Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

Contribuţii în teoria funcţiilor univalente de una şi mai multe variabile complexe

Teză de Doctorat - Rezumat

Conducători ştiinţifici:
Prof. Dr. Gabriela Kohr
Prof. Dr. Mirela Kohr

Student-doctorand:
Andra-Monica Manu

Cluj-Napoca
2022

Cuprins

Introducere

În această teză de doctorat prezentăm rezultate noi în teoria funcţiilor univalente de una, respectiv mai multe variabile complexe. Teoria funcţiilor univalente face parte din teoria geometrică a funcţiilor şi reprezintă un punct de interes pentru numeroase lucrări de cercetare. Fie $\mathbb{C}$ planul complex şi fie $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) : z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n\}$, $n \geq 2$, spaţiul de n variabile complexe cu produsul scalar Euclidian şi cu norma Euclideană. Fie U discul unitate, fie $\mathbb{B}^n$ bila unitate Euclideană în $\mathbb{C}^n$ si fie $\mathbb{P}^n$ polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$. Spunem că o funcţie este univalentă dacă este o funcţie injectivă şi olomorfă. Un rezultat remarcabil în teoria funcţiilor univalente de o variabilă complexă este Teorema lui Riemann, care afirmă că orice domeniu simplu conex Ω diferit de întreg planul complex este conform echivalent cu discul unitate U (a se vedea [48], [66]). Datorită acestui rezultat este suficient să studiem univalenţa pe discul unitate U (a se vedea de exemplu [48], [66]). Fie S clasa funcţiilor univalente şi normate pe U (see [25], [102]). Spunem că o funcţie este normată pe U dacă sunt satisfăcute condiţiile $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Teorema lui Riemann nu are loc în $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ (see [93], [106]). Rezultatul care a condus la această observaţie este datorat lui Poincaré [100] şi arată că, în cazul mai multor variabile complexe, $\mathbb{B}^n$ şi $\mathbb{P}^n$ nu sunt biolomorfic echivalente, chiar dacă sunt omeomorfe.

Fie $S(\mathbb{B}^n)$ clasa aplicaţiilor normate şi biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$. Cartan H. [9] a arătat că familia $S(\mathbb{B}^n)$ nu este local uniform mărginită, aşadar nu este compactă şi nu există teoreme de deformare şi de distorsiune pentru întreaga clasă $S(\mathbb{B}^n)$. Considerăm familia aplicaţiilor care admit reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$, notată cu $S^0(\mathbb{B}^n)$. Această clasă importantă a fost introdusă de Graham, Hamada şi Kohr [37]. Graham et al. [37] au demonstrat că $S^0(\mathbb{B}^n)$ este o submulţime proprie a lui $S(\mathbb{B}^n)$, de unde deducem că există aplicaţii normate şi biolomorfe care nu admit reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$, spre deosebire de planul complex, unde orice funcţie din S admite reprezentare parametrică pe U (a se vedea [102]). Acest fapt marchează o diferenţă fundamentală între teoria funcţiilor univalente de una, respectiv mai multe variabile complexe. Printre aplicaţiile care admit reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ se enumeră şi aplicaţiilor normate şi stelate pe $\mathbb{B}^n$. Prin urmare, mulţimea $S^0(\mathbb{B}^n)$ nu este mulţimea vidă.

În $\mathbb{C}$, orice funcţie $f \in S$ admite reprezentare parametrică pe U, adică există un lanţ Loewner, $f(z,t) : U \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$, astfel încât f se scufundă ca prim element al acestui lanţ Loewner. Acest rezultat fundamental în teoria lanţurilor Loewner a fost obţinut de Pommerenke [102]. Importante clase de funcţii normate şi univalente pe U admit caracterizări analitice folosind lanţuri Loewner: clasa funcţiilor stelate, clasa funcţiilor spiralate de tip γ, $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (a se vedea de exemplu [102], [48]), clasa funcţiilor aproape stelate de ordin α, $\alpha \in [0, 1)$ (see [119]), clasa funcţiilor convexe (a se vedea [48], [102]) pe U. Diverse rezultate şi aplicaţii ale teoriei funcţiilor univalente de o variabilă complexă sunt tratate în monografiile lui Pommerenke [102], Duren [25], Graham şi Kohr [48], Mocanu, Bulboacă şi Sălăgean [90].

Un alt punct de interes important este reprezentat de studiul proprietăţilor geometrice ale aplicaţiilor univalente. O caracterizare analitică a stelarităţii pe $\mathbb{B}^n$ este dată de Matsuno [88]. Gurganus [54] şi Suffridge [114] au obţinut o caracterizare a stelarităţii pe bila unitate a unui spaţiu Banach, iar Suffridge [113] a dat caracterizare similară pe polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$. Teoreme de deformare, de acoperire şi estimări ale coeficienţilor pentru clasa $S^*(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor stelate şi normate pe $\mathbb{B}^n$ au fost obţinute de Kubicka şi Poreda [78], Barnard, FitzGerald şi Gong [5], Gong [32, 33], Graham şi Kohr [48], respectiv Kohr [72], Curt [19], Graham, Hamada şi Kohr [37]. Conceptul de stelaritate de ordin α pe $\mathbb{B}^n$, unde $\alpha \in [0,1)$, a fost definit de Kohr [70], iar conceptul de aproape stelaritate de ordin α, unde $\alpha \in [0,1)$, a fost introdus de Feng [30] pe bila unitate a unui spaţiu Banach. T. Chirilă [12] a definit aproape stelaritatea de ordin α şi tip γ pe $\mathbb{B}^n$, unde $0 \leq \alpha < 1$ şi $0 \leq \gamma < 1$. Caracterizarea analitică a convexităţii în C^n a fost obţinută de Kikuchi [69], Gong, Wang şi Yu [34] şi Suffridge [114, 112]. Alte rezultate obţinute pentru clasa aplicaţiilor normate şi convexe, precum o teoremă de deformare, estimări ale coeficienţilor, o teoremă de tip Marx-Strohhäcker, au fost obţinute de Suffridge [115], FitzGerald şi Thomas [31], Liu [79], Kohr [70, 72], Curt [18]. Conceptul de spiralitate în raport cu un operator linear şi normal, ale cărui valori proprii au partea reală pozitivă, a fost definit de Gurganus [54] (a se vedea [60], [48]). Alte generalizări au fost considerate de Suffridge [112], Liu şi Liu [82], Chirilă [11].

Teoria lanţurilor Loewner în plan complex a avut o contribuţie majoră în studiul funcţiilor univalente, având numeroase aplicaţii precum: caracterizarea analitică a funcţiilor univalente cu proprietăţi geometrice, demonstrarea conjecturii lui Bieberbach, etc (a se vedea [25], [48]). Prima generalizare a lanţurilor Loewner şi a ecuaţiei diferenţiale Loewner în cazul mai multor variabile complexe se datorează lui Pfaltzgraff [96, 97], care a extins noţiunea de lanţ Loewner pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Ulterior, Poreda [103, 104] a generalizat aceste noţiuni la polidiscul unitate $\mathbb{P}^n$ în $\mathbb{C}^n$ şi a introdus clasa aplicaţiilor normate şi univalente care admit reprezentare parametrică pe $\mathbb{P}^n$, notată cu $S^0(\mathbb{P}^n)$. Alte contribuţii semnificative au fost aduse de Kubicka şi Poreda [78], care au studiat clasa $S^*(\mathbb{B}^n)$. O altă contribuţie remarcabilă este introducerea clasei $S^0(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor care admit reprezentare parametrică pe B datorită lui Graham, Hamada şi Kohr [37]. Această clasă este o submulţime proprie a lui $S(\mathbb{B}^n)$, fapt ce indică că nu orice aplicaţie din clasa $S(\mathbb{B}^n)$ admite reprezentare parametrică. Această proprietate a fost obţinută de Graham, Hamada şi Kohr [37]. Rezultate remarcabile în teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$ au fost obţinute de G. Kohr şi colaboratorii săi într-o serie de lucrări valoroase, dintre care enumerăm: [37], [51], [23], [52], [26]. Alte rezultate în acest domeniu au fost obţinute în lucrările [7], [2], [8], [3]. De asemenea, criterii de univalenţă folosind lanţuri Loewner pot fi găsite în [16, 17].

Graham I., Hamada H., Kohr G. şi Kohr M. [42] au studiat noţiunea de reprezentare parametrică generalizată în raport cu un operator dependent de timp A pe spaţii Banach complexe şi reflexive (a se vedea [58]). În lucrarea [40] ce extinde rezultatele din [29], au fost tratate subiecte legate de lanţuri Loewner şi rezolvenţii neliniari ai clasei Carathédory în C^n, $\mathcal{M}$. Totodată, rezultate privind lanţurile Loewner pe suprafeţe Riemann au fost obţinute în [15]. Contribuţii legate de lanţuri Loewner şi rezultate de aproximare pentru aplicaţii univalente pe $\mathbb{B}^n$ pot fi găsite în [59].

O subclasă importantă a familiei $S^0(\mathbb{B}^n)$ este mulţimea aplicaţiilor cu g-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$, notată cu $S_g^0(\mathbb{B}^n)$, unde funcţia g satisface anumite proprietăţi naturale. Clasa $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ a fost introdusă de Graham, Hamada şi Kohr în [37]. Noţiunea de g-reprezentare parametrică este strâns legată de conceptul de g-lanţ Loewner. Spunem că aplicaţia $f(z,t) : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ este un g-lanţ Loewner dacă satisface următoarele condiţii: $f(z,t)$ este un lanţ Loewner, familia $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este normală pe $\mathbb{B}^n$ şi aplicaţia h obţinută din ecuaţia diferenţială Loewner

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Df(z,t)h(z,t),\ \text{a.e. } t\geq 0, \forall z\in\mathbb{B}^n, \tag{0.0.1}$$

verifică condiţia $h(\cdot,t)\in\mathcal{M}_g$, pentru aproape orice $t\geq 0$ ([37]). Clasa M_g este definită prin ([37])

$$\mathcal{M}_g = \left\{h\in H(\mathbb{B}^n): h(0)=0, Dh(0)=I_n, \langle h(z), \frac{z}{\|z\|^2}\rangle \in g(U), z\in\mathbb{B}^n\right\},$$

unde $\langle h(z), \frac{z}{\|z\|^2}\rangle|_{z=0} = 1$. O aplicaţie f admite g-reprezentare parametrică dacă şi numai dacă f se scufundată într-un g-lanţ Loewner. Pentru $g(\zeta)=\frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $\zeta\in U$, orice g-lanţ Loewner se reduce la un lanţ Loewner. În cazul $n\geq 2$ şi pentru aceeaşi funcţie g, există lanţuri Loewner care nu sunt g-lanţuri Loewner. Aceste proprietăţi reprezintă un motiv important de a studia g-reprezentarea parametrică în $\mathbb{C}^n$ pentru $n\geq 2$. În lucrările [37], [73], au fost obţinute o teoremă de deformare şi estimări ale coeficienţilor pentru clasa $S_g^0(\mathbb{B}^n)$. Alte rezultate privind g-lanţuri Loewner pot fi găsite în [39], [43], [62].

O modalitate de a construi aplicaţii biolomorfe în $\mathbb{C}^n$, $n\geq 2$, este prin intermediul operatorilor de extensie. Un prim exemplu de operator de extensie este operatorul introdus de Roper şi Suffridge [108]. Acest operator este definit astfel: $\Phi_n:\mathcal{L}S\to\mathcal{L}S_n$ şi este dat de următoarea expresie

$$\Phi_n(f)(z) = (f(z_1), \tilde{z}\sqrt{f'(z_1)}),\ z=(z_1,\tilde{z})\in\mathbb{B}^n.$$

Alegem ramura funcţiei putere astfel încât: $\sqrt{f'(z_1)}|_{z_1=0}=1$. Iniţial acest operator a fost definit pentru a construi aplicaţii convexe pe $\mathbb{B}^n$ folosind funcţii convexe pe U. Prin urmare, operatorul Φ_n păstrează convexitatea (a se vedea [108]). Această proprietate a fost obţinută printr-o altă metodă şi de Graham şi Kohr [47]. În [47], Graham I. şi Kohr G. au arătat iniţial că operatorul Φ_n păstrează stelaritatea. Ulterior, Hamada H., Kohr G. şi Kohr M. [63] au demonstrat că Φ_n păstrează stelaritatea de ordin $1/2$, iar Liu [80] a arătat că păstrează stelaritatea de ordin $\alpha\in(0,1)$ (a se vedea de asemenea [12]). Operatorul Φ_n păstrează spiralitatea de tipul $\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Această proprietate a fost obţinută de Graham, Kohr and Kohr [51]. Utilizând lanţuri Loewner, Chirilă T. [12] a arătat că acest operator conservă şi noţiunea de spiralitate de tipul $\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ şi ordin $\alpha\in(0,1)$ (a se vedea de asemenea [82]). Toate aceste proprietăţi sunt consecinţe ale următorului rezultat obţinut de Graham, Kohr şi Kohr [51]: dacă $f\in S$ atunci $\Phi_n(f)\in S^0(\mathbb{B}^n)$.

Un alt operator de extensie ce generalizează operatorul Φ_n introdus de Roper şi Suffridge este definit astfel: $\Phi_{n,\alpha,\beta}:\mathcal{L}S\to\mathcal{L}S_n$ şi este dat de următoarea expresie

$$\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)(x) = \left(f(z_1), \tilde{z}\Big(\frac{f(z_1)}{z_1}\Big)^{\alpha}(f'(z_1))^{\beta}\right),\ \forall z=(z_1,\tilde{z})\in\mathbb{B}^n,$$

unde $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$. Alegem ramura funcţiei putere astfel încât:

$$\Big(\frac{f(z_1)}{z_1}\Big)^{\alpha}\Big|_{z_1=0}=1,\ (f'(z_1))^{\beta}\Big|_{z_1=0}=1.$$

Acest operator remarcabil a fost introdus de Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge în [46]. Pentru $0\leq\alpha\leq 1$, $0\leq\beta\leq 1/2$ şi $\alpha+\beta\leq 1$, operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ păstrează reprezentarea parametrică, stelaritatea de ordin $\gamma \in (0,1)$, aproape stelaritatea de tip $\gamma \in (0,1)$ şi ordin $\delta \in [0,1)$, spiralitatea de tip $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi ordin $\delta \in (0,1)$ (a se vedea [46], [80], [81], [11]). Graham I., Hamada H., Kohr G. and Suffridge T. [46] au arătat că acest operator păstrează convexitatea dacă şi numai dacă $(\alpha, \beta) = (0, 1/2)$.

În lucrarea [92], Muir J. a introdus o altă generalizare a operatorului Roper-Suffridge, al cărui scop era de obţine puncte de extrem pentru clasa $K(\mathbb{B}^n)$, a aplicaţiilor normate şi convexe pe $\mathbb{B}^n$, pornind de la puncte de extrem ale clasei K, a funcţiilor normate şi convexe pe U. Acest operator este definit prin:

$$\Phi_{n,Q}(f)(z) = (f(z_1) + Q(\tilde{z})f'(z_1), \tilde{z}\sqrt{f'(z_1)}), \ z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n,$$

unde am ales ramura funcţiei putere astfel încât $\sqrt{f'(z_1)}|_{z_1=0} = 1$ şi $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ este un polinom omogen de grad 2. Pentru $\|Q\| \le 1/4$, operatorul $\Phi_{n,Q}$ păstrează reprezentarea parametrică şi stelaritatea. Acest rezultat a fost obţinut de Kohr [75]. Pentru $\|Q\| \le 1/2$, operatorul de extensie Muir păstrează convexitatea (a se vedea [92]), iar pentru $\|Q\| \le \frac{1-|2\alpha-1|}{8\alpha}$, păstrează stelaritatea de ordin $\alpha \in (0,1)$ (a se vedea [116], [12]).

Operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge generalizează operatorul Roper-Suffridge şi extinde o aplicaţie local biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$ la o aplicaţie local biolomorfă pe $\mathbb{B}^{n+1}$ în $\mathbb{C}^{n+1}$. Operatorul Pfaltzgraff-Suffridge este definit astfel ([99]): $\Psi_n : \mathcal{L}S_n \to \mathcal{L}S_{n+1}$ şi este dat de următoarea expresie

$$\Psi_n(f)(z) = \left(f(\tilde{z}), z_{n+1}[J_f(\tilde{z})]^{\frac{1}{n+1}}\right), \ z = (\tilde{z}, z_{n+1}) \in \mathbb{B}^{n+1}.$$

Alegem ramura funcţiei putere astfel încât $[J_f(\tilde{z})]^{\frac{1}{n+1}}\Big|_{\tilde{z}=0} = 1$. Aceste operator satisface proprietăţi precum: $\Psi_n(S^0(\mathbb{B}^n)) \subseteq S^0(\mathbb{B}^{n+1})$, $\Psi_n(S^*(\mathbb{B}^n)) \subseteq S^*(\mathbb{B}^{n+1})$ (a se vedea [53]). Graham I., Kohr G. şi Pfaltzgraff J.A. [53] au obţinut un rezultat parţial privind conservarea convexităţii prin acest operator.

Alţi operatori de tip Roper-Suffridge au fost studiaţi în [27], [28], [36], [38], [46], [47], [48], [49], [50], [75], etc., iar operatori de tip Pfaltzgraff-Suffridge au fost consideraţi în [13], [63] pe domenii Reinhardt şi [41] pe domenii mărginite şi simetrice în $\mathbb{C}^n$.

În lucrarea [65], autorii au adaptat operatorii de extensie $\Phi_{n,Q}$ şi Ψ_n la aplicaţii şi lanţuri Loewner nenormate şi au demonstrat că aceşti operatori conservă L^d-lanţuri Loewner. Rezultate recente privind operatori de tip Roper-Suffridge şi Pfaltzgraff-Suffridge pe spaţii Banach complexe obţinute de Graham et al. sunt prezentate în lucrarea [45] (a se vedea de asemenea [44], [41]), unde autorii studiază conservarea g-lanţurilor Loewner. Alte rezultate recente privind lanţuri Loewner extinse şi operatorul de extensie Muir $\Phi_{n,Q}$ pot fi găsite în [91].

Principalul nostru obiectiv este studiul anumitor proprietăţi de conservare privind operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$, precum şi subclase ale familiei $S_g^0(\mathbb{B}^n)$, când funcţia g este dată de următoarea relaţie

$$g(\zeta) = \frac{1+A\zeta}{1+B\zeta}, \ \zeta \in U, \ \textit{unde} \ -1 \le B < A \le 1. \tag{0.0.2}$$

Folosind această formă particulară funcţiei g, ne referim la g-reprezentarea parametrică pe $\mathbb{B}^n$, precum şi la clasele de aplicaţii g-stelate, g-aproape stelate de ordin α, $0 \le \alpha < 1$, şi g-spiralate de tipul γ, $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pe bila unitate $\mathbb{B}^n$. Pentru o alegere convenabilă a parametrilor A şi B, aceste clase pot fi reduse la subclase binecunoscute ale familiei $S(\mathbb{B}^n)$. Pentru $g(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $\zeta \in U$, noţiunea de g-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ se *reduce la reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$, noţiunea de g-stelaritate pe $\mathbb{B}^n$ se reduce la stelaritate pe $\mathbb{B}^n$, etc. Vom studia de asemenea două tipuri particulare de stelaritate: stelaritate de tip Janowski şi aproape stelaritate de tip Janowski cu coeficienţi reali pe discul unitate U si pe bila unitate $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Conceptul de g-stelaritate poate fi redus la stelaritate de tip Janowski şi aproape stelaritate de tip Janowski pentru anumite valori date parametrilor A şi B. Ne referim de asemenea la stelaritate de tip Janowski şi aproape stelaritate de tip Janowski cu coeficienţi complecşi.*

Fie g o funcţie dată de relaţia (0.0.2). *În această teză, arătăm că g-reprezentarea parametrică este păstrată prin operatorii $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$. Vom demonstra de asemenea că g-stelaritatea, g-spiralitatea de tipul γ sunt păstrate prin aceşti operatori. Mai mult, g-aproape stelaritatea de ordin α este păstrată prin operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$. Pe baza rezultatului de păstrare a g-stelarităţii, obţinem că stelaritatea de tip Janowski şi aproape stelaritatea de tip Janowski sunt păstrate prin cei doi operatori de extensie.*

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|1-a| < b \leq a$. Fie $\mathcal{J}^{(a,b)}$ clasa funcţiilor stelate de tip Janowski pe U şi fie $\mathcal{AJ}^{(a,b)}$ clasa funcţiilor aproape stelate de tip Janowski pe U. Fie S^* clasa funcţiilor normate şi stelate pe U şi fie S_g^* clasa funcţiilor g-stelate pe U. Vom determina raza Janowski $\mathcal{J}^{(a,b)}$ a claselor S şi S^*, respectiv a claselor $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$ şi $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*)$. Vom obţine teoreme de deformare pentru clasele $\Phi_{n,Q}(S_g^0)$, $\Phi_{n,Q}(S_g^*)$, $\Phi_{n,Q}(\mathcal{J}^{(a,b)})$ şi $\Phi_{n,Q}(\mathcal{AJ}^{(a,b)})$. Vom da estimări pentru $\det D\Phi_{n,Q}(f)(z)$, *unde f aparţine fie clasei S_g^*, fie clasei $\mathcal{J}^{(a,b)}$ sau clasei $\mathcal{AJ}^{(a,b)}$. Vom obţine teoreme de distorsiune de-a lungul unui vector unitate în $\mathbb{C}^n$ pentru anumite subclase ale familiei $\Phi_{n,Q}(S_g^*)$. Vom menţiona câteva cazuri particulare ale acestor rezultate de deformare şi distorsiune.*

În ultima parte a tezei, demonstrăm că operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$ păstrează stelaritatea şi aproape stelaritatea de tip Janowski cu coeficienţi complecşi. Vom deduce expresia unui câmp vectorial Herglotz asociat unui anumit lanţ Loewner $F(z,t) : \mathbb{B}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^3$, al cărui prim element este $\Psi_2(f)$, unde $f \in S^0(\mathbb{B}^2)$. Acest lanţ Loewner este menţionat în demonstaţia Teoremei 2.1 *din [53].*

Teza este structurată pe 4 capitole.

Capitolul 1 prezintă rezultate generale privind funcţii olomorfe în $\mathbb{C}$, respectiv funcţii şi aplicaţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$. Vom considera proprietăţi elementare ale funcţiilor olomorfe de o variabilă complexă. Totodată, ne referim şi la proprietăţile elementare ale funcţiilor şi aplicaţiilor olomorfe în $\mathbb{C}^n$. Includem rezultate generale privind funcţii univalente în $\mathbb{C}$ şi aplicaţii biolomorfe în $\mathbb{C}^n$. Prezentăm clasa Carathédory $\mathcal{P}$ şi generalizarea acestei clase la $\mathbb{C}^n$, notată cu $\mathcal{M}$.

Ne referim la subclase de funcţii univalente şi normate pe discul unitate U. Prezentăm clasa S a funcţiilor univalente normate pe U, clasa S^* a funcţiilor stelate în raport cu originea şi normate, clasa K a funcţiilor convexe normate, clasa S_α^* a funcţiilor stelate de ordin α şi normate, clasa $\hat{S}_\gamma$ a funcţiilor spiralate de tipul γ şi normate şi clasa $\mathcal{A}S_\alpha^*$ a funcţiilor aproape stelate de ordin α şi normate. Vom considera caracterizări analitice, teoreme de deformare, acoperire şi distorsiune, precum şi estimări ale coeficienţiilor pentru aceste clase. Continuăm cu generalizarea claselor menţionate anterior în cazul mai multor variabile complexe. Ne referim la proprietăţi similare obţinute pentru aceste subclase de aplicaţii biolomorfe în $\mathbb{C}^n$. Fie $S(\mathbb{B}^n)$ clasa aplicaţiilor normate şi biolomorfe pe bila unitate $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$.

În ultima secţiune a acestui capitol, prezentăm rezultate clasice din teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}$ şi în $\mathbb{C}^n$. Prezentăm ecuaţia diferenţială Loewner în $\mathbb{C}$, precum şi generalizarea ei la mai multe dimensiuni. Vom da caracterizarea analitică a anumitor subclase de funcţii univalente şi normate prin intermediul lanţurilor Loewner. De asemenea, includem şi caracterizarea unor subclase de aplicaţii normate şi biholomorfe folosind lanţuri Loewner.

Rezultatele prezentate în acest capitol sunt utile în demonstrarea rezultatelor principale ale tezei.

Capitolul 2 prezintă noţiunea de reprezentare parametrică pe discul unitate U şi pe bila unitate $\mathbb{B}^n$ din $\mathbb{C}^n$. Vom vedea că orice funcţie din clasa S admite reprezentare parametrică pe U (see [102], [48]). Prezentăm clasa aplicaţiilor care admit reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$, notată cu $S^0(\mathbb{B}^n)$. Această clasă a fost introdusă în [37]. Vom da un rezultat de deformare, estimări ale coeficienţilor (see [37], [73]) şi rezultatul de compactitate al clasei $S^0(\mathbb{B}^n)$ (see [51]). Ne vom referi la o subclasă de aplicaţii olomorfe pe $\mathbb{B}^n$ a familiei $\mathcal{M}$, notată cu $\mathcal{M}_g$, unde $g : U \to \mathbb{C}$ este o funcţie univalentă care satisface anumite condiţii naturale. Clasa $\mathcal{M}_g$ a fost introdusă de Graham, Hamada şi Kohr în [37]. Prezentăm de asemenea clasa $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor care admit g-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ (see [37]). Vom da teoreme de deformare şi estimări ale coeficienţilor pentru această clasă. Prezentăm definiţia unui g-lanţ Loewner pe $\mathbb{B}^n$ dată de Graham, Hamada şi Kohr [37].

În continuare, ne referim la operatorul de extensie Roper-Suffridge, Φ_n, precum şi la două generalizări ale acestui operator: $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$. Prezentăm proprietăţi analitice şi geometrice ale acestor operatori de extensie. Vom include câteva raze de univalenţă ale unor subclase de aplicaţii normate şi biolomorfe generate de aceşti operatori de extensie. Fie g o funcţie dată de relaţia (0.0.2). Demonstrăm că operatorii $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$ păstrează noţiunea de g-reprezentare parametrică. Aceste rezultate originale sunt prezentate în Teoremele 2.3.2, 2.3.3 şi sunt incluse în lucrările [85, 86].

Capitolul 3, prezintă anumite subclase de aplicaţii ale familiei $S(\mathbb{B}^n)$, care au proprietăţi geometrice şi admit g-reprezentare parametrică, unde g este o funcţie ce satisface anumite condiţii naturale. Ne referim la clasele de aplicaţii g-stelate, g-aproape stelate de ordin α, $0 \leq \alpha < 1$, şi g-spiralate de tipul γ, $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pe bila unitate $\mathbb{B}^n$. Prezentăm caracterizarea acestor clase folosind g-lanţuri Loewner. Vom demonstra că g-stelaritatea, g-aproape stelaritatea de ordin α şi g-spiralitatea de tipul γ sunt păstrate prin intermediul operatorului $\Phi_{n,\alpha,\beta}$, unde g este dată de relaţia (0.0.2). Pentru acelaşi g, vom demonstra de asemenea că operatorul $\Phi_{n,Q}$ păstrează g-stelaritatea şi g-spiralitatea de tipul γ. Aceste rezultate originale sunt prezentate în Teoremele 3.1.10, 3.1.13, 3.1.12, respectiv în Teoremele 3.1.15, 3.1.17, şi au fost obţinute în lucrările [85, 86], mai puţin Teorema 3.1.13, care a fost demonstrată după publicarea lucrării [85].

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|1 - a| < b \leq a$. Ne vom referi la două subclase de funcţii care au proprietăţi geometrice interesante şi admit g-reprezentare parametrică pe discul unitate U: clasa Janowski de funcţii stelate, $\mathcal{J}^{(a,b)}$, şi clasa Janowski de funcţii aproape stelate, $\mathcal{AJ}^{(a,b)}$. Clasa $\mathcal{J}^{(a,b)}$ a fost introdusă de Silverman [109] (a se vedea de asemenea [110]), iar clasa $\mathcal{AJ}^{(a,b)}$ a fost definită de Curt [21]. Vom prezenta generalizarea naturală a acestor clase pe bila unitate $\mathbb{B}^n$ din $\mathbb{C}^n$. Clasele Janowski de aplicaţii stelate şi aproape stelate pe $\mathbb{B}^n$ au fost introduse de Curt [21]. Vom demonstra că operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$, $\Phi_{n,Q}$ păstrează stelaritatea şi aproape stelaritatea de tip Janowski. Aceste rezultate originale au fost obţinute în lucrările [85, 86] şi sunt prezentate în Teoremele 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8.

Vom prezenta câteva raze de univalenţă privind operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi stelaritatea de tip Janowski pe discul unitate U. Vom determina raza de stelaritate Janowski $\mathcal{J}^{(a,b)}$ a claselor S şi S^*. Aceste rezultate sunt prezentate în Teoremele 3.3.3 şi 3.3.5. Vom obţine câteva cazuri particulare ale acestor rezultate în Corolarul 3.3.4 şi

Observaţia 3.3.6. Vom determina de asemenea şi raza de stelaritate Janowski a claselor $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$ şi $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*)$ în Teoremele 3.3.8 şi 3.3.9. Vom deduce şi raza de aproape stelaritate de ordin α, unde $\alpha \in (0,1)$, a claselor $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$ şi $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*)$ în Teorema 3.3.9. Aceste rezultate sunt originale şi au fost obţinute în lucrarea [85].

În ultima parte a acestui capitol, ne referim la teoreme de deformare şi distorsiune pentru anumite familii de aplicaţii care admit g-reprezentare parametrică obţinute prin intermediul operatorul de extensie $\Phi_{n,Q}$, unde g este dată de relaţia (0.0.2). Menţionăm o teoremă de deformare pentru clasa $S_g^0(\mathbb{B}^n)$, obţinută de Graham, Hamada şi Kohr [37] (acest rezultat este mai general decât rezultatul prezentat in Teorema 2.3 din [73]). Vom da teoreme de deformare pentru clasele $\Phi_{n,Q}(S_g^0)$, $\Phi_{n,Q}(S_g^*)$, $\Phi_{n,Q}(\mathcal{J}^{(a,b)})$ şi $\Phi_{n,Q}(\mathcal{A}\mathcal{J}^{(a,b)})$. Aceste rezultate originale sunt prezentate în Teorema 3.4.2, Corolariile 3.4.3, 3.4.4, 3.4.5.

Vom prezenta teoreme de distorsiune pentru anumite subclase ale familiei $\Phi_{n,Q}(S_g^*)$, unde g este dată de relaţia (0.0.2). Vom da estimări pentru $\det D\Phi_{n,Q}(f)(z)$, unde funcţia f aparţine fie clasei S_g^*, fie clasei $\mathcal{J}^{(a,b)}$ sau clasei $\mathcal{A}\mathcal{J}^{(a,b)}$. Aceste estimări sunt prezentate în Teorema 3.4.9, Corolariile 3.4.10, 3.4.11, iar anumite cazuri particulare ale acestor rezultate sunt incluse în Corolariile 3.4.12, 3.4.13. Vom da teoreme de distorsiune de-a lungul unui vector unitate în $\mathbb{C}^n$ pentru anumite subclase ale familiei $\Phi_{n,Q}(S_g^*)$ în Teorema 3.4.14, Corolariile 3.4.15, 3.4.16, 3.4.17, 3.4.18. Aceste rezultate sunt originale şi au fost obţinute în [86].

În **Capitolul 4**, considerăm noţiunile de g-reprezentare parametrică, g-lanţ Loewner şi g-stelaritate, unde $g : U \to \mathbb{C}$ este o funcţie univalentă pe U, $g(0) = 1$ şi $\mathrm{Re} g(\zeta) > 0$, $\zeta \in U$ (a se vedea [44]). În lucrarea [44], s-a demonstrat că g-reprezentarea parametrică şi g-stelaritatea sunt păstrate prin operatorii $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$. Considerăm o funcţie particulară g ce depinde de doi parametrii complecşi A şi B şi satisface condiţiile mai sus enumerate. Pentru această funcţie g, g-stelaritatea se poate reduce la stelaritate sau aproape stelaritate de tip Janowski cu coeficienţi complecşi. Acest tip de stelaritate Janowski a fost introdus de Curt [22] şi generalizează noţiunea de stelaritate sau aproape stelaritate de tip Janowski cu coeficienţi reali, definită în [21]. Prezentăm câteva proprietăţi ale stelarităţii sau aproape stelarităţii de tip Janowski cu coeficienţi complecşi. Vom demonstra că operatorii $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$ păstrează acest tip de stelaritate în Teoremele 4.2.2, 4.2.3 şi 4.2.4. Aceste proprietăţi generalizează resultatele obţinute în [85, 86] privind stelaritatea sau aproape stelaritatea de tip Janowski cu coeficienţi reali. Totodată, menţionăm un rezultat util folosit în demonstrarea ultimelor două proprietăţi prezentat în Observaţia 4.2.1.

În ultima parte a acestui capitol, obţinem expresia unui câmp vectorial Herglotz asociat unui anumit lanţ Loewner $F(z,t) : \mathbb{B}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^3$, al cărui prim element este imaginea unei aplicaţii $f \in S^0(\mathbb{B}^2)$ prin operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge, Ψ_2 (considerăm cazul $n = 2$). Ne referim la lanţul Loewner $F(z,t)$ prezentat în demonstraţia Teoremei 2.1 din [53] pentru cazul $n = 2$. Acest rezultat este prezentat în Teorema 4.3.7. Vom prezenta de asemenea proprietăţi analitice şi geometrice ale operatorului de extensie Pfaltzgraff-Suffridge, Ψ_n ($n \geq 1$).

Rezultatele originale din acest capitol sunt obţinute în lucrarea [87], exceptând Teorema 4.3.7.

Rezultatele originale prezentate în această teză de doctorat sunt prezentate mai jos per capitole:

- **Capitolul 2**: Teorema 2.3.2, Teorema 2.3.3.

- **Capitolul 3**: Teorema 3.1.10, Teorema 3.1.12, Teorema 3.1.13, Teorema 3.1.15, Teorema 3.1.17, Teorema 3.2.5, Teorema 3.2.6, Teorema 3.2.7, Teorema 3.2.8, Teorema 3.3.3, Teorema 3.3.5, Corolarul 3.3.4, Observaţia 3.3.6, Teorema 3.3.8, Teorema 3.3.9, Teorema 3.4.2, Corolarul 3.4.3, Corolarul 3.4.4, Corolarul 3.4.5, Teorema 3.4.9, Corolarul 3.4.10, Corolarul 3.4.11, Corolarul 3.4.12, Corolarul 3.4.13, Teorema 3.4.14, Corolarul 3.4.15, Corolarul 3.4.16, Corolarul 3.4.17, Corolarul 3.4.18.

- **Capitolul 4**: Observaţia 4.2.1, Teorema 4.2.2, Teorema 4.2.3, Teorema 4.2.4, Teorema 4.3.7.

Rezultatele originale prezentate în această teză au fost publicate în următoarele lucrări:

- **Manu, A.:** *Extension Operators Preserving Janowski Classes of Univalent Functions*, Taiwanese J. Math., **24**:1 (2020), 97 – 117, Impact Factor/2020: 1.136, Accession Number: WOS:000508232900007, DOI: 10.11650/tjm/190407

- **Manu, A.:** *The Muir extension operator and Janowski univalent functions*, Complex Var. Elliptic Equ., **65**:6 (2020), 897 – 919, Impact Factor/2020: 0.846, Accession Number: WOS:000476259700001, DOI: 10.1080/17476933.2019.1636788

- **Manu, A.:** *Extension operators and Janowski starlikeness with complex coefficients*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., submitted, ISSN: 2065-961x.

Rezultatele originale prezentate în această teză au fost comunicate la următoarele conferinţe:

- 15 – 18 Octombrie, 2021, 16th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications (GFTA 2021), online, Universitatea Lucian Blaga, Sibiu, România; titlul comunicării: *Roper-Suffridge extension operators and Janowski univalent functions.*

- 22 – 24 Octombrie, 2020, Conferinţa Şcolilor Doctorale din Consorţiul Universitaria (CSDCU-MIF2020), Ediţia a III-a, online, Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Iaşi, România; titlul comunicării: *Roper-Suffridge extension operators and Janowski univalent functions.*

- 25 – 27 Iunie, 2018, The 5th Conference of PhD Students in Mathematics (CSM), University of Szeged, Bolyai Institute, Szeged, Hungary; titlul comunicării: *Extension operators preserving Janowski classes of univalent functions.*

- 14 – 16 Iunie, 2018, International Conference on Mathematics and Computer Science (MACOS 2018), Universitatea Transilvania, Braşov, România; titlul comunicării: *Extension operators preserving Janowski classes of univalent functions.*

Mathematics Subject Classification 2010: Primary: 32H02, Secondary: 30C45.

Cuvinte cheie
Funcţie univalentă, aplicaţie biolomorfă, clasa Carathéodory, lanţ Loewner, g-lanţ Loewner, reprezentare parametrică, g-reprezentare parametrică, operator de extensie,

g-stelaritate, g-aproape stelaritate de ordin α, g-spiralitate de tipul γ, stelaritate de tip Janowski, aproape stelaritate de tip Janowski.

Mulţumiri

Doresc să îi mulţumesc primului meu conducător de doctorat Prof. Univ. Dr. Gabriela Kohr pentru dedicarea şi sprijinul pe care mi l-a acordat de-a lungul stagiului de doctorat. Sunt recunoscătoare pentru sfaturile şi sugestiile valoase pe care mi le-a oferit în tot acest timp.

Sunt recunoscătoare de asemenea şi conducătorului actual de doctorat Prof. Univ. Dr. Mirela Kohr pentru sugestiile oferite şi timpul dedicat pentru îmbunătăţirea conţinutului acestei teze.

Nu în ultimul rând, vreau să mulţumesc familiei şi prietenului meu pentru suportul acordat.

Capitolul 1

Univalenţă la una şi mai multe variabile complexe

În acest capitol, vom prezenta rezultate generale privind funcţii olomorfe în $\mathbb{C}$, respectiv funcţii olomorfe şi aplicaţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$. Mai întâi, ne vom referi la rezultate importante în teoria funcţiilor olomorfe în $\mathbb{C}$. În continuare, vom prezenta generalizări ale acestor rezultate în cazul funcţiilor olomorfe în $\mathbb{C}^n$. Vom observa că în cazul aplicaţiilor olomorfe, anumite rezultate nu rămân adevărate.

Vom prezenta rezultate de bază privind funcţii univalente în $\mathbb{C}$ şi aplicaţii biolomorfe în $\mathbb{C}^n$. Un rezultat fundamental în teoria funcţiilor univalente este teorema lui Riemann, care asigură conform echivalenţa fiecărui domeniu simplu conex diferit de planul complex $\mathbb{C}$ cu discul unitate U. Poincaré H. [100] a arătat că bila unitate Euclideană $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$ nu este biolomorfic echivalentă cu polidiscul unitate $\mathbb{P}^n$ în $\mathbb{C}^n$, deşi $\mathbb{B}^n$ şi $\mathbb{P}^n$ sunt omeomorfe. Prin urmare, teorema lui Riemann nu are loc în $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$.

Vom considera funcţii olomorfe în $\mathbb{C}$ şi aplicaţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$ cu parte reală pozitivă. Vom prezenta clasa Carathédory $\mathcal{P}$ în $\mathbb{C}$ şi generalizarea ei la cazul mai multor variabile complexe, notată cu $\mathcal{M}$. Un rezultat important în teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$ este demonstrarea compactităţii clasei $\mathcal{M}$, obţinut de Graham, Hamada şi Kohr [37].

Vom studia anumite subclase de funcţii univalente pe discul unitate U. Ne vom referi la clasa funcţiilor normate şi univalente pe U, notată cu S. Vom prezenta următoarele subclase de funcţii univalente pe U: clasa funcţiilor normate şi stelate în raport cu originea pe U, notată cu S^*, clasa funcţiilor normate şi convexe pe U, notată cu K, clasa funcţiilor normate şi stelate de ordin α pe U, notată cu S^*_α, clasa funcţiilor normate şi spiralate de tipul γ pe U, notată cu $\hat{S}_\gamma$, şi clasa funcţiilor normate şi aproape stelate de ordin α pe U, notată cu $\mathcal{A}S^*_\alpha$. Vom prezenta caracterizări analitice şi proprietăţi importante ale acestor clase. În continuare, ne vom referi la generalizarea acestor clase în cazul mai multor variabile complexe.

Fie $S(\mathbb{B}^n)$ clasa aplicaţiilor normate şi biolomorfe pe bila unitate Euclideană $\mathbb{B}^n$ $(n \geq 2)$. Această clasă nu este compactă în cazul $n \geq 2$. Vom prezenta rezultate importante în teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}$ şi în $\mathbb{C}^n$. Ne vom referi mai întâi la rezultate generale privind lanţurile Loewner în $\mathbb{C}$, precum şi la ecuaţia diferenţială Loewner pe U. Vom da caracteriză analitice folosind lanţuri Loewner ale unor subclase de funcţii normate şi univalente pe U. Vom continua cu generalizarea lanţurilor Loewner şi a ecuaţiei diferenţiale Loewner în $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Vom menţiona rezultate generale privind lanţurile Loewner în $\mathbb{C}^n$, precum şi caracterizări ale unor subclase ale familiei $S(\mathbb{B}^n)$ folosind lanţuri Loewner.

Principalele surse bibliografice folosite pentru pregătirea acestui capitol sunt [102], [66], [48], [76], [90].

1.1 Rezultate preliminare

Vom prezenta o serie de notaţii care vor fi folosite pe parcursul acestei teze.

Fie $\mathbb{C}$ planul complex. Fie $a \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$. Fie

$$U(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

discul de centru a şi rază r. De asemenea, fie $\overline{U}(a, r)$, respectiv $\partial U(a, r)$, închiderea, respectiv frontiera, discului $U(a, r)$. Pentru $a = 0$, vom nota U_r în loc de $U(0, r)$, respectiv U în loc de $U(0, 1)$.

Fie $n \in \mathbb{N} = 1, 2, 3 \ldots$, şi fie $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) : z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n\}$ spaţiul complex cu produsul scalar Euclidean

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i,$$

şi cu norma Euclideană $\|z\|^2 = \langle z, z\rangle$.

Fie $a \in \mathbb{C}^n$ şi $R > 0$. Fie

$$\mathbb{B}^n(a, R) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - a\| < R\}$$

bila deschisă de rază R şi centru a. Fie $\overline{\mathbb{B}^n}(a, R)$, respectiv $\partial\mathbb{B}^n(a, R)$, închiderea, respectiv frontiera, bilei deschise $\mathbb{B}^n(a, R)$. Pentru $a = 0$, vom nota bila deschisă $\mathbb{B}^n(0, R)$ cu $\mathbb{B}^n_R$, respectiv bila unitate deschisă $\mathbb{B}^n(0, 1)$ cu $\mathbb{B}^n$.

Vom considera multiraza $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}_+ \times \cdots \times \mathbb{R}_+$. Fie

$$\mathbb{P}^n(z^0, r) = U(z^0_1, r_1) \times \cdots \times U(z^0_n, r_n)$$

polidiscul deschis de centru $z^0 = (z^0_1, \ldots, z^0_n) \in \mathbb{C}^n$ şi multirază r. Pentru $r = (1, \ldots, 1)$, vom nota polidiscul unitate $\mathbb{P}^n(0, r)$ cu $\mathbb{P}^n$.

1.2 Teoria funcţiilor olomorfe în $\mathbb{C}$ şi în $\mathbb{C}^n$

Această secţiune este dedicată studiului funcţiilor olomorfe în $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{C}^n$, respectiv aplicaţiilor olomorfe în $\mathbb{C}^n$. Vom prezenta rezultate importante în teoria funcţiilor olomorfe în $\mathbb{C}$, precum şi anumite generalizări ale acestor rezultate în $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$).

Principalele surse bibliografice folosite pentru pregătirea acestei secţiuni sunt [66], [76], [74], [77], şi [106].

1.2.1 Funcţii olomorfe în $\mathbb{C}$

În cele ce urmează vom prezenta proprietăţi de bază ale funcţiilor olomorfe definite pe o submulţime deschisă din $\mathbb{C}$. Fie Ω o submulţime deschisă din $\mathbb{C}$ şi fie $H(\Omega)$ mulţimea funcţiilor olomorfe pe Ω cu valori în $\mathbb{C}$.

Presupunem că $0 \in \Omega$. Atunci spunem că o funcţie olomorfă pe Ω este *normată* dacă sunt satisfăcute condiţiile: $f(0) = f'(0) - 1 = 0$.

Vom prezenta două rezultate binecunoscute în teoria funcţiilor olomorfe: *teorema aplicaţiei deschise*, respectiv *teorema maximului (minimului) modulului* (a se vedea [66], [76]), pe care le vom enunţa în cele ce urmează.

Teorema 1.2.1. **(Teorema aplicaţiei deschise)** *Fie Ω un domeniu în $\mathbb{C}$ şi fie $f \in H(\Omega)$ astfel încât f este o funcţie neconstantă pe Ω. Atunci $f(\Omega)$ este un domeniu în $\mathbb{C}$.*

Acest rezultat are loc şi pentru funcţii olomorfe definite pe domenii în $\mathbb{C}^n$ cu valori în $\mathbb{C}$, precum şi pentru aplicaţii local biolomorfe definite pe domenii din $\mathbb{C}^n$ cu valori în $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. (a se vedea de exemplu [106]).

Teorema 1.2.2. **(Teorema maximului (minimului) modulului)** *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f \in H(\Omega)$. Dacă există $z_0 \in \Omega$ astfel încât*

$$|f(z_0)| = max\{|f(z)| : z \in \Omega\} \ \Big(|f(z_0)| = min\{|f(z)| : z \in \Omega\}\Big),$$

atunci f este constantă pe Ω.

Teorema maximului modulului are numeroase aplicaţii în teoria funcţiilor olomorfe. O aplicaţie este dată de *lema lui Schwarz* (a se vedea [66], [76]).

Corolarul 1.2.3. **(Schwarz's lemma)** *Fie $f \in H(U)$ astfel încât $f(0) = 0$ şi $|f(z)| < 1$, $z \in U$. Atunci $|f(z)| \leq |z|$ pentru $z \in U$ şi $|f'(0)| \leq 1$. Mai mult, dacă există $w \in U\setminus\{0\}$ astfel încât $|f(w)| = |w|$, sau dacă $|f'(0)| = 1$, atunci există $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ şi $f(z) = \lambda z$, $z \in U$.*

Vom reaminti două noţiuni vor fi utile pentru următoarele secţiuni: familii local uniform mărginite, respectiv familii normale pe o mulţime deschisă din $\mathbb{C}$ (a se vedea de exemplu [66], [76]).

Definiţia 1.2.4. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi fie $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$. Spunem că familia $\mathcal{F}$ este *local uniform mărginită* dacă pentru orice compact $K \subset \Omega$, există o constantă $M_K > 0$ astfel încât pentru orice $f \in \mathcal{F}$ avem $\|f|_K\| \leq M_K$. Se consideră norma $\|f|_K\|$ dată de $\|f|_K\| = \max\{|f(z)| : z \in K\}$.

Definiţia 1.2.5. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi fie $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$. Spunem că familia $\mathcal{F}$ este *normală* dacă orice şir $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ conţine un subşir convergent uniform pe compacte în Ω.

Următorul rezultat obţinut de Montel arată că noţiunile de familie local uniform mărginită şi familie normală sunt echivalente (a se vedea de exemplu [66], [76]). Acest rezultat rămâne adevărat şi în cazul $n \geq 2$ (a se vedea [93]).

Teorema 1.2.6. *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi fie $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$. Atunci familia $\mathcal{F}$ este normală dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este local uniform mărginită.*

Vom prezenta un rezultat care se obţine din teorema lui Montel şi care rămâne adevărat în cazul $n \geq 2$ (a se vedea [66], [76], respectiv [93]).

Corolarul 1.2.7. *Dacă $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă şi $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$, atunci $\mathcal{F}$ este compactă dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este local uniform mărginită şi închisă.*

1.2.2 Funcţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$. Aplicaţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$

În cele ce urmează, vom studia funcţii olomorfe şi aplicaţii olomorfe pe o submulţime deschisă din $\mathbb{C}^n$. Ne vom referi la generalizarea în $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) a rezultatelor prezentate pentru funcţii olomorfe în $\mathbb{C}$. Presupunem că $m > 1$.

Pentru început, vom reaminti noţiunea de funcţie olomorfă în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [48]).

Definiţia 1.2.8. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ o submulţime deschisă şi fie $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dacă f este continuă pe Ω şi olomorfă în fiecare variabilă separat, atunci spunem că funcţia f este *olomorfă* pe Ω.

Pe baza rezultatului lui Hartogs, condiţia de continuitate din Definiţia 1.2.8 nu este necesară. Prin urmare, deducem că orice funcţie olomorfă în fiecare variabilă separat este olomorfă pe întreaga mulţime Ω (a se vedea [10], [77]). Fie $H(\Omega, \mathbb{C})$ mulţimea funcţiilor olomorfe de la mulţimea deschisă $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ la $\mathbb{C}$.

În continuare, vom prezenta proprietăţi de bază ale funcţiilor olomorfe. Mai întâi, ne vom referi în rezultatul următor la *teorema aplicaţiei deschise* (a se vedea [93]).

Teorema 1.2.9. *Dacă $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ este un domeniu şi $f : \Omega \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă neconstantă, atunci $f(\Omega)$ este un domeniu în $\mathbb{C}$.*

În cazul $n \geq 2$, familiile local uniform mărginite, respectiv familiile normale se definesc în mod similar ca şi la o variabilă complexă. Prin urmare, vom omite prezentarea lor pentru cazul $n \geq 2$ (a se vedea de exemplu [93], [106]).

Următorul rezultat prezintă generalizarea teoremei lui Montel în $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ (a se vedea de exemplu [93]).

Teorema 1.2.10. *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ o mulţime deschisă şi fie $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega, \mathbb{C})$. Atunci $\mathcal{F}$ este o familie normală dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este o familie local uniform mărginită.*

Vom da următoarea caracterizare a submulţimilor compacte de funcţii olomorfe pe o mulţime deschisă din $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [93], [106]).

Corolarul 1.2.11. *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ o mulţime deschisă şi fie $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega, \mathbb{C})$. Atunci familia $\mathcal{F}$ este compactă dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este local uniform mărginită şi închisă.*

În cele ce urmează, vom prezenta conceptul de aplicaţie olomorfă de la o mulţime deschisă în C^n la $\mathbb{C}^m$ (a se vedea de exemplu [48]).

Definiţia 1.2.12. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ o mulţime deschisă şi fie $f : \Omega \to \mathbb{C}^m$. Spunem că aplicaţia $f = (f_1, \ldots, f_m)$ este *olomorfă* dacă fiecare componentă, f_j, $j = \overline{1,m}$, este o funcţie olomorfă de la Ω la $\mathbb{C}$.

Fie $H(\Omega, \mathbb{C}^m)$ mulţimea aplicaţiilor olomorfe de la $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ la $\mathbb{C}^m$. Pentru $n = m$, vom nota $H(\Omega)$ în loc de $H(\Omega, \mathbb{C}^n)$.

Fie Ω un domeniu în $\mathbb{C}^n$ şi fie $f \in H(\Omega, \mathbb{C}^m)$. Atunci derivata Fréchet $Df(z)$ în punctul $z \in \Omega$ este o aplicaţie liniară complexă de la $\mathbb{C}^n$ la $\mathbb{C}^m$ şi este asociată matricii complexe

$$Df(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{bmatrix}.$$

Pentru $n = m$, vom nota determinantul matricii $Df(z)$, $z \in \Omega$, cu $J_f(z)$. Spunem că o aplicaţie f este *normată* pe Ω dacă sunt satisfăcute proprietăţile: $f(0) = 0$ şi $Df(0) = I_n$, unde $0 \in \Omega$ şi I_n este matricea unitate de ordin n.

Ne vom referi în cele ce urmează la anumite proprietăţi satisfăcute de aplicaţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$. Vom vedea că anumite rezultate obţinute pentru funcţii olomorfe în $\mathbb{C}$ nu au loc pentru aplicaţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$. Următoarea observaţie va ilustra acest aspect.

Observaţia 1.2.13. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un domeniu. Generalizarea Teoremei 1.2.9 la aplicaţii din clasa $H(\Omega, \mathbb{C}^m)$, unde $m > 1$, nu are loc (a se vedea de exemplu [106]). Totuşi, această teorema are loc pentru aplicaţii local biolomorfe de la Ω la $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [48]).

Teorema maximului (minimului) modulului poate fi extinsă la aplicaţii olomorfe în spaţiul complex $\mathbb{C}^n$, considerat în raport cu o normă arbitrară $\|\cdot\|$ (a se vedea [48], [93]).

Teorema 1.2.14. *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un domeniu şi fie $f \in H(\Omega, \mathbb{C}^m)$. Dacă există un punct $z_0 \in \Omega$ astfel încât*

$$\|f(z_0)\| = max\{\|f(z)\| : z \in \Omega\} \ \Big(\|f(z_0)\| = min\{\|f(z)\| : z \in \Omega\}\Big),$$

atunci $\|f(z)\|$ este constantă pe Ω.

Observaţia 1.2.15. Presupunem că condiţiile din Teorema 1.2.14 au loc. Dacă norma $\|\cdot\|$ din spaţiul $\mathbb{C}^m$ este norma Euclideană atunci aplicaţia f este constantă pe Ω.

Vom prezenta o generalizare a lemei lui Schwarz pentru aplicaţii olomorfe pe $\mathbb{B}^n$. Vom considera în rezultatul următor că $\|\cdot\|$ este o normă arbitrară pe $\mathbb{C}^n$ (see e.g. [48], [93]).

Corolarul 1.2.16. *Fie $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^m$ astfel încât $f \in H(\mathbb{B}^n, \mathbb{C}^m)$, $f(0) = 0$ şi $\|f(z)\| < 1$, $z \in \mathbb{B}^n$. Atunci $\|f(z)\| \leq \|z\|$, $z \in \mathbb{B}^n$, şi $\|Df(0)\| \leq 1$. Mai mult, dacă există $z_0 \in \mathbb{B}^n \backslash \{0\}$ astfel încât $\|f(z_0)\| = \|z_0\|$, atunci $\|f(\lambda z_0)\| = \|\lambda z_0\|$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1/\|z_0\|$.*

1.3 Univalenţă în $\mathbb{C}$ şi în $\mathbb{C}^n$

În această secţiune, vom prezenta rezultate importante în teoria funcţiilor univalente în $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{C}^n$. Mai întâi vom introduce noţiunea de funcţie univalentă în $\mathbb{C}$, după care vom da câteva rezultate binecunoscute privind funcţii univalente în $\mathbb{C}$ (a se vedea de exemplu [89], [90], [102]). În cele ce urmează, vom prezenta noţiunile de aplicaţie univalentă în $\mathbb{C}^n$ şi aplicaţie biolomorfă în $\mathbb{C}^n$, precum şi legătura dintre acestea. Vom menţiona rezultate importante privind aplicaţiile biolomorfe în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [48], [77], [93]).

1.3.1 Funcţii univalente în $\mathbb{C}$

În această parte vom studia funcţii univalente pe U şi vom include rezultate importante privind aceste funcţii.

Vom preciza mai întâi definiţia unei funcţii univalente în $\mathbb{C}$ (a se vedea de exemplu [90], [102]).

Definiţia 1.3.1. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu. Spunem că funcţia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ este *univalentă* pe Ω dacă f este injectivă şi olomorfă pe Ω.

Vom prezenta câteva exemple sugestive de funcţii univalente în $\mathbb{C}$ (a se vedea de exemplu [90], [102]).

Exemplul 1.3.2. (i) Un binecunoscut exemplu de funcţie univalentă care joacă un rol important în multe probleme extremale este definită astfel: $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, $z \in U$ (*funcţia Koebe*), care extinde discul unitate U la mulţimea $\mathbb{C}\setminus\{\zeta \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\zeta \leq -1/4, \mathrm{Im}\zeta = 0\}$.

(ii) Fie $\theta \in \mathbb{R}$. Atunci funcţia definită prin (numită şi rotaţie a funcţiei Koebe)

$$k_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2},\ z \in U,$$

este univalentă pe U.

Următorul rezultat furnizează o condiţie necesară de univalenţă. Totuşi, acest rezultat nu asigură o condiţie suficientă de univalenţă (a se vedea [48]).

Teorema 1.3.3. *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă pe Ω. Atunci $f'(z) \neq 0$, $z \in \Omega$.*

Vom prezenta în continuare o condiţie suficientă de univalenţă pentru funcţii olomorfe pe domenii convexe din $\mathbb{C}$. Acest rezultat a fost obţinut de Alexander [1], Noshiro [95], Warschawski [117] şi Wolff [118].

Teorema 1.3.4. *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu convex şi fie $f \in H(\Omega)$. Dacă $\mathrm{Re}f'(z) > 0$, $z \in \Omega$, atunci f este univalentă pe Ω.*

În cele ce urmează vom defini noţiunea de conform echivalenţă a domeniile din $\mathbb{C}$ (a se vedea de exemplu [25], [66], [76], [102]).

Definiţia 1.3.5. Fie Ω_1 şi Ω_2 domenii în $\mathbb{C}$. Spunem că domeniile Ω_1 şi Ω_2 sunt *conform echivalente* dacă există o funcţie $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ care satisface condiţiile: f este univalentă pe Ω_1 şi $f(\Omega_1) = \Omega_2$. În acest caz, funcţia f se numeşte *aplicaţie conformă*. Mai mult, dacă $\Omega_1 = \Omega_2$, atunci f este un *automorfism conform* al lui Ω_1 (a se vedea de exemplu [66]).

Vom prezenta un rezultat fundamental în teoria funcţiilor univalente în $\mathbb{C}$: *teorema lui Riemann* (a se vedea de exemplu [48], [66]). Teorema lui Riemann nu este adevărată în $\mathbb{C}^n$, pentru $n \geq 2$ (a se vedea [93], [106]).

Teorema 1.3.6. *Fie $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex. Atunci Ω şi discul unitate U sunt conform echivalente. Mai mult, dacă $z_0 \in \Omega$ este un punct dat, atunci există o unică aplicaţie conformă $f : \Omega \to U$ astfel încât $f(z_0) = 0$ şi $f'(z_0) > 0$.*

Următorul rezultat este o consecinţă a teoremei lui Riemann (a se vedea de exemplu [66], [76]).

Corolarul 1.3.7. *Oricare două domenii simplu conexe din $\mathbb{C}$, care sunt diferite de întreg planul complex $\mathbb{C}$, sunt conform echivalente.*

1.3.2 Aplicaţii biolomorfe în $\mathbb{C}^n$

În această parte, vom studia aplicaţii biolomorfe în $\mathbb{C}^n$, precum şi proprietăţi ale acestora.

Mai întâi, vom introduce noţiunile de univalenţă şi biolomorfie în C^n, pentru $n \geq 2$ (a se vedea [48], [77], [93]).

Definiţia 1.3.8. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un domeniu. Fie $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$.

(i) Dacă aplicaţia f este olomorfă şi injectivă pe Ω, atunci spunem că f este *univalentă* pe Ω.

(ii) Dacă $f \in H(\Omega)$ şi aplicaţia inversă f^{-1} există şi este olomorfă pe domeniul $\Omega' = f(\Omega)$, atunci spunem că f este *biolomorfă*. În acest caz, domeniile Ω şi Ω' sunt *biolomorfic echivalente*. Mai mult, dacă $\Omega = \Omega'$ atunci aplicaţia f este un *automorfism* al lui Ω.

În cazul $n \geq 2$, noţiunile de biolomorfie şi univalenţă sunt echivalente (a se vedea de exemplu [93], [106]). În cazul spaţiilor Banach complexe infinit dimensionale, această echivalenţă nu mai are loc (a se vedea [112]).

Teorema 1.3.9. *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un domeniu şi fie $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$. Atunci f este biolomorfă de la Ω la $f(\Omega)$ dacă şi numai dacă f este univalentă pe Ω.*

Următorul rezultat obţinut de Poincaré [100] ilustrează faptul că bila unitate Euclideană $\mathbb{B}^n$ nu este biolomorfic echivalentă cu polidiscul unitate $\mathbb{P}^n$ în $\mathbb{C}^n$ (deşi $\mathbb{B}^n$ şi $\mathbb{P}^n$ sunt omeomorfe), ceea ce conduce la faptul că teorema lui Riemann nu este adevărată în $\mathbb{C}^n$ pentru $n \geq 2$ (a se vedea [93], [106]).

Teorema 1.3.10. *Fie $n \geq 2$. Atunci $\mathbb{B}^n$ nu este biolomorfic echivalentă cu $\mathbb{P}^n$.*

În continuare, vom descrie noţiunea de local univalenţă pe un domeniu din $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [48]).

Definiţia 1.3.11. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un domeniu. Fie $f \in H(\Omega)$. Spunem că aplicaţia f este *local biolomorfă* pe Ω dacă pentru fiecare $z \in \Omega$ există o vecinătate deschisă şi conexă $V \subset \Omega$ a lui z, astfel încât $f|_V : V \to f(V)$ este o aplicaţie biolomorfă.

Observaţia 1.3.12. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un domeniu şi fie $f \in H(\Omega)$. Atunci $J_f(z) \neq 0$, $z \in \Omega$, dacă şi numai dacă f este local biolomorfă pe Ω (a se vedea de exemplu [48], [106]).

1.4 Clasa Carathéodory în $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{C}^n$.

În această secţiune, ne vom referi la clasa Carathéodory în $\mathbb{C}$ şi la generalizarea ei în $\mathbb{C}^n$. Vom prezenta proprietăţi importante ale acestor clase. Principalele surse bibliografice folosite pentru pregătirea acestei secţiuni sunt [90], [102] pentru cazul $n = 1$, respectiv [48], [37], [96] pentru cazul $n \geq 2$.

1.4.1 Funcţii olomorfe cu parte reală pozitivă

În cele ce urmează, vom prezenta noţiunea de subordonare în $\mathbb{C}$ (a se vedea de exemplu [90]). Mai întâi vom descrie clasa funcţiilor Schwarz pe U, notată cu $\mathcal{V}$. Spunem că $\varphi \in \mathcal{V}$ dacă φ este o funcţie olomorfă pe U, $\varphi(0) = 0$ şi $|\varphi(z)| < 1$, $z \in U$.

Definiţia 1.4.1. Fie $f, g \in H(U)$. Spunem că f este *subordonată* lui g (şi notăm $f \prec g$) dacă există o funcţie Schwarz φ astfel încât $f(z) = g(\varphi(z))$, $z \in U$.

Vom da o caracterizare a subordonării în următoarea teoremă (a se vedea de exemplu [90], [102]):

Teorema 1.4.2. *Presupunem că $f, g : U \to \mathbb{C}$ sunt funcţii olomorfe pe U. Mai mult, fie g o funcţie univalentă pe U. Atunci condiţia de subordonare $f \prec g$ este echivalentă cu: $f(U) \subseteq g(U)$ and $f(0) = g(0)$.*

Presupunem că condiţiile din teorema precedentă au loc şi $f(U) \subseteq g(U)$, $f(0) - g(0) = 0$. Atunci $f(U_R) \subseteq g(U_R)$ pentru orice $R \in (0, 1)$. Acest rezultat poartă numele de *principiul de subordonare*.

Vom considera următoarea clasa de funcţii olomorfe pe U (a se vedea de exemplu [48], [90], [102]):

$$\mathcal{P} = \{p \in H(U) : p(0) = 1, \mathrm{Re}p(z) > 0, z \in U\}.$$

Clasa $\mathcal{P}$ poartă numele de *clasa Carathéodory* şi are o contribuţie majoră în caracterizarea unor subclase de funcţii univalente pe U şi în teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}$.

În continuare, vom prezenta o teoremă de deformare şi de distorsiune pentru clasa Carathéodory $\mathcal{P}$ (a se vedea [90]).

Teorema 1.4.3. *Fie $p \in \mathcal{P}$. Atunci următoarele estimări au loc*

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq \mathrm{Re}p(z) \leq |p(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \ z \in U,$$
$$|p'(z)| \leq \frac{2\mathrm{Re}p(z)}{1 - |z|^2} \leq \frac{2}{(1 - |z|)^2}, \ z \in U.$$

Aceste estimări sunt exacte.

În teorema de mai sus, egalitatea are loc pentru funcţia $p(z) = \frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}$, $z \in U$, unde $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.

Orice funcţie $p \in \mathcal{P}$ are următoarea dezvoltare în serie de puteri: $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$, $z \in U$. În următorul rezultat vom da estimări ale coeficienţilor p_k, $k \in \mathbb{N}$ (a se vedea de exemplu [90]):

Teorema 1.4.4. *Presupunem că $p \in \mathcal{P}$. Fie p_k, $k \in \mathbb{N}$ coeficienţii dezvoltării în serie de puteri ai lui p. Atunci $|p_k| \leq 2$, $k \geq 1$. Aceste estimări sunt exacte şi egalitatea are loc pentru $p(z) = \frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}$, $z \in U$, unde $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.*

1.4.2 Aplicaţii olomorfe din clasa $\mathcal{M}$

Noţiunea de subordonare poate fi extinsă la aplicaţii olomorfe pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [48]). Spunem că o aplicaţie φ definită pe $\mathbb{B}^n$ este o *aplicaţie Schwarz* dacă $\varphi \in H(\mathbb{B}^n)$ şi $\|\varphi(z)\| \leq \|z\|$, $z \in \mathbb{B}^n$.

Definiţia 1.4.5. Presupunem că $f, g \in H(\mathbb{B}^n)$. Spunem că f este *subordonată* lui g (şi notăm $f \prec g$), dacă există o aplicaţie Schwarz φ astfel încât $f(z) = g(\varphi(z))$, $z \in \mathbb{B}^n$.

Condiţia de subordonare din definiţia precedentă poate fi caracterizată după cum urmează (a se vedea [48]):

Teorema 1.4.6. *Fie $f, g \in H(\mathbb{B}^n)$. Dacă aplicaţia g este biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$ atunci $f \prec g$ dacă şi numai dacă $f(\mathbb{B}^n) \subseteq g(\mathbb{B}^n)$ şi $f(0) = g(0)$.*

Următoarea clasă reprezintă clasa Carathéodory în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [96], [114]; a se vedea de asemenea [48], [74])

$$\mathcal{M} = \{h \in H(\mathbb{B}^n) : h(0) = 0, Dh(0) = I_n, \mathrm{Re}\langle h(z), z\rangle > 0, z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}\}. \tag{1.4.1}$$

Această clasă are un rol important în teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$, precum şi în caracterizarea unor subclase de aplicaţii biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [48]).

În cazul $n = 1$, aplicaţia h aparţine clasei $\mathcal{M}$ dacă şi numai dacă $p \in \mathcal{P}$, unde $h(z) = zp(z)$, $z \in U$. Această observaţie arată că clasa $\mathcal{M}$ extinde clasa $\mathcal{P}$ în $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$.

Un exemplu de aplicaţie din clasa $\mathcal{M}$ este următorul: $h(z) = (z_1p_1(z_1), \ldots, z_np_n(z_n))$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{B}^n$, unde $p_i \in \mathcal{P}$, $i = 1, \ldots, n$.

Vom prezenta o teoremă de deformare datorată lui Pfaltzgraff [96] (a se vedea de asemenea [48]).

Teorema 1.4.7. *Orice aplicaţie $h \in \mathcal{M}$ satisface următoarele estimări*

$$\|z\|^2 \frac{1 - \|z\|}{1 + \|z\|} \leq \mathrm{Re}\langle h(z), z\rangle \leq \|z\|^2 \frac{1 + \|z\|}{1 - \|z\|}, \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{1.4.2}$$

Aceste estimări sunt exacte.

Graham I., Hamada H. şi Kohr G. [37] au obţinut o limită superioară mai tare decât limita superioară din relaţia (1.4.2).

Teorema 1.4.8. *Dacă $h \in \mathcal{M}$ atunci*

$$\|z\| \frac{1 - \|z\|}{1 + \|z\|} \leq \|h(z)\| \leq \frac{4\|z\|}{(1 - \|z\|)^2}, \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{1.4.3}$$

Compactitatea clasei $\mathcal{M}$ a fost obţinută de Graham, Hamada şi Kohr [37] (a se vedea de asemenea [61]).

Corolarul 1.4.9. *Clasa $\mathcal{M}$ este compactă în $H(\mathbb{B}^n)$.*

1.5 Subclase de funcţii univalente pe discul unitate U

În această secţiune, ne referim la anumite subclase de funcţii univalente şi normate pe U. Vom prezenta mai întâi clasa funcţiilor normate şi univalente pe U, notată cu S, iar apoi vom descrie anumite subclase ale lui S: clasa funcţiilor normate şi stelate în raport cu originea pe U, notată cu S^*, clasa funcţiilor normate şi convexe pe U, notată cu K, clasa funcţiilor normate şi stelate de ordin α pe U, notată cu S^*_α, clasa funcţiilor normate şi spiralate de tipul γ pe U, notată cu $\hat{S}_\gamma$ şi clasa funcţiilor normate şi aproape stelate de ordin α pe U, notată cu $\mathcal{A}S^*_\alpha$. Vom prezenta caracterizări analitice şi geometrice ale acestor clase.

Principalele surse bibliografice folosite pentru pregătirea acestei secţiuni sunt [25], [48], [90] şi [102].

1.5.1 Clasa S

Pe baza teoremei lui Riemann, este suficient să studiem univalenţa pe discul unitate U.

În acest scop, considerăm următoarea clasă

$$S = \{f \in H(U) : f \text{ univalentă}, \ f(0) = f'(0) - 1 = 0\}.$$

Observăm că funcţiile prezentate în Exemplul 1.3.2 sunt univalente şi normate.

Orice funcţie $f \in S$ admite următoarea dezvoltare în serie de puteri:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \ldots, \ z \in U. \tag{1.5.1}$$

O estimare exactă a coeficientului al doilea, a_2, din dezvoltarea în serie de puteri a unei funcţii f din clasa S a fost obţinută de Bieberbach [6].

Teorema 1.5.1. *Dacă $f \in S$ admite dezvoltarea în serie de puteri dată de relaţia* (1.5.1)*, atunci $|a_2| \leq 2$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei Koebe.*

Pe baza faptului că coeficienţii a_k, $k = 2, 3, \ldots$ satisfac relaţia $|a_k| = k$, $k = 2, 3, \ldots$, pentru o rotaţie a funcţiei Koebe, Bieberbach [6] a formulat următoarea conjectură:

Conjectura 1.5.2. (Bieberbach's conjecture) *Dacă $f \in S$ admite dezvoltarea în serie de puteri dată de relaţia* (1.5.1)*, atunci*

$$|a_k| \leq k, \ k = 2, 3, \ldots \tag{1.5.2}$$

Egalitatea are loc în relaţia (1.5.2) *dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei Koebe.*

Această conjectură a fost formulată în 1916 şi a fost demonstrată mulţi ani mai târziu de L. de Branges [24] (1985).

O consecinţă importantă a Teoremei 1.5.1 este *teorema de distorsiune a lui Koebe* dată de relaţia (1.5.4) (a se vedea [6]). Pornind de la această teoremă de distorsiune, au fost obţinute estimările (1.5.3), (1.5.5) (a se vedea de exemplu [48]).

Teorema 1.5.3. *Dacă $f \in S$, atunci:*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \ \forall z \in U, \tag{1.5.3}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \ \forall z \in U, \tag{1.5.4}$$

şi

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}, \ \forall z \in U. \tag{1.5.5}$$

Aceste estimări sunt exacte. Egalitatea în fiecare din relaţiile de mai sus are loc dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei Koebe.

Următorul rezultat furnizează o teoremă de acoperire pentru clasa S şi este, totodată, o aplicaţie a Teoremei 1.5.1 (a se vedea [48], [90]).

Teorema 1.5.4. *Dacă $f \in S$ atunci $f(U) \supseteq U_{1/4}$.*

Următorul rezultat se referă la compactitatea clasei S şi a fost demonstrat utilizând limita superioară a estimării (1.5.3) (a se vedea [90], [48]).

Corolarul 1.5.5. *Clasa S este compactă în $H(U)$.*

1.5.2 Clasa S^*

În continuare, ne vom referi la o subclasă binecunoscută a clasei S: clasa funcţiilor stelate şi normate pe U, notată cu S^*. Diferite rezultate şi proprietăţi ale clasei S^* pot fi găsite în [102], [25], [35], [48], [90].

Definiţia conceptului de stelaritate a fost introdus de Alexander [1].

Definiţia 1.5.6. Presupunem că $f \in H(U)$ astfel încât $f(0) = 0$. Spunem că funcţia f se numeşte *stelată* pe U dacă f este univalentă pe U şi $f(U)$ este un domeniu stelat în raport cu 0 (originea).

Noţiunea de stelaritate poate fi descrisă în mod analitic. În rezultatul următor, ne vom referi la caracterizarea analitică a stelarităţii (a se vedea de exemplu [25], [102], [48]).

Teorema 1.5.7. *Presupunem că $f \in H(U)$ astfel încât $f(0) = 0$. Atunci $f \in S^*$ dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi următoarea relaţie are loc:*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \; z \in U.$$

Observaţia 1.5.8. Teorema de deformare şi distorsiune 1.5.3 are loc şi sunt pentru clasa S^*, iar estimările din Teorema 1.5.3 sunt exacte pentru S^*. Clasa S^* este compactă în $H(U)$. Mai mult, constanta Koebe a mulţimii S^* este 1/4 (a se vedea [83], [94], [48]), iar conjectura lui Bieberbach are loc pentru S^* (a se vedea [83], [94]).

1.5.3 Clasa S^*_α

O subclasă importantă a clasei S este mulţimea funcţiilor normate şi stelate de ordin α pe U, notată cu S^*_α.

Conceptul de stelaritate de ordin α a fost definit de Robertson [107].

Definiţia 1.5.9. Fie $0 \leq \alpha < 1$ şi $f \in H(U)$. Spunem că funcţia f se numeşte *stelată de ordin* α pe U dacă $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ şi

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha, \; z \in U.$$

Orice funcţie din clasa S^*_α este stelată pe U, iar mulţimea S^*_0 revine la clasa S^*.

Următorul rezultat arată o modalitate de a genera o funcţie din clasa S^*_α pornind de la o funcţie stelată pe U, precum şi de a obţine o funcţie stelată pe U pe baza unei funcţii din S^*_α (a se vedea [48]).

Teorema 1.5.10. *Fie $0 \leq \alpha < 1$. Atunci $f \in S^*_\alpha$ dacă şi numai dacă funcţia*

$$g(z) = z\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \; z \in U,$$

aparţine clasei S^*. Alegem ramura funcţiei putere astfel încât $\left.\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right|_{z=0} = 1$.

Următorul rezultat prezintă o teoremă de deformare pentru clasa S^*_α (a se vedea [48], [35], [90]).

Teorema 1.5.11. *Fie $f \in S^*_\alpha$ şi $0 \leq \alpha < 1$. Atunci*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^{2(1-\alpha)}} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^{2(1-\alpha)}}.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

1.5.4 Clasa $\mathcal{A}S_\alpha^*$

Conceptul de aproape stelaritate de ordin α a fost introdus pe spaţii Banach de Xu şi Liu (a se vedea [119]).

Definiţia 1.5.12. Presupunem că $0 \leq \alpha < 1$. Fie $f \in H(U)$ astfel încât f este normată. Spunem că funcţia f este *aproape stelată de ordin* α pe U dacă

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{zf'(z)}\right] > \alpha, \ z \in U. \tag{1.5.6}$$

Fie $\mathcal{A}S_\alpha^*$ clasa funcţiilor normate şi aproape stelate de ordin α pe U. Observăm că $\mathcal{A}S_\alpha^* \subseteq S^*$.

1.5.5 Clasa K

În definiţia următoare, vom prezenta noţiunea de funcţie convexă pe U (a se vedea de exemplu [48]).

Definiţia 1.5.13. Fie $f \in H(U)$. Spunem că funcţia f este *convexă* dacă f este univalentă pe U şi $f(U)$ este un domeniu convex.

Fie K clasa funcţiilor normate şi convexe pe U. Mai mult, observăm că $K \subset S^* \subset S$.

Fie $f \in K$. Atunci

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \ldots, \ z \in U. \tag{1.5.7}$$

În următoarea teoremă, vom prezenta caracterizarea analitică a convexităţii pe U (a se vedea [25], [48]):

Teorema 1.5.14. *Presupunem că $f \in H(U)$. Atunci $f \in K$ dacă şi numai dacă următoarea condiţie are loc:*

$$\mathrm{Re}\Big[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\Big] > 0, \ z \in U,$$

şi $f'(0) \neq 0$.

În continuare, vom da o teoremă de deformare şi distorsiune pentru clasa K (a se vedea de exemplu [48]).

Teorema 1.5.15. *Fie $f \in K$. Atunci următoarele relaţii au loc:*

$$\frac{|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|}, \ z \in U,$$
$$\frac{1}{(1+|z|)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}, \ z \in U.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte şi egalitatea are loc într-un punct $z \neq 0$ pentru $f(z) = \frac{z}{1-\lambda z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.

Pe baza teoremei de deformare şi din faptul că mulţimea K este închisă, deducem că clasa K este compactă (a se vedea de exemplu [90]).

Următorul rezultat furnizează estimări exacte pentru coeficienţii funcţiilor convexe şi normate (a se vedea [83]).

Teorema 1.5.16. *Fie $f \in K$ astfel încât relaţia* (1.5.7) *reprezintă dezvoltarea sa în serie de puteri. Atunci $|a_k| \leq 1$, $k = 2, 3, \dots$. Aceste estimări sunt exacte şi egalitatea are loc dacă şi numai dacă $f(z) = \frac{z}{1-\lambda z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.*

Următorul rezultat prezintă teorema de dualitate a lui Alexander [1], care arată legătura dintre funcţii convexe şi stelate pe U.

Teorema 1.5.17. *Fie $f \in H(U)$ astfel încât $f(0) = 0$. Atunci $f \in K$ dacă şi numai dacă $g(z) = zf'(z) \in S^*$.*

Teorema de dualitate a lui Alexander nu are loc în cazul $n \geq 2$ (a se vedea [112]; a se vedea de asemenea [48]).

Vom ilustra în rezultatul următor legătura dintre convexitate şi stelaritate de ordin 1/2. Acest rezultat a fost obţinut de Marx şi Strohhäcker (a se vedea de exemplu [48], [90]). În plus, acest rezultat are loc şi în $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ (a se vedea [18], [70]).

Teorema 1.5.18. *Dacă $f \in K$, atunci $f \in S^*_{1/2}$. Acest rezultat este exact.*

1.5.6 Clasa $\hat{S}_\gamma$

Conceptul de funcţie spiralată a fost introdus de Špaček [111].

Fie $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Spunem că curba definită prin

$$z = z_0 e^{-e^{-i\gamma}t}, \ t \in \mathbb{R},$$

este o *$\gamma-$spirală logaritmică* (sau *$\gamma-$spirală*).

În continuare, vom defini domeniile spiralate (a se vedea [111]; a se vedea de asemenea [48]).

Definiţia 1.5.19. Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domeniu astfel încât $0 \in \Omega$. Spunem că domeniul Ω este *spiralat de tipul* γ, $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, dacă pentru fiecare $z \in \Omega$, $z \neq 0$, arcul de γ-spirală ce uneşte punctul z cu originea este inclus în Ω.

Vom defini noţiunea de funcţie spiralată de tipul γ pe U (a se vedea [111]).

Definiţia 1.5.20. Fie $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Presupunem că $f \in H(U)$ şi $f(0) = 0$.

1. O funcţie f se numeşte *spiralată de tipul* γ pe U dacă f este univalentă pe U şi $f(U)$ este un domeniu spiralat de tipul γ.

2. O funcţie f se numeşte *spiralată* dacă există $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât f este spiralată de tipul γ.

Fie $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Fie $\hat{S}_\gamma$ clasa funcţiilor normate şi spiralate de tipul γ pe U. În acest caz, $\hat{S}_\gamma \subset S^*$ şi $\hat{S}_0 = S^*$.

Următoarea teoremă obţinută de Špaček [111] prezintă o condiţie necesară şi suficientă pentru spiralitatea de tipul γ pe U (a se vedea de asemenea [48]).

Teorema 1.5.21. *Fie $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Presupunem că $f \in H(U)$ astfel încât $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. Atunci funcţia f este spiralată de tipul γ dacă şi numai dacă*

$$\mathrm{Re}\Big[e^{i\gamma}\ \frac{zf'(z)}{f(z)}\Big] > 0, \ z \in U.$$

Următoarea caracterizare a spiralităţii poate fi folosită pentru a stabili o legătură între clasele S^* şi $\hat{S}_\gamma$ (a se vedea de exemplu [48], [90]).

Teorema 1.5.22. *Fie* $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *şi* $\theta = e^{-i\gamma}\cos\gamma$. *Atunci* $f \in \hat{S}_\gamma$ *dacă şi numai dacă există o funcţie* $g \in S^*$ *cu proprietatea că*

$$f(z) = z\left[\frac{g(z)}{z}\right]^\theta, \ z \in U.$$

Alegem ramura funcţiei putere astfel încât $\left[\frac{g(z)}{z}\right]^\theta\Big|_{z=0} = 1$.

1.5.7 Raze de univalenţă asociate unor subclase de funcţii univalente pe U

Vom considera raze de univalenţă asociate clasei S şi unor subclase ale acesteia. Mai multe detalii privind acest subiect pot fi găsite în [35], [48] şi [90].

Definiţia 1.5.23. Fie $\mathcal{F}$ o familie nevidă de funcţii din clasa S. Fie $\mathcal{P}$ o proprietate pe care o studiem pentru familia $\mathcal{F}$. Vom nota cu $r(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ *raza proprietăţii* $\mathcal{P}$ asociată familiei $\mathcal{F}$, care reprezintă cea mai mare rază $r > 0$ astfel încât fiecare funcţie din $\mathcal{F}$ are proprietatea $\mathcal{P}$ pe discul de rază r şi centru 0.

Fie $r(S^*, S)$ raza de stelaritate a clasei S şi $r(K, S)$ raza de convexitate a clasei S.
Raza $r(S^*, S)$ a fost determinată de Nenvalinna şi Campbell, iar raza $r(S^*, S)$ a fost obţinută de Grunsky (a se vedea de exemplu [35]).

Teorema 1.5.24. *1.* $r(S^*, S) = \tanh\frac{\pi}{4} = \frac{e^{\pi/2}-1}{e^{\pi/2}+1}$.

2. $r(K, S) = r(K, S^*) = 2 - \sqrt{3}$.

1.6 Subclase de aplicaţii biolomorfe în $\mathbb{C}^n$

În această secţiune, ne vom referi la anumite familii de aplicaţii biolomorfe pe bila unitate Euclideană $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$ care au proprietăţi geometrice. Vom prezenta clasa aplicaţiilor stelate, clasa aplicaţiilor stelate de ordin α, clasa aplicaţiilor aproape stelate de ordin α, clasa aplicaţiilor convexe şi clasa aplicaţiilor spiralate de tipul γ pe $\mathbb{B}^n$. Mai mult, ne vom referi la proprietăţi analitice şi geometrice ale acestor clase.

Principalele surse bibliografice folosite pentru pregătirea acestei secţiuni sunt [48], [74], [112] şi [12].

În cele ce urmează, vom considera clasa $S(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor normate şi biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Mai mult, fie $\mathcal{L}S_n(\mathbb{B}^n)$ clasa aplicaţiilor normate şi local biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$. În cazul $n = 1$, vom nota $\mathcal{L}S$ în loc de $\mathcal{L}S_1(\mathbb{B}^1)$.

1.6.1 Clasa $S^*(\mathbb{B}^n)$

Această parte este dedicată studiului clasei aplicaţiilor normate şi stelate pe $\mathbb{B}^n$, notată cu $S^*(\mathbb{B}^n)$. Ne vom referi la anumite proprietăţi ale clasei $S^*(\mathbb{B}^n)$.

În continuare, vom da definiţia stelarităţii pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [48], [74]).

Definiţia 1.6.1. Fie $f \in H(\mathbb{B}^n)$. Spunem că f este *stelată* pe $\mathbb{B}^n$ dacă f este biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$, $f(0) = 0$, şi $f(\mathbb{B}^n)$ este un domeniu stelat în raport cu originea.

Fie $S^*(\mathbb{B}^n)$ clasa aplicaţiilor stelate şi normate pe $\mathbb{B}^n$. Pentru $n=1$, clasa $S^*(\mathbb{B}^1)$ revine la S^*.

O caracterizare analitică a stelarităţii pe $\mathbb{B}^n$ a fost obţinută de Matsuno [88]. Alte extensii ale acestei caracterizări au fost date pe bila unitate a unui spaţiu Banach de Gurganus [54] şi pe polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$ de Suffridge [113].

Teorema 1.6.2. *Presupunem că $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$ şi $f(0)=0$. Atunci $f \in S^*(\mathbb{B}^n)$ dacă şi numai dacă aplicaţia $h(z) = [Df(z)]^{-1}f(z)$ aparţine clasei $\mathcal{M}$, sau echivalent*

$$\mathrm{Re}\langle [Df(z)]^{-1}f(z), z\rangle > 0,\ \ z \in \mathbb{B}^n\backslash\{0\}. \tag{1.6.1}$$

Următorul rezultat prezintă o teoremă de deformare pentru clasa $S^*(\mathbb{B}^n)$ şi a fost obţinută de Kubicka şi Poreda [78] şi Barnard, FitzGerald şi Gong [5]. Alte generalizări ale acestui rezultat pot fi găsite în [32, 33], [48].

Teorema 1.6.3. *Dacă $f \in S^*(\mathbb{B}^n)$ atunci*

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \le \|f(z)\| \le \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2},\ \ z \in \mathbb{B}^n.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte. Mai mult, $f(\mathbb{B}^n) \supseteq \mathbb{B}^n_{1/4}$.

1.6.2 Clasa $S^*_\alpha(\mathbb{B}^n)$

Ne vom referi la clasa aplicaţiilor stelate de ordin α pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$, notată cu $S^*_\alpha(\mathbb{B}^n)$.

Conceptul de stelaritate de ordin α pe $\mathbb{B}^n$ a fost introdus de Kohr [70] (a se vedea de asemenea [18]).

Definiţia 1.6.4. Presupunem că $0 \le \alpha < 1$ şi $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$. Spunem că f este *stelată de ordin* α dacă

$$\mathrm{Re}\Big[\frac{\|z\|^2}{\langle [Df(z)]^{-1}f(z), z\rangle}\Big] > \alpha,\ \ z \in \mathbb{B}^n\backslash\{0\}. \tag{1.6.2}$$

Observăm că $S^*_0(\mathbb{B}^n) = S^*(\mathbb{B}^n)$ şi $S^*_\alpha(\mathbb{B}^n) \subseteq S^*(\mathbb{B}^n)$.

În continuare, vom prezenta un rezultat de deformare pentru clasa $S^*_\alpha(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea [70], [18]).

Teorema 1.6.5. *Fie $f \in S^*_\alpha(\mathbb{B}^n)$, unde $0 \le \alpha < 1$. Atunci*

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^{2(1-\alpha)}} \le \|f(z)\| \le \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^{2(1-\alpha)}},\ \ z \in \mathbb{B}^n.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

1.6.3 Clasa $\mathcal{A}S^*_\alpha(\mathbb{B}^n)$

Vom descrie noţiunea de aproape stelaritate de ordin α pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$, care a fost introdusă prima dată pe bila unitate a unui spaţiu Banach de Xu şi Liu [119].

Definiţia 1.6.6. Presupunem că $0 \le \alpha < 1$. Fie $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$. Spunem că f este o aplicaţie *aproape stelată de ordin* α dacă

$$\mathrm{Re}\Big[\frac{\langle [Df(z)]^{-1}f(z), z\rangle}{\|z\|^2}\Big] > \alpha,\ \ z \in \mathbb{B}^n\backslash\{0\}. \tag{1.6.3}$$

Vom nota clasa aplicaţiilor aproape stelate de ordin α pe $\mathbb{B}^n$ cu $\mathcal{A}S^*_\alpha(\mathbb{B}^n)$.

În [12], T. Chirilă a introdus conceptul de aproape stelaritate de ordin α şi tip γ, unde $0 \le \alpha < 1$ şi $0 \le \gamma < 1$.

Definiţia 1.6.7. Presupunem că $0 \le \alpha < 1$ şi $0 \le \gamma < 1$. Fie $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$. Spunem că f este *aproape stelată de ordin α şi tip γ* dacă

$$\mathrm{Re}\Big(1\Big/\Big[\frac{1}{(1-\alpha)\|z\|^2}\langle[Df(z)]^{-1}f(z),z\rangle - \frac{\alpha}{1-\alpha}\Big]\Big) > \gamma,\ z \in \mathbb{B}^n\setminus\{0\}.$$

Vom nota clasa aplicaţiilor aproape stelate de ordin α şi tip γ cu $\mathcal{A}S^*_{\alpha,\gamma}(\mathbb{B}^n)$. Pentru $n = 1$, vom nota $\mathcal{A}S^*_{\alpha,\gamma}$ în loc de $\mathcal{A}S^*_{\alpha,\gamma}(\mathbb{B}^1)$.

Următoarea echivalenţă are loc: $f \in \mathcal{A}S^*_{\alpha,0}(\mathbb{B}^n)$ dacă şi numai dacă $f \in \mathcal{A}S^*_\alpha(\mathbb{B}^n)$. De asemenea, orice aplicaţie din clasa $\mathcal{A}S^*_{\alpha,\gamma}(\mathbb{B}^n)$ aparţine familiei $\mathcal{A}S^*_\alpha(\mathbb{B}^n) \subseteq S^*(\mathbb{B}^n)$.

1.6.4 Clasa $K(\mathbb{B}^n)$

În cele ce urmează vom descrie noţiunea de convexitate pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [48], [70]).

Definiţia 1.6.8. Spunem că aplicaţia $f \in H(\mathbb{B}^n)$ este *convexă* dacă f este biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$ şi dacă domeniul $f(\mathbb{B}^n)$ este convex.

Fie $K(\mathbb{B}^n)$ clasa aplicaţiilor normate şi convexe pe bila unitate $\mathbb{B}^n$.

Următorul rezultat furnizează caracterizarea analitică a aplicaţiilor convexe pe $\mathbb{B}^n$. Acest result este datorat lui Kikuchi [69]. O caracterizare similară a fost obţinută de Gong, Wang şi Yu în lucrarea [34].

Teorema 1.6.9. *Fie $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$. Atunci $f \in K(\mathbb{B}^n)$ dacă şi numai dacă*

$$1 - \mathrm{Re}\langle[Df(z)]^{-1}D^2f(z)(v,v),z\rangle > 0, \tag{1.6.4}$$

for orice $z \in \mathbb{B}^n$ şi $v \in \mathbb{C}^n$ astfel încât $\|v\| = 1$ şi $\mathrm{Re}\langle z,v\rangle = 0$.

În următoarea observaţie, vom evidenţia câteva proprietăţi privind convexitatea pe $\mathbb{B}^n$, şi vom da un exemplu de aplicaţie convexă pe $\mathbb{B}^n$.

Observaţia 1.6.10. În cazul $n \ge 2$, este mai complicat să construim aplicaţii convexe pe $\mathbb{B}^n$ decât în cazul $n = 1$. Fie $f(z) = (f_1,\dots,f_n)$, unde $f_i : U \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1,n}$ sunt funcţii convexe pe U. Pe de altă parte, f nu este neapărat convexă pe $\mathbb{B}^n$, pentru $n \ge 2$ (a se vedea [34]). Dar, în particular, aplicaţia dată de

$$f(z) = \Big(\frac{z_1}{1-z_1},\dots,\frac{z_n}{1-z_1}\Big),\ z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{B}^n$$

este convexă pe $\mathbb{B}^n$.

Vom prezenta un rezultat de deformare pentru clasa $K(\mathbb{B}^n)$ obţinut de Suffridge [115], FitzGerald şi Thomas [31] şi Liu [79].

Teorema 1.6.11. *Fie $f \in K(\mathbb{B}^n)$. Atunci*

$$\frac{\|z\|}{1+\|z\|} \le \|f(z)\| \le \frac{\|z\|}{1-\|z\|},\ z \in \mathbb{B}^n.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

Teorema de tip Marx-Strohhäcker la o variabilă complexă, prezentată în Teorema 1.5.18, poate fie extinsă la $\mathbb{C}^n$, $n \ge 2$. Acest rezultat a fost obţinut de Kohr [70] şi Curt [18].

Teorema 1.6.12. $K(\mathbb{B}^n) \subseteq S^*_{1/2}(\mathbb{B}^n)$. *Acest rezultat este exact.*

1.6.5 Clasa $\hat{S}_\gamma(\mathbb{B}^n)$

În continuare, prezentăm conceptul de spiralitate pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Gurganus K. [54] a definit acest concept în raport cu un operator liniar normal, ale cărui valori proprii au parte reală pozitivă. De asemenea, Suffridge T. [112] a extins această noţiune la spaţii Banach complexe.

Fie $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ şi $t \geq 0$. Fie

$$m(A) = \min\{\mathrm{Re}\langle A(z), z\rangle : \|z\| = 1\},$$
$$e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k A^k.$$

Vom prezenta definiţia spiralităţii pe $\mathbb{B}^n$ dată de Suffridge [112].

Definiţia 1.6.13. Fie $f \in S(\mathbb{B}^n)$. Presupunem că $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A) > 0$. Spunem că f este *spiralată relativ la* A dacă $e^{-tA} f(\mathbb{B}^n) \subseteq f(\mathbb{B}^n)$ pentru orice $t \geq 0$.

Fie operatorul liniar $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A) > 0$. Vom prezenta caracterizarea analitică a spiralităţii relative la operatorul A dată de Suffridge [112] (a se vedea de asemenea [54]).

Teorema 1.6.14. *Fie $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$. Atunci aplicaţia f este spiralată relativ la A dacă şi numai dacă*

$$\mathrm{Re}\langle [Df(z)]^{-1} A f(z), z\rangle > 0, \ z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}. \tag{1.6.5}$$

În particular, dacă A este operatorul $e^{-i\gamma} I_n$, unde $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, obţinem clasa $\hat{S}_\gamma(\mathbb{B}^n)$ a *aplicaţiilor spiralate de tipul* γ, considerată de Hamada şi Kohr [60]. În acest caz, condiţia (1.6.5) revine la $\mathrm{Re}(e^{-i\gamma}\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle) > 0$, $z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$.

Fie $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha \in [0, 1)$. O generalizare a noţiunii de spiralitate de tipul γ este conceptul de spiralitate de tipul γ şi ordin α, definit de Liu şi Liu [82] şi Chirilă [11].

Definiţia 1.6.15. Presupunem că $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\alpha \in [0, 1)$. Fie $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$. Spunem că f este *spiralată de tipul* γ şi ordin α dacă următoarea condiţie este satisfăcută

$$\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{(1 - i\tan\alpha)\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle / \|z\|^2 + i\tan\alpha}\Big] > \gamma, \ z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}.$$

Clasa aplicaţiilor care îndeplinesc condiţiile definiţiei de mai sus este notată cu $\hat{S}_{\gamma,\alpha}(\mathbb{B}^n)$. Pentru $n = 1$, vom nota $\hat{S}_{\gamma,\alpha}$ în loc de $\hat{S}_{\gamma,\alpha}(\mathbb{B}^1)$.

Orice aplicaţie din clasa $\hat{S}_{\gamma,\alpha}(\mathbb{B}^n)$ aparţine familiei $\hat{S}_\gamma(\mathbb{B}^n) \subseteq S^*(\mathbb{B}^n)$. De asemenea, $\hat{S}_{\gamma,0}(\mathbb{B}^n) = \hat{S}_\gamma(\mathbb{B}^n)$.

1.7 Lanţuri Loewner în $\mathbb{C}$ si în $\mathbb{C}^n$

În această secţiune vom studia lanţurile Loewner în $\mathbb{C}$ si în $\mathbb{C}^n$. Vom prezenta rezultate importante în teoria lanţurilor Loewner pe discul unitate U. Ne vom referi la ecuaţia diferenţială Loewner pe U şi vom da caracterizarea unor subclase de funcţii normate şi univalente pe U folosind lanţuri Loewner. Diferite rezultate în această direcţie pot fi găsite în [102], [48], [90] şi de asemenea în [25].

Vom considera generalizarea lanţurilor Loewner şi a ecuaţiei diferenţiale Loewner în $\mathbb{C}^n$. O aplicaţie importantă a lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$ este dată de caracterizarea anumitor subclase ale familiei $S(\mathbb{B}^n)$ folosind lanţuri Loewner. Un rezultat remarcabil în teoria lanţurilor Loewner a fost introducerea familiei $S^0(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor care admit reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Această clasă a fost introdusă de Graham, Hamada şi Kohr [37]. Familia $S^0(\mathbb{B}^n)$ este o submulţime proprie a lui $S(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea [37]). Contribuţii importante în teoria lanţurilor Loewner au fost aduse de G. Kohr şi colaboratorii săi într-o serie de lucrări remarcabile, dintre care enumerăm: [37], [51], [23], [52], [26].

În această secţiune vom utiliza următoarele abrevieri:

Notaţia 1.7.1. Vom utiliza următoarele prescurtări: $\mathcal{LL}$ pentru lanţ(uri) Loewner, $\mathcal{EDL}$ pentru ecuaţia diferenţială Loewner şi $\mathcal{RP}$ pentru reprezentarea parametrică.

1.7.1 Teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}$

În această parte, ne vom referi la $\mathcal{LL}$ pe discul unitate U. Vom da definiţia unui lanţ univalent de subordonare pe U, precum şi definiţia unui $\mathcal{LL}$.

Sursele bibliografice principale folosite în această parte sunt [102], [48], [90].

1.7.1.1 Rezultate generale privind lanţuri Loewner în $\mathbb{C}$

Vom prezenta rezultate generale privind teoria lanţurile Loewner pe U.

În continuare, vom da definiţia unui lanţ univalent de subordonare pe U (a se vedea de exemplu [48]).

Definiţia 1.7.2. Spunem că funcţia $f : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ este un *lanţ univalent de subordonare* dacă următoarele condiţii au loc:

(i) $f(\cdot,t)$ este univalentă pe U,

(ii) $f(0,t) = 0$, pentru $t \geq 0$,

(iii) $f(\cdot,s) \prec f(\cdot,t)$, pentru $0 \leq s \leq t < \infty$.

Dacă, în plus, $f'(0,t) = e^t$, pentru orice $t \geq 0$, atunci f este un $\mathcal{LL}$.

În definiţia de mai sus am folosit notaţia $f'(z,t)$ în loc de $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$.

Presupunem că $f(z,t)$ este un $\mathcal{LL}$. În acest caz, există o unică funcţie Schwarz univalentă $v = v(z,s,t)$ astfel încât (a se vedea de exemplu [48]):

$$f(z,s) = f(v(z,s,t),t), \tag{1.7.1}$$

pentru $z \in U$ şi $0 \leq s \leq t < \infty$. Funcţia v se numeşte *funcţia de tranziţie* asociată lui f.

În cele ce urmează, vom prezenta un rezultat important în teoria lanţurile Loewner pe U (a se vedea [48]).

Teorema 1.7.3. *Presupunem că $p : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ este o funcţie care satisface următoarele proprietăţi:*

(i) $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$, pentru orice $t \geq 0$,

(ii) $p(z,\cdot)$ este măsurabilă pe $[0,\infty)$, pentru orice $z \in U$.

În aceste condiţii şi pentru orice $z \in U$ şi $s \geq 0$, problema Cauchy

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial t} & = -vp(v,t), \text{ a.e. } t \geq s, \\ v(z,s,s) & = z \end{array}\right. \tag{1.7.2}$$

admite o unică soluţie $v(z,s,\cdot)$, care este local absolut continuă şi $v'(0,s,t) = e^{s-t}$.

Mai mult, pentru $s \geq 0$ şi $z \in U$ fixaţi, $v(z,s,\cdot)$ este Lipschitz continuă pe $[s,\infty)$, local uniform în raport cu z. De asemenea, pentru orice $t \geq s$, $v(\cdot,s,t)$ este o funcţie Schwarz univalentă.

În plus, pentru orice $s \geq 0$, următoarea limită există:

$$f(z,s) := \lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) \tag{1.7.3}$$

local uniform pe U şi $f(z,t)$ este un $\mathcal{LL}$ care satisface ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zf'(z,t)p(z,t), \text{ a.e. } t \geq 0, \ \forall z \in U. \tag{1.7.4}$$

Ecuaţia diferenţială (1.7.4) poartă numele de $\mathcal{EDL}$ (sau *ecuaţia diferenţială Loewner-Kufarev*).

Vom prezenta următoarea caracterizare a $\mathcal{LL}$ obţinută de Pommerenke [101] (a se vedea de asemenea [48]).

Teorema 1.7.4. *Presupunem că $f : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ este o funcţie astfel încât $f(0,t) = 0$, $f'(0,t) = e^t$, $t \geq 0$. Atunci f este un $\mathcal{LL}$ dacă şi numai dacă următoarele relaţii au loc:*

(i) Există $r \in (0,1)$ şi o constantă $M > 0$ astfel încât $f(\cdot,t) \in H(U(0,r))$ (unde $U(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$) pentru orice $t \geq 0$, $f(z,\cdot)$ este local absolut continuă pe $[0,\infty)$ local uniform în raport cu $z \in U(0,r)$, şi $|f(z,t)| \leq Me^t$, pentru orice $z \in U(0,r)$, $t \geq 0$.

(ii) Există o funcţie $p : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ care satisface condiţiile (i) şi (ii) din Teorema 1.7.3 astfel încât

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zf'(z,t)p(z,t), \text{ a.e. } t \geq 0, \ z \in U(0,r).$$

1.7.1.2 Lanţuri Loewner şi subclase de funcţii univalente pe U

În continuare, vom prezenta caracterizarea unor subclase ale lui S folosind $\mathcal{LL}$ (a se vedea [48]).

Vom prezenta caracterizarea funcţiilor din clasa $\hat{S}_\gamma$ folosind $\mathcal{LL}$. Pe baza faptului că clasa $\hat{S}_0$ se reduce la S^*, vom obţine caracterizarea funcţiilor stelate pe U folosind $\mathcal{LL}$ (a se vedea [102], [48]).

Teorema 1.7.5. *Fie $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Fie $f \in H(U)$ o funcţie normată. Atunci $f \in \hat{S}_\gamma$ on U dacă şi numai dacă funcţia*

$$f(z,t) = e^{(1-ia)t} f(e^{iat}z), \ z \in U, t \geq 0,$$

este un $\mathcal{LL}$, unde $a = \tan\gamma$. In particular, $f \in S^*$ dacă şi numai dacă funcţia

$$f(z,t) = e^t f(z), \ z \in U, \ t \geq 0,$$

este un $\mathcal{LL}$.

Următorul rezultat prezintă caracterizarea aproape stelarităţii de ordin α folosind $\mathcal{LL}$ (a se vedea [119]).

Teorema 1.7.6. *Fie $0 \leq \alpha < 1$. Fie $f \in H(U)$ o funcţie normată. Atunci $f \in \mathcal{AS}^*_\alpha$ dacă şi numai dacă funcţia*

$$f(z,t) = e^{\frac{1}{1-\alpha}t} f(e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}t} z),\ z \in U,\ t \geq 0$$

este un $\mathcal{LL}$.

Următoarea teoremă prezintă caracterizarea funcţiilor convexe pe U folosind $\mathcal{LL}$ (a se vedea [48], [102]).

Teorema 1.7.7. *Fie $f \in H(U)$ o funcţie normată. Atunci $f \in K$ dacă şi numai dacă funcţia*

$$f(z,t) = f(z) + (e^t - 1)zf'(z),\ z \in U,\ t \geq 0$$

este un $\mathcal{LL}$.

1.7.2 Teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$

În această parte, vom considera generalizarea lanţurilor Loewner şi a ecuaţiei diferenţiale Loewner în $\mathbb{C}^n$. Vom prezenta rezultate importante privind lanţurile Loewner în $\mathbb{C}^n$. Ne vom referi la anumite aplicaţii ale lanţurilor Loewner, precum caracterizarea anumitor subclase ale familiei $S(\mathbb{B}^n)$.

Sursele bibliografice principale folosite sunt [48], [20], [37], [51].

1.7.2.1 Rezultate generale privind lanţurile Loewner în $\mathbb{C}^n$

Vom prezenta definiţia unui $\mathcal{LL}$ în $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) (a se vedea [96], [48]).

Definiţia 1.7.8. Spunem că $f : \mathbb{B}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ este un *lanţ univalent de subordonare* dacă următoarele condiţii au loc:

(i) $f(\cdot, t)$ este biolomorfă pe $\mathbb{B}^n$,

(ii) $f(0, t) = 0$, pentru $t \geq 0$, şi

(iii) $f(\cdot, s) \prec f(\cdot, t)$, $0 \leq s \leq t < \infty$.

Mai mult, dacă $Df(0, t) = e^t I_n$, unde I_n este matricea unitate de ordin n şi $t \geq 0$, atunci aplicaţia $f(z, t)$ se numeşte un $\mathcal{LL}$.

Condiţia de subordonare din definiţia de mai sus este echivalentă cu faptul că (a se vedea [96], [48]): există o unică aplicaţie biolomorfă $v = v(z, s, t)$, numită *aplicaţie de tranziţie*, cu proprietatea că $\|v(z, s, t)\| \leq \|z\|$, $z \in \mathbb{B}^n$, şi următoarea relaţie are loc

$$f(z, s) = f(v(z, s, t), t),\ z \in \mathbb{B}^n, 0 \leq s \leq t.$$

Următorul rezultat a fost obţinut de Pfaltzgraff [96]. Acest rezultat a fost studiat pe spaţii Banach de Poreda [105].

Teorema 1.7.9. [96] *Fie $h : \mathbb{B}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie care satisface următoarele condiţii:*

(i) $h(\cdot, t) \in \mathcal{M}$, $t \geq 0$,

(ii) $h(z, \cdot)$ *este măsurabilă pe* $[0, \infty)$ *pentru* $z \in \mathbb{B}^n$.

Următoarea problemă Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial t} & = -h(v,t), \ \text{a.e. } t \geq s \\ v(s) & = z, \end{array} \right. \tag{1.7.5}$$

admite o unică soluţie local absolut continuă $v(t)$ $(= v(z,s,t) = e^{s-t}z + \dots)$ *pentru orice* $s \geq 0$ *şi* $z \in \mathbb{B}^n$. *Mai mult,* v *este o aplicaţie Schwarz univalentă pe* $\mathbb{B}^n$ *în raport cu prima variabilă şi, pentru* $s \geq 0$ *fixat şi* $z \in \mathbb{B}^n$, *este o funcţie Lipschitz de* $t \geq s$ *local uniform în raport cu* z.

Aplicaţia h care satisface condiţiile (i), (ii) din Teorema 1.7.9 poartă numele de *câmp vectorial Herglotz*. Ecuaţia diferenţială (1.7.5) este cunoscută ca *ecuaţia diferenţială (ordinară) Loewner* asociată lui h.

În continuare, vom prezenta un rezultat important obţinut de Poreda [105], Hamada şi Kohr [61] (a se vedea de asemenea [48]). Acest rezultat remarcabil ne arată că un $\mathcal{LL}$ poate fi obţinut din aplicaţia sa de tranziţie, care reprezintă soluţia problemei Cauchy (1.7.5).

Teorema 1.7.10. *Fie* h *un câmp vectorial Herglotz şi fie* v *soluţia problemei Cauchy* (1.7.5). *Atunci următoarea limită există*

$$\lim_{t \to \infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s),$$

local uniform pe $\mathbb{B}^n$ *pentru orice* $s \geq 0$. *Mai mult,* $f(\cdot, s)$ *este univalentă pe* $\mathbb{B}^n$ *şi* $f(z,s) = f(v(z,s,t),t)$ *pentru orice* $z \in \mathbb{B}^n$ *şi* $0 \leq s \leq t < \infty$. *Atunci* $f(z,t)$ *este un* $\mathcal{LL}$ *care are proprietatea că familia* $\{e^{-t} f(\cdot, t)\}_{t \geq 0}$ *este normală pe* $\mathbb{B}^n$ *şi* $f(z, \cdot)$ *este o funcţie local Lipschitz pe* $[0, \infty)$ *local uniform în raport cu* $z \in \mathbb{B}^n$. *Mai mult,* f *satisface următoarea ecuaţie:*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t), \ \text{a.e. } t \geq 0, \forall z \in \mathbb{B}^n. \tag{1.7.6}$$

Ecuaţia diferenţială (1.7.6) poartă numele de *ecuaţie diferenţială (generalizată) Loewner* asociată lui h.

Următoarea teoremă prezintă un rezultat important în teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$. Acest rezultat a fost obţinut de Pfaltzgraff [96]. Poreda [105] a obţinut un rezultat similar pe spaţii Banach. Alte contribuţii importante legate de acest subiect au fost aduse de Hamada şi Kohr [61].

Teorema 1.7.11. *Fie* h *un câmp vectorial Herglotz. Presupunem că* $f = f(z,t) : \mathbb{B}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ *satisface următoarele proprietăţi:* $f(\cdot, t) \in H(\mathbb{B}^n)$, $f(0,t) = 0$, $Df(0,t) = e^t I_n$, *pentru* $t \geq 0$, $f(z, \cdot)$ *este local absolut continuă pe* $[0, \infty)$ *local uniform în raport cu* $z \in \mathbb{B}^n$ *şi* $\mathcal{EDL}$ (1.7.6) *are loc.*

Presupunem că există un şir de numere strict pozitive şi crescător $\{t_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ *astfel încât* $t_m \to \infty$ *şi* $\lim_{m \to \infty} e^{-t_m} f(z, t_m) = F(z)$ *local uniform pe* $\mathbb{B}^n$. *Fie* v *soluţia problemei Cauchy* (1.7.5) *pentru orice* $z \in \mathbb{B}^n$. *Atunci* $f(z,t)$ *este un* $\mathcal{LL}$ *şi*

$$\lim_{t \to \infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s)$$

local uniform pe $\mathbb{B}^n$ *pentru orice* $s \geq 0$.

Graham I., Hamada H. şi Kohr G. [37] au arătat că orice $\mathcal{LL}$ pe $\mathbb{B}^n$ satisface $\mathcal{EDL}$ (1.7.6) (a se vedea de asemenea [23], [48]).

Teorema 1.7.12. *Presupunem că f este un $\mathcal{LL}$ pe $\mathbb{B}^n$. Atunci există un unic câmp vectorial Herglotz h astfel încât $\mathcal{EDL}$ (1.7.6) este satisfăcută de f.*

1.7.2.2 Lanţuri Loewner şi subclase de aplicaţii biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$

Vom da câteva caracterizări folosind $\mathcal{LL}$ ale unor subclase de aplicaţii din familia $S(\mathbb{B}^n)$.

Următoarea teoremă obţinută de Hamada şi Kohr [60] prezintă caracterizarea aplicaţiilor din clasa $\hat{S}_\gamma(\mathbb{B}^n)$ folosind $\mathcal{LL}$. În particular, acest rezultat furnizează şi caracterizarea aplicaţiilor stelate pe $\mathbb{B}^n$ folosind $\mathcal{LL}$, care a fost obţinută de Pfaltzgraff şi Suffridge [98].

Teorema 1.7.13. *Fie $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$ şi fie $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci $f \in \hat{S}_\gamma(\mathbb{B}^n)$ dacă şi numai dacă aplicaţia*

$$f(z,t) = e^{(1-ia)t} f(e^{iat}z),\ z \in \mathbb{B}^n,\ t \geq 0,$$

este un $\mathcal{LL}$, unde $a = \tan\gamma$.

În particular, $f \in S^*(\mathbb{B}^n)$ daca şi numai dacă aplicaţia $f(z,t) = e^t f(z)$ este un $\mathcal{LL}$.

Orice aplicaţie aproape stelată de ordin α pe $\mathbb{B}^n$ poate fi caraterizată folosind $\mathcal{LL}$. Următoarea caracterizare a fost obţinută pe spaţii Banach de Xu şi Liu [119].

Teorema 1.7.14. *Fie $\alpha \in [0,1)$. Presupunem că $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$. Atunci $f \in \mathcal{A}S^*_\alpha(\mathbb{B}^n)$ dacă şi numai dacă aplicaţia $f(z,t) = e^{\frac{t}{1-\alpha}} f(e^{\frac{\alpha t}{\alpha-1}} z)$, $z \in \mathbb{B}^n$, $t \geq 0$, este un $\mathcal{LL}$.*

Capitolul 2

Operatori de extensie care păstrează reprezentarea parametrică pe $\mathbb{B}^n$

În acest capitol, vom prezenta reprezentarea parametrică pe discul unitate U şi pe bila unitate Euclideană $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Vom vedea că orice funcţie din clasa S admite reprezentare parametrică pe U (a se vedea [102], [48]). Vom prezenta clasa $S^0(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor care admit reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$ introdusă de Graham, Hamada şi Kohr [37]. Această clasă este compactă (a se vedea [51]), prin urmare este o submulţime proprie a familiei $S(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor normate şi biolomorfe pe $\mathbb{B}^n$. Vom considera o funcţie g care satisface condiţiile Ipotezei 2.1.6. Vom prezenta clasa $\mathcal{M}_g$ introdusă de Graham, Hamada şi Kohr în [37], precum şi clasa aplicaţiilor care admit g-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$, notată cu $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea [37]). Vom da definiţia unui g-lanţ Loewner introdusă de Graham, Hamada şi Kohr [37].

Vom demonstra că g-reprezentarea parametrică este păstrată prin operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$, unde funcţia g este dată de relaţia $g(\zeta) = \frac{1+A\zeta}{1+B\zeta}$, $\zeta \in U$, şi $-1 \leq B < A \leq 1$. Aceste rezultate sunt originale şi au fost obţinute în lucrările [85, 86]. Vom prezenta de asemenea proprietăţi analitice şi geometrice ale operatorilor de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$.

Principalele surse bibiliografice folosite pentru pregătirea acestui capitol sunt [102], [108], [36], [47], [46], [51], [92], [63], [75], [11], [12].

În acest capitol vom utiliza prescurtările prezentate în Notaţia 1.7.1. Aşadar, vom folosi următoarele abrevieri: $\mathcal{LL}$ pentru lanţ(uri) Loewner, $\mathcal{EDL}$ pentru ecuaţia diferenţială Loewner şi $\mathcal{RP}$ pentru reprezentarea parametrică. De asemenea, vom folosi prescurtările: g-$\mathcal{LL}$ pentru g-lanţ(uri) Loewner, g-$\mathcal{RP}$ pentru g-reprezentarea parametrică.

2.1 Lanţuri Loewner şi reprezentarea parametrică în $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{C}^n$

Vom prezenta în această secţiune funcţii univalente care admit $\mathcal{RP}$ pe discul unitate U şi aplicaţii biolomorfe care admit $\mathcal{RP}$ pe $\mathbb{B}^n$. Vom introduce conceptul de g-$\mathcal{RP}$ pe $\mathbb{B}^n$.

2.1.1 Funcţii univalente şi normate care admit reprezentare parametrică pe U

În continuare prezentăm definiţia unei funcţii univalente care admite $\mathcal{RP}$ pe discul unitate U (a se vedea [102]).

Definiţia 2.1.1. Spunem că o funcţie olomorfă şi normată pe U admite $\mathcal{RP}$ pe U dacă există un $\mathcal{LL}$, $f(z,t) : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$, cu proprietatea că $f(z,0) = f(z)$.

Următorul rezultat arată că orice funcţie din clasa S admite $\mathcal{RP}$ pe U (a se vedea [102]). Acest rezultat nu are loc pentru familia $S(\mathbb{B}^n)$, în cazul $n \geq 2$ (a se vedea [37]).

Teorema 2.1.2. *Dacă $f \in S$ atunci f admite $\mathcal{RP}$.*

2.1.2 Aplicaţii normate şi univalente care admit reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$

Vom prezenta clasa aplicaţiilor care admit $\mathcal{RP}$ pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$ studiată de Kohr în [73]. Generalizarea conceptului de $\mathcal{RP}$ în raport cu o normă arbitrară a fost introdusă de Graham, Hamada şi Kohr în [37]. Vom da definiţia noţiunii de g-$\mathcal{RP}$ introdusă de Graham, Hamada şi Kohr în [37], care generalizează conceptul de $\mathcal{RP}$.

Vom prezenta definiţia noţiunii de $\mathcal{RP}$ pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [37]).

Definiţia 2.1.3. Spunem că o aplicaţie $f \in S(\mathbb{B}^n)$ admite $\mathcal{RP}$ dacă există un $\mathcal{LL}$, $f(z,t) : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$, cu proprietatea că familia $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ este normală pe $\mathbb{B}^n$ şi $f(z) = f(z,0)$.

Fie $S^0(\mathbb{B}^n)$ clasa aplicaţiilor care admit $\mathcal{RP}$ pe $\mathbb{B}^n$.

Graham I., Hamada H. şi Kohr G. [37] au demonstrat că $S^0(\mathbb{B}^n)$ este strict inclusă în clasa $S(\mathbb{B}^n)$. Totodată, familiile $S^*(\mathbb{B}^n)$, $\hat{S}_\gamma(\mathbb{B}^n)$ sunt subclase ale familiei $S^0(\mathbb{B}^n)$, adică admit $\mathcal{RP}$ pe $\mathbb{B}^n$.

Vom prezenta o teoremă de deformare şi acoperire pentru clasa $S^0(\mathbb{B}^n)$ obţinută de Graham, Hamada şi Kohr [37] în raport cu o normă arbitrară (a se vedea de asemenea [73]). Acest rezultat nu are loc pentru familia $S(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea [48]).

Teorema 2.1.4. *Fie $f \in S^0(\mathbb{B}^n)$. Atunci*

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}, \ z \in \mathbb{B}^n.$$

Acest rezultat este exact. Mai mult, $f(\mathbb{B}^n) \supseteq \mathbb{B}^n_{1/4}$, unde $\mathbb{B}^n_{1/4} = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1/4\}$.

Următorul rezultat arată că familia $S^0(\mathbb{B}^n)$ este compactă în $H(\mathbb{B}^n)$ şi a fost obţinut de Graham, Kohr şi Kohr [51].

Corolarul 2.1.5. *Familia $S^0(\mathbb{B}^n)$ este compactă în $H(\mathbb{B}^n)$.*

2.1.3 Aplicaţii care admit g-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$

Vom prezenta conceptul de g-$\mathcal{RP}$ pe $\mathbb{B}^n$, unde funcţia g satisface următoarea ipoteză (a se vedea [37]).

Ipoteza 2.1.6. Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă pe U, care satisface următoarele proprietăţi : $g(0) = 1$, $g(\overline{\zeta}) = \overline{g(\zeta)}$, Re $g(\zeta) > 0$, $\zeta \in U$, şi următoarele relaţii au loc pentru $r \in (0,1)$:

$$\min_{|\zeta|=r} \text{Re } g(\zeta) = \min\{g(r), g(-r)\},$$
$$\max_{|\zeta|=r} \text{Re } g(\zeta) = \max\{g(r), g(-r)\}.$$

În continuare, vom considera o funcţie g care satisface Ipoteza 2.1.6.

Fie $\mathcal{M}_g$ o submulţime nevidă a clasei Carathéodory, $\mathcal{M}$, definită prin:

Definiţia 2.1.7.

$$\mathcal{M}_g = \left\{ h \in H(\mathbb{B}^n) : h \text{ normată }, \langle h(z), \frac{z}{\|z\|^2}\rangle \in g(U), z \in \mathbb{B}^n \right\}.$$

Alegem ramura $\langle h(z), \frac{z}{\|z\|^2}\rangle|_{z=0} = 1$. Această clasă a fost introdusă de Graham, Hamada şi Kohr [37]. Se observă că aplicaţia identică $id_{\mathbb{B}^n}$ aparţine lui $\mathcal{M}_g$ (deci, $\mathcal{M}_g$ este o mulţime nevidă) şi $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}$, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $\zeta \in U$.

Conceptul de g-$\mathcal{LL}$ a fost definit de Graham, Hamada şi Kohr în [37].

Definiţia 2.1.8. Fie $f(z,t) : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$. Atunci f este un g-$\mathcal{LL}$ dacă următoarele condiţii au loc:

(i) $f(z,t)$ este un $\mathcal{LL}$,

(ii) familia $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este normală pe $\mathbb{B}^n$,

(iii) aplicaţia h obţinută din $\mathcal{EDL}$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t), \ \forall z \in \mathbb{B}^n, \text{ a.e. } t \geq 0, \tag{2.1.1}$$

are proprietatea că $h(\cdot,t) \in \mathcal{M}_g$, aproape pentru orice $t \geq 0$.

În continuare, vom da definiţia unei aplicaţii care admite g-$\mathcal{RP}$ introdusă de Graham, Hamada şi Kohr [37] (a se vedea de asemenea [51], unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $\zeta \in U$)

Definiţia 2.1.9. Presupunem că Ipoteza 2.1.6 are loc şi $f \in S(\mathbb{B}^n)$. Aplicaţia f admite g-$\mathcal{RP}$ dacă există un g-$\mathcal{LC}$, $f(z,t)$, astfel încât $f = f(\cdot,0)$.

Fie $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ clasa aplicaţiilor care admit g-$\mathcal{RP}$ pe $\mathbb{B}^n$. În continuare, vom prezenta anumite proprietăţi ale familiei $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ obţinute de Graham, Hamada şi Kohr [37]. Vom considera în următoarea observaţie că g este o funcţie ce satisface Ipoteza 2.1.6.

Observaţia 2.1.10. (i) $S_g^0(\mathbb{B}^n) \subseteq S^0(\mathbb{B}^n) \subseteq S(\mathbb{B}^n)$.

(ii) Dacă $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $\zeta \in U$, atunci $S_g^0(\mathbb{B}^n) = S^0(\mathbb{B}^n)$.

Următoarea observaţie obţinută de Graham, Hamada şi Kohr [37] ne arată un motiv important de a studia conceptele de g-$\mathcal{RP}$, respectiv g-$\mathcal{LL}$, în cazul $n \geq 2$.

Observaţia 2.1.11. Presupunem că $g(\zeta) = 1 - \zeta$, $\zeta \in U$. Atunci orice aplicaţie normată şi convexă pe $\mathbb{B}^n$ admite g-$\mathcal{RP}$.

O teoremă de deformare pentru familia $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ a fost obţinută de Graham, Hamada şi Kohr [37]. Acest rezultat demonstrează că familia $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ este local uniform mărginită (a se vedea de asemenea [73]).

2.2 Introducere în teoria operatorilor de extensie

Această secţiune prezintă anumiţi operatori de extensie care păstrează proprietăţi analitice şi geometrice pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$. Vom prezenta operatorii de extensie: Φ_n, introdus de Roper şi Suffridge [108], $\Phi_{n,\alpha,\beta}$, introdus de Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge [46], respectiv $\Phi_{n,Q}$, introdus de Muir [92]. Aceşti operatori extind o funcţie local univalentă şi normată pe U la o aplicaţie local biolomorfă şi normată pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$.

Vom considera următoarea notaţie: $\tilde{z} = (z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$.

2.2.1 Operatorul de extensie Φ_n

Operatorul Φ_n a fost introdus de Roper şi Suffridge în [108] cu scopul de a construi aplicaţii convexe pe $\mathbb{B}^n$ folosind funcţii convexe pe U. Dacă $f_1, \dots, f_n \in K$ atunci aplicaţia $f = (f_1, \dots, f_n)$ nu este în mod necesar convexă pe $\mathbb{B}^n$. Următoarea aplicaţie definită pe $\mathbb{B}^n$ ilustrează acest aspect:

$$F(z) = \left(\frac{z_1}{1-z_1}, \dots, \frac{z_n}{1-z_n}\right), \ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{B}^n,$$

unde funcţia $\frac{\zeta}{1-\zeta}$, $\zeta \in U$, este convexă pe U.

Operatorul de extensie Roper-Suffridge $\Phi_n : \mathcal{L}S \to \mathcal{L}S_n$ este definit astfel [108]:

$$\Phi_n(f)(z) = (f(z_1), \tilde{z}\sqrt{f'(z_1)}), \ z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n. \tag{2.2.1}$$

Ramura funcţiei putere se alege astfel încât $\sqrt{f'(z_1)}|_{z_1=0} = 1$.

În lucrarea [108], Roper K. şi Suffridge T. au demonstrat că operatorul Φ_n păstrează convexitatea. Graham I. şi Kohr G. [47] au obţinut acelaşi rezultat folosind o metodă diferită.

Teorema 2.2.1. *Fie $f \in K$. Atunci $\Phi_n(f) \in K(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Phi_n(K) \subseteq K(\mathbb{B}^n)$.*

Operatorul Φ_n păstrează de asemenea şi stelaritatea de ordin $\alpha \in (0,1)$. În lucrarea [47], Graham I. şi Kohr G. au arătat mai întâi că operatorul conservă conceptul de stelaritate. Ulterior, Hamada H., Kohr G. and Kohr M. [63] au demonstrat că Φ_n păstrează stelaritatea de ordin $1/2$, iar Liu X.[80] a arătat că Φ_n conservă stelaritatea de ordin $\alpha \in (0,1)$ (acelaşi rezultat a fost obţinut şi de către Chirilă in [12] folosind g-$\mathcal{LL}$).

Teorema 2.2.2. *Dacă $f \in S^*_\alpha$, unde $\alpha \in [0,1)$, atunci $\Phi_n(f) \in S^*_\alpha(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare,*

$$\Phi_n(S^*_\alpha) \subseteq S^*_\alpha(\mathbb{B}^n).$$

Chirilă T. [12] a arătat că următorul rezultat are loc.

Teorema 2.2.3. *Presupunem că $0 \le \alpha < 1$ şi $0 < \gamma < 1$. Dacă $f \in \mathcal{A}S^*_{\alpha,\gamma}$ atunci $\Phi_n(f) \in \mathcal{A}S^*_{\alpha,\gamma}(\mathbb{B}^n)$.*

Graham, Kohr and Kohr [51] au demonstrat că Φ_n păstrează spiralitatea de tipul γ, $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Mai mult, folosind g-$\mathcal{LL}$, Chirilă [12] a obţinut că operatorul păstrează spiralitatea de tipul $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi ordin $\alpha \in (0,1)$.

Teorema 2.2.4. *Presupunem că $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $0 < \alpha < 1$. Dacă $f \in \hat{S}_{\gamma,\alpha}$, atunci $\Phi_n(f) \in \hat{S}_{\gamma,\alpha}(\mathbb{B}^n)$.*

Următorul rezultat are un rol important şi a fost obţinut de Graham, Kohr şi Kohr [51]. Acest rezultat arată că Φ_n extinde o funcţie cu $\mathcal{RP}$ pe U la o aplicaţie cu $\mathcal{RP}$ pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea de asemenea [47]).

Teorema 2.2.5. *Dacă $f \in S$ atunci $\Phi_n(f) \in S^0(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Phi_n(S) \subseteq S^0(\mathbb{B}^n)$.*

2.2.2 Operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$

Vom considera următorul operator de extensie:

Definiţia 2.2.6. Presupunem că $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Fie $\Phi_{n,\alpha,\beta} : \mathcal{L}S \to \mathcal{L}S_n$ definit prin

$$\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)(z) = \left(f(z_1), \tilde{z} \left(\frac{f(z_1)}{z_1} \right)^{\alpha} (f'(z_1))^{\beta} \right), \ z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n. \tag{2.2.2}$$

Alegem ramura funcţiei putere astfel încât

$$\left(\frac{f(z_1)}{z_1} \right)^{\alpha} \bigg|_{z_1=0} = 1, \ (f'(z_1))^{\beta}\big|_{z_1=0} = 1.$$

Acest operator de extensie a fost introdus de Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge în [46]. Pentru $(\alpha, \beta) = (0, 1/2)$, operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ se reduce la operatorul Φ_n.

Vom considera următoarea ipoteză:

Ipoteza 2.2.7. Fie $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$ şi $\alpha + \beta \leq 1$.

În următorul rezultat, vom prezenta câteva proprietăţi de conservare satisfăcute de operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ (a se vedea [46]):

Teorema 2.2.8. *Presupunem că Ipoteza 2.2.7 este satisfăcută. Atunci următoarele relaţii au loc:*

(i) $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S) \subseteq S^0(\mathbb{B}^n)$.

(ii) $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*) \subseteq S^*(\mathbb{B}^n)$.

(iii) $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*_\gamma) \subseteq S^*_\gamma(\mathbb{B}^n)$, *with* $\gamma \in (0, 1)$.

(iv) Operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ păstrează spiralitatea de tipul $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi ordin $\delta \in (0, 1)$.

(v) Operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ păstrează aproape stelaritatea de tipul $\gamma \in (0, 1)$ şi ordin $\delta \in [0, 1)$.

Proprietatea (iii) a fost obţinută de Liu [80], respectiv proprietatea (iv) a fost demonstrată de Liu şi Liu [81] (a se vedea de asemenea [11], unde acelaşi rezultat a fost obţinut folosind g-$\mathcal{LL}$). Rezultatul (v) este datorat lui Chirilă [11].

Operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ păstrează convexitatea doar dacă $(\alpha, \beta) = (0, 1/2)$. Această proprietate a fost obţinută de Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge [46].

Teorema 2.2.9. *Dacă $f \in K$, atunci $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in K(\mathbb{B}^n)$ doar dacă $\alpha = 0$ şi $\beta = \frac{1}{2}$ (adică doar în cazul operatorului de extensie Roper-Suffridge).*

2.2.3 Operatorul de extensie $\Phi_{n,Q}$

Următorul operator de extensie a fost introdus de Muir [92], cu scopul de a obţine puncte de extrem ale clasei $K(\mathbb{B}^n)$, pornind de la puncte de extrem pentru clasa K. Înainte de a prezenta acest operator de extensie, vom da definiţia unui *polinom omogen de grad k* (a se vedea [48], [67]).

Definiţia 2.2.10. Spunem că o aplicaţie $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ este un *polinom omogen de grad* $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ dacă există o aplicaţie continuă şi multiliniară de grad k, $L : \prod_{i=1}^{k} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ astfel încât $Q(z) = L(\underbrace{z, \dots, z}_{k\text{-times}})$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Se observă că $Q \in H(\mathbb{C}^n)$, $Q(\lambda z) = \lambda^k Q(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, respectiv $DQ(z)(z) = kQ(z)$ pentru orice $z \in \mathbb{C}^n$. De asemenea, $Q(0) = 0$.

Fie următoarea ipoteză:

Ipoteza 2.2.11. Fie $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ un polinom omogen de grad 2.

În continuare, vom prezenta definiţia operatorului de extensie $\Phi_{n,Q}$ (see [92]).

Definiţia 2.2.12. Presupunem că Ipoteza 2.2.11 are loc. Fie $\Phi_{n,Q} : \mathcal{L}S \to \mathcal{L}S_n$ definit prin

$$\Phi_{n,Q}(f)(z) = (f(z_1) + Q(\tilde{z})f'(z_1), \tilde{z}\sqrt{f'(z_1)}),\ z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n. \tag{2.2.3}$$

Alegem ramura funcţiei putere astfel încât $\sqrt{f'(z_1)}|_{z_1=0} = 1$.

Dacă $Q \equiv 0$, operatorul $\Phi_{n,Q}$ revine la operatorul Φ_n.

Rezultatul următor prezintă proprietăţi de conservare importante satisfăcute de operatorul $\Phi_{n,Q}$. Primele două proprietăţi au fost demonstrate de Kohr [75], proprietatea (iii) a fost obţinută de Muir [92], iar proprietatea (iv) a fost demonstrată de Wang şi Liu [116]. Ultimul rezultat a fost obţinut şi de Chirilă [12] folosind o altă metodă.

Teorema 2.2.13. *(i)* $\Phi_{n,Q}(S) \subseteq S^0(\mathbb{B}^n)$, *dacă şi numai dacă* $\|Q\| \leq 1/4$*;*

(ii) $\Phi_{n,Q}(S^*) \subseteq S^*(\mathbb{B}^n)$, *dacă şi numai dacă* $\|Q\| \leq 1/4$*;*

(iii) $\Phi_{n,Q}(K) \subseteq K(\mathbb{B}^n)$, *dacă şi numai dacă* $\|Q\| \leq 1/2$*;*

(iv) $\Phi_{n,Q}$ *păstrează stelaritatea de ordin* $\alpha \in (0,1)$ *dacă şi numai dacă* $\|Q\| \leq \frac{1-|2\alpha-1|}{8\alpha}$.

2.2.4 Raze de univalenţă asociate unor subclase de aplicaţii olomorfe generate prin operatori de extensie

Vom prezenta câteva raze de univalenţă asociate operatorilor de extensie Φ_n şi $\Phi_{n,\alpha,\beta}$. Definiţia 1.5.23 poate fi generalizată de la discul unitate U la bila unitate $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Fie $\mathcal{F}$ o submulţime nevidă a mulţimii $S(\mathbb{B}^n)$ şi fie $r(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ raza proprietăţii $\mathcal{P}$ în mulţimea $\mathcal{F}$.

În rezultatul următor, vom include câteva raze de univalenţă binecunoscute privind operatorul Φ_n. Aceste raze au fost obţinute de Graham, Kohr şi Kohr [51] (a se vedea de asemenea [47] şi Teorema 1.5.24).

Teorema 2.2.14. *(i)* $r(S^*, \Phi_n(S)) = r(S^*, S)$.

(ii) $r(K, \Phi_n(S)) = r(K, \Phi_n(S^*)) = r(K, S)$.

În cazul $n \geq 2$, avem următoarea relaţie: $r(K, S^0(\mathbb{B}^n)) \leq r(K, S^*(\mathbb{B}^n)) < 2 - \sqrt{3}$ (pentru mai multe detalii a se vedea [48], [51]).

Următorul rezultat a fost obţinut de Graham, Hamada, Kohr şi Suffrigde [46] (a se vedea de asemenea [11], unde sunt menţionate alte raze de univalenţă privind operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$).

Teorema 2.2.15. *Presupunem că Ipoteza 2.2.7 are loc. Atunci*

$$r(S^*, \Phi_{n,\alpha,\beta}(S)) = r(S^*, S).$$

2.3 Operatori de extensie şi g-reprezentarea parametrică

În această secţiune vom arăta că conceptul de g-$\mathcal{RP}$ este păstrat prin operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$, unde funcţia g este definită de Ipoteza (2.3.1). În capitolul următor, vom prezenta câteva consecinţe importante ale acestor rezultate privind anumite subclase de funcţii care admit g-$\mathcal{RP}$. Rezultatele originale prezentate în această secţiune au fost obţinute în [85] şi [86].

Vom considera următoarea ipoteză:

Ipoteza 2.3.1. Fie $A, B \in \mathbb{R}$ astfel încât $-1 \leq B < A \leq 1$. Fie $g : U \to \mathbb{C}$ definită de:

$$g(\zeta) = \frac{1 + A\zeta}{1 + B\zeta}, \ \zeta \in U.$$

Observăm că această funcţie particulară g satisface condiţiile Ipotezei 2.1.6.

2.3.1 Operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi g-reprezentarea parametrică

Vom demonstra că operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ definit în Definiţia 2.2.6 păstrează g-$\mathcal{RP}$, unde g satisface Ipoteza 2.3.1.

Următorul rezultat a fost obţinut de Manu [85] şi arată că g-$\mathcal{PR}$ este păstrată prin operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$, unde g satisface Ipoteza 2.3.1. Pentru $(A, B) = (1, -1)$ (adică pentru $g(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $\zeta \in U$), rezultatul a fost obţinut de Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge în [46, Teorema 2.1] (a se vedea de asemenea [50], pentru $\alpha = 0$). În [11], Chirilă a obţinut această proprietate pentru $(A, B) = (1, 2\gamma - 1)$, unde $0 < \gamma < 1$ (adică pentru $g(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1+(2\gamma-1)\zeta}$, $\zeta \in U$, $0 < \gamma < 1$; a se vedea de asemenea [12], pentru $\alpha = 0$).

Teorema 2.3.2. *Presupunem că Ipotezele 2.2.7 şi 2.3.1 au loc. Fie $f \in S_g^0$. Atunci $F = \Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ aparţine familiei $S_g^0(\mathbb{B}^n)$.*

În capitolul următor, vom prezenta câteva consecinţe ale acestui rezultat principal.

2.3.2 Operatorul de extensie $\Phi_{n,Q}$ şi g-reprezentarea parametrică

În această parte vom arăta că g-$\mathcal{PR}$ este păstrată prin operatorul de extensie $\Phi_{n,Q}$ definit în Definiţia 2.2.12, unde g satisface condiţiile Ipotezei 2.3.1.

Următoarea proprietate obţinută de Manu [86] demonstrează că conceptul de g-$\mathcal{RP}$ este păstrată prin operatorul de extensie $\Phi_{n,Q}$, unde g satisface condiţiile Ipotezei 2.3.1. Cazuri particulare ale acestui rezultat au fost obţinute de Kohr [75] şi Chirilă [12].

Pentru $(A, B) = (1, -1)$, rezultatul de mai jos revine la [75, Teorema 2.1], obţinută de Kohr. Pentru $(A, B) = (1, 2\gamma - 1)$, unde $\gamma \in (0, 1)$, rezultatul se reduce la [12, Teorema 3.1], obţinută de Chirilă. Reamintim că Q este un polinom omogen ce îndeplineşte condiţiile din Ipoteza 2.2.11.

Teorema 2.3.3. *Presupunem că Ipotezele 2.2.11 şi 2.3.1 sunt satisfăcute. Fie $f \in S_g^0$. Dacă $\|Q\| \leq \frac{A-B}{4(1+|B|)}$, atunci $F = \Phi_{n,Q}(f)$ aparţine familiei $S_g^0(\mathbb{B}^n)$.*

În capitolul următor, vom include câteva consecinţe ale acestui rezultat principal.

Capitolul 3

Stelaritate şi aproape stelaritate de tip Janowski

În acest capitol, vom studia câteva subclase de aplicaţii normate şi biolomorfe care au proprietăţi geometrice şi admit g-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$. Ne vom referi la clasa aplicaţiilor g-stelate, clasa aplicaţiilor g-aproape stelate de ordin α şi clasa aplicaţiilor spiralate de tipul γ pe $\mathbb{B}^n$. Vom prezenta anumite proprietăţi de conservare privind aceste clase şi operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$. O parte importantă a acestui capitol este dedicată stelarităţii şi aproape stelarităţii de tip Janowski. Vom arăta legătura dintre acest tip de stelaritate şi g-stelaritate. Vom demonstra că stelaritatea şi aproape stelaritatea de tip Janowski se păstrează prin operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$. Ne vom referi la raze de univalenţă privind stelaritatea de tip Janowski. Vom prezenta teoreme de deformare şi distorsiune pentru subclase de aplicaţii care admit g-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$.

Principalele surse bibliografice folosite sunt [68], [109], [110], [46], [37], [55], [11], [21], [14], [12], şi de asemenea [63], [56], [57].

Rezultatele originale prezentate în acest capitol au fost obţinute în [85], [86].

În acest capitol vom utiliza prescurtările prezentate în Notaţia 1.7.1. Aşadar, vom folosi următoarele abrevieri: $\mathcal{LL}$ pentru lanţ(uri) Loewner, $\mathcal{EDL}$ pentru ecuaţia diferenţială Loewner şi $\mathcal{RP}$ pentru reprezentarea parametrică. De asemenea, vom folosi prescurtările: g-$\mathcal{LL}$ pentru g-lanţ(uri) Loewner, g-$\mathcal{RP}$ pentru g-reprezentarea parametrică.

3.1 Subclase de aplicaţii biolomorfe care admit g-reprezentare parametrică

Vom prezenta anumite subclase de aplicaţii care admit g-$\mathcal{RP}$ pe $\mathbb{B}^n$. Vom arăta că aceste aplicaţii pot fi caracterizate folosind g-LL. Ne vom referi la rezultate de conservare privind aceste clase şi operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$. Aceste rezultate au fost obţinute de Manu în [85, 86].

3.1.1 Rezultate preliminare

Vom considera că Ipoteza 2.1.6 este satisfăcută.

Graham, Hamada şi Kohr [37], respectiv Hamada şi Honda [55] au introdus noţiunea de g-stelaritate. Alte proprietăţi privind acest concept pot fi găsite în [56], [57], şi de asemenea în [11], [12], [14]. Generalizări ale acestei noţiuni la spaţii Banach complexe au fost obţinute în [64].

Definiţia 3.1.1. Fie $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$. Spunem că aplicaţia f este *g-stelată* pe $\mathbb{B}^n$ dacă

$$\langle [Df(z)]^{-1}f(z), \frac{z}{\|z\|^2}\rangle \in g(U),\ \forall z \in \mathbb{B}^n\setminus\{0\}.$$

Fie $S_g^*(\mathbb{B}^n)$ clasa aplicaţiilor g-stelate pe $\mathbb{B}^n$. Pentru $n = 1$, vom nota S_g^* în loc de $S_g^*(U)$.

În următoarea observaţie, vom ilustra legătura dintre g-stelaritate şi stelaritatea clasică pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [37], [55]).

Observaţia 3.1.2. Presusupunem că $\gamma \in [0, 1)$.

(i) Dacă $g(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $\zeta \in U$, atunci $S_g^*(\mathbb{B}^n) = S^*(\mathbb{B}^n)$.

(ii) Dacă $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $\zeta \in U$, atunci $S_g^*(\mathbb{B}^n) = S_\gamma^*(\mathbb{B}^n)$.

(iii) Dacă $g(\zeta) = \frac{1+(1-2\gamma)\zeta}{1-\zeta}$, $\zeta \in U$, atunci $S_g^*(\mathbb{B}^n) = \mathcal{A}S_\gamma^*(\mathbb{B}^n)$.

Chirilă T. [14] a demonstrat că aplicaţiile g-stelate pe $\mathbb{B}^n$ aparţin familiei $S_g^0(\mathbb{B}^n)$.

Teorema 3.1.3. *Fie $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$. Atunci condiţia $f \in S_g^*(\mathbb{B}^n)$ este echivalentă cu faptul că aplicaţia $e^t f(z)$ este un g-$\mathcal{LL}$. Prin urmare, orice aplicaţie din clasa $S_g^*(\mathbb{B}^n)$ admite g-$\mathcal{RP}$.*

Conceptul de g-aproape stelaritate de ordin α a fost introdus de Chirilă [14].

Definiţia 3.1.4. Fie $0 \le \alpha < 1$. Presupunem că $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$. Spunem că aplicaţia f este *g-aproape stelată de ordin α* pe $\mathbb{B}^n$ dacă

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\left\langle [Df(z)]^{-1}f(z), \frac{z}{\|z\|^2}\right\rangle - \alpha\right) \in g(U),\ z \in \mathbb{B}^n\setminus\{0\}.$$

Clasa aplicaţiilor g-aproape stelate de ordin α pe $\mathbb{B}^n$ este notată cu $\mathcal{A}S_g^*(\mathbb{B}^n)$, iar pentru $n = 1$ cu $\mathcal{A}S_g^*$.

Următoarea observaţie ilustrează legătura dintre clasa $\mathcal{A}S_g^*(\mathbb{B}^n)$ şi subclase de aplicaţii binecunoscute pe $\mathbb{B}^n$ (see [14]).

Observaţia 3.1.5. Fie $0 \le \alpha < 1$ şi $0 < \gamma < 1$.

(i) Dacă $g(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $\zeta \in U$, atunci $\mathcal{A}S_g^*(\mathbb{B}^n) = \mathcal{A}S^*(\mathbb{B}^n)$.

(ii) Dacă $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $\zeta \in U$, atunci $\mathcal{A}S_g^*(\mathbb{B}^n)$ se reduce la familia $\mathcal{A}S_{\alpha,\gamma}^*(\mathbb{B}^n)$.

(iii) $\mathcal{A}S_g^*(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathcal{A}S_\alpha^*(\mathbb{B}^n)$.

(iv) Dacă $\alpha = 0$, atunci $\mathcal{A}S_g^*(\mathbb{B}^n) = S_g^*(\mathbb{B}^n)$.

Următorul rezultat obţinut de Chirilă [14] prezintă caracterizarea aplicaţiilor din clasa $\mathcal{A}S_g^*(\mathbb{B}^n)$ folosind g-$\mathcal{LL}$.

Teorema 3.1.6. *Fie $0 \le \alpha < 1$ şi fie $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$. Atunci condiţia $f \in \mathcal{A}S_g^*(\mathbb{B}^n)$ este echivalentă cu faptul că aplicaţia $e^{\frac{1}{1-\alpha}t}f(e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}t}z)$ este un g-$\mathcal{LL}$. Prin urmare, orice aplicaţie din clasa $\mathcal{A}S_g^*(\mathbb{B}^n)$ admite g-$\mathcal{RP}$.*

În continuare, vom prezenta definiţia noţiunii de g-spiralitate de tipul γ pe $\mathbb{B}^n$, $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ introdusă de Chirilă [14].

Definiţia 3.1.7. Fie $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Presupunem că $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$. Spunem că aplicaţia f este *g-spiralită de tipul* γ pe $\mathbb{B}^n$ dacă

$$i\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} + \frac{e^{-i\gamma}}{\cos\gamma}\left\langle [Df(z)]^{-1}f(z), \frac{z}{\|z\|^2}\right\rangle \in g(U),\ z \in \mathbb{B}^n\setminus\{0\}.$$

Vom nota clasa aplicaţiilor g-spiralate de tipul γ pe $\mathbb{B}^n$ cu $\hat{S}_g(\mathbb{B}^n)$. Pentru $n = 1$, vom nota $\hat{S}_g$ în loc de $\hat{S}_g(U)$.

În următoarea observaţie, vom prezenta legătura dintre clasele $\hat{S}_g(\mathbb{B}^n)$ şi $\hat{S}_\gamma(\mathbb{B}^n)$, precum şi alte proprietăti (a se vedea [14]).

Observaţia 3.1.8. Fie $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $0 < \alpha < 1$.

(i) Dacă $g(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $\zeta \in U$, atunci $\hat{S}_g(\mathbb{B}^n) = \hat{S}_\gamma(\mathbb{B}^n)$.

(ii) Dacă $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\alpha)\zeta}$, $\zeta \in U$, atunci $\hat{S}_g(\mathbb{B}^n)$ se reduce la clasa $\hat{S}_{\gamma,\alpha}(\mathbb{B}^n)$.

(iii) $\hat{S}_g(\mathbb{B}^n) \subseteq \hat{S}_\gamma(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea Definiţia 1.6.13, pentru $A = e^{-i\gamma}I$, unde $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$).

(iv) Pentru $\gamma = 0$, $\hat{S}_g(\mathbb{B}^n)$ se reduce la clasa $S_g^*(\mathbb{B}^n)$.

Vom prezenta caracterizarea conceptului de g-spiralitate de tipul γ pe $\mathbb{B}^n$, $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, folosind g-$\mathcal{LC}$. Acest rezultat a fost obţinut în lucrarea [14].

Teorema 3.1.9. *Fie $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi fie $f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n)$. Atunci condiţia $f \in \hat{S}_g(\mathbb{B}^n)$ este echivalentă cu faptul că aplicaţia $e^{(1-ia)t}f(e^{iat}z)$ este un g-$\mathcal{LC}$, unde $a = \tan\gamma$. Prin urmare, orice aplicaţie din clasa $\hat{S}_g(\mathbb{B}^n)$ admite g-$\mathcal{PR}$.*

3.1.2 Operatori de extensie care păstrează proprietăţi geometrice ale unor aplicaţii care admit g-reprezentare parametrică

Vom demonstra că operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$, definiţi în Capitolul 2 (a se vedea Definiţia 2.2.6 şi Definiţia 2.2.12) păstrează g-stelaritatea, g-aproape stelaritatea de ordin α şi g-spiralitatea de tipul γ, unde funcţia g satisface Ipoteza 2.3.1.

În continuare, vom considera că Ipoteza 2.3.1 are loc.

Fie operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ dat de Definiţia 2.2.6 şi fie operatorul de extensie $\Phi_{n,Q}$ dat de Definiţia 2.2.12.

Pe baza Teoremei 2.3.2 şi a caracterizării g-stelarităţii cu g-$\mathcal{LC}$, se obţine următorul rezultat datorat lui Manu [85]:

Teorema 3.1.10. *Presupunem că Ipotezele 2.2.7 şi 2.3.1 sunt satisfăcute. Dacă $f \in S_g^*$, atunci $F = \Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in S_g^*(\mathbf{B}^n)$.*

Următoarele observaţii rezultă din Teorema 3.1.10, pentru o alegere convenabilă a parametrilor A şi B din definiţia funcţiei g menţionată în Ipoteza 2.3.1.

Observaţia 3.1.11. Presupunem că $g : U \to \mathbb{C}$ satisface Ipoteza 2.3.1.

(i) Pentru $(A, B) = (1, -1)$, deducem că $S_g^*(\mathbb{B}^n) = S^*(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*) \subset S^*(\mathbb{B}^n)$. Această proprietate a fost obţinută de Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge [46].

(ii) Fie $\gamma \in (0,1)$. Pentru $(A,B) = (1, 2\gamma - 1)$, deducem că $S_g^*(\mathbb{B}^n) = S_\gamma^*(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S_\gamma^*) \subset S_\gamma^*(\mathbb{B}^n)$. Acest rezultat a fost obţinut de Hamada, Kohr şi Kohr [63], pentru $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, şi de Liu [80], atunci când condiţiile din Ipoteza 2.2.7 au loc şi $\gamma \in (0,1)$. Chirilă T. [11] a obţinut acelaşi rezultat folosind o altă metodă.

Următorul rezultat a fost obţinut de Manu [85] şi este o consecinţă a Teoremei 2.3.2.

Teorema 3.1.12. *Presupunem că Ipotezele 2.2.7 şi 2.3.1 au loc. Fie* $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$. *Dacă* $f \in \hat{S}_g$, *atunci* $F = \Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in \hat{S}_g(\mathbb{B}^n)$.

Următoare proprietatea a fost obţinută de Manu după publicarea lucrării [85].

Teorema 3.1.13. *Presupunem că Ipotezele 2.2.7 şi 2.3.1 sunt satisfăcute. Fie* $0 \le \gamma < 1$. *Dacă* f *este o funcţie* g*-aproape stelată de ordin* γ *pe* U, *atunci* $F = \Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ *este o aplicaţie* g*-aproape stelată de ordin* γ *pe* $\mathbb{B}^n$.

În continuare, vom prezenta câteva consecinţe ale celor două rezultate anterioare.

Observaţia 3.1.14. Fie g o funcţie ce satisface Ipoteza 2.3.1. De asemenea, fie $\delta \in (0,1)$. Dacă $A = 1$ şi $B = 2\delta - 1$, atunci următoarele proprietăţi au loc:

(i) Fie $\gamma \in [0,1)$. Atunci operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ păstrează aproape stelaritatea de ordin γ şi tipul δ. (a se vedea [11]).

(ii) Fie $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$. Atunci operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ păstrează spiralitatea de tipul γ şi ordin δ. Acest rezultat a fost obţinut de Liu şi Liu [82] (a se vedea de asemenea [80], [11]).

În cele ce urmează, vom demonstra că g-stelaritatea şi g-spiralitatea de tipul γ sunt păstrate prin operatorul de extensie $\Phi_{n,Q}$, unde g este o funcţie ce satisface condiţiile Ipotezei 2.3.1.

Pe baza faptului că orice aplicaţie g-stelată admite g-$\mathcal{RP}$, deducem următorul rezultat de conservare obţinut de Manu [86]. Reamintim că Q este un polinom omogen care îndeplineşte condiţiile Ipotezei 2.2.11.

Teorema 3.1.15. *Presupunem că Ipotezele 2.2.11 şi 2.3.1 au loc. Fie* $f \in S_g^*$. *Dacă* $\|Q\| \le \frac{A-B}{4(1+|B|)}$, *atunci* $F = \Phi_{n,Q}(f) \in S_g^*(\mathbb{B}^n)$.

Acest rezultat este o consecinţă a Teoremei 2.3.3. Vom prezenta câteva cazuri particulare în observaţia de mai jos.

Observaţia 3.1.16. Fie g o funcţie care îndeplineşte condiţiile Ipotezei 2.3.1.

(i) Pentru $(A,B) = (1,-1)$, deducem că $S_g^*(\mathbb{B}^n) = S^*(\mathbb{B}^n)$. Kohr G. a demonstrat următoarea proprietate: $\Phi_{n,Q}(S^*) \subset S^*(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea de asemenea [71]).

(ii) Fie $\gamma \in (0,1)$. Pentru $(A,B) = (1, 2\gamma - 1)$, deducem că $S_g^*(\mathbb{B}^n) = S_\gamma^*(\mathbb{B}^n)$. Prin urmare, $\Phi_{n,Q}(S_\gamma^*) \subset S_\gamma^*(\mathbb{B}^n)$. Acest rezultat a fost obţinut de Wang şi Liu [116] (a se vedea de asemenea [12]).

Manu A. [86] a arătat că g-spiralitatea de tipul γ, unde $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este păstrată prin operatorul $\Phi_{n,Q}(f)$.

Teorema 3.1.17. *Presupunem că Ipotezele 2.2.11 şi 2.3.1 sunt satisfăcute. Fie* $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *şi fie* $f \in \hat{S}_g$. *Dacă* $\|Q\| \le \frac{A-B}{4(1+|B|)}$, *atunci* $F = \Phi_{n,Q}(f) \in \hat{S}_g(\mathbb{B}^n)$.

3.2 Stelaritate şi aproape stelaritate de tip Janowski

În această secţiune, vom studia două subclase de funcţii care admit g-$\mathcal{RP}$ pe U şi au proprietăţi geometrice interesante: clasa funcţiilor stelate de tip Janowski şi clasa funcţiilor aproape stelate de tip Janowski pe U. Ne vom referi la generalizarea acestor două clase la bila unitate $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Vom ilustra legătura dintre acest tip de stelaritate şi g-stelaritate, unde funcţia g satisface Ipoteza 2.3.1. Vom demonstra că (aproape) stelaritatea de tip Janowski este păstrată prin operatorii de extensie: $\Phi_{n,\alpha,\beta}$, $\Phi_{n,Q}$. Rezultatele originale prezentate în această secţiune a fost obţinute în [85, 86].

Mai multe detalii privind stelaritatea de tip Janowski pe discul unitate U pot fi găsite în [68], [109], [110], iar pe $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$, în [21].

3.2.1 Rezultate preliminare

Vom defini mai întâi conceptul de stelaritate de tip Janowski pe U. Fie $-1 \le B < A \le 1$.

În cele ce urmează, vom considera $g : U \to \mathbb{C}$ satisfăcând Ipoteza 2.3.1.

W. Janowski [68] a introdus următoarea mulţime:

$$\mathcal{J}^{[A,B]} = \left\{ f \in H(U) : f \text{ normată}, \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec g \right\} \tag{3.2.1}$$

Observăm că $\mathcal{J}^{[1,-1]}$ revine la clasa S^* şi $\mathcal{J}^{[1-2\alpha,-1]}$ se reduce la clasa S^*_α, unde $0 \le \alpha < 1$.

Fie $a, b \in R$ astfel încât $|1-a| < b \le a$. Considerăm următoarele clase:

$$\mathcal{J}^{(a,b)} = \left\{ f \in H(U) : f \text{ normată}, \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - a \right| < b,\ z \in U \right\},$$

definită de Silverman [109] (a se vedea de asemenea [110]) şi

$$\mathcal{AJ}^{(a,b)} = \left\{ f \in H(U) : f \text{ normată}, \left| \frac{f(z)}{zf'(z)} - a \right| < b,\ z \in U \right\},$$

definită de Curt [21].

În următoarea observaţie obţinută de Manu [85], considerăm că g satisface Ipoteza 2.3.1. Vom ilustra legătura dintre clasa S^*_g şi clasele $\mathcal{J}^{[A,B]}$, $\mathcal{J}^{(a,b)}$.

Observaţia 3.2.1. Atunci

(i) $S^*_g = \{f \in H(U) : f \text{ normată}, f(z)/(zf'(z)) \prec g,\ z \in U\}$.

(ii) $\mathcal{J}^{[-B,-A]} = S^*_g$.

(iii) $S^*_g = \mathcal{J}^{(a,b)}$, unde $a = \frac{1-AB}{1-A^2}$, $b = \frac{A-B}{1-A^2}$ şi $A \ne 1$. Pentru $A = 1$, deducem că $S^*_g = S^*_{(1+B)/2}$.

Extinderea claselor $\mathcal{J}^{(a,b)}$ şi $\mathcal{AJ}^{(a,b)}$ la bila unitate $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}$ a fost definită de Curt [21] şi este prezentată în următoarea definiţie.

Definiţia 3.2.2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $|1-a| < b \le a$. Fie

$$\mathcal{J}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n) = \left\{ f \in \mathcal{L}S_n : \left| \frac{\|z\|^2}{\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle} - a \right| < b,\ z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \right\},$$

clasa *aplicaţiilor stelate de tip Janowski* pe $\mathbb{B}^n$ şi fie

$$\mathcal{AJ}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n) = \left\{ f \in \mathcal{L}S_n : \left| \frac{\langle [Df(z)]^{-1}f(z), z\rangle}{\|z\|^2} - a \right| < b,\ z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \right\},$$

clasa *aplicaţiilor aproape stelate de tip Janowski* pe $\mathbb{B}^n$.

Observăm că $\mathcal{J}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$ şi $\mathcal{AJ}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$ sunt subclase ale familiei $S^*(\mathbb{B}^n)$.

În continuare, vom arăta legătura dintre clasele $\mathcal{J}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$, $\mathcal{AJ}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$ şi familia $S_g^*(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea [21]).

Observaţia 3.2.3. Presupunem că Ipoteza 2.3.1 are loc. Fie $a, b \in R$ astfel încât $|1-a| < b \le a$. Atunci

(i) $S_g^*(\mathbb{B}^n) = \mathcal{J}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$, pentru $A = \frac{a-1}{b}$ şi $B = \frac{a^2-b^2-a}{b}$.

(ii) $S_g^*(\mathbb{B}^n) = \mathcal{AJ}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$, pentru $A = \frac{a-a^2+b^2}{b}$ şi $B = \frac{1-a}{b}$.

(iii) Fie $\alpha \in (0,1)$, $a = \frac{1}{2\alpha}$ şi $b = \frac{1}{2\alpha}$. Atunci

$$\mathcal{AJ}^{\left(\frac{1}{2\alpha},\frac{1}{2\alpha}\right)}(\mathbb{B}^n) = S_\alpha^*(\mathbb{B}^n) \text{ şi } \mathcal{J}^{\left(\frac{1}{2\alpha},\frac{1}{2\alpha}\right)}(\mathbb{B}^n) = \mathcal{A}S_\alpha^*(\mathbb{B}^n).$$

3.2.2 Operatori de extensie şi aplicaţii stelate şi aproape stelate de tip Janowski

În cele ce urmează, vom arată că operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$ păstrează (aproape) stelaritatea de tip Janowski. Aceste rezultate au fost obţinute de Manu în [85, 86].

Fie operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ dat de Definiţia 2.2.6 şi fie operatorul $\Phi_{n,Q}$ dat de Definiţia 2.2.12.

Vom considera următoarea ipoteza:

Ipoteza 3.2.4. Fie $a, b \in R$ astfel încât $|1-a| < b \le a$.

Dacă g satisface Ipoteza 2.3.1, atunci pentru o alegere convenabilă a parametrilor A şi B obţinem următoarele cazuri particulare ale Teoremei 3.1.10. Aceste proprietăţi au fost demonstrate de Manu [85].

Teorema 3.2.5. *Presupunem că Ipotezele 2.2.7 şi 3.2.4 au loc. Fie $f \in \mathcal{J}^{(a,b)}$. Atunci $F = \Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ aparţine familiei $\mathcal{J}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$.*

Teorema 3.2.6. *Presupunem că Ipotezele 2.2.7 şi 3.2.4 au loc. Fie $f \in \mathcal{AJ}^{(a,b)}$. Atunci $F = \Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ aparţine familiei $\mathcal{AJ}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$.*

Următoarele două rezulate obţinute de Manu [86] sunt consecinţe directe ale Teoremei 3.1.15. Reamintim că Q este un polinom omogen ce îndeplineşte condiţiile Ipotezei 2.2.11.

Teorema 3.2.7. *Presupunem că Ipotezele 2.2.11 şi 3.2.4 sunt satisfăcute. Fie $f \in \mathcal{J}^{(a,b)}$. Dacă $\|Q\| \le \frac{b^2-(1-a)^2}{4(b+|a^2-b^2-a|)}$, atunci $F = \Phi_{n,Q}(f)$ este o aplicaţie din clasa $\mathcal{J}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$.*

Teorema 3.2.8. *Presupunem că Ipotezele 2.2.11 şi 3.2.4 sunt satisfăcute. Fie $f \in \mathcal{AJ}^{(a,b)}$. Dacă $\|Q\| \le \frac{b-|1-a|}{4}$, atunci $F = \Phi_{n,Q}(f)$ este o aplicaţie din clasa $\mathcal{AJ}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$.*

3.3 Raze de univalenţă şi stelaritate de tip Janowski

În această secţiune vom prezenta câ teva raze de univalenţă privind operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi stelaritatea de tip Janowski pe U. Presupunem că Ipoteza 3.2.4 are loc. Vom determina raza Janowski $\mathcal{J}^{(a,b)}$ a claselor S şi S^*. Totodată, vom calcula raza Janowski $\mathcal{J}^{(a,b)}$ a claselor $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$ şi $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*)$. Aceste rezultate au fost obţinute de Manu [85]. Vom menţiona şi alte cazuri particulare.

Fie $r \in (0,1]$. Considerăm că Ipoteza 3.2.4 este satisfăcută.

Fie bila deschisă: $\mathbb{B}^n_r = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < r\}$. Vom nota cu $\mathcal{L}S(\mathbb{B}^n_r)$ clasa aplicaţiilor normate şi local biolomorfe pe $\mathbb{B}^n_r$.

Fie

$$\mathcal{J}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n_r) = \left\{ f \in \mathcal{L}S(\mathbb{B}^n_r) : \left| \frac{\|z\|^2}{\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle} - a \right| < b, z \in \mathbb{B}^n_r \setminus \{0\} \right\}.$$

Pentru $n = 1$, vom nota $\mathcal{J}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n_r)$ cu $\mathcal{J}^{(a,b)}(U_r)$.

Considerăm $f_r(\zeta) = f(r\zeta)/r$, $\zeta \in U$. Folosind proprietatea obţinută de Graham, Hamadam Kohr şi Suffridge [46]:

$$\Phi_{n,\alpha,\beta}(f_r)(z) = \frac{1}{r}\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)(rz), \ z \in \mathbb{B}^n, \tag{3.3.1}$$

deducem următoarele relaţii:

Observaţia 3.3.1. Considerăm că Ipotezele 2.2.7 şi 3.2.4 au loc.

(i) Dacă $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in \mathcal{J}^{(a,b)}(B^n_r)$, atunci $f \in J^{(a,b)}(U_r)$, pentru orice $0 < r < 1$.

(ii) Dacă $f \in \mathcal{J}^{(a,b)}(U_r)$, atunci $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in \mathcal{J}^{(a,b)}(B^n_r)$, pentru orice $0 < r < 1$.

Vom nota cu $r_{a,b}$ raza Janowski $\mathcal{J}^{(a,b)}$ a clasei S şi cu $r^*_{a,b}$ raza Janowski $\mathcal{J}^{(a,b)}$ a clasei S^*, definite astfel (a se vedea [110]):

Definiţia 3.3.2. Raza Janowski $r_{a,b}$ (respectiv $r^*_{a,b}$) reprezintă cea mai mare rază a discului $U(0, r_{a,b})$ (respectiv $U(0, r^*_{a,b})$) astfel încât următoarea relaţie:

$$\left| zf'(z)/f(z) - a \right| < b, \tag{3.3.2}$$

are loc pe discul $U(0, r_{a,b})$ (respectiv $U(0, r^*_{a,b})$) pentru orice funcţie f din S (respectiv S^*).

În continuare vom determina razele $r_{a,b}$ şi $r^*_{a,b}$. Următorul rezultat deduce valoarea razei $r_{a,b}$ şi a fost demonstrat de Manu [85].

Teorema 3.3.3. *Considerăm că Ipoteza 3.2.4 are loc. Atunci raza $r_{a,b}$ este dată de următoarea expresie*

$$r_{a,b} = \min\left\{ \tanh\frac{\pi}{4}, \frac{-1+a+b}{1+a+b}, \frac{1-a+b}{1+a-b} \right\}. \tag{3.3.3}$$

Vom prezenta un caz particular al Teoremei 3.3.3:

Corolarul 3.3.4. **[85]** *Atunci $r_{a,a} = \frac{2a-1}{2a+1}$, pentru $a \in (1/2, r)$, şi $r_{a,a} = \tanh\frac{\pi}{4}$, pentru $a \geq r$, unde $r = \frac{1}{2}\cdot e^{\pi/2}$.*

În următorul rezultat vom determina raza $r^*_{a,b}$. Acest rezultat a fost obţinut de Manu [85].

Teorema 3.3.5. *Considerăm că Ipoteza 3.2.4 are loc. Raza $r^*_{a,b}$ este dată de următoarea expresie*

$$r^*_{a,b} = \min\left\{\frac{-1+a+b}{1+a+b}, \frac{1-a+b}{1+a-b}\right\}. \tag{3.3.4}$$

Mai mult, $r^*_{a,a} = \frac{2a-1}{2a+1}$.

Pe baza Observaţiei 3.2.3 (iii), în cazul $n = 1$, şi a Corolarului 3.3.4, deducem următoarele rezultate (a se vedea [85]):

Observaţia 3.3.6. Fie $\alpha \in (0,1)$. Vom nota cu q_α (q^*_α) raza de aproape stelaritate de ordin α a clasei S (respectiv S^*).

(i) Dacă $0 < \alpha \leq e^{-\pi/2}$, atunci $q_\alpha = \tanh\frac{\pi}{4}$. Pentru $e^{-\pi/2} < \alpha < 1$, deducem că $q_\alpha = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$.

(ii) $q^*_\alpha = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$.

În următoarea definiţie, considerăm că Ipoteza 3.2.4 are loc. Vom nota cu $r_{a,b}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S))$ (respectiv $r_{a,b}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*))$) raza Janowski $\mathcal{J}^{(a,b)}$ a clasei $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$ (respectiv $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*)$).

Definiţia 3.3.7. Raza Janowski $r_{a,b}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S))$ ($r_{a,b}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*))$) este raza $r \in (0,1]$ a celei mai mari bile $\mathbb{B}^n_r$ cu proprietatea că dacă $F \in \Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$ (respectiv $F \in \Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*)$) atunci $F \in \mathcal{J}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n_r)$.

Următorul rezulat obţinut de Manu [85] determină raza $r_{a,b}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S))$.

Teorema 3.3.8. *Presupunem că Ipotezele 2.2.7 şi 3.2.4 au loc. Atunci raza $r_{a,b}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S))$ este dată de relaţia* (3.3.3).

Vom prezenta câteva consecinţe ale Teoremei 3.3.8 obţinute de Manu [85]. Fie $q_\lambda(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S))$ (respectiv $q_\lambda(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*))$) raza de aproape stelaritate de ordin λ a clasei $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$ (respectiv $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*)$), unde $\lambda \in (0,1)$.

Teorema 3.3.9. *Presupunem că Ipotezele 2.2.7 şi 3.2.4 au loc. Fie $\lambda \in (0,1)$.*

(i) Atunci raza $r_{a,b}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*))$ este dată de relaţia (3.3.4).

(ii) Dacă $0 < \lambda \leq e^{-\pi/2}$ atunci $q_\lambda(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)) = \tanh\frac{\pi}{4}$. Pentru $e^{-\pi/2} < \lambda < 1$, deducem că $q_\lambda(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$. Mai mult, $q_\lambda(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*)) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$.

3.4 Teoreme de deformare şi distorsiune pentru subclase ale familiei $S_g^0(\mathbb{B}^n)$

În această secţiune, vom prezenta teoreme de deformare si distorsiune pentru anumite familii de aplicaţii care admit *g-RP* pe $\mathbb{B}^n$ generate de operatorul de extensie $\Phi_{n,Q}$, unde g satisface Ipoteza 2.3.1. Rezultatele originale prezentate în această secţiune au fost obţinute de Manu în [86].

Considerăm că Ipoteza 2.3.1 are loc.

3.4.1 Teoreme de deformare

În continuare, ne vom referi la teoreme de deformare pentru anumite subclase ale familiei $\Phi_{n,Q}(S_g^0)$, unde g satisface Ipoteza 2.3.1.

Vom prezenta o teorema de deformare pentru clasa $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ obţinută de Graham, Hamada şi Kohr [37]. Acest rezultat este mai general decât Teorema 2.3 din [73].

Teorema 3.4.1. *Presupunem că Ipoteza 2.3.1 are loc. Fie $F \in S_g^0(\mathbb{B}^n)$. Atunci*

$$\|z\| \exp \int_0^{\|z\|} \Big[1/\max\{g(x), g(-x)\} - 1\Big] \frac{dx}{x} \leq \|F(z)\| \tag{3.4.1}$$

$$\leq \|z\| \exp \int_0^{\|z\|} \Big[1/\min\{g(x), g(-x)\} - 1\Big] \frac{dx}{x}, \; z \in \mathbb{B}^n.$$

Următorul rezultat prezintă o teoremă de deformare pentru clasa $\Phi_{n,Q}(S_g^0)$ şi a fost obţinut de Manu [86].

Teorema 3.4.2. *Presupunem că Ipotezele 2.2.11 şi 2.3.1 au loc. Fie $\|Q\| \leq \frac{A-B}{4(1+|B|)}$ şi fie f o funcţie care admite g-$\mathcal{RP}$ pe U. Fie $F = \Phi_{n,Q}(f)$.*

(i) Pentru $A = 0$, următoarele estimări au loc

$$\|z\|e^{B\|z\|} \leq \|F(z)\| \leq \|z\|e^{-B\|z\|}, \; \forall z \in \mathbb{B}^n. \tag{3.4.2}$$

(ii) Pentru $A \neq 0$, următoarele estimări au loc

$$\|z\| \left(1 + A\|z\|\right)^{\frac{B-A}{A}} \leq \|F(z)\| \leq \|z\| \left(1 - A\|z\|\right)^{\frac{B-A}{A}}, \; \forall z \in \mathbb{B}^n. \tag{3.4.3}$$

Inegalităţile (3.4.2) *şi* (3.4.3) *sunt exacte.*

În continuare, ne vom referi la anumite consecinţe ale Teoremei 3.4.2. Prima consecinţă reprezintă o teoremă de deformare a clasei $\Phi_{n,Q}(S_g^*)$ şi a fost obţinută de Manu [86] (a se vedea de asemenea [21]).

Corolarul 3.4.3. *Considerăm că Ipotezele 2.2.11 şi 2.3.1 au loc. Presupunem că $\|Q\| \leq \frac{A-B}{4(1+|B|)}$ şi $f \in S_g^*$. Fie $F = \Phi_{n,Q}(f)$.*

(i) Pentru $A = 0$, următoarele estimări au loc

$$\|z\|e^{B\|z\|} \leq \|F(z)\| \leq \|z\|e^{-B\|z\|}, \; \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

(ii) Pentru $A \neq 0$, următoarele estimări au loc

$$\|z\|\Big(1 + A\|z\|\Big)^{(B-A)/A} \leq \|F(z)\| \leq \|z\|\Big(1 - A\|z\|\Big)^{(B-A)/A}, \; \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

Următoarele două rezultate reprezintă teoreme de deformare pentru clasele: $\Phi_{n,Q}(\mathcal{J}^{(a,b)})$, $\Phi_{n,Q}(\mathcal{AJ}^{(a,b)})$, şi au fost obţinute de Manu [86] (a se vedea de asemenea [21]).

Corolarul 3.4.4. *Considerăm că Ipotezele 2.2.11 şi 3.2.4 sunt satisfăcute. Presupunem că $\|Q\| \leq \frac{b^2-(1-a)^2}{4(b+|a^2-b^2-a|)}$ şi $f \in \mathcal{J}^{(a,b)}$. Fie $c = b^2 - (a-1)^2$ şi $F = \Phi_{n,Q}(f)$.*

(i) Pentru $a = 1$, următoarele inegalităţi au loc

$$\|z\|e^{-b\|z\|} \leq \|F(z)\| \leq \|z\|e^{b\|z\|}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

(ii) Pentru $a \neq 1$, următoarele inegalităţi au loc

$$\|z\|\Big(1 - \frac{1-a}{b}\|z\|\Big)^{c/(1-a)} \leq \|F(z)\| \leq \|z\|\Big(1 + \frac{1-a}{b}\|z\|\Big)^{c/(1-a)}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

Corolarul 3.4.5. *Considerăm că Ipotezele 2.2.11 şi 3.2.4 au loc. Presupunem că $\|Q\| \leq \frac{b-|1-a|}{4}$ şi $f \in \mathcal{AJ}^{(a,b)}$. Fie $c = b^2 - (a-1)^2$ şi $F = \Phi_{n,Q}(f)$.*

(i) Pentru $a = \frac{1+\sqrt{4b^2+1}}{2}$, următoarele inegalităţi au loc

$$\|z\|e^{\frac{1-\sqrt{4b^2+1}}{2b}\|z\|} \leq \|F(z)\| \leq \|z\|e^{\frac{\sqrt{4b^2+1}-1}{2b}\|z\|}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n. \tag{3.4.4}$$

(ii) Pentru $a \neq \frac{1+\sqrt{4b^2+1}}{2}$, următoarele inegalităţi au loc

$$\begin{aligned} \|z\|\Big(1 + \|z\|(a - a^2 + b^2)/b\Big)^{c/(a^2-b^2-a)} &\leq \|F(z)\| \\ \leq \|z\|\Big(1 - \|z\|(a - a^2 + b^2)/b\Big)^{c/(a^2-b^2-a)}&, \ \forall z \in \mathbb{B}^n. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

Vom prezenta câteva consecinţe directe ale Teoremei 3.4.2 şi ale Corolarului 3.4.3. Prima consecinţă prezentată mai jos a fost obţinută de Kohr (a se vedea [75, Corolarul 2.4]):

Observaţia 3.4.6. Considerăm că Ipoteza 2.2.11 este satisfăcută. Fie $\|Q\| \leq \frac{1}{4}$ şi $f \in S$ ($f \in S^*$). Atunci, pentru $F = \Phi_{n,Q}(f)$, următoarele inegalităţi au loc

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leq \|F(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

Pe baza Observaţiei 3.2.3 (iii), în cazul $n = 1$, deducem următoarea consecinţă a Corolariilor 3.4.4 şi 3.4.5:

Observaţia 3.4.7. Fie $\alpha \in (0,1)$. Considerăm că Ipoteza 2.2.11 este satisfăcută.

(i) Presupunem că $\|Q\| \leq \frac{1-|2\alpha-1|}{8\alpha}$ şi $f \in S_\alpha^*$. Fie $F = \Phi_{n,Q}(f)$. Atunci (a se vedea [18, 70]; a se vedea de exemplu [48, Capitolul 10]):

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^{2(1-\gamma)}} \leq \|F(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^{2(1-\gamma)}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

Aceste estimări sunt exacte.

(ii) Presupunem că $\|Q\| \leq \frac{1-\alpha}{4}$ şi $f \in \mathcal{AS}_\alpha^*$. Fie $F = \Phi_{n,Q}(f)$. (a se vedea [21], [71] pentru $\alpha = \frac{1}{2}$):

(a) Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$, următoarele inegalităţi au loc

$$\|z\|e^{-\|z\|} \leq \|F(z)\| \leq \|z\|e^{\|z\|}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

(b) Pentru $\alpha \neq \frac{1}{2}$, următoarele inegalităţi au loc

$$\frac{\|z\|}{(1-(2\alpha-1)\|z\|)^{2(\alpha-1)/(2\alpha-1)}} \leq \|F(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1+(2\alpha-1)\|z\|)^{2(\alpha-1)/(2\alpha-1)}},$$

pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$.

Aceste inegalităţi sunt exacte.

3.4.2 Teoreme de distorsiune

În continuare, ne vom referi la teoreme de distorsiune pentru anumite subclase ale familiei $\Phi_{n,Q}(S_g^*)$, unde g satisface Ipoteza 2.3.1.

Considerăm că Ipoteza 2.3.1 are loc.

Vom prezenta o teoremă de distorsiune a clasei S_g^*. Fie $\varphi : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă pe U, care satisface următoarele proprietăţi: Re $\varphi(\zeta) > 0$, $\zeta \in U$, $\varphi(U)$ este un domeniu simetric în raport cu axa reală şi $\varphi(U)$ este un domeniu stelat în raport cu $\varphi(0) = 1$. De asemenea, presupunem că $\varphi'(0) > 0$.

Fie mulţimea $S^*(\varphi) = \{f \in S : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi\}$ introdusă de Ma şi Minda [84]. Observăm că $S_g^* = S^*(g)$, pe baza faptului că g îndeplineşte aceleaşi proprietăţi ca şi funcţia φ.

Vom prezenta un caz particular al Teoremei 2 din lucrarea [84] obţinut de Ma şi Minda.

Lema 3.4.8. *Considerăm că Ipoteza 2.3.1 este satisfăcută. Fie $f \in S_g^*$.*

(i) Pentru $B = 0$, următoarea relaţie are loc

$$(1 - A|z|)e^{-A|z|} \leq |f'(z)| \leq (1 + A|z|)e^{A|z|}, \ \forall z \in U. \tag{3.4.6}$$

(ii) Pentru $B \neq 0$, următoarea relaţie are loc

$$(1 - A|z|)(1 - B|z|)^{\frac{A}{B}-2} \leq |f'(z)| \leq (1 + A|z|)(1 + B|z|)^{\frac{A}{B}-2}, \ \forall z \in U. \tag{3.4.7}$$

Aceste relaţii sunt exacte.

Presupunând că Ipoteza 2.2.11 are loc şi $f \in \mathcal{L}S$, deducem că

$$\det D\Phi_{n,Q}(f)(z) = [f'(z_1)]^{\frac{n+1}{2}}, \ z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{B}^n. \tag{3.4.8}$$

Vom da estimări pentru $\det D\Phi_{n,Q}(f)(z)$, unde f aparţine clasei S_g^*. Acest rezultat a fost demonstrat de Manu [86].

Teorema 3.4.9. *Presupunem că Ipotezele 2.2.11 şi 2.3.1 au loc. Fie $f \in S_g^*$ şi $d(z) = \det D\Phi_{n,Q}(f)(z)$, $z \in \mathbb{B}^n$.*

(i) Pentru $B = 0$, următoarele estimări au loc

$$\left[(1 - A\|z\|)e^{-A\|z\|}\right]^{\frac{n+1}{2}} \leq |d(z)| \leq \left[(1 + A\|z\|)e^{A\|z\|}\right]^{\frac{n+1}{2}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n. \tag{3.4.9}$$

(ii) Pentru $B \neq 0$, următoarele estimări au loc

(3.4.10)
$$\left[(1-A\|z\|)(1-B\|z\|)^{\frac{A}{B}-2}\right]^{\frac{n+1}{2}} \leq |d(z)| \leq \left[(1+A\|z\|)(1+B\|z\|)^{\frac{A}{B}-2}\right]^{\frac{n+1}{2}},$$

pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$.

Aceste estimări sunt exacte.

Următoarele două rezultate sunt consecinţe ale Teoremei 3.4.9 şi au fost demonstrate de Manu [86].

Corolarul 3.4.10. *Presupunem că Ipotezele 2.2.11 şi 3.2.4 sunt satisfăcute. Fie $d(z) = \det D\Phi_{n,Q}(f)(z)$, unde $z \in \mathbb{B}^n$ şi $f \in \mathcal{J}^{(a,b)}$.*

(i) Pentru $a = \frac{1+\sqrt{1+4b^2}}{2}$, următoarele estimări au loc

$$\left[\left(1+\frac{1-\sqrt{1+4b^2}}{2b}\|z\|\right)e^{\frac{1-\sqrt{1+4b^2}}{2b}\|z\|}\right]^{\frac{n+1}{2}} \leq |d(z)|$$
$$\leq \left[\left(1+\frac{\sqrt{1+4b^2}-1}{2b}\|z\|\right)e^{\frac{\sqrt{1+4b^2}-1}{2b}\|z\|}\right]^{\frac{n+1}{2}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

(ii) Pentru $a \neq \frac{1+\sqrt{1+4b^2}}{2}$, următoarele estimări au loc

$$\left[\left(1+\frac{1-a}{b}\|z\|\right)\left(1+\frac{b^2-a^2+a}{b}\|z\|\right)^{\frac{a-1}{a^2-b^2-a}-2}\right]^{\frac{n+1}{2}} \leq |d(z)|$$
$$\leq \left[\left(1+\frac{a-1}{b}\|z\|\right)\left(1+\frac{a^2-b^2-a}{b}\|z\|\right)^{\frac{a-1}{a^2-b^2-a}-2}\right]^{\frac{n+1}{2}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

Aceste estimări sunt exacte.

Corolarul 3.4.11. *Considerăm că Ipotezele 2.2.11 şi 3.2.4 au loc. Fie $d(z) = \det D\Phi_{n,Q}(f)(z)$, unde $z \in \mathbb{B}^n$ şi $f \in \mathcal{AJ}^{(a,b)}$.*

(i) Pentru $a = 1$, următoarele relaţii au loc

(3.4.11)
$$\left[(1-b\|z\|)e^{-b\|z\|}\right]^{\frac{n+1}{2}} \leq |d(z)| \leq \left[(1+b\|z\|)e^{b\|z\|}\right]^{\frac{n+1}{2}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

(ii) Pentru $a \neq 1$, următoarele relaţii au loc

(3.4.12)
$$\left[\left(1+\frac{a^2-b^2-a}{b}\|z\|\right)\left(1+\frac{a-1}{b}\|z\|\right)^{\frac{b^2-a^2+a}{1-a}-2}\right]^{\frac{n+1}{2}} \leq |d(z)|$$
$$\leq \left[\left(1+\frac{b^2-a^2+a}{b}\|z\|\right)\left(1+\frac{1-a}{b}\|z\|\right)^{\frac{b^2-a^2+a}{1-a}-2}\right]^{\frac{n+1}{2}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

Vom prezenta un caz particular al Teoremei 3.4.9 obţinut de Manu [86].

Corolarul 3.4.12. *Fie $f \in S^*$. Atunci*

$$\left[\frac{1-\|z\|}{(1+\|z\|)^3}\right]^{\frac{n+1}{2}} \leq |\det D\Phi_{n,Q}(f)(z)| \leq \left[\frac{1+\|z\|}{(1-\|z\|)^3}\right]^{\frac{n+1}{2}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

Pe baza Corolariilor 3.4.10, 3.4.11, deducem următoarele rezultate obţinute de Manu [86]:

Corolarul 3.4.13. *Fie* $0 < \alpha < 1$.

(i) Fie $f \in S^*_\alpha$.

(a) Dacă $\alpha = \frac{1}{2}$, *atunci*

$$\left[(1-\|z\|)e^{-\|z\|}\right]^{\frac{n+1}{2}} \leq |\det D\Phi_{n,Q}(f)(z)| \leq \left[(1+\|z\|)e^{\|z\|}\right]^{\frac{n+1}{2}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

(b) Dacă $\alpha \neq \frac{1}{2}$, *atunci*

$$\left[(1-\|z\|)(1-(2\alpha-1)\|z\|)^{\frac{1}{2\alpha-1}-2}\right]^{\frac{n+1}{2}} \leq |\det D\Phi_{n,Q}(f)(z)|$$
$$\leq \left[(1+\|z\|)(1+(2\alpha-1)\|z\|)^{\frac{1}{2\alpha-1}-2}\right]^{\frac{n+1}{2}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

(ii) Fie $f \in \mathcal{A}S^*_\alpha$. *Atunci*

$$\left[(1+(2\alpha-1)\|z\|)(1+\|z\|)^{2\alpha-3}\right]^{\frac{n+1}{2}} \leq |\det D\Phi_{n,Q}(f)(z)|$$
$$\leq \left[(1-(2\alpha-1)\|z\|)(1-\|z\|)^{2\alpha-3}\right]^{\frac{n+1}{2}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n.$$

Toate aceste inegalităţi sunt exacte.

În cele ce urmează, ne vom referi la rezultate de distorsiune de-a lungul unui vector unitate în $\mathbb{C}^n$ pentru anumite subclase de aplicaţii care admit g-$\mathcal{RP}$ pe $\mathbb{B}^n$ generate de operatorul $\Phi_{n,Q}$. Aceste teoreme de distorsiune au fost obţinute de Manu [86].

Fie $f \in S^*_g$ şi $F = \Phi_{n,Q}(f) \in S^*_g(\mathbb{B}^n)$. Atunci, deducem că $[DF(z)]^{-1}F(z) \neq 0$, pentru $z \neq 0$. În acest caz, pentru $z \in \mathbb{B}^n \backslash \{0\}$, putem construi următorul vector de norma 1

$$v(z) = \frac{[DF(z)]^{-1}F(z)}{\|[DF(z)]^{-1}F(z)\|}. \tag{3.4.13}$$

Observăm că această proprietate este adevărată si pentru o funcţie din clasa $\mathcal{J}^{(a,b)}$ sau din clasa $\mathcal{A}\mathcal{J}^{(a,b)}$.

Manu A. [86] a demonstrat următorul rezultat de distorsiune pentru clasa $\Phi_{n,Q}(S^*_g)$. Un rezultat similar a fost obţinut de Curt [21, Teorema 3.8] pentru întreaga clasă $S^*_g(\mathbb{B}^n)$, unde g satisface 2.3.1.

Teorema 3.4.14. *Considerăm că Ipotezele 2.2.11 şi 2.3.1 au loc. Presupunem că* $\|Q\| \leq \frac{A-B}{4(1+|B|)}$. *Fie* $f \in S^*_g$ *şi* $G(z) = D\Phi_{n,Q}(f)(z)v(z)$, *unde* v *este dat de relaţia* (3.4.13).

Dacă $A \neq 0$, *atunci*

$$\|G(z)\| \leq \frac{1-B\|z\|}{(1-A\|z\|)^{2-B/A}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n \backslash \{0\}. \tag{3.4.14}$$

Dacă $A = 0$, *atunci*

$$\|G(z)\| \leq (1-B\|z\|) \cdot e^{-B\|z\|}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n \backslash \{0\}. \tag{3.4.15}$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

Vom prezenta două consecinţe ale Teoremei 3.4.14 obţinute de Manu [86] (a se vedea de asemenea [21]).

Corolarul 3.4.15. *Considerăm că Ipotezele 2.2.11 şi 3.2.4 sunt satisfăcute. Presupunem că* $\|Q\| \leq \frac{b^2-(1-a)^2}{4(b+|a^2-b^2-a|)}$. *Fie* $f \in \mathcal{J}^{(a,b)}$ *şi* $G(z) = D\Phi_{n,Q}(f)(z)v(z)$, *unde* v *este dat de relaţia* (3.4.13).

Dacă $a \neq 1$, *atunci*

$$\|G(z)\| \leq \frac{1 + \frac{b^2-a^2+a}{b}\|z\|}{\left(1 + \frac{1-a}{b}\|z\|\right)^{2-\frac{a^2-b^2-a}{a-1}}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n\backslash\{0\}.$$

Dacă $a = 1$, *atunci*

$$\|G(z)\| \leq (1 + b\|z\|)e^{b\|z\|}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n\backslash\{0\}.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

Corolarul 3.4.16. *Considerăm că Ipotezele 2.2.11 şi 3.2.4 au loc. Presupunem că* $\|Q\| \leq \frac{b-|1-a|}{4}$. *Fie* $f \in \mathcal{AJ}^{(a,b)}$ *şi* $G(z) = D\Phi_{n,Q}(f)(z)v(z)$, *unde* v *este dat de relaţia* (3.4.13).

Dacă $a \neq \frac{1+\sqrt{4b^2+1}}{2}$, *atunci*

$$\|G(z)\| \leq \frac{1 - \frac{1-a}{b}\|z\|}{\left(1 - \frac{b^2-a^2+a}{b}\|z\|\right)^{2-\frac{1-a}{b^2-a^2+a}}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n\backslash\{0\}.$$

Dacă $a = \frac{1+\sqrt{4b^2+1}}{2}$, *atunci*

$$\|G(z)\| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{4b^2+1}-1}{2b}\|z\|\right) \cdot e^{\frac{\sqrt{4b^2+1}-1}{2b}\|z\|}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n\backslash\{0\}.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

În continuare, presupunem că Ipoteza 2.2.11 are loc. Vom prezenta anumite consecinţe ale Teoremei 3.4.14 obţinute de Manu [86] (a se vedea de asemenea [21]).

Corolarul 3.4.17. *Fie* $z \in \mathbb{B}^n\backslash\{0\}$. *Fie* $f \in S^*$ *şi* $\|Q\| \leq \frac{1}{4}$. *Considerăm că* $G(z) = D\Phi_{n,Q}(f)(z)v(z)$, *unde* v *este dat de relaţia* (3.4.13). *Atunci*

$$\|G(z)\| \leq \frac{1 + \|z\|}{(1 - \|z\|)^3}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n\backslash\{0\}.$$

Această estimare este exactă.

Fie $\alpha \in (0, 1)$. Pe baza Corolariilor 3.4.15, 3.4.16 şi a Observaţiei 3.2.3 (iii), în cazul $n = 1$, deducem următoarele consecinţe obţinute de Manu [86] (a se vedea de asemenea [21]):

Corolarul 3.4.18. *(i) Presupunem că* $\|Q\| \leq \frac{1-|2\alpha-1|}{8\alpha}$ *şi* $f \in S^*_\alpha$. *Fie* $G(z) = D\Phi_{n,Q}(f)(z)v(z)$, *unde* v *este dat de relaţia* (3.4.13).

Atunci

$$\|G(z)\| \leq \frac{1 - (2\alpha - 1)\|z\|}{(1 - \|z\|)^{3-2\alpha}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n\backslash\{0\}.$$

(ii) Presupunem că $\|Q\| \leq \frac{1-\alpha}{4}$ *şi* $f \in \mathcal{A}S^*_\alpha$. *Fie* $G(z) = D\Phi_{n,Q}(f)(z)v(z)$, *unde* v *este dat de relaţia* (3.4.13).

Dacă $\alpha = \frac{1}{2}$, *atunci*

$$\|G(z)\| \leq (1+\|z\|)e^{\|z\|}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n \backslash \{0\}.$$

Dacă $\alpha \neq \frac{1}{2}$, *atunci*

$$\|G(z)\| \leq \frac{1+\|z\|}{(1+(2\alpha-1)\|z\|)^{2-\frac{1}{2\alpha-1}}}, \ \forall z \in \mathbb{B}^n \backslash \{0\}.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

Capitolul 4

Stelaritate de tip Janowski cu coeficienţi complecşi

În acest capitol, ne vom referi la conceptul de g-reprezentare parametrică, g-lanţuri Loewner şi g-stelaritate, unde $g : U \to \mathbb{C}$ este o funcţie univalentă, $g(0) = 1$ şi $\mathrm{Re}g(\zeta) > 0$, $\zeta \in U$. Aceste noţiuni au fost introduse pe spaţii Banach de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [44]. Fie operatorii de extensie: $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$. Graham I., Hamada H. , Kohr G. şi Kohr M. [44] au arătat că g-reprezentarea parametrică şi g-stelaritatea sunt păstrate prin cei doi operatori de extensie. Pe baza rezultatului de păstrare a g-stelarităţii, vom demonstra că (aproape) stelaritatea de tip Janowski cu coeficienţi complecşi este pştrată prin aceşti operatori de extensie. Acest tip de stelaritate cu coeficienţi complecşi a fost introdus de Curt în lucrarea [22]. Proprietăţile de conservare amintite anterior generalizează rezultatele obţinute în [85, 86], care se referă la stelaritatea de tip Janowski cu coeficienţi reali.

În ultima parte a acestui capitol, vom studia păstrarea g-reprezentării parametrice prin operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge Ψ_n $(n \geq 2)$, unde funcţia g satisface Ipoteza 2.3.1. Pentru $n = 2$, vom considera un lanţ Loewner particular, $F(z,t) : \mathbb{B}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^3$, al cărui prim element este $\Psi_2(f)$, unde $f \in S^0(\mathbb{B}^2)$. Ne vom referi la lanţul Loewner $F(z,t)$ din demonstraţia Teoremei 2.1 [53], pentru $n = 2$. Vom determina expresia câmpului vectorial Herglotz, $H(z,t)$, asociat lui $F(z,t)$, acesta fiind un prim pas în abordarea problemei legate de conservarea g-reprezentării parametrice prin operatorul Ψ_n, pentru cazul general $n \geq 2$. Studiul efectiv al acestei probleme va fi adresat într-o lucrare viitoare. Vom menţiona câteva proprietăţi importante ale operatorului de extensie Ψ_n $(n \geq 2)$.

Rezultatele originale menţionate în acest capitol au fost obţinute în [87]. Principalele surse bibliografice folosite pentru prima parte a capitolului sunt [44], [45], [22], iar pentru cea de-a doua parte sunt [53], [41], [45].

În acest capitol vom utiliza prescurtările prezentate în Notaţia 1.7.1. Aşadar, vom folosi următoarele abrevieri: $\mathcal{LL}$ pentru lanţ(uri) Loewner, $\mathcal{EDL}$ pentru ecuaţia diferenţială Loewner şi $\mathcal{RP}$ pentru reprezentarea parametrică. De asemenea, vom folosi prescurtările: g-$\mathcal{LL}$ pentru g-lanţ(uri) Loewner, g-$\mathcal{RP}$ pentru g-reprezentarea parametrică.

4.1 Rezultate preliminare

Vom considera următoarea funcţie definită pe discul unitate U (a se vedea [44]):

Ipoteza 4.1.1. Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă pe U cu proprietatea că $g(0) = 1$ şi $\mathrm{Re}g(\zeta) > 0$, $\zeta \in U$.

Observăm că funcţia din ipoteza de mai sus este mai generală decât funcţia menţionată în Ipoteza 2.1.6. Această funcţie a fost considerată în lucrarea [44] pentru a introduce conceptul de g-$\mathcal{RP}$ pe bila unitate a unui spaţiu complex Banach.

Vom considera următoarea submulţime a clasei $\mathcal{M}$ (a se vedea [44]):

Definiţia 4.1.2.

$$\mathcal{M}_g = \left\{ h \in H(\mathbb{B}^n) : h(0) = 0, Dh(0) = I_n, \left\langle h(z), \frac{z}{\|z\|^2} \right\rangle \in g(U), z \in \mathbb{B}^n \right\},$$

unde g satisface Ipoteza 4.1.1.

În continuare, vom considera conceptul de g-$\mathcal{RP}$ descris în Definiţia 2.1.9 şi conceptul de g-$\mathcal{LL}$ definit în Definiţia 2.1.8, unde g satisface Ipoteza 4.1.1. Aceste generalizări au fost considerate de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr în lucrarea [44].

Un exemplu de funcţie care satisface condiţiile Ipotezei 4.1.1 este: $g(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $\zeta \in U$.

Fie operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ dat de Definiţia 2.2.6 şi fie operatorul de extensie Muir $\Phi_{n,Q}$ descris de Definiţia 2.2.12.

Recent, Graham I., Hamada H., Kohr G. şi Kohr M. [44] au arătat că g-$\mathcal{RP}$ şi g-stelaritatea sunt păstrate prin operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$, unde g este o funcţie convexă pe U, care satisface Ipoteza 4.1.1.

Teorema 4.1.3. **[44]** *Fie g o funcţie convexă pe U care satisface Ipoteza 4.1.1. Presupunem că Ipoteza 2.2.7 are loc şi $f \in S_g^0$. Atunci $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ aparţine familia $S_g^0(\mathbb{B}^n)$* .

Anumite cazuri particulare ale rezultatului de mai sus au fost obţinute până în acest moment în următoarele lucrări: [46] pentru $g(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $\zeta \in U$, (a se vedea Teorema 2.2.8 (i)), [11] pentru $g(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1+(2\gamma-1)\zeta}$, $\zeta \in U$, $\gamma \in (0,1)$ (a se vedea de asemenea [12], pentru $\alpha = 0$) şi [85], unde g satisface Ipoteza 2.3.1.

Vom nota cu $dist(1, \partial g(U))$ expresia: $\inf_{\zeta \in \partial g(U)} |\zeta - 1|$. Reamintim că Q este polinom omogen care îndeplineşte condiţiile din Ipoteza 2.2.11.

Teorema 4.1.4. **[44]** *Fie g o funcţie convexă pe U care satisface Ipoteza 4.1.1. Presupunem că $f \in S_g^0$ şi că Ipoteza 2.2.11 este satisfăcută. Dacă $\|Q\| \le dist(1, \partial g(U))/4$, atunci $\Phi_{n,Q}(f)$ aparţine familiei $S_g^0(\mathbb{B}^n)$.*

Cazuri particulare ale acestui rezultat au fost obţinute în lucrările: [75], pentru $g(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $\zeta \in U$, [12] pentru $g(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1+(2\gamma-1)\zeta}$, $\zeta \in U$, $\gamma \in (0,1)$ şi [86], pentru o funcţie g care satisface Ipoteza 2.3.1.

Vom prezenta două proprietăţi de conservare studiate în [44] privind g-stelaritatea.

Teorema 4.1.5. **[44]** *Fie g o funcţie convexă pe U care îndeplineşte condiţiile Ipotezei 4.1.1. Presupunem că Ipoteza 2.2.7 are loc şi $f \in S_g^*$. Atunci $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ aparţine familiei $S_g^*(\mathbb{B}^n)$.*

Această proprietate generalizează rezultatele prezentate în Observaţia 3.1.11 şi Teoremă 3.1.10.

Teorema 4.1.6. **[44]** *Fie g o funcţie convexă pe U care îndeplineşte condiţiile Ipotezei 4.1.1. Presupunem că Ipoteza 2.2.11 are loc şi $f \in S_g^*$. Dacă $\|Q\| \le dist(1, \partial g(U))/4$, atunci $\Phi_{n,Q}(f)$ aparţine familiei $S_g^*(\mathbb{B}^n)$.*

Proprietăţile prezentate în Observaţia 3.1.16 şi Teorema 3.1.15 sunt cazuri particulare ale acestui rezultat.

Fie următoarea funcţie $g : U \to \mathbb{C}$ considerată de Curt în lucrarea [22], care satisface Ipoteza 4.1.1.

Ipoteza 4.1.7. Fie $A, B \in \mathbb{C}$, $A \neq B$. Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă cu parte reală pozitivă pe U definită prin:

$$g(\zeta) = \frac{1 + A\zeta}{1 + B\zeta}, \ \zeta \in U. \tag{4.1.1}$$

Dacă impunem condiţia ca funcţia g din Ipoteza 4.1.7 sa aibă parte reală pozitivă pe U, atunci parametrii A şi B trebuie să satisfacă o serie de condiţii, pe care le vom prezenta în următoarea observaţie datorată lui Curt [22].

Observaţia 4.1.8. **[22]** Dacă Ipoteza 4.1.7 are loc, atunci una din condiţiile de mai jos are loc:

$$|B| < 1, \ |A| \leq 1 \text{ şi } \mathrm{Re}(1 - A\overline{B}) \geq |A - B|, \tag{4.1.2}$$

sau

$$|B| = 1, \ |A| \leq 1 \text{ şi } -1 \leq A\overline{B} < 1. \tag{4.1.3}$$

Considerăm următoarea ipoteză:

Ipoteza 4.1.9. Fie $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $|1 - a| < b \leq \mathrm{Re}\ a$.

În lucrarea [22], autoarea a considerat următoarele subclase ale familiei $S^*(\mathbb{B}^n)$:

Definiţia 4.1.10. Presupunem că Ipoteza 4.1.9 este satisfăcută. Fie următoarele clase

$$\mathcal{J}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n) = \left\{ f \in \mathcal{L}S_n : \left| \frac{\|z\|^2}{\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle} - a \right| < b, \ z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \right\},$$

şi

$$\mathcal{AJ}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n) = \left\{ f \in \mathcal{L}S_n : \left| \frac{\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle}{\|z\|^2} - a \right| < b, \ z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \right\}.$$

Aceste clase reprezintă familia aplicaţiilor stelate de tip Janowski pe $\mathbb{B}^n$, respectiv familia aplicaţiilor aproape stelate de tip Janowski pe $\mathbb{B}^n$, şi sunt o generalizare a familiilor de aplicaţii prezentate în Definiţia 3.2.2. Observăm că pentru $a \in \mathbb{R}$ (sau echivalent $\mathrm{Re}\ a = a$), aceste clase se reduc la familiile introduse de Curt [21] din Definiţia 3.2.2.

În cazul $n = 1$, vom nota $\mathcal{J}^{(a,b)}$ în loc de $\mathcal{J}^{(a,b)}(U)$, respectiv $\mathcal{AJ}^{(a,b)}$ în loc de $\mathcal{AJ}^{(a,b)}(U)$.

Următoarea observaţie obţinută de Curt [22] prezintă legătura dintre g-stelaritate şi (aproape) stelaritate de tip Janowski pe $\mathbb{B}^n$, unde g satisface Ipoteza 4.1.7.

Observaţia 4.1.11. **[22]** Considerăm că Ipoteza 4.1.9 are loc.

(i) Pentru $g(\zeta) = \frac{1+(\overline{a}-1)/b\zeta}{1+(|a|^2-b^2-a)/b\zeta}$, $\zeta \in U$, $S_g^*(\mathbb{B}^n)$ revine la clasa $\mathcal{J}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$.

(ii) Pentru $g(\zeta) = \frac{1+(a-|a|^2+b^2)/b\zeta}{1+(1-\overline{a})/b\zeta}$, $\zeta \in U$, $S_g^*(\mathbb{B}^n)$ se reduce la clasa $\mathcal{AJ}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$.

(iii) Pentru $b = a \in R$ $(b > 0)$, deducem că

$$\mathcal{AJ}^{(b,b)}(\mathbb{B}^n) = S^*_{\frac{1}{2b}}(\mathbb{B}^n) \text{ şi } \mathcal{J}^{(b,b)}(\mathbb{B}^n) = \mathcal{A}S^*_{\frac{1}{2b}}(\mathbb{B}^n).$$

4.2 Operatori de extensie şi stelaritate de tip Janowski cu coeficienţi complecşi

În această secţiune vom arăta că (aproape) stelaritatea de tip Janowski cu coeficienţi complecşi este păstrată prin operatorii de extensie: $\Phi_{n,\alpha,\beta}$, $\Phi_{n,Q}$. Aceste proprietăţi generalizează rezultatele obţinute în [85, 86], privind stelaritatea de tip Janowski cu coeficienţi reali. Rezultatele originale care sunt prezentate în această secţiune au fost obţinute în [87].

Fie $n \geq 2$.

Fie operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta} : \mathcal{L}S \to \mathcal{L}S_n$ dat de Definiţia 2.2.6 şi fie operatorul de extensie $\Phi_{n,Q} : \mathcal{L}S \to \mathcal{L}S_n$ dat de Definiţia 2.2.12.

Vom da un rezultat util obţinut de Manu [87], care a fost folosit pentru demonstrarea unor proprietăţi pe care urmează sa le prezentăm.

Observaţia 4.2.1. Presupunem că Ipoteza 4.1.7 are loc. Atunci $dist(1, \partial g(U)) = \frac{|A-B|}{1+|B|}$.

Următorul rezultat obţinut de Manu [87] este o consecinţă a Teoremei 4.1.5 şi a Observaţiei 4.1.11, şi arată că operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ păstrează (aproape) stelaritatea de tip Janowski cu coeficienţi complecşi de la U la $\mathbb{B}^n$. Acest rezultat generalizează Teoremele 3.2.5, 3.2.6 (a se vedea de asemenea [85]).

Teorema 4.2.2. *Dacă Ipotezele 2.2.7 şi 4.1.9 sunt satisfăcute, atunci următoarele relaţii au loc:*

(i) Fie $f \in \mathcal{J}^{(a,b)}$. Atunci $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ aparţine familiei $\mathcal{J}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$,

(ii) Fie $f \in \mathcal{AJ}^{(a,b)}$. Atunci $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ aparţine familiei $\mathcal{AJ}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$.

Pe baza Teoremei 4.1.5 şi a Observaţiei 4.1.11, deducem că următoarele rezultate au loc. Primul rezultat arată că operatorul $\Phi_{n,Q}$ păstrează stelaritatea de tip Janowski cu coeficienţi complecşi.

Teorema 4.2.3. *Presupunem că Ipotezele 2.2.11 şi 4.1.9 au loc. Fie $f \in \mathcal{J}^{(a,b)}$. Dacă*

$$\|Q\| \leq \frac{b^2 - (1-a)(1-\overline{a})}{4(b + ||a|^2 - b^2 - a|)},$$

atunci $\Phi_{n,Q}(f) \in \mathcal{J}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$.

Pentru $a \in \mathbb{R}$, rezultatul anterior se reduce la Teorema 3.2.7 (a se vedea de asemenea [86]).

Cel de-al doilea rezultat arată că operatorul Muir $\Phi_{n,Q}$ păstrează aproape stelaritatea de tip Janowski cu coeficienţi complecşi.

Teorema 4.2.4. *Presupunem că Ipotezele 2.2.11 şi 4.1.9 sunt satisfăcute. Fie $f \in \mathcal{AJ}^{(a,b)}$. Dacă*

$$\|Q\| \leq \frac{b^2 - (1-a)(1-\overline{a})}{4(b + |1-\overline{a}|)},$$

atunci $\Phi_{n,Q}(f) \in \mathcal{AJ}^{(a,b)}(\mathbb{B}^n)$.

Dacă considerăm $a, b \in \mathbb{R}$ în Ipoteza 4.1.9, atunci rezultatul de mai sus se reduce la Teorema 3.2.8 (a se vedea de asemenea [86]).

4.3 Lanţuri Loewner şi câmpuri vectoriale Herglotz asociate cu operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge

În această secţiune, vom investiga următoarea proprietate privind operatorul Pfaltzgraff-Suffridge Ψ_n: dacă $f \in S_g^0$ atunci $\Psi_n(f)$ este primul element al unui g-$\mathcal{LL}$, $F(z,t)$, unde funcţia g satisface Ipoteza 2.3.1. Un prim pas în abordarea acestei probleme este determinarea expresiei câmpului vectorial Herglotz asociat lui $F(z,t)$. Vom trata mai departe cazul $n = 2$. Vom obţine expresia unui câmp vectorial Herglotz $H(z,t)$ asociat unui $\mathcal{LL}$ particular, $F(z,t) : \mathbb{B}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^3$, care are proprietatea că $F(\cdot, 0) = \Psi_2(f)$, unde $f \in S^0(\mathbb{B}^2)$. Ne vom referi la $\mathcal{LL}$, $F(z,t)$, menţionat în demonstraţia Teoremei 2.1 [53], în cazul $n = 2$. Expresia lui $H(z,t)$ a fost obţinută pentru cazul general $n \geq 2$ de Hamada, Kohr şi Muir în lucrarea [65], unde autorii au considerat L^d-lanţuri Loewner. Vom aborda problema păstrării g-$\mathcal{RP}$ prin operatorul Ψ_n, $n \geq 2$, într-o lucrare viitoare. Vom prezenta de asemenea proprietăţi importante satisfăcute de operatorul Ψ_n $(n \geq 2)$.

Principalele surse bibiliografice folosite pentru pregătirea acestei secţiuni sunt [53], [41], [45].

Vom considera următorul operator de extensie:

Definiţia 4.3.1. Fie $\Psi_n : \mathcal{L}S_n \to \mathcal{L}S_{n+1}$ definit prin:

$$\Psi_n(f)(z) = \left(f(\tilde{z}), z_{n+1}[J_f(\tilde{z})]^{\frac{1}{n+1}}\right), \ z = (\tilde{z}, z_{n+1}) \in \mathbb{B}^{n+1}. \tag{4.3.1}$$

Alegem ramura funcţiei putere astfel încât

$$[J_f(\tilde{z})]^{\frac{1}{n+1}}\Big|_{\tilde{z}=0} = 1.$$

Operatorul Ψ_n a fost introdus de Pfaltzgraff şi Suffridge [99]. Observăm că $f \in S(\mathbb{B}^n) \to \Psi_n(f) \in S(\mathbb{B}^{n+1})$. Pentru $n = 1$, operatorul Ψ_1 revine la operatorul Φ_2 (a se vedea relaţia (2.2.1)).

Următorul rezultat arată că o aplicaţie normată şi biolomorfă care admite $\mathcal{RP}$ pe $\mathbb{B}^n$ poate fie extinsă la o aplicaţie cu aceleaşi proprietăţi pe $\mathbb{B}^{n+1}$. Acest rezultat a fost obţinut de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [53]. Graham I., Hamada H. şi Kohr G. [41] au obţinut aceeaşi proprietate într-un context mai general, respectiv pentru domenii mărginite şi simetrice, în cazul $n \geq 2$ (a se vedea de asemenea [38], [13]).

Teorema 4.3.2. *Dacă $f \in S^0(\mathbb{B}^n)$ atunci $\Psi_n(f) \in S^0(\mathbb{B}^{n+1})$.*

Următorul rezultat arată că stelaritatea este păstrată prin operatorul Ψ_n. Acest rezultat a fost obţinut de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [53] (a se vedea de asemenea [41]).

Teorema 4.3.3. *Fie $f \in S^*(\mathbb{B}^n)$. Atunci $\Psi_n(f)$ este o aplicaţie din familia $S^*(\mathbb{B}^{n+1})$.*

Vom da următoarea conjectură propusă de Pfaltzgraff şi Suffridge [99]:

Conjectura 4.3.4. *Fie $f \in K(\mathbb{B}^n)$. Atunci $\Psi_n(f) \in K(\mathbb{B}^{n+1})$.*

Un rezultat parţial al acestei conjecturi a fost obţinut de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff în [53]. Vom prezenta în continuare acest rezultat.

Fie $0 < a \leq 1$. De asemenea, fie

$$\Omega_{a,n} = \{z = (\tilde{z}, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_{n+1}|^2 < a^{\frac{2n}{n+1}}(1 - \|\tilde{z}\|^2)\}.$$

Observăm că $\Omega_{1,n} = \mathbb{B}^{n+1}$ şi $\Omega_{a,n} \subseteq \mathbb{B}^{n+1}$.

Teorema 4.3.5. *Fie $f \in K(\mathbb{B}^n)$ şi $a_1, a_2 > 0$ astfel încât $a_1 + a_2 \leq 1$. Atunci $\gamma\Psi_n(f)(z) + (1-\gamma)\Psi_n(f)(w)$ este un element din mulţimea $\Psi_n(f)(\Omega_{a_1+a_2,n})$, unde $z \in \Omega_{a_1,n}$, $w \in \Omega_{a_2,n}$ şi $\gamma \in [0,1]$.*

Următoarele rezultate de conservare au fost obţinute de Chirilă [13] (a se vedea de asemenea [41]).

Teorema 4.3.6. *(i) Fie $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $f \in \hat{S}_\gamma(\mathbb{B}^n)$. Atunci $F = \Psi_n(f) \in \hat{S}_\gamma(\mathbb{B}^{n+1})$.*

(i) Fie $\alpha \in [0,1)$ şi $f \in \mathcal{A}S^*_\alpha(\mathbb{B}^n)$. Atunci $F = \Psi_n(f) \in \mathcal{A}S^*_\alpha(\mathbb{B}^{n+1})$.

În rezultatul următor, vom determina expresia câmpului vectorial Herglotz $H(z,t)$ asociat cu $\mathcal{LC}$, $F(z,t) : \mathbb{B}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^3$, menţionat în demonstraţia Teoremei 2.1 din [53] pentru cazul $n = 2$ (a se vedea de asemenea [65], unde s-au considerat L^d-lanţuri Loewner şi $n \geq 2$). Existenţa şi unicitatea lui $H(z,t)$ este asigurată de Teorema 1.7.12.

Teorema 4.3.7. *Fie $n = 2$. Presupunem că $f \in S^0(\mathbb{B}^2)$. Fie $f_t(z)$ un $\mathcal{LC}$ astfel încât f reprezintă primul său element. Fie $F(z,t) : \mathbb{B}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^3$ un $\mathcal{LC}$ definit prin*

$$F(z,t) = \left(f_t(\tilde{z}), z_3 e^{\frac{t}{3}}[J_{f_t}(\tilde{z})]^{1/3}\right),\ z = (\tilde{z}, z_3) \in \mathbb{B}^3,\ t \geq 0, \tag{4.3.2}$$

unde am ales ramura funcţiei putere astfel încât $[J_{f_t}(\tilde{z})]^{1/3}\Big|_{\tilde{z}=0} = e^{\frac{2t}{3}}$. Mai mult, $F(z,0) = \Psi_2(f)(z)$, $z \in \mathbb{B}^3$. Atunci câmpul vectorial Herglotz $H(z,t) : \mathbb{B}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^3$ asociat lui $F(z,t)$ este dat de următoarea expresie

$$H(z,t) = \left(h(\tilde{z},t), \frac{z_3}{3}\left(1 + \frac{\partial h_1}{\partial z_1}(\tilde{z},t) + \frac{\partial h_2}{\partial z_2}(\tilde{z},t)\right)\right),$$

unde $z = (\tilde{z}, z_3) \in \mathbb{B}^3$, $\tilde{z} = (z_1, z_2)$, a.e. $t \geq 0$.

Concluzii

În această teză vom prezenta contribuţii noi în teoria funcţiilor univalente de una şi mai multe variabile complexe. Aceste rezultate le vom enumera în următoarele paragrafe.

Primul capitol conţine rezultate importante care sunt utile pentru capitolele următoare şi nu include rezultate originale.

Fie g o funcţie ce satisface Ipoteza 2.1.6.

În următoarele două capitole ne vom referi la: g-reprezentare parametrică introdusă în [37], g-stelaritate introdusă în [37, 55], g-aproape stelaritate de ordin $\alpha \in [0,1)$ şi g-spiralitate de tipul $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ introduse în [14] pe bila unitate Euclideană $\mathbb{B}^n$, unde funcţia g este definită ca mai sus.

Fie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ operatorul de extensie dat de Definiţia 2.2.6 şi fie $\Phi_{n,Q}$ operatorul de extensie Muir dat de Definiţia 2.2.12.

Alegem o funcţie particulară g descrisă de Ipoteza 2.3.1.

În **Capitolul 2**, vom demonstra că g-reprezentarea parametrică este păstrată prin operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$ în Teorema 2.3.2 şi Teorema 2.3.3, unde funcţia g satisface Ipoteza 2.3.1.

În **Capitolul 3**, vom arată că g-stelaritatea, g-aproape stelaritatea de ordin $\alpha \in [0,1)$ şi g-spiralitatea de tipul $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sunt păstrate prin operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$, unde g este dată de Ipoteza 2.3.1. Mai mult, vom arăta că $\Phi_{n,Q}$ păstrează g-stelaritatea şi g-spiralitatea de tipul $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, unde g este definită de Ipoteza 2.3.1. Aceste proprietăţi de conservare sunt prezentate în Teoremele 3.1.10, 3.1.12, 3.1.13, 3.1.15, 3.1.17.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $|1-a| < b \leq a$. Ne vom referi la clasele Janowski de funcţii stelate pe U, $\mathcal{J}^{(a,b)}$ (a se vedea [109]; a se vedea de asemenea [110]), şi $\mathcal{AJ}^{(a,b)}$ (a se vedea [21]). Vom prezenta generalizările acestor clase la bila unitate $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [21]). Aceste clase Janowski pot fi reduse la g-stelaritate pentru o alegere convenabilă a funcţiei g ce satisface Ipoteza 2.3.1, pentru $n \geq 1$. Vom demonstra că operatorii $\Phi_{n,\alpha,\beta}$, $\Phi_{n,Q}$ păstrează (aproape) stelaritatea de tip Janowski de la U la $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Aceste rezultate sunt prezentate în Teoremele 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8.

Vom determina raza Janowski $\mathcal{J}^{(a,b)}$ a claselor S, S^* în Teoremele 3.3.3 şi 3.3.5. Vom menţiona cazuri particulare ale acestor rezultate în Corolarul 3.3.4 şi Observaţia 3.3.6. Vom deduce raza Janowski $\mathcal{J}^{(a,b)}$ a claselor $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$ şi $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*)$ în Teoremele 3.3.8, 3.3.9. De asemenea, vom obţine raza de aproape stelaritate de ordin α, unde $\alpha \in (0,1)$, a claselor $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$ şi $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*)$ în Teorema 3.3.9.

Vom obţine teoreme de deformare pentru anumite familii de aplicaţii care admit g-reprezentare parametrică şi sunt generate prin operatorul $\Phi_{n,Q}$, unde g este dat de Ipoteza 2.3.1. Vom da teoreme de deformare pentru: clasa $\Phi_{n,Q}(S_g^0)$ în Teorema 3.4.2, clasa $\Phi_{n,Q}(S_g^*)$ în Corolarul 3.4.3 şi clasele $\Phi_{n,Q}(\mathcal{J}^{(a,b)})$, respectiv $\Phi_{n,Q}(\mathcal{AJ}^{(a,b)})$, prezentate în Corolariile 3.4.4, 3.4.5.

Vom furniza teoreme de distorsiune pentru anumite subclase ale familiei $\Phi_{n,Q}(S_g^*)$, unde g este dată de Ipoteza 2.3.1. Vom da estimări pentru $\det D\Phi_{n,Q}(f)(z)$, unde f aparţine fie clasei S_g^*, fie clasei $\mathcal{J}^{(a,b)}$ sau clasei $\mathcal{AJ}^{(a,b)}$ în Teorema 3.4.9, Corolarul 3.4.10, Corolarul 3.4.11. Câteva consecinţe ale acestor rezultate sunt prezentate în Corolarul 3.4.12, Corolarul 3.4.13. De asemenea, vom obţine teoreme de distorsiune de-a lungul unui vector unitate în $\mathbb{C}^n$ pentru anumite subclase ale familiei $\Phi_{n,Q}(S_g^*)$ în Teorema 3.4.14, Corolarul 3.4.15, Corolarul 3.4.16, şi o serie de consecinţe prezentate în Corolarul 3.4.17 şi Corolarul 3.4.18.

Aceste rezultate originale au fost obţinute în [85, 86], exceptând Teorema 3.1.13, care a fost demonstrată dupa publicarea lucrării [85].

În **Capitolul 4**, ne vom referi la o funcţie g mai generală, care satisface Ipoteza 4.1.1. Vom prezenta concepte precum: g-reprezentarea parametrică, g-lanţuri Loewner şi g-stelaritatea introduse în lucrarea [44] pe spaţii Banach, unde g este această funcţie generală. Vom considera o funcţie particulară g care îndeplineşte condiţiile Ipotezei 4.1.7.

Alegând convenabil parametrii A and B, putem stabili o legătură între g-stelaritate şi (aproape) stelaritate de tip Janowski cu coeficienţi complecşi. Acest tip de stelaritate a fost recent introdus în [22] şi generalizează (aproape) stelaritatea de tip Janowski cu coeficienţi reali definită de acelaşi autor în [21]. Pe baza legăturii dintre g-stelaritate şi (aproape) stelaritatea de tip Janowski, vom demonstra că (aproape) stelaritatea de tip Janowski cu coeficienţi complecşi este păstrată prin operatorii $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$ în Teoremele 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4 (a se vedea şi Observaţia 4.2.1). Rezultatele obţinute în [85, 86] privind (aproape) stelaritatea de tip Janowski cu coeficienţi reali şi care sunt prezentate în Capitolul 3, sunt consecinţe ale acestor proprietăţi.

Rezultatele originale incluse în acest capitol au fost obţinute în [87].

Fie Ψ_n operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge dat de Definiţia 4.3.1.

Fie $n = 2$ şi fie $f \in S^0(\mathbb{B}^2)$ astfel încât există un lanţ Loewner $f_t(z)$ cu proprietatea că $f_0(z) = f(z)$, $z \in \mathbb{B}^2$. Vom obţine expresia unui câmp vectorial Herglotz $H(z,t)$ a lanţului Loewner $F(z,t) : \mathbb{B}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^3$ definit prin

$$F(z,t) = \left(f_t(\tilde{z}), z_3 e^{\frac{t}{3}}[J_{f_t}(\tilde{z})]^{1/3}\right),\ z = (\tilde{z}, z_3) \in \mathbb{B}^3,\ t \geq 0.$$

Alegem ramura funcţiei putere astfel încât: $[J_{f_t}(\tilde{z})]^{1/3}\Big|_{\tilde{z}=0} = e^{\frac{2t}{3}}$. De asemenea, $F(z,0) = \Psi_2(f)(z)$, $z \in \mathbb{B}^3$. Lanţul Loewner $F(z,t)$ este menţionat în demonstraţia Teoremei 2.1 [53]. Vom obţine următoarea expresie a lui $H(z,t)$:

$$H(z,t) = \left(h(\tilde{z},t), \frac{z_3}{3}\left(1 + \frac{\partial h_1}{\partial z_1}(\tilde{z},t) + \frac{\partial h_2}{\partial z_2}(\tilde{z},t)\right)\right),$$

unde $h = (h_1, h_2)$ este câmpul vectorial Herglotz asociat lui $f_t(\tilde{z})$ şi $z = (\tilde{z}, z_3) \in \mathbb{B}^3$, $\tilde{z} = (z_1, z_2)$, pentru aproape orice $t \geq 0$. Acest rezultat a fost obţinut în Teorema 4.3.7 (a se vedea de asemenea [65, Teorema 6.3] pentru cazul general $n \geq 2$).

Concluzionând cele prezentate mai sus, precizăm că scopul acestei teze de doctorat este reprezentat de studiul unor proprietăţi de conservare privind operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$ şi anumite subclase ale familiei $S(\mathbb{B}^n)$ care admit g-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$, unde funcţia g satisface anumite condiţii. Mai mult, pe baza acestor proprietăţi de conservare, am studiat probleme privind raze de univalenţă şi am obţinut teoreme de deformare şi distorsiune. Rezultatele noi incluse în această teză au fost demonstrate folosind metode din teoria geometrică a funcţiilor de una şi mai multe variabile complexe, în mod special din teoria lanţurilor Loewner. De asemenea, am folosit metode din analiza funcţională şi din teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale (a se vedea [4]).

Direcţii de cercetare

În cele ce urmează vom prezenta direcţii de cercetare care pot fi abordate pentru a extinde rezultatele originale incluse în această teză. Direcţiile pe care le vom da se bazează în principal pe ideea de conservare a unor proprietăţi geometrice şi analitice ale unor clase de aplicaţii univalente prin operatori de extensie.

- În ultima parte a tezei, am prezentat clasele Janowski cu coeficienţi complecşi. Fie $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $|1-a| < b \leq \mathrm{Re}\ a$. Fie $\mathcal{J}^{(a,b)}$ ($\mathcal{AJ}^{(a,b)}$) clasa de funcţii (aproape) stelate de tip Janowski pe U. Fie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ operatorul de extensie dat de Definiţia 2.2.6 şi fie $\Phi_{n,Q}$ operatorul de extensie dat de Definiţia 2.2.12.

  Ar fi de interes să determinăm raza Janowski $\mathcal{J}^{(a,b)}$ a claselor S, S^*, precum si a claselor $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$, $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*)$. Menţionăm faptul că operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ păstrează clasele $\mathcal{J}^{(a,b)}$ şi $\mathcal{AJ}^{(a,b)}$ (a se vedea Teorema 4.2.2).

  De asemenea, s-ar putea obţine teoreme de deformare şi distorsiune similare celor prezentate în ultima secţiune a Capitolului 3 pentru următoarele clase: $\Phi_{n,\alpha,\beta}(\mathcal{J}^{(a,b)})$, $\Phi_{n,\alpha,\beta}(\mathcal{AJ}^{(a,b)})$, $\Phi_{n,Q}(\mathcal{J}^{(a,b)})$ şi $\Phi_{n,Q}(\mathcal{AJ}^{(a,b)})$.

- O generalizare interesantă a operatorului lui Muir a fost obţinută de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr în [44]. Fie Y un spaţiu Banach complex şi fie $P_k : Y \to \mathbb{C}$ un polinom omogen de grad k, unde $k \geq 2$. Fie Ω_k un domeniu definit astfel: $\{(z_1, z') \in \mathbb{C} \times Y : |z_1|^2 + \|z'\|_Y^k < 1\}$. Considerăm operatorul de extensie $\Phi_{P_k} : \mathcal{L}S \to \mathcal{L}S(\Omega_k)$ definit prin (see [44]):

  $$\Phi_{P_k}(f)(z) = (f(z_1) + P_k(z')f'(z_1), (f'(z_1))^{1/k}z'),\ z = (z_1, z') \in \Omega_k.$$

  Alegem ramura funcţiei putere astfel încât: $(f'(z_1))^{1/k}\Big|_{z_1=0} = 1$.

  De asemenea, autorii au considerat şi operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ dat de Definiţia 2.2.6 cu menţiunea că $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ va extinde o funcţie din $\mathcal{L}S$ la o aplicaţie din $\mathcal{L}S(\Omega_k)$.

  În lucrarea [44], s-a demonstrat că operatorii Φ_{P_k} şi $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ păstrează g-reprezentarea parametrică şi funcţii Bloch, unde $g : U \to \mathbb{C}$ este o funcţie univalentă pe U astfel încât $g(0) = 1$, Re $g(\zeta) > 0$, $\zeta \in U$, şi g este convexă pe U. Ar fi interesant de văzut dacă alte subclase de aplicaţii biolomorfe pot fi păstrate prin aceşti operatori de extensie.

- În [99], Pfaltzgraff şi Suffridge au propus operatorul de extensie $\Psi_n : \mathcal{L}S_n \to \mathcal{L}S_{n+1}$ definit prin:

  $$\Psi_n(f)(z) = \left(f(\tilde{z}), z_{n+1}[J_f(\tilde{z})]^{\frac{1}{n+1}}\right),\ z = (\tilde{z}, z_{n+1}) \in \mathbb{B}^{n+1}.$$

Alegem ramura funcţiei putere astfel încât: $[J_f(\tilde{z})]^{\frac{1}{n+1}}\big|_{\tilde{z}=0} = 1$. Acest operator de extensie păstrează reprezentarea parametrică de la $\mathbb{B}^n$ la $\mathbb{B}^{n+1}$. Această proprietate a fost demonstrată de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff în [53]. Ar fi interesant de investigat dacă operatorul Ψ_n păstrează g-reprezentarea parametrică, unde g satisface Ipoteza 2.3.1. Mai mult, se poate studia dacă alte subclase ale familiei $S_g^0(\mathbb{B}^n)$ sunt păstrate prin acest operator, precum: g-stelaritatea, g-aproape stelaritatea de ordin $\alpha \in [0, 1)$, g-spiralitatea de tipul $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi (aproape) stelaritatea de tip Janowski cu coeficienţi reali.

O generalizare a operatorului Ψ_n a fost considerată de Graham, Hamada şi Kohr în [41]. Fie $\mathbb{B}_X$ bila unitate deschisă a unui *n-dimensional* JB*-*triple* (care este un spaţiu Banach complex a cărui bila unitate deschisă este omogenă), notat cu X, $\mathbb{B}_Y$ bila unitate deschisă a unui spaţiu Banach complex Y şi $\mathbb{D}_a \subseteq \mathbb{B}_X \times \mathbb{B}_Y$ este un domeniu astfel încât $\mathbb{B}_X \times \{0\} \subset \mathbb{D}_a$, unde $a > 0$.

Fie operatorul de extensie $\Psi_{n,a} : \mathcal{LS}(\mathbb{B}_X) \to \mathcal{LS}(\mathbb{D}_a)$ definit prin:

$$\Psi_{n,a}(f)(z) = \left(f(\tilde{z}), [J_f(\tilde{z})]^{\frac{1}{2a\, c(\mathbb{B}_X)}} w\right),\ z = (\tilde{z}, w) \in \mathbb{D}_a.$$

Alegem ramura funcţiei putere astfel încât: $[J_f(\tilde{z})]^{\frac{1}{2a\, c(\mathbb{B}_X)}}\big|_{\tilde{z}=0} = 1$ ($J_f(z) = detDf(z)$, $z \in \mathbb{D}_a$) şi $c(\mathbb{B}_X)$ este o constantă determinată de metrica Bergman pe X. În lucrarea [41], autorii au demonstrat că $\Psi_{n,a}$ păstrează reprezentarea parametrică de la $\mathbb{B}_X$ la $\mathbb{D}_a$ dacă $a \geq \frac{n}{2c(\mathbb{B}_{\mathbb{X}})}$. Ar fi interesant de văzut dacă g-reprezentarea parametrică de la $\mathbb{B}_X$ la $\mathbb{D}_a$ poate fi păstrată prin operatorul $\Psi_{n,\alpha}$, unde g este dată de Ipoteza 2.3.1. Totodată, se poate studia dacă şi alte subclase de aplicaţii normate şi biolomorfe sunt păstrate prin acest operator.

◇ În lucrarea [91], Muir J. a considerat lanţuri Loewner $F(z, t)$ de ordin p pe $\mathbb{B}^n$ şi pentru $t \geq 0$, care sunt nenormate, cu alte cuvinte lanţuri Loewner $F(z, t)$ care satisfac o condiţie de tipul *locally uniform local L^p-continuity* în raport cu t. În aceeaşi lucrare sunt abordaţi doi operatori de extensie: operatorul lui Muir $\Phi_{n,Q}$ (a se vedea Definiţia 2.2.12) şi o perturbare a operatorului Pfaltzgraff–Suffridge. Autorul foloseşte acest tip de lanţuri Loewner pentru a introduce o formă generalizată de spiralitate în raport cu A, unde A este *locally integrable operator-valued function* pe $[0, \infty)$. Aplicaţii care satisfac această proprietate de spiralitate generalizată în raport cu A sunt generate prin cei doi operatori de extensie menţionaţi anterior. Ar fi interesant de văzut dacă alte subclase de aplicaţii biolomorfe pot fi caracterizate prin acest tip de lanţuri Loewner, şi mai mult, dacă am putea să generăm astfel de aplicaţii prin cei doi operatori de extensie.

◇ Având în vedere lucrarea lui Elin [27] referitoare la operatori de extensie care sunt generaţi folosind teoria semigrupurilor, ar fi de interes să studiem şi alţi operatori de extensie, precum şi proprietăţile lor de conservare, folosind teoria semigrupurilor.

◇ O nouă abordare a lanţurilor Loewner a fost dată de Arosio, Bracci, Hamada şi Kohr în [3], care au considerat lanţuri Loewner pe *complete hyperbolic complex manifolds*. Autorii au obţinut o nouă construcţie geometrică a lanţurilor Loewner la una şi mai multe variabile complexe, care au loc pe astfel de domenii şi au arătat ca există o corespondenţă de unu-la-unu între L^d-lanţuri Loewner şi L^d-familie de evoluţie. Totodată, au furnizat exemple de L^d-lanţuri Loewner generate prin operatorul de extensie Roper-Suffridge. Ar fi interesant de studiat dacă putem genera L^d-lanţuri Loewner folosind alţi operatori de extensie.

Bibliografie - Listă selectivă

[1] Alexander, I.W. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. *Ann. Math.*, 17:12–22, 1915.

[2] Arosio, L. Resonances in Loewner equations. *Adv. Math.*, 227:1413–1435, 2011.

[3] Arosio, L., Bracci, F., Hamada, H., Kohr, G. An abstract approach to Loewner chains. *J. Anal. Math.*, 119:89–114, 2013.

[4] Baias, A.R., Blaga, F., Popa, D. On the best Ulam constant of a first order linear difference equation in Banach spaces. *Acta Math. Hungar.*, 163(2):563–575, 2021.

[5] Barnard, R.W., FitzGerald, C.H., Gong, S. The growth and 1/4-theorems for starlike mappings in $\mathbb{C}^n$. *Pacif. J. Math.*, 150:13–22, 1991.

[6] Bieberbach, L. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. *Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsb.*, 138:940–955, 1916.

[7] Bracci, F., Contreras, M.D., Díaz-Madrigal, S. Evolution families and the Loewner equation II: complex hyperbolic manifolds. *Math. Ann.*, 344:947–962, 2009.

[8] Bracci, F., Contreras, M.D., Díaz-Madrigal, S. Evolution families and the Loewner equation I: the unit disk. *J. Reine Angew. Math.*, 672:1–37, 2012.

[9] Cartan, H. *Sur la possibilité d'étendre aux fonctions de plusieurs variables complexes la théorie des fonctions univalentes, 129-155. Note added to P. Montel, Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes.* Paris, 1933.

[10] Chabat, B. *Introduction à l'Analyse Complexe, I-II.* Ed. MIR, Moscou, 1990.

[11] Chirilă, T. An extension operator associated with certain G-Loewner chains. *Taiwanese J. Math.*, 17(5):1819–1837, 2013.

[12] Chirilă, T. Analytic and geometric properties associated with some extension operators. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 59(3):427–442, 2014.

[13] Chirilă, T. An extension operator and Loewner chains on the Euclidean unit ball in $\mathbb{C}^n$. *Mathematica*, 54(77):117–125, 2012.

[14] Chirilă, T. Subclasses of biholomorphic mappings associated with g-Loewner chains on the unit ball in $\mathbb{C}^n$. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 59(10):1456–1474, 2014.

[15] Contreras, M.D., Díaz-Madrigal, S. Topological Loewner theory on Riemann surfaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 493(1):Paper No. 124525, 18, 2021.

[16] Cristea, M. Univalence criteria starting from the method of Loewner chains. *Complex Anal. Oper. Theory*, 5(3):863–880, 2011.

[17] Cristea, M. The method of Loewner chains in the study of the univalence of $\mathbb{C}^2$ mappings. *Matematica*, 55(1):22–38, 2013.

[18] Curt, P. A Marx-Strohhäcker theorem in several complex variables. *Mathematica*, 39(62):59–70, 1997.

[19] Curt, P. On coefficients of starlike and convex mappings in several variables. *Mathematica*, 42(65):19–25, 2000.

[20] Curt, P. *Capitole Speciale de Teoria Geometrică a Funcţiilor de mai multe Variabile Complexe.* Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2001.

[21] Curt, P. Janowski starlikeness in several complex variables and complex Hilbert spaces. *Taiwanese J. Math.*, 18(4):1171–1184, 2014.

[22] Curt, P. Janowski subclasses of starlike mappings. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 67(2):351–360, 2022.

[23] Curt, P., Kohr, G. Subordination chains and Loewner differential equation in several complex variables. *Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect. A*, 57:35–43, 2003.

[24] de Branges, L. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta. Math.*, 154(1-2):137–152, 1985.

[25] Duren, P. *Univalent Functions.* Springer, New York, 1983.

[26] Duren, P., Graham, I., Hamada, H., Kohr, G. Solutions for the generalized Loewner differential equation in several complex variables. *Math. Ann.*, 347:441–435, 2010.

[27] M. Elin. Extension operators via semigroups. *J. Math. Anal. Appl.*, 377(1):239–250, 2011.

[28] Elin, M., Levenshtein, M. Covering results and perturbed Roper-Suffridge operators. *Complex Anal. Oper. Theory*, 8(1):25–36, 2014.

[29] Elin, M., Shoikhet, D., Sugawa, T. Geometric properties of the nonlinear resolvent of holomorphic generators. *J. Math. Anal. Appl.*, 483(2):123614, 18, 2020.

[30] Feng, S.X. *Some Classes of Holomorphic Mappings in Several Complex Variables.* PhD thesis, University of Science and Technology of China, China, 2004.

[31] FitzGerald, C.H., Thomas, C. Some bounds on convex mappings in several complex variables. *Pacif. J. Math.*, 165:295–320, 1994.

[32] Gong, S. *Convex and Starlike Mappings in Several Complex Variables.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[33] Gong, S. *The Bieberbach Conjecture*. Amer. Math. Soc. Intern. Press, Providence, 1999.

[34] Gong, S., Wang, S., Yu, Q. Biholomorphic convex mappings of ball in $\mathbb{C}^n$. *Pacif. J. Math.*, 161:287–306, 1993.

[35] Goodman, A.W. *Univalent Functions*. Mariner Publ. Comp., Tampa, Florida, 1983.

[36] Graham, I. Growth and covering theorems associated with the Roper-Suffridge extension operator. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127:3215–3220, 1999.

[37] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G. Parametric representation of univalent mappings in several complex variables. *Canadian J. Math.*, 54(2):324–351, 2002.

[38] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G. Extension operators and subordination chains. *J. Math. Anal. Appl.*, 386(1):278–289, 2012.

[39] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G. Extremal problems and g-Loewner chains in $\mathbb{C}^n$ and reflexive complex Banach spaces. In *Topics in mathematical analysis and applications*, volume 94 of *Springer Optim. Appl.*, pages 387–418. Springer, Cham, 2014.

[40] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G. Loewner chains and nonlinear resolvents of the Carathéodory family on the unit ball in $\mathbb{C}^n$. *J. Math. Anal. Appl.*, 491(1):124289, 29, 2020.

[41] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G. Loewner chains, Bloch mappings and Pfaltzgraff-Suffridge extension operators on bounded symmetric domains. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 65(1):57–73, 2020.

[42] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M. Asymptotically spirallike mappings in reflexive complex Banach spaces. *Complex Anal. Oper. Theory*, 7(6):1909–1927, 2013.

[43] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M. Bounded support points for mappings with g-parametric representation in $\mathbb{C}^2$. *J. Math. Anal. Appl.*, 454(2):1085–1105, 2017.

[44] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M. g-Loewner chains, Bloch functions and extension operators in complex Banach spaces. *Anal. Math. Phys.*, 10(5):28 pp, 2020.

[45] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M. g-Loewner chains, Bloch functions and extension operators into the family of locally biholomorphic mappings in infinite dimensional spaces. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 67(2):219–236, 2022.

[46] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Suffridge, T.J. Extension operators for locally univalent mappings. *Michigan Math. J.*, 50(1):37–55, 2002.

[47] Graham, I., Kohr, G. Univalent mappings associated with the Roper-Sufridge extension operator. *J. Analyse Math.*, 81:331–342, 2000.

[48] Graham, I., Kohr, G. *Geometric function theory in one and higher dimensions*. Marcel Dekker Inc., New York, 2003.

[49] Graham, I., Kohr, G. The Roper-Suffridge extension operator and classes of biholomorphic mapping. *Science in China Series A-Math.*, 49:1539–1552, 2006.

[50] Graham, I., Kohr, G., Kohr, M. Loewner chains and the Roper-Suffridge Extension Operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 247:448–465, 2000.

[51] Graham, I., Kohr, G., Kohr, M. Loewner chains and parametric representation in several complex variables. *J. Math. Anal. Appl.*, 281:425–438, 2003.

[52] Graham, I., Kohr, G., Pfaltzgraff, J.A. The general solution of the Loewner differential equation on the unit ball in $\mathbb{C}^n$. *Contemp. Math. (AMS)*, 382:191–203, 2005.

[53] Graham, I., Kohr, G., Pfaltzgraff, J.A. Parametric representation and linear functionals associated with extension operators for biholomorphic mappings. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 52(1):47–68, 2007.

[54] Gurganus, K. Φ-like holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$ and Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc*, 205:389–406, 1975.

[55] Hamada, H., Honda, T. Sharp growth theorems and coefficient bounds for starlike mappings in several complex variables. *Chinese Ann. Math. Ser. B. 29*, (4):353–368, 2008.

[56] Hamada, H., Honda, T., Kohr, G. Growth theorems and coefficient bounds for univalent holomorphic mappings which have parametric representation. *J. Math. Anal. Appl.*, 317:302–319, 2006.

[57] Hamada, H., Honda, T., Kohr, G. Parabolic starlike mappings in several complex variables. *Manuscripta Math.*, 123:301–324, 2007.

[58] Hamada, H., Iancu, M., Kohr, G. Extremal problems for mappings with generalized parametric representation in $\mathbb{C}^n$. *Complex Anal. Oper. Theory*, 10(5):1045–1080, 2016.

[59] Hamada, H., Iancu, M., Kohr, G. A survey on Loewner chains, approximation results, and related problems for univalent mappings on the unit ball in $\mathbb{C}^N$. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 66(3-4):709–723, 2021.

[60] Hamada, H., Kohr, G. Subordination chains and the growth theorem of spirallike mappings. *Mathematica*, 42:153–161, 2000.

[61] Hamada, H., Kohr, G. Φ-like and convex mappings in infinite dimensional spaces. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 47(3):315–328, 2002.

[62] Hamada, H., Kohr, G. Support points for families of univalent mappings on bounded symmetric domains. *Sci. China Math.*, 63(12):2379–2398, 2020.

[63] Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M. Parametric representation and extension operators for biholomorphic mappings on some Reinhardt domains. *Complex Var. Theory Appl.*, 50(7-11):507–519, 2005.

[64] Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M. The Fekete-Szegö problem for starlike mappings and nonlinear resolvents of the Carathéodory family on the unit balls of complex Banach spaces. *Anal. Math. Phys.*, 11(3):115–137, 2021.

[65] Hamada, H., Kohr, G., Muir Jr., J.R. . Extensions of L^d-Loewner chains to higher dimensions. *J. Anal. Math.*, 120:357–392, 2013.

[66] Hamburg, P., Mocanu, P.T., Negoescu, N. *Analiză Matematică (Funcţii Complexe).* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[67] Hille, E., Phillips, R.S. *Functional Analysis and Semigroups.* 31. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1997.

[68] Janowski, W. Some extremal problems for certain families of analytic functions I. *Ann. Polon. Math.*, 28:297–326, 1973.

[69] Kikuchi, K. Starlike and convex mappings in several complex variables. *Pacif. J. Math.*, 44:569–58, 1973.

[70] Kohr, G. Certain partial differential inequalities and applications for holomorphic mappings defined on the unit ball of $\mathbb{C}^n$. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skl. Sect. A*, 62:87–94, 1996.

[71] Kohr, G. On some sufficient conditions of almost starlikeness of order $1/2$ in $\mathbb{C}^n$. *Studia Univ. Babeş-Bolyai Mathematica*, 41(3):51–55, 1996.

[72] Kohr, G. On some best bounds for coefficients of subclasses of biolomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$. *Complex Variables*, 36:261–284, 1998.

[73] Kohr, G. Using the method of Löwner chains to introduce some subclasses of biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 46:743–760, 2001.

[74] Kohr, G. *Basic Topics in Holomorphic Functions of Several Complex Variables.* Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2003.

[75] Kohr, G. Loewner chains and a modification of the Roper-Suffridge extension operator. *Mathematica (Cluj)*, 48(71)(1):41–48, 2006.

[76] Kohr, G., Mocanu, P.T. *Capitole Speciale de Analiză Matematică (Funcţii Complexe).* Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2005.

[77] Krantz, S.G. *Function Theory of Several Complex Variables, Reprint of the 1992 Edition.* AMS Chelsea Publishing, Providence, R.I., 2001.

[78] Kubicka, E., Poreda, T. On the parametric representation of starlike maps of the unit ball in $\mathbb{C}^n$ into $\mathbb{C}^n$. *Demonstratio Math.*, 21:345–355, 1988.

[79] T. Liu. *The growth theorems and covering theorems for biholomorphic mappings on classical domains.* PhD thesis, Univ. Sci. Tech. China, 1989. Doctoral Thesis.

[80] Liu, X. The generalized Roper-Suffridge extension operator for some biholomorphic mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 324(1):604–614, 2006.

[81] Liu, X.-S., Liu, T.-S. The generalized Roper-Suffridge extension operator for spirallike mappings of type β and order α. *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 27(6):789–798, 2006.

[82] Liu, X.S., Liu, T.S. The generalized Roper-Suffridge extension operator for spirallike mappings of type β and order α. *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 27:789–798, 2006.

[83] Loewner, K. Untersuchungen über schlichte Abbildungen des Einheitskkreises. *Math. Ann.*, 89:103–121, 1923.

[84] Ma, W. C., Minda, D. A unified treatment of some special classes of univalent functions. In *Proceedings of the Conference on Complex Analysis*, pages 157–169. Tianjin, 1994.

[85] **Manu**, **A.** Extension Operators Preserving Janowski Classes of Univalent Functions. *Taiwanese J. Math.*, 24(1):97–117, 2020. WOS:000508232900007.

[86] **Manu**, **A.** The Muir extension operator and Janowski univalent functions. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 65(6):897–919, 2020. WOS:000476259700001.

[87] **Manu**, **A.** Extension operators and Janowski starlikeness with complex coefficients. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 2022. submitted, ISSN: 2065-961x.

[88] Matsuno, T. Star-like theorems and convex-like theorems in the complex vector space. *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A*, 5:88–95, 1955.

[89] Miller, S.S., Mocanu, P.T. *Differential Subordinations. Theory and Applications.* Marcel Dekker Inc., New York, 2000.

[90] Mocanu, P.T., Bulboacă, T., Sălăgean, G. . *Teoria Geometrică a Funcţiilor Univalente.* Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2006.

[91] J.R. Muir. Extensions of Abstract Loewner Chains and Spirallikeness. *J. Geom. Anal.*, 32(7):Paper No. 192, 46 pp., 2022.

[92] Muir Jr., J.R. A modification of the Roper-Suffridge extension operator. *Comput. Methods Funct. Theory*, 5(1):237–251, 2005.

[93] Narasimhan, R. *Several Complex Variables.* The University of Chicago Press, 1971.

[94] Nevanlinna, R. Über die konforme Abbildung Sterngebieten. *Översikt av Finska Vet. Soc.*, 63:1–21, 1921.

[95] Noshiro, K. On the theory of schlicht functions. *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, 2:129–155, 1934-35.

[96] Pfaltzgraff, J.A. Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$. *Math. Ann.*, 210:55–68, 1974.

[97] Pfaltzgraff, J.A. Subordination chains and quasiconformal extension of holomorphic maps in $\mathbb{C}^n$. *Ann. Acad. Scie. Fenn. Ser. A I Math.*, 1:13–25, 1975.

[98] Pfaltzgraff, J.A., Suffridge, T. J. Close-to-starlike holomorphic functions of several variables. *Pacif. J. Math.*, 57:271–279, 1975.

[99] Pfaltzgraff, J.A., Suffridge, T. J. An extension theorem and linear invariant families generated by starlike maps. *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A 53*, pages 193–207, 1999.

[100] Poincaré, H. Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 23:185–220, 1907.

[101] Pommerenke, C. Über die Subordination analytischer Funktionen. *J. Reine Angew. Math.*, 218:159–173, 1965.

[102] Pommerenke, C. *Univalent functions.* Studia mathematica. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[103] Poreda, T. On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$ which have the parametric representation, I - the geometrical properties. *Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect A*, 41:105–113, 1987.

[104] Poreda, T. On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$ which have the parametric representation, II - the necessary and the sufficient conditions. *Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect A*, 41:115–121, 1987.

[105] Poreda, T. On the univalent subordination chains of holomorphic mappings in Banach spaces. *Comment. Math. Prace Mat.*, 28(2):295–304, 1989.

[106] Range, M. *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables.* Springer-Verlag, New York, 1986.

[107] Robertson, M.S. On the theory of univalent functions. *Ann. Math.*, 37:374–408, 1936.

[108] Roper, K., Suffridge, T.J. Convex mappings on the unit ball of $\mathbb{C}^n$. *J. Anal. Math.*, 65:333–347, 1995.

[109] Silverman, H. Subclasses of starlike functions. *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, 23:1093–1099, 1978.

[110] Silverman, H., Silvia, E.M. Subclasses of starlike functions subordinate to convex functions. *Canad. J. Math.*, 37(1):48–61, 1985.

[111] Špaček, L. Contribution á la theorie des functions univalentes. *Časopia Pěst. Mat.*, 62:12–19, 1932.

[112] T. J. Suffridge. Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions. In *Complex analysis (Proc. Conf., Univ. Kentucky, Lexington, Ky., 1976)*, pages 146–159. Lecture Notes in Math., Vol. 599, 1977.

[113] Suffridge, T. J. The principle of subordination applied to functions of several variables. *Pacific J. Math.*, 33:241–248, 1970.

[114] Suffridge, T. J. Starlike and convex maps in Banach spaces. *Pacific J. Math.*, 46(2):575–589, 1973.

[115] Suffridge, T. J. Biholomorphic mappings of the ball onto convex domains. *Springer-Verlag*, 66:46, 1990. Abstract of papers presented to AMS.

[116] Wang, J.F., Liu, T.S. A modified Roper-Suffridge extension operator for some holomorphic mappings. *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 31(4):487–496, 2010.

[117] Warschawski, S.E. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 38:310–340, 1935.

[118] Wolff, J. L'intégrale d'une fonction holomorphe et à partie réelle positive dans un demiplan est univalente. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 198:1209–1210, 1934.

[119] Xu, Q-H., Liu, T-S. Loewner chains and a subclass of biholomorphic mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 334:1096–1105, 2007.