UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI, CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Cătălin - Ionel Barbu

Contribuţii la studiul geometriei hiperbolice

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat:

Prof. Univ. Dr. Dorin Andrica

Cluj-Napoca,
2012

Cuprins

Introducere

Denumirea de geometrie neeuclidiană a fost uzitată prima dată de Karl Friedrich Gauss (1777-1855) pentru a distinge geometriile ce diferă de geometria lui Euclid prin axioma de paralelism. Conform unor scrisori datate, Gauss a început să dezvolte o geometrie neeuclidiană în anul 1792. El a trebuit să depăşească prejudecăţile împotriva unei geometrii neeuclidiene şi să accepte un sistem de geometrie care era împotriva intuiţiei sale. Pentru prima dată şi-a dat seama că axioma de paralelism este independentă de celelalte axiome ale geometriei, deci nu are sens problema demonstrării ei, că înlăturând această axiomă, geometria astfel obţinută nu este contradictorie. Cu toate acestea el nu a publicat nimic din acest domeniu temându-se de ridicol. Karl Ferdinand Schweikart (1780-1859) a dezvoltat, de asemenea, o geometrie neeuclidiană şi în 1818 a trimis un memorandum asupra geometriei sale lui Gauss. Schweikart afirma că pe lângă geometria euclidiană mai există o nouă geometrie, numită *astrală*, în care suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este mai mică decât două unghiuri drepte. Însă, la fel ca şi Gauss, nu publică nimic pe această temă. A durat o bună perioadă de timp pentru ca matematicienii să accepte existenţa unei geometrii neeuclidiene, în special din cauza convingerilor în filosofia kantiană. Immanuel Kant (1724-1804) credea că geometria este o ştiinţă absolută. El credea că axiomele geometriei sunt adevărate *a priori*. Astfel, ideea că ar mai exista o altă geometrie ar contesta folosofia kantiană.

Geometriile neeuclidiene nu contrazic geometria clasică ci o cuprind ca un caz limită. Ele sunt mai avansate deoarece corespund unei faze mai abstracte în procesul de cunoaştere. O astfel de geometrie a fost descoperită independent de János Bolyai (1802-1860) la Timişoara şi Nikolai Lobacevski (1793-1856). N. Lobacevski în 1829 a publicat lucrarea *Principiile geometriei* în care afirma că dacă presupunem dată o dreaptă l şi un punct P care nu aparţine dreptei l, atunci există cel puţin două drepte ce trec prin P şi sunt paralele cu dreapta l. Mai mult, el arată că noua geometrie, pe care Lobacevski o numea *imaginară*, este la fel de logică şi necontradictorie ca şi geometria euclidiană. J. Bolyai dezvoltă o geometrie, pe care o numeşte *absolută*, independentă de adevărul sau falsitatea axiomei de paralelism şi creează geometria hiperbolică urmând acelaşi drum şi obţinând aceleaşi rezultate ca şi Lobacevski. Opera lui J. Bolyai, *Appendix Scientiam Spatii Absolute Veram Exhibens* (Anexă în care este expusă ştiinţa absolut adevărată a spaţiului) a apărut la Târgu Mureş în 1831, ca o anexă a volumului *Tentamen* a lui Farkaş Bolyai.

Denumirea de geometrie hiperbolică îşi are justificarea prin aceea că atunci când se clasifică obiectele unei teorii matematice după natura unor elemente generatoare - în cazul nostru fiind numărul de paralele duse dintr-un punct la o dreaptă - problemă echivalentă în general cu interpretarea rădăcinilor unei ecuaţii de gradul al doilea, numim *eliptic*, cazul care corespunde valorilor complexe (când nu avem paralele) şi analog, *parabolic* sau *hiperbolic*, cazurile ce corespund rădăcinilor confundate (când avem o unică paralelă) sau reale diferite (când avem două paralele).

În 1868, Eugenio Beltrami (1835-1900) arată că geometria hiperbolică poate fi realizată pe *pseudosferă*, care este o suprafaţă de rotaţie reală, obţinută prin rotirea curbei numită *tractice*. În acest caz, dreptele geometriei sunt geodezice ale pseudosferei, deci curbe de cea mai scurtă distanţă. Rezultatul lui Beltrami este deosebit de important, pentru că ne dă un model real, în spaţiul obişnuit, pe care este valabilă geometria hiperbolică, deci rezolvă complet problema necontradicţiei plane a lui Bolyai - Lobacevski.

Lucrarea de faţă este structurată în trei capitole, un capitol introductiv şi două capitole în care se prezintă contribuţiile noastre în studiul geometriei hiperbolice. În primul capitol, intitulat "*Modelul vitezei relativiste a lui Einstein*", este prezentat, în linii mari, modelul pe disc al lui Beltrami-Klein al geometriei hiperbolice, utilizând noţiunea de gyrovector introdusă de matematicianul american Abraham Ungar [133] în anul 1997. Astfel, mai întâi se introduc noţiunile de gyrogrup, gyrogrup gyrocomutativ, precum şi principalele proprietăţi ale acestora. Mai apoi se prezintă noţiunile de gyrovector, de spaţiu al gyrovectorilor şi principalele proprietăţi ale acestora. În continuare, pe spaţiul gyrovectorilor $(G, \oplus, \otimes)$ se introduce gyrometrica $d_{\oplus}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, se defineşte gyrolinia, gyrosegmentul, gyromijlocul unui gyrosegment, gyrocosinusul unghiului dintre doi gyrovectori şi se dau condiţii de gyrocoliniaritate pentru trei puncte. În următorul paragraf al capitolului întâi considerând factorul gamma se introduc adunarea şi înmulţirea Einstein, se dau principalele proprietăţi ale acestora şi se prezintă modelul lui Beltrami-Klein al geometriei hiperbolice văzut prin prisma noţiunii de gyrovector. În ultima parte a primului capitol se enunţă câteva teoreme utile în demersul nostru ştiinţific, a căror demonstraţie se găseşte în [134], [135] şi [136].

În capitolul al doilea, intitulat "*Varianta hiperbolică a unor rezultate geometrice clasice*" se transpun în variantă hiperbolică - utilizând modelul lui vitezei relativiste a lui Einstein, modelul pe disc al lui Poincaré şi modelul semiplanului superior al lui Poincaré - diferite teoreme celebre ale geometriei euclidiene. Astfel, în subcapitolul 2.1, C. Barbu şi F. Smarandache [38] tratează teorema lui Menelaus în modelul pe disc al lui Poincaré, prezintă forma reciprocă a teoremei şi utilizează această nouă formă pentru a demonstra o teoremă de a lui Ţiţeica în geometria hiperbolică.

În secţiunea 2.2 utilizând noţiunea de raţie hiperbolică - introdusă de către W. Stothers [130], C. Barbu [18] prezintă varianta hiperbolică a teoremei lui Menelaus pentru patrulatere, teorema transversalei pentru un triunghi şi teorema lui Manelaus pentru un poligon convex oarecare.

În subcapitolul trei, D. Andrica şi C. Barbu [7] tratează teorema lui Ceva în modelul pe disc al lui Poincaré, arătă că în anumite condiţii are loc teorema reciprocă şi prezintă câteva aplicaţii ale acesteia într-un triunghi hiperbolic.

În paragraful 2.4, D. Andrica şi C. Barbu [9] prezintă varianta hiperbolică a teoremei lui Desargues în modelul pe disc al lui Poincaré şi dau condiţii pentru teorema reciprocă.

În subcapitolul 2.5, C. Barbu [16] defineşte poligonul hiperbolic podar şi prezintă varianta hiperbolică a teoremei poligonului podar al lui Smarandache, aceasta fiind o generalizare a teoremei lui Carnot.

În subcapitolul 2.6 se prezintă o demonstraţie trigonometrică teoremei lui Steiner-Lehmus în modelul pe disc al lui Poincaré. Acest rezultat a fost publicat de C. Barbu în lucrarea [15].

În paragraful 2.7 se introduce noţiunea de izogonală hiperbolică, se demonstrează teorema lui Steiner referitoare la izogonale în modelul pe disc al lui Poincaré şi în modelul vitezei relativiste a lui Einstein, se dau consecinţe ale acestei teoreme şi se demonstrează o teoremă a lui Andreescu referitoare la drepte izogonale într-un triunghi hiperbolic. Aceste rezultate au fost publicate in lucrarea [19].

În subcapitolul 2.8, C. Barbu [19] introduce noţiunea de simediană hiperbolică, a prezentat teorema lui Mathieu în modelul pe disc al lui Poincaré şi dă câteva consecinţe ale acesteia în geometria hiperbolică.

C Barbu şi L. Pişcoran [33] prezintă în secţiunea 2.9 teorema lui Nobbs în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice.

C. Barbu [20] prezintă în subcapitolul 2.10 varianta hiperbolică a teoremei transversalei izotomice în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice.

În subcapitolul unsprezece C. Barbu [20] prezintă varianta hiperbolică a teoremei lui Neuberg în modelul pe disc al lui Poincaré şi unele consecinţe ce derivă din aceasta.

C. Barbu şi L. Pişcoran [34] prezintă în secţiunea 2.12 varianta hiperbolică a teoremei lui Gülicher în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice.

În secţiunea 2.13, C. Barbu şi L. Pişcoran [34] prezintă varianta hiperbolică a teoremei bisectorei interioare, reciproca acesteia, varianta hiperbolică a teoremei bisectorei exterioare şi reciproca acesteia, precum şi câteva aplicaţii ale acestor teoreme.

În secţiunea 2.14, C. Barbu şi L. Pişcoran [30] prezintă varianta hiperbolică a teoremei lui Zajic în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice.

În subcapitolul cincisprezece C. Barbu şi N. Sönmez [41] prezintă varianta hiperbolică a teoremei lui Carnot în modelul semiplanului superior al lui Poincaré al geometriei hiperbolice, arăta că în anumite condiţii admite reciprocă şi dau câteva aplicaţii ale acesteia într-un triunghi hiperbolic.

În paragraful 2.16, C. Barbu şi N. Sönmez [40] prezintă varianta hiperbolică a teoremei ortopolului în diferite modele ale geometriei hiperbolice.

C. Barbu [22] în subcapitolul 2.17 prezintă varianta hiperbolică a teoremei lui Stewart în modelul vitezei relativiste a lui Einstein al geometriei hiperbolice, precum şi câteva consecinţe ale acesteia.

C. Barbu [25] în subcapitolul 2.18 prezintă varianta hiperbolică a teoremei lui Van Aubel în modelul vitezei relativiste a lui Einstein al geometriei hiperbolice, precum şi câteva consecinţe ale acesteia.

În subcapitolul 2.19, C. Barbu [23] prezintă varianta hiperbolică a unei teoreme de minim a lui Smarandache în modelul vitezei relativiste a lui Einstein al geometriei hiperbolice.

În secţiunea 2.20, C. Barbu [29] prezintă varianta hiperbolică a unei teoreme a lui Pappus în modelul vitezei relativiste a lui Einstein al geometriei hiperbolice, se defineşte antibisectoarea pentru un triunghi hiperbolic şi se dau câteva consecinţe ale teoremei lui Pappus.

În subcapitolul 2.21, C. Barbu [13] prezintă varianta hiperbolică a teoremei triunghiului cevian a lui Smarandache în modelul vitezei relativiste a lui Einstein al geometriei hiperbolice.

În paragraful 2.22, C. Barbu [31] tratează în hiperbolic câteva inegalităţi referitoare la un triunghi.

În subcapitolul 2.23, C. Barbu şi L. Pişcoran [35] prezintă varianta hiperbolică a inegalitaţii lui Andrica-Iwata şi consecinţe ce derivă din aceasta.

În secţiunea 2.24, C. Barbu şi L. Pişcoran [37] tratează unele aplicaţii ale inegalităţii lui Cusa-Huygens într-un triunghi hiperbolic.

În subcapitolul 2.25, C. Barbu şi L. Pişcoran [36] prezintă forma hiperbolică a unei inegalităţi a lui Panaitopol şi dau câteva consideraţii asupra inegalităţii lui Jordan.

În capitolul al treilea, intitulat "*Inegalitatea fundamentală a triunghiului între clasic şi hiperbolic*" se tratează inegalitatea lui Blundon atât în geometria euclidiană cât şi în geometria hiperbolică. Astfel, în secţiunea 3.1, D. Andrica şi C. Barbu [8] prezintă o demonstraţie nouă pentru inegalitatea fundamentală a triunghiului, demonstraţie bazată pe consideraţii geometrice. Dacă a, b şi c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC, r este raza cercului înscris în triunghi, s este semiperimetrul triunghiului, iar R este raza cercului circumscris triunghiului ABC, inegalitatea fundamentală are următoarea exprimare: Condiţia necesară şi suficientă pentru a exista un triunghi având elementele s, R şi r, este

$$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr} \le s^2 \le 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}.$$

Se demonstrează că dacă într-un triunghi neechilateral ABC, I este centrul cercului înscris, O este centrul cercului circumscris O şi N este punctul lui Nagel, atunci următoarea relaţie este adevărată:

$$\cos\widehat{ION} = \frac{2R^2+10Rr-r^2-s^2}{2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}},$$

inegalitatea lui Blundon fiind o consecinţă a acestei teoreme. Din demonstraţia dată în acest paragraf rezultă o cale naturală de construcţie a unui triunghi ABC în care se dau centrul cercului înscris I, centrul cercului circumscris O şi punctul lui Nagel N,. reducându-se astfel construcţia cerută la faimoasa problemă a lui Euler de construcţie a unui triunghi în care ştim I, O şi H [68]. Problema de construcţie a lui Euler a fost studiată de către B.Scimemi [120], G.C.Smith [126], J.Stern [129] şi P.Yiu [144].

În secţiunea 3.2, D. Andrica şi C. Barbu [8] au dat o formă duală a inegalităţii lui Blundon. Astfel, dacă r_a este raza cercului A-exînscris am arătat că următoarele inegalităţi sunt adevărate:

$$0 \le \frac{a^2+b^2+c^2}{4} \le R^2-3Rr_a-r_a^2+(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a}.$$

Se arată că dacă I_a este centrul cercului A-exînscris, iar N_a punctul lui Nagel adjuct corespunzător laturii a, atunci următoarea relaţie este adevărată:

$$\cos\widehat{I_aON_a} = \frac{R^2-3Rr_a-r_a^2-\alpha}{(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a}},$$

unde $\alpha = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$, forma duală inegalităţii lui Blundon fiind o consecinţă a acestei teoreme.

În secţiunea 3.3, D. Andrica şi C. Barbu [8] prezintă câteva inegalităţi obţinute din teorema duală prezentată în subcapitolul precedent.

În secţiunea 3.4, D. Andrica şi C. Barbu [10] prezintă o rafinare a inegalităţii lui Blundon, dând o demonstraţie geometrică unor inegalităţi obţinute de către Wu [140], şi anume: pentru orice triunghi $A_1A_2A_3$, următoarele inegalităţi au loc:

$$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}\cos\phi \le s^2 \le 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}\cos\phi.$$

unde $\phi = \min\limits_{1\le i<j\le 3} |A_i - A_j|$.

În subcapitolul 3.5. se prezintă forma hiperbolică a inegalităţii lui Blundon, dată de către către D. Svrtan şi D. Veljan [131] şi are următoarea exprimare: dacă un triunghi hiperbolic admite un cerc circumscris de rază R, iar r este raza cercului înscris, s este semiperimetrul triunghiului şi ε este defectul triunghiului, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{D}{s'^2} \ge 0,$$

unde

$$\begin{aligned} D = s'^2[(&r'^2R'^2\varepsilon'^2 + 4r'^4R'^4\varepsilon'^2 - 4r'^3R'^3\varepsilon'^2 - 1 + 6r'R' - 12r'^2R'^2 + 8r'^3R'^3)s'^4 \\ &+r'^2R'\varepsilon'(1 - 4r'R' + 4r'^2R'^2\varepsilon' - 8r'^2R'^2\varepsilon'^2 + 9\varepsilon' + 18r'R'\varepsilon')s'^3 \\ &+r'^2(r'^2R'^2 - 10r'R' - 12r'^2R'^2\varepsilon'^2 - 2)s'^2 - 6r'^4R'\varepsilon's' - r'^4], \end{aligned}$$

iar $r' = \tanh\frac{r}{k}, R' = \tanh\frac{R}{k}, \varepsilon' = \cot\frac{\varepsilon}{2}, s' = \sinh\frac{s}{k}$.

În ultimul subcapitol al tezei D. Andrica, C. Barbu şi N. Minculete [26], [11] realizează o extindere naturală a inegalităţii lui Blundon utilizând coordonatele baricentrice. Se introduce noţiunea de ceviană şi exceviană de rang (k,l,m) astfel: dacă D este un punct pe latura (BC) a unui triunghi neisoscel ABC, astfel încât:

$$\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{s-c}{s-b}\right)^l \cdot \left(\frac{a+b}{a+c}\right)^m$$

$k,l,m \in \mathbb{R}$, atunci AD o vom numi *ceviană de rang* (k,l,m), iar dacă $D \in BC\setminus[BC]$, astfel încât $\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{s-c}{s-b}\right)^l \cdot \left(\frac{a+b}{a+c}\right)^m$, $k,l,m \in \mathbb{R}^*$, atunci AD o vom numi *exceviană de rang* (k,l,m) - şi se prezintă proprietăţi ale acestui tip de ceviană. Se arată că dacă I_1, I_2, I_3 trei puncte ceviene de rang (k,l,m) având coordonatele baricentrice:

$$I_i[a^{k_i}(s-a)^{l_i}(b+c)^{m_i} : b^{k_i}(s-b)^{l_i}(a+c)^{m_i} : c^{k_i}(s-c)^{l_i}(a+b)^{m_i}],\ i=\overline{1,3},$$

iar pentru $i=\overline{1,3}$, $a^{k_i}(s-a)^{l_i}(b+c)^{m_i}$, $b^{k_i}(s-b)^{l_i}(a+c)^{m_i}$, $c^{k_i}(s-c)^{l_i}(a+b)^{m_i}$ notăm cu t_i^1, t_i^2, respectiv t_i^3, şi

$$\alpha_{ij} = \frac{t_j^1}{t_j^1+t_j^2+t_j^3} - \frac{t_i^1}{t_i^1+t_i^2+t_i^3},$$

$$\beta_{ij} = \frac{t_j^2}{t_j^1+t_j^2+t_j^3} - \frac{t_i^2}{t_i^1+t_i^2+t_i^3}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{t_j^3}{t_j^1+t_j^2+t_j^3} - \frac{t_i^3}{t_i^1+t_i^2+t_i^3}$$

pentru $i, j \in \{1, 2, 3\}$, atunci

$$\cos \widehat{I_1 I_2 I_3} = \frac{-a^2(\beta_{12}\gamma_{12} + \beta_{23}\gamma_{23} - \beta_{31}\gamma_{31}) - b^2(\gamma_{12}\alpha_{12} + \gamma_{23}\alpha_{23} - \gamma_{31}\alpha_{31}) + c^2(\alpha_{12}\beta_{12} + \alpha_{23}\beta_{23} - \alpha_{31}\beta_{31})}{2\sqrt{-\beta_{12}\gamma_{12}a^2 - \gamma_{12}\alpha_{12}b^2 - \alpha_{12}\beta_{12}c^2} \cdot \sqrt{-\beta_{23}\gamma_{23}a^2 - \gamma_{23}\alpha_{23}b^2 - \alpha_{23}\beta_{23}c^2}}$$

şi de aici rezultă imediat inegalităţile:

$$-2\sqrt{-\beta_{12}\gamma_{12}a^2 - \gamma_{12}\alpha_{12}b^2 - \alpha_{12}\beta_{12}c^2} \cdot \sqrt{-\beta_{23}\gamma_{23}a^2 - \gamma_{23}\alpha_{23}b^2 - \alpha_{23}\beta_{23}c^2} \leq$$

$$-a^2(\beta_{12}\gamma_{12}+\beta_{23}\gamma_{23}-\beta_{31}\gamma_{31})-b^2(\gamma_{12}\alpha_{12}+\gamma_{23}\alpha_{23}-\gamma_{31}\alpha_{31})+c^2(\alpha_{12}\beta_{12}+\alpha_{23}\beta_{23}-\alpha_{31}\beta_{31}) \leq$$

$$2\sqrt{-\beta_{12}\gamma_{12}a^2 - \gamma_{12}\alpha_{12}b^2 - \alpha_{12}\beta_{12}c^2} \cdot \sqrt{-\beta_{23}\gamma_{23}a^2 - \gamma_{23}\alpha_{23}b^2 - \alpha_{23}\beta_{23}c^2},$$

inegalitatea lui Blundon fiind o consecinţă a proprietăţii precedente.

Doresc să exprim, cu această ocazie, recunoştinţa mea tuturor persoanelor care, de-a lungul timpului, direct sau indirect, au contribuit prin sfaturile lor la concretizarea acestui demers ştiinţific. Îi mulţumesc Domnului Profesor Universitar Doctor **Dorin Andrica** care, pe lângă conducerea ştiinţifică a tezei mele de doctorat, m-a îndrumat atent şi riguros pentru a da o claritate maximă lucrării pe toată durata stagiului doctoral.

Mulţumesc domnului Profesor Universitar Doctor Mircea Crâşmăreanu, domnului Profesor Universitar Doctor.Paul Blaga, domnului Profesor Universitar pe-tru citirea atentă a manuscrisului şi pentru sfaturile şi bunăvoinţa arătate. De asemenea, doresc să aduc mulţumiri Catedrei de Geometrie a Universităţii Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca, Domnului Profesor Universitar Doctor Varga Csaba, Domnului Conferanţiar Doctor Cornel Pintea, Domnului Lector Doctor Daniel Văcăreţu, Doamnei Lector Liana Topan, care m-au ajutat şi încurajat în elaborarea acestei lucrări. Nu în ultimul rând, aş vrea să mulţumesc soţiei, fiului meu Matei şi părinţilor, pentru susţinerea continuă în realizarea acestui pas important din viaţa mea.

Chapter 1

Modelul vitezei relativiste a lui Einstein

Geometria hiperbolică, la fel ca şi cea euclidiană, include noţiunile de distanţă şi de unghi. Ambele geometrii conţin multe proprietăţi asemănătoare, dar există totodată şi multe diferenţe între ele. În literatura de specialitate există mai multe modele în care se poate studia geometria hiperbolică; există astfel modelul lui Poincaré pe disc, modelul lui Poincaré pe semiplanul superior, modelul pe disc al lui Beltrami-Klein etc. Urmând [134] şi [136] şi ultimele descoperiri în acest domeniul, modelul pe disc al lui Beltrami-Klein mai este cunoscut şi sub numele de modelul vitezei relativiste a lui Einstein în care se introduce noţiunea de gyrovector.

Teoria specială a relativităţii a fost formulată iniţial de Einstein în 1905, [65], pentru a explica unele rezultate obţinute în experimentele de propagare a undelor electromagnetice. Varičak în 1908 a descoperit legătura dintre teoria specială a relativităţii şi geometrie hiperbolică [138]. Modelul vitezei relativiste a lui Einstein este un alt model de geometrie hiperbolică. Multe dintre teoremele geometriei euclidiene au o formă relativ similară în modelul vitezei relativiste a lui Einstein.

Prezentăm în linii mari acest model al geometriei hiperbolice.

Un grupoid $(G, \oplus)$ este un *gyrogrup* dacă satisface următoarele axiome:

(G1) în G există un unic element, $\mathbf{0}$, astfel încât $\mathbf{0} \oplus a = a$, pentru orice $a \in G$.

(G2) pentru orice element $a \in G$ există un element $\ominus a \in G$ astfel încât $\ominus a \oplus a = 0$.

(G3) oricare ar fi $a, b, c \in G$ există un unic element $gyr[a, b]c \in G$ astfel încât $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus gyr[a, b]c$.

(G4) funcţia $gyr[a, b] : G \to G$ dată prin $c \to gyr[a, b]c$ este un automorfism al grupoidului $(G, \oplus)$. Operatorul $gyr : G \times G \to Aut(G, \oplus)$ se numeşte *gyratorul* lui G.

(G5) $gyr[a, b] = gyr[a \oplus b, b]$.

Prin $a \ominus b$ vom nota elementul $a \oplus (\ominus b)$.

Un gyrogrup $(G, \oplus)$ se numeşte *gyrocomutativ* dacă $a \oplus b = gyr[a, b](b \oplus a)$, pentru toţi $a, b \in G$.

Dacă $(G, \oplus)$ este un gyrogrup, iar $a, b \in G$, atunci unica soluţie în G a ecuaţiei $a \oplus x = b$ este $x = \ominus a \oplus b$.

Într-un gyrogrup $(G,\oplus)$ sunt adevărate relaţiile:

$$a\oplus(\ominus a\oplus b)=b$$

$$gyr[a,b]=gyr[a,b\oplus a]$$

$$gyr[a,b]=gyr[a\oplus b,\ominus a]$$

$$gyr[b,a]=gyr[\ominus a,a\oplus b]$$

Într-un gyrogrup gyrocomutativ $(G,\oplus)$ sunt adevărate relaţiile:

$$\ominus(a\oplus b)=\ominus a\ominus b$$

$$gyr[a,b]\{b\oplus(a\oplus c)\}=(a\oplus b)\oplus c$$

$$gyr[a,b]b=(a\oplus b)\ominus a$$

$$(a\oplus b)\ominus(a\oplus c)=gyr[a,b](b\ominus c)$$

$$gyr[a,b]gyr[b\oplus a,c]=gyr[a,b\oplus c]gyr[b,c]$$

$$gyr[a,\ominus b]gyr[b,\ominus c]gyr[c,\ominus a]=gyr[\ominus a\oplus b,\oplus a\ominus c]$$

$$gyr[a,\ominus b]gyr[b,\ominus c]gyr[c,\ominus d]=gyr[a,\ominus d]$$

$$gyr[a,\ominus b]=gyr[\ominus a\oplus b,a\oplus b]gyr[a,b]$$

Numim *gyrovector legat* PQ în gyrogrupul gyrocomutativ $(G,\oplus)$ o pereche ordonată de puncte $P,Q\in G$. Convenim ca în G gyrovectorului PQ să îi corespundă valoarea $\ominus P\oplus Q$. Vom scrie

$$\mathbf{v}=PQ=\ominus P\oplus Q$$

Gyrovectorii legaţi PQ şi $P'Q'$ în gyrogrupul gyrocomutativ $(G,\oplus)$ se numesc *echivalenţi,* scriem $\ominus P\oplus Q\sim\ominus P'\oplus Q'$ dacă au aceeaşi valoare în G, adică dacă $\ominus P\oplus Q=\ominus P'\oplus Q'$. Relaţia "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă. Clasele de echivalenţă rezultate le vom numi *gyrovectori.*

Un *spaţiu al gyrovectorilor* $(G,\oplus,\otimes)$ este un grup gyrocomutativ $(G,\oplus)$ ce satisface următoarele axiome:

(1) $gyr[\mathbf{u},\mathbf{v}]\mathbf{a}\cdot gyr[\mathbf{u},\mathbf{v}]\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, pentru orice $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{u},\mathbf{v}\in G$.

(2) G admite înmulţirea cu scalari, $\otimes$, în sensul următor:

Pentru orice $r,r_1,r_2\in\mathbb{R}$ şi orice element $\mathbf{a}\in G$ avem:

(G1) $1\otimes\mathbf{a}=\mathbf{a}$

(G2) $(r_1+r_2)\otimes\mathbf{a}=r_1\otimes\mathbf{a}\oplus r_2\otimes\mathbf{a}$

(G3) $(r_1r_2)\otimes\mathbf{a}=r_1\otimes(r_2\otimes\mathbf{a})$

(G4) $\frac{|r|\otimes\mathbf{a}}{\|r\otimes\mathbf{a}\|}=\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$

(G5) $gyr[\mathbf{u},\mathbf{v}](r\otimes\mathbf{a})=r\otimes gyr[\mathbf{u},\mathbf{v}]\mathbf{a}$

(G6) $gyr[r_1\otimes\mathbf{v},r_1\otimes\mathbf{v}]=1$

(3) $(\|G\|,\oplus,\otimes)$ este spaţiu real vectorial, pentru mulţimea "vectorilor" $\|G\|=\{\pm\|\mathbf{a}\|:\mathbf{a}\in G\}\subset\mathbb{R}$,

Pentru orice $r\in\mathbb{R}$ şi $\mathbf{a},\mathbf{b}\in G$ avem:

(G7) $\|r\otimes\mathbf{a}\|=|r|\otimes\|\mathbf{a}\|$

(G8) $\|\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| \oplus \|\mathbf{b}\|$.

Se verifică simplu că $(-1) \otimes \mathbf{a} = \ominus\mathbf{a}$, $\|\ominus\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$, $\mathbf{a}\otimes r = r \otimes \mathbf{a}$. Din axioma (G1) rezultă că pentru orice n, t numere naturale sunt adevărate următoarele proprietăţi:

$$n \otimes \mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{a} \oplus \mathbf{a} \oplus ... \oplus \mathbf{a}}_{n \text{ ori}}$$

şi

$$\mathbf{a} \otimes (-t) = \ominus\mathbf{a}\otimes t.$$

Spaţiul gyrovectorilor $G = (G, \oplus, \otimes)$ posedă legea de distributivitate la stânga

$$r \otimes (r_1 \otimes \mathbf{a} \oplus r_2 \otimes \mathbf{a}) = r \otimes (r_1 \otimes \mathbf{a}) \oplus r \otimes (r_2 \otimes \mathbf{a}).$$

Fie $G = (G, \oplus, \otimes)$ spaţiul gyrovectorilor. *Gyrometrica* este dată de funcţia gyrodistanţă $d_\oplus(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : G \times G \to \mathbb{R}_+$,

$$d_\oplus(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\ominus\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\| = \|\mathbf{b} \ominus \mathbf{a}\|$$

Fie **a,b** două puncte distincte din spaţiul gyrovectorilor $(G, \oplus, \otimes)$. *Gyrolinia* în G ce trece prin punctele **a** şi **b** este formată din mulţimea punctelor $L = \mathbf{a} \oplus (\ominus\mathbf{a} \oplus \mathbf{b})\otimes t$ din G cu $t \in \mathbb{R}$. Două gyrolinii ce trec prin aceleaşi două puncte distincte coincid. Un *gyrosegment* **ab** format din mulţimea punctelor $L = \mathbf{a} \oplus (\ominus\mathbf{a} \oplus \mathbf{b})\otimes t$ cu $t \in [0, 1]$. Gyrolungimea $|\mathbf{ab}|$ a gyrosegmentului **ab** este gyrodistanţa dintre **a** şi **b,**

$$|\mathbf{ab}| = d_\oplus(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\ominus\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\|$$

Două gyrosegmente sunt *egale* dacă au aceeaşi gyrolungime.

Dacă un punct **b** aparţine unui gyrosegment **ac** în spaţiul gyrovectorilor $(G, \oplus, \otimes)$, atunci

$$\|\ominus\mathbf{a} \oplus \mathbf{c}\| = \|\ominus\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\| \oplus \|\ominus\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}\|.$$

Trei puncte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ în spaţiul gyrovectorilor $G = (G, \oplus, \otimes)$ sunt *gyrocoliniare* dacă aparţin aceleiaşi gyrolinii, adică dacă există $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a} \oplus (\ominus\mathbf{a} \oplus \mathbf{b})\otimes t_k$$

pentru orice $t_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, 3}$. Dacă trei puncte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ în spaţiul gyrovectorilor $G = (G, \oplus, \otimes)$ sunt gyrocoliniare, atunci

$$gyr[\mathbf{a}_1, \ominus\mathbf{a}_2]gyr[\mathbf{a}_2, \ominus\mathbf{a}_3] = gyr[\mathbf{a}_1, \ominus\mathbf{a}_3].$$

Gyromijlocul $\mathbf{p}^m_{\mathbf{ac}}$ al oricăror două puncte distincte **a** şi **c** din spaţiul gyrovectorilor $(G, \oplus, \otimes)$ este dat de ecuaţia

$$\mathbf{p}^m_{\mathbf{ac}} = \mathbf{a} \oplus (\ominus\mathbf{a} \oplus \mathbf{c})\otimes\frac{1}{2}$$

Fie $\ominus\mathbf{a}_1\oplus\mathbf{b}_1$ şi $\ominus\mathbf{a}_2\oplus\mathbf{b}_2$ doi gyrovectori nenuli în spaţiul gyrovectorilor $(G, \oplus, \otimes)$. Gyrocosinusul unghiului α, $0 \leq \alpha \leq \pi$, dintre cei doi gyrovectori este dat de ecuaţia

$$\cos\alpha = \frac{\ominus\mathbf{a}_1\oplus\mathbf{b}_1}{\|\ominus\mathbf{a}_1\oplus\mathbf{b}_1\|} \cdot \frac{\ominus\mathbf{a}_2\oplus\mathbf{b}_2}{\|\ominus\mathbf{a}_2\oplus\mathbf{b}_2\|}$$

Fie s o constantă pozitivă, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ spaţiul vectorilor $n-$ dimensionali şi $\mathbb{R}^n_s = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{v}\| < s\}$ $s-$ sfera vectorilor n-dimensionali având norma mai mică decât s. Adunarea Einstein $\oplus$ este o operaţie binară pe $\mathbb{R}^n_s$ dată de ecuaţia

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{s^2}} \left\{ \mathbf{u} + \frac{1}{\gamma_{\mathbf{u}}} \mathbf{v} + \frac{1}{s^2} \frac{\gamma_{\mathbf{u}}}{1 + \gamma_{\mathbf{u}}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} \right\},$$

pentru toţi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n_s$, unde $\gamma_{\mathbf{u}}$ este *factorul gamma* dat de ecuaţia

$$\gamma_{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{s^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{s^2}}}, \tag{1.1}$$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ reprezintă produsul scalar al vectorilor $n-$ dimensionali $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$, iar $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^2$. Din relaţia precedentă rezultă o egalitate frecvent utilizată

$$\frac{\mathbf{u}^2}{s^2} = \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{s^2} = \frac{\gamma^2_{\mathbf{u}} - 1}{\gamma^2_{\mathbf{u}}}.$$

Perechea $(\mathbb{R}^n_s, \oplus)$ este grupoidul lui Einstein. Prin $\mathbf{a} \ominus \mathbf{b}$ vom nota elementul $\mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{b})$.

În general adunarea Einstein nu este comutativă şi nici asociativă. Adunarea Einstein satisface identitatea gamma

$$\gamma_{\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{u}} \gamma_{\mathbf{v}} \left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{s^2}\right),$$

ce poate fi rescrisă astfel

$$\gamma_{\mathbf{u} \ominus \mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{u}} \gamma_{\mathbf{v}} \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{s^2}\right) \tag{1.2}$$

pentru toţi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n_s$. Identitatea precedentă semnalează apropierea dintre geometria hiperbolică şi teoria specială a relativităţii studiată pentru prima dată de către Sommerfeld şi Varičak cu ajutorul "rapidităţii". Astfel, rapiditatea $\phi_{\mathbf{v}}$ a vitezei relativiste $\mathbf{v}$ este definită de ecuaţia

$$\phi_{\mathbf{v}} = \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{v}\|}{s} \tag{1.3}$$

astfel încât

$$\cosh \phi_{\mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{v}}$$

$$\sinh \phi_{\mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{v}} \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}.$$

Sommerfeld şi Varičak au arătat că

$$\cosh \phi_{\mathbf{u} \ominus \mathbf{v}} = \cosh \phi_{\mathbf{u}} \cosh \phi_{\mathbf{v}} - \sinh \phi_{\mathbf{u}} \sinh \phi_{\mathbf{v}} \cos A$$

unde unghiul A este interpretat ca fiind un unghi hiperbolic al unui "triunghi de viteze relativiste" în modelul lui Beltrami al geometriei hiperbolice. Din relaţia (1.2) rezultă o egalitate utilă

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{s^2} = 1 - \frac{\gamma_{\mathbf{u} \ominus \mathbf{v}}}{\gamma_{\mathbf{u}} \gamma_{\mathbf{v}}}$$

Doi gyrovectori $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ din $\mathbb{R}_s^n$ sunt *paraleli* dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$, adunarea Einstein devenind

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{1 + \frac{1}{s^2} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}, \tag{1.4}$$

iar de aici rezultă

$$\|\mathbf{u}\| \oplus \|\mathbf{v}\| = \frac{\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|}{1 + \frac{1}{s^2} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Adunarea Einstein restricţionată la forma (1.4) este comutativă şi asociativă, $\mathbb{R}_s^n$ împreună cu adunarea Einstein restricţionată determinând un grup, lucru observat de către Einstein, care însă nu a făcut nici o referire la ceea ce se întâmplă dacă vectorii viteză nu sunt paraleli. Ungar a arătat în 1988 că $\mathbb{R}_s^n$ împreună cu adunarea Einstein formează un gyrogrup gyrocomutativ. Gyraţiile Einstein $gyr[\mathbf{u}, \mathbf{v}] : \mathbb{R}_s^n \to \mathbb{R}_s^n$ sunt automorfisme ale gyrogrupului $(\mathbb{R}_s^n, \oplus)$, date de ecuaţia

$$gyr[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\mathbf{w} = \ominus(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \{\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w})\}, \tag{1.5}$$

iar produsul scalar în $\mathbb{R}_s^n$ păstrează proprietăţile produsului scalar din spaţiul V,

$$gyr[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\mathbf{a} \cdot gyr[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

pentru toţi $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}_s^n$.

Din ecuaţia (1.5) se obţine ecuaţia gyraţiei. Astfel, pentru orice $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}_s^n$ avem

$$gyr[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\mathbf{w} = \mathbf{w} + \frac{A\mathbf{u} + B\mathbf{v}}{D},$$

unde

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{s^2} \frac{\gamma_{\mathbf{u}}^2}{\gamma_{\mathbf{u}} + 1} (\gamma_{\mathbf{v}} - 1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \frac{1}{s^2} \gamma_{\mathbf{u}} \gamma_{\mathbf{v}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \\
&\quad + \frac{2}{s^4} \frac{\gamma_{\mathbf{u}}^2 \gamma_{\mathbf{v}}^2}{(\gamma_{\mathbf{u}} + 1)(\gamma_{\mathbf{v}} + 1)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \\
B &= -\frac{1}{s^2} \frac{\gamma_{\mathbf{v}}}{\gamma_{\mathbf{v}} + 1} \{\gamma_{\mathbf{u}} (\gamma_{\mathbf{v}} + 1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + (\gamma_{\mathbf{u}} - 1)\gamma_{\mathbf{v}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\} \\
D &= \gamma_{\mathbf{u}} \gamma_{\mathbf{v}} \left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{s^2}\right) + 1 = \gamma_{\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}} + 1 > 1
\end{aligned}$$

Înmulţirea Einstein cu scalari $r \otimes \mathbf{v}$ în $\mathbb{R}_s^n$ este dată de ecuaţia

$$\begin{aligned}
r \otimes \mathbf{v} &= s \frac{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r - \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r}{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r + \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \\
&= s \tanh(r \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|},
\end{aligned}$$

unde $r \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}_s^n, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ şi $r \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Înmulţirea Einstein cu scalari poate fi rescrisă în funcţie de factorul gamma astfel:

$$r \otimes \mathbf{v} = \frac{1 - (\gamma_{\mathbf{v}} - \sqrt{\gamma_{\mathbf{v}}^2 - 1})^{2r}}{1 + (\gamma_{\mathbf{v}} - \sqrt{\gamma_{\mathbf{v}}^2 - 1})^{2r}} \frac{\gamma_{\mathbf{v}}}{\sqrt{\gamma_{\mathbf{v}}^2 - 1}} \mathbf{v} \tag{1.6}$$

cu $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Gyrogrupul Einstein $(\mathbb{R}_s^n, \oplus)$ peste care definim înmulţirea Einstein cu scalari determină spaţiul Einstein al gyrovectorilor $(\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$. Gyrometrica spaţiului Einstein al gyrovectorilor $(\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$ este dată de funcţia gyrodistanţă

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b} \ominus \mathbf{a}|\,. \tag{1.7}$$

Gyroliniile în spaţiul Einstein al gyrovectorilor $(V_s, \oplus, \otimes)$ coincid cu geodezicele modelului pe disc al lui Beltrami - Klein al geometriei hiperbolice.

Un gyrotriunghi ABC în spaţiul gyrovectorilor $(V_s, \oplus, \otimes)$ este determinat de trei puncte $A, B, C \in G$, numite vârfurile gyrotriunghiului şi de gyrosegmentele AB, AC şi BC, numite laturile gyrotriunghiului. Laturile gyrotriunghiului determină trei gyrounghiuri α, β şi γ, $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ corespunzătoare vârfurilor A, B, respectiv C.

Prezentăm în continuare câteva teoreme demonstrate de către A. Ungar, utilizate de către noi pentru obţinerea altor rezultate.

Teorema lui Menelaus în modelul vitezei relativiste a lui Einstein.

Fie $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ şi $\mathbf{a}_3$ trei puncte necoliniare în spaţiul gyrovectorilor al lui Einstein $(V_s, \oplus, \otimes)$. Dacă o gyrolinie intersectează gyrolaturile gyrotriunghiului $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ în gyropunctele $\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{13}, \mathbf{a}_{23,}$, atunci

$$\frac{\gamma_{\ominus\mathbf{a}_1\oplus\mathbf{a}_{12}} \|\ominus\mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{a}_{12}\|}{\gamma_{\ominus\mathbf{a}_2\oplus\mathbf{a}_{12}} \|\ominus\mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{a}_{12}\|} \frac{\gamma_{\ominus\mathbf{a}_2\oplus\mathbf{a}_{23}} \|\ominus\mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{a}_{23}\|}{\gamma_{\ominus\mathbf{a}_3\oplus\mathbf{a}_{23}} \|\ominus\mathbf{a}_3 \oplus \mathbf{a}_{23}\|} \frac{\gamma_{\ominus\mathbf{a}_3\oplus\mathbf{a}_{13}} \|\ominus\mathbf{a}_3 \oplus \mathbf{a}_{13}\|}{\gamma_{\ominus\mathbf{a}_1\oplus\mathbf{a}_{13}} \|\ominus\mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{a}_{13}\|} = 1 \tag{1.8}$$

unde $\gamma_{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{s^2}}}$ este factorul gamma. (vezi [135], p 463)

Teorema lui Ceva în modelul vitezei relativiste a lui Einstein.

Fie $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ şi $\mathbf{a}_3$ trei puncte necoliniare în spaţiul gyrovectorilor al lui Einstein $(V_s, \oplus, \otimes)$, iar $\mathbf{a}_{123}$ este un punct în planul gyrotriunghiului $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$. Dacă gyroliniile $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_{123}$, $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_{123}$, $\mathbf{a}_3\mathbf{a}_{123}$ intersectează dreptele $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1$, respectiv $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, atunci

$$\frac{\gamma_{\ominus\mathbf{a}_1\oplus\mathbf{a}_{12}} \|\ominus\mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{a}_{12}\|}{\gamma_{\ominus\mathbf{a}_2\oplus\mathbf{a}_{12}} \|\ominus\mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{a}_{12}\|} \frac{\gamma_{\ominus\mathbf{a}_2\oplus\mathbf{a}_{23}} \|\ominus\mathbf{a}_2 \oplus \mathbf{a}_{23}\|}{\gamma_{\ominus\mathbf{a}_3\oplus\mathbf{a}_{23}} \|\ominus\mathbf{a}_3 \oplus \mathbf{a}_{23}\|} \frac{\gamma_{\ominus\mathbf{a}_3\oplus\mathbf{a}_{13}} \|\ominus\mathbf{a}_3 \oplus \mathbf{a}_{13}\|}{\gamma_{\ominus\mathbf{a}_1\oplus\mathbf{a}_{13}} \|\ominus\mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{a}_{13}\|} = 1, \tag{1.9}$$

unde $\gamma_{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{s^2}}}$ este factorul gamma. (vezi [135], p 461)

Teorema sinusurilor în modelul vitezei relativiste a lui Einstein.

Fie ABC un gyrotriunghi în spaţiul gyrovectorilor al lui Einstein $(V_s, \oplus, \otimes)$, având vârfurile A, B şi C, laturile $\mathbf{a} = -B \oplus C, \mathbf{b} = -C \oplus A$ şi $\mathbf{c} = -A \oplus B$. Fie $a = \|\mathbf{a}\|, b = \|\mathbf{b}\|, c = \|\mathbf{c}\|$ lungimile gyrolaturilor gyrotriunghiului ABC, $a, b, c \in (-s, s)$, iar $\alpha = \angle BAC, \beta = \angle CBA$, $\gamma = \angle ACB$ sunt gyrounghiurile gyrotriunghiului ABC. Atunci următoarea egalitate este adevărată:

$$\frac{\sin\alpha}{\gamma_a a} = \frac{\sin\beta}{\gamma_b b} = \frac{\sin\gamma}{\gamma_c c}, \tag{1.10}$$

unde $\gamma_{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{s^2}}}$ este factorul gamma. (vezi [135], p. 544)

Teorema cosinusului în modelul vitezei relativiste a lui Einstein.

Fie ABC un gyrotriunghi în spaţiul gyrovectorilor al lui Einstein $(V_s, \oplus, \otimes)$, având vârfurile A, B şi C, laturile $\mathbf{a} = -B \oplus C, \mathbf{b} = -C \oplus A$ şi $\mathbf{c} = -A \oplus B$. Fie $a = \|\mathbf{a}\|, b = \|\mathbf{b}\|, c = \|\mathbf{c}\|$ lungimile gyrolaturilor gyrotriunghiului ABC, iar $\alpha = \angle BAC, \beta = \angle CBA, \gamma = \angle ACB$ sunt gyrounghiurile gyrotriunghiului ABC. Atunci următoarea egalitate este adevărată:

$$\gamma_a = \gamma_b\gamma_c(1 - b_s c_s \cos\alpha), \tag{1.11}$$

unde $\gamma_{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{s^2}}}$ este factorul gamma. (vezi [135], p.542)

Teorema bisectoarei în modelul vitezei relativiste a lui Einstein.

Fie ABC un gyrotriunghi în spaţiul gyrovectorilor al lui Einstein $(V_s, \oplus, \otimes)$, având vârfurile A, B şi C, laturile $\mathbf{a} = -B \oplus C, \mathbf{b} = -C \oplus A$ şi $\mathbf{c} = -A \oplus B$. Fie $a = \|\mathbf{a}\|, b = \|\mathbf{b}\|, c = \|\mathbf{c}\|$ lungimile gyrolaturilor gyrotriunghiului ABC, iar D un punct pe latura BC a gyrotriunghiului astfel încât AD este bisectoarea gyrounghiului $\angle BAC$. Atunci,

$$\frac{\gamma_{|BD|}\,|BD|}{\gamma_{|CD|}\,|CD|} = \frac{\gamma_{|AB|}\,|AB|}{\gamma_{|AC|}\,|AC|}, \tag{1.12}$$

unde $\gamma_{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{s^2}}}$ este factorul gamma. (vezi [136], p.151).

Chapter 2

Varianta hiperbolică a unor rezultate geometrice clasice

Geometria hiperbolică a apărut în prima jumătate a secolului al XIX-lea ca o încercare de a înţelege baza axiomatică a geometriei lui Euclid. Este cunoscut de asemena faptul că deşi sunt mai multe tipuri de geometrii neeucliediene, acestea au multe caracteristici comune cu geometria euclidiană. Astfel, geometria hiperbolică include concepte similare, ca de exemplu cele de distanţă şi unghi.

2.1 Teorema lui Menelaus în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice

Menelaus din Alexandria, matematician şi astronom grec, a fost primul care a găsit geodezicele pe o suprafaţă curbă ca analoage de linii drepte. Binecunoscuta teoremă a lui Menelaus afirmă că dacă l este o dreaptă ce nu trece prin nici un vârf al unui triunghi ABC, astfel încât dreapta l intersectează laturile BC, CA, and AB în D, E, respectiv F, atunci $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$ [79]. Acest rezultat este simplu dar are o mare utilizare în aplicaţii. Menţionăm câteva demonstraţii diferite date de către A. Johnson [84], N. A. Court [55], C. Coşniţă [53], A. Ungar [135]. În cele ce urmează vom prezenta o demonstraţie pentru varianta hiperbolică a acestei teoreme utilizând modelul pe disc al lui Poincaré. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [38].

Teorema 2.1.1. (**Teorema lui Menelaus pentru un triunghi hiperbolic**) Dacă l este o dreaptă hiperbolică ce nu trece prin nici un vârf al triunghiului hiperbolic ABC astfel încât l intersectează BC în D, CA în E şi AB în F, atunci

$$\frac{(AF)_\gamma}{(BF)_\gamma} \cdot \frac{(BD)_\gamma}{(CD)_\gamma} \cdot \frac{(CE)_\gamma}{(AE)_\gamma} = 1.$$

Teorema 2.1.2. (Reciproca teoremei lui Menelaus pentru un triunghi hiperbolic) Dacă punctul D aparţine dreptei hiperbolice BC, E aparţine dreptei hiperbolice CA, şi F aparţine dreptei hiperbolice AB atfel încât

$$\frac{(AF)_\gamma}{(BF)_\gamma} \cdot \frac{(BD)_\gamma}{(CD)_\gamma} \cdot \frac{(CE)_\gamma}{(AE)_\gamma} = 1,$$

atunci punctele D, E şi F sunt coliniare.

Teorema 2.1.3. (O teoremă a lui Ţiţeica în modelul lui Poincaré) Printr-un punct O situat în interiorul unui triunghi hiperbolic ABC se duce o dreaptă hiperbolică ce intersectează geodezicele BC, CA şi AB în A', B', respectiv C'. Dacă A'', B'', C'' sunt simetricele punctelor A', B', respectiv C' în raport cu punctul O, iar două dintre dreptele AA'', BB'', CC'' sunt concurente, atunci toate sunt concurente.

2.2 Teorema lui Menelaus pentru patrulatere hiperbolice

O aplicaţie a teoremei lui Menelaus o reprezintă forma pentru patrulaterele hiperbolice, care în geometria euclidiană următoarea formulare: dacă X, Y, Z, W sunt puncte coliniare pe laturile AB, BC, CD, respectiv DA, ale patrulaterului $ABCD$, atunci $\frac{AX}{BX} \cdot \frac{BY}{CY} \cdot \frac{CZ}{DZ} \cdot \frac{DW}{AW} = 1$ [17]. În continuare vom prezenta o varianta hiperbolică a teoremei lui Menelaus pentru patrulatere în modelul pe disc al lui Poincaré şi în modelul vitezei relativiste a lui Einstein. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrările [18] şi [39].

Dacă A, B şi X sunt puncte distincte pe o dreaptă hiperbolică h, se numeşte *raţie hiperbolică* raportul $h(A, X, B) = \frac{\sinh(d(A,X))}{\sinh(d(X,B))}$, dacă X este între A şi B, şi $h(A, X, B) = -\frac{\sinh(d(A,X))}{\sinh(d(X,B))}$ pentru orice altă situaţie (unde $d(M, N)$ reprezintă distanţa hiperbolică dintre punctele M şi N).

Raţia hiperbolică are următoarele proprietăţi:

1. $h(A, X, B) = \frac{1}{h(B,X,A)}$,
2. dacă X este între A şi B, atunci $h(A, X, B) \in (0, 1)$,
3. dacă X este pe AB, după B, atunci $h(A, X, B) \in (-\infty, -1)$,
4. dacă X este pe AB, după A, atunci $h(A, X, B) \in (-1, 0)$,
5. dacă X şi Y sunt puncte pe drepta hiperbolică astfel încât $h(A, X, B) = h(A, Y, B)$, atunci $X = Y$.

Pentru mai multe detalii despre raţia hiperbolică a se vedea, de exemplu, [130]. În demostraţia pe care o vom da mai jos vom utiliza toerema lui Menealus pentru un triunghi hiperbolic, al carei enunţ este următorul: Dacă l este o dreaptă hiperbolică ce nu trece prin nici un vârf al triunghiului hiperbolic ABC astfel încât l intersectează BC în D, CA în E şi AB în F, atunci

$$h(A, F, B) \cdot h(B, D, C) \cdot h(C, E, A) = -1$$

(vezi [97], p. 113).

Teorema 2.2.1. (Teorema lui Menelaus pentru patrulatere hiperbolice în modelul pe disc al lui Poincaré). Dacă o dreaptă hiperbolică l intersectează laturile AB, BC, CD, DA ale patrulaterului hiperbolic $ABCD$ în X, Y, Z, respectiv W, atunci

$$h(A,X,B)\cdot h(B,Y,C)\cdot h(C,Z,D)\cdot h(D,W,A)=1$$

F. Smarandache a generalizat teorema lui Menelaus pentru orice poligon având $n\geq 4$ laturi, după cum urmează: Dacă o dreaptă l intersectează laturile $A_1A_2, A_2A_3, ...,$ şi A_nA_1 ale n-gonului $A_1A_2...A_n$, respectiv în punctele $M_1, M_2, ..., M_n$, atunci

$$\frac{M_1A_1}{M_1A_2}\cdot\frac{M_2A_2}{M_2A_3}\cdot...\cdot\frac{M_nA_n}{M_nA_1}=1$$

[122]. În cele ce urmează vom prezenta demonstraţii pentru varianta hiperbolică a teoremei lui Menelaus pentru patrulatere şi a teoremei lui Smarandache în geometria hiperbolică utilizând modelul vitezei relativiste a lui Einstein.

Teorema 2.2.2. (Teorema lui Menelaus pentru patrulatere hiperbolice) Dacă l este o dreaptă hiperbolică ce nu trece prin nici un vârf al patrulaterului hiperbolic convex $ABCD$, astfel încât l intersectează AB în X, BC în Y, CD în Z şi DA în W, atunci

$$\frac{\gamma_{|AX|}|AX|}{\gamma_{|BX|}|BX|}\cdot\frac{\gamma_{|BY|}|BY|}{\gamma_{|CY|}|CY|}\cdot\frac{\gamma_{|CZ|}|CZ|}{\gamma_{|DZ|}|DZ|}\cdot\frac{\gamma_{|DW|}|DW|}{\gamma_{|AW|}|AW|}=1$$

Dăm în continuare o consecinţă a acestei teoreme.

Corolarul 2.2.3. (Teorema transversalei pentru triunghiuri hiperbolice). Fie D un punct pe latura BC a triunghiului hiperbolic ABC şi l o dreaptă hiperbolică ce nu trece prin nici un vârf al triunghiului, astfel încât l intersectează pe AB în M, pe AC în N şi pe AD în P. Atunci,

$$\frac{\gamma_{|AM|}|AM|}{\gamma_{|AB|}|AB|}\cdot\frac{\gamma_{|AC|}|AC|}{\gamma_{|AN|}|AN|}\cdot\frac{\gamma_{|PN|}|PN|}{\gamma_{|PM|}|PM|}\cdot\frac{\gamma_{|DB|}|DB|}{\gamma_{|DC|}|DC|}=1$$

Teorema 2.2.4. (Teorema lui Menelaus pentru un poligon hiperbolic convex) Dacă l este o dreaptă ce nu trece prin nici un vârf al *poligonului* convex $A_1A_2...A_n$ astfel încât l intersectează A_1A_2 în M_1, A_2A_3 în M_2, ..., şi A_nA_1 în M_n, atunci

$$\frac{\gamma_{|M_1A_1|}|M_1A_1|}{\gamma_{|M_1A_2|}|M_1A_2|}\cdot\frac{\gamma_{|M_2A_2|}|M_2A_2|}{\gamma_{|M_2A_3|}|M_2A_3|}\cdot...\cdot\frac{\gamma_{|M_nA_n|}|M_nA_n|}{\gamma_{|M_nA_1|}|M_nA_1|}=1$$

2.3 Teorema lui Ceva în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice

În cele ce urmează vom prezenta o demonstraţie pentru varianta hiperbolică a teoremei lui Ceva utilizând modelul pe disc al lui Poincaré. Forma euclidiană a acestei teoreme este următoarea: dacă într-un triunghi $A_1A_2A_3$ considerăm cevienele A_1R, A_2Q şi A_3P concurente, atunci $\frac{A_1P}{PA_2} \cdot \frac{A_2R}{RA_3} \cdot \frac{A_3Q}{QA_1} = 1$ [84]. Teorema are o mare aplicabilitate în aplicaţiile în care sunt date drepte concurente. Menţionăm câteva demonstraţii diferite ale acestei teoreme, date de către N.A.Court [54], D.Grindberg [75], R.Honsberg [79], A.Ungar [135]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [7].

Teorema 2.3.1. (Teorema lui Ceva pentru un triunghi hiperbolic) Dacă M este un punct ce nu aparţine nici unei laturi a unui triunghi hiperbolic $A_1A_2A_3$ astfel încât A_3M şi A_1A_2 se intersectează în P, A_2M şi A_3A_1 în Q, iar A_1M şi A_2A_3 se intersectează în R, atunci,

$$\frac{(A_1P)_\gamma}{(A_2P)_\gamma} \cdot \frac{(A_2R)_\gamma}{(A_3R)_\gamma} \cdot \frac{(A_3Q)_\gamma}{(A_1Q)_\gamma} = 1.$$

Apare acum întrebarea dacă există reciproca acestei teoreme. Vom arăta în cele ce urmează că teorema lui Ceva admite reciprocă în anumite condiţii.

Teorema 2.3.2. (**Reciproca teoremei lui Ceva pentru un triunghi hiperbolic**) Dacă punctele R, P şi Q aparţin dreptelor hiperbolice A_3A_2, A_2A_1, respectiv A_1A_3 astfel încât

$$\frac{(A_1P)_\gamma}{(A_2P)_\gamma} \cdot \frac{(A_2R)_\gamma}{(A_3R)_\gamma} \cdot \frac{(A_3Q)_\gamma}{(A_1Q)_\gamma} = 1,$$

iar două dintre dreptele hiperbolice A_1R, A_2Q şi A_3P se intersectează, atunci toate dreptele hiperbolice A_1R, A_2Q, A_3P trec printr-un punct comun.

Definiţia 2.3.3. Numim ***simediană hiperbolică*** a unui triunghi hiperbolic, simetrica unei mediane hiperbolice faţă de bisectoarea corespunzătoare aceluiaşi unghi.

Corolarul 2.3.4. Medianele hiperbolice ale unui triunghi hiperbolic $A_1A_2A_3$ sunt concurente.

Definiţia 2.3.5. Dreptele hiperbolice AM şi AM' se numesc *izogonale* faţă de unghiul $\widehat{BAC}$ dacă sunt simetrice faţă de bisectoare*a unghiului* $\widehat{BAC}$.

Teorema 2.3.6. Dacă dreptele hiperbolice A_1P şi A_1Q sunt două izogonale ale unghiului $\widehat{A_2A_1A_3}$ al triunghiului hiperbolic $A_1A_2A_3$, iar punctele P şi Q aparţin laturii A_2A_3, atunci

$$\frac{(CQ)_\gamma}{(A_2Q)_\gamma} \cdot \frac{(CP)_\gamma}{(A_2P)_\gamma} = \left(\frac{(CA_1)_\gamma}{(A_2A_1)_\gamma}\right)^2.$$

Corolarul 2.3.7. Dacă dreapta hiperbolică A_1P este o simediană hiperbolică a triunghiului hiperbolic $A_1A_2A_3$, iar punctul P aparţine laturii A_2A_3, atunci

$$\frac{(A_3P)_\gamma}{(A_2P)_\gamma} = \left(\frac{(A_3A_1)_\gamma}{(A_2A_1)_\gamma}\right)^2.$$

Corolarul 2.3.8. Simedianele hiperbolice ale unui triunghi hiperbolic sunt concurente.

Corolarul 2.3.9. Bisectoarele interioare ale unui triunghi hiperbolic $A_1A_2A_3$ sunt concurente.

Teorema 2.3.10. (O teoremă a lui Ţiţeica în modelul lui Poincaré). Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul hiperbolic cevian al unui punct P în raport cu un triunghi hiperbolic ABC. O geodezică l intersectează laturile BC, CA şi AB în punctele A_2, B_2, respectiv C_2. Dacă dreptele hiperbolice B_1C_2 şi BC se intersectează în A_3, C_1A_2 şi CA se intersectează în B_3, A_1B_2 şi AB se intersectează în C_3, iar două dintre dreptele hiperbolice AA_3, BB_3, CC_3 se intersectează, atunci dreptele hiperbolice AA_3, BB_3 şi CC_3 sunt concurente.

2.4 Teorema lui Desargues în modelul pe disc al lui Poincaré

În această secţiune vom prezenta teorema lui Desargues în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice. Binecunoscuta teoremă a lui Desargues afirmă că dacă trei drepte ce unesc vârfurile corespunzătoare a două triunghiuri sunt concurente, atunci cele trei puncte determinate de intersecţiile dreptelor suport ale laturilor corespunzătoare triunghiurilor respective sunt coliniare [84]. Aceasta teoremă are o mare aplicabilitate în geometria proiectivă. Menţionăm câteva demonstraţii diferite ale acestei teoreme, date de către N. A. Court [54], H. Coxeter [57], C. Durell [64], H. Eves [67], C.Ogilvy [111], W. Graustein [74]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [9].

Teorema 2.4.1. (**Varianta hiperbolică a teoremei lui Desargues**) Dacă ABC şi $A'B'C'$ sunt două triunghiuri astfel încât dreptele AA', BB' şi CC' se intersectează în O, iar BC şi $B'C'$ se intersectează în L, CA şi $C'A'$ se intersectează în M, AB şi $A'B'$ se intersectează în N, atunci punctele L, M şi N sunt coliniare.

Teorema lui Desargues, varianta hiperbolică, admite reciprocă în anumite condiţii. Vom da în continuare reciproca teoremei lui Desargues în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice.

Teorema 2.4.2. (**Varianta hiperbolică a reciprocei teoremei lui Desargues**) Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri hiperbolice astfel încât BC şi $B'C'$ se intersectează în L, CA şi $C'A'$ se intersectează în M, AB şi $A'B'$ se intersectează în N, iar punctele L, M şi N sunt coliniare. Dacă două dintre dreptele hiperbolice AA', BB' sau CC' se intersectează într-un punct O, atunci şi cea de a treia dreaptă hiperbolică trece prin O.

2.5 Teorema poligonului podar al lui Smarandache

În cele ce urmează vom prezenta o demonstraţie pentru varianta hiperbolică a teoremei poligonului podar al lui Smarandache utilizând modelul pe disc al lui Poincaré. Forma euclidiană a acestei teoreme este următoarea: dacă $M_i, i = \overline{1,n}$ sunt proiecţiile unui punct M pe laturile $A_iA_{i+1}, i = \overline{1,n}$, unde $A_{n+1} = A_1$, unui poligon $A_1A_2...A_n$, atunci

$$M_1A_1^2+M_2A_2^2+...+M_nA_n^2= M_1A_2^2+M_2A_3^2+...+M_{n-1}A_n^2+M_nA_1^2$$

[123]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [16].

Definiţia 2.5.1. Fie M un punct situat în interiorul poligonului hiperbolic convex $A_1A_2...A_n$. Poligonul hiperbolic ale cărui vârfuri sunt proiecţiile punctului M pe laturile poligonului hiperbolic $A_1A_2...A_n$ se numeşte ***poligonul hiperbolic podar*** al punctului M în raport cu $A_1A_2...A_n$.

Vom utiliza, pentru a demonstra teorema lui Smarandache în varianta hiperbolică, teorema lui Pitagora, al cărei enunţ este următorul:

Fie ABC un triunghi hiperbolic, în modelul pe disc al lui Poincaré, în care laturile $a = -B \oplus C, b = -C \oplus A, c = -A \oplus B$ au lungimile hiperbolice $a = \|\mathbf{a}\|, b = \|\mathbf{b}\|, c = \|\mathbf{c}\|$, iar α, β şi γ sunt măsurile unghiurilor A, B şi C. Dacă $\alpha = \pi/2$, atunci

$$a^2 = b^2 \oplus c^2$$

(vezi [135], p 290)

Teorema 2.5.2. Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon hiperbolic convex în discul lui Poincaré, vârfurile $A_1, A_2, ..., A_n$, fiind aşezate pe disc în sens trigonometric, au afixele $a_1 = -A_1 \oplus A_2$, $a_2 = -A_2 \oplus A_3, ...,$ respectiv $a_n = -A_n \oplus A_1$. Fie punctele $M_i, i = \overline{1,n}$ situate respectiv pe laturile $A_iA_{i+1}, i = \overline{1,n}$ cu $A_{n+1} = A_1$. Dacă perpendicularele ridicate pe laturile $A_iA_{i+1}, i = \overline{1,n}$ în punctele $M_i, i = \overline{1,n}$ sunt concurente, atunci:

$$|-A_1 \oplus M_1|^2 \ominus |-M_1 \oplus A_2|^2 \oplus |-A_2 \oplus M_2|^2 \ominus |-M_2 \oplus A_3|^2 \oplus ... \oplus |-A_n \oplus M_n|^2 \ominus |-M_n \oplus A_1|^2 = 0.$$

Observaţia 2.5.3. Pentru cazul particular $n = 3$ se obţine teorema hiperbolică a lui Carnot, demonstrată de O. Demirel şi E. Soytürk [60].

Teorema 2.5.4. Fie ABC un triunghi hiperbolic în discul lui Poincaré, unde punctele A, B şi C sunt citite pe disc în sens trigonometric. Fie punctele A', B' şi C'

pe laturile BC, CA, respectiv AB ale triunghiului hiperbolic ABC , iar A'' simetricul lui A' faţă de mijlocul segmentului hiperbolic BC; analog se construiesc punctele B'' şi C''. Dacă perpendicularele ridicate din punctele A', B' şi C' pe laturile BC, CA, respectiv AB sunt concurente, iar două dintre perpendicularele ridicate din punctele A'', B'' şi C'' pe laturile BC, CA, respectiv AB sunt concurente, atunci toate cele trei perpendiculare sunt concurente.

2.6 O demonstraţie trigonometrică a teoremei lui Steiner-Lehmus în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice

În cele ce urmează vom prezenta versiunea hiperbolică a teoremei lui Steiner-Lehmus în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice. Menţionăm că N. Sonmez [127] a prezentat o demonstraţie trigonometrică în modelul semiplanului superior al lui Poincaré, dar abordarea sa diferă de cea pe care noi o vom prezenta în cele ce urmează. Forma euclidiană a binecunoscutei teoreme a lui Steiner-Lehmus este următoarea: dacă două bisectoare interioare ale unui triunghi au aceeaşi lungime, atunci triunghiul corespunzător este isoscel [57]. Menţionăm câteva demonstraţii diferite ale acestei teoreme, date de către O.A.AbuArqob, H.E.Rabadi, J.S.Khitan [1], G.Gilbert, D.MacDonnell [71], H.Hajja [78], M.Levin [91], J.V.Malesevic [95] şi A.P.Pargeter [113]. Vom arăta că această teoremă nu mai este adevărată pentru un triunghi hiperbolic. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [15].

Vom utiliza, pentru a demonstra teorema lui Steiner-Lehmus în varianta hiperbolică, teorema cosinusului, al cărei enunţ este următorul:

Dacă ABC este un triunghi hiperbolic, în modelul pe disc al lui Poincaré, în care laturile $a = -B \oplus C, b = -C \oplus A, c = -A \oplus B$ au lungimile hiperbolice $a = \|\mathbf{a}\|, b = \|\mathbf{b}\|, c = \|\mathbf{c}\|$, iar α, β şi γ sunt măsurile unghiurilor A, B şi C,

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{-a_s^2 + b_s^2 + c_s^2 - a_s^2 b_s^2 c_s^2}{2 b_s c_s} \cdot \frac{1}{1 - a_s^2}, \\
\cos\beta &= \frac{a_s^2 - b_s^2 + c_s^2 - a_s^2 b_s^2 c_s^2}{2 a_s c_s} \cdot \frac{1}{1 - b_s^2}, \\
\cos\gamma &= \frac{a_s^2 + b_s^2 - c_s^2 - a_s^2 b_s^2 c_s^2}{2 b_s a_s} \cdot \frac{1}{1 - c_s^2},
\end{aligned}$$

unde $a_s = \frac{a}{s}$ (vezi [134], p. 259]).

Teorema 2.6.1. Dacă două bisectoare interioare ale unui triunghi hiperbolic sunt egale, atunci triunghiul nu este isoscel.

2.7 Teorema izogonalelor lui Steiner într-un triunghi hiperbolic

În cele ce urmează vom prezenta versiunea hiperbolică a unei teoreme a lui Steiner în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice. Teorema cevienelor izogonale în geometria euclidiană are următorul enunţ: produsul rapoartelor lungimilor segmentelor determinate de două izogonale ale unui vârf al unui triunghi pe cea de a treia latură este egal cu pătratul raportului lungimior laturilor ce formează unghiul respectiv [17]. Menţionăm câteva demonstraţii diferite ale acestei teoreme, date de către R.A. Johnson [84], N.A.Court [54], C. Coşniţă [53]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [19].

Vom utiliza, pentru a demonstra teorema izogonalelor lui Steiner în varianta hiperbolică, teorema sinusurilor, al cărei enunţ este următorul: Dacă ABC este un triunghi hiperbolic, în modelul pe disc al lui Poincaré, în care laturile au lungimile hiperbolice a, b, c, iar α, β şi γ sunt măsurile unghiurilor A, B şi C, atunci

$$\frac{\sin\alpha}{\sinh a} = \frac{\sin\beta}{\sinh b} = \frac{\sin\gamma}{\sinh c}$$

(vezi [98], p.112).

Teorema 2.7.1. **(Teorema izogonalelor lui Steiner).** Dacă AP şi AQ sunt două geodezice izogonale ale vârfului A al triunghiului hiperbolic ABC, iar punctele P şi Q sunt pe latura BC, atunci

$$\frac{\sinh(d(C,P))}{\sinh(d(B,P))} \cdot \frac{\sinh(d(C,Q))}{\sinh(d(B,Q))} = \left(\frac{\sinh(d(A,C))}{\sinh(d(A,B))}\right)^2$$

Corolarul 2.7.2. Dacă AP este simediană hiperbolică în triunghiul hiperbolic ABC, iar punctul P aparţine laturii BC, atunci

$$\frac{\sinh(d(C,P))}{\sinh(d(B,P))} = \left(\frac{\sinh b}{\sinh c}\right)^2.$$

În cele ce urmează, mergând în linii mari pe aceeaşi idee ca în demonstraţia teoremei precedente, vom prezenta versiunea hiperbolică teoremei lui Steiner în modelul vitezei relativiste a lui Einstein. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [31].

Teorema 2.7.3. Dacă dreptele hiperbolice AP şi AQ sunt două izogonale ale vârfului A al triunghiului hiperbolic ABC, iar punctele P şi Q sunt pe latura BC, atunci

$$\frac{\gamma_{|CQ|}\,|CQ|}{\gamma_{|BQ|}\,|BQ|} \cdot \frac{\gamma_{|CP|}\,|CP|}{\gamma_{|BP|}\,|BP|} = \left(\frac{\gamma_{|CA|}\,|CA|}{\gamma_{|BA|}\,|BA|}\right)^2$$

Corolarul 2.7.4. Dacă AP este simediană hiperbolică în triunghiul hiperbolic ABC, iar punctul P aparţine laturii BC, atunci

$$\frac{\gamma_{|CP|}\,|CP|}{\gamma_{|BP|}\,|BP|} = \left(\frac{\gamma_{|CA|}\,|CA|}{\gamma_{|BA|}\,|BA|}\right)^2.$$

Teorema 2.7.5. Dacă dreptele hiperbolice AP şi AQ sunt două izogonale ale vârfului A al triunghiului hiperbolic ABC, iar punctele P şi Q sunt pe latura BC, atunci

$$\frac{\gamma_{|BP|}\,|BP|}{\gamma_{|BQ|}\,|BQ|}\cdot\frac{\gamma_{|CP|}\,|CP|}{\gamma_{|CQ|}\,|CQ|} = \left(\frac{\gamma_{|AP|}\,|AP|}{\gamma_{|AQ|}\,|AQ|}\right)^2$$

Corolarul 2.7.6. Dacă dreptele AP şi AQ sunt două izogonale ale vârfului A al triunghiului hiperbolic ABC, iar punctele P şi Q sunt pe latura BC, atunci

$$\frac{\gamma_{|AP|}\,|AP|}{\gamma_{|AQ|}\,|AQ|} = \frac{\gamma_{|BA|}\,|BA|}{\gamma_{|BQ|}\,|BQ|}\cdot\frac{\gamma_{|CP|}\,|CP|}{\gamma_{|CA|}\,|CA|}.$$

Corolarul 2.7.7. (O teoremă a lui T. Andreescu) Dacă dreptele hiperbolice AP şi AQ sunt două izogonale ale vârfului A al triunghiului hiperbolic ABC, iar punctele P şi Q sunt pe latura BC, atunci

$$\frac{\gamma_{|CQ|}\,|CQ|}{\gamma_{|BQ|}\,|BQ|} + \frac{\gamma_{|CP|}\,|CP|}{\gamma_{|BP|}\,|BP|} \geq 2\frac{\gamma_{|CA|}\,|CA|}{\gamma_{|BA|}\,|BA|}$$

2.8 Varianta hiperbolică a teoremei lui Mathieu

În cele ce urmează vom prezenta versiunea hiperbolică a teoremei lui Mathieu în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice. Teorema lui Mathieu în geometria euclidiană are următoarea formă: dacă trei ceviene într-un triunghi sunt concurente, atunci şi izogonalele lor sunt de asemenea concurente [85]. Menţionăm câteva demonstraţii diferite ale acestei teoreme, date de către T. Lalescu [88], C. Barbu [17], C. Coşniţă [53]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [19].

Teorema 2.8.1. Fie AP_1, BP_2 şi CP_3 trei ceviene concurente ale unui triunghi hiperbolic ABC şi AQ_1, BQ_2, respectiv CQ_3 izogonalele lor. Dacă două dintre geodezicele AQ_1, BQ_2, CQ_3 se intersectează, atunci şi cea de a treia trece prin punctul de intersecţie al primelor două.

Observaţia 2.8.2. Punctul Q de concurenţă al geodezicelor AQ_1, BQ_2 şi CQ_3 se numeşte ***izogonalul conjugat*** al punctului P.

Consecinţa 2.8.3. Centrul cercului înscris într-un triunghi hiperbolic este propriul său izogonal conjugat.

Observaţia 2.8.4. Din teorema lui Mathieu rezultă că simedianele hiperbolice ale unui triunghi ABC sunt concurente. Punctul de concurenţă al simedianelor se numeşte ***punctul lui Lemoine*** al triunghiului hiperbolic ABC.

Consecinţa 2.8.5. Izogonalul conjugat al centrului de greutate al triunghiului hiperbolic ABC este punctul lui Lemoine corespunzător triunghiului ABC.

Teoremei lui Mathieu îi mai putem da o demonstraţie în discul lui Poincaré cu ajutorul gyrovectorilor urmând în linii mari demonstraţia de mai sus.

2.9 Teorema lui Nobbs în geometria hiperbolică

În cele ce urmează vom prezenta versiunea hiperbolică a teoremei lui Nobbs în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice. Teorema lui Nobbs în geometria euclidiană are următoarea formă: dacă A', B', C' sunt punctele de contact dintre cercul înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB ale unui triunghi ABC, iar A'', B'', C'' sunt punctele de intersecţie dintre BC şi $B'C'$, AC şi $A'C'$, respectiv AB şi $A'B'$, atunci punctele A'', B'' şi C'' sunt coliniare. Punctele A'', B'' şi C'' se numesc *punctele lui Nobbs*, iar dreapta pe care se află aceste puncte se numeşte *dreapta lui Gergonne*. Menţionăm câteva demonstraţii diferite ale acestei teoreme, date de către C. Barbu [17], C. Coşniţă [53]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [33].

Lema 2.9.1. Dacă A', B', C' sunt punctele de contact dintre cercul înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB ale unui triunghi hiperbolic ABC, atunci $d(A, B') = d(A, C')$, $d(B, C') = d(B, A')$ şi $d(C, A') = d(C, B')$.

Lema 2.9.2. Dacă A', B', C' sunt punctele de contact dintre cercul înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB ale unui triunghi hiperbolic ABC, atunci geodezicele AA', BB' şi CC' sunt concurente.

Observaţia 2.9.3. Punctul de concurenţă al geodezicelor AA', BB' şi CC' se numeşte *punctul lui Gergonne* corespunzător triunghiului ABC.

Teorema 2.9.4. (Teorema lui Nobbs în varianta hiperbolică). Fie A', B', C' sunt punctele de contact dintre cercul înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB ale unui triunghi hiperbolic ABC. Dacă geodezicele BC şi $B'C'$, AC şi $A'C'$, respectiv AB şi $A'B'$ se intersectează, atunci punctele corespunzătoare de intersecţie sunt coliniare.

Observaţia 2.9.5. Teorema lui Nobbs afirmă că dacă există punctele lui Nobbs, atunci acestea aparţin dreptei hiperbolice a lui Gergonne.

2.10 Transversala izotomică în geometria hiperbolică

În cele ce urmează vom prezenta versiunea hiperbolică a teoremei transversalei în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice. Teorema lui Nobbs în geometria euclidiană are următoarea formă: dacă l este o dreaptă ce nu trece prin nici un vârf al unui triunghi ABC astfel încât l intersectează dreptele BC, CA şi AB în punctele A', B', respectiv C', iar A'', B'' şi C'' sunt simetricele punctelor A', B', respectiv C' faţă de mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB, atunci A'', B'' şi C'' sunt coliniare [86]. Menţionăm câteva demonstraţii diferite ale acestei teoreme, date de către C. Kimberling [86], C. Barbu [17], C. Coşniţă [53]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [20].

Teorema 2.10.1. Fie l o dreaptă hiperbolică ce nu trece prin nici un vârf al unui triunghi hiperbolic ABC, astfel încât l intersectează dreptele hiperbolice BC, CA şi AB în punctele A', B', respectiv C'. Dacă A'', B'' şi C'' sunt simetricele punctelor A', B', respectiv C' faţă de mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB, atunci punctele A'', B'' şi C'' sunt coliniare.

Definiţia 2.10.2. Punctele A'', B'' şi C'' se numesc *izotomicele* punctelor A', B', respectiv C'. Dreapta pe care sa află punctele A'', B'' şi C'' se numeşte *transversala izotomică* corespunzătoare geodezicei l.

2.11 O teoremă a lui Neuberg în modelul pe disc al lui Poincaré

În continuare vom prezenta versiunea hiperbolică a teoremei lui Neuberg în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice. Teorema lui Neuberg în geometria euclidiană are următoarea formă: dacă AP_1, BP_2 şi CP_3 sunt trei ceviene concurente ale unui triunghi ABC, iar Q_1, Q_2, Q_3 sunt simetricele punctelor P_1, P_2, respectiv P_3 faţă de mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB, atunci AQ_1, BQ_2 şi CQ_3 sunt concurente [84]. Menţionăm câteva demonstraţii diferite ale acestei teoreme, date de către C. Barbu [17], C. Coşniţă [53]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [20].

Teorema 2.11.1. Fie AP_1, BP_2 şi CP_3 trei ceviene concurente ale unui triunghi hiperbolic ABC, iar Q_1, Q_2, Q_3 sunt simetricele punctelor P_1, P_2, respectiv P_3 faţă de mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB. Dacă două dintre geodezicele AQ_1, BQ_2, CQ_3 se intersectează, atunci şi cea de a treia trece prin punctul de intersecţie al primelor două.

Definiţia 2.11.2. Dacă P este punctul de concurenţă al geodezicelor AP_1, BP_2 şi PQ_3, atunci punctul Q de concurenţă al geodezicelor AQ_1, BQ_2, CQ_3 se numeşte

conjugatul izotomic al punctului P. Dreptele AQ_1, BQ_2, CQ_3 se numesc ***cevienele izotomice*** corespunzătoare cevienelor AP_1, BP_2 şi PQ_3.

Corolarul 2.11.3. Centrul de greutate G al unui triunghi hiperbolic este propriul său izotomic conjugat.

Corolarul 2.11.4. Dacă triunghiul hiperbolic ABC admite punct al lui Nagel, atunci punctul lui Gergonne este izotomicul conjugat al său.

2.12 Teorema lui Gülicher în geometria hiperbolică

În continuare vom prezenta versiunea hiperbolică a teoremei lui Gülicher în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice. Teorema lui Gülicher în geometria euclidiană are următoarea exprimare: dacă $Q_1Q_2Q_3$ este triunghiul cevian al unui punct Q în raport cu un triunghi $P_1P_2P_3$ iar $R_1R_2R_3$ este triunghiul cevian al unui punct R în raport cu triunghiul $Q_1Q_2Q_3$, atunci dreptele P_1R_1, P_2R_2, şi P_3R_3 sunt concurente [77]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [34].

Teorema 2.12.1 (**Teorema lui Gülicher în varianta hiperbolică**). Fie Q un punct situat în interiorul unui triunghi hiperbolic $P_1P_2P_3$ şi $Q_1Q_2Q_3$ triunghiul hiperbolic cevian al punctului Q. Dacă $R_1R_2R_3$ este triunghiul hiperbolic cevian al unui punct R în raport cu triunghiul hiperbolic $Q_1Q_2Q_3$, iar R este situat în interiorul triunghiului hiperbolic $Q_1Q_2Q_3$, atunci dreptele hiperbolice P_1R_1, P_2R_2 şi P_3R_3 sunt concurente.

2.13 Varianta hiperbolică a teoremei bisectoarei

În continuare vom prezenta versiunea hiperbolică a teoremei bisectoarei în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice. Teorema bisectoarei în geometria euclidiană are următoarea exprimare: dacă AD este bisectoarea interioară a unghiului A al unui triunghi ABC, $D \in (BC)$, atunci $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Menţionăm câteva demonstraţii diferite ale acestei teoreme, date de către C. Coşniţă [53], A. Johnson [84]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [34].

Teorema 2.13.1. (**Teorema bisectoarei interioare**). Fie ABC un triunghi hiperbolic în discul lui Poincaré şi D un punct pe latura BC astfel încât AD este bisectoarea unghiului $\angle BAC$. Atunci,

$$\frac{(DB)_\gamma}{(DC)_\gamma} = \frac{(AB)_\gamma}{(AC)_\gamma},$$

unde $v_\gamma = \frac{v}{1-v^2}$.

Teorema 2.13.2. (**Reciproca teoremei bisectoarei interioare**). Fie ABC un triunghi hiperbolic în discul lui Poincaré, iar D un punct pe latura BC astfel încât $\frac{(DB)_\gamma}{(DC)_\gamma} = \frac{(AB)_\gamma}{(AC)_\gamma}$, unde $v_\gamma = \frac{v}{1-v^2}$. Atunci, AD este bisectoarea unghiului $\angle BAC$.

Teorema 2.13.3. (**Teorema bisectoarei exterioare**). Fie ABC un triunghi hiperbolic în discul lui Poincaré. Dacă E un punct pe dreapta hiperbolică BC astfel încât AE este bisectoarea exterioară a unghiului A . Atunci, $\frac{(EB)_\gamma}{(EC)_\gamma} = \frac{(AB)_\gamma}{(AC)_\gamma}$, unde $v_\gamma = \frac{v}{1-v^2}$.

Teorema 2.13.4. (**Reciproca teoremei bisectoarei exterioare**). Fie ABC un triunghi hiperbolic în discul lui Poincaré. Dacă o dreaptă hiperbolică ce trece prin A intersectează dreapta hiperbolică BC în E astfel încât $\frac{(EB)_\gamma}{(EC)_\gamma} = \frac{(AB)_\gamma}{(AC)_\gamma}$, unde $v_\gamma = \frac{v}{1-v^2}$, iar bisectoarea exterioară a unghiului A intersectează geodezica BC, atunci AE este bisectoarea exterioară a unghiului A.

Corolarul 2.13.5. Fie ABC un triunghi hiperbolic în discul lui Poincaré. Dacă D un punct pe dreapta BC astfel încât AD este bisectoarea exterioară a unghiului A, iar BE şi CF sunt bisectoarele interioare ale unghiurilor B, respectiv C ale triunghiului hiperbolic ABC, atunci punctele D, E şi F sunt coliniare.

Corolarul 2.13.6. (O teoremă a lui Pătraşcu în geometria hiperbolică). Fie D un punct pe latura BC a unui triunghi hiperbolic ABC, iar E şi F puncte pe laturile CA, respectiv AB astfel încât DE şi DF sunt bisectoarele unghiurilor $\angle ADC$, respectiv $\angle ADB$. Atunci, dreptele hiperbolice AD, BE şi CF sunt concurente.

Teorema 2.13.7. Fie Q un punct situat în interiorul unui triunghi hiperbolic $P_1P_2P_3$ şi $Q_1Q_2Q_3$ triunghiul hiperbolic cevian al punctului Q. Dacă bisectoarele unghiurilor triunghiului hiperbolic $P_1P_2P_3$ intersectează laturile Q_2Q_3, Q_3Q_1 şi Q_1Q_3 în punctele R_1, R_2, respectiv R_3, atunci dreptele hiperbolice Q_1R_1, Q_2R_2 şi Q_3R_3 sunt concurente.

Observaţia 2.13.8. Teorema 2.13.1 în varianta hiperbolică are o formă similară cu cea din geometria euclidiană.

2.14 Teorema lui Zajic în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice

În continuare vom prezenta versiunea hiperbolică a teoremei lui Zajic în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice. Teorema lui Zajic în geometria euclidiană are următoarea exprimare: dacă A' este punctul de contact dintre cercul înscris într-un triunghi ABC cu latura BC, X este un punct pe latura BC, T_1 şi T_2 sunt punctele de contact dintre cercurile înscrise în triunghiurile ABX, respectiv ACX cu latura BC, atunci segmentele $A'X$ şi T_1T_2 sunt congruente [79]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [30].

Teorema 2.14.1. (**Teorema lui Zajic în geometria hiperbolică**). Dacă A' este punctul de contact dintre cercul înscris într-un triunghi hiperbolic ABC cu latura BC, X este un punct pe latura BC, T_1 şi T_2 sunt punctele de contact dintre cercurile înscrise în triunghiurile hiperbolice ABX, respectiv ACX cu latura BC, atunci distanţele hiperbolice $d(A', X)$ şi $d(T_1, T_2)$ sunt egale.

Corolarul 2.14.2. Fie X un punct pe latura BC a triunghiului hiperbolic ABC, iar A', A_1, A_2 punctele de contact dintre cercurile înscrise în triunghiurile ABC, ABX, respectiv ACX cu BC. Atunci, $d(A', A_1) = d(X, A_2)$ şi $d(A', A_2) = d(X, A_1)$.

Corolarul 2.14.3. (**Teorema lui Honsberger în variantă hiperbolică).** Dacă A' este punctul de contact dintre cercul înscris în triunghiul hiperbolic ABC cu latura BC, atunci cercurile înscrise în triunghiurile hiperbolice ABA' şi ACA' sunt tangente geodezicei AA' în acelaşi punct.

2.15 Teorema lui Carnot în modelul semiplanului superior al lui Poincaré

Prezentăm în cele ce urmează versiunea hiperbolică a teoremei lui Carnot în modelul semiplanului superior al lui Poincaré al geometriei hiperbolice. Teorema lui Carnot în geometria euclidiană are următoarea exprimare: dacă punctele A', B', C' sunt situate pe laturile BC, CA, respectiv AB ale triunghiului ABC, atunci perpendicularele duse din A', B', C' pe laturi sunt concurente dacă şi numai dacă

$$AC'^2 - BC'^2 + BA'^2 - CA'^2 + CB'^2 - AB'^2 = 0.$$

Demonstraţia standard a acestei teoreme se bazează pe teorema lui Pitagora. Specificăm câteva demonstraţii diferite ale acestei teoreme, date de către C. Barbu [17], J. Gabay, L. Nicolescu, V. Boskoff. Menţionăm că O. Demirel şi E. Soytürk [60] au dat forma teoremei lui Carnot în modelul pe disc al lui Poincaré. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [41].

În demonstraţia teoremelor ce urmează vom utiliza teorema lui Pitagora în variantă hiperbolică, şi anume: Fie ABC un triunghi hiperbolic, unghiul drept fiind în C. Dacă a, b, c sunt lungimile hiperbolice ale laturilor BC, CA, respectiv AB, atunci

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b.$$

Demonstraţia acestei teoreme se găseşte, de exemplu, în [98].

Teorema 2.15.1. (Teorema lui Carnot în modelul semiplanului superior al lui Poincaré). Fie punctele A', B', C' situate pe laturile BC, CA, respectiv AB ale unui triunghi hiperbolic ABC. Dacă perpendicularele duse din A', B', C' pe dreptele hiperbolice BC, CA, respectiv AB sunt concurente într-un punct M, atunci următoarele relaţii sunt adevărate:

$$i)\ \cosh MA'(\cosh A'B - \cosh A'C) + \cosh MB'(\cosh B'C - \cosh B'A) + \cosh MC'(\cosh C'A - \cosh C'B) = 0,$$

$$ii)\ \frac{\cosh A'B}{\cosh A'C} \cdot \frac{\cosh B'C}{\cosh B'A} \cdot \frac{\cosh C'A}{\cosh C'B} = 1.$$

Natural, acum ne întrebăm dacă există varianta hiperbolică a reciprocei teoremei lui Carnot. Întradevăr, în anumite condiţii această reciprocă are loc, după cum vom vedea în teorema de mai jos.

Teorema 2.15.2. (Teorema reciprocă a lui Carnot în modelul semiplanului superior al lui Poincaré). Fie punctele A', B', C' situate pe laturile BC, CA, respectiv AB ale unui triunghi hiperbolic ABC. Dacă perpendicularele duse din B' şi C' pe dreptele hiperbolice CA, respectiv AB sunt concurente într-un punct M, iar egalitatea următoare are loc:

$$\frac{\cosh A'B}{\cosh A'C} \cdot \frac{\cosh B'C}{\cosh B'A} \cdot \frac{\cosh C'A}{\cosh C'B} = 1,$$

atunci punctul M aparţine şi perpendicularei duse din A' pe BC.

Observaţia 2.15.3. Teoremele precedente pot fi generalizate, demonstraţia fiind aceeaşi, astfel:

Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon hiperbolic convex în modelul semiplanului superior al lui Poincaré, $a_1 = A_1A_2$, $a_2 = A_2A_3, ..., a_n = A_nA_1$ laturile acestui poligon, iar punctele M_i, $i = \overline{1,n}$ sunt situate pe laturile $a_1, a_2, ..., a_n$. Dacă perpendicularele pe laturile poligonului în punctele $M_1, M_2, ..., M_n$ sunt concurente într-un punct M, atunci următoarele relaţii sunt adevărate:

$$\sum_{i=1}^{n} \cosh MA_i(\cosh M_iA_i - \cosh M_iA_{i+1}) = 0,$$

$$\frac{\cosh M_1A_1}{\cosh M_1A_2} \cdot \frac{\cosh M_2A_2}{\cosh M_2A_3} \cdot ... \cdot \frac{\cosh M_nA_n}{\cosh M_nA_1} = 1.$$

cu $A_{n+1} = A_1$,

Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon hiperbolic convex în modelul semiplanului superior al lui Poincaré, $a_1 = A_1A_2$, $a_2 = A_2A_3, ..., a_n = A_nA_1$ laturile acestui poligon, iar punctele M_i, $i = \overline{1,n}$ sunt situate pe laturile $a_1, a_2, ..., a_n$. Dacă perpendicularele pe laturile poligonului în punctele $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ sunt concurente într-un punct M, iar relaţia următoare are loc

$$\frac{\cosh M_1A_1}{\cosh M_1A_2} \cdot \frac{\cosh M_2A_2}{\cosh M_2A_3} \cdot ... \cdot \frac{\cosh M_nA_n}{\cosh M_nA_1} = 1,$$

atunci punctul M aparţine şi perpendicularei duse din M_n pe A_nA_1.

2.16 Teorema ortopolulul în geometria hiperbolică

În continuare vom prezenta versiunea hiperbolică a teoremei de existenţă a ortopolului unei drepte în modelul pe disc al lui Poincaré al geometriei hiperbolice. Teorema ortopolului în geometria euclidiană are următoarea exprimare: dacă vârfurile A, B, C ale triunghiului ABC se proiectează pe o dreaptă d oarecare ce nu trece prin vârfurile triunghiului ABC în A', B', respectiv C', atunci perpendicularele duse din A', B', C' pe dreptele BC, CA, respectiv AB sunt concurente. Menţionăm câteva demonstraţii diferite ale acestei teoreme, date de către R. Goormaghtigh [73], J. Neuberg [105], W. Gallaty [70]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [40].

Teorema 2.16.1. (Teorema lui Soons în modelul pe disc al lui Poincaré). Dacă vârfurile A, B, C ale triunghiului hiperbolic ABC se proiectează pe o dreaptă hiperbolică d oarecare ce nu trece prin vârfurile triunghiului ABC în punctele A', B', respectiv C', iar două dintre perpendicularele duse din A', B', C' pe dreptele hiperbolice BC, CA, respectiv AB sunt concurente, atunci toate perpendicularele sunt concurente.

Teorema 2.16.2. (Teorema lui Soons în modelul semiplanului superior al lui Poincaré). Dacă vârfurile A, B, C ale triunghiului hiperbolic ABC se proiectează pe o dreaptă hiperbolică d oarecare ce nu trece prin vârfurile triunghiului ABC în punctele A', B', respectiv C', iar două dintre perpendicularele duse din A', B', C' pe dreptele hiperbolice BC, CA, respectiv AB sunt concurente, atunci toate perpendicularele sunt concurente.

Observaţia 2.16.3. Punctul de concurenţă al dreptelor hiperbolice $A'A'', B'B''$ şi $C'C''$ se numeşte *ortopolul* dreptei hiperbolice d în raport cu triunghiul hiperbolic ABC.

2.17 Forma hiperbolică a teoremei lui Stewart

În cele ce urmează vom prezenta o demonstraţie pentru varianta hiperbolică a teoremei lui Stewart utilizând modelul vitezei relativiste a lui Einstein. Binecunoscuta teoremă a lui Stewart are următoarea forma euclidiană: dacă D aparţine laturii AC a unui triunghi ABC, atunci

$$AB^2 \cdot DC + BC^2 \cdot AD - BD^2 \cdot AC = AC \cdot DC \cdot AD$$

[58]. Menţionăm câteva demonstraţii diferite ale acestei teoreme, date de către O. Demirel [61], W. Stothers [130]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [22].

Teorema 2.17.1. (Teorema lui Stewart în variantă hiperbolică). Dacă D este un punct pe latura AC a unui triunghi hiperbolic ABC, atunci

$$\gamma_{|AB|} \cdot \gamma_{|DC|} \cdot |DC| + \gamma_{|AC|} \cdot \gamma_{|BD|} \cdot |BD| - \gamma_{|AD|} \cdot \gamma_{|DC|} \cdot \gamma_{|BD|} \cdot [|BD| + |DC|] = 0,$$

unde prin $|DC|$, $|BD|$ şi $|BC|$ am notat lungimile hiperbolice ale segmentelor DC, BD, respectiv BC.

Corolarul 2.17.2. (Teorema medianei în geometria hiperbolică). Fie ABC un triunghi hiperbolic, iar D mijlocul segmentului hiperbolic BC. Atunci, următorea egalitate este adevărată:

$$\gamma_{|AD|} = \frac{\gamma_{|AB|} + \gamma_{|AC|}}{2 \cdot \gamma_{|DC|}}.$$

Corolarul 2.17.3. Fie ABC un triunghi hiperbolic şi D un punt pe latura BC, astfel încât AD este bisectoarea unghiului $\angle BAC$. Atunci

$$\gamma_{|AD|} = \frac{\gamma_{|AB|} \cdot |DC|}{\gamma_{|BD|} \cdot [|BD| + |DC|]} \cdot \left(1 + \frac{|AB|}{|AC|}\right).$$

2.18 Teorema lui Van Aubel în geometria hiperbolică

În cele ce urmează vom prezenta versiunea hiperbolică a teoremei lui Van Aubel în modelul vitezei relativiste a lui Einstein. Teorema lui Van Aubel în geometria euclidiană are următoarea formă: dacă ABC este un triunghi şi AD, BE, CF sunt trei ceviene concurente în P, atunci $\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$ [Barbu, 11]. Menţionăm câteva demonstraţii diferite ale acestei teoreme, date de către C. Barbu [17], N. Minculete [99]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [25].

Teorema 2.18.1. Dacă P este un punct situat în interiorul unui triunghi hiperbolic ABC, iar D, E, F intersecţiile dintre dreptele hiperbolice AP, BP, CP cu BC, CA, respectiv AB, atunci

$$\frac{\gamma_{|AP|}\,|AP|}{\gamma_{|PD|}\,|PD|} = \frac{\gamma_{|BC|}\,|BC|}{2}\left[\frac{\gamma_{|AE|}\,|AE|}{\gamma_{|EC|}\,|EC|} \cdot \frac{1}{\gamma_{|BD|}\,|BD|} + \frac{\gamma_{|FA|}\,|FA|}{\gamma_{|FB|}\,|FB|} \cdot \frac{1}{\gamma_{|CD|}\,|CD|}\right].$$

Corolarul 2.18.2. Fie G centrul de greutate al triunghiului hiperbolic ABC şi D, E, F mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AC. Atunci,

$$\frac{\gamma_{|AG|}\,|AG|}{\gamma_{|GD|}\,|GD|} = \frac{\gamma_{|BC|}\,|BC|}{2}\left[\frac{1}{\gamma_{|BD|}\,|BD|} + \frac{1}{\gamma_{|CD|}\,|CD|}\right].$$

Corolarul 2.18.3. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul hiperbolic ABC, iar AD, BE şi CF bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului ABC. Atunci,

$$\frac{\gamma_{|AI|}\,|AI|}{\gamma_{|ID|}\,|ID|} = \frac{1}{2}\left[\frac{\gamma_{|AB|}\,|AB|}{\gamma_{|BD|}\,|BD|} + \frac{\gamma_{|AC|}\,|AC|}{\gamma_{|CD|}\,|CD|}\right].$$

2.19 Varianta hiperbolică a teoremei de minim a lui Smarandache

În cele ce urmează vom prezenta versiunea hiperbolică a teoremei de minim a lui Smarandache în Einstein Relativistic Velocity Model. Teorema lui Smarandache în geometria euclidiană are următoarea formă: dacă ABC este un triunghi şi AA', BB', CC' sunt trei ceviene concurente în P, atunci $\frac{PA}{PA'} \cdot \frac{PB}{PB'} \cdot \frac{PC}{PC'} \geq 8$ şi $\frac{PA}{PA'} + \frac{PB}{PB'} + \frac{PC}{PC'} \geq 6$ [125]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [23].

Teorema 2.19.1. Dacă ABC este un triunghi hiperbolic şi AA', BB', CC' sunt trei ceviene hiperbolice concurente în P, atunci

$$\frac{\gamma_{|AP|}\,|AP|}{\gamma_{|PA'|}\,|PA'|} \cdot \frac{\gamma_{|BP|}\,|BP|}{\gamma_{|PB'|}\,|PB'|} \cdot \frac{\gamma_{|CP|}\,|CP|}{\gamma_{|PC'|}\,|PC'|} \geq 1,$$

şi

$$\frac{\gamma_{|AP|}\,|AP|}{\gamma_{|PA'|}\,|PA'|} + \frac{\gamma_{|BP|}\,|BP|}{\gamma_{|PB'|}\,|PB'|} + \frac{\gamma_{|CP|}\,|CP|}{\gamma_{|PC'|}\,|PC'|} \geq 3.$$

Teorema de minim a lui Smarandache în varianta hiperbolică are o formă similară cu cea din geometria euclidiană. Trecând la limită, pentru $s \to \infty$ atunci factorul gamma $\gamma_{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{s^2}}} \to 1$, relaţiile precedente devenind

$$\frac{PA}{PA'} \cdot \frac{PB}{PB'} \cdot \frac{PC}{PC'} \geq 1,$$

respectiv

$$\frac{PA}{PA'} + \frac{PB}{PB'} + \frac{PC}{PC'} \geq 3,$$

în geometria euclidiană. Observăm că inegalităţile astfel obţinute sunt mai "slabe" decât cele din teorema euclidiană a lui Smarandache, obţinându-se astfel o neconcordanţă între cele două geometrii.

2.20 Teorema diviziunii armonice a lui Pappus

În cele ce urmează vom prezenta versiunea hiperbolică a teoremei diviziunii armonice a lui Pappus în modelul vitezei relativiste a lui Einstein. Teorema lui Pappus în geometria euclidiană are următoarea formă: dacă $A'B'C'$ este triunghiul cevian al unui punct M în raport cu un triunghi ABC, astfel încât dreptele $B'C'$ şi BC se intersectează în A'', atunci $\frac{A''B}{A''C} = \frac{A'B}{A'C}$ [57]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [29].

Teorema 2.20.1. (Teorema diviziunii armonice a lui Pappus). Dacă $A'B'C'$ este triunghiul hiperbolic cevian al unui punct M în raport cu un triunghi hiperbolic ABC astfel încât dreptele hiperbolice $B'C'$ şi BC se intersectează în A'', atunci

$$\frac{\gamma_{|A'B|}|A'B|}{\gamma_{|A'C|}|A'C|} = \frac{\gamma_{|A''B|}|A''B|}{\gamma_{|A''C|}|A''C|}.$$

Corolarul 2.20.2. Dacă $A'B'C'$ este triunghiul hiperbolic cevian al unui punct M în raport cu un triunghi hiperbolic ABC astfel încât dreptele hiperbolice $B'C'$ şi BC se intersectează în A'', iar AA' este bisectoarea interioară a unghiului $\measuredangle BAC$, atunci

$$\frac{\gamma_{|A''B|}|A''B|}{\gamma_{|A''C|}|A''C|} = \frac{\gamma_{|AB|}|AB|}{\gamma_{|AC|}|AC|}.$$

Definiţia 2.20.3. Se numeşte ***antibisectoare*** a unui triunghi hiperbolic, izotomica unei bisectoare a unui unghi a triunghiului hiperbolic.

Corolarul 2.20.4. Fie $A'B'C'$ triunghiul hiperbolic cevian al unui punct M în raport cu un triunghi hiperbolic ABC astfel încât dreptele hiperbolice $B'C'$ şi BC se intersectează în A''. Dacă AA' este bisectoarea interioară a unghiului $\measuredangle BAC$, iar AA_1 este antibisectoarea unghiului $\measuredangle BAC$, atunci

$$\frac{\gamma_{|A''B|}|A''B|}{\gamma_{|A''C|}|A''C|} = \left(\frac{\gamma_{|A_1B|}|A_1B|}{\gamma_{|A_1C|}|A_1C|}\right)^{-1}.$$

Corolarul 2.20.5. Fie $A'B'C'$ triunghiul hiperbolic cevian al unui punct M în raport cu un triunghi hiperbolic ABC astfel încât dreptele hiperbolice $B'C'$ şi BC se intersectează în A''. Dacă AA' este simediană, punctul A' fiind pe latura BC, atunci

$$\frac{\gamma_{|A''B|}|A''B|}{\gamma_{|A''C|}|A''C|} = \left(\frac{\gamma_{|AB|}|AB|}{\gamma_{|AC|}|AC|}\right)^{2}.$$

Teorema 2.20.6. Fie $A'B'C'$ triunghiul hiperbolic cevian al unui punct M în raport cu un triunghi hiperbolic ABC astfel încât dreptele hiperbolice $B'C'$ şi BC se intersectează în A''. Dacă AA' este bisectoarea interioară a gyrounghiului $\measuredangle BAC$, iar gyrodreptele $A'C'$ şi BB' se intersectează în D, $A'B'$ şi CC' se intersectează în E, AD şi BC se intersectează în D', AE şi BC se intersectează în E', atunci

$$\frac{\gamma_{|A''B|}|A''B|}{\gamma_{|A''C|}|A''C|} = \frac{\gamma_{|D'B|}|D'B|}{\gamma_{|D'A'|}|D'A'|} \cdot \frac{\gamma_{|E'A'|}|E'A'|}{\gamma_{|E'C|}|E'C|}.$$

2.21 Teorema triunghiului cevian al lui Smarandache

În continuare vom prezenta versiunea hiperbolică a teoremei triunghiului cevian al lui Smarandache în modelul vitezei relativiste a lui Einstein al geometriei hiperbolice. Teorema lui Smarandache în geometria euclidiană are următoarea exprimare: dacă $A_1B_1C_1$ este triunghiul cevian al unui punct P în raport cu un triunghi ABC, atunci

$$\frac{PA}{PA_1} \cdot \frac{PB}{PB_1} \cdot \frac{PC}{PC_1} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A}$$

[124]. Autorul a publicat rezultatele de mai jos în lucrarea [13].

Teorema 2.21.1. Dacă $A_1B_1C_1$ este triunghiul hiperbolic cevian al unui punct P în raport cu un triunghi hiperbolic ABC, atunci

$$\frac{\gamma_{|PA|}|PA|}{\gamma_{|PA_1|}|PA_1|} \cdot \frac{\gamma_{|PB|}|PB|}{\gamma_{|PB_1|}|PB_1|} \cdot \frac{\gamma_{|PC|}|PC|}{\gamma_{|PC_1|}|PC_1|} = \frac{\gamma_{|AB|}|AB| \cdot \gamma_{|BC|}|BC| \cdot \gamma_{|CA|}|CA|}{\gamma_{|AB_1|}|AB_1| \cdot \gamma_{|BC_1|}|BC_1| \cdot \gamma_{|CA_1|}|CA_1|}.$$

2.22 Inegalităţi într-un triunghi hiperbolic

În continuare vom prezenta câteva inegalităţi ce au loc într-un triunghi hiperbolic. Autorul a publicat unele dintre aceste rezultate în lucrarea [31].

Teorema 2.22.1. Fie I punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor unui triunghi hiperbolic ABC. Dacă $\widehat{A} < \widehat{B} < \widehat{C}$, atunci $d(A, I) > d(B, I) > d(C, I)$.

Teorema 2.22.2. Fie ABC un triunghi hiperbolic. Dacă mediatoarea laturii CA intersectează latura BC în punctul D, iar M este un punct oarecare pe această mediatoare, atunci

$$d(M, A) + d(M, B) > d(D, A) + d(D, B).$$

Teorema 2.22.3. Fie ABC un triunghi hiperbolic, iar AA', BB' şi CC' medianele sale. Atunci,

$$d(A, A') + d(B, B') + d(C, C') < d(A, B) + d(B, C) + d(C, A)$$

Teorema 2.22.4. Fie ABC un triunghi hiperbolic, iar A', B' şi C' mijloacele segmentelor BC, CA, respectiv AB. Atunci,

$$2 \cdot [d(A', B') + d(B', C') + d(C', A')] < d(A, B) + d(B, C) + d(C, A)$$

Teorema 2.22.5. În orice triunghi hiperbolic sunt adevărate inegalităţile:

$$\cosh a + \cosh b + \cosh c \leq \alpha + 2\left(\sinh^2 \frac{a}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2} + \sinh^2 \frac{c}{2}\right),$$

$$\cosh a + \cosh b \leq 2\left(\cosh^2 \frac{a}{2} + \cosh^2 \frac{b}{2}\right),$$

$$\sinh a + \sinh b + \sinh c <$$
$$4\left(\sinh \frac{a}{2} + \sinh \frac{b}{2} + \sinh \frac{c}{2} + \sinh \frac{a}{2} \sinh^2 \frac{a}{4} + \sinh \frac{b}{2} \sinh^2 \frac{b}{4} + \sinh \frac{c}{2} \sinh^2 \frac{c}{4}\right)$$

unde $\alpha \geq 3$, iar a, b, c sunt lungimile hiperbolice ale laturilor triunghiului.

Teorema 2.22.6. Dacă a, b, c sunt distanţele hiperbolice ale laturilor unui triunghi hiperbolic ABC, atunci:

$$3 \cosh \frac{a+b+c}{3} \leq \cosh a + \cosh b + \cosh c$$

Observaţia 2.22.7. Din teoremele 2.22.5 şi 2.22.6 rezultă:

$$3 \cosh \frac{a+b+c}{3} \leq \cosh a + \cosh b + \cosh c \leq \alpha + 2\left(\sinh^2 \frac{a}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2} + \sinh^2 \frac{c}{2}\right),$$

unde $\alpha \geq 3$.

Corolarul 2.22.8. Într-un triunghi hiperbolic este adevărată inegalitatea:

$$\sinh^2 \frac{a}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2} + \sinh^2 \frac{c}{2} \geq \frac{3}{2}\left(1 - \cosh \frac{a+b+c}{3}\right).$$

Teorema 2.22.9. Într-un triunghi hiperbolic este adevărată inegalitatea:

$$\cosh \frac{c}{2} < \cosh^2 \frac{a}{2} + \cosh^2 \frac{b}{2}.$$

Teorema 2.22.10. Într-un triunghi hiperbolic este adevărată inegalitatea:

$$\frac{\sinh a}{a} + \frac{\sinh b}{b} + \frac{\sinh c}{c} < 2 + \frac{2}{3}\left(\cosh^2\frac{a}{2} + \cosh^2\frac{b}{2} + \cosh^2\frac{c}{2}\right).$$

Corolarul 2.22.11. Într-un triunghi hiperbolic este adevărată inegalitatea:

$$\frac{\sinh a}{a} + \frac{\sinh b}{b} + \frac{\sinh c}{c} < \frac{2}{3}\left(5 + \sinh^2\frac{a}{2} + \sinh^2\frac{b}{2} + \sinh^2\frac{c}{2}\right).$$

Teorema 2.22.12. Într-un triunghi hiperbolic este adevărată inegalitatea:

$$6\sinh\frac{a+b+c}{6} \leq \sinh a + \sinh b + \sinh c.$$

Observaţia 2.22.13. Într-un triunghi hiperbolic este adevărată inegalitatea:

$$\sinh\frac{a+b+c}{6} < \frac{2}{3}\left(\sinh\frac{a}{2} + \sinh\frac{b}{2} + \sinh\frac{c}{2} + \sinh\frac{a}{2}\sinh^2\frac{a}{4} + \sinh\frac{b}{2}\sinh^2\frac{b}{4} + \sinh\frac{c}{2}\sinh^2\frac{c}{4}\right)$$

Teorema 2.22.14. Într-un triunghi hiperbolic este adevărată inegalitatea:

$$\sinh\frac{a}{3} < \frac{2}{3}\left(\sinh\frac{a}{2} + \sinh\frac{b}{2} + \sinh\frac{c}{2} + \sinh\frac{a}{2}\sinh^2\frac{a}{4} + \sinh\frac{b}{2}\sinh^2\frac{b}{4} + \sinh\frac{c}{2}\sinh^2\frac{c}{4}\right)$$

2.23 Inegalitatea lui Andrica-Iwata într-un triunghi hiperbolic

În studiile realizate de către D. Andrica [5] şi S. Iwata [81] apare o inegalitate care poate fi o foarte buna sursă pentru obţinerea de noi inegalităţi pentru un triunghi euclidian. Teorema lui Andrica - Iwata afirmă că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB ale unui triunghi ABC, atunci următoarea inegalitate are loc:

$$\frac{a}{b+c} \geq \sin\frac{A}{2}.$$

Menţionăm câteva demonstraţii diferite de ale autorilor date de către D. Mitrinović, J. Pečarić, V. Volenec [102], C. Ţiu. Vom da în cele ce urmează varianta hiperbolică a inegalităţii lui Andrica-Iwata. Rezultatele din această secţiune au fost publicate în [35].

În teoremele pe care le vom demonstra vom utiliza teoremele sinusurilor, cosinusului si medianei într-un triunghi hiperbolic.Astfel,

Teorema cosinusului pentru un triunghi hiperbolic se enunţă astfel:

Dacă ABC este un triunghi hiperbolic ale cărui laturi au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$, atunci

$$\sinh(b) \cdot \sinh(c) \cdot \cos(A) = \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \cosh(a)$$

(vezi [57], p.238).

Teorema sinusurilor pentru un triunghi hiperbolic se enunţă astfel:

Dacă ABC este un triunghi hiperbolic ale cărui laturi au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$, atunci

$$\frac{\sinh(a)}{\sin A} = \frac{\sinh(b)}{\sin B} = \frac{\sinh(c)}{\sin C}$$

(vezi [57], p.238).

Teorema medianei pentru un triunghi hiperbolic se enunţă astfel:

Dacă ABC este un triunghi hiperbolic ale cărui laturi au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$, iar AD este mediană în triunghiul ABC având distanţa hiperbolică $d(A,D) = d$, atunci

$$\cosh(d) = \frac{\cosh(b) + \cosh(c)}{2\cosh\left(\frac{a}{2}\right)}$$

(vezi [130]).

Teorema 2.23.1. (Varianta hiperbolică a teoremei lui Andrica-Iwata). Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic sau dreptunghic în A în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\frac{\sinh(a)}{\sinh(b) + \sinh(c)} < \frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\varepsilon + A}{2}},$$

unde $\varepsilon = \pi - A - B - C$ este defectul triunghiului ABC.

Corolarul 2.23.2. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic sau dreptunghic în A în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\frac{\sinh(a)}{\sinh(b) + \sinh(c)} < \frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{A}{2}}.$$

Corolarul 2.23.3. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\sinh(a) < \sinh(b) + \sinh(c).$$

Corolarul 2.23.4. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\frac{\sinh(a)}{\sinh(b)+\sinh(c)} < \frac{1}{\cos\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Corolarul 2.23.5. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\frac{\sinh(a)}{\sinh(b)+\sinh(c)} + \frac{\sinh(b)}{\sinh(a)+\sinh(c)} + \frac{\sinh(c)}{\sinh(b)+\sinh(a)} < \frac{3}{\cos\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Teorema 2.23.6. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\frac{\sinh(a)}{\sinh(b)+\sinh(c)} + \frac{\sinh(b)}{\sinh(a)+\sinh(c)} + \frac{\sinh(c)}{\sinh(b)+\sinh(a)} \geq \frac{3}{2}.$$

Observaţia 2.23.7. Egalitatea

$$\frac{\sinh(a)}{\sinh(b)+\sinh(c)} + \frac{\sinh(b)}{\sinh(a)+\sinh(c)} + \frac{\sinh(c)}{\sinh(b)+\sinh(a)} = \frac{3}{2}$$

are loc dacă şi numai dacă ABC este un triunghi echilateral, deoarece $\sinh(a) = \sinh(b) = \sin(c)$, adică dacă şi numai dacă $a = b = c$.

Teorema 2.23.8. Fie ABC un triunghi hiperbolic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\cosh(b) + \cosh(c) > 2\cosh\left(\frac{a}{2}\right).$$

Teorema 2.23.9. Dacă ABC este un triunghi hiperbolic ale cărui laturi au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$, iar AD este mediană în triunghiul ABC având distanţa hiperbolică $d(A,D) = d$, atunci

$$\sinh(d) > \frac{\cosh(b) - \cosh(c)}{2\sinh\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Corolarul 2.23.10. Dacă ABC este un triunghi hiperbolic ale cărui laturi au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$, iar AD este mediană în triunghiul ABC având distanţa hiperbolică $d(A,D) = d$, atunci

$$2\sqrt{\sinh\frac{b+c}{2}\left|\sinh\frac{b-c}{2}\right|} - \sinh\left(\frac{a}{2}\right) < \sinh(d) < \frac{1}{\sqrt{2}\cos C}\left[\sinh\left(\frac{a}{2}\right) + \sinh(b)\right]$$

Teorema 2.23.11. Dacă ABC este un triunghi hiperbolic ale cărui laturi au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$, atunci

$$\sinh(a) \geq \sqrt{\cosh(a) - \cosh(b-c)}$$

Observaţia 2.23.12. Utilizând formula

$$\cosh(b) - \cosh(c) = 2\sinh\left(\frac{b+c}{2}\right)\sinh\left(\frac{b-c}{2}\right),$$

în rezultatul precedent, obţinem

$$\sinh(a) \geq \sqrt{2\sinh\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\sinh\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}.$$

Inegalităţi similare se obţin şi pentru $\sinh(b)$ şi $\sinh(c)$.

Corolarul 2.23.13. Dacă ABC este un triunghi hiperbolic ale cărui laturi au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$, atunci

$$2\sqrt{2}\prod_{ciclic}\sinh(s-a) \leq \prod_{ciclic}\sinh(a) < \frac{\prod\limits_{ciclic}[\sinh(a)+\sinh(b)]}{2\sqrt{2}\prod\limits_{ciclic}\cos\frac{A}{2}}$$

unde s este semiperimetrul triunghiului ABC.

2.24 Aplicaţii ale inegalităţii lui Cusa într-un triunghi hiperbolic

În cele ce urmează vom da câteva aplicaţii ale inegalităţii Cusa-Huygens într-un triunghi hiperbolic. Dubla inegalitate a lui Cusa-Huygens are următoarea formă:

$$(\cos x)^{1/3} < \frac{\sin x}{x} < \frac{2+\cos x}{3} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Inegalitatea din stânga a apărut prima dată în [101], iar inegalitatea din dreapta a fost menţionata prima dată de către filosoful Nicolaus de Cusa (1401-1464). Menţionăm câteva demonstraţii ale inegalităţii lui Cusa, date de către Baricz [42], Huygens [80], Klén, Visuri, Vuorinen [87], Mortici [104], Neuman, Sándor [108]. Neuman [106] a dat forma hiperbolică a inegalităţii lui Cusa, astfel:

$$(\cosh x)^{1/3} < \frac{\sinh x}{x} < \frac{2+\cosh x}{3} \quad (x \neq 0).$$

În demersul nostru vom apela la următoarele inegalităţi, demonstrate în [87]:

$$\cosh\sqrt{xy} \leq \frac{\cosh x + \cosh y}{2},$$

$$\frac{\sinh x}{x} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh x,$$
$$\frac{\sinh\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} < \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh x}{x} + \frac{\sinh y}{y}\right),$$

unde $x, y \in (0, \infty)$. Rezultatele de mai jos au fost publicate în [37].

Teorema 2.24.1. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$3\cos^{\frac{1}{3}}(\varepsilon + A) < 1 + \left(\frac{\sinh b + \sinh c}{\sinh a}\right)^2,$$

unde $\varepsilon = \pi - (A + B + C)$ este defectul triunghiului ABC.

Teorema 2.24.2. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\cos A + \cos B + \cos C < \frac{3(1+R^2)^2}{4R^4} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi+\varepsilon/2}{3}\right)}{\sin(\varepsilon/2)},$$

unde $R = \sqrt{\frac{\sin(A+\varepsilon/2)\sin(B+\varepsilon/2)\sin(C+\varepsilon/2)}{\sin(\varepsilon/2)}}$.

Corolarul 2.24.3. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\cos A + \cos B + \cos C < \frac{3(1+R^2)^2}{4R^4\sin(\varepsilon/2)}.$$

Teorema 2.24.4. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\cos A\cos B\cos C < \frac{(1+R^2)^6}{64R^{10}} \cdot \frac{1}{\sin^2(\varepsilon/2)}.$$

Teorema 2.24.5. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\cos\frac{A}{2} \le \frac{1+R^2}{2R^2} \cdot \sqrt{\frac{\sin(A+\varepsilon/2)}{\sin(\varepsilon/2)}},$$

where $R = \sqrt{\frac{\sin(A+\varepsilon/2)\sin(B+\varepsilon/2)\sin(C+\varepsilon/2)}{\sin(\varepsilon/2)}}$.

Următoarele trei rezultate sunt consecinţe ale teoremei precedente.

Corolarul 2.24.6. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\cos\frac{A}{2} \leq \frac{1+R^2}{2R^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin(\varepsilon/2)}}$$

Corolarul 2.24.7. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{\left(1+R^2\right)^3}{R^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin(\varepsilon/2)}}.$$

Corolarul 2.24.8. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3(1+R^2)}{2R^2} \cdot \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi+\varepsilon/2}{3}\right)}{\sin(\varepsilon/2)}}$$

Teorema 2.24.9. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3(1+R^2)}{R^2} \cdot \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi+\varepsilon/2}{3}\right)}{\sin(\varepsilon/2)}}.$$

Teorema 2.24.10. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{\left(1+R^2\right)^3}{R^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin(\varepsilon/2)}}.$$

Teorema 2.24.11. Fie $x > 0$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\frac{\sinh\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} < \frac{1}{4}\left(2 + \cosh x + \cosh y\right)$$

Corolarul 2.24.12. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\frac{\sinh\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} + \frac{\sinh\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}} + \frac{\sinh\sqrt{ca}}{\sqrt{ca}} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\cosh a + \cosh b + \cosh c\right)$$

Corolarul 2.24.13. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\cosh\sqrt{ab} + \cosh\sqrt{bc} + \cosh\sqrt{ca} \leq \cosh a + \cosh b + \cosh c$$

Teorema 2.24.14. Fie $x > 0$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\sqrt{\frac{\sinh x}{x}} < \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 + 2\cosh\frac{x}{2}\right)$$

Corolarul 2.24.15. Fie ABC un triunghi hiperbolic ascuţitunghic în care laturile au lungimile hiperbolice $d(B,C) = a$, $d(C,A) = b$, $d(A,B) = c$. Atunci următoarea inegalitate este adevărată

$$\sqrt{\frac{\sinh a}{a}} + \sqrt{\frac{\sinh b}{b}} + \sqrt{\frac{\sinh c}{c}} < \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cosh a + \cosh b + \cosh c\right).$$

2.25 Forma hiperbolică a unei inegalităţi a lui Panaitopol şi consideraţii asupra inegalităţii lui Jordan

În cele ce urmează vom da forma hiperbolică a unei inegalităţi a lui Panaitopol precum şi câteva aplicaţii ale inegalităţii Jordan. Panaitopol propune în culegerea "Probleme de geometrie rezolvate trigonometric" următoarele două inegalităţi:

Problema 1. Dacă $0 < x < \pi/2$ şi $a, b \in (0, \infty)$, atunci

$$\left(1 + \frac{a}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{b}{\cos x}\right) \geq \left(1 + \sqrt{2ab}\right)^2.$$

Problema 2. Dacă $0 < x < \pi/2$ şi n este un număr natural, atunci

$$\left(1 + \frac{1}{\sin^n x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos^n x}\right) \geq \left(1 + 2^{\frac{n}{2}}\right)^2.$$

În cele ce urmează vom considera inegalităţi de tipul precedent utilizând funcţii trigonometrice hiperbolice. Vom realiza diferite încadrări pentru produse de tipul

$$\left(1+\frac{\alpha}{\sinh^m x}\right)\left(1+\frac{\beta}{\cosh^n x}\right),$$

unde m, n, α şi β sunt numere pozitive.

Lazarević [89] (sau vezi Mitrinović [101]) demonstrează inegalitatea:

$$\left(\frac{\sinh x}{x}\right)^q < \cosh x, \quad (x \neq 0,\ q \geq 3).$$

Următoarele inegalităţi:

$$\sinh x < x + \frac{x^3}{5}, \quad (0 < x < 1),$$

$$\frac{\sinh kx}{kx} \leq \frac{\sinh x}{x}, \quad (x > 0),$$

$$\frac{1}{\cosh x} < 1 - \frac{x^2}{3}, \quad (0 < x < 1),$$

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x}, \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}),$$

au fost stabilite de către R. Klén, M. Visuri şi M. Vuorinen [87].

Inegalitatea

$$\left(\frac{x}{\sinh x}\right)^\alpha < (1-\eta) + \eta\left(\frac{1}{\cosh x}\right)^\alpha,$$

cu $x > 0, \alpha > 0$ şi $\eta \leq 1/3$ a fost studiată recent de către Zhu în [139].

Următoarele inegalităţi au fost stabilite de către Jordan:

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x,$$

şi au solicitat atenţia a numeroşi cercetători.

Rezultatele de mai jos au fost publicate în [36].

Teorema 2.25.1. Fie x, α şi β numere pozitive. Inegalitatea următoare este adevărată:

$$\left(1+\sqrt{\frac{2\alpha\beta}{\sinh 2x}}\right)^2 \leq \left(1+\frac{\alpha}{\sinh x}\right)\left(1+\frac{\beta}{\cosh x}\right)$$

Utilizând teorema precedentă putem da următorul rezultat:

Teorema 2.25.2. Fie $x > 0$ şi $k \in N$. Dacă $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$, atunci următoarea inegalitate are loc:

$$\left(1+\sqrt{\frac{2\alpha\beta}{\sinh 2^{k+1}x}}\right)^2 \leq \left(1+\frac{\alpha}{\sinh 2^k x}\right)\left(1+\frac{\beta}{\cosh 2^k x}\right)$$

Teorema 2.25.3. Fie $x > 0$ şi $k \in N$. Dacă m, n, α şi β sunt numere pozitive, atunci următoarele inegalităţi sunt adevărate:

$$\gamma \leq \left(1 + \frac{\alpha}{\sinh^m x}\right)\left(1 + \frac{\beta}{\cosh^n x}\right) \leq \delta,$$

unde

$$\gamma = \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\sinh^m x \cosh^n x}}\right)^2$$

şi

$$\delta = 1 + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)\left(\frac{1}{\sinh^{2m} x} + \frac{1}{\cosh^{2n} x}\right)} + \frac{\alpha\beta}{\sinh^m x \cosh^n x}.$$

Teorema 2.25.4. Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dacă $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, atunci următoarea inegalitate este adevărată:

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2\alpha\beta}{\sinh 2x}}\right)^2 < 1 + \frac{\alpha}{\sinh x} + \frac{\beta x}{\sinh x} + \frac{\alpha\beta x}{\sinh^2 x}$$

Corolarul 2.25.5. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci

$$\frac{2x}{\sinh 2x} < \left(\frac{x}{\sinh x}\right)^2$$

Corolarul 2.25.6. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci

$$\tanh x < x$$

Observaţia 2.25.7. Inegalitatea precedentă este o formă mai slabă a inegalităţii lui Mitrinović care o demonstrează pentru orice valoare pozitivă a lui x.

Înlocuind α şi β cu 1 în Teorema 2.25.4, obţinem:

Corolarul 2.25.8. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{\sinh 2x}}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{\sinh x}\right)\left(1 + \frac{x}{\sinh x}\right)$$

Teorema 2.25.9. Fie $x \in (0, 1)$ şi $q \geq 3$. Inegalităţile următoare sunt adevărate:

$$\sqrt[q]{\frac{3}{3 - k^2 x^2}} < \frac{\sinh x}{x} < 1 + \frac{x^2}{5}$$

Teorema 2.25.10. Fie $x \in (0,1), \alpha > 0$ şi $\eta \leq 1/3$. Inegalitatea următoare este adevărată:

$$\left(\frac{x}{\sinh x}\right)^{\alpha} < (1-\eta) + \eta \left(1 - \frac{x^2}{3}\right)^{\alpha}$$

Corolarul 2.25.11. Fie $x \in (0,1)$ şi $\eta \leq 1/3$. Inegalitatea următoare este adevărată:

$$\frac{x}{\sinh x} < 1 - \eta \frac{x^2}{3}$$

Teorema 2.25.12. Fie $x \in (0,1)$. Inegalităţile următoare sunt adevărate:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{\cosh x} \leq 1 - \frac{x^2}{3}$$

Teorema 2.25.13. Fie $x > 0$. Funcţia

$$f(t) = \frac{1}{\cosh^t \frac{x}{t}}$$

este crescătoare pe $(0, \infty)$.

Corolarul 2.25.14. Fie $x \in (0, \infty)$. Inegalitatea următoare este adevărată:

$$\cosh \frac{x}{3} < \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cosh x$$

Teorema 2.25.15. Fie $x \in (0, \infty)$. Inegalitatea următoare este adevărată:

$$\frac{\sinh x}{x} > \frac{1}{\cosh \frac{x}{3}}$$

Corolarul 2.25.16. Fie $x \in (0, \infty)$. Inegalitatea următoare este adevărată:

$$\frac{x}{\sinh x} < \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cosh x$$

Teorema 2.25.17. Fie $x \in (0, \infty)$. Inegalitatea următoare este adevărată:

$$\frac{\sin x}{x} < \cosh x.$$

Observaţia 2.25.18. Klén, Visuri şi Vuorinen au demonstrat în [87] că inegalităţile

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x}$$

sunt adevărate pentru $x \in (0, \pi/2)$. Din teorema 2.25.16 şi deoarece inegalitatea din stânga a relaţiei precedente este adevărată pentru orice $x \in (0, \infty)$, avem

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} < \cosh x$$

Teorema 2.25.19. Pentru orice $x \in (0, \pi/2)$ are loc inegalitatea:

$$\frac{\sin x}{x} < \sqrt{\cosh x}.$$

Teorema 2.25.20. Pentru orice $x, k \in (0, \infty)$ are loc inegalitatea:

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{\sinh kx}{kx}.$$

Teorema 2.25.21. Pentru orice $x \in (0, \infty)$ şi $k \in [1, \infty)$ are loc inegali*tatea:*

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{\sinh kx}{x}$$

Teorema 2.25.22. Fie $x, y, z \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Inegalitatea următoare este adevărată:

$$\frac{1}{\cosh \frac{x+y}{2}} + \frac{1}{\cosh \frac{y+z}{2}} + \frac{1}{\cosh \frac{z+x}{2}} \geq \frac{1}{\cosh x} + \frac{1}{\cosh y} + \frac{1}{\cosh z}$$

Teorema 2.25.23. Fie $x, y, z \in (0, 1)$. Inegalitatea următoare este adevărată:

$$\frac{1}{\sinh \frac{x+y}{2}} + \frac{1}{\sinh \frac{y+z}{2}} + \frac{1}{\sinh \frac{z+x}{2}} \leq \frac{1}{\sinh x} + \frac{1}{\sinh y} + \frac{1}{\sinh z}$$

Corolarul 2.25.24. Fie $x, y, z \in (0, 1)$. Inegalitatea următoare este adevărată:

$$\frac{6}{\sinh x + \sinh y + \sinh z + \sinh \frac{x+y+z}{3}} \leq \frac{1}{\sinh x} + \frac{1}{\sinh y} + \frac{1}{\sinh z}$$

Chapter 3

Inegalitatea fundamentală a triunghiului între clasic şi hiperbolic

3.1 Forma euclidiană a inegalităţii lui Blundon

Într-un triunghi ABC fie O centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris, G centrul de greutate, N punctul lui Nagel, s semiperimetrul, R raza cercului circumscris şi r raza cercului înscris. În cele ce urmează prezentăm o demonstraţie geometrică a inegalităţii fundamentale a triunghiului. Această relaţie conţine de fapt două inegalităţi şi a fost demonstrată pentru prima oară de către E. Rouché [117] în 1851, răspunzând unei întrebări a lui Ramus referitoare la condiţii necesare şi suficiente pentru a exista un triunghi având date numerele reale pozitive s, R, r . O demonstraţie relativ simplă a inegalităţii fundamentale a triunghiului a fost dată de W.J.Blundon [45] şi se bazează pe următoarea proprietate algebrică a rădăcinilor unei ecuaţii de gradul trei: Rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

sunt laturile unui triunghi dacă şi numai dacă, următoarele condiţii sunt verificate: i) $18a_1a_2a_3 + a_1^2a_2^2 - 27a_3^3 - 4a_2^3 - 4a_1^3a_3 > 0$; ii) $-a_1 > 0, a_2 > 0, -a_3 > 0$; iii) $a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3 > 0$. Mai multe detalii se pot găsi în monografia scrisă de către D. Mitrinović, J. Pečarić şi V. Volenec [102], precum şi în articolele lui C.Niculescu [109], [110], R.A.Satnoianu [119], S.Wu [142]. Menţionăm că G. Dospinescu, M. Lascu, C. Pohoaţă şi M Tetiva au dat o demonstraţie algebrică unei forme mai slabe a inegalităţii lui Blundon $s \leq 2R + (3\sqrt{3} - 4)r$. Această inegalitate este o consecinţă a inegalităţii fundamentale a triunghiului.

Reamintim câteva distanţe importante ce au loc într-un triunghi ABC. Faimoasa formulă pentru distanţa OI este numită relaţia lui Euler şi este dată de

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

O demonstraţie standard a acestei relaţii găsim în H.S.M.Coxeter, S.L.Greitzer [56] şi T.Lalescu [88]. O demonstraţie cu ajutorul numerelor complexe întâlnim în T.Andreescu şi D.Andrica [4]. Următoarea distanţă de care avem nevoie este ON şi este dată de

$$ON = R - 2r$$

Relaţia precedentă ne dă o demonstraţie geometrică a inegalităţii lui Euler $R \geq 2r$ şi joacă un rol important în obţinerea rezultatelor noastre. O demonstraţie cu ajutorul numerelor complexe întâlnim în T.Andreescu şi D.Andrica [4]. O altă distanţă utilă este OG dată de:

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9},$$

unde a, b şi c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC. Demonstraţia standard a relaţiei precedente utilizează relaţia lui Leibniz [4].

Suma $a^2 + b^2 + c^2$ poate fi scrisă în funcţie de s, R, r astfel:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - r^2 - 4Rr)$$

Demonstraţia aceastei formule se găseşte de exemplu în cartea D.S.Mitrinović, J.E. Pečarić, V.Volenec [102]. Rezultatele ce urmează au fost publicate în [8].

Următorul rezultat conţine o demonstraţie geometrică simplă a inegalităţii fundamentale a triunghiului.

Teorema 3.1.1. Dacă ABC nu este un triunghi echilateral, atunci următoarea relaţie este adevărată:

$$\cos\widehat{ION} = \frac{2R^2 + 10Rr - r^2 - s^2}{2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}.$$

Teorema 3.1.2. (Rouché) Condiţia necesară şi suficientă pentru a exista un triunghi având elementele s, R şi r, este

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq s^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Notăm cu $\mathcal{T}(R, r_a)$ familia triunghiurilor având aceeaşi rază a cercului circumscris R şi aceeaşi exrază r_a. Inegalităţile precedente ne dau intervalul exact în care se "mişcă" s pentru toate triunghiurile din familia $\mathcal{T}(R, r_a)$. Avem $s_{min}^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}$ şi $s_{max}^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}$. Dacă fixăm punctele O şi I_a astfel încât $OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$, atunci triunghiul din familia $\mathcal{T}(R, r_a)$ cu semiperimetrul minim, corespunde cazului $\cos\widehat{ION} = 1$, ceea ce înseamnă că punctele I, O, N sunt coliniare, iar punctele I şi N aparţin aceleiaşi raze având originea în O. Deoarece punctele O, G, H sunt coliniare, aparţinând dreptei lui Euler a triunghiului, rezultă că punctele O, I, G sunt coliniare, deci în acest caz triunghiul ABC este isoscel. În Figura 3.1 acest triunghi este notat cu $A_{\min}B_{\min}C_{\min}$. De asemenea, triunghiul din familia $\mathcal{T}(R, r)$ cu semiperimetrul maxim, corespunde cazului $\cos\widehat{ION} = -1$, ceea ce inseamnă că punctele I, O, N sunt coliniare, iar O este situat între I şi N. Utilizând dreapta lui Euler rezultă că triunghiul ABC este isoscel. În Figura 3.1. acest triunghi este notat cu $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$. Triunghiurile familiei $\mathcal{T}(R,r)$ sunt "situate" între aceste două cazuri extreme (vezi Figura 3.1.). În concordanţa cu teorema de închidere a lui Poncelet, aceste triunghiuri sunt înscrise în acelaşi cerc $\mathcal{C}(O;R)$, iar laturile lor sunt tangente exterioare la acelaşi cerc $\mathcal{C}(I;r)$.

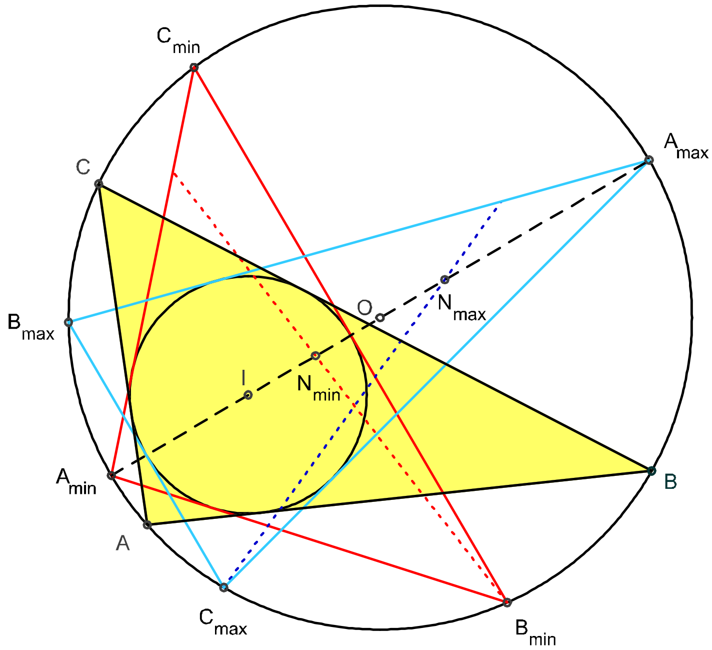

Figure 3.1.

Din Teorema 3.1.1 rezultă o cale naturală de construcţie a unui triunghi ABC în care se dau centrul cercului înscris I, centrul cercului circumscris O şi punctul lui Nagel N. Ţinând cont de faptul că punctele I, G, N sunt coliniare, aflându-se pe dreapta lui Nagel a triunghiului ABC, gasim centrul de greutate G pe segmentul IN astfel încât $IG = \frac{1}{3}IN$. Apoi, utilizând faptul că punctele O, G, H sunt coliniare, determinăm ortocentrul H pe raza (OG astfel încât $OH = 3OG$. Am redus astfel construcţia cerută la faimoasa problemă a lui Euler de construcţie a unui triunghi în care ştim I, O şi H [68]. Problema de construcţie a lui Euler a fost studiată de către B.Scimemi [120], G.C.Smith [126], J.Stern [129] şi P.Yiu [144].

3.2 Forma duală a inegalităţii lui Blundon

În această secţiune considerăm un triunghi ABC având centrul cercului circumscris O, centrul cercului înscris I, centrele cercurilor exînscrise I_a, I_b, I_c şi N_a, N_b, N_c punctele adjuncte corespunzătoare punctului lui Nagel N. Definiţii şi caracterizări al punctelor N_a, N_b, N_c găsim în lucrarea lui D.Andrica şi K.L.Nguyen [12].

Fie s, R, r, r_a, r_b, r_c respectiv semiperimetrul, raza cercului circumscris, raza cercului înscris şi razele cercurilor exînscrise corespunzătoare triunghiului ABC. Cunoaştem faptul că punctele N_a, G, I_a sunt coliniare şi

$$N_aI_a = 3GI_a.$$

Proprietăţi analoage se dau pentru tripletele de puncte N_b, G, I_b şi N_c, G, I_c. Sunt adevărate următoarele relaţii:

$$OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a, OI_b^2 = R^2 + 2Rr_b, OI_c^2 = R^2 + 2Rr_c$$

şi

$$ON_a = R + 2r_a, ON_b = R + 2r_b, ON_c = R + 2r_c$$

Demonstraţii ale relaţiilor precedente se pot găsi în [12].

Teorema 3.2.1. Următoarea relaţie este adevărată:

$$\cos\widehat{I_aON_a} = \frac{R^2 - 3Rr_a - r_a^2 - \alpha}{(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}},$$

unde $\alpha = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$.

Teorema 3.2.2. (Forma duală a inegalităţii lui Blundon). Următoarele inegalităţi sunt adevărate:

$$0 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \leq R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}.$$

Notăm cu $\mathcal{T}(R, r_a)$ familia triunghiurilor având aceeaşi rază a cercului circumscris R şi aceeaşi exrază r_a. Inegalitatea precedentă ne dă intervalul exact în care se "mişcă" α pentru toate triunghiurile din familia $\mathcal{T}(R, r_a)$. Avem $\alpha_{min} = 0$ şi $\alpha_{max} = R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}$. Dacă fixăm punctele O şi I_a astfel încât $OI_a = \sqrt{R^2 + 2Rr_a}$, atunci triunghirile din familia $\mathcal{T}(R, r_a)$ ce au valoarea α minimă degenerează într-un punct şi se corespund punctelor de intersecţie dintre cercurile $\mathcal{C}(O; R)$ şi $\mathcal{C}(I_a; r_a)$. În Figura 3.2. aceste puncte sunt notate cu $A'_{\min}$ şi $A''_{\min}$. De asemenea, triunghiul din familia $\mathcal{T}(R, r_a)$ pentru care valoarea lui α este maximă, corespunde cazului $\cos\widehat{I_aON_a} = -1$, ceea ce înseamnă că punctele I_a, O, N_a sunt coliniare, iar O este situat între I_a şi N_a. În Figura 3.2 acest triunghi este notat cu $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$. Utilizând dreapta lui Euler rezultă că triunghiul $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$ este isoscel. În concordanţa cu teorema de închidere exterioară a lui Poncelet, triunghiurile familiei $\mathcal{T}(R, r_a)$ sunt "situate" între aceste două cazuri extreme (vezi Figura 3.2.).

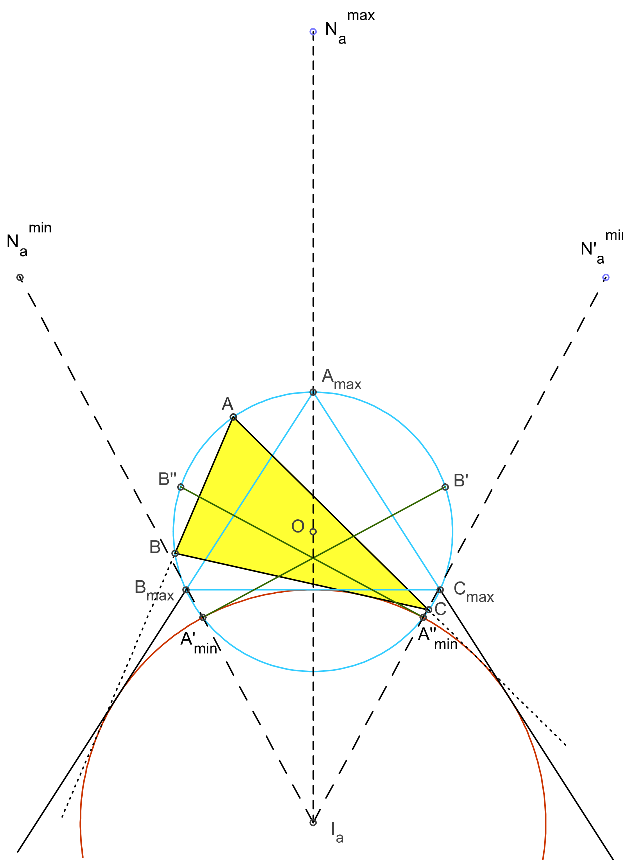

Figure 3.2.

Din Teorema 3.2.1. rezultă o cale naturală de construcţie a unui triunghi ABC în care se dau centrul cercului exînscris I_a, centrul cercului circumscris O şi punctul lui Nagel adjunct N_a. Ţinând cont de faptul că punctele I_a, G, N_a sunt coliniare, găsim centrul de greutate G pe segmentul I_aN_a astfel încât $I_aG = \frac{1}{3}I_aN_a$. Apoi, utilizând faptul că punctele O, G, H sunt coliniare, determinăm ortocentrul H pe raza $(OG$ astfel încât $OH = 3OG$. Am redus astfel construcţia cerută la faimoasa problemă a lui Euler de construcţie a unui triunghi în care ştim I, O şi H [68].

Observaţia 3.2.3.

1) Din Teorema 3.2.1. apare întrebarea firească: care este expresia lui α în funcţie de s, R, r_a? Pentru a răspunde la această întrebare vom arăta mai întâi că:

$$ab + bc + ca = \frac{s^6 + r_a(4R + 3r_a)s^4 + r_a^2(3r_a^2 - 16R^2)s^2 + r_a^5(r_a - 4R)}{(s^2 + r_a^2)^2}.$$

2) Formula precedentă ne dă o expresie complicată a lui α în funcţie de s, R, r_a, dualitatea dintre formulele din teoremele (3.1.1) şi (3.2.1) rezultând din faptul că putem scrie $\cos\widehat{ION}$ în funcţie de α, R, r, astfel

$$\cos\widehat{ION} = \frac{R^2 + 3Rr - r^2 - \alpha}{(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}.$$

Transformarea formală $r \mapsto -r_a$ ne dă dualitatea între formulele teoremelor (3.1.1) şi (3.2.1).

3.3 Câteva inegalităţi cu s, R şi r_a

În această secţiune vom obţine câteva consecinţe ale Teoremei 3.2.1 ce implică inegalităţi între s, R şi r_a.

Corolarul 3.3.1. În orice triunghi având semiperimetrul s următoarele inegalităţi au loc:

$$2R^2 + r^2 + 4Rr - 6Rr_a - 2r_a^2 - 2(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a} \leq s^2 \leq$$

$$2R^2 + r^2 + 4Rr - 6Rr_a - 2r_a^2 - 2(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}.$$

Utilizând faptul că $r < r_a$ şi inegalitatea din dreapta a relaţiei precedente obţinem

$$s^2 < 2R^2 - 2Rr_a - r_a^2 + 2(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}.$$

Corolarul 3.3.2. În orice triunghi având semiperimetrul s următoarele inegalităţi au loc:

$$s^2 < min\{4R^2 + 4Rr_a + 3r_a^2, 4R^2 + 4Rr_b + 3r_b^2, 4R^2 + 4Rr_c + 3r_c^2\}.$$

Corolarul 3.3.3. În orice triunghi următoarele inegalităţi au loc:

$$a^2 + b^2 + c^2 < min\{8R^2 + 4r_a^2, 8R^2 + 4r_b^2, 8R^2 + 4r_c^2\}.$$

Teorema 3.3.4. În orice triunghi este adevărată inegalitatea:

$$s^2 \leq 2\sqrt{2}(2R + r_a)r_a$$

Observaţia 3.3.5. Analog se obţin inegalităţile:

$$i)\ s^2 \leq 2\sqrt{2}(2R + r_b)r_b;$$

şi

$$ii)\ s^2 \leq 2\sqrt{2}(2R + r_c)r_c.$$

Teorema 3.3.6. În orice triunghi este adevărată inegalitatea:

$$s^2 \leq 2\sqrt{3}R(R+2r_a).$$

Observaţia 3.3.7. Analog se obţin inegalităţile:

$$i)\ s^2 \leq 2\sqrt{3}R(R+2r_b);$$

şi

$$ii)\ s^2 \leq 2\sqrt{3}R(R+2r_c).$$

Observaţia 3.3.8. Deoarece $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$, inegalitatea din teorema 3.3.6 poate fi rescrisă astfel: $s^2 \leq 2\sqrt{3}OI_a^2$ sau $s \leq \sqrt[4]{12}OI_a$.

Teorema 3.3.9. În orice triunghi este adevărată inegalitatea: $s \leq 2 \cdot OI_a$.

Teorema 3.3.10. În orice triunghi este adevărată inegalitatea:

$$i) s^2 \leq \min\{12Rr_a, 12Rr_b, 12Rr_c\}.$$

3.4 O rafinare a inegalităţii lui Blundon

Deoarece distanţa ON este constantă, fiind egală cu $ON = R-2r$, punctul lui Nagel N se "mişcă" pe cercul de diametru $N_{\min}N_{\max}$, iar măsura unghiului $\widehat{ION}$ variază între 0 şi 180°. S. Wu în [141] a dat o nouă versiune a inegalitaţii lui Blundon introducând un parametru, după cum urmează: pentru orice triunghi $A_1A_2A_3$, următoarele inegalităţi au loc:

$$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}\cos\phi \leq s^2 \leq 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}\cos\phi.$$

unde $\phi = \min\limits_{1\leq i<j\leq 3} |A_i - A_j|$. Rezultatul ce urmează v-a fi publicat în [10].

Teorema 3.4.1. În orice triunghi ABC următoarele inegalităţi au loc:

$$-\cos\phi \leq \cos\widehat{ION} \leq \cos\phi,$$

unde $\phi = \min\{|A-B|, |B-C|, |C-A|\}$, egalitatea având loc dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Observaţia 3.4.2. Numărul ϕ împarte triunghiurile familiei $\mathcal{T}(R,r)$ în funcţie de poziţia punctului A pe cercul $O(R)$.

3.5 Forma hiperbolică a inegalităţii lui Blundon

Expresia hiperbolică a inegalităţii lui Blundon a fost dată de către D. Svrtan şi D. Veljan [131] şi are următoarea exprimare:

Teorema 3.5.1. Dacă un triunghi hiperbolic admite un cerc circumscris de rază R, iar r este raza cercului înscris, s este semiperimetrul triunghiului şi ε este defectul triunghiului, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{D}{s'^2} \geq 0,$$

unde

$$\begin{aligned} D = s'^2[&(r'^2R'^2\varepsilon'^2 + 4r'^4R'^4\varepsilon'^2 - 4r'^3R'^3\varepsilon'^2 - 1 + 6r'R' - 12r'^2R'^2 + 8r'^3R'^3)s'^4 \\ &+r'^2R'\varepsilon'(1 - 4r'R' + 4r'^2R'^2\varepsilon' - 8r'^2R'^2\varepsilon'^2 + 9\varepsilon' + 18r'R'\varepsilon')s'^3 \\ &+r'^2(r'^2R'^2 - 10r'R' - 12r'^2R'^2\varepsilon'^2 - 2)s'^2 - 6r'^4R'\varepsilon's' - r'^4], \end{aligned}$$

iar $r' = \tanh \frac{r}{k}, R' = \tanh \frac{R}{k}, \varepsilon' = \cot \frac{\varepsilon}{2}, s' = \sinh \frac{s}{k}$.

3.6 O extindere naturală a inegalităţii lui Blundon

Fie P un punct în planul triunghiului ABC, iar DEF triunghiul cevian corespunzător punctului P în raport cu triunghiul ABC. Dacă P are coordonatele baricentrice $t_1 : t_2 : t_3$, atunci coordonatele baricentrice ale vârfurilor triunghiului DEF sunt: $D(0 : t_2 : t_3), E(t_1 : 0 : t_3)$, $F(t_1 : t_2 : 0)$. Coordonatele baricentrice au fost introduse de către Möbius în 1927. Enumerăm câteva lucrări despre coordonatele baricentrice ale lui C. Bradley [48], C. Coandă [51], C. Coşniţă [53], C. Kimberling [86], O. Bottema [47], J. Scott [121] şi P. Yiu [144]. În lucrarea [26] am introdus noţiunea de ceviană de rang (k, l, m) astfel: Dacă D este un punct pe latura (BC) a unui triunghi neisoscel ABC, astfel încât:

$$\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{s-c}{s-b}\right)^l \cdot \left(\frac{a+b}{a+c}\right)^m$$

$k, l, m \in \mathbb{R}$, atunci AD o vom numi *ceviană de rang* (k, l, m), iar dacă $D \in BC \setminus [BC]$, astfel încât $\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{s-c}{s-b}\right)^l \cdot \left(\frac{a+b}{a+c}\right)^m$, $k, l, m \in \mathbb{R}^*$, atunci AD o vom numi *exceviană de rang* (k, l, m) În lucrarea [26] am arătat că cevienele de rang (k, l, m) sunt concurente într-un punct $I(k, l, m)$ numit punct cevian de rang (k, l, m), iar coordonatele baricentrice ale lui $I(k, l, m)$ sunt:

$$a^k(s-a)^l(b+c)^m : b^k(s-b)^l(a+c) : c^k(s-c)^l(a+b)^m.$$

Dacă M este un punct din planul unui triunghi ABC, atunci următoarea egalitate are loc:

$$(t_1 + t_2 + t_3)\overrightarrow{MP} = t_1\overrightarrow{MA} + t_2\overrightarrow{MB} + t_3\overrightarrow{MC}.$$

Pentru cazul particular $M \equiv P$, egalitatea precedentă devine

$$t_1\overrightarrow{PA} + t_2\overrightarrow{PB} + t_3\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}.$$

Teorema 3.6.1. Dacă M este un punct din planul unui triunghi ABC, atunci următoarea egalitate are loc:

$$(t_1+t_2+t_3)^2 MP^2 = (t_1MA^2+t_2MB^2+t_3MC^2)(t_1+t_2+t_3)-(t_2t_3a^2+t_3t_1b^2+t_1t_2c^2).$$

Observaţia 3.6.2. Dacă t_1, t_2, t_3 şi $t_1 + t_2 + t_3$ sunt nenule, atunci:

$$MP^2 = \frac{t_1MA^2 + t_2MB^2 + t_3MC^2}{t_1 + t_2 + t_3} - \frac{t_1t_2t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^2}\left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3}\right).$$

Corolarul 3.6.3. Următoarea egalitate are loc:

$$R^2 - OP^2 = \frac{t_1t_2t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^2}\left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3}\right)$$

cu $t_1, t_2, t_3 > 0$.

Corolarul 3.6.4. În orice triunghi ABC având semiperimetrul s, următoarea egalitate are loc:

$$R^2 - OP^2 \geq \frac{4s^2t_1t_2t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^3}$$

cu $t_1, t_2, t_3 > 0$.

C. Coşniţă [Coşniţă] a formulat următoarea teoremă: dacă punctele P şi Q au coordonatele baricentrice $t_1 : t_2 : t_3$, respectiv $u_1 : u_2 : u_3$, în raport cu un triunghi ABC, atunci

$$PQ^2 = -\alpha\beta\gamma\left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma}\right)$$

unde

$$\alpha = \frac{u_1}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{t_1}{t_1 + t_2 + t_3}; \beta = \frac{u_2}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3}; \gamma = \frac{u_3}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{t_3}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

Teorema 3.6.5. Dacă punctele P şi Q au coordonatele baricentrice $t_1 : t_2 : t_3$, respectiv $u_1 : u_2 : u_3$, în raport cu un triunghi ABC, atunci

$$\cos\widehat{POQ} = \frac{2R^2 - \frac{t_1t_2t_3}{(t_1+t_2+t_3)^2}\left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3}\right) - \frac{u_1u_2u_3}{(u_1+u_2+u_3)^2}\left(\frac{a^2}{u_1} + \frac{b^2}{u_2} + \frac{c^2}{u_3}\right) + \alpha\beta\gamma\left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma}\right)}{2\sqrt{\left[R^2 - \frac{t_1t_2t_3}{(t_1+t_2+t_3)^2}\left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3}\right)\right] \cdot \left[R^2 - \frac{u_1u_2u_3}{(u_1+u_2+u_3)^2}\left(\frac{a^2}{u_1} + \frac{b^2}{u_2} + \frac{c^2}{u_3}\right)\right]}}$$

cu

$$\alpha=\frac{u_1}{u_1+u_2+u_3}-\frac{t_1}{t_1+t_2+t_3};\beta=\frac{u_2}{u_1+u_2+u_3}-\frac{t_2}{t_1+t_2+t_3};\gamma=\frac{u_3}{u_1+u_2+u_3}-\frac{t_3}{t_1+t_2+t_3},$$

iar t_i şi u_i, $i=\overline{1,3}$, sunt nenule.

Teorema 3.6.6. Următoarele inegalităţi au loc:

$$-2\sqrt{\left[R^2-\frac{t_1t_2t_3}{(t_1+t_2+t_3)^2}\left(\frac{a^2}{t_1}+\frac{b^2}{t_2}+\frac{c^2}{t_3}\right)\right]\cdot\left[R^2-\frac{u_1u_2u_3}{(u_1+u_2+u_3)^2}\left(\frac{a^2}{u_1}+\frac{b^2}{u_2}+\frac{c^2}{u_3}\right)\right]}\leq$$

$$\alpha\beta\gamma\left(\frac{a^2}{\alpha}+\frac{b^2}{\beta}+\frac{c^2}{\gamma}\right)+2R^2-\left[\frac{t_1t_2t_3}{(t_1+t_2+t_3)^2}\left(\frac{a^2}{t_1}+\frac{b^2}{t_2}+\frac{c^2}{t_3}\right)+\frac{u_1u_2u_3}{(u_1+u_2+u_3)^2}\left(\frac{a^2}{u_1}+\frac{b^2}{u_2}+\frac{c^2}{u_3}\right)\right]\leq$$

$$2\sqrt{\left[R^2-\frac{t_1t_2t_3}{(t_1+t_2+t_3)^2}\left(\frac{a^2}{t_1}+\frac{b^2}{t_2}+\frac{c^2}{t_3}\right)\right]\cdot\left[R^2-\frac{u_1u_2u_3}{(u_1+u_2+u_3)^2}\left(\frac{a^2}{u_1}+\frac{b^2}{u_2}+\frac{c^2}{u_3}\right)\right]}$$

cu

$$\alpha=\frac{u_1}{u_1+u_2+u_3}-\frac{t_1}{t_1+t_2+t_3};\beta=\frac{u_2}{u_1+u_2+u_3}-\frac{t_2}{t_1+t_2+t_3};\gamma=\frac{u_3}{u_1+u_2+u_3}-\frac{t_3}{t_1+t_2+t_3},$$

iar t_i şi u_i, $i=\overline{1,3}$, sunt nenule.

Corolarul 3.6.7. (Inegalitatea lui Blundon). Condiţia necesară şi suficientă pentru a exista un triunghi având elementele s, R şi r, este

$$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}\leq s^2\leq 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}.$$

Observaţia 3.6.8. Fie I_1,I_2,I_3 trei puncte ceviene de rang (k,l,m) având coordonatele baricentrice:

$$I_i[a^{k_i}(s-a)^{l_i}(b+c)^{m_i}:b^{k_i}(s-b)^{l_i}(a+c)^{m_i}:c^{k_i}(s-c)^{l_i}(a+b)^{m_i}],\ i=\overline{1,3}.$$

Teorema 3.6.9. Următoarele inegalităţi au loc:

$$-2\sqrt{-\beta_{12}\gamma_{12}a^2-\gamma_{12}\alpha_{12}b^2-\alpha_{12}\beta_{12}c^2}\cdot\sqrt{-\beta_{23}\gamma_{23}a^2-\gamma_{23}\alpha_{23}b^2-\alpha_{23}\beta_{23}c^2}\leq$$

$$-a^2(\beta_{12}\gamma_{12}+\beta_{23}\gamma_{23}-\beta_{31}\gamma_{31})-b^2(\gamma_{12}\alpha_{12}+\gamma_{23}\alpha_{23}-\gamma_{31}\alpha_{31})+c^2(\alpha_{12}\beta_{12}+\alpha_{23}\beta_{23}-\alpha_{31}\beta_{31})\leq$$

$$2\sqrt{-\beta_{12}\gamma_{12}a^2-\gamma_{12}\alpha_{12}b^2-\alpha_{12}\beta_{12}c^2}\cdot\sqrt{-\beta_{23}\gamma_{23}a^2-\gamma_{23}\alpha_{23}b^2-\alpha_{23}\beta_{23}c^2}$$

Bibliography

[1] AbuArqob, O., Rabadi, H., Khitan, J., *A New Proof for the Steiner-Lehmus Theorem*, International Mathematical Forum, **3** (20), 2008, 267-970.

[2] Agarwal, R. P., Kim, Y.-H., Sen, S. K., *A new refined Jordan's inequality and its application*, Mathematical Inequalities & Applications, **12** (2), 2009, 255–264.

[3] Anderson, J., *Hyperbolic geometry*, Springer-Verlag, London, 2005.

[4] Andreescu, T., Andrica, D., *Complex Number from A to..Z*, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, 2006.

[5] Andrica, D., *O inegalitate în triunghi şi aplicaţiile acesteia*, Gazeta Matematică, Seria B, Bucureşti, **1**, 1986, 2-4.

[6] Andrica, D., **Barbu, C**., *The Hyperbolic Ceva Theorem in The Poincaré Disc Model of Hyperbolic Geometry*, Proceedings of the 13^{th} International Conference on Applied Mathematics and Computer Science, August 2010, Cluj Napoca.

[7] Andrica, D., **Barbu, C**., *The Hyperbolic Version of Ceva's Theorem in The Poincaré Disc Model,* Automation, Computers, Applied Mathematics, **19** (1), 2010, 35-43.

[8] Andrica, D., **Barbu, C**., *A geometric Proof to Blundon's Inequalities,* Mathematical Inequalities and Applications, **15** (2), 2012, 361-370.

[9] Andrica, D., **Barbu, C**., *The Hyperbolic Desargues Theorem in The Poincaré Model of Hyperbolic Geometry*, (submitted).

[10] Andrica, D., **Barbu, C**., *The natural approach of Blundon - Wu inequalities*, Journal of Inequalities and Applications, (submitted).

[11] Andrica, D., **Barbu, C**., Minculete, N., *Geometric inequalities obtained by the law of cosines theorem*, Acta Universitatis Apulensis, **31**, 2012.

[12] Andrica, D., Nguyen, K., *A note on the Nagel and Gergonne points*, Creative Math.& Inf., **17**, 2008.

[13] **Barbu, C**., *Smarandache's Cevian Triangle Theorem in The Einstein Relativistic Velocity Model of Hyperbolic Geometr*y, Progress in Physics, **3**, 2010, 69-70.

[14] **Barbu, C.**, *Smarandache's Cevians Triangle Theorem in the Einstein Relativistic Velocity Model of Hyperbolic Geometry*, Annual Meeting of the Four Corners Section of the American Physical Society, Weber State University, Ogden, UT, USA, October 15-16, 2010.

[15] **Barbu, C.**, *Trigonometric Proof of Steiner-Lehmus Theorem in Hyperbolic Geometry*, Acta Universitatis Apulensis, **23,** 2010, 63-67.

[16] **Barbu, C.**, *Smarandache's Pedal Polygon Theorem in The Poincaré Disc Model of Hyperbolic Geometry*, International Journal of Mathematical Combinatorics, **1**, 2010, 99-102.

[17] **Barbu, C.**, *Teoreme fundamentale din geometria triunghiului*, Ed. Unique, Bacău, 2008.

[18] **Barbu, C.**, *Menelaus's Theorem for Hyperbolic Quadrilaterals in The Einstein Relativistic Velocity Model of Hyperbolic Geometry*, Scientia Magna, **1**, 2010, 19-24.

[19] **Barbu, C.**, *Mathieu's theorem in the Poincaré disc model of hyperbolic geometry*, Creative Mathematics and Informatics, **20** (1), 2011, 16-19.

[20] **Barbu, C.**, *The Isotomic Transversal Theorem and the Neuberg's Theorem in the Poincaré Model of Hyperbolic Geometry,* Scientific Studies and Research Series Mathematics and Informatics, **20** (1), 2010, 37 - 44.

[21] **Barbu, C.**, *A new proof of Mathieu's Theorem in the Poincaré Model of Hyperbolic Geometry*, Proceedings of the International Conference of Applied Mathematics, p.85, Septembrie 2010, Baia Mare.

[22] **Barbu, C.**, *The Hyperbolic Stewart Theorem in the Einstein Relativistic Velocity Model of Hyperbolic Geometry,* Annals of Oradea University - Mathematics Fascicola, **28** (1), 2011, 133-138.

[23] **Barbu, C.**, *Smarandache's Minimum Theorem in the Einstein Relativistic Velocity Model of Hyperbolic Geometry*, Progress in Physics, Vol. **1**, 2011, 68-71.

[24] **Barbu, C.**, *Smarandache's Minimum Theorem in the Einstein Relativistic Velocity Model of Hyperbolic Geometry*, Joint Fall 2010 Meeting of the Texas Sections of the American Physical Society, AAPT, Zone 13 of SPS and the National Society of Hispanic Physicists, University of Texas at San Antonio, USA, October 21-23, 2010.

[25] **Barbu, C.**, *Van Aubel's Theorem in the Einstein Relativistic Velocity Model of Hyperbolic Geometry,* Progress in Physics, **1**, 2012, 30-32.

[26] **Barbu, C.**, Minculete, N., *Cevians of rank $(k; l; m)$ in a triangle*, International Journal of Geometry, **1** (2), 2012, 22-33.

[27] **Barbu, C.**, Minculete, N., *About the area of triangle determined by cevians of rank $(k; l; m)$*, Scientific Studies and Research Bacau, **21** (1), 2011, 139-148.

[28] **Barbu, C.**, Pişcoran, L., *The orthopole theorem in the Poincaré Disc Model of Hyperbolic Geometry*, Sapientia, (submitted).

[29] **Barbu, C.**, Pişcoran, L., *Pappus's Harmonic Theorem in the Einstein Relativistic Velocity Model of Hyperbolic Geometry,* Studia Universitaris Babeş - Bolyai Mathematica, **56** (1), 2011, 101-108.

[30] **Barbu, C.**, Pişcoran, L., *The Hyperbolic Zajic Theorem in the Poincaré Disc Model of Hyperbolic Geometry*, International Journal Forum, **5** (66), 2010, 3251-3254.

[31] **Barbu, C.**, Pişcoran, L., *New inequalities on hyperbolic triangles*, International Journal of Pure and Applied and Technology, **1**, 2010, 7-10.

[32] **Barbu, C.**, Pişcoran, L., *Some hyperbolic theorems in the Poincaré disk model of hyperbolic geometry,* Carpathian Journal of Mathematics, **28** (1), 2012, 9-15.

[33] **Barbu, C.**, Pişcoran, L., *The Hyperbolic Nobbs Theorem in the Poincaré Disc Model of Hyperbolic Geometry*, International Journal Forum, **5** (66), 2010, 3255-3258.

[34] **Barbu, C.**, Pişcoran, L., *Gülicher's Theorem in the Poincaré Disc Model of Hyperbolic Geometry,* Mathematica Aeterna, **1** (5), 2011, 305-311.

[35] **Barbu, C.**, Pişcoran, L., *Andrica - Iwata's inequality in hyperbolic triangle*, Mathematical Inequalities & Applications, **15** (3), 2012, 631-637.

[36] **Barbu, C.**, Pişcoran, L., *On Panaitopol and Jordan Type inequalities*, Journal of Inequalities and Applications, (submitted).

[37] **Barbu, C.**, Pişcoran, L., *Applications of Cusa's Inequality in a hyperbolic triangle*, Filomat, (submitted).

[38] **Barbu, C.**, Smarandache, F., *The Hyperbolic Menelaus Theorem in The Poincaré Disc Model of Hyperbolic Geometry*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, accepted.

[39] **Barbu, C.**, Smarandache, F., *A new proof of Menelaus's Theorem of Hyperbolic Quadrilaterals in the Poincaré Model of Hyperbolic Geometry,* Scientia Magna, (submitted).

[40] **Barbu, C.**, Sönmez, N., *The orthopole theorem in the Poincaré upper half-plane of hyperbolic geometry*, Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries, **1** (2), 2012, 71-74.

[41] **Barbu, C.**, Sönmez, N., *On the Carnot theorem in the Poincaré upper half-plane model of hyperbolic geometry*, Acta Universitatis Apulensis, **31**, 2012.

[42] Baricz, Á., *Generalized Bessel functions of the first kind*, Ph.D. thesis, Babes-Bolyai University, Cluj Napoca, Romania, 2008.

[43] Bechenbach, E., Bellman, F., *Inequalities*, Springer, Berlin, Göttingen and Heidelberg, 1961.

[44] Bergström, A., *A triangle inequality for matrices*, Den Elfte Skandinaviske Matematikerkongress, Trodheim, Johan Grundt Tanums Forlag, Oslo, 1952, 264–267.

[45] Blundon, W., *Inequalities associated with the triangle,* Canad. Math. Bull. **8,** 1965, 615-626.

[46] Bonola, R., *Non - Euclidean geometry*, The Open Court Publishing Company, Chicago, 1912.

[47] Bottema, O., *On the Area of a Triangle in Barycentric Coordinates*, Crux. Math., **8** (1982) 228-231.

[48] Bradley, C.J., *The Algebra of Geometry: Cartesian, Areal and Projective Coordinates*, Bath: Highperception, 2007.

[49] Brânzei, D., *Modele geometrice*, Ed. Universitatea "Alexandru Ioan Cuza", Iaşi, 1982.

[50] Carmo, M., *Riemannian Geometry,* Birkhäuser, Boston, 1992.

[51] Coandă, C., *Geometrie analitică în coordonate baricentrice*, Editura Reprograph, Craiova, 2005.

[52] Coolidge, J., *The Elements of Non-Euclidean Geometry,* Oxford, Clarendon Press, 1909.

[53] Coşniţă, C., *Coordonnées Barycentriques*, Paris, Librairie Vuibert, 1941.

[54] Court, N.A., *A Second Course in Plane Geometry for Colleges*, New York, Johnson Publishing Company, 1925.

[55] Court, N.A., *An introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Dover Publications, Inc., New York, 2007.

[56] Coxeter, H.S., Greitzer, S., *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, New Mathematical Library, 19, 1967.

[57] Coxeter, H.S., *The Beauty of Geometry: Twelve Essays*, New York: Dover, 1999, 244.

[58] Coxeter, H.S., *Non - Euclidean Geometry,* The Mathematical Association of America, Washington, 1998.

[59] Debnath, L., Zhao, C.-J., *New strengthened Jordan's inequality and its applications*, Applied Mathematics Letters, **16** (4), 2003, 557–560.

[60] Demirel, O., Soytürk, E., *The hyperbolic Carnot theorem in the Poincaré disc model of hyperbolic geometry*, Novi Sad J. Math., **38**, 2008, 33-39.

[61] Demirel, O., *The theorems of Stewart and Steiner in the Poincaré disc model of hyperbolic geometry*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, **50** (30), 2009, 359-371.

[62] Dospinescu, G., Lascu, M., Pohoaţă, C., Tetiva, M., *An Elementary proof of Blundon's Inequality*, JIPAM, **9**, 2008.

[63] Dragutin, S., Darko, V., *Non–Euclidean versions of some classical triangle inequalities*, Forum Geometricorum, **12,** 2012, 197-209.

[64] Durell, C., *Modern Geometry: The Straight Line and Circle*, London, Macmillan, 1928, 44.

[65] Einstein, A., *Relativity the special and general theory*, New York, Crown Publishers, 1961.

[66] Emelyanov, L., Emelyanov, E., *Euler's Formula and Poncelet's Porism*, Forum Geometricorum, **1**, 2001, 137-140.

[67] Eves, H., *Desargues'Two-Triangle Theorem*, A Survey of Geometry, Ed. Boston, MA: Allyn & Bacon, 1965.

[68] Euler, L., *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, Novi Comm. Acad. Scie. Petropolitanae **11,** 1765; reprinted in *Opera omnia*, serie prima, **26** (ed.by A.Speiser), 139-157.

[69] Fenchel, W., *Elementary geometry in hyperbolic space*, de Gruyter, Berlin, New York, (de Gruyter studies in mathematics), 1989.

[70] Gallaty, W., *The Modern Geometry of the Triangle,* Hodgson Pub., London, 1922, 46.

[71] Gilbert, G., MacDonnell, D., *The Steiner-Lehmus Theorem*, The American Mathematical Monthly, **70**, 1963, 79-80.

[72] Goodman, S., *Compass and straightedge in the Poincaré disk*, American Mathematical Monthly **108,** 2001, 38–49.

[73] Goormaghtigh, R., *A generalization of the orthopole theorem*, **36**, 1929, 422-424.

[74] Graustein, W., *Introduction to Higher Geometry*, New York: Macmillan, 1930.

[75] Grinberg, D., *A new proof of the Ceva Theorem*, http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/geometry2.html.

[76] Guinand, A., *Euler lines, tritangent centers, and their triangles*, Amer. Math. Monthly **91**, 1984, 290-300.

[77] Gülicher, H., Problem 1581, Mathematics Magazine, **72** (4), 1999.

[78] Hajja, H., *A Short Trigonometric Proof of the Steiner-Lehmus Theorem*, Forum Geometricorum, **8**, 2008, 39-42.

[79] Honsberger, R., *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1995.

[80] Huygens, C., *Oeuvres completes*, Société hollandaise des science, Haga, 1888-1940.

[81] Iwata, S., Encyclopedia of Geometry (Japanese), Tokyo, **5,** 1971, 345.

[82] Iversen, B., *Hyperbolic geometry*, Cambridge University Press, 2008.

[83] Jiang, W.D., Yun, H., *Sharpening of Jordan's inequality and its applications*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, **7** (3), 2006, 1–4.

[84] Johnson, A.R., *Advanced Euclidean Geometry*, New York, Dover Publications, Inc., 1962.

[85] Johnson, A.R., *Modern Geometry: An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle*, Boston, MA: Houghton Mifflin, 1929, 154.

[86] Kimberling, C., *Triangle Centers and Central Triangles*, Congressus Numerantium 129, Utilitas Mathematica Publishing, 1998.

[87] Klén, R., Visuri, M., Vuorinen, M., *On Jordan Type Inequalities for Hyperbolic Functions*, Journal of Inequalities and Applications, 2010.

[88] Lalescu, L., *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, Bucureşti, 1958.

[89] Lazarević, I., *Neke nejednakosti sa hiperbolickim funkcijama*, Univerzitetu Beogradu. Publikacije Elektrotehničkog Fakulteta. Serija Matematika i Fizika, **170**, 1996, 41–48.

[90] Leonard, I.E., Lewis, J.E., *The Median Triangle in Hyperbolic Geometry*, Mathematics Magazine, **4,** 2004.

[91] Levin, M., *On the Steiner-Lehmus Theorem*, Mathematics Magazine, **47**, 1974, 87-89.

[92] Li, J.-L., *An identity related to Jordan's inequality*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Article ID 76782, 6 pages, 2006.

[93] Li, J.-L., Li, Y.-L., *On the strengthened Jordan's inequality*, Journal of Inequalities and Applications, Article ID 74328, 8 pages, 2007.

[94] Lindén, H., *Convexity and inequalities for power series*, Turku Analysis Seminar, 2006.

[95] Malesevic, J., *A Direct Proof of the Steiner-Lehmus Theorem, Mathematics Magazine*, **43**, 1970, 101-102.

[96] McCleary, J., *Geometry from a differentiable viewpoint,* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[97] Mihăileanu, N., *Geometrie neeuclidiană*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1954.

[98] Mihăileanu, N., Neumann, M., *Fundamentele geometriei*, E.D.P., Bucureşti, 1973.

[99] Minculete, N., *Teoreme şi probleme specifice de geometrie*, Ed. Eurocarpatica, Sf. Gheorghe, 2007.

[100] Miron, R., Brânzei, D., *Fundamentele aritmeticii şi geometrie*i, Ed. Academiei, 1983.

[101] Mitrinović, D., *Analytic Inequalities*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, New York, NY, USA, **16,** 1970, in cooperation with P. M. Vasić.

[102] Mitrinović, D., Pečarić, J., Volenec, V., *Recent advances in geometric inequalities,* Kluver Acad. Publ.. Amsterdam, 1989.

[103] Moise, E., *Elementary Geometry from on Advanced Standpoint*, Addison Wesley Publishing Company, Inc., Rerading, 1990.

[104] Mortici, C., *The natural approach of Wilker-Cusa-Huygens inequalities*, Mathematical Inequalities & Applications, preprint.

[105] Neuberg, J., *Nouvelle Correspondance Mathématique*, 1875, 189.

[106] Neuman, E., Sándor, J., *On some inequalities involving trigonometric and hyperbolic functions with emphasis on the Cusa-Huygens, Wilker and Huygens inequalities*, Mathematical Inequalities & Applications, submitted.

[107] Neuman, E., *Inequalities involving inverse cicular and inverse hyperbolic functions*, Journal of Inequalities and Applications, **4** (1), 2010.

[108] Neuman, E., *On Wilker and Huyhens Type Inequalities*, Mathematical Inequalities & Applications, (preprint).

[109] Niculescu, C.P., *A new look at Newton's inequality*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, **1** (2), article 17, 2000.

[110] Niculescu, C.P., *On the algebraic character of Blundon's inequality*, Inequality Theory and Applications, **3**, 2003, 139-144.

[111] Ogilvy, C.S., *Excursions in Geometry*, New York: Dover, 1990, 89-92.

[112] Özban, A., Z., *A new refined form of Jordan's inequality and its applications*, Applied Mathematics Letters, **19** (2), 2006, 155–160.

[113] Pargeter, A., *Steiner-Lehmus theorem: a direct proof*, The Mathematical Gazette, **55** (391), 1971, 58.

[114] Pečarić, J. E., Proschan, F., Tong, Y.L., *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*, Academic Press, 2011, 171.

[115] Pop, O.T., *About Bergström's inequality*, Journal of Mathematical Inequalities, **3** (2), 2009, 237-242.

[116] Popoviciu, T., *Sur certaines inégalités qui caractérisent les fonctions convexes*, Analele ştiinţifice Univ. Al.I. Cuza Iasi, Secţia I a Mat., **11**, 1965, 155–164.

[117] Rouché, É, Ramus, *Question 233*, Nouv. Ann. Math., **10,** 1851, 353-355.

[118] Sándor, J., *On the concavity of sin x/x*, Octogon Mathematical Magazine, **13** (1), 2005, 406–407.

[119] Satnoianu, R.A., *General power inequalities between the sides and the crumscribed and inscribed radii related to the fundamental triangle inequality*, Math. Inequal. Appl., **5** (4), 2002, 747-751.

[120] Scimemi, B., *Paper-folding and Euler's theorem revisited*, Forum Geom. **2**, 2002, 93-104.

[121] Scott, J.A., *Some examples of the use of areal coordinates in triangle geometry*, The Mathematical Gazette, **11,** 1999, 472-477.

[122] Smarandache, F., *Généralisation du Théorem de Ménélaus*, Rabat, Morocco, Seminar for the selection and preparation of the Moroccan students for the International Olympiad of Mathematics in Paris, 1983.

[123] Smarandache, F., *Problémes avec et sans. . . problêms!*, Somipress, Fés, Morocoo, 1983.

[124] Smarandache, F., *Eight Solved and Eight Open Problems in Elementary Geometry*, in arXiv.org.

[125] Smarandache, F., *Nine Solved and Nine Open Problems in Elementary Geometry*, arxiv.org/abs/1003.2153.

[126] Smith, G., *Statics and moduli space of triangles*, Forum Geom., **5**, 2005, 181-190.

[127] Sonmez, N., *Trigonometric Proof of Steiner-Lehmus Theorem in Hyperbolic Geometry*, KoG, **12,** 2008, 35-36.

[128] Stahl, S., *The Poincaré half plane a gateway to modern geometry*, Jones and Barlett Publishers, Boston, 1993.

[129] Stern, J., *Euler's triangle determination problem*, Forum Geom., **7**, 2007, 1-9.

[130] Stothers, W., *Geometry Pages* http://www.maths.gla.ac.uk/.

[131] Svrtan, D., Veljan, D., *Non-Euclidean version of some classical triangle inequalities*, Geometric Topology, 2007.

[132] Sun, Z., Zhu, L., *On New Wilker - Type Inequalities*, ISRN Mathematical Analysis, Volume 2011, Article ID 681702.

[133] Ungar, A., *Thomas precession:its underlying gyrogroup axioms and their use in hyperbolic geometry and relativistic physics*, Found. Phys., **27**, 1997, 881-951.

[134] Ungar, A., *Analytic Hyperbolic Geometry Mathematical Foundations and Applications*, Hackensack, NJ:World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd., 2005.

[135] Ungar, A., *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, Hackensack, NJ:World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd., 2008.

[136] Ungar, A., *Gyrovector Space Approach to Hyperbolic Geometry*, Morgan & Claypool Publishers, 2009.

[137] Ungar, *Hyperbolic Triangle Centers*, Springer, New York, 2010.

[138] Varičak, V., *Beitrage zur nichteuklidischen geometrie*, Jber. Dtsch. Mat.Ver., 1908.

[139] Zhu, L., *Inequalities for hyperbolic function and their applications*, Hindawi Publishing Corporation Journal of Inequalities and Applications Volume 2010, Article ID 130821.

[140] Wu, S., *A sharpened version of the fundamental triangle inequality*, Math. Inequalities Appl., **11** (3), 2008, 477-482.

[141] Wu, S., Srivastava, H. M., *A weighted and exponential generalization of Wilker's inequality and its applications*, Integral Transforms and Special Functions, **18** (7-8), 2007, 529–535.

[142] Wu, S., Srivastava, H. M., *A further refinement of a Jordan type inequality and its application*, Applied Mathematics and Computation, **197** (2), 2008, 914–923.

[143] Qi, F., Niu, D.-W., Guo, B.-N., *Rafinements, generalizations, and applications of Jordan's inequality and related problems*, Journal of Inequalities and Applications, vol. 2009, Article ID 271923, 52 pages, 2009.

[144] Yiu, P., *Conic Solution of Euler's Triangle Determination Problem*, Journal for Geometry and Graphics, **12** (1), 2008, 75-80.

[145] Zhang, X., Wang, G., Chu, Y., *Extensions and sharpenings of Jordan's and Kober's inequalities*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, **7** (2), 2006, 1–3.

[146] Zhu, L., *Inequalities for Hyperbolic Functions and Their Applications*, Journal of Inequalities and Applications, Vol. 2010.

[147] Zhu, L., *On Wilker-type inequalities*, Mathematical Inequalities & Applications, **10** (4), 2007, 727–731.

[148] Zhu, L., *Sharpening of Jordan's inequalities and its applications,* Mathematical Inequalities & Applications, **9** (1), 2006, 103–106.