și $\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_1 = \{(1,2),(2,3),(4,3),(5,4),(6,3),(7,6)\}$ pentru mulțimea de săgeți.

Formele Euler și Tits în acest caz sunt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{7} x_i y_i - x_1y_2 - x_2y_3 - x_4y_3 - x_5y_4 - x_6y_3 - x_7y_6$$

$$q_{\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)}(x) = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_4x_3 - x_5x_4 - x_6x_3 - x_7x_6$$

Menționăm că forma Tits este independentă de orientarea tolbei și este semidefinită pozitivă cu radicalul $\mathbb{Z}\delta$, unde $\delta = (1, 2, 3, 2, 1, 2, 1)$.

II.2 Demonstrarea proprietății de tip arbore independentă de corp

În această parte descriem metoda folosită pentru a demonstra proprietatea modulului de tip arbore pentru fiecare reprezentare dată în listele din Secțiunea II.3 atât din perspectivă teoretică cât și practică.

Metoda prezentată aici este generală (în sensul că ar putea fi aplicată oricărui tolbă blândă), așa că, așa cum am menționat mai înainte, prin Q notăm o tolbă blândă arbitrară și k un corp arbitrar.

Vom folosi calificativul „independent de corp" în legătură cu reprezentări și șiruri exacte scurte în următoarea manieră precisă:

Definiția II.2.1. Fie $M \in \operatorname{mod} kQ$ un modul (excepțional) indecompozabil. Spunem că:

(1) Modulul M este *(excepțional) indecompozabil independent de corp* dacă în reprezentarea corespunzătoare $M = (M_i, M_\alpha)$ toate elementele din matrice M_α sunt fie 0, fie 1 și pentru orice corp k' dacă luăm în considerare un modul $M' \in \operatorname{mod} k'Q$ astfel încât $\underline{\dim} M = \underline{\dim} M'$ și fiecare matrice M'_α din reprezentarea corespunzătoare $M' = (M'_i, M'_\alpha)$ este formal aceeași cu M_α (pentru toate săgețile α), atunci M' este de asemenea (excepțional) indecompozabil în $\operatorname{mod} k'Q$.

(2) Modulul M are *proprietatea de tip arbore independentă de corp* dacă este un modul de tip arbore în $\operatorname{mod} kQ$ și este, de asemenea, un modul indecompozabil (excepțional) *independent de corp* (adică dacă luăm în considerare reprezentarea corespunzătoare cu aceleași matrice în mod formal peste orice alt corp k', obținem un modul arbore indecompozabil excepțional în $\operatorname{mod} k'Q$).

(3) Un șir exact scurt de forma

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

este *independent de corp* (cu $X, Y, Z \in \operatorname{mod} kQ$) dacă toate elementele în matricele reprezentărilor X, Y și Z sunt fie 0 sau 1, toate elementele din matricele f_i și g_i a injecției $f = (f_i)_{i\in Q_0}$ respectiv proiecției $g = (g_i)_{i\in Q_0}$ sunt fie 0, fie 1 sau -1 și peste orice corp k' șirul $0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{f'} Z' \xrightarrow{g'} X' \longrightarrow 0$ este de asemenea exact, unde $X', Y', Z' \in \operatorname{mod} k'Q$, $f' : Y' \to Z'$, $g' : Z' \to X'$ corespund cu X, Y, Z, $f : Y \to Z$, $g : Z \to X$ cu vectorii de dimensiune respectivi neschimbați și cu toate matricele (atât din reprezentări, cât și din morfisme) fiind formal aceleași când se consideră peste k' în loc de k.

Următoarele propoziții și leme constituie elementele teoretice ale tehnicii utilizate pentru a demonstra formulele din Secțiunea II.3 într-un mod independent de corp:

Lema II.2.2. *Pentru un modul $M \in \operatorname{mod} kQ$ avem că M este excepțional indecompozabil dacă și numai dacă* $\dim_k \operatorname{End}(M) = 1$ *și* $\underline{\dim} M \neq \delta$.

Propoziția II.2.3. *Fie $X, Y, X', Y' \in \operatorname{mod} kQ$ module indecompozabile. Dacă $M \in \operatorname{mod} kQ$ astfel încât*

(a) *există un $Z \in \operatorname{mod} kQ$ excepțional astfel încât (X, Y) și (X', Y') sunt perechi Schofield asociate cu Z,*

(b) *există două șiruri scurte exacte*

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

și

$$0 \longrightarrow Y' \longrightarrow M \longrightarrow X' \longrightarrow 0,$$

(c) $X \not\cong X'$ *sau* $Y \not\cong Y'$,

(d) $\dim_k \operatorname{Ext}^1(X, Y) = \dim_k \operatorname{Ext}^1(X', Y') = 1$

atunci M *este excepțional indecompozabil.*

Lema II.2.4. *Fie* $X, Y, Z \in \operatorname{mod} kQ$ *și* $f = (f_i)_{i \in Q_0}$, $g = (g_i)_{i \in Q_0}$ *familii de funcții* k*-liniare* $f_i : Y_i \longrightarrow Z_i$, $g_i : Z_i \longrightarrow X_i$. *Atunci există un șir exact scurt* $0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$ *dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiții (identificăm funcțiile* f_i *și* g_i *cu matricele lor în baza canonică):*

(a) *matricele* f_i *(respectiv* g_i*) au ranguri maxime de coloană (respectiv de rând),*

(b) $f_{t(\alpha)} Y_\alpha = Z_\alpha f_{s(\alpha)}$ *și* $g_{t(\alpha)} Z_\alpha = X_\alpha g_{s(\alpha)}$, *pentru toți* $\alpha \in Q_1$,

(c) $g_i f_i = 0$, *pentru toți* $i \in Q_0$,

(d) $\underline{\dim} Z = \underline{\dim} X + \underline{\dim} Y$.

Lema II.2.5. *Dacă* $X, Y \in \operatorname{mod} kQ$ *sunt module indecompozabile astfel încât* X *este regular și* Y *este preproiectiv sau* X *este preinjectiv și* Y *este regular sau ambele sunt preproiective (sau preinjective) și există un drum în tolba Auslander-Reiten de la vârful corespunzând lui* Y *la vârful corespunzător lui* X, *atunci* $\dim_k \operatorname{Ext}^1(X, Y) = -\langle \underline{\dim} X, \underline{\dim} Y \rangle$.

Acum suntem gata să descriem procesul de demonstrare a formulelor din Secțiunea II.3.

Procesul de demonstrare a proprietății de tip arbore independentă de corp

Să presupunem că avem formulele care definesc familii de matrice $(M_\alpha^{(n)})_{\alpha \in Q_1}$ în funcție de niște $n \in \mathbb{N}$. Elementele matricelor $M_\alpha^{(n)}$ sunt fie 0, fie 1, deci pot fi considerate peste un corp arbitrar k. Vrem să demonstrăm că reprezentarea tolbei Q dat ca $M = M^{(n)} = (M_i^{(n)}, M_\alpha^{(n)})$ are proprietatea de tip arbore independentă de corp (unde dimensiunea fiecărui k-spațiu $M_i^{(n)}$ este în conformitate cu coloana și rândul dimensiunilor matricelor $M_\alpha^{(n)}$, deci și formulele determina $\underline{\dim} M$). Să presupunem că $\underline{\dim} M$ este astfel încât să coincidă cu vectorul de dimensiune al unui excepțional indecompozabil (vezi Lema II.2.2). Să presupunem, de asemenea, că numărul elementelor egale cu 1 în matricele $M_\alpha^{(n)}$ este exact $\ell(M) - 1$. Deci, pentru a demonstra proprietatea modulului de tip arbore independentă de corp, trebuie doar să arătăm că M este indecompozabil independent de corp. Putem folosi una dintre următoarele raționamente:

(1) *Demonstrăm că* $\dim_k \operatorname{End}(M) = 1$ *în orice corp* k *și folosim Lema II.2.2.* Acest lucru se poate face prin scrierea matricei A a sistemul omogen de ecuaţii liniare care definesc $\operatorname{End}(M)$ şi arătând că corangul lui A este unu (adică spațiul soluției este unidimensional). Pentru a calcula rangul lui

A, trebuie să fie adus în formă scară redusă folosind operații elementare pe rânduri și/sau coloane într-un „mod independent de corp”. Acest lucru înseamnă că fiecare operaţie elementară folosită pe A trebuie să fie astfel încât elementele din matricea rezultată să fie 0, 1 sau -1 și rezultatul este exact același dacă este efectuat în orice corp k. De exemplu, dacă în cazul matricei $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ efectuăm operația elementară pe rând $r_2 \leftarrow r_2 - r_1$, atunci obținem $\begin{bmatrix} 1și - 1 & \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dacă este efectuat în $\mathbb{R}$ sau $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dacă este efectuat în $\mathbb{Z}_2$. Prin urmare, are ranguri diferite peste diferite corpuri. Un element crucial al acestei demostrații este să ne asigurăm că așa ceva nu se întâmplă niciodată, ci rezultatul fiecarei operație elementară efectuată este formal aceeași matrice, independent de corpul în care este considerat.

(2) *Efectuăm o inducție pe n, folosind Propoziția II.2.3*. Mai întâi demonstrăm formula pentru valorile inițiale ale lui n folosind metoda (1) de mai sus (de obicei pentru $n = 0$, dar structura matricelor bloc în funcție de n ar putea necesita demontrații suplimentare pentru valori mici de n). Atunci presupunem că formula rezultă în indecompozabile excepționale independende de corp $M^{(n')} = (M_i^{(n')}, M_\alpha^{(n')})$ pentru toți $n' < n$. Căutăm două perechi de module (X, Y) și (X', Y') conform tuturor cerințelor Propoziției II.2.3, astfel încât oricare dintre aceste patru reprezentări să fie obţinută fie folosind formula $M^{(n')}$ pentru niște $n' < n$ (sau o versiune permutată a sa) sau alte formule demonstrate deja ca dâând excepționale indecompozibile independente de corp. Dacă tolba Q prezintă simetrii, atunci o versiune permutată a formulei $\tilde{M}^{(n')} = (\tilde{M}_i^{(n')}, \tilde{M}_{i\to j}^{(n')})$ poate fi folosită și în etapa de inducție, unde $(\tilde{M}_i^{(n')})_{i\in Q_0} = (M_{\sigma(i)}^{(n')})_{i\in Q_0}$ și $(\tilde{M}_{i\to j}^{(n')})_{(i\to j)\in Q_1} = (M_{\sigma(i)\to\sigma(j)}^{(n')})_{(i\to j)\in Q_1}$ pentru unele permutări σ. Trebuie să construim aici cele două șiruri exacte scurte independende de corp de forma $0 \to Y \to M^{(n)} \to X \to 0$ și $0 \to Y' \to M^{(n)} \to X' \to 0$ pentru a arăta existența lor. Odată construite matricele morfismelor, Lema II.2.4 poate fi folosită pentru a demonstra că într-adevăr acestea formează șiruri exacte scurte în orice corp k. Subliniem că condițiile (a), (b) și (c) de la Lema II.2.4 trebuie verificate într-un „mod independent de corp”: rangul matricelor trebuie verificat folosind forma scară redusă independentă de corp, așa cum s-a explicat mai înainte, iar rezultatul operațiilor aritmetice utilizate în (b) și (c) trebuie să fie formal același, independent de corpul de bază.

(3) *Efectuăm o demonstrație directă, folosind Propoziția II.2.3*. Folosim două perechi de module (X, Y) și (X', Y') conform tuturor cerințele Propoziției II.2.3, astfel încât oricare dintre aceste patru reprezentări sunt obținute prin unele formule arătate deja ca dâând excepționale indecompusabile independente de corp și demonstrează existența celor două șiruri exacte scurte independente de corp $0 \to Y \to M^{(n)} \to X \to 0$ și $0 \to Y' \to M^{(n)} \to X' \to 0$ prin construirea lor folosind Lema II.2.4 în „mod independent de corp”.

Procesul de demonstrare descris este extrem de greoi, consumator de timp și predispus la erori dacă este efectuat de un om, prin urmare am implementat un software asistent de probă pentru a ne ajuta în realizarea acestuia. Asistentul de probă poate efectua oricare dintre pașii (1), (2) sau (3) pe baza unei date de intrare într-un fișier LaTeX. Datele de intrare constau din formulele $(M_\alpha^{(n)})_{\alpha\in Q_1}$ care definesc reprezentările și alegerea șirurilor exacte scurte cerute în (2) și (3), împreună cu familiile de matrice care definesc morfismele. Toate aceste date trebuie date într-un document LaTeX cu o structură bine definită, pentru ca asistentul de probă să le poată analiza și extrage informațiile relevante. Matricele sunt date fie ca „matrice obișnuite” (de dimensiune fixă, cu elemente egale fie cu 1, -1 sau 0), fie ca matrice bloc simbolice de dimensiune variabilă, în funcție de parametrul $n \in \mathbb{N}$. Fiecare matrice bloc este construită folosind următoarele trei tipuri de blocuri: bloc zero de dimensiune $n_1 \times n_2$, blocul de identitate I_n și un bloc notat prin E_n având elemente de unu pe diagonala secundară și zerouri peste tot (menționăm că $E_n^2 = I_n$ în fiecare corp). Am folosit procesorul de documente LyX pentru a edita documentul de intrare și a-l exporta în LaTeX (asigurând astfel un fișier LaTeX corect din punct de vedere sintactic).

Aceștia sunt pașii efectuați de software:

- Citește și stochează datele $M^{(n)} = (M_i^{(n)}, M_\alpha^{(n)})$ definind fiecare reprezentare a lui $M^{(n)}$.

- Calculează numărul total de elemente egale cu 1 din matricele $M_\alpha^{(n)}$ și îl compară cu $\ell(M^{(n)})$ pentru a se asigura că numărul lor este exact $\ell(M^{(n)}) - 1$.

- Dacă este instruit să execute de-a lungul metodei (1), calculează matricea A a sistemului omogen de ecuații liniare care definește $\mathrm{End}(M^{(n)})$ și arată că poate fi adusă la formă scară redusă efectuând exact aceleași operații elementare rezultând în exact aceeași matrice (formal) dacă este luată în considerare în orice corp. În acest fel, se asigură că corangul lui A este independent de corp. Menționăm că poate funcționa în acest mod numai cu formule în care n are o valoare concretă dată.

- Dacă este instruit (și i se oferă suficiente date) efectuează toate verificările cerute de metodele (2) sau (3) bazate pe Propunerea II.2.3. Mai întâi verifică lista furnizată în [39] pentru a vedea că ambele perechi (X, Y) și (X', Y') sunt perechi Schofield asociate excepționalului indecompozabil $Z \in \mathrm{mod}\, kQ$, astfel încât $\underline{\dim} Z = \underline{\dim} M^{(n)}$, apoi verifică condițiile (c) și (d) din Propoziția II.2.3. Se asigură că cerințele lemei II.2.5 sunt îndeplinite și condiția (d) este validată. În sfârșit, asigură existența a două șiruru exacte scurte de forma $0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} M^{(n)} \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$ și $0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{f'} M^{(n)} \xrightarrow{g'} X' \longrightarrow 0$ citind matricele morfismelor f, f', g si g' și arătând că fiecare operație elementară și aritmetică cu matrice bloc pot fi efectuate într-un mod independent de corp pentru a îndeplini fiecare cerință a Lemei II.2.4.

Fiecare operațiune efectuată de software-ul asistent de probă este scrisă într-un document de ieșire LaTeX (acesta este apendicele generat destul de lung, [15]). Totul (inclusiv operațiile elementare și detaliile calculării sumelor și produselor matricei bloc) este detaliat pas cu pas, ca și cum ar fi scris „de mână”. În acest fel, nu trebuie neapărat ca cineva să creadă în corectitudinea implementării, deoarece dovada completă este „pe hârtie” și fiecare pas poate fi verificat de un matematician uman.

II.2.1 Notații

Matricele date în Secțiunea II.3 sunt scrise folosind blocuri de diferite dimensiuni. Dimensiunea rândurilor și coloanelor blocurilor sunt date de expresii de forma $an + b$, unde $n \in \mathbb{N}$ este un parametru, a este un număr întreg nenegativ dat, b este un număr întreg dat. Fiecare matrice de aici este compusă fie din blocuri de identitate, fie din blocuri dreptunghiulare zero. Notăm blocul de identitate doar cu 1 și blocul zero cu 0. Dimensiunile rândurilor și coloanelor vor fi scrise ca „decorări” de-a lungul marginii matricei, ca în exemplul următor:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 2n{+}2 & 2n{+}2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2n{+}2 \\ n{+}1 \\ 2n{+}2 \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

unde această matrice este de dimensiunea $(6n{+}5){\times}(4n{+}4)$ și este compusă din două blocuri de identitate (fiecare având $2n + 2$ rânduri și coloane) și șase blocuri zero cu diferite dimensiuni compatibile.

Matricele pot fi date folosind expresii aritmetice care conțin matrice bloc simbolice și identificatori care fac referire la alte matrice. Operațiile posibile sunt: adunarea, suma directă definită ca $A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ și un tip special de „suma” notat cu $\boxplus$ care adaugă matricea din partea dreaptă în colțul din dreapta sus al matricei din partea stângă. Formal: dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$ și $B \in \mathcal{M}_{m',n'}(k)$ sunt matrice astfel încât $m` \leq m$ și $n\jmath \leq n$, apoi $A \boxplus B = A + \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, unde $\begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$ se obține prin adăugarea a cât mai multe coloane zero la stânga lui B și a cât mai multe rânduri zero dedesubt pentru a face matricea rezultată de aceeași dimensiune cu matricea A. Această operație este utilă pentru a introduce elemente diferite de zero în partea dreaptă sus a unei matrice obținute prin sumă directă.

Reprezentările sunt date ca familii având matrice bloc similare. De exemplu prin $P(6n{+}4, 5)$ notăm o astfel de familie de reprezentări (unde $n \in \mathbb{N}$). Uneori avem nevoie de valoarea anterioară sau următoare a n atunci când scriem matrice în termenii altora, prin urmare trebuie să înlocuim n. Substituția se notează ca $P(6n + 4, 5)[n \mapsto n - 1]$, care în acest caz este modulul $P(6n - 2, 5)$ pentru orice valoare fixă a lui n.

Pentru o reprezentare $Z = (Z_i, Z_\alpha)$ dăm doar matricele Z_α. Pentru un modul Z și o săgeată $\alpha \in Q_1$ notăm matricea Z_α cu M^Z_α. În cazul când dăm toate matricele „după valoare” o reprezentare se va scrie astfel (cu $d_i \in \mathbb{N}$ unde $i \in Q_0$ și cu matricele M^Z_α în această ordine specifică):

$$\begin{aligned} \underline{\dim} Z &= (d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5,\ d_6,\ d_7) \\ Z &= \left(M^Z_{1\to 2},\ M^Z_{2\to 3},\ M^Z_{4\to 3},\ M^Z_{5\to 4},\ M^Z_{6\to 3},\ M^Z_{7\to 6}\right). \end{aligned}$$

Există o altă notație, la scrierea matricelor cu expresii folosind operațiile $\oplus$ și $\boxplus$, referindu-se la alte matrice de reprezentări. În acest caz, există întotdeauna alte două reprezentări Y, X și o săgeată specifică α' astfel încât matricele lui Z pot fi date ca $M^Z_\alpha = M^Y_\alpha \oplus M^X_\alpha$ pentru toți $\alpha \neq \alpha'$ și $M^Z_{\alpha'} = \left(M^Y_{\alpha'} \oplus M^X_{\alpha'}\right) \boxplus M$

pentru o matrice M care contine exact un element egal cu 1 si toate celelalte elemente fiind zero. Prin urmare, dăm reprezentarea Z în următoarea formă (specificând matricea M):

$$\begin{aligned} \underline{\dim} Z &= (d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5,\ d_6,\ d_7) \\ M_\alpha^Z &= M_\alpha^Y \oplus M_\alpha^X, \text{ for } \alpha \neq \alpha' \\ M_{\alpha'}^Z &= \left(M_{\alpha'}^Y \oplus M_{\alpha'}^X\right) \boxplus M. \end{aligned}$$

Pentru valori mici de n putem da unele reprezentări concret (formula generală poate funcționa numai pentru $n > 0$ sau $n > 1$ în unele cazuri).

II.3 Reprezentări de tip arbore ale tolbei $\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)$

În această secțiune listăm formulele care descriu matricele reprezentărilor corespunzătoare modulelor excepționale: preproiective indecompozabile (Subsecțiunea II.3.1), preinjective indecompozabile (Secțiunea II.3.2) și regulare neomogene indecompozabile cu vector de dimensiune sub δ (Subsecțiunea II.3.3). Pentru comoditate, la începutul fiecăreia dintre următoarele subsecțiuni, prezentăm o reprezentare grafică a părții corespunzătoare a tolbei Auslander–Reiten. Prin săgețile albastre notăm existența unui așa-numit monomorfism ireductibil, în timp ce prin săgețile roșii notăm epimorfisme ireductibile între modulele indecompozabile adecvate (pentru detalii vezi [3]).

În cazul preproiectivelor și preinjectivelor, reprezentările pot fi grupate în familii de forma $P(6n+r, i)$ respectiv $I(6n + r, i)$, unde $i \in \{1, \dots, 7\}$ și $r \in \{0, \dots, 5\}$. Reprezentările aparținând aceleiași familii au matrice și vectori de dimensiune similare, în funcție doar de parametrul $n \in \mathbb{N}$. Matricele enumerate aici sunt demonstrare riguros ca fiind corecte în anexa la acest articol ([15]) folosind metoda descrisă în Subsecțiunea II.2.

II.3.1 Reprezentările preproiective indecompozabile

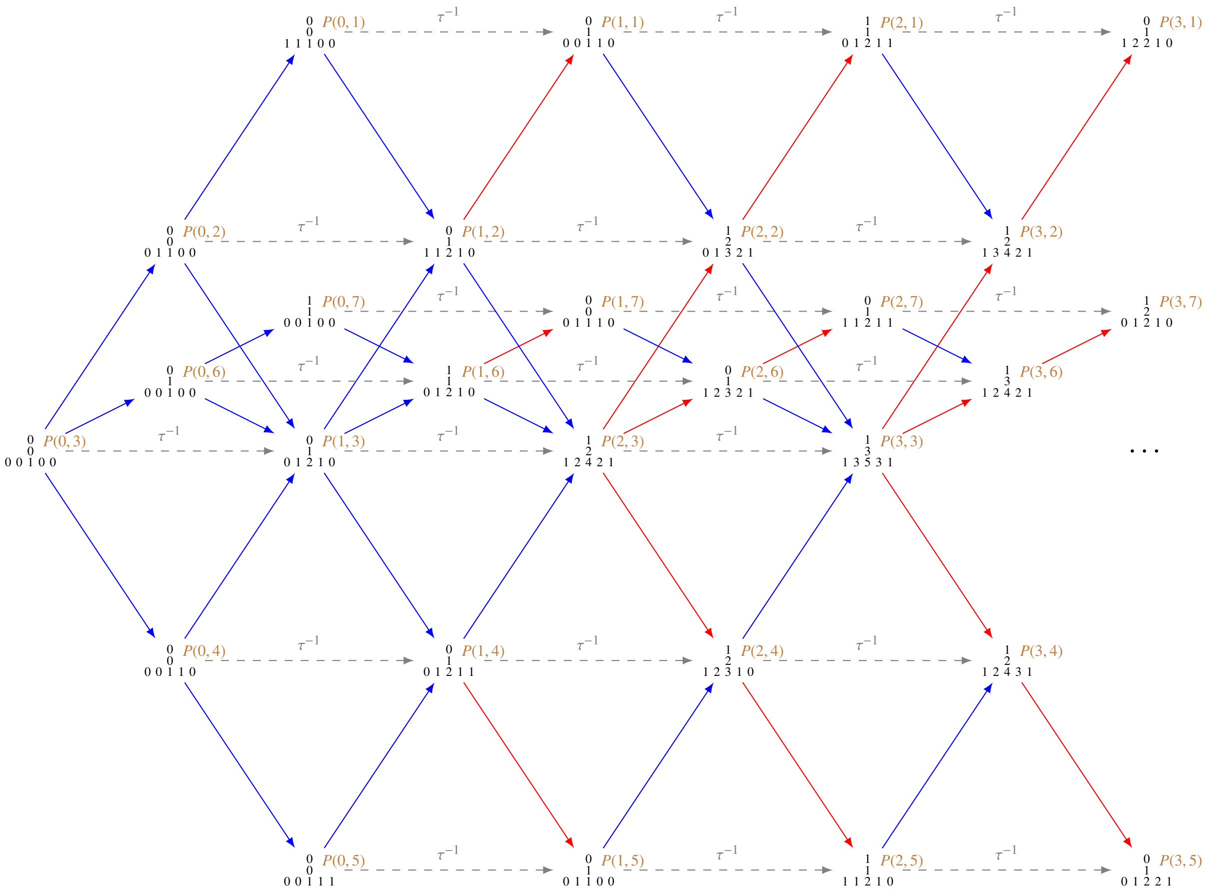
Modulele preproiective indecompozabile corespund vârfurilor părții preproiective a tolbei Auslander–Reiten, așa cum se arată în Figura II.1.

Datorită simetriei tolbei $\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)$ dăm numai familiile de reprezentări de forma $P(m, 1)$, $P(m, 2)$ și $P(m, 3)$. Pentru toate celelalte reprezentări putem folosi permutările $\sigma = (1, 5)(2, 4)$ și $\tau = (1, 7)(2, 6)$ pentru a le scrie în termeni de $P(m, 1)$, $P(m, 2)$ și $P(m, 3)$ în felul următor ($m \geq 0$):

$$\underline{\dim} P(m, 5) = (d_{\sigma(i)})_{i \in \Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_0} \text{ și } \underline{\dim} P(m, 7) = (d_{\tau(i)})_{i \in \Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_0},$$

unde $\underline{\dim} P(m, 1) = (d_i)_{i \in \Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_0}$,

$$\underline{\dim} P(m, 4) = (d_{\sigma(i)})_{i \in \Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_0} \text{ și } \underline{\dim} P(m, 6) = (d_{\tau(i)})_{i \in \Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_0},$$



Partea preproiectivă a tolbei Auslander–Reiten $\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)$

unde $\underline{\dim}P(m,2) = (d_i)_{i\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_0}$ pentru vectorii de dimensiune, respectiv

$$P(m,5) = \left(M_{\sigma(i)\to\sigma(j)}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_1} \text{ and } P(m,7) = \left(M_{\tau(i)\to\tau(j)}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_1},$$

unde $P(m,1) = \left(M_{i\to j}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_1}$,

$$P(m,4) = \left(M_{\sigma(i)\to\sigma(j)}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_1} \text{ and } P(m,6) = \left(M_{\tau(i)\to\tau(j)}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_1},$$

unde $P(m,2) = \left(M_{i\to j}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_1}$ pentru matrice.

În cele ce urmează vom enumera reprezentările de tip arbore pentru familiile preproiective de forma $P(m,1)$, $P(m,2)$ și $P(m,3)$:

$$\underline{\dim}P(6n,1) = (n+1, 2n+1, 3n+1, 2n, n, 2n, n)$$

$$P(6n,1) = \left(\begin{array}{cc} & n+1 \\ n+1 & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ n & \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n+1 \\ 2n+1 & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ n & \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n \\ 2n & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ n+1 & \end{array} + \begin{array}{cc} & 2n \\ n+1 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 2n & \end{array}, \begin{array}{cc} & n \\ n & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ n & \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n \\ n+1 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 2n & \end{array}, \begin{array}{cc} & n \\ n & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ n & \end{array} \right)$$

$\underline{\dim} P(6n+1,1) = (n, 2n, 3n+1, 2n+1, n, 2n+1, n)$

$$P(6n+1,1) = \left(\begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \overset{n}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} 2n \\ n+1 \end{matrix} \overset{2n}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + \begin{matrix} n+1 \\ 2n \end{matrix} \overset{2n}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} 2n+1 \\ n \end{matrix} \overset{2n+1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n \\ n+1 \end{matrix} \overset{n}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n \\ 2n+1 \end{matrix} \overset{2n+1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n+1 \\ n \end{matrix} \overset{n}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right)$$

$\underline{\dim} P(6n+2,1) = (n, 2n+1, 3n+2, 2n+1, n+1, 2n+1, n+1)$

$$P(6n+2,1) = \left(\begin{matrix} n \\ n \\ 1 \end{matrix} \overset{n}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} 2n+1 \\ n+1 \end{matrix} \overset{2n+1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + \begin{matrix} n+1 \\ 2n+1 \end{matrix} \overset{2n+1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} 2n+1 \\ n+1 \end{matrix} \overset{2n+1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n+1 \\ n \end{matrix} \overset{n+1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n+1 \\ 2n+1 \end{matrix} \overset{2n+1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n \\ n+1 \end{matrix} \overset{n+1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right)$$

$\underline{\dim} P(6n+3,1) = (n+1, 2n+2, 3n+2, 2n+1, n, 2n+1, n)$

$$P(6n+3,1) = \left(\begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \overset{n+1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n \\ 2n+2 \end{matrix} \overset{2n+2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} 2n+1 \\ n+1 \end{matrix} \overset{2n+1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n \\ n+1 \end{matrix} \overset{n}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} 2n+1 \\ n+1 \end{matrix} \overset{2n+1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + \begin{matrix} n+1 \\ 2n+1 \end{matrix} \overset{2n+1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n \\ n \\ 1 \end{matrix} \overset{n}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \right)$$

$\underline{\dim} P(6n+4,1) = (n+1, 2n+1, 3n+3, 2n+2, n+1, 2n+2, n+1)$

$$P(6n+4,1) = \left(\begin{matrix} n+1 \\ n \end{matrix} \overset{n+1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} 2n+1 \\ n+2 \end{matrix} \overset{2n+1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} 2n+2 \\ n+1 \end{matrix} \overset{2n+2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + \begin{matrix} n+1 \\ 2n+2 \end{matrix} \overset{2n+2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n \\ 1 \\ 1 \\ n \end{matrix} \overset{\begin{matrix} n & \quad 1 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n+1 \\ 2n+2 \end{matrix} \overset{2n+2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \overset{n+1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right)$$

$\underline{\dim} P(6n+5,1) = (n, 2n+2, 3n+3, 2n+2, n+1, 2n+2, n+1)$

$$P(6n+5,1) = \left(\begin{matrix} n \\ 2 \\ n \end{matrix} \overset{n}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} 2n+2 \\ n+1 \end{matrix} \overset{2n+2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + \begin{matrix} n+1 \\ 2n+2 \end{matrix} \overset{2n+2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} 2n+2 \\ n+1 \end{matrix} \overset{2n+2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \overset{n+1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n+1 \\ 2n+2 \end{matrix} \overset{2n+2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \overset{n+1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right)$$

$\underline{\dim} P(6n,2) = (2n, 4n+1, 6n+1, 4n, 2n, 4n, 2n)$

$$P(0,2) = \left(0, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, 0, 0, 0, 0\right)$$

$$M_\alpha^{P(6n,2)} = M_\alpha^{P(6n+5,1)[n \mapsto n-1]} \oplus M_\alpha^{P(6n,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (7 \to 6)$$

$$M_{7\to 6}^{P(6n,2)} = \left(M_{7\to 6}^{P(6n+5,1)[n \mapsto n-1]} \oplus M_{7\to 6}^{P(6n,1)} \right) \boxplus \begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} 1 & \quad n-1 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}, \quad n > 0$$

$$\underline{\dim} P(6n+1,2) = (2n+1, 4n+1, 6n+2, 4n+1, 2n, 4n+1, 2n)$$

$$P(1,2) = \left(\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, 0 \right)$$

$$M_\alpha^{P(6n+1,2)} = M_\alpha^{P(6n,1)} \oplus M_\alpha^{P(6n+1,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (7 \to 6)$$

$$M_{7\to 6}^{P(6n+1,2)} = \left(M_{7\to 6}^{P(6n,1)} \oplus M_{7\to 6}^{P(6n+1,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \begin{array}{c} n-1 \\ 1 \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0$$

$$\underline{\dim} P(6n+2,2) = (2n, 4n+1, 6n+3, 4n+2, 2n+1, 4n+2, 2n+1)$$

$$M_\alpha^{P(6n+2,2)} = M_\alpha^{P(6n+1,1)} \oplus M_\alpha^{P(6n+2,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (7 \to 6)$$

$$M_{7\to 6}^{P(6n+2,2)} = \left(M_{7\to 6}^{P(6n+1,1)} \oplus M_{7\to 6}^{P(6n+2,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & n \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ 1 \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underline{\dim} P(6n+3,2) = (2n+1, 4n+3, 6n+4, 4n+2, 2n+1, 4n+2, 2n+1)$$

$$P(3,2) = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right)$$

$$M_\alpha^{P(6n+3,2)} = M_\alpha^{P(6n+2,1)} \oplus M_\alpha^{P(6n+3,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (7 \to 6)$$

$$M_{7\to 6}^{P(6n+3,2)} = \left(M_{7\to 6}^{P(6n+2,1)} \oplus M_{7\to 6}^{P(6n+3,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \begin{array}{c} n-1 \\ 1 \\ n+1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0$$

$$\underline{\dim} P(6n+4,2) = (2n+2, 4n+3, 6n+5, 4n+3, 2n+1, 4n+3, 2n+1)$$

$$M_\alpha^{P(6n+4,2)} = M_\alpha^{P(6n+3,1)} \oplus M_\alpha^{P(6n+4,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (7 \to 6)$$

$$M_{7\to 6}^{P(6n+4,2)} = \left(M_{7\to 6}^{P(6n+3,1)} \oplus M_{7\to 6}^{P(6n+4,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ 1 \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underline{\dim} P(6n+5,2) = (2n+1, 4n+3, 6n+6, 4n+4, 2n+2, 4n+4, 2n+2)$$

$$M_\alpha^{P(6n+5,2)} = M_\alpha^{P(6n+3,5)} \oplus M_\alpha^{P(6n,7)[n\mapsto n+1]}, \quad \text{for } \alpha \neq (1 \to 2)$$

$$M_{1\to 2}^{P(6n+5,2)} = \left(M_{1\to 2}^{P(6n+3,5)} \oplus M_{1\to 2}^{P(6n,7)[n\mapsto n+1]}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & n \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ 1 \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underline{\dim} P(6n,3) = (3n,6n,9n+1,6n,3n,6n,3n)$$
$$P(0,3) = (0,0,0,0,0,0)$$
$$M_\alpha^{P(6n,3)} = M_\alpha^{P(6n+5,2)[n\mapsto n-1]} \oplus M_\alpha^{P(6n,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (7\to 6)$$
$$M_{7\to6}^{P(6n,3)} = \left(M_{7\to6}^{P(6n+5,2)[n\mapsto n-1]} \oplus M_{7\to6}^{P(6n,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n-1 & 1\end{array} \\ \begin{array}{c} n-1\\ 1\\ 3n\end{array} & \begin{bmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\end{array}, \quad n>0$$

$$\underline{\dim} P(6n+1,3) = (3n,6n+1,9n+2,6n+1,3n,6n+1,3n)$$
$$P(1,3) = \left(0, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, 0\right)$$
$$M_\alpha^{P(6n+1,3)} = M_\alpha^{P(6n,2)} \oplus M_\alpha^{P(6n+1,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (7\to 6)$$
$$M_{7\to6}^{P(6n+1,3)} = \left(M_{7\to6}^{P(6n,2)} \oplus M_{7\to6}^{P(6n+1,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & n-1\end{array} \\ \begin{array}{c} 3n-1\\ 1\\ n\end{array} & \begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix}\end{array}, \quad n>0$$

$$\underline{\dim} P(6n+2,3) = (3n+1,6n+2,9n+4,6n+2,3n+1,6n+2,3n+1)$$
$$P(2,3) = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$$
$$M_\alpha^{P(6n+2,3)} = M_\alpha^{P(6n+1,2)} \oplus M_\alpha^{P(6n+2,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (7\to 6)$$
$$M_{7\to6}^{P(6n+2,3)} = \left(M_{7\to6}^{P(6n+1,2)} \oplus M_{7\to6}^{P(6n+2,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & n\end{array} \\ \begin{array}{c} 3n\\ 1\\ n\end{array} & \begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix}\end{array}, \quad n>0$$

$$\underline{\dim} P(6n+3,3) = (3n+1,6n+3,9n+5,6n+3,3n+1,6n+3,3n+1)$$
$$P(3,3) = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$M_\alpha^{P(6n+3,3)} = M_\alpha^{P(6n+2,2)} \oplus M_\alpha^{P(6n+3,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (7\to 6)$$
$$M_{7\to6}^{P(6n+3,3)} = \left(M_{7\to6}^{P(6n+2,2)} \oplus M_{7\to6}^{P(6n+3,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & n-1\end{array} \\ \begin{array}{c} 3n\\ 1\\ n+1\end{array} & \begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix}\end{array}, \quad n>0$$

$$\underline{\dim} P(6n+4,3) = (3n+2, 6n+4, 9n+7, 6n+4, 3n+2, 6n+4, 3n+2)$$
$$M_\alpha^{P(6n+4,3)} = M_\alpha^{P(6n+3,2)} \oplus M_\alpha^{P(6n+4,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (7 \to 6)$$
$$M_{7\to 6}^{P(6n+4,3)} = \left(M_{7\to 6}^{P(6n+3,2)} \oplus M_{7\to 6}^{P(6n+4,1)}\right) \boxplus \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3n+1 \\ 1 \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underline{\dim} P(6n+5,3) = (3n+2, 6n+5, 9n+8, 6n+5, 3n+2, 6n+5, 3n+2)$$
$$M_\alpha^{P(6n+5,3)} = M_\alpha^{P(6n+3,5)} \oplus M_\alpha^{P(6n+5,4)}, \quad \text{for } \alpha \neq (2 \to 3)$$
$$M_{2\to 3}^{P(6n+5,3)} = \left(M_{2\to 3}^{P(6n+3,5)} \oplus M_{2\to 3}^{P(6n+5,4)}\right) \boxplus \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 4n+3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3n+1 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

II.3.2 Modulele preinjective indecompozabile

Modulele preinjective indecompozabile corespund vârfurilor părții preinjective a tolbei Auslander–Reiten, așa cum se arată în Figura II.1.

Datorită simetriei tolbei $\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)$ dăm numai familiile de reprezentări de forma $I(m,1)$, $I(m,2)$ și $I(m,3)$. Pentru toate celelalte reprezentări putem folosi permutările $\sigma = (1,5)(2,4)$ și $\tau = (1,7)(2,6)$ pentru a le scrie în termeni de $I(m,1)$, $I(m,2)$ și $I(m,3)$ în felul următor ($m \geq 0$):

$$\underline{\dim} I(m,5) = (d_{\sigma(i)})_{i\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_0} \text{ și } \underline{\dim} I(m,7) = (d_{\tau(i)})_{i\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_0},$$

unde $\underline{\dim} I(m,1) = (d_i)_{i\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_0}$,

$$\underline{\dim} I(m,4) = (d_{\sigma(i)})_{i\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_0} \text{ și } \underline{\dim} I(m,6) = (d_{\tau(i)})_{i\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_0},$$

unde $\underline{\dim} I(m,2) = (d_i)_{i\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_0}$ pentru vectorii de dimensiune, respectiv

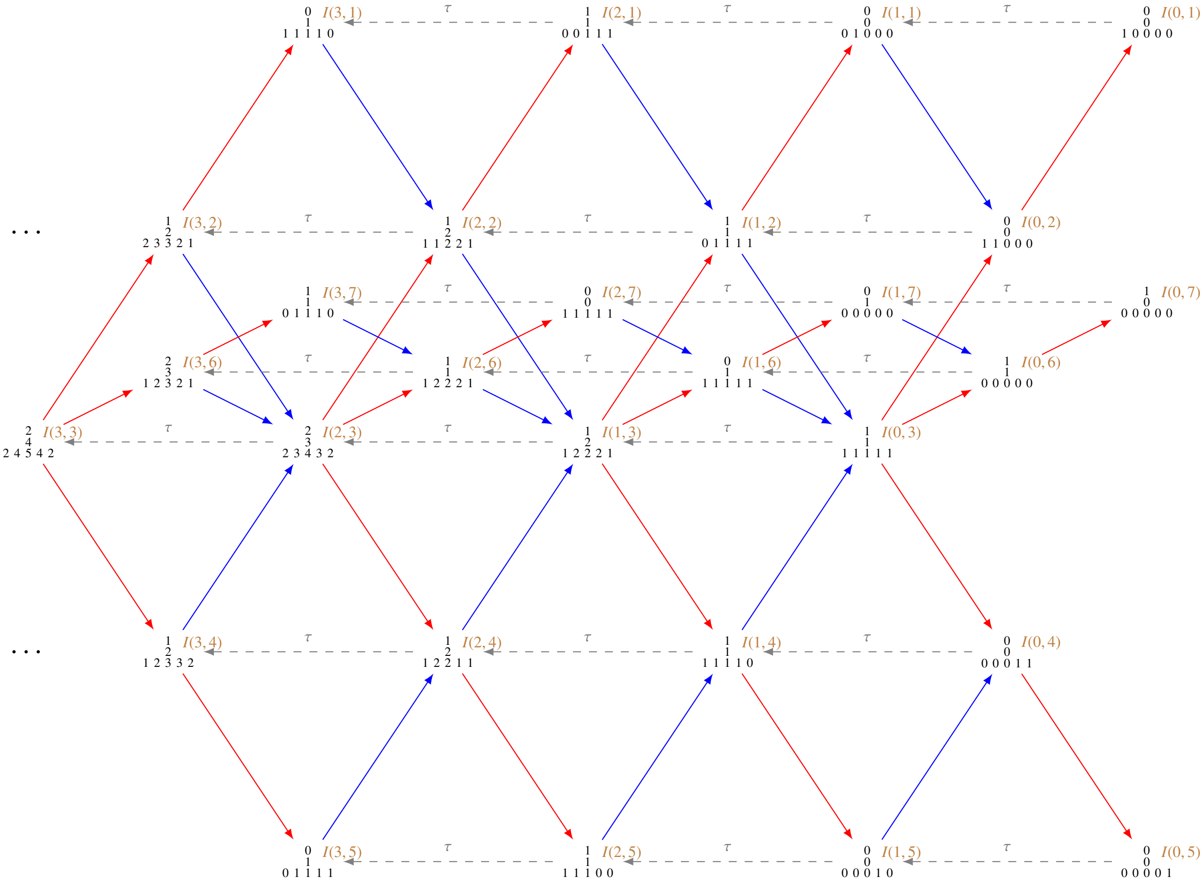
$$I(m,5) = \left(M_{\sigma(i)\to\sigma(j)}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_1} \text{ și } I(m,7) = \left(M_{\tau(i)\to\tau(j)}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_1},$$

unde $I(m,1) = \left(M_{i\to j}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_1}$,

$$I(m,4) = \left(M_{\sigma(i)\to\sigma(j)}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_1} \text{ și } I(m,6) = \left(M_{\tau(i)\to\tau(j)}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_1},$$

unde $I(m,2) = \left(M_{i\to j}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)_1}$ pentru matrice.

În cele ce urmează vom enumera reprezentările de tip arbore pentru familiile preproiective de forma $I(m,1)$, $I(m,2)$ și $I(m,3)$:



Partea preinjectivă a tolbei Auslander–Reiten

$$\underline{\dim} I(6n,1) = (n+1, 2n, 3n, 2n, n, 2n, n)$$
$$I(0,1) = (0,0,0,0,0,0)$$

$$I(6n,1) = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} n-1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n-1 \\ 2 \\ n-1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c|c} & 2n \\ \begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{c|c} & 2n \\ \begin{array}{c} n \\ 2n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c|c} & 2n \\ \begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c|c} & n \\ \begin{array}{c} n \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c|c} & 2n \\ \begin{array}{c} n \\ 2n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c|c} & n \\ \begin{array}{c} n \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right), \quad n > 0$$

$$\underline{\dim} I(6n+1,1) = (n, 2n+1, 3n, 2n, n, 2n, n)$$
$$I(1,1) = (0,0,0,0,0,0)$$

$$I(6n+1,1)=\left(\begin{array}{cc} & n \\ \begin{matrix}1\\n\\n\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n{+}1 \\ \begin{matrix}2n{+}1\\n{-}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2n{-}1\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\n\\2n{-}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & n{-}1\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\n{-}1\\1\\n{-}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\end{array},\right.$$

$$\left.\begin{array}{cc} & 2n \\ \begin{matrix}2n\\n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}+\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2n{-}1\end{matrix} \\ \begin{matrix}n{+}1\\2n{-}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & n{-}1\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\1\\n{-}1\\n{-}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\end{array}\right),\qquad n>0$$

$\underline{\dim}I(6n+2,1)=(n,2n,3n+1,2n+1,n+1,2n+1,n+1)$

$$I(6n+2,1)=\left(\begin{array}{cc} & n \\ \begin{matrix}n\\n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n \\ \begin{matrix}2n\\n{+}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}+\begin{array}{cc} & 2n \\ \begin{matrix}n{+}1\\2n\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n{+}1 \\ \begin{matrix}2n{+}1\\n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & n{+}1 \\ \begin{matrix}n{+}1\\n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n{+}1 \\ \begin{matrix}n\\2n{+}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & n{+}1 \\ \begin{matrix}n\\n{+}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array}\right)$$

$\underline{\dim}I(6n+3,1)=(n+1,2n+1,3n+1,2n+1,n,2n+1,n)$

$$I(3,1)=\left(\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},0,\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},0\right)$$

$$I(6n+3,1)=\left(\begin{array}{cc} & n{+}1 \\ \begin{matrix}1\\n{+}1\\n{-}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\end{array}+\begin{array}{cc} & \begin{matrix}n{-}1 & 2\end{matrix} \\ \begin{matrix}n{+}2\\n{-}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n{+}1 \\ \begin{matrix}2n{+}1\\n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}+\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2n\end{matrix} \\ \begin{matrix}n{+}1\\2n\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\end{array},\right.$$

$$\left.\begin{array}{cc} & 2n{+}1 \\ \begin{matrix}2n{+}1\\n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & n{-}1\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\1\\n{-}1\\n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2n\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\n\\2n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & n \\ \begin{matrix}n{+}1\\n\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array}\right),\qquad n>0$$

$\underline{\dim}I(6n+4,1)=(n+1,2n+2,3n+2,2n+1,n+1,2n+1,n+1)$

$$I(6n+4,1)=\left(\begin{array}{cc} & n{+}1 \\ \begin{matrix}n{+}1\\n{+}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n{+}2 \\ \begin{matrix}2n{+}2\\n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n{+}1 \\ \begin{matrix}n{+}1\\2n{+}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & n{+}1 \\ \begin{matrix}n\\n{+}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n{+}1 \\ \begin{matrix}2n{+}1\\n{+}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}+\begin{array}{cc} & 2n{+}1 \\ \begin{matrix}n{+}1\\2n{+}1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & n\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\n\\n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\end{array}\right)$$

$\underline{\dim}I(6n+5,1)=(n,2n+1,3n+2,2n+2,n+1,2n+2,n+1)$

$$I(5,1)=\left(0,\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$I(6n+5,1) = \left(\begin{array}{cc} & n \\ \begin{matrix} 1 \\ n \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n{+}1 \\ \begin{matrix} 2n{+}1 \\ n{+}1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2n \end{matrix} \\ \begin{matrix} n{+}2 \\ 2n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n{+}2 \\ \begin{matrix} 2n{+}2 \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ n \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2n{+}1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ n \\ 2n{+}1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & n{+}1 \\ \begin{matrix} n{+}1 \\ n{+}1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right),$$

$n > 0$

$$\underline{\dim} I(6n,2) = (2n+1, 4n+1, 6n, 4n, 2n, 4n, 2n)$$

$$I(0,2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, 0, 0, 0, 0, 0\right)$$

$$M_\alpha^{I(6n,2)} = M_\alpha^{I(6n+1,1)} \oplus M_\alpha^{I(6n,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 4)$$

$$M_{5\to4}^{I(6n,2)} = \left(M_{5\to4}^{I(6n+1,1)} \oplus M_{5\to4}^{I(6n,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & n{-}1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n{-}1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0$$

$$\underline{\dim} I(6n+1,2) = (2n, 4n+1, 6n+1, 4n+1, 2n+1, 4n+1, 2n+1)$$

$$I(1,2) = \left(0, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$M_\alpha^{I(6n+1,2)} = M_\alpha^{I(6n+3,7)} \oplus M_\alpha^{I(6n,5)}, \quad \text{for } \alpha \neq (1 \to 2)$$

$$M_{1\to2}^{I(6n+1,2)} = \left(M_{1\to2}^{I(6n+3,7)} \oplus M_{1\to2}^{I(6n,5)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & n{-}1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0$$

$$\underline{\dim} I(6n+2,2) = (2n+1, 4n+1, 6n+2, 4n+2, 2n+1, 4n+2, 2n+1)$$

$$I(2,2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$M_\alpha^{I(6n+2,2)} = M_\alpha^{I(6n+3,1)} \oplus M_\alpha^{I(6n+2,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (2 \to 3)$$

$$M_{2\to3}^{I(6n+2,2)} = \left(M_{2\to3}^{I(6n+3,1)} \oplus M_{2\to3}^{I(6n+2,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2n{-}1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 3n{-}1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0$$

$$\underline{\dim} I(6n+3,2) = (2n+2, 4n+3, 6n+3, 4n+2, 2n+1, 4n+2, 2n+1)$$

$$M_\alpha^{I(6n+3,2)} = M_\alpha^{I(6n+5,5)} \oplus M_\alpha^{I(6n+2,7)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 4)$$

$$M_{5\to4}^{I(6n+3,2)} = \left(M_{5\to4}^{I(6n+5,5)} \oplus M_{5\to4}^{I(6n+2,7)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underline{\dim} I(6n+4,2) = (2n+1, 4n+3, 6n+4, 4n+3, 2n+2, 4n+3, 2n+2)$$

$$M_\alpha^{I(6n+4,2)} = M_\alpha^{I(6n+5,1)} \oplus M_\alpha^{I(6n+4,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 4)$$

$$M^{I(6n+4,2)}_{5\to4} = \left(M^{I(6n+5,1)}_{5\to4} \oplus M^{I(6n+4,1)}_{5\to4}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2n+1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underline{\dim} I(6n+5,2) = (2n+2, 4n+3, 6n+5, 4n+4, 2n+2, 4n+4, 2n+2)$$

$$M^{I(6n+5,2)}_{\alpha} = M^{I(6n+1,5)[n\mapsto n+1]}_{\alpha} \oplus M^{I(6n+4,7)}_{\alpha}, \quad \text{for } \alpha \neq (5\to4)$$

$$M^{I(6n+5,2)}_{5\to4} = \left(M^{I(6n+1,5)[n\mapsto n+1]}_{5\to4} \oplus M^{I(6n+4,7)}_{5\to4}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2n+1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underline{\dim} I(6n,3) = (3n+1, 6n+1, 9n+1, 6n+1, 3n+1, 6n+1, 3n+1)$$

$$I(0,3) = \left(\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\right)$$

$$M^{I(6n,3)}_{\alpha} = M^{I(6n+1,6)}_{\alpha} \oplus M^{I(6n,7)}_{\alpha}, \quad \text{for } \alpha \neq (1\to2)$$

$$M^{I(6n,3)}_{1\to2} = \left(M^{I(6n+1,6)}_{1\to2} \oplus M^{I(6n,7)}_{1\to2}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n-1 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3n+2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n>0$$

$$\underline{\dim} I(6n+1,3) = (3n+1, 6n+2, 9n+2, 6n+2, 3n+1, 6n+2, 3n+1)$$

$$M^{I(6n+1,3)}_{\alpha} = M^{I(6n+3,1)}_{\alpha} \oplus M^{I(6n+1,2)}_{\alpha}, \quad \text{for } \alpha \neq (6\to3)$$

$$M^{I(6n+1,3)}_{6\to3} = \left(M^{I(6n+3,1)}_{6\to3} \oplus M^{I(6n+1,2)}_{6\to3}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 4n & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underline{\dim} I(6n+2,3) = (3n+2, 6n+3, 9n+4, 6n+3, 3n+2, 6n+3, 3n+2)$$

$$I(2,3) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$M^{I(6n+2,3)}_{\alpha} = M^{I(6n+3,4)}_{\alpha} \oplus M^{I(6n+2,5)}_{\alpha}, \quad \text{for } \alpha \neq (7\to6)$$

$$M^{I(6n+2,3)}_{7\to6} = \left(M^{I(6n+3,4)}_{7\to6} \oplus M^{I(6n+2,5)}_{7\to6}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4n+1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n>0$$

$$\underline{\dim} I(6n+3,3) = (3n+2, 6n+4, 9n+5, 6n+4, 3n+2, 6n+4, 3n+2)$$

$$M^{I(6n+3,3)}_{\alpha} = M^{I(6n+5,1)}_{\alpha} \oplus M^{I(6n+3,2)}_{\alpha}, \quad \text{for } \alpha \neq (2\to3)$$

$$M^{I(6n+3,3)}_{2\to3} = \left(M^{I(6n+5,1)}_{2\to3} \oplus M^{I(6n+3,2)}_{2\to3}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 4n+2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3n+1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underline{\dim} I(6n+4,3) = (3n+3, 6n+5, 9n+7, 6n+5, 3n+3, 6n+5, 3n+3)$$

$$M_\alpha^{I(6n+4,3)} = M_\alpha^{I(6n+5,6)} \oplus M_\alpha^{I(6n+4,7)}, \quad \text{for } \alpha \neq (2 \to 3)$$

$$M_{2\to 3}^{I(6n+4,3)} = \left(M_{2\to 3}^{I(6n+5,6)} \oplus M_{2\to 3}^{I(6n+4,7)}\right) \boxplus \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 7n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underline{\dim} I(6n+5,3) = (3n+3, 6n+6, 9n+8, 6n+6, 3n+3, 6n+6, 3n+3)$$

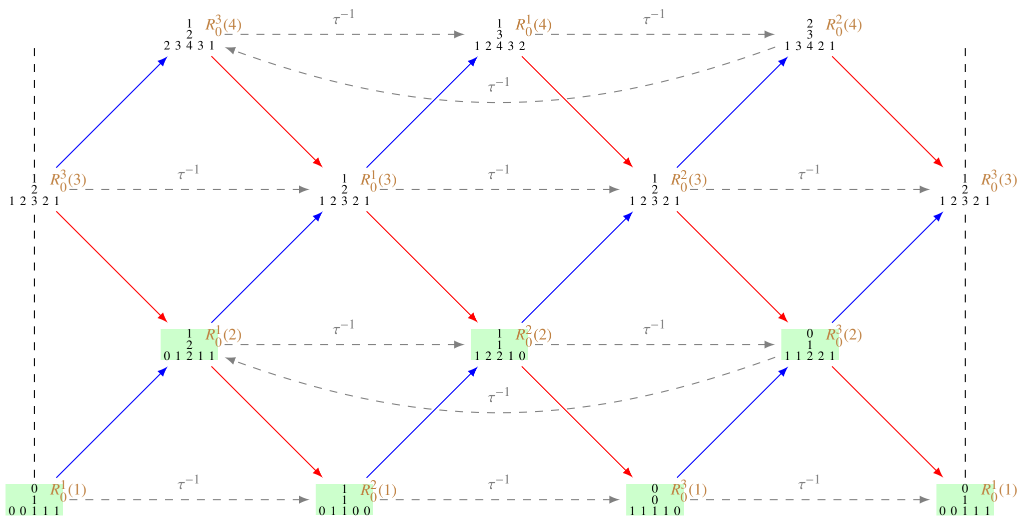
$$M_\alpha^{I(6n+5,3)} = M_\alpha^{I(6n+1,1)[n\mapsto n+1]} \oplus M_\alpha^{I(6n+5,2)}, \quad \text{for } \alpha \neq (7 \to 6)$$

$$M_{7\to 6}^{I(6n+5,3)} = \left(M_{7\to 6}^{I(6n+1,1)[n\mapsto n+1]} \oplus M_{7\to 6}^{I(6n+5,2)}\right) \boxplus \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2n{+}1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2n{+}1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

II.3.3 Modulele regulare excepționale

Există doar un număr finit de module excepționale regulare. Acestea sunt modulele regulare indecompozabile necompozabile cu vector de dimensiune mai mic decât $\delta = (1, 2, 3, 2, 1, 2, 1)$, marcate cu verde în Figurile II.3, II.4 and II.5. Menționăm că $\underline{\dim} R_0^l(3) = \underline{\dim} R_1^l(3) = \underline{\dim} R_\infty^{l'}(2) = \delta$, unde $l \in \{1, 2, 3\}$, $l' \in \{1, 2\}$.

Reprezentările simplelor regulare ale lui $\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)$ sunt, de asemenea, date în [34], le includem aici doar de dragul completitătții:



Tubul regular neomogen $\mathcal{T}_0^{\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)}$

$$\underline{\dim} R_0^1(1) = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0),$$
$$R_0^1(1) = \left(0, 0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, 0\right)$$

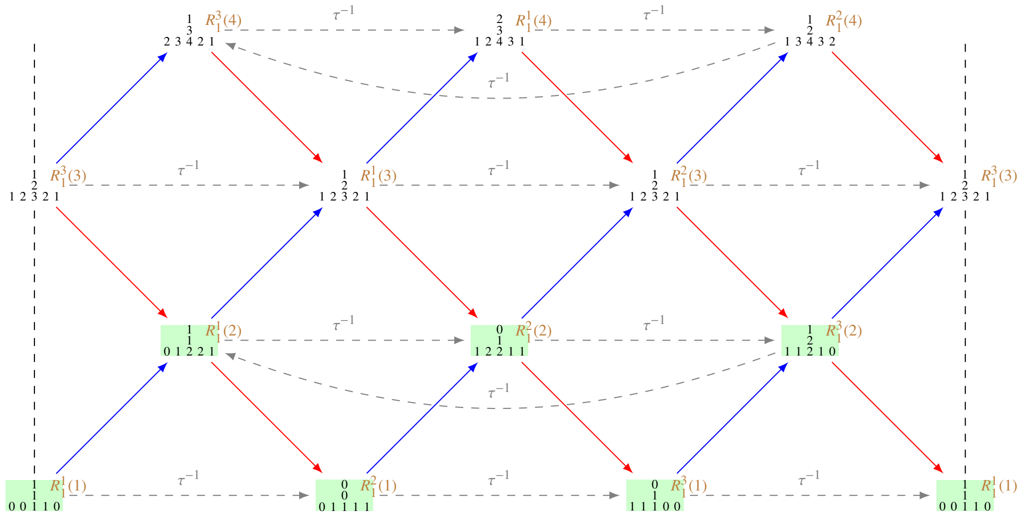
$$\underline{\dim} R_0^2(1) = (0,1,1,0,0,1,1),$$
$$R_0^2(1) = \left(0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, 0, 0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\right)$$

$$\underline{\dim} R_0^3(1) = (1,1,1,1,0,0,0)$$
$$R_0^3(1) = \left(\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, 0, 0, 0\right)$$

$$\underline{\dim} R_0^1(2) = (0,1,2,1,1,2,1),$$
$$R_0^1(2) = \left(0, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$\underline{\dim} R_0^2(2) = (1,2,2,1,0,1,1),$$
$$R_0^2(2) = \left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\right)$$

$$\underline{\dim} R_0^3(2) = (1,1,2,2,1,1,0),$$
$$R_0^3(2) = \left(\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, 0\right)$$



Tubul regular neomogen $\mathcal{T}_1^{\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)}$

$$\underline{\dim} R_1^1(1) = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1),$$
$$R_1^1(1) = \left(0, 0, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\right)$$

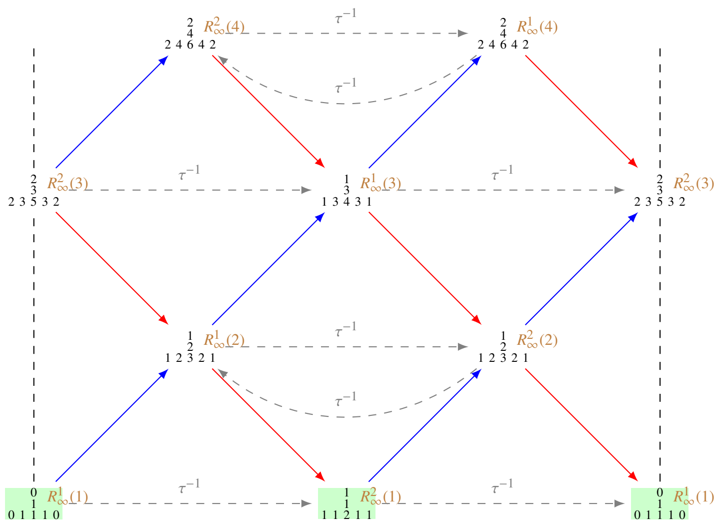
$$\underline{\dim} R_1^2(1) = (0, 1, 1, 1, 1, 0, 0),$$
$$R_1^2(1) = \left(0, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, 0, 0\right)$$

$$\underline{\dim} R_1^3(1) = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0),$$
$$R_1^3(1) = \left(\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, 0, 0, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, 0\right)$$

$$\underline{\dim} R_1^1(2) = (0, 1, 2, 2, 1, 1, 1),$$
$$R_1^1(2) = \left(0, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\underline{\dim} R_1^2(2) = (1, 2, 2, 1, 1, 1, 0),$$
$$R_1^2(2) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 0\right)$$

$$\underline{\dim} R_1^3(2) = (1, 1, 2, 1, 0, 2, 1),$$
$$R_1^3(2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$



Tubul regular neomogen $\mathcal{T}_\infty^{\Delta(\widetilde{\mathbb{E}}_6)}$

$$\begin{aligned}\underline{\dim} R^1_\infty(1) &= (0,1,1,1,0,1,0),\\ R^1_\infty(1) &= \left(0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, 0\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\dim} R^2_\infty(1) &= (1,1,2,1,1,1,1),\\ R^2_\infty(1) &= \left(\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

Capitolul III

Reprezentări de tip arbore ale tolbei $\widetilde{\mathbb{D}}_m$

În acest capitol vom prezenta o listă completă și generală a reprezentărilor de tip arbore corespunzătoare modulelor excepționale peste algebra de drumuri a tolbei euclidiene cu orientare canonică $\widetilde{\mathbb{D}}_m$. Demonstrația (care implică inducție și calcul simbolic cu matrice bloc) a fost parțial generată de un software de calculator dezvoltat intenționat și este disponibil pe arXiv ca anexă. Toate reprezentările enumerate rămân valabile peste orice corp de bază, răspunzând la o întrebare pusă de Ringel în [27]. Rezultatele prezentate aici au fost publicate în articolul [16] și în anexa acestuia [15].

III.1 Noțiuni de bază și definiții

Considerăm tolba euclidiană orientată canonic de tip $\widetilde{\mathbb{D}}_m$, notat de acum înainte cu $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$, având următoarea formă:

$$\begin{tikzcd}
2 & & & & & & 3 \arrow[dl] \\
& 5 \arrow[ul] \arrow[dl] & 6 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & m \arrow[l] & m+1 \arrow[l] & \\
1 & & & & & & 4 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Prin urmare, avem $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)_0 = \{1, \ldots, m, m+1\}$ și pentru că avem cel mult o săgeată care conectează două vârfuri diferite, mulțimea săgeților este următoarea:

$$\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)_1 = \{(5 \to 1),\ (5 \to 2),\ (3 \to m+1),\ (4 \to m+1),\ (6 \to 5),\ (7 \to 6),\ \ldots,\ (m+1 \to m)\}.$$

Forma Tits în acest caz este

$$q_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)}(x) = \frac{1}{4}\left((2x_1 - x_5)^2 + (2x_2 - x_5)^2 + (x_{m+1} - 2x_3)^2 + (x_{m+1} - 2x_4)^2 + 2\sum_{i=5}^{m}(x_i - x_{i+1})^2\right).$$

Menționăm că aceasta este independentă de orientarea tolbei și este semidefinită pozitivă cu radicalul $\mathbb{Z}\delta$, unde $\delta = (1, 1, 1, 1, 2, \ldots, 2)$.

III.2 Construirea reprezentărilor de tip arbore pentru $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$ din arbori pentru $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$

În această secțiune prezentăm o metodă explicită pentru rezolvarea următoarei probleme: având în vedere o rădăcină excepțională x în $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$ unde $m \geq 4$, să construim o reprezentare de tip arbore (excepțională) $M \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$ astfel încât $\underline{\dim} M = x$. Reamintim că o rădăcină reală pozitivă x este excepțională dacă $\partial x \neq 0$, sau dacă $\partial x = 0$ atunci $x < \delta$. Pe parcursul acestei secțiuni notăm matricea de identitate cu I_n (în cazul în care $n = 0$ luăm I_0 ca fiind morfismul nul).

Începem cu două leme privind forma rădăcinilor reale ale tolbei $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$, unde $m \geq 6$.

Lema III.2.1. *Fie x o rădăcină reală a tolbei $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$. Atunci x are una dintre următoarele forme:*

- $x^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \overbrace{a, \ldots, a}^{de\ i\ ori})$, *unde* $i = m - 3$;
- $x^{(2)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \overbrace{a, \ldots, a}^{de\ i\ ori}, \overbrace{b, \ldots, b}^{de\ j\ ori})$, *unde* $i, j \in \mathbb{N}^*$, $i + j = m - 3$ *și* $a \neq b$;
- $x^{(3)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \overbrace{a, \ldots, a}^{de\ i\ ori}, \overbrace{b, \ldots, b}^{de\ j\ ori}, \overbrace{a, \ldots, a}^{de\ k\ ori})$, *unde* $i, j, k \in \mathbb{N}^*$, $i + j + k = m - 3$ *și* $a \neq b$;
- $x^{(4)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \overbrace{a, \ldots, a}^{de\ i\ ori}, \overbrace{b, \ldots, b}^{de\ j\ ori}, \overbrace{c, \ldots, c}^{de\ k\ ori})$, *unde* $i, j, k \in \mathbb{N}^*$, $i+j+k = m-3$ *și* a, b, c *distincte două câte două.*

Combinând aceste patru posibilități pentru x obținem următoarea formă (alternativă):

Lema III.2.2. *Fie x o rădăcină reală a tolbei $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$. Atunci x are forma $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \overbrace{a, \ldots, a}^{de\ i\ ori}, \overbrace{b, \ldots, b}^{de\ j\ ori}, \overbrace{c, \ldots, c}^{de\ k\ ori})$ cu a, b și c nu neapărat distincte, $i, j, k \in \mathbb{N}^*$ și $i + j + k = m - 3$.*

Notăm prin $\mathfrak{R}_m$ mulţimea rădăcinilor excepţionale peste $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$.

Pentru $m \geq 7$ introducem $\mathfrak{p}_m : \mathfrak{R}_m \to \mathfrak{R}_6$, unde $\mathfrak{p}_m(x) = x'$ cu $x \in \mathfrak{R}_m$ construit conform următoarelor cazuri (după cum este specificat în Lema III.2.1):

- if $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \overbrace{a, \ldots, a}^{\text{de } i \text{ ori}})$, unde $i = m - 3$, then $x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, a, a, a)$;
- if $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \overbrace{a, \ldots, a}^{\text{de } i \text{ ori}}, \overbrace{b, \ldots, b}^{\text{de } j \text{ ori}})$, unde $i, j \in \mathbb{N}^*$, $i + j = m - 3$ și $a \neq b$, atunci $x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, a, a, b)$ când $i \geq 2$, altfel $x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, a, b, b)$;
- if $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \overbrace{a, \ldots, a}^{\text{de } i \text{ ori}}, \overbrace{b, \ldots, b}^{\text{de } j \text{ ori}}, \overbrace{a, \ldots, a}^{\text{de } k \text{ ori}})$, unde $i, j, k \in \mathbb{N}^*$, $i + j + k = m - 3$ și $a \neq b$, atunci $x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, a, b, a)$;
- if $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \overbrace{a, \ldots, a}^{\text{de } i \text{ ori}}, \overbrace{b, \ldots, b}^{\text{de } j \text{ ori}}, \overbrace{c, \ldots, c}^{\text{de } k \text{ ori}})$, unde $i, j, k \in \mathbb{N}^*$, $i + j + k = m - 3$ și a, b, c distincte două câte două, atunci $x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, a, b, c)$.

Lema III.2.3. *Pentru orice $m \geq 7$, $\mathfrak{p}_m : \mathfrak{R}_m \to \mathfrak{R}_6$ este o funcție surjectivă bine definită. Mai mult, sunt păstrate și defectele (adică pentru toți $x \in \mathfrak{R}_m$, $\partial_{k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)} x = \partial_{k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)} \mathfrak{p}_m(x)$).*

În desenele următoare, săgețile punctate reprezintă zero sau mai multe săgeți de forma $k^d \xleftarrow[I_d]{} k^d$ ($d \in \{a, b, c\}$), conectând vârfuri cu aceeași dimensiune, cu matrice de identitate adecvate asociate acestora. Putem enunța următoarea lemă:

Lema III.2.4. *Fie $m \geq 7$, $x \in \mathfrak{R}_m$ (ca în Lema III.2.2), $x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, a, b, c) \in \mathfrak{R}_6$ astfel încât $\mathfrak{p}_m(x) = x'$ și două reprezentări $M = (M_\alpha, M_i) \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$ și $M' = (M'_\alpha, M'_i) \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$ cu $\underline{\dim} M = x$ și $\underline{\dim} M' = x'$ având următoarele matrice:*

$$M: \quad \begin{tikzcd} k^{x_2} & & & & & & & k^{x_3} \arrow[dl, "A_3"] \\ & k^a \arrow[ul, "A_2"'] \arrow[dl, "A_1"] & k^a \arrow[l, dotted, "I_a"] & k^b \arrow[l, "A"] & k^b \arrow[l, dotted, "I_b"] & k^c \arrow[l, "B"] & k^c \arrow[l, dotted, "I_c"] & \\ k^{x_1} & & & & & & & k^{x_4} \arrow[ul, "A_4"] \end{tikzcd}$$

și

$$M': \quad \begin{tikzcd} k^{x_2} & & & & k^{x_3} \arrow[dl, "A_3"] \\ & k^a \arrow[ul, "A_2"'] \arrow[dl, "A_1"] & k^b \arrow[l, "A"] & k^c \arrow[l, "B"] & \\ k^{x_1} & & & & k^{x_4} \arrow[ul, "A_4"] \end{tikzcd}$$

Atunci M este excepțional dacă și numai dacă M' este excepțional.

În cele ce urmează, vom construi în mod explicit o funcție $T_m : \mathfrak{R}_m \to \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$ astfel încât $T_m(x)$ cu $\underline{\dim} T_m(x) = x$ este o reprezentare de tip arbore pentru orice rădăcină excepțională x ($m \geq 4$). În acest context, tratăm $\operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$ ca o mulțime constând doar din „reprezentări matriceale" ale lui Q, unde o „reprezentare matriceală" este doar o colecție de matrice de dimensiuni compatibile cu spațiile vectoriale induse de forma k^s, care codifică o reprezentare a lui Q.

Construirea reprezentărilor de tip arbore pentru $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$

Începem cu cazul $m = 6$, deoarece prin construcție listele date în Secțiunea III.4 definesc exact o astfel de funcție T_6. Se poate lua orice rădăcină excepțională x peste $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$, se poate identifica familia corespunzătoare de reprezentări (pe baza ∂x și formele generale ale vectorilor de dimensiune) și se poate aplica formula corectă pentru obţinerea matricelor reprezentărilor. Deci avem următoarea propoziție:

Propoziția III.2.5. *Pentru orice rădăcină excepțională x peste $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$ formulele enumerate în secțiunea III.4 definesc o funcție $T_6 : \mathfrak{R}_6 \to \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$ cu $T_6(x)$ o reprezentare de tip arbore.*

Construirea reprezentărilor de tip arbore pentru $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$, unde $m \geq 7$

Pentru cazul $m \geq 7$ definim $T_m : \mathfrak{R}_m \to \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$ după cum urmează: pentru $x \in \mathfrak{R}_m$ fie $T_m(x) = M$, unde reprezentarea $M \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$ este construită pe baza $M' = T_6(\mathfrak{p}_m(x)) \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$; matrice specifice ale reprezentării M sunt $M_{5\to1} = M'_{5\to1}$, $M_{5\to2} = M'_{5\to2}$, $M_{3\to(m+1)} = M'_{3\to7}$, $M_{4\to(m+1)} = M'_{4\to7}$; celelalte matrice sunt date pe baza formelor posibile ale lui x (vezi Lema III.2.1):

- dacă $x = x_1, x_2, x_3, x_4, \overbrace{a, \ldots, a}^{\text{de } i \text{ ori}})$, unde $i = m - 3$, apoi $M_{m\to(m-1)} = M'_{6\to5}$, $M_{(m+1)\to m} = M'_{7\to6}$ iar pentru toate celelalte săgeți atribuim matrice de identitate I_a;

- dacă $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \overbrace{a, \dots, a}^{\text{de } i \text{ ori}}, \overbrace{b, \dots, b}^{\text{de } j \text{ ori}})$, unde $i, j \in \mathbb{N}^*$, $i + j = m - 3$ și $a \neq b$, apoi $M_{(4+i)\to(3+i)} = M'_{6\to5}$, $M_{(4+i+1)\to(4+i)} = M'_{7\to6}$ în cazul $i \geq 2$, altfel (dacă $i = 1$) $M_{6\to5} = M'_{6\to5}$, $M_{7\to6} = M'_{7\to6}$ – pentru toate celelalte săgeți atribuie matrice de identitate compatibile (fie I_a, fie I_b);
- dacă $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \overbrace{a, \dots, a}^{\text{de } i \text{ ori}}, \overbrace{b, \dots, b}^{\text{de } j \text{ ori}}, \overbrace{a, \dots, a}^{\text{de } k \text{ ori}})$, unde $i, j, k \in \mathbb{N}^*$, $i + j + k = m - 3$ și $a \neq b$, atunci $M_{(4+i+1)\to(4+i)} = M'_{6\to5}$, $M_{(4+i+j+1)\to(4+i+j)} = M'_{7\to6}$ și matrice de identitate compatibile pentru toate celelalte săgeți;
- dacă $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \overbrace{a, \dots, a}^{\text{de } i \text{ ori}}, \overbrace{b, \dots, b}^{\text{de } j \text{ ori}}, \overbrace{c, \dots, c}^{\text{de } k \text{ ori}})$, unde $i, j, k \in \mathbb{N}^*$, $i + j + k = m - 3$ și a, b, c sunt distincte două câte două, atunci $M_{(4+i+1)\to(4+i)} = M'_{6\to5}$, $M_{(4+i+j+1)\to(4+i+j)} = M'_{7\to6}$ și matrice de identitate compatibile pentru toate celelalte săgeți.

Propoziția III.2.6. *Pentru $m \geq 7$ funcția definită anterior $T_m : \mathfrak{R}_m \to \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$ produce reprezentări de tip arbore pentru toate rădăcinile excepționale, adică pentru orice $x \in \mathfrak{R}_m$ reprezentarea $T_m(x) \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_m)$ este o reprezentare de tip arbore.*

Exemplul III.2.7. Să presupunem că avem nevoie de o reprezentare de tip arbore pentru preproiectivul indecompozabil $P(6,7)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_8)} \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_8)$. Avem că $\underline{\dim} P(6,7)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_8)} = (3,3,2,2,5,5,5,4,4) \in \mathfrak{R}_8$. Calculăm rădăcina excepțională corespunzătoare peste $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$: $\mathfrak{p}_8(3,3,2,2,5,5,5,4,4) = (3,3,2,2,5,5,4) \in \mathfrak{R}_6$. Datorită lemei III.2.3 știm că defectele sunt păstrate de funcția $\mathfrak{p}_8$, așa că trebuie să căutăm reprezentarea corespunzătoare în lista de familii preproiective în Subsecțiunea III.4.1. Identificăm familia $P(8n+4,6)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)}$ cu vector de dimensiune de forma $\underline{\dim} P(8n+4,6)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)} = (4n+3, 4n+3, 4n+2, 4n+2, 8n+5, 8n+5, 8n+4)$, care pentru $n = 0$ dă exact rădăcina noastră. Folosind formula dată acolo, construim reprezentarea de tip arbore a lui $T_6(\mathfrak{p}_8(3,3,2,2,5,5,5,4,4)) = P(4,6)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & k^3 & & & & k^2 \arrow[dl, "\left(\begin{array}{c|c} 0&0\\ 1&0\\ \hline 0&0\\ 0&1 \end{array}\right)"] \\
P(4,6)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)} : & & k^5 \arrow[ul, "\left(\begin{array}{cc|ccc} 1&1&0&0&0\\ \hline 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1 \end{array}\right)"'] \arrow[dl, "\left(\begin{array}{cc|ccc} 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&1\\ \hline 0&0&1&1&0 \end{array}\right)"] & k^5 \arrow[l, "\left(\begin{array}{cc|ccc} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ \hline 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right)"'] & k^4 \arrow[l, "\left(\begin{array}{cc|cc} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ \hline 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{array}\right)"'] & \\
 & k^3 & & & & k^2 \arrow[ul, "\left(\begin{array}{c|c} 1&0\\ 0&0\\ \hline 0&1\\ 0&0 \end{array}\right)"]
\end{tikzcd}
$$

După cum am văzut, această reprezentare poate fi construită formând mai întâi o sumă directă a $P(4,1)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)}$ cu $P(6,2)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)}$ și apoi inserând blocul matrice $\left[\begin{smallmatrix} 0&0&0\\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right]$ în colțul din dreapta sus al matricei asociată săgeții $(5 \to 1)$, aducând astfel un element suplimentar egal cu unul în matrice.

Acum suntem gata să construim reprezentarea noastră inițială $T_8(3,3,2,2,5,5,5,4,4) = P(6,7)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_8)}$ folosind metoda descrisă, luând matricele asociate săgeților $(5 \to 1)$, $(5 \to 2)$, $(3 \to 7)$, $(4 \to 7)$, $(6 \to 5)$ și $(7 \to 6)$ din $P(4,6)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)}$, asociindu-le cu săgețile $(5 \to 1)$, $(5 \to 2)$, $(3 \to 9)$, $(4 \to 9)$, $(7 \to 6)$ respectiv $(8 \to 7)$ în $P(6,7)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_8)}$ și punând matrice de identitate pe săgețile rămase:

$$P(6,7)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_8)}:\quad \begin{tikzcd}
k^3 & & & & & & k^2 \arrow[dl, "\begin{pmatrix} 0&0\\1&0\\0&0\\0&1 \end{pmatrix}"] \\
& k^5 \arrow[ul, "\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&1 \end{pmatrix}"'] \arrow[dl, "\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&0&1&1&0 \end{pmatrix}"] & k^5 \arrow[l, "I_5"'] & k^5 \arrow[l, "\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1 \end{pmatrix}"'] & k^4 \arrow[l, "\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}"'] & k^4 \arrow[l, "I_4"'] & \\
k^3 & & & & & & k^2 \arrow[ul, "\begin{pmatrix} 1&0\\0&0\\0&1\\0&0 \end{pmatrix}"]
\end{tikzcd}$$

Pentru cazurile $m = 4$ și $m = 5$ enunțăm mai întâi câteva leme analoge și apoi construcția explicită pentru $T_4 : \mathfrak{R}_4 \to \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_4)$ și $T_5 : \mathfrak{R}_5 \to \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_5)$.

Pentru $m = 4$ introducem $\mathfrak{i}_4 : \mathfrak{R}_4 \to \mathfrak{R}_6$, unde $\mathfrak{i}_4(x_1, x_2, x_3, x_4, a) = (x_1, x_2, x_3, x_4, a, a, a)$ și pentru $m = 5$ introducem $\mathfrak{i}_5 : \mathfrak{R}_5 \to \mathfrak{R}_6$, unde $\mathfrak{i}_5(x_1, x_2, x_3, x_4, a, b) = (x_1, x_2, x_3, x_4, a, a, b)$.

Lema III.2.8. *Funcțiile $\mathfrak{i}_4 : \mathfrak{R}_4 \to \mathfrak{R}_6$ și $\mathfrak{i}_5 : \mathfrak{R}_5 \to \mathfrak{R}_6$ sunt funcții injective bine definite. Mai mult, sunt păstrate și defectele (adică pentru toți $x \in \mathfrak{R}_4$, $\partial_{k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_4)} x = \partial_{k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)} \mathfrak{i}_4(x)$ și pentru toți $x \in \mathfrak{R}_5$, $\partial_{k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_5)} x = \partial_{k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)} \mathfrak{i}_5(x)$).*

Lema III.2.9. *Următoarele afirmații sunt adevărate:*

(a) Let $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, a) \in \mathfrak{R}_4$, $\mathfrak{i}_4(x) = x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, a, a, a) \in \mathfrak{R}_6$ și două reprezentări $V \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_4)$ și $V' \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$ astfel încât $\underline{\dim} V = x$ și $\underline{\dim} V' = x'$ având următoarele matrice:

$$V:\quad \begin{tikzcd}
k^{x_2} & & k^{x_3} \arrow[dl, "A_3"] \\
& k^a \arrow[ul, "A_2"'] \arrow[dl, "A_1"] & \\
k^{x_1} & & k^{x_4} \arrow[ul, "A_4"]
\end{tikzcd}$$

și

$$V':\quad \begin{tikzcd}
k^{x_2} & & & & k^{x_3} \arrow[dl, "A_3"] \\
& k^a \arrow[ul, "A_2"'] \arrow[dl, "A_1"] & k^a \arrow[l, "I_a"'] & k^a \arrow[l, "I_a"'] & \\
k^{x_1} & & & & k^{x_4} \arrow[ul, "A_4"]
\end{tikzcd}$$

Atunci V este excepțional dacă și numai dacă V' este excepțional.

(b) Fie $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, a, b) \in \mathfrak{R}_5$, $\mathfrak{i}_5(x) = x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, a, a, b) \in \mathfrak{R}_6$ și două reprezentări $Z \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_5)$ și $Z' \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$ astfel încât $\underline{\dim} Z = x$ și $\underline{\dim} Z' = x'$ având următoarele matrice:

$$Z:\quad \begin{tikzcd}
k^{x_2} & & & k^{x_3} \arrow[dl, "A_3"] \\
& k^a \arrow[ul, "A_2"'] \arrow[dl, "A_1"] & k^b \arrow[l, "A"'] & \\
k^{x_1} & & & k^{x_4} \arrow[ul, "A_4"]
\end{tikzcd}$$

și

$$\begin{tikzcd}
& k^{x_2} & & & & k^{x_3} \arrow[dl, "A_3"'] \\
Z' : & & k^a \arrow[ul, "A_2"'] \arrow[dl, "A_1"] & k^a \arrow[l, "I_a"'] & k^b \arrow[l, "A"'] & \\
& k^{x_1} & & & & k^{x_4} \arrow[ul, "A_4"]
\end{tikzcd}$$

Atunci Z este excepțional dacă și numai dacă Z' este excepțional.

Lema III.2.10. *Toate reprezentările (excepționale) de tip arbore în cazul $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$ (enumerate în Secțiunea III.4) au matrice de identitate asociate săgeților de pe axa centrală, care leagă vârfuri de dimensiune egală.*

Construirea reprezentărilor de tip arbore pentru $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_4)$ și $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_5)$

Acum suntem gata să definim funcțiile $T_4 : \mathfrak{R}_4 \to \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_4)$ și $T_5 : \mathfrak{R}_5 \to \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_5)$. Pentru orice $x \in \mathfrak{R}_4$ fie $T_4(x) = V$ construit pe baza lui $V' = T_6(\mathfrak{i}_4(x)) \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$ în felul urmator: $V_{5\to 1} = V'_{5\to 1}$, $V_{5\to 2} = V'_{5\to 2}$, $V_{3\to 5} = V'_{3\to 7}$ și $V_{4\to 5} = V'_{4\to 7}$. În mod similar, pentru orice $x \in \mathfrak{R}_5$ fie $T_5(x) = Z$ construit pe baza lui $Z' = T_6(\mathfrak{i}_5(x)) \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$ în felul urmator: $Z_{5\to 1} = Z'_{5\to 1}$, $Z_{5\to 2} = Z'_{5\to 2}$, $Z_{3\to 6} = Z'_{3\to 7}$, $Z_{4\to 6} = Z'_{4\to 7}$ și $Z_{6\to 5} = Z'_{7\to 6}$.

Propoziția III.2.11. *Folosind definițiile anterioare, avem că:*

(a) Funcția $T_4 : \mathfrak{R}_4 \to \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_4)$ produce reprezentări de tip arbore pentru toate rădăcinile excepționale, adică pentru oricare $x \in \mathfrak{R}_4$ reprezentarea $T_4(x) \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_4)$ este o reprezentare de tip arbore.

(b) Funcția $T_5 : \mathfrak{R}_5 \to \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_5)$ produce reprezentări de tip arbore pentru toate rădăcinile excepționale, adică pentru oricare $x \in \mathfrak{R}_5$ reprezentarea $T_5(x) \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_5)$ este o reprezentare de tip arbore.

Exemplul III.2.12. Să presupunem că avem nevoie de o reprezentare de tip arbore pentru preinjectivul indecompozabil $I(6,4)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_4)} \in \operatorname{rep} k\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_4)$. Avem că $\underline{\dim} I(6,4)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_4)} = (3,3,3,4,6) \in \mathfrak{R}_4$. Calculăm rădăcina excepțională corespunzătoare peste $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$: $\mathfrak{i}_4(3,3,3,4,6) = (3,3,3,4,6,6,6) \in \mathfrak{R}_6$. Datorită Lemei III.2.8 știm că defectele sunt păstrate de funcția $\mathfrak{i}_4$, așa că trebuie să căutăm reprezentarea corespunzătoare în lista de familii preinjective în Subsecțiunea III.4.2. Identificăm familia $I(8n+4,4)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)}$ – obtinut de la $I(8n+4,3)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)}$ prin permutarea $\tau = (3,4)$ – cu vector de dimensiune de forma $\underline{\dim} I(8n+4,4)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)} = (2n+1, 2n+1, 2n+1, 2n+2, 4n+2, 4n+2, 4n+2)$, care pentru $n = 1$ dă exact rădăcina noastră. Folosind formula dată acolo, construim reprezentarea de tip arbore a lui $T_6(\mathrm{i}_4(3,3,3,4,6)) = I(12,6)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)}$.

$$I(12,6)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)}:\quad \begin{tikzcd}[column sep=large]
k^3 & & & & k^3 \arrow[dl, "{\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}}"] \\
& k^6 \arrow[ul, "{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}}"'] \arrow[dl, "{\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}}"] & k^6 \arrow[l, "{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}}"'] & k^6 \arrow[l, "{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}}"'] & \\
k^3 & & & & k^4 \arrow[ul, "{\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}}"]
\end{tikzcd}$$

Acum suntem gata să construim reprezentarea noastră inițială $T_4(3,3,3,4,6) = I(6,4)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_4)}$ luând matricele asociate săgeților $(5 \to 1)$, $(5 \to 2)$, $(3 \to 7)$ și $(4 \to 7)$ din $I(12,6)_{Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)}$ și asociindu-le cu săgețile $(5 \to 1)$, $(5 \to 2)$, $(3 \to 5)$, respectiv $(4 \to 5)$ în $I(6,4)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_4)}$.

$$I(6,4)_{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_4)}:\quad \begin{tikzcd}[column sep=large]
k^3 & & k^3 \arrow[dl, "{\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}}"'] \\
& k^6 \arrow[ul, "{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}}"'] \arrow[dl, "{\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}}"] & \\
k^3 & & k^4 \arrow[ul, "{\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}}"]
\end{tikzcd}$$

III.3 Demonstrarea proprietății modulului de tip arbore independentă de corp

În această secțiune, oferim o scurtă prezentare generală a metodei utilizate pentru a demonstra proprietatea modulului de tip arbore pentru fiecare reprezentare dată în listele din Secțiunea III.4. Metoda prezentată aici a fost folosită deja în cazul $\widetilde{\mathbb{E}}_6$ cu orientare canonică din capitolul II.

Pe parcursul acestei secțiuni vom folosi calificativul „independent de corp” în relație cu reprezentări și secvențe exacte scurte conform Definiției II.2.1.

Tehnica utilizată pentru obținerea și demonstrarea formulelor din Secțiunea III.4 (în mod independent de corp) constă într-un amestec de experimentare pe calculator folosind sistemul de algebră computerizată GAP [2] urmată de o demonstrație asistată de calculator realizată de un software asistent de probă dezvoltat în limbajul de programare pur funcțional Clean [1], special pentru acest scop. Demonstrarea folosește cunoștințele noastre anterioare despre existența anumitor șiruri Schofield (vezi [39]) și se bazează pe Propoziția II.2.3, demonstrată în capitolul II.

Formulele pentru matricele enumerate în Secțiunea III.4 au fost obținute prin experimentare și testare extinsă în GAP, lucrând peste corpuri finite mici (pentru detalii vezi Observațiile 8, 9 și 10 din [39]). Apoi formulele „ghicite” au fost introduse într-un document de intrare LaTeX care, la rândul său, a fost procesat de asistentul de probă. Demonstrarea asistată de calculator este practic o inducție asupra dimensiunilor reprezentărilor (detaliată în Subsecțiunea 1.3 din [15]). Pentru date de intrare date care definesc șiruri exacte scurte (cele două șiruri Schofield diferite cerute de Propoziția II.2.3), asistentul de demonstrație verifică folosind Lema II.2.4 că într-adevăr, două șiruri exacte scurte pot fi construite folosind matricele date (în mod independent de corp). Pentru a finaliza demonstrația proprietății modulului de tip arbore, se numără și numărul total de elemente 1 din matrice.

Pentru mai multe detalii despre aritmetica matricei bloc, calculul rangului și alți pași efectuați de software-ul asistent de demonstrare, ne referim la Secțiunea II.2 și la [15].

III.4 Reprezentări de tip arbore ale tolbei $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$

În această secțiune enumerăm formulele care descriu matricele reprezentărilor corespunzătoare modulelor excepționale: indecompozabilele preproiective (Subsecțiunea III.4.1), indecompozabilele preinjective (Subsecțiunea III.4.2) și indecompozabilele regulare neomogene cu vector de dimensiune sub δ (Subsecțiunea III.4.3). Pentru comoditate, la începutul fiecăreia dintre următoarele subsecțiuni, prezentăm o reprezentare grafică a părții corespunzătoare a tolbii Auslander–Reiten. Săgețile albastre arată existența unui așa-numit monomorfism ireductibil, în timp ce săgețile roșii reprezintă epimorfisme ireductibile între modulele indecompozabile (pentru detalii vezi [3]).

În cazul preproiectivelor și preinjectivelor reprezentările pot fi grupate în familii de forma $P(8n+r, i)$ respectiv $I(8n + r, i)$, unde $i \in \{1, \ldots, 7\}$ și $r \in \{0, \ldots, 7\}$. Reprezentările aparținând aceleiași familii au matrice și vectori de dimensiune similare, în funcție doar de parametrul $n \in \mathbb{N}$. Matricele enumerate sunt scrise folosind blocuri de diferite dimensiuni, cu aceeași notație ca în Subsecțiunea II.2.1. Fiecare matrice este compusă fie din blocuri de identitate, fie din blocuri dreptunghiulare zero. Notăm blocul de identitate doar cu 1 și blocul zero cu 0. Pentru valori mici de n putem da unele reprezentări concret, când formula generală funcționează doar pentru $n > 0$. Formulele pentru matricele enumerate aici sunt riguros dovedite a fi corecte – adică oferă o reprezentare de tip arbore independentă de corp a familiei respective în sensul Definiției II.2.1 [17]. Anexa conține, de asemenea, o prezentare mai detaliată a unor reprezentări din liste (de exemplu, matrice scrise explicit pentru valori mici de $n = 0, 1, 2, \ldots$).

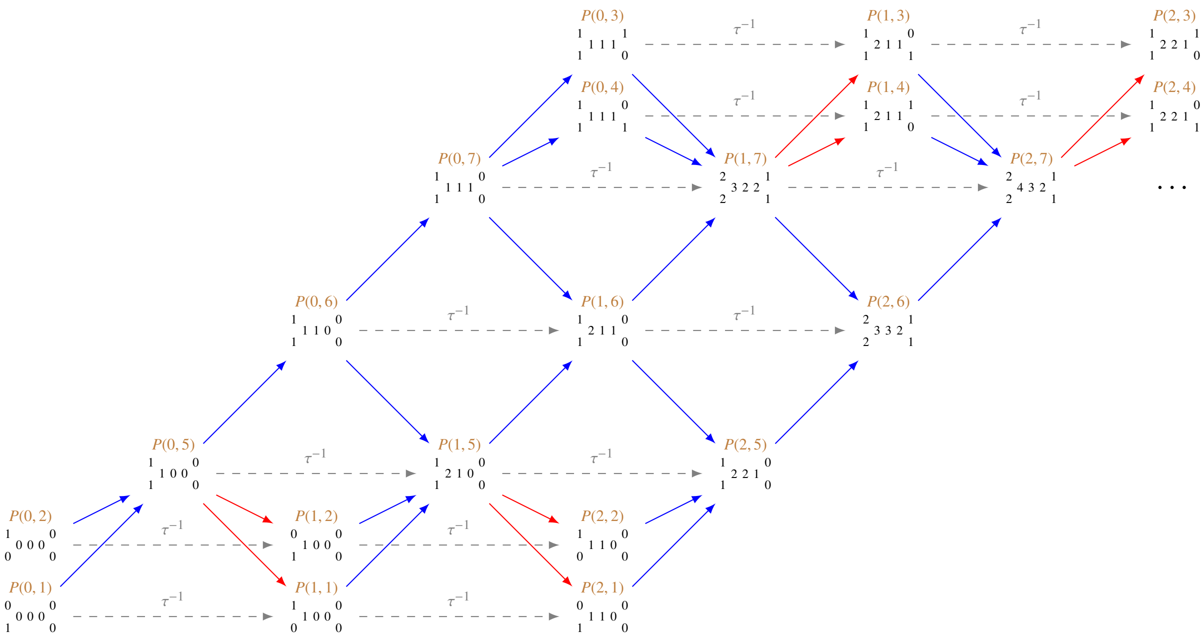
III.4.1 Reprezentările preproiective indecompozabile

Modulele preproiective indecompozabile corespund vârfurilor părții preproiective a tolbei Auslander–Reiten, așa cum se arată în Figura III.1.

Datorită simetriei tolbei $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$ dăm numai familiile de reprezentări de forma $P(s, 1)$, $P(s, 3)$, $P(s, 5)$, $P(s, 6)$ și $P(s, 7)$. Pentru $P(s, 2)$ și $P(s, 4)$ putem folosi permutările $\sigma = (1, 2)$ și $\tau = (3, 4)$ pentru a le scrie în termeni de $P(s, 1)$ și $P(s, 3)$ în felul următor ($s \geq 0$):

$$\underline{\dim} P(s, 2) = (d_{\sigma(i)})_{i \in \Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_0}, \text{ unde } \underline{\dim} P(s, 1) = (d_i)_{i \in \Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_0}$$

$$\underline{\dim} P(s, 4) = (d_{\tau(i)})_{i \in \Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_0}, \text{ unde } \underline{\dim} P(s, 3) = (d_i)_{i \in \Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_0}$$



Partea preproiectivă a tolbei Auslander–Reiten $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$

pentru vectorii de dimensiune, respectiv

$$P(s,2) = \left(M_{\sigma(i)\to\sigma(j)}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_1}, \text{ unde } P(s,1) = \left(M_{i\to j}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_1}$$

$$P(s,4) = \left(M_{\tau(i)\to\tau(j)}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_1}, \text{ unde } P(s,3) = \left(M_{i\to j}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_1}$$

pentru matrice.

În cele ce urmează vom enumera reprezentările de tip arbore pentru familiile preproiective de forma $P(s,1)$, $P(s,3)$, $P(s,5)$, $P(s,6)$ și $P(e,7)$:

$\underline{\dim} P(8n,1) = (2n+1, 2n, 2n, 2n, 4n, 4n, 4n)$,

$P(0,1) = (0,0,0,0,0,0)$,

$$P(8n,1) = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{smallmatrix} 2n-1 & 1 & 1 & 2n-1 \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2n-1 \\ 1 \end{smallmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{smallmatrix} 2n & 2n \end{smallmatrix} \\ 2n & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n \\ 4n & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n \\ 4n & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n \\ \begin{smallmatrix} 2n \\ 2n \end{smallmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n \\ \begin{smallmatrix} 2n \\ 2n \end{smallmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right), \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} P(8n+1,1) = (2n, 2n+1, 2n, 2n, 4n+1, 4n, 4n)$,

$$P(8n+1,1) = \left(\begin{array}{cc} & \begin{smallmatrix} 2n & 2n & 1 \end{smallmatrix} \\ 2n & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{smallmatrix} 2n & 1 & 2n \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2n \end{smallmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n \\ \begin{smallmatrix} 4n \\ 1 \end{smallmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n \\ 4n & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n \\ \begin{smallmatrix} 2n \\ 2n \end{smallmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n \\ \begin{smallmatrix} 2n \\ 2n \end{smallmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right);$$

$\underline{\dim} P(8n+2,1) = (2n+1, 2n, 2n, 2n, 4n+1, 4n+1, 4n)$,

$$P(8n+2,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n&1&2n\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2n\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n&2n&1\end{matrix}\\ 2n & \begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+1\\ 4n+1 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n\\ \begin{matrix}4n\\1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n\\ \begin{matrix}2n\\2n\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n\\ \begin{matrix}2n\\2n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}\right);$$

$\underline{\dim} P(8n+3,1)=(2n,2n+1,2n,2n,4n+1,4n+1,4n+1)$,

$$P(8n+3,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n&2n&1\end{matrix}\\ 2n & \begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n&1&2n\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2n\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+1\\ 4n+1 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+1\\ 4n+1 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n\\ \begin{matrix}2n\\2n\\1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n\\ \begin{matrix}2n\\2n+1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}\right);$$

$\underline{\dim} P(8n+4,1)=(2n+2,2n+1,2n+1,2n+1,4n+2,4n+2,4n+2)$,

$$P(8n+4,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n&1&1&2n\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2n\\1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n+1&2n+1\end{matrix}\\ 2n+1 & \begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+2\\ 4n+2 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+2\\ 4n+2 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n+1\\ \begin{matrix}2n+1\\2n+1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n+1\\ \begin{matrix}2n+1\\2n+1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}\right);$$

$\underline{\dim} P(8n+5,1)=(2n+1,2n+2,2n+1,2n+1,4n+3,4n+2,4n+2)$,

$$P(8n+5,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n+1&2n+1&1\end{matrix}\\ 2n+1 & \begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n+1&1&2n+1\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2n+1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+2\\ \begin{matrix}4n+2\\1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+2\\ 4n+2 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n+1\\ \begin{matrix}2n+1\\2n+1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n+1\\ \begin{matrix}2n+1\\2n+1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}\right);$$

$\underline{\dim} P(8n+6,1)=(2n+2,2n+1,2n+1,2n+1,4n+3,4n+3,4n+2)$,

$$P(8n+6,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n+1&1&2n+1\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2n+1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n+1&2n+1&1\end{matrix}\\ 2n+1 & \begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+3\\ 4n+3 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+2\\ \begin{matrix}4n+2\\1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n+1\\ \begin{matrix}2n+1\\2n+1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n+1\\ \begin{matrix}2n+1\\2n+1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}\right);$$

$\underline{\dim} P(8n+7,1)=(2n+1,2n+2,2n+1,2n+1,4n+3,4n+3,4n+3)$,

$$P(8n+7,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n+1&2n+1&1\end{matrix}\\ 2n+1 & \begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n+1&1&2n+1\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2n+1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+3\\ 4n+3 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+3\\ 4n+3 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n+1\\ \begin{matrix}2n+1\\2n+1\\1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n+1\\ \begin{matrix}2n+1\\2n+2\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}\right);$$

$\underline{\dim} P(8n,3)=(2n+1,2n+1,2n+1,2n,4n+1,4n+1,4n+1)$,

$$P(0,3)=\left(\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},0\right),$$

$$P(8n,3)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n-1&1&2n-1&1&1\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2n-1\\1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n-1&2n-1&1&2\end{matrix}\\ \begin{matrix}2n-1\\2\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array},\right.$$

$$\left.\begin{array}{cc} & 4n+1\\ 4n+1 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+1\\ 4n+1 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n-1&1&1\end{matrix}\\ \begin{matrix}2n-1\\2n-1\\1\\1\\1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n-1&1\end{matrix}\\ \begin{matrix}2n-1\\2n-1\\1\\1\\1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\end{array}\right),\quad n>0;$$

$\underline{\dim} P(8n+1,3) = (2n+1, 2n+1, 2n, 2n+1, 4n+2, 4n+1, 4n+1)$,

$$P(1,3) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \right),$$

$$P(8n+1,3) = \left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 2n-1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 1 & 2n-1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n-1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 4n & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4n \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n+1 \\ 4n+1 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 2n-1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 1 \\ 2n-1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right), \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} P(8n+2,3) = (2n+1, 2n+1, 2n+1, 2n, 4n+2, 4n+2, 4n+1)$,

$$P(2,3) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, 0 \right),$$

$$P(8n+2,3) = \left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 1 & 2n-1 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n-1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 2n-1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} & 4n+2 \\ 4n+2 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 4n & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4n \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 2n-1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 2n-1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right), \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} P(8n+3,3) = (2n+1, 2n+1, 2n, 2n+1, 4n+2, 4n+2, 4n+2)$,

$$P(3,3) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$P(8n+3,3) = \left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 2n-1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 1 & 2n-1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n-1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} & 4n+2 \\ 4n+2 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n+2 \\ 4n+2 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 2n-1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 1 \\ 2n-1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right), \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} P(8n+4,3) = (2n+2, 2n+2, 2n+2, 2n+1, 4n+3, 4n+3, 4n+3)$,

$$P(4,3) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

$$P(8n+4,3) = \left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 1 & 2n-1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n-1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 2n-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} & 4n+3 \\ 4n+3 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n+3 \\ 4n+3 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 2n-1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 2n-1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right), \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} P(8n+5,3) = (2n+2, 2n+2, 2n+1, 2n+2, 4n+4, 4n+3, 4n+3)$,

$$P(8n+5,3) = \left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n+1 & 2n+1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n+1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n+1 & 1 & 2n+1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n+1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 4n+2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4n+2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n+3 \\ 4n+3 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n+1 \\ \begin{matrix} 2n+1 \\ 2n+1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n+1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n+1 \\ 1 \\ 2n \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right);$$

$\underline{\dim} P(8n+6,3) = (2n+2, 2n+2, 2n+2, 2n+1, 4n+4, 4n+4, 4n+3)$,

$$P(8n+6,3) = \left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n+1 & 1 & 2n+1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n+1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n+1 & 2n+1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n+1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n+4 \\ 4n+4 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 4n+2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4n+2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n+2 \\ \begin{matrix} 2n+1 \\ 2n+2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} & 2n+1 \\ \begin{matrix} 2n+1 \\ 2n+2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right);$$

$\underline{\dim} P(8n+7,3) = (2n+2, 2n+2, 2n+1, 2n+2, 4n+4, 4n+4, 4n+4)$,

$$P(8n+7,3) = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 2n+1 & 2n+1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n+1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 2n+1 & 1 & 2n+1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n+1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c|c} & 4n+4 \\ 4n+4 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c|c} & 4n+4 \\ 4n+4 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c|c} & 2n+1 \\ \begin{matrix} 2n+1 \\ 2n+1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 2n+1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n+1 \\ 1 \\ 2n+1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right);$$

$\underline{\dim} P(8n,5) = (4n+1, 4n+1, 4n, 4n, 8n+1, 8n, 8n),$

$$M_\alpha^{P(8n,5)} = M_\alpha^{P(8n,1)} \oplus M_\alpha^{P(8n+1,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 1),$$

$$M_{5\to 1}^{P(8n,5)} = \left(M_{5\to 1}^{P(8n,1)} \oplus M_{5\to 1}^{P(8n+1,1)}\right) \boxplus \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 4n & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} P(8n+1,5) = (4n+1, 4n+1, 4n, 4n, 8n+2, 8n+1, 8n),$

$$M_\alpha^{P(8n+1,5)} = M_\alpha^{P(8n+1,1)} \oplus M_\alpha^{P(8n+2,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 2),$$

$$M_{5\to 2}^{P(8n+1,5)} = \left(M_{5\to 2}^{P(8n+1,1)} \oplus M_{5\to 2}^{P(8n+2,1)}\right) \boxplus \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 4n & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} P(8n+2,5) = (4n+1, 4n+1, 4n, 4n, 8n+2, 8n+2, 8n+1),$

$$M_\alpha^{P(8n+2,5)} = M_\alpha^{P(8n+2,1)} \oplus M_\alpha^{P(8n+3,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (7 \to 6),$$

$$M_{7\to 6}^{P(8n+2,5)} = \left(M_{7\to 6}^{P(8n+2,1)} \oplus M_{7\to 6}^{P(8n+3,1)}\right) \boxplus \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 4n & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4n \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} P(8n+3,5) = (4n+2, 4n+2, 4n+1, 4n+1, 8n+3, 8n+3, 8n+3),$

$$P(3,5) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$M_\alpha^{P(8n+3,5)} = M_\alpha^{P(8n,3)} \oplus M_\alpha^{P(8n+3,3)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 2),$$

$$M_{5\to 2}^{P(8n+3,5)} = \left(M_{5\to 2}^{P(8n,3)} \oplus M_{5\to 2}^{P(8n+3,3)}\right) \boxplus \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 4n-1 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} P(8n+4,5) = (4n+3, 4n+3, 4n+2, 4n+2, 8n+5, 8n+4, 8n+4),$

$$M_\alpha^{P(8n+4,5)} = M_\alpha^{P(8n+4,1)} \oplus M_\alpha^{P(8n+5,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 1),$$

$$M_{5\to 1}^{P(8n+4,5)} = \left(M_{5\to 1}^{P(8n+4,1)} \oplus M_{5\to 1}^{P(8n+5,1)}\right) \boxplus \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 4n+2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n+1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\underline{\dim} P(8n+5,5) = (4n+3, 4n+3, 4n+2, 4n+2, 8n+6, 8n+5, 8n+4),$$
$$M_\alpha^{P(8n+5,5)} = M_\alpha^{P(8n+5,1)} \oplus M_\alpha^{P(8n+6,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 2),$$
$$M_{5\to 2}^{P(8n+5,5)} = \left(M_{5\to 2}^{P(8n+5,1)} \oplus M_{5\to 2}^{P(8n+6,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 4n+2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n+1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\underline{\dim} P(8n+6,5) = (4n+3, 4n+3, 4n+2, 4n+2, 8n+6, 8n+6, 8n+5),$$
$$M_\alpha^{P(8n+6,5)} = M_\alpha^{P(8n+6,1)} \oplus M_\alpha^{P(8n+7,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (7 \to 6),$$
$$M_{7\to 6}^{P(8n+6,5)} = \left(M_{7\to 6}^{P(8n+6,1)} \oplus M_{7\to 6}^{P(8n+7,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 4n+2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4n+2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\underline{\dim} P(8n+7,5) = (4n+4, 4n+4, 4n+3, 4n+3, 8n+7, 8n+7, 8n+7),$$
$$M_\alpha^{P(8n+7,5)} = M_\alpha^{P(8n+7,2)} \oplus M_\alpha^{P(8n,2)[n\mapsto n+1]}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 2),$$
$$M_{5\to 2}^{P(8n+7,5)} = \left(M_{5\to 2}^{P(8n+7,2)} \oplus M_{5\to 2}^{P(8n,2)[n\mapsto n+1]}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 4n+3 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\underline{\dim} P(8n,6) = (4n+1, 4n+1, 4n, 4n, 8n+1, 8n+1, 8n),$$
$$M_\alpha^{P(8n,6)} = M_\alpha^{P(8n,1)} \oplus M_\alpha^{P(8n+2,2)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 1),$$
$$M_{5\to 1}^{P(8n,6)} = \left(M_{5\to 1}^{P(8n,1)} \oplus M_{5\to 1}^{P(8n+2,2)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 4n & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\underline{\dim} P(8n+1,6) = (4n+1, 4n+1, 4n, 4n, 8n+2, 8n+1, 8n+1),$$
$$M_\alpha^{P(8n+1,6)} = M_\alpha^{P(8n+1,1)} \oplus M_\alpha^{P(8n+3,2)}, \quad \text{for } \alpha \neq (6 \to 5),$$
$$M_{6\to 5}^{P(8n+1,6)} = \left(M_{6\to 5}^{P(8n+1,1)} \oplus M_{6\to 5}^{P(8n+3,2)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 4n & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4n \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\underline{\dim} P(8n+2,6) = (4n+2, 4n+2, 4n+1, 4n+1, 8n+3, 8n+3, 8n+2),$$
$$P(2,6) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$
$$M_\alpha^{P(8n+2,6)} = M_\alpha^{P(8n,3)} \oplus M_\alpha^{P(8n+2,4)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 2),$$
$$M_{5\to 2}^{P(8n+2,6)} = \left(M_{5\to 2}^{P(8n,3)} \oplus M_{5\to 2}^{P(8n+2,4)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 4n & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n-1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0;$$

$$\underline{\dim} P(8n+3,6) = (4n+2, 4n+2, 4n+1, 4n+1, 8n+4, 8n+3, 8n+3),$$
$$M_\alpha^{P(8n+3,6)} = M_\alpha^{P(8n+1,4)} \oplus M_\alpha^{P(8n+3,3)}, \quad \text{for } \alpha \neq (6 \to 5),$$

$$M_{6\to 5}^{P(8n+3,6)} = \left(M_{6\to 5}^{P(8n+1,4)} \oplus M_{6\to 5}^{P(8n+3,3)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 4n & 1 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 4n \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\underline{\dim} P(8n+4,6) = (4n+3, 4n+3, 4n+2, 4n+2, 8n+5, 8n+5, 8n+4),$$

$$M_{\alpha}^{P(8n+4,6)} = M_{\alpha}^{P(8n+4,1)} \oplus M_{\alpha}^{P(8n+6,2)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 1),$$

$$M_{5\to 1}^{P(8n+4,6)} = \left(M_{5\to 1}^{P(8n+4,1)} \oplus M_{5\to 1}^{P(8n+6,2)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 4n+2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2n+1 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\underline{\dim} P(8n+5,6) = (4n+3, 4n+3, 4n+2, 4n+2, 8n+6, 8n+5, 8n+5),$$

$$M_{\alpha}^{P(8n+5,6)} = M_{\alpha}^{P(8n+5,1)} \oplus M_{\alpha}^{P(8n+7,2)}, \quad \text{for } \alpha \neq (6 \to 5),$$

$$M_{6\to 5}^{P(8n+5,6)} = \left(M_{6\to 5}^{P(8n+5,1)} \oplus M_{6\to 5}^{P(8n+7,2)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 4n+2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 4n+2 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\underline{\dim} P(8n+6,6) = (4n+4, 4n+4, 4n+3, 4n+3, 8n+7, 8n+7, 8n+6),$$

$$M_{\alpha}^{P(8n+6,6)} = M_{\alpha}^{P(8n+6,1)} \oplus M_{\alpha}^{P(8n,2)[n\mapsto n+1]}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 2),$$

$$M_{5\to 2}^{P(8n+6,6)} = \left(M_{5\to 2}^{P(8n+6,1)} \oplus M_{5\to 2}^{P(8n,2)[n\mapsto n+1]}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 4n+3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2n \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\underline{\dim} P(8n+7,6) = (4n+4, 4n+4, 4n+3, 4n+3, 8n+8, 8n+7, 8n+7),$$

$$M_{\alpha}^{P(8n+7,6)} = M_{\alpha}^{P(8n+5,3)} \oplus M_{\alpha}^{P(8n+7,4)}, \quad \text{for } \alpha \neq (6 \to 5),$$

$$M_{6\to 5}^{P(8n+7,6)} = \left(M_{6\to 5}^{P(8n+5,3)} \oplus M_{6\to 5}^{P(8n+7,4)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 4n+2 & 1 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 4n+2 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\underline{\dim} P(8n,7) = (4n+1, 4n+1, 4n, 4n, 8n+1, 8n+1, 8n+1),$$

$$M_{\alpha}^{P(8n,7)} = M_{\alpha}^{P(8n,1)} \oplus M_{\alpha}^{P(8n+3,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 1),$$

$$M_{5\to 1}^{P(8n,7)} = \left(M_{5\to 1}^{P(8n,1)} \oplus M_{5\to 1}^{P(8n+3,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 4n & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2n \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\underline{\dim} P(8n+1,7) = (4n+2, 4n+2, 4n+1, 4n+1, 8n+3, 8n+2, 8n+2),$$

$$M_{\alpha}^{P(8n+1,7)} = M_{\alpha}^{P(8n+1,6)} \oplus M_{\alpha}^{R_1^2(1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (4 \to 7),$$

$$M_{4\to 7}^{P(8n+1,7)} = \left(M_{4\to 7}^{P(8n+1,6)} \oplus M_{4\to 7}^{R_1^2(1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & 1 \\ \begin{array}{c} 8n \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} P(8n+2,7) = (4n+2, 4n+2, 4n+1, 4n+1, 8n+4, 8n+3, 8n+2)$,

$$M_\alpha^{P(8n+2,7)} = M_\alpha^{P(8n+2,5)} \oplus M_\alpha^{R_1^2(2)}, \quad \text{for } \alpha \neq (3 \to 7),$$

$$M_{3\to 7}^{P(8n+2,7)} = \left(M_{3\to 7}^{P(8n+2,5)} \oplus M_{3\to 7}^{R_1^2(2)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{c}1\end{array} \\ \begin{array}{c}8n\\1\end{array} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array};$$

$\underline{\dim} P(8n+3,7) = (4n+2, 4n+2, 4n+1, 4n+1, 8n+4, 8n+4, 8n+3)$,

$$P(3,7) = \left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right),$$

$$M_\alpha^{P(8n+3,7)} = M_\alpha^{P(8n+2,3)} \oplus M_\alpha^{P(8n+3,3)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 1),$$

$$M_{5\to 1}^{P(8n+3,7)} = \left(M_{5\to 1}^{P(8n+2,3)} \oplus M_{5\to 1}^{P(8n+3,3)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}4n&1&1\end{array} \\ \begin{array}{c}2n\\1\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\end{array}, \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} P(8n+4,7) = (4n+3, 4n+3, 4n+2, 4n+2, 8n+5, 8n+5, 8n+5)$,

$$M_\alpha^{P(8n+4,7)} = M_\alpha^{P(8n+4,1)} \oplus M_\alpha^{P(8n+7,1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 1),$$

$$M_{5\to 1}^{P(8n+4,7)} = \left(M_{5\to 1}^{P(8n+4,1)} \oplus M_{5\to 1}^{P(8n+7,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}4n+2&1\end{array} \\ \begin{array}{c}2n+1\\1\end{array} & \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\end{array};$$

$\underline{\dim} P(8n+5,7) = (4n+4, 4n+4, 4n+3, 4n+3, 8n+7, 8n+6, 8n+6)$,

$$M_\alpha^{P(8n+5,7)} = M_\alpha^{P(8n+5,6)} \oplus M_\alpha^{R_1^2(1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (4 \to 7),$$

$$M_{4\to 7}^{P(8n+5,7)} = \left(M_{4\to 7}^{P(8n+5,6)} \oplus M_{4\to 7}^{R_1^2(1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{c}1\end{array} \\ \begin{array}{c}8n+4\\1\end{array} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array};$$

$\underline{\dim} P(8n+6,7) = (4n+4, 4n+4, 4n+3, 4n+3, 8n+8, 8n+7, 8n+6)$,

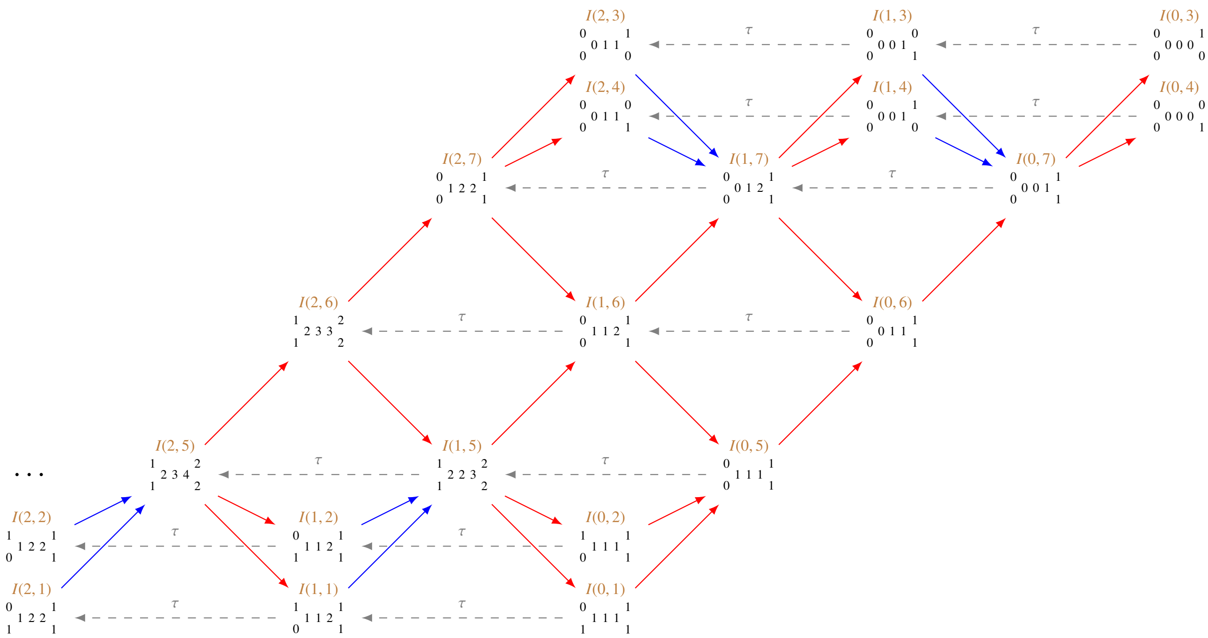
$$M_\alpha^{P(8n+6,7)} = M_\alpha^{P(8n+6,6)} \oplus M_\alpha^{R_1^3(1)}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 2),$$

$$M_{5\to 2}^{P(8n+6,7)} = \left(M_{5\to 2}^{P(8n+6,6)} \oplus M_{5\to 2}^{R_1^3(1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{c}1\end{array} \\ \begin{array}{c}4n+3\\1\end{array} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{array};$$

$\underline{\dim} P(8n+7,7) = (4n+4, 4n+4, 4n+3, 4n+3, 8n+8, 8n+8, 8n+7)$,

$$M_\alpha^{P(8n+7,7)} = M_\alpha^{P(8n+7,2)} \oplus M_\alpha^{P(8n+2,2)[n\mapsto n+1]}, \quad \text{for } \alpha \neq (5 \to 1),$$

$$M_{5\to 1}^{P(8n+7,7)} = \left(M_{5\to 1}^{P(8n+7,2)} \oplus M_{5\to 1}^{P(8n+2,2)[n\mapsto n+1]}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}1&4n+4\end{array} \\ \begin{array}{c}2n+1\\1\end{array} & \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\end{array}.$$



Partea preinjectivă a tolbei Auslander–Reiten a lui $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$

III.4.2 Modulele preinjective indecompozabile

Modulele preinjective indecompozabile corespund vârfurilor părții preinjective a tolbei Auslander–Reiten, așa cum se arată în Figura III.2.

Datorită simetriei tolbei $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$ dăm numai familiile de reprezentări de forma $I(s,1)$, $I(s,3)$, $I(s).,5)$, $I(s,6)$ și $I(s,7)$. Pentru $I(s,2)$ și $I(s,4)$ putem folosi permutările $\sigma = (1,2)$ și $\tau = (3,4)$ pentru a le scrie în termeni de $I(s,1)$ și $I(s,3)$ în felul următor ($s \geq 0$):

$$\underline{\dim} I(s,2) = (d_{\sigma(i)})_{i\in\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_0}\text{ , unde } \underline{\dim} I(s,1) = (d_i)_{i\in\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_0}$$

$$\underline{\dim} I(s,4) = (d_{\tau(i)})_{i\in\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_0}\text{ , unde } \underline{\dim} I(s,3) = (d_i)_{i\in\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_0}$$

pentru vectorii de dimensiune, respectiv

$$I(s,2) = \left(M_{\sigma(i)\to\sigma(j)}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_1}\text{ , unde } I(s,1) = \left(M_{i\to j}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_1}$$

$$I(s,4) = \left(M_{\tau(i)\to\tau(j)}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_1}\text{ , unde } I(s,3) = \left(M_{i\to j}\right)_{(i\to j)\in\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)_1}$$

pentru matrice.

În cele ce urmează vom enumera reprezentările de tip arbore pentru familiile preinjective de forma $I(s,1)$, $I(s,3)$, $I(s,5)$, $I(s,6)$ și $I(s,7)$:

$\underline{\dim} I(8n,1) = (2n+1, 2n, 2n+1, 2n+1, 4n+1, 4n+1, 4n+1)$,

$$I(8n,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n & 2n+1\end{matrix}\\ 2n+1 & \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n & 2n+1\end{matrix}\\ 2n & \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+1\\ 4n+1 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+1\\ 4n+1 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n & 1\end{matrix}\\ \begin{matrix}2n\\ 2n\\ 1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n & 1\end{matrix}\\ \begin{matrix}2n\\ 1\\ 2n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}\right);$$

$\underline{\dim} I(8n+1,1)=(2n, 2n+1, 2n+1, 2n+1, 4n+1, 4n+1, 4n+2)$,

$$I(1,1)=\left(0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right),$$

$$I(8n+1,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 1 & 2n-1 & 2n\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\ 2n-1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2n & 2n\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\ 2n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+1\\ 4n+1 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\right.$$

$$\left.\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 4n+1\end{matrix}\\ 4n+1 & \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2n-1 & 1\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\ 1\\ 1\\ 2n-1\\ 2n-1\\ 1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 1 & 2n-2 & 1\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 2n-2\\ 1\\ 1\\ 2n-2\end{matrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}\right), \quad n>0;$$

$\underline{\dim} I(8n+2,1)=(2n+1, 2n, 2n+1, 2n+1, 4n+1, 4n+2, 4n+2)$,

$$I(8n+2,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n & 2n+1\end{matrix}\\ 2n+1 & \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n & 2n+1\end{matrix}\\ 2n & \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 4n+1\end{matrix}\\ 4n+1 & \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+2\\ 4n+2 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n+1\\ \begin{matrix}2n+1\\ 2n+1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n & 1\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\ 2n\\ 2n\\ 1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}\right);$$

$\underline{\dim} I(8n+3,1)=(2n, 2n+1, 2n+1, 2n+1, 4n+2, 4n+2, 4n+2)$,

$$I(8n+3,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2n & 2n+1\end{matrix}\\ 2n & \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n+1 & 2n+1\end{matrix}\\ 2n+1 & \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+2\\ 4n+2 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+2\\ 4n+2 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 2n+1\\ \begin{matrix}2n+1\\ 2n+1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n & 1\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\ 2n\\ 2n\\ 1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}\right);$$

$\underline{\dim} I(8n+4,1)=(2n+2, 2n+1, 2n+2, 2n+2, 4n+3, 4n+3, 4n+3)$,

$$I(8n+4,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n+1 & 2n+2\end{matrix}\\ 2n+2 & \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n+1 & 2n+2\end{matrix}\\ 2n+1 & \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+3\\ 4n+3 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & 4n+3\\ 4n+3 & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n+1 & 1\end{matrix}\\ \begin{matrix}2n+1\\ 2n+1\\ 1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{array},\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix}2n+1 & 1\end{matrix}\\ \begin{matrix}2n+1\\ 1\\ 2n+1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}\right);$$

$\underline{\dim} I(8n+5,1)=(2n+1, 2n+2, 2n+2, 2n+2, 4n+3, 4n+3, 4n+4)$,

$$I(8n+5,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{+}1 & 2n{+}2 \end{matrix} \\ 2n{+}1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{+}1 & 2n{+}2 \end{matrix} \\ 2n{+}2 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n{+}3 \\ 4n{+}3 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 4n{+}3 \end{matrix} \\ 4n{+}3 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{+}1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n{+}1 \\ 2n{+}1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n{+}2 \\ \begin{matrix} 2n{+}2 \\ 2n{+}2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right);$$

$\underline{\dim} I(8n+6,1)=(2n+2,2n+1,2n+2,2n+2,4n+3,4n+4,4n+4)$,

$$I(8n+6,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{+}1 & 2n{+}2 \end{matrix} \\ 2n{+}2 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{+}1 & 2n{+}2 \end{matrix} \\ 2n{+}1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 4n{+}3 \end{matrix} \\ 4n{+}3 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n{+}4 \\ 4n{+}4 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{+}1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n{+}1 \\ 2n{+}1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n{+}2 \\ \begin{matrix} 2n{+}2 \\ 2n{+}2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right);$$

$\underline{\dim} I(8n+7,1)=(2n+1,2n+2,2n+2,2n+2,4n+4,4n+4,4n+4)$,

$$I(8n+7,1)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2n{+}1 & 2n{+}2 \end{matrix} \\ 2n{+}1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{+}2 & 2n{+}2 \end{matrix} \\ 2n{+}2 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n{+}4 \\ 4n{+}4 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n{+}4 \\ 4n{+}4 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{+}1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n{+}1 \\ 2n{+}1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n{+}2 \\ \begin{matrix} 2n{+}2 \\ 2n{+}2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right);$$

$\underline{\dim} I(8n,3)=(2n,2n,2n+1,2n,4n,4n,4n)$,

$$I(8n,3)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n & 2n \end{matrix} \\ 2n & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n & 2n \end{matrix} \\ 2n & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n \\ 4n & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n \\ 4n & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2n{-}1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n{-}1 \\ 2n{-}1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{-}1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n{-}1 \\ 1 \\ 2n{-}1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right);$$

$\underline{\dim} I(8n+1,3)=(2n,2n,2n,2n+1,4n,4n,4n+1)$,

$I(1,3)=\left(0,0,0,0,0,\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\right)$,

$$I(8n+1,3)=\left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2n{-}2 & 2n{-}1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2n{-}2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 1 & 2n{-}1 & 2n{-}1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n{-}1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n \\ 4n & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 4n \end{matrix} \\ 4n & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2n{-}1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2n{-}1 \\ 2n{-}1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 1 & 2n{-}2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2n{-}2 \\ 2n{-}2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right), \quad n>0;$$

$\underline{\dim} I(8n+2,3) = (2n, 2n, 2n+1, 2n, 4n, 4n+1, 4n+1)$,

$I(2,3) = \left(0, 0, 0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, 0\right)$,

$$I(8n+2,3) = \left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n & 2n \end{matrix} \\ 2n & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n & 2n \end{matrix} \\ 2n & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 4n \end{matrix} \\ 4n & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n{+}1 \\ 4n{+}1 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2n{-}1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2n{-}1 \\ 2n{-}1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{-}1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2n{-}1 \\ 1 \\ 2n{-}1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right), \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} I(8n+3,3) = (2n, 2n, 2n, 2n+1, 4n+1, 4n+1, 4n+1)$,

$I(3,3) = \left(0, 0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\right)$,

$$I(8n+3,3) = \left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 1 & 2n{-}1 & 2n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n{-}1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{+}1 & 2n \end{matrix} \\ 2n & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n{+}1 \\ 4n{+}1 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n{+}1 \\ 4n{+}1 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{-}1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2n{-}1 \\ 2n{-}1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n \\ 2n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right), \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} I(8n+4,3) = (2n+1, 2n+1, 2n+2, 2n+1, 4n+2, 4n+2, 4n+2)$,

$$I(8n+4,3) = \left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{+}1 & 2n{+}1 \end{matrix} \\ 2n{+}1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n{+}1 & 2n{+}1 \end{matrix} \\ 2n{+}1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n{+}2 \\ 4n{+}2 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n{+}2 \\ 4n{+}2 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2n & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n \\ 2n \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n \\ 1 \\ 2n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right);$$

$\underline{\dim} I(8n+5,3) = (2n+1, 2n+1, 2n+1, 2n+2, 4n+2, 4n+2, 4n+3)$,

$$I(5,3) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right),$$

$$I(8n+5,3) = \left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2n{-}1 & 2n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2n{-}1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2n{+}1 & 2n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n{+}2 \\ 4n{+}2 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 4n{+}2 \end{matrix} \\ 4n{+}2 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2n{-}1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2n{-}1 \\ 2n{-}1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 1 & 2n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2n \\ 2n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right), \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} I(8n+6,3) = (2n+1, 2n+1, 2n+2, 2n+1, 4n+2, 4n+3, 4n+3)$,

$$I(6,3) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$I(8n+6,3) = \left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n+1 & 2n+1 \end{matrix} \\ 2n+1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n+1 & 2n+1 \end{matrix} \\ 2n+1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 4n+2 \end{matrix} \\ 4n+2 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n+3 \\ 4n+3 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2n & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2n \\ 2n \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2n \\ 1 \\ 2n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 1 & 2n-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 4n+2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right), \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} I(8n+7,3) = (2n+1, 2n+1, 2n+1, 2n+2, 4n+3, 4n+3, 4n+3)$,

$$I(8n+7,3) = \left(\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 1 & 2n & 2n+1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n+2 & 2n+1 \end{matrix} \\ 2n+1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n+3 \\ 4n+3 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 4n+3 \\ 4n+3 & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & 2n+1 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2n+1 \\ 2n+1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2n & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2n \\ 2n \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right);$$

$\underline{\dim} I(8n,5) = (4n, 4n, 4n+1, 4n+1, 8n+1, 8n+1, 8n+1)$,

$I(0,5) = \left(0, 0, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\right)$,

$M_\alpha^{I(8n,5)} = M_\alpha^{I(8n,1)} \oplus M_\alpha^{I(8n+7,1)[n \mapsto n-1]}$, for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M_{3\to 7}^{I(8n,5)} = \left(M_{3\to 7}^{I(8n,1)} \oplus M_{3\to 7}^{I(8n+7,1)[n\mapsto n-1]} \right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2n-1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 4n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} I(8n+1,5) = (4n+1, 4n+1, 4n+2, 4n+2, 8n+2, 8n+2, 8n+3)$,

$$I(1,5) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right),$$

$M_\alpha^{I(8n+1,5)} = M_\alpha^{I(8n+4,4)} \oplus M_\alpha^{I(8n+1,4)}$, for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M_{3\to 7}^{I(8n+1,5)} = \left(M_{3\to 7}^{I(8n+4,4)} \oplus M_{3\to 7}^{I(8n+1,4)} \right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 1 & 2n-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 4n+1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} I(8n+2,5) = (4n+1, 4n+1, 4n+2, 4n+2, 8n+2, 8n+3, 8n+4)$,

$M_\alpha^{I(8n+2,5)} = M_\alpha^{I(8n+2,1)} \oplus M_\alpha^{I(8n+1,1)}$, for $\alpha \neq (5 \to 1)$,

$$M_{5\to 1}^{I(8n+2,5)} = \left(M_{5\to 1}^{I(8n+2,1)} \oplus M_{5\to 1}^{I(8n+1,1)} \right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 4n & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2n \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+3,5) = (4n+1, 4n+1, 4n+2, 4n+2, 8n+3, 8n+4, 8n+4)$,

$M^{I(8n+3,5)}_{\alpha} = M^{I(8n+3,1)}_{\alpha} \oplus M^{I(8n+2,1)}_{\alpha}, \quad$ for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M^{I(8n+3,5)}_{3\to7} = \left(M^{I(8n+3,1)}_{3\to7} \oplus M^{I(8n+2,1)}_{3\to7}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4n+1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+4,5) = (4n+2, 4n+2, 4n+3, 4n+3, 8n+5, 8n+5, 8n+5)$,

$M^{I(8n+4,5)}_{\alpha} = M^{I(8n+4,1)}_{\alpha} \oplus M^{I(8n+3,1)}_{\alpha}, \quad$ for $\alpha \neq (5 \to 1)$,

$$M^{I(8n+4,5)}_{5\to1} = \left(M^{I(8n+4,1)}_{5\to1} \oplus M^{I(8n+3,1)}_{5\to1}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 4n+1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2n+1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+5,5) = (4n+3, 4n+3, 4n+4, 4n+4, 8n+6, 8n+6, 8n+7)$,

$M^{I(8n+5,5)}_{\alpha} = M^{I(8n+5,1)}_{\alpha} \oplus M^{I(8n+4,1)}_{\alpha}, \quad$ for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M^{I(8n+5,5)}_{3\to7} = \left(M^{I(8n+5,1)}_{3\to7} \oplus M^{I(8n+4,1)}_{3\to7}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2n+1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4n+3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+6,5) = (4n+3, 4n+3, 4n+4, 4n+4, 8n+6, 8n+7, 8n+8)$,

$M^{I(8n+6,5)}_{\alpha} = M^{I(8n+6,1)}_{\alpha} \oplus M^{I(8n+5,1)}_{\alpha}, \quad$ for $\alpha \neq (4 \to 7)$,

$$M^{I(8n+6,5)}_{4\to7} = \left(M^{I(8n+6,1)}_{4\to7} \oplus M^{I(8n+5,1)}_{4\to7}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2n+1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4n+3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+7,5) = (4n+3, 4n+3, 4n+4, 4n+4, 8n+7, 8n+8, 8n+8)$,

$M^{I(8n+7,5)}_{\alpha} = M^{I(8n+7,1)}_{\alpha} \oplus M^{I(8n+6,1)}_{\alpha}, \quad$ for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M^{I(8n+7,5)}_{3\to7} = \left(M^{I(8n+7,1)}_{3\to7} \oplus M^{I(8n+6,1)}_{3\to7}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2n+1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4n+3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n,6) = (4n, 4n, 4n+1, 4n+1, 8n, 8n+1, 8n+1)$,

$M^{I(8n,6)}_{\alpha} = M^{I(8n+2,4)}_{\alpha} \oplus M^{I(8n,3)}_{\alpha}, \quad$ for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M^{I(8n,6)}_{3\to7} = \left(M^{I(8n+2,4)}_{3\to7} \oplus M^{I(8n,3)}_{3\to7}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2n & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+1,6) = (4n, 4n, 4n+1, 4n+1, 8n+1, 8n+1, 8n+2)$,

$$I(1,6) = \left(0, 0, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

$M^{I(8n+1,6)}_{\alpha} = M^{I(8n+1,1)}_{\alpha} \oplus M^{I(8n+7,2)[n\mapsto n-1]}_{\alpha}, \quad$ for $\alpha \neq (5 \to 2)$,

$$M^{I(8n+1,6)}_{5\to 2} = \left(M^{I(8n+1,1)}_{5\to 2} \oplus M^{I(8n+7,2)[n\mapsto n-1]}_{5\to 2}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 4n-1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} I(8n+2,6) = (4n+1, 4n+1, 4n+2, 4n+2, 8n+2, 8n+3, 8n+3)$,

$M^{I(8n+2,6)}_{\alpha} = M^{I(8n+2,2)}_{\alpha} \oplus M^{I(8n,1)}_{\alpha}$, for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M^{I(8n+2,6)}_{3\to 7} = \left(M^{I(8n+2,2)}_{3\to 7} \oplus M^{I(8n,1)}_{3\to 7}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2n & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4n+1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+3,6) = (4n+1, 4n+1, 4n+2, 4n+2, 8n+3, 8n+3, 8n+4)$,

$$I(3,6) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right),$$

$M^{I(8n+3,6)}_{\alpha} = M^{I(8n+5,4)}_{\alpha} \oplus M^{I(8n+3,3)}_{\alpha}$, for $\alpha \neq (5 \to 1)$,

$$M^{I(8n+3,6)}_{5\to 1} = \left(M^{I(8n+5,4)}_{5\to 1} \oplus M^{I(8n+3,3)}_{5\to 1}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 4n-1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} I(8n+4,6) = (4n+2, 4n+2, 4n+3, 4n+3, 8n+4, 8n+5, 8n+5)$,

$M^{I(8n+4,6)}_{\alpha} = M^{I(8n+6,3)}_{\alpha} \oplus M^{I(8n+4,4)}_{\alpha}$, for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M^{I(8n+4,6)}_{3\to 7} = \left(M^{I(8n+6,3)}_{3\to 7} \oplus M^{I(8n+4,4)}_{3\to 7}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+5,6) = (4n+2, 4n+2, 4n+3, 4n+3, 8n+5, 8n+5, 8n+6)$,

$M^{I(8n+5,6)}_{\alpha} = M^{I(8n+5,2)}_{\alpha} \oplus M^{I(8n+3,1)}_{\alpha}$, for $\alpha \neq (5 \to 1)$,

$$M^{I(8n+5,6)}_{5\to 1} = \left(M^{I(8n+5,2)}_{5\to 1} \oplus M^{I(8n+3,1)}_{5\to 1}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 4n+1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2n+1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+6,6) = (4n+3, 4n+3, 4n+4, 4n+4, 8n+6, 8n+7, 8n+7)$,

$M^{I(8n+6,6)}_{\alpha} = M^{I(8n+6,2)}_{\alpha} \oplus M^{I(8n+4,1)}_{\alpha}$, for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M^{I(8n+6,6)}_{3\to 7} = \left(M^{I(8n+6,2)}_{3\to 7} \oplus M^{I(8n+4,1)}_{3\to 7}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2n+1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4n+3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+7,6) = (4n+3, 4n+3, 4n+4, 4n+4, 8n+7, 8n+7, 8n+8)$,

$M^{I(8n+7,6)}_{\alpha} = M^{I(8n+7,2)}_{\alpha} \oplus M^{I(8n+5,1)}_{\alpha}$, for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M^{I(8n+7,6)}_{3\to 7} = \left(M^{I(8n+7,2)}_{3\to 7} \oplus M^{I(8n+5,1)}_{3\to 7}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2n+1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4n+3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n,7) = (4n, 4n, 4n+1, 4n+1, 8n, 8n, 8n+1)$,

$I(0,7) = \left(0,0,0,0,\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\right)$,

$M_\alpha^{I(8n,7)} = M_\alpha^{I(8n,1)} \oplus M_\alpha^{I(8n+5,1)[n\mapsto n-1]}$, for $\alpha \neq (4 \to 7)$,

$$M_{4\to 7}^{I(8n,7)} = \left(M_{4\to 7}^{I(8n,1)} \oplus M_{4\to 7}^{I(8n+5,1)[n\mapsto n-1]}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2n-1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 4n \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} I(8n+1,7) = (4n, 4n, 4n+1, 4n+1, 8n, 8n+1, 8n+2)$,

$I(1,7) = \left(0,0,0,\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$,

$M_\alpha^{I(8n+1,7)} = M_\alpha^{I(8n+1,1)} \oplus M_\alpha^{I(8n+6,1)[n\mapsto n-1]}$, for $\alpha \neq (5 \to 2)$,

$$M_{5\to 2}^{I(8n+1,7)} = \left(M_{5\to 2}^{I(8n+1,1)} \oplus M_{5\to 2}^{I(8n+6,1)[n\mapsto n-1]}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 4n+2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2n-3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} I(8n+2,7) = (4n, 4n, 4n+1, 4n+1, 8n+1, 8n+2, 8n+2)$,

$I(2,7) = \left(0,0,\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$,

$M_\alpha^{I(8n+2,7)} = M_\alpha^{I(8n+2,1)} \oplus M_\alpha^{I(8n+7,1)[n\mapsto n-1]}$, for $\alpha \neq (5 \to 1)$,

$$M_{5\to 1}^{I(8n+2,7)} = \left(M_{5\to 1}^{I(8n+2,1)} \oplus M_{5\to 1}^{I(8n+7,1)[n\mapsto n-1]}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 4n-1 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2n \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad n > 0;$$

$\underline{\dim} I(8n+3,7) = (4n+1, 4n+1, 4n+2, 4n+2, 8n+3, 8n+3, 8n+3)$,

$M_\alpha^{I(8n+3,7)} = M_\alpha^{I(8n+3,1)} \oplus M_\alpha^{I(8n,1)}$, for $\alpha \neq (5 \to 2)$,

$$M_{5\to 2}^{I(8n+3,7)} = \left(M_{5\to 2}^{I(8n+3,1)} \oplus M_{5\to 2}^{I(8n,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 4n & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2n \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+4,7) = (4n+2, 4n+2, 4n+3, 4n+3, 8n+4, 8n+4, 8n+5)$,

$M_\alpha^{I(8n+4,7)} = M_\alpha^{I(8n+4,1)} \oplus M_\alpha^{I(8n+1,1)}$, for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M_{3\to 7}^{I(8n+4,7)} = \left(M_{3\to 7}^{I(8n+4,1)} \oplus M_{3\to 7}^{I(8n+1,1)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2n & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4n+2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+5,7) = (4n+2, 4n+2, 4n+3, 4n+3, 8n+4, 8n+5, 8n+6)$,

$M_\alpha^{I(8n+5,7)} = M_\alpha^{I(8n+6,4)} \oplus M_\alpha^{I(8n+5,4)}$, for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M_{3\to 7}^{I(8n+5,7)} = \left(M_{3\to 7}^{I(8n+6,4)} \oplus M_{3\to 7}^{I(8n+5,4)}\right) \boxplus \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 4n+1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+6,7) = (4n+2, 4n+2, 4n+3, 4n+3, 8n+5, 8n+6, 8n+6)$,
$M_\alpha^{I(8n+6,7)} = M_\alpha^{I(8n+6,1)} \oplus M_\alpha^{I(8n+3,1)}$, for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M_{3\to 7}^{I(8n+6,7)} = \left(M_{3\to 7}^{I(8n+6,1)} \oplus M_{3\to 7}^{I(8n+3,1)}\right) \boxplus \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 4n+2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$\underline{\dim} I(8n+7,7) = (4n+3, 4n+3, 4n+4, 4n+4, 8n+7, 8n+7, 8n+7)$,
$M_\alpha^{I(8n+7,7)} = M_\alpha^{I(8n+7,1)} \oplus M_\alpha^{I(8n+4,1)}$, for $\alpha \neq (3 \to 7)$,

$$M_{3\to 7}^{I(8n+7,7)} = \left(M_{3\to 7}^{I(8n+7,1)} \oplus M_{3\to 7}^{I(8n+4,1)}\right) \boxplus \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2n+1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4n+3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

III.4.3 Modulele regulare excepționale

Există doar un număr finit de module excepționale regulare. Acestea sunt modulele regulare indecompozabile necompozabile cu vector de dimensiune mai mic decât $\delta = (1,1,1,1,2,2,2)$, marcate cu verde în Figura III.6. Menționăm că $\underline{\dim} R_0^l(2) = \underline{\dim} R_1^{l'}(4) = \underline{\dim} R_\infty^l(2) = \delta$, unde $l \in \{1,2\}$, $l' \in \{1,2,3,4\}$.

Reprezentările simplelor regulare ale lui $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$ sunt, de asemenea, date în [34], le includem aici doar de dragul completitudinii:

$$\underline{\dim} R_\infty^1(1) = (0,1,0,1,1,1,1),$$
$$R_\infty^1(1) = \left(0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\right);$$

$$\underline{\dim} R_\infty^2(1) = (1,0,1,0,1,1,1),$$
$$R_\infty^2(1) = \left(\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, 0\right);$$

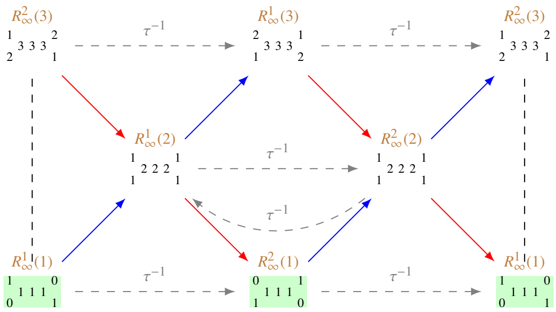
$$\underline{\dim} R_0^1(1) = (0,1,1,0,1,1,1),$$
$$R_0^1(1) = \left(0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, 0\right);$$

$$\underline{\dim} R_0^2(1) = (1,0,0,1,1,1,1),$$
$$R_0^2(1) = \left(\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, 0, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\right);$$

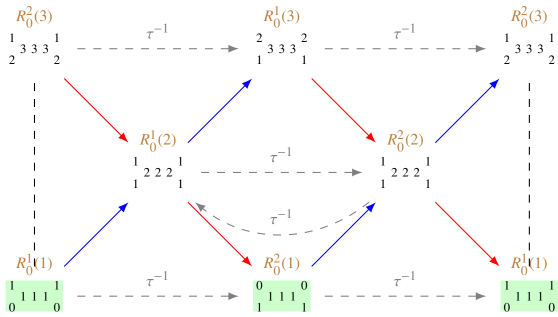
$$\underline{\dim} R_1^1(1) = (0,0,0,0,0,0,1),$$
$$R_1^1(1) = (0,0,0,0,0,0);$$

$$\underline{\dim} R_1^1(2) = (1,1,1,1,1,1,2),$$
$$R_1^1(2) = \left(\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}\right);$$

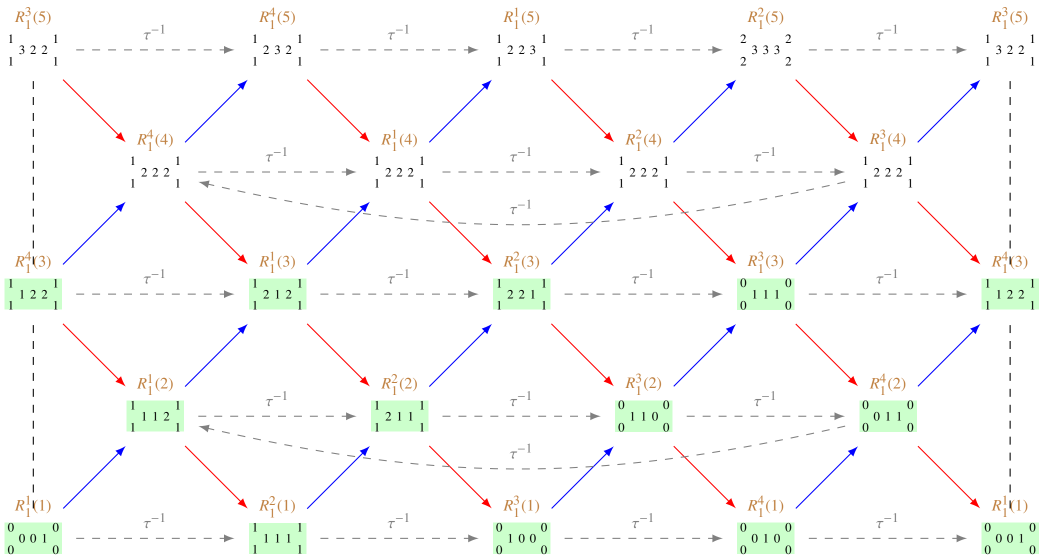
Tubul regular neomogen $\mathcal{T}_{\infty}^{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)}$



Tubul regular neomogen $\mathcal{T}_{0}^{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)}$



Tubul regular neomogen $\mathcal{T}_{1}^{\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)}$



Tuburi regulari neomogene în cazul $\Delta(\widetilde{\mathbb{D}}_6)$

$$\underline{\dim} R_1^1(3) = (1,1,1,1,2,1,2),$$
$$R_1^1(3) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right);$$

$$\underline{\dim} R_1^2(1) = (1,1,1,1,1,1,1),$$
$$R_1^2(1) = \left(\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \right);$$

$$\underline{\dim} R_1^2(2) = (1,1,1,1,2,1,1),$$
$$R_1^2(2) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \right);$$

$$\underline{\dim} R_1^2(3) = (1,1,1,1,2,2,1),$$
$$R_1^2(3) = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\right);$$

$$\underline{\dim} R_1^3(1) = (0,0,0,0,1,0,0),$$
$$R_1^3(1) = (0,0,0,0,0,0);$$

$$\underline{\dim} R_1^3(2) = (0,0,0,0,1,1,0),$$
$$R_1^3(2) = \left(0,0,\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},0,0,0\right);$$

$$\underline{\dim} R_1^3(3) = (0,0,0,0,1,1,1),$$
$$R_1^3(3) = \left(0,0,\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},0,0\right);$$

$$\underline{\dim} R_1^4(1) = (0,0,0,0,0,1,0),$$
$$R_1^4(1) = (0,0,0,0,0,0);$$

$$\underline{\dim} R_1^4(2) = (0,0,0,0,0,1,1),$$
$$R_1^4(2) = \left(0,0,0,\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},0,0\right);$$

$$\underline{\dim} R_1^4(3) = (1,1,1,1,1,2,2),$$
$$R_1^4(3) = \left(\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right).$$

Capitolul IV

Despre natura combinatorică a reprezentărilor de tip arbore ale tolbelor euclidiene

După cum am menționat mai devreme, Ringel a demonstrat că fiecare modul excepțional are o reprezentare de tip arbore, dar unul dintre pașii din demonstrație implică o alegere a bazei, care pare să depindă de corpul considerat. El a pus întrebarea (vezi Problemele 1. și 2. din Secțiunea 9. din [27]) dacă există reprezentări de tip arbore care sunt independente de această alegere a bazei, deci fiind independente de corp. Această problemă rămâne deschisă în general, dar așa cum am văzut în Capitolele II și III în unele cazuri particulare, a fost rezolvată: reprezentări de tip arbore pentru tolbele euclidiene orientate canonic $\widetilde{\mathbb{E}}_6$ și $\widetilde{\mathbb{D}}_m$ enumerate în capitolul anterior sunt într-adevăr independente de corp, dând astfel un răspuns afirmativ la întrebarea lui Ringel în aceste cazuri.

Reamintim că reprezentările din cele două capitole anterioare au fost obținute prin experimentare în $\mathbb{Z}_2$ și $\mathbb{Z}_3$, și nu au fost construite în mod specific pentru a fi independente de corp. Probabil aceasta nu este o coincidență norocoasă și ridică întrebarea dacă fiecare reprezentare de arbore este independentă de corp sau nu.

În acest capitol, pe baza articolului [18] verificăm computațional această întrebare în cazul tolbelor euclidiene de tip $\widetilde{\mathbb{D}}_4$, $\widetilde{\mathbb{D}}_5$ și $\widetilde{\mathbb{E}}_6$ cu vectorul de dimensiune mărginit de vectorul radical minim al tolbei. Aceasta include o clasă mare de reprezentări excepționale, în particular toate excepționalele neomogene regulare.

IV.1 Descoperiri computaționale și conjecturi

În cele ce urmează fie k un corp arbitrar, Q o tolbă euclidiană și x o rădăcină excepțională peste Q. Introducem următoarea notație pentru mulțimea tuturor reprezentărilor de tip arbore cu vector de dimensiune x peste k:

$$T_k(x) = \{\ M \in \operatorname{rep} kQ \mid \underline{\dim} M = x \text{ and } M \text{ este o reprezentare de tip arbore }\}.$$

Propoziția IV.1.1. *Notăm prin Q o tolbă euclidiană orientată canonic de tip $\widetilde{\mathbb{D}}_4$, $\widetilde{\mathbb{D}}_5$ sau $\widetilde{\mathbb{E}}_6$. Fie x o rădăcină excepțională peste Q mai mică decât radicalul minim δ. Dacă privim matricele reprezentărilor ca și tabele formale 2-dimensionale ale simbolurilor 0 și 1, atunci mulțimea $T_k(x)$ are aceleași elemente peste orice corp, adică $T_k(x) = T_{k'}(x)$ pentru oricare două corpuri k și k'.*

Ca urmare a propoziției anterioare formulăm următoarea conjectură:

Conjectura IV.1.2. *Fie x o rădăcină excepțională peste o tolbă euclidiană arbitrară Q mai mică decât vectorul radical minim δ. Dacă privim matricele reprezentărilor ca și tabele formale 2-dimensionale ale simbolurilor 0 și 1, atunci mulțimea $T_k(x)$ are aceleași elemente peste orice corp, adică $T_k(x) = T_{k'}(x)$ pentru oricare două corpuri k și k'.*

În cazul tolbelor (verificate computațional) am putea omite indicele k și notăm mulțimea doar ca $T(x)$.

Fie z o rădăcină excepțională a tolbei Q și $Z \in T(z)$ o reprezentare de tip arbore. Definim mulțimea $S(z)$, care va conține perechile de vectori de dimensiune a fiecarei perechi Schofield (nespeciale) aparținând lui Z. Mai precis:

$$\begin{aligned} S(z) = \{\ (x, y) \mid\ & x, y \text{ sunt rădăcini excepționale ale } Q \text{ și } (Y, X) \text{ e o pereche} \\ & \text{Schofiel aparținând lui } Z, \text{ unde } Z \in T(z),\ \ Y \in T(y) \text{ și} \\ & X \in T(x) \text{ cu } \underline{\dim} X = x,\ \underline{\dim} Y = y,\ \underline{\dim} Z = z\ \} \end{aligned}$$

Menționăm că în timp ce reprezentările $X, Y, Z \in \operatorname{mod} kQ$ există în contextul unui corp de bază k, condițiile enunțate în Propoziția 7 din [39] depind doar de valoarea rădăcinilor (vectori de dimensiune), prin urmare mulțimea $S(z)$ poate fi folosit într-un context independent de corp.

Dacă rădăcina z este mai mică decât vectorul radical minim δ, atunci avem doar așa-numitele secvențe Schofield nespeciale de forma $0 \to X \to Z \to Y \to 0$ (vezi Propoziții 7 și 9 din [39]) și mulțimea $S(z)$ poate fi dată în felul următor:

$$S(z) = \{\ (x, y) \mid x, y \text{ sunt rădăcini excepționale ale } Q,\ \ x + y = z,\ \ \langle x, y\rangle = 0\ \}$$

În cele ce urmează definim o mulțime de reprezentări construite folosind perechi Schofield. Fie x și y rădăcini excepționale ale tolbei Q și luăm în considerare reprezentări arbitrare de tip arbore $X \in T(x)$ și $Y \in T(y)$. Construim o nouă reprezentare $R^{\alpha ij}_{XY}$, după cum urmează ($\alpha \in Q_1$ și i, j fiind indici de rând, respectiv de coloană în blocul din dreapta sus al matricei M_α):

$$R^{\alpha ij}_{XY} = (M_v, M_a)_{\substack{v \in Q_0 \\ a \in Q_1}} = \left((X_v \oplus Y_v)_{v \in Q_0}, \left(\begin{bmatrix} X_a & E^{ij}_a \\ 0 & Y_a \end{bmatrix} \right)_{a \in Q_1} \right)$$

unde pentru blocul din dreapta sus E^{ij}_a este adevărat că $E^{ij}_a = 0$ pentru $a \neq \alpha$ și E^{ij}_α conține exact un element 1 diferit de zero în rândul i și coloana j, atlfel este zero. Folosind această notație introducem următoarea mulțime $E_k(x, y) \subseteq \operatorname{mod} kQ$:

$$\begin{aligned} E_k(x, y) = \{\ R^{\alpha ij}_{XY} \mid\ & \alpha \in Q_1,\ \ i, j \text{ sunt indici de rând, resp. coloană,} \\ & X \in T_k(x),\ \ Y \in T_k(y),\ \ R^{\alpha ij}_{XY} \in T_k(x + y)\ \} \end{aligned}$$

Pentru reprezentările de tip arbore X și Y date, reprezentarea $R^{\alpha ij}_{XY}$ este construcția dată de Ringel în

Secțiunea 6 din [27]. După cum a fost menționat acolo, poziția unei singure elemente diferită de zero specificată de α, i și j implică o alegere a bazei și poate depinde foarte bine de corpul de bază k. Spre surprinderea noastră, însă, acesta pare să nu fie cazul:

Propoziția IV.1.3. *Notăm prin Q o tolbă euclidiană orientată canonic de tip $\widetilde{\mathbb{D}}_4$, $\widetilde{\mathbb{D}}_5$ sau $\widetilde{\mathbb{E}}_6$. Fie x și y rădăcini excepționale peste Q, mai mici decât radicalul minim δ. Dacă privim matricele reprezentărilor ca tabele formale 2-dimensionale ale simbolurilor* 0 *și* 1*, atunci mulțimea $E_k(x, y)$ are aceleași elemente peste orice corp, adică $E_k(x, y) = E_{k'}(x, y)$ pentru oricare două corpuri k și k'.*

Pe baza constatărilor noastre presupunem că Propoziția IV.1.3 este valabilă pentru tolbe arbitrare și rădăcini excepționale. În cazul tolbelor (verificate computațional) am putea omite indicele k și notăm mulțimea doar ca $E(x, y)$.

Mergând mai departe cu „investigația noastră computațională” în problema independenței corpului, am putea cere o metodă pentru a construi mulțimea reprezentărilor de tip arbore, alta decât „căutarea exhaustivă” pe care am efectuat-o. Ringel în demonstrația sa a folosit inducția Schofield pentru a construi reprezentări de tip arbore (vezi Secțiunea 6 din [27]), și ne putem pune întrebarea dacă există alte metode pentru obținerea lor sau dacă construcția lui produce orice reprezentare de tip arbore posibilă. Permutarea vectorilor de bază este o operație independentă de corp, așa că introducem următoarele:

Definiția IV.1.4. Fie $M = (M_i, M_\alpha)$ și $N = (N_i, N_\alpha)$ reprezentări ale unei tolbe Q. Atunci spunem că sunt *permutațional similare*, dacă există o familie de matrice permutare $\{A_i \mid i \in Q_0\}$ astfel încât următoarea diagramă este comutativă pentru fiecare săgeată $\alpha \in Q_1$:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{M_\alpha} & M_j \\ \downarrow{\scriptstyle A_i} & & \downarrow{\scriptstyle A_j} \\ N_i & \xrightarrow{N_\alpha} & N_j \end{array}$$

Fie $Z \in T(z)$ o reprezentare de tip arbore, notăm cu $\pi(Z)$ mulțimea tuturor reprezentărilor de tip arbore care sunt permutațional similare cu Z.

Folosind notațiile introduse mai sus, formulăm următoarea propoziție, oferind o metodă de construire inductivă a mulțimilor de reprezentări de tip arbore:

Propoziția IV.1.5. *Fie z o rădăcină excepțională a unei tolbe euclidiene orientate caconic de tip $\widetilde{\mathbb{D}}_4$, $\widetilde{\mathbb{D}}_5$ sau $\widetilde{\mathbb{E}}_6$, astfel încât $z < \delta$. Atunci avem*

$$T(z) = \bigcup_{\substack{(x,y) \in S(z) \\ Z \in E(x,y)}} \pi(Z).$$

Avem conjectura că Propoziția IV.1.5 este valabilă pentru fiecare rădăcină excepțională a oricărei tolbe euclidiene.

Bibliografie

[1] *Clean 3.0*, https://wiki.clean.cs.ru.nl/Clean.

[2] *GAP*, http://www.gap-system.org/.

[3] I. Assem, A. Skowroński, and D. Simson, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Techniques of Representation Theory*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 1, Cambridge University Press, 2006.

[4] M. Auslander and I. Reiten, *Representation theory of Artin algebras, III almost split sequences*, Communications in Algebra **3** (1975), no. 3, 239–294.

[5] W. W. Crawley-Boevey, *Matrix problems and Drozd's theorem*, Banach Center Publications **26** (1990), no. 1, 199–222.

[6] V. Dlab and C. M. Ringel, *Indecomposable representations of graphs and algebras*, vol. 173 = Vol. 6,[3], American Mathematical Society, 1976.

[7] P. Dowbor, H. Meltzer, and A. Mróz, *An algorithm for the construction of exceptional modules over tubular canonical algebras*, Journal of Algebra **323** (2010), no. 10, 2710–2734.

[8] P. Dowbor, H. Meltzer, and M. Schmidmeier, *The "0, 1-property" of exceptional objects for nilpotent operators of degree 6 with one invariant subspace*, Journal of Pure and Applied Algebra **223** (2019), no. 7, 3150–3203.

[9] E. Dynkin, *Classification of the simple Lie groups*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. **18(60)** (1946), 347–352.

[10] P. Fahr, *Infinite Gabriel-Roiter measures for the 3-Kronecker quiver*, Ph.D. thesis, Bielefeld University, 2008.

[11] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscripta Mathematica **6** (1972), no. 1, 71–103.

[12] M. Grzecza, S. Kasjan, and A. Mróz, *Tree Matrices and a Matrix Reduction Algorithm of Belitskii*, Fundamenta Informaticae **118** (2012), no. 3, 253–279.

[13] D. Kędzierski and H. Meltzer, *Indecomposable representations for extended Dynkin quivers of type* $\widetilde{E}_8$, Colloquium Mathematicum **124** (2011), no. 1, 95–116.

[14] D. Kussin and H. Meltzer, *Indecomposable representations for extended Dynkin quivers*, 2006.

[15] Sz. Lénárt, Á. Lőrinczi, Cs. Szántó, and I. Szöllősi, *Proof of the tree module property for exceptional representations of tame quivers*, ArXiv **abs/2001.00016v3** (2021).

[16] Sz. Lénárt, Á. Lőrinczi, Cs. Szántó, and István Szöllősi, *Tree representations of the quiver* $\widetilde{D}_m$, Colloquium Mathematicum **167** (2022), no. 2, 261–302.

[17] Sz. Lénárt, Á. Lőrinczi, and I. Szöllősi, *Tree representations of the quiver* $\widetilde{E}_6$, Colloquium Mathematicum **164** (2021), no. 2, 221–250.

[18] Á. Lőrinczi, *On the combinatorial nature of tree representations of Euclidean quivers*, accepted for publication in Mathematica.

[19] Á. Lőrinczi and Cs. Szántó, *The indecomposable preprojective and preinjective representations of the quiver* $\widetilde{D}_n$, Mathematica **57 (80)** (2015), 95–116.

[20] I. Reiten M. Auslander and S. Smalø, , Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1995.

[21] A. Mróz, *On the Multiplicity Problem and the Isomorphism Problem for the Four Subspace Algebra*, Communications in Algebra **40** (2012), no. 6, 2005–2036.

[22] A. Mróz, *The dimensions of the homomorphism spaces to indecomposable modules over the four subspace algebra*, 2012.

[23] M. Plasmeijer and M. Eekelen, *Functional Programming and Parallel Graph Rewriting*, 1993.

[24] C. M. Ringel, *Representations of k-species and bimodules*, Journal of Algebra **41** (1976), no. 2, 269–302.

[25] C. M. Ringel, *The braid group action on the set of exceptional sequences of a hereditary Artin algebra*, Abelian group theory and related topics: Conference on Abelian Groups, August 1 - 7, 1993, Oberwolfach, Germany (Rüdiger Göbel, ed.), vol. 171, American Mathematical Soc., 1994, 339–352.

[26] C. M. Ringel, *Exceptional objects in hereditary categories*, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta. Proceedings: Representation Theory of Groups, Algebras, and Orders. September 25 - October 6, 1995, Constanta (Klaus W. Roggenkamp and Mirela Stefanescu, eds.), no. 2, Faculty of Mathematics and Computer Science, Ovidius University, Constanta, Romania, 1996, 150–158.

[27] C. M. Ringel, *Exceptional modules are tree modules*, Linear Algebra and its Applications **275-276** (1998), 471–493.

[28] C. M. Ringel, *Combinatorial Representation Theory. History and Future*, Representations of algebra. Vol. I, II, Beijing Norm. Univ. Press, Beijing, 2002, 122–144.

[29] C. M. Ringel, *Indecomposable representations of the kronecker quivers*, Proceedings of the American Mathematical Society **141** (2012), no. 1, 115–121.

[30] C. M. Ringel, *Introduction to the representation theory of quivers*, https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/kau, 2012.

[31] C. M. Ringel, *Representations of Quivers. An Introduction*, https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/shanghai/sjtu.html, 2015.

[32] R. Schiffler, *Quiver representations*, Springer International Publishing, 2014.

[33] A. Schofield, *Semi-Invariants of Quivers*, Journal of the London Mathematical Society **s2-43** (1991), no. 3, 385–395.

[34] D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 2, Cambridge University Press, 2007.

[35] A. Skowroński and K. Yamagata, *Frobenius Algebras I*, European Mathematical Society Publishing House, 2011.

[36] A. Skowroński and K. Yamagata, *Frobenius algebras II*, European Mathematical Society Publishing House, 2017.

[37] S. Smetsers, E. Barendsen, M. Eekelen, and R. Plasmeijer, *Guaranteeing safe destructive updates through a type system with uniqueness information for graphs*, Graph Transformations in Computer Science, Springer Berlin Heidelberg, 1994, 358–379.

[38] Cs. Szántó, *On some Ringel–Hall products in tame cases*, Journal of Pure and Applied Algebra **216** (2012), no. 10, 2069–2078.

[39] Cs. Szántó and I. Szöllősi, *Schofield sequences in the Euclidean case*, Journal of Pure and Applied Algebra **225** (2021), no. 5, 106586.

[40] T. Weist, *Tree modules of the generalised Kronecker quiver*, Journal of Algebra **323** (2010), no. 4, 1107–1138.

[41] T. Weist, *Tree modules*, Bulletin of the London Mathematical Society **44** (2012), no. 5, 882–898.

[42] P. Zhang, Y.-B. Zhang, and J.-Y. Guo, *Minimal Generators of Ringel–Hall Algebras of Affine Quivers*, Journal of Algebra **239** (2001), no. 2, 675–704.