**Universitatea Babeş–Bolyai, Cluj-Napoca**
**Institutul de Studii Doctorale**
**Şcoala Doctorală de Matematică şi Informatică**
**Specializarea Matematică**

**Rezumatul tezei de doctorat**

# Metode variaţionale şi topologice în studierea incluziunilor şi ecuaţiilor eliptice

Conducător ştiinţific:
Prof. dr. Kristály Alexandru

Doctorandă:
Vas Orsolya

Cluj-Napoca
2021

# Cuprins

# 1 Introducere

Una dintre problemele de bază ale calculului variaţional este studiul existenței extremelor sau a punctelor critice/de echilibru ale funcţionalelor. Multe probleme neliniare din teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale pot fi reduse la căutarea extremelor a funcționalei de energie asociate, ceea ce este mai ușoară decât rezolvarea problemei inițiale. Această metodă este aplicabilă deoarece, dacă un punct de extrem poate fi detectat, atunci va fi o soluție slabă a problemei inițiale. Această abordare se numește metoda directă a calculului variațional și provine din fizică, unde, în general, studiul stării de echilibru al unui proces poate fi redus la minimizarea energiei totale care caracterizează procesul fizic. Pentru a demonstra existența unor extreme ale funcționalelor (de energie), condiția Palais–Smale [Palais şi Smale, 1964] sau, în scurt, condiția $(PS)$ este instrumentul cel mai frecvent utilizată, deoarece oferă o condiție suficientă pentru existența unei minim. Astfel, dacă arătăm că condiția $(PS)$ este îndeplinită, atunci avem cel puțin un punct critic.

Principiul variațional al lui Ekeland introdus în [Ekeland, 1972, 1974] pentru funcționale inferior semicontinue pe spații metrice este versiunea neliniară a teoremei lui Bishop–Phelps [Bishop şi Phelps, 1963], reprezentând un instrument util în construirea unui minimizant al funcționalelor inferior semicontinue pe spații metrice complete. Principiul variațional al lui Ekeland caracterizează de fapt completitudinea unui spațiu metric și poate fi utilizat cu succes pentru a stabili existența unui minimizant aproximativ și, utilizat împreună cu condiția $(PS)$, funcționala trebuie să-și atingă minimul. În funcție de cadrul variațional, sunt cunoscute mai multe versiuni și extensii diferite ale acestui principiu, dintre care ne vom concentra pe versiunea sa simetrică introdusă și demonstrată de [Squassina, 2012].

Este mai ușoară determinarea punctelor de extrem ale funcționalelor decât localizarea acelor puncte critice care nu sunt minime sau maxime. [Ambrosetti şi Rabinowitz, 1973] au fost primii autori care au prezentat o metodă pentru detectarea punctelor critice neextremale ale funcționalelor diferențiabile continue, care nu sunt mărginite superior sau inferior. Datorită interpretării lor geometrice, ne referim la aceste puncte critice ca puncte de trecere montană. Pentru a detecta astfel de puncte critice, ei au propus o metodă minimax care se bazează pe o lemă de deformare și constă din doi pași de bază, și anume dovada existenței unei secvențe $(PS)$ și verificarea condiției $(PS)$. Teorema lor de trecătorii montane de altitudinii pozitive a fost intens studiată și aplicată pentru a stabili existența punctelor critice ale unor astfel de tipuri de funcționale.

[Pucci şi Serrin, 1984, 1985] au dezvoltat o versiune mai slabă a teoremei, care se numește teorema trecătorii montane de altitudine zero, care poate fi utilizată pentru a demonstra existența punctelor critice în cazul în care creasta montană de separare are altitudine zero. O altă extensie importantă a teoremei se datorează lui [Ghoussoub şi Preiss, 1989], care pe lângă faptul că demonstrează existența punctelor critice, derivă și informații despre locația lor. [Willem, 1996] a demonstrat o lemă de deformare cantitativă care poate fi utilizată în construcția secvențelor $(PS)$ independent de condițiile lor de compactitate. Această abordare este mai generală decât cea originală și poate fi utilizată pentru multe probleme în care condiția $(PS)$ eșuează. Pe baza principiului general de tip minimax al lui [Willem, 1996], [Schaftingen, 2005] a demonstrat un principiu minimax simetric pentru funcții continuu diferențiabile cu scopul de a obține puncte critice simetrice. Mai mult, el a folosit această nouă metodă pentru a studia proprietățile de simetrie ale soluțiilor ecuațiilor eliptice cu derivate parțiale. În plus față de aceste rezultate, teorema trecătorii montane are o gamă largă de aplicații în cazul ecuațiilor neliniare cu derivate parțiale – fără a oferi un studiu exhaustiv, menționăm aici, de exemplu, lucrările [Ambrosetti şi Malciodi, 2007; Aubin şi Ekeland, 1984; Brezis şi Nirenberg, 1991; Jabri, 2003; Kristály et al., 2010; Mahwin şi Willem, 1989; Rabinowitz, 1986; Schechter, 1999; Struwe, 2008] și multe referințe din acestea. În ultimele decenii, diferite domenii ale teoriei punctului critic au fost dezvoltate foarte intens și a devenit un cadru natural în mai multe domenii matematice moderne cu aplicații importante în mecanică, inginerie, biologie și economie.

O altă modalitate de a determina extrema funcționalei este posibilă utilizând teoria punctului fix, deoarece multe aplicații pot fi reformulate ca o problemă de punct fix. În acest sens, trebuie să definim condiții suficiente care să garanteze existența punctelor fixe ale funcționalelor și de asemenea, să studiem natura punctelor fixe obținute, adică dacă acestea sunt extreme sau nu. Datorită utilității sale, aplicarea teoremelor de punct fix a devenit un instrument foarte popular în studierea existenței (și, în unele cazuri, a multiplicității) soluțiilor incluziunilor/ecuațiilor cu derivate parțiale. Printre cele mai cunoscute teoreme de punct fix, vom folosi atât alternativa lui Leray–Schauder [Granas şi Dugundji, 2003], cât și o variantă a teoremei de punctul fix a lui Krasnoselkii demonstrată în [Precup, 2012] pentru stabilirea existenței soluțiilor în cazul anumitor ecuații neliniare cu derivate parțiale descrise ca probleme Dirichlet cu operatori Finsler–Laplace.

Teza este dedicată studiului problemei neliniare

$$\begin{cases} \mathrm{L}\, u \in \partial F\,(x,u) & \text{în } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

unde $\Omega$ este o mulțime dechisă a spațiului euclidian $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}_{\geq 1})$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ este o funcție suficient de netedă, L poate corespunde operatorului diferențial clasic Laplace, $p$-Laplace sau Finsler–Laplace, iar $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este fie o funcție continuu diferențiabilă, fie doar o funcție local Lipschitz.

În funcție de tipul operatorului diferențial L și de proprietățile funcției $F$, folosim metode de analiză netedă sau nenetedă prezentate mai sus pentru a demonstra existența soluției/soluțiilor. Mai mult, în unele cazuri, putem ori să localizăm soluțiile, ori să arătăm că au proprietăți speciale precum invarianța lor față de simetrizarea de tip „spherical cap”.

La început, vom oferi un scurt rezumat al noțiunilor preliminare și rezultatelor teoretice existente, apoi – prin combinarea metodelor variaționale și topologice cu elementele fie ale teoriei punctelor ori critice, ori fixe – în fiecare capitol ulterior al tezei vom studia existența, multiplicitatea (în unele cazuri proprietatea de simetrie) și localizarea soluțiilor problemelor de tip (1.1) parametrizate diferit.

Pe lângă acest capitol introductiv, teză constă din cinci capitole principale, structura și rezumatul cărora sunt prezentate mai jos.

- În Capitolul 2 rezumăm noțiunile preliminare de bază și rezultatele legate de fundamentele teoretice al metodelor care vor fi prezentate în capitolele ulterioare ale tezei.

- Bazată pe articolul [Mezei, Molnár şi **Vas**, 2014] în Capitolul 3 la început – considerând o problemă semiliniară de incluziune eliptică – la început studiem cazul când $\Omega = B(0,1)$ este bila unitate în spațiul euclidian $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$), $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție local Lipschitz super-liniară în origine și care îndeplinește totodată și o condiție de creștere subliniară la infinit, iar $\mathrm{L} = \Delta_p u = \mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$ este operatorul $p$-Laplace definit pe spațiul Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ cu $p \in (1, N)$ fixat. Apoi, în cazul în care $\Omega = \mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$), $(X, \|\cdot\|_X)$ este un spațiu Banach reflexiv separabil cu dualul său topologic $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$, $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție local Lipschitz și $A : X \to X^*$ este un operator potențial, ne ocupăm cu o inegalitate hemivariațională.

  Pe lângă demonstrarea existenței soluțiilor problemelor, utilizând atât versiunea simetrică a principiului variațional al lui Ekeland demonstrat de [Squassina, 2012], cât și forma netedă a versiunii simetrice a principiului variațional dezvoltat de [Schaftingen, 2005], studiem și proprietatea de multiplicitate a soluțiilor. Mai mult, dovedim o proprietate calitativă foarte importantă a acestora, și anume că sunt invariante față de simetrizarea de tip „spherical cap”.

  **Contribuțiile noastre în acest capitol** sunt: Teoremele 3.1, 3.2 și Lemele 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8.

- Capitolul 4 este dedicat studiului teoriei punctelor critice dezvoltată de Schechter [1992, 1999]. Pe baza articolului [**Vas**, 2015], în Secțiunea 4.1 la început demonstrăm un rezultat de tip Schechter pentru puncte critice ale funcțiilor local Lipschitz definite pe o bilă dintr-un spațiu Hilbert și prezentăm, de asemenea, o aplicație concretă a lui. Folosind teorema punctului critic de tip Schechter, dovedim existența unei soluții a problemei (1.1), când $\Omega$ este o mulțime mărginită și deschisă în $\mathbb{R}^N$ cu frontieră $\partial\Omega$ de clasă $C^1$ , $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție local Lipschitz și $\mathrm{L} = \Delta u$ este operatorul clasic Laplace.

  A doua parte a capitolului se bazează pe articolul [Lisei şi **Vas**, 2016]. În Secțiunea 4.2, pentru a localizarea soluțiilor problemelor care conţin operatorul $p$-Laplace pe domenii mărginite sau nemărginite, aplicăm versiunea netedă a teoremei de tip Schechter pentru punctele critice ale funcționalelor de clasă $C^1$ în spații Banach.

  **Contribuțiile noastre în acest capitol** sunt: Teoremele 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 și Propozițiile 4.1, 4.2, 4.3.

- Capitolul 5 se bazează pe articolul [Lisei, Varga şi **Vas**, 2018]. După un scurt rezumat al noțiunilor și proprietăților preliminare, Secțiunea 5.2 prezintă câteva rezultate auxiliare care sunt necesare pentru a deonstra afirmațiile principale ale Secțiunii 5.3 pentru cazul unei mulțimi conice intersectate cu o bilă într-un spațiu Banach reflexiv local uniform convex. Mai precis, menționăm noua varianta: a lemei de deformare; a versiunii mărginită a teoremei generale de tip minimax a lui [Willem, 1996]; și a teoremei trecătorii montane a lui [Ambrosetti şi Rabinowitz, 1973]. În Secțiunea 5.4 aplicăm rezultatele discutate anterior pentru a localiza două soluții netriviale ale problemelor Dirichlet cu operatori neomogeni în contextul spațiilor Orlicz–Sobolev. Capitolul se încheie cu trei exemple concrete ale problemei Dirichlet considerate.

  **Contribuțiile noastre în acest capitol** sunt: Propozițiile 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, Lemele 5.1, 5.2 și Teoremele 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6.

- Capitolul 6 este bazată pe [Mezei şi **Vas**, 2019] și studiază rezultate de existență și localizare pentru două probleme Dirichlet care implică operatorul Finsler–Laplace, adică $\mathrm{L} = \Delta_F u$. În cazul primei noastre probleme, pe baza rezultatelor din [Dinca et al., 2001], arătăm existența soluțiilor în două moduri diferite: atât prin aplicarea metodei directe a calculului variațional, cât și prin utilizarea alternativei lui Leray–Schauder. După ce, în cazul celei de-a doua probleme, prin utilizarea combinată a inegalității lui Harnack și a teoremei de punct fix de tip Krasnosel'skii a lui [Precup, 2012] demonstrăm un rezultat de existență și localizare.

**Contribuțiile noastre în acest capitol** sunt: Lema 6.1 și Teoremele 6.1, 6.3, 6.7.

## Rezultatele noastre

Teza este bazată pe articolele:

- I. I. Mezei, A. É. Molnár and O. **Vas**, 2014. *Multiple symmetric solutions for some hemivariational inequalities*, Studia Universitatis Babeş–Bolyai Mathematica, **59**, No. 3, 369–384.
URL: http://193.0.225.37/download/pdf/877.pdf
- O. **Vas**, 2015. *A Schechter-type critical point result for locally Lipschitz functions*, Mathematica, Tome 57 (**80**), No. 1–2, 117–125.
URL: http://math.ubbcluj.ro/~mathjour/articles/2015/vas.pdf
- H. Lisei and O. **Vas**, 2016. *Critical point result of Schechter type in a Banach space*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No. 14, 1–16, $\mathbf{IF}_{2016} = 0.926$, $\mathbf{JCR}_{2016}$ Category: Mathematics. Rank in Category: 73/311. Quartile in Category: Q1.
DOI: https://doi.org/10.14232/ejqtde.2016.1.14
- H. Lisei, Cs. Varga and O. **Vas**, 2018. *Localization method for the solutions of nonhomogeneous operator equations*, Applied Mathematics and Computation, 329, 64–83, $\mathbf{IF}_{2018} = 3.092$, $\mathbf{JCR}_{2018}$ Category: Mathematics, Applied. Rank in Category: 14/254. Quartile in Category: Q1.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.01.031
- I. I. Mezei and O. **Vas**, 2019. *Existence results for some Dirichlet problems involving Finsler–Laplace operator*, Acta Mathematica Hungarica, **157** (**1**), 39–53, $\mathbf{IF}_{2019} = 0.588$, $\mathbf{JCR}_{2019}$ Category: Mathematics, Applied. Rank in Category: 233/325. Quartile in Category: Q3.
DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-018-0894-8

Unele dintre rezultatele noastre au fost prezentate la următoarele conferințe științifice:

- $11^{th}$ Joint Conference on Mathematics and Computer Science, May 20–22, 2016, Eger, Hungary;
- Geometry and PDEs, June 13–14, 2017, West University of Timişoara, Romania.

## Cuvinte cheie

funcții local Lipschitz; principiul variațional al lui Ekeland; condiția Palais–Smale; puncte critice de tip Schechter; simetrizarea de tip „spherical cap"; lema de deformare de tip Willem; teorema trecătorii montane; operatorul clasic-, $p$- și Finsler–Laplace; probleme de incluziuni și ecuații eliptice; inegalități hemivariaționale; teoreme de punct fix.

## Mulțumiri

Aș dori să-mi exprim recunoștința față de mulți oameni care m-au ajutat în ultimii ani ai activității mele de cercetare: aș dori să le mulțumesc conducătorului meu inițial de doctorat, prof. dr. György-Csaba Varga, pentru tot sprijinul, energia și munca pe care le-a investit în mine în timpul studiilor mele și îmi pare foarte rău că nu mai poate vedea că eforturile sale au dat roade; de asemenea, sunt recunoscător conducătorului meu final de doctorat, Prof. dr. Alexandru Kristály, pentru că m-a sprijinit și a făcut tot ce a putut pentru a mă ajuta să-mi susțin teza; Sunt, de asemenea, recunoscător tuturor coautorilor conf. dr. Hannelore Lisei, lect. dr. Ilona-Ildikó Mezei și lect. dr. Andrea Éva Doka-Molnár pentru munca noastră comună, fără ele, rezultatele incluse în această teză nu ar fi fost obținute; De asemenea, doresc să mulțumesc lui prof. dr. Csaba Farkas pentru sfaturile sale profesionale care au îmbunătățit munca mea.

Aș dori, de asemenea, să mulțumesc familiei și prietenilor pentru sprijinul, înțelegerea și încurajarea lor care m-au ajutat în momentele mai grele. Nu în ultimul rând, îi sunt recunoscător și lui Manó că mi-a fost alături în fiecare zi și noapte. :)

# 2

# Noțiuni și rezultate preliminare

Acest capitol este dedicat colectării noțiunilor preliminare de bază și a rezultatelor legate de fundamentul teoretic al metodelor care sun folosite în capitole ulterioare.

## 2.1 Spații Lebesgue

## 2.2 Spații Sobolev

## 2.3 Spații Orlicz–Sobolev

## 2.4 Elemente de calculul variațional

## 2.5 Funcții local Lipschitz

## 2.6 Simetrizare și polarizare

# 3

# Soluţii multiple şi simetrice ale câtorva ecuaţii hemivariaţionale

Pe baza articolului [Mezei, Molnár şi **Vas**, 2014], acest capitol prezintă câteva rezultate de multiplicitate pentru inegalitățile hemivariaționale definite fie pe bila unitate, fie pe întregul spațiu $\mathbb{R}^N$. Folosind versiunea simetrică a principiului variațional al lui Ekeland introdusă de [Squassina, 2012] și o versiune nenetedă a principiului simetric minimax al lui [Schaftingen, 2005], demonstrăm că soluțiile acestor inegalități sunt invariante față de simetrizarea de tip „spherical cap". În Secțiunea 3.1 studiem existența soluțiilor multiple și simetrice ale incluziunii diferențiale semiliniare eliptice definită pe bila unitate a spațiului $\mathbb{R}^N$, iar în Secțiunea 3.2 ne ocupăm cu o inegalitate hemivariațională definită pe întregul spațiul $\mathbb{R}^N$.

## 3.1 Prima problemă

Fie $\Omega = B(0,1)$ o bilă unitate în $\mathbb{R}^N$, $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie local Lipschitz, și $p \in (1, N)$ şi $\lambda > 0$ fii parametrii fixate. Utilizând operatorul $p$-Laplace $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, considerăm problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u \in \lambda \partial_y F(x,u) & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.$P_\lambda$}$$

de incluziune diferențială eliptică, unde $\partial_y F(x,s)$ este gradientul generalizat al lui $F$ în punctul $s \in \mathbb{R}$ în raport cu a doua variabilă.

Astfel de probleme provin din fizică, deoarece soluțiile problemelor eliptice corespund anumitor stări de echilibru ale proceselor fizice. Pentru a demonstra existența soluțiilor problemei (3.1.$P_\lambda$), combinăm metode din calculul variațional cu tehnici de simetrizare. [Schaftingen, 2005] a dezvoltat un cadru abstract pentru simetrizări, bazându-se pe care [Squassina, 2012] a formulat versiunile simetrice ale principiilor variaționale clasice. Au fost publicate multe lucrări legate de simetrizări, în care soluțiile sunt funcții simetrice radiale [Squassina, 2011], sau axiale [Kristály şi Mezei, 2012], sau care au unele proprietăți de simetrie în raport cu anumite acțiuni de grup [Farkas şi Mezei, 2013]. Mai mult, [Filippucci et al., 2015] au demonstrat existența mai multor soluții simetrice pentru unele probleme de valori proprii, iar [Farkas şi Varga, 2014] au obținut rezultate de multiplicitate pentru un model de sistem eliptic cvasiliniar în cazul funcţionalelor de clasă $C^1$.

Scopul nostru este de a extinde rezultatele sus-menţionate pentru cazul funcțiilor local Lipchitz, prin demonstrarea existenței soluțiilor multiple și simetrice ale problemei ($3.1.P_\lambda$) în spațiul Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ înzestrat cu norma sa standard.

Dacă funcția $F$ îndeplineşte condițiile:

($\mathbf{C}_F^1$) $\lim\limits_{|s|\to 0} \dfrac{\max\{|\xi| : \xi \in \partial_y F(x,s)\}}{|s|^{p-1}} = 0;$

($\mathbf{C}_F^2$) $\lim\limits_{|s|\to +\infty} \dfrac{\max\{|\xi| : \xi \in \partial_y F(x,s)\}}{|s|^{p-1}} = 0;$

($\mathbf{C}_F^3$) există o funcție $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_0 \neq 0$, astfel încât $\displaystyle\int_\Omega F(x, u_0(x))\mathrm{d}x > 0;$

($\mathbf{C}_F^4$) $F(x,s) = F(y,s)$ pentru a.p.t. $x, y \in \Omega$ cu $|x| = |y|$ și pentru orice $s \in \mathbb{R}$;

($\mathbf{C}_F^5$) $F(x,s) \leq F(x,-s)$ a.p.t. $x \in \Omega$ și pentru orice $s \in \mathbb{R}_-$

putem afirma următoarea teoremă de existență și multiplicitate pentru problema ($3.1.P_\lambda$).

**Teorema 3.1** ([Mezei, Molnár şi **Vas**, 2014]). *Dacă $p \in (1, N)$ este un parametru fixat, $\Omega = B(0,1)$ o bilă unitate în $\mathbb{R}^N$ și $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție local Lipschitz cu $F(x,0) = 0$ care îndeplineşte condițiile ($\mathbf{C}_F^1$)–($\mathbf{C}_F^5$), atunci:*

(*a*) *există un număr $\lambda_F$, astfel încât pentru fiecare $0 < \lambda \leq \lambda_F$ problema ($3.1.P_\lambda$) admite numai soluția trivială;*

(*b*) *există un număr real $\lambda_1$, astfel încât pentru fiecare $\lambda > \lambda_1$ problema ($3.1.P_\lambda$) admite cel puțin două soluții în $W_0^{1,p}(\Omega)$, invariante față de simetrizarea de tip „spherical cap”.*

**Obsevația 3.1.** *Pentru $p = 3$ funcția $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$F(x,s) = \begin{cases} |x|\left(s^4 - s^2\right), & |s| \leq 1, \\ |x| \ln\left(s^2\right), & |s| > 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

*îndeplineşte condițiile ($\mathbf{C}_F^1$)–($\mathbf{C}_F^5$).*

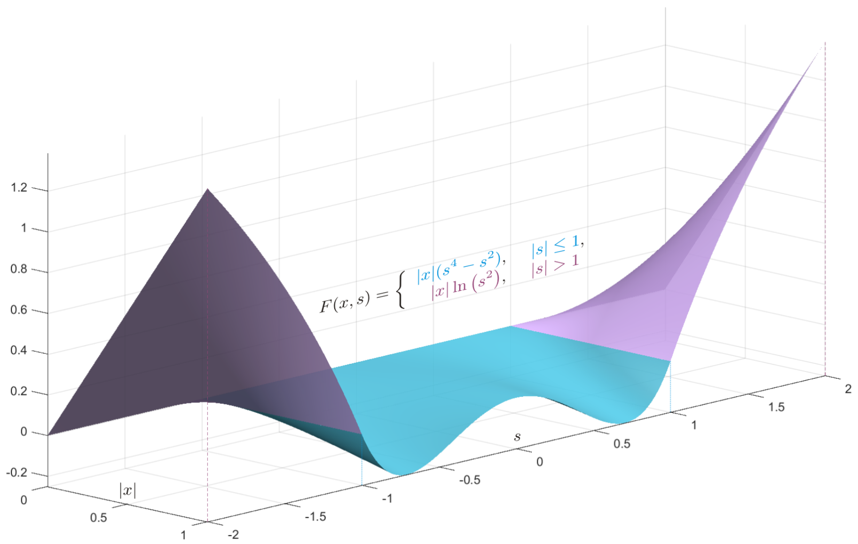


**Figura 3.1:** Graficul funcției (3.2).

**Definiția 3.1** (Soluții slabe ale problemei (3.1.$P_\lambda$))**.** *O funcție $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ este o soluție slabă a problemei (3.1.$P_\lambda$), dacă există $\xi_F \in \partial_y F(x, u(x))$ pentru a.p.t. $x \in \Omega$, astfel încât*

$$\int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla v(x) + |u(x)|^{p-2}u(x)v(x)\right) \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega \xi_F(x)v(x)\mathrm{d}x, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.3}$$

Considerăm funcționalele $I, \mathcal{F} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega (|\nabla u(x)|^p + |u(x)|^p)\,\mathrm{d}x \ \text{ și } \ \mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x, u(x))\mathrm{d}x,$$

prin ajutorul cărora se poate asocia problemei (3.1.$P_\lambda$) funcționala de energie $\mathcal{E}_\lambda : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{E}_\lambda(u) = I(u) - \lambda\mathcal{F}(u). \tag{3.4}$$

**Obsevația 3.2.** *Dacă mulțimea $\Omega$ este mărginită, folosind* [Motreanu şi Panagiotopoulos, 1999, Teorema 1.3]*, avem*

$$\partial\mathcal{F}(u) \subset \int_\Omega \partial_y F(x, u(x))\mathrm{d}x.$$

*Astfel, punctele critice ale funcționalei de energie $\mathcal{E}_\lambda$ sunt soluțiile slabe ale problemei* (3.1.$P_\lambda$)*. În consecință, în loc de căutarea soluțiilor problemei* (3.1.$P_\lambda$)*, este suficientă să găsim punctele critice ale funcționalei $\mathcal{E}_\lambda$.*

Pentru arătarea existenței punctelor critice, putem să folosim faptul că funcționala de energie $\mathcal{E}_\lambda$ este coercivă și îndeplinește condiția $(PS)$ nenetedă în $W_0^{1,p}(\Omega)$.

**Lema 3.1** ([Mezei, Molnár şi **Vas**, 2014])**.** *Funcționala de energie $\mathcal{E}_\lambda$ este coercivă pentru fiecare $\lambda \geq 0$, adică $\mathscr{E}_\lambda(u) \to \infty$, când $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to \infty$ pentru orice $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

**Lema 3.2** ([Mezei, Molnár şi **Vas**, 2014])**.** *Pentru fiecare $\lambda > 0$ funcționala de energie $\mathcal{E}_\lambda$ îndeplinește condiția $(PS)$ nenetedă.*

Pornind de la versiunea simetrică [Squassina, 2012, Teorema 2.8] a principiului variaţional al lui Ekeland, demonstrată de, putem formula următoarea lemă pentru cazul funcţiilor local Lipschitz.

**Lema 3.3** ([Mezei, Molnár şi **Vas**, 2014])**.** *Folosind notaţiile $V := L^p(\Omega)$ şi $X := W_0^{1,p}(\Omega)$, presupune că $(X, V, *, \mathcal{H}_*, S)$ îndeplineşte condiţiile din* [Squassina, 2012, Definiţia 2.1] *cu proprietatea suplimentară că dacă $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ pentru care $u_n \to u$ în $L^p(\Omega)$, atunci $u_n^* \to u^*$ in $L^p(\Omega)$. Presupunem că $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ este a funcţie local Lipschitz și mărginită inferior astfel încât*

$$\Phi(u^H) \leq \Phi(u), \ \forall u \in S, \ \forall H \in \mathcal{H}_*, \tag{3.5}$$

*şi pentru fiecare $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ există $\xi \in S$ pentru care $\Phi(\xi) \leq \Phi(u)$.*

*Dacă funcţionala $\Phi$ îndeplineşte condiţia $(PS)_{\inf\Phi}$, atunci există o funcţie $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ astfel încât $\Phi(v) = \inf\Phi$ şi $v = v^*$ în $L^p(\Omega)$.*

**Lema 3.4** ([Mezei, Molnár şi **Vas**, 2014])**.** *Funcţionala de energie $\mathcal{E}_\lambda$ îndeplineşte inegalitatea*

$$\mathcal{E}_\lambda(u^H) \leq \mathcal{E}_\lambda(u).$$

Rezultatele de existență și multiplicitate ale Teoremei 3.1 pentru problema (3.1.$P_\lambda$) pot fi demonstrate prin utilizarea proprietățiilor funcţionalei de energie $\mathcal{E}_\lambda$ precizate mai sus și totodată prin aplicarea versiunii simetrice a principiului variațional [Schaftingen, 2005, Teorema 3.5] adaptată funcțiilor local Lipschitz.

## 3.2 A doua problemă

Fie $\Omega = \mathbb{R}^N$ și considerăm spațiul real Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ separabil și reflexiv împreună cu spațiul său dual $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$. În plus, fie $p \in [2, N)$ fixat și să notăm cu $p^* := \frac{Np}{N-p}$ exponentul critic Sobolev.

Impunem spațiului $X$ următoarele condiții:

$(\mathbf{C}_X^1)$ presupunem că scufundarea $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ este continuă cu constanta $C_r$ pentru $r \in [p, p^*]$;

$(\mathbf{C}_X^2)$ presupunem că scufundarea $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ este compactă pentru $r \in (p, p^*)$.

Fie $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție local Lipschitz care îndeplinește condițiile $(\mathbf{C}_F^1)$, $(\mathbf{C}_F^4)$ și $(\mathbf{C}_F^5)$ să fie îndeplinite. În cele ce urmează, nu avem nevoie de $(\mathbf{C}_F^3)$, dar presupunem că:

$(\widetilde{\mathbf{C}}_F^1)$ există o constantă pozitivă $c$ și $r \in (p, p^*)$ pentru care $|\xi| \leq c(|s|^{p-1} + |s|^{r-1})$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \partial_y F(x, s)$ și a.p.t. $x \in \mathbb{R}^N$; și

$(\widetilde{\mathbf{C}}_F^2)$ în loc de condiția $(\mathbf{C}_F^2)$, există $q \in (0, p)$, $\nu \in (p, p^*)$, $\alpha \in L^{\frac{\nu}{\nu - q}}(\mathbb{R}^N)$ și $\beta \in L^1(\mathbb{R}^N)$, astfel încât

$$F(z, s) \leq \alpha(z)|s|^q + \beta(z), \ \forall s \in \mathbb{R} \text{ și a.p.t. } z \in \mathbb{R}^N.$$

**Obsevația 3.3.** *Când $\Omega = B(0,1)$ (așa cum a fost în cazul primei noastră problemă $(3.1.P_\lambda)$), putem deduce presupunerea $(\widetilde{\mathbf{C}}_F^1)$ folosind condițiile $(\mathbf{C}_F^1)$ și $(\mathbf{C}_F^2)$, dar când $\Omega = \mathbb{R}^N$ (așa cum este în secțiunea curentă), condiția $(\widetilde{\mathbf{C}}_F^1)$ este necesară.*

De asemenea, considerăm operatorul potențial $A : X \to X^*$ cu potențialul $a : X \to \mathbb{R}$, adică $a$ este Gâteaux-diferențiabilă și totodată

$$\lim_{t \to 0} \frac{a(u + tv) - a(u)}{t} = \langle A(u), v \rangle, \ \forall u, v \in X,$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este dualitatea între spațiile $X^*$ și $X$. Pentru un potențial întotdeauna presupunem că $a(0) = 0$. În plus, presupunem că $A$ îndeplinește următoarele condiții:

$(\mathbf{C}_A^1)$ $A$ este semicontinuu, adică, $A$ este continuu pe liniile segmente în $X$ și $X^*$ înzestrat cu topologia slabă;

$(\mathbf{C}_A^2)$ $A$ este omogen de grad $p - 1$, adică, $A(tu) = t^{p-1}A(u)$, $\forall u \in X$, $\forall t > 0$;

$(\mathbf{C}_A^3)$ $A$ este un operator strict monoton, adică, există o funcție continuă $\tau : [0, \infty) \to [0, \infty)$ care este strict pozitivă pe $(0, \infty)$, în plus $\tau(0) = 0$, $\lim_{t \to \infty} \tau(t) = \infty$ și

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq \tau(\|u - v\|_X)\|u - v\|_X, \ \forall u, v \in X;$$

$(\mathbf{C}_A^4)$ $a(u) \geq c\|u\|_X^p$ pentru orice $u \in X$, unde $c > 0$ este o constantă;

$(\mathbf{C}_A^5)$ $a(u^H) \leq a(u)$ pentru orice $u \in X$, unde $u^H$ este obținută prin polarizarea funcției $u$.

**Obsevația 3.4.** *Condițiile $(\mathbf{C}_A^1)$ și $(\mathbf{C}_A^2)$ implică faptul că $a(u) = \frac{1}{p}\langle A(u), u \rangle$.*

A doua noastră problemă este formulată după cum urmează: se caută funcția $u \in X$ astfel încât

$$\langle Au, v \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} F_y^\circ(x, u(x); -v(x))\mathrm{d}x \geq 0, \ \forall v \in X, \tag{3.6.$P_\lambda$}$$

unde $F_y^\circ$ notează derivata direcțională generalizată a lui $F$ în a doua variabilă.

În aceste condiții, putem afirma cel de-al doilea rezultat principal referitor la existența și multiplicitatea soluțiilor problemei $(3.6.P_\lambda)$.

**Teorema 3.2** ([Mezei, Molnár și **Vas**, 2014])**.** *Presupunem că $p \in [2, N)$ este fixat. Fie $\Omega = \mathbb{R}^N$, $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție local Lipschitz și fie $A : X \to X^*$ un operator de potențial astfel încât condițiile $(\mathbf{C}_A^1)$–$(\mathbf{C}_A^5)$, $(\mathbf{C}_X^1)$–$(\mathbf{C}_X^2)$, $(\mathbf{C}_F^1)$, $(\widetilde{\mathbf{C}}_F^1)$–$(\widetilde{\mathbf{C}}_F^2)$ și $(\mathbf{C}_F^4)$–$(\mathbf{C}_F^5)$ sunt îndeplinite. Atunci, există $\lambda_2 > 0$ astfel încât pentru fiecare $\lambda > \lambda_2$ problema $(3.6.P_\lambda)$ admite două soluții netriviale, care sunt invariante față de simetrizarea de tip „spherical cap”.*

Considerăm funcționala $\widetilde{\mathcal{F}} : X \to \mathbb{R}$,

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u(x))\mathrm{d}x \tag{3.7}$$

și funcționala de energie $\mathcal{A}_\lambda : X \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}_\lambda(u) = a(u) - \lambda\widetilde{\mathcal{F}}(u) \tag{3.8}$$

asociată problemei (3.6.$P_\lambda$).

**Obsevația 3.5.** *Folosind* [Kristály şi Varga, 2004, Propoziția 5.1.2], *datorită condiţiei* ($\widetilde{\mathbf{C}}_F^1$), *avem inegalitatea*

$$\widetilde{\mathcal{F}}^\circ(u; v) \le \int_{\mathbb{R}^N} F_y^\circ(x, u(x); v(x))\mathrm{d}x. \tag{3.9}$$

*Astfel, punctele critice ale funcționalei de energie $\mathcal{A}_\lambda$ sunt soluțiile slabe ale problemei* (3.6.$P_\lambda$).

Similar cu cazul problemei anterioare, pentru arătarea existenței punctelor critice, putem să folosim proprietatea de coercivitate a funcţionalei de energie $\mathcal{A}_\lambda$ și faptul că $\mathcal{A}_\lambda$ îndeplineşte condiţia $(PS)$ pentru fiecare $\lambda > 0$.

**Lema 3.5** ([Mezei, Molnár şi **Vas**, 2014]). *Dacă condițiile* ($\widetilde{\mathbf{C}}_F^2$) *și* ($\mathbf{C}_A^4$) *sunt îndeplinite, atunci funcționala de energie $\mathcal{A}_\lambda$ este coercivă pentru fiecare $\lambda > 0$, adică, $\mathcal{A}_\lambda(u) \to \infty$, când $\|u\|_X \to \infty$ pentru orice $u \in X$.*

Verificarea următoarei lemă este similară cu demonstrația afirmațiilor din Lema 3.2 și [Kristály şi Varga, 2004, Teorema 5.1.1].

**Lema 3.6** ([Mezei, Molnár şi **Vas**, 2014]). *Pentru fiecare $\lambda > 0$ funcționala de energie $\mathcal{A}_\lambda$ îndeplinește condiția $(PS)$.*

**Lema 3.7** ([Mezei, Molnár şi **Vas**, 2014]). *Dacă condițiile* ($\mathbf{C}_F^4$)–($\mathbf{C}_F^5$) *și* ($\mathbf{C}_A^5$) *sunt îndeplinite, atunci*

$$\mathcal{A}_\lambda(u^H) \le \mathcal{A}_\lambda(u),\ \forall u \in X,\ \forall H \in H_*.$$

### 3.2.1 Un caz particular

Această subsecțiune prezintă un caz particular al problemei (3.6.$P_\lambda$) studiate anterior.

Fie $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ o funcţie care îndeplineşte următoarele condiții:

($\mathbf{C}_V^1$) $V_0 := \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) > 0$;

($\mathbf{C}_V^2$) $\operatorname{meas}\left(\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \le M\}\right) < \infty,\ \forall M > 0$;

($\mathbf{C}_V^3$) $V(x) \le V(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^N$ cu $|x| \le |y|$.

Spațiul

$$H := \left\{u \in W^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) : \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u(x)|^2 + V(x)u^2(x)\right)\mathrm{d}x < \infty\right\}$$

înzestrat cu produsul scalar

$$\langle u, v\rangle := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u(x)\nabla v(x) + V(x)u(x)v(x)\right)\mathrm{d}x$$

este un spațiu Hilbert și, datorită [Bartsch şi Wang, 1995], ştim că este scufundat compact în $L^s\left(\mathbb{R}^N\right)$ pentru $s \in [2, 2^*)$.

De asemenea, putem afirma un caz particular ale problemei (3.6.$P_\lambda$): se caută funcția pozitivă $u \in H$, astfel încât

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u(x)\nabla v(x) + V(x)u(x)v(x)\right)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} F_y^\circ(x, u(x); -v(x))\mathrm{d}x \ge 0,\ \forall v \in H. \tag{3.10.$P_\lambda'$}$$

**Lema 3.8** ([Mezei, Molnár şi **Vas**, 2014]). *Dacă $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ îndeplinește condițiile* ($\mathbf{C}_F^1$), ($\widetilde{\mathbf{C}}_F^2$), ($\mathbf{C}_F^4$)–($\mathbf{C}_F^5$) *și* ($\mathbf{C}_V^1$)–($\mathbf{C}_V^3$), *atunci există două soluții netriviale ale problemei* (3.10.$P_\lambda'$), *invariante față de simetrizarea de tip „spherical cap”.*

# 4

# Rezultate de tip Schechter pentru puncte critice

În acest capitol ne concentrăm pe teoria punctelor critice dezvoltată de [Schechter, 1992, 1999]. Dintre metodele prezentate în [Schechter, 1999], ne vom ocupa de cele care sunt legate de existența unui minimizant pentru funcționale de clasă $C^1$ definite pe o bilă închisă a unui spațiu adecvat Hilbert sau Banach.

[Precup, 2009, 2013] studiază teoremele punctelor critice de tip Schechter pentru funcționale de clasă $C^1$ definite pe o bilă închisă, pe domenii inelare conice într-un spațiu Hilbert. Folosind principiul variațional al lui Bishop–Phelps, [Precup, 2013] dă o nouă demonstrație a teoremei lui Schechter pentru extreme.

Pe baza principiului variațional al lui Ekeland, în [Lisei şi **Vas**, 2016], am îmbunătățit rezultatele de tip Schechter sus-menționate pe o bilă închisă, obținute de Precup pentru mulțimi de nivel și mulțimi inelare conice în spații Banach reflexive și local uniform convexe. Rezultatele sunt aplicate pentru localizarea soluțiilor ale unor probleme care conțin operatorul $p$-Laplace pe domenii atât mărginite, cât și nemărginite. Apoi, în articolul [**Vas**, 2015], am extins rezultatele de tip Schechter ale lui Precup pentru funcțiile local Lipschitz definite pe o bilă închisă a unui spațiu Hilbert și, pentru a ilustra aplicabilitatea rezultatului nostru, am prezentat o problemă de incluziune.

Din rezultatele noastre sus-menționate, în Secțiunea 4.1 prezentăm teorema punctului critic de tip Schechter pentru cazul funcțiilor local Lipschitz, precum și o aplicație concretă a acesteia. Ulterior, în Secțiunea 4.2 ne ocupăm de teorema punctului critic de tip Schechter pentru funcționale de clasă $C^1$ în spațiile Banach, subliniind aplicabilitatea teoremei prin prezentarea a două aplicaţii.

## 4.1 Un rezultat de tip Schechter pentru punctele critice ale funcțiilor local Lipschitz

Această secțiune discută un rezultat de tip Schechter pentru punctele critice ale funțiilor local Lipschitz definite pe o bilă a unui spațiu Hilbert.

Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu Hilbert înzestrat cu produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ și norma $\|\cdot\|_X = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Considerăm bila închisă $\overline{X}_R \coloneqq \{x \in X : \|x\|_X \leq R\}$ cu centrul în origine și raza $R > 0$ din spațiul $X$ și sfera corespunzătoare

$\partial X_R := \{x \in X : \|x\|_X = R\}$. Folosind aceste notații, rezultatul principal al secțiunii poate fi formulat după cum urmează.

**Teorema 4.1** ([Vas, 2015]). *Fie $F : \overline{X}_R \to \mathbb{R}$ o funcție local Lipschitz, care este mărginită inferior. Există un șir $(x_n)_n \subset \overline{X}_R$, astfel încât $F(x_n) \to \inf F(\overline{X}_R) := \inf\limits_{x \in \overline{X}_R} F(x)$ și una dintre următoarele două situații este valabilă:*

(a) $\lambda_F(x_n) \to 0$;

(b) $\|x_n\|_X = R$, $\langle w_n^*, x_n\rangle \le 0$ *pentru orice $n$ și $w_n^* \in \partial F(x_n)$, și $\lambda_{F,\partial X_R}(x_n) \to 0$, unde $\partial F(x_n)$ este gradientul generalizat al funcției local Lipschitz $F$ și*

$$\lambda_{F,\partial X_R}(x_n) := \inf\left\{w^* - \frac{1}{R^2}\left\langle w^*_, x_n\right\rangle \Lambda x_n : w^* \in \partial F(x_n)\right\}.$$

*Dacă în plus $\langle x^*, x\rangle \ge -a > -\infty$ pentru orice $x \in \partial X_R$ și $x^* \in \partial F(x)$, și totodată $F$ îndeplinește o condiție de compactitate de tip $(PS)$ împreună cu condiția de frontieră*

$$x^* + \mu\Lambda x \neq 0, \ \forall x \in \partial X_R, \ \forall \mu > 0, \tag{4.1}$$

*atunci există $x \in \overline{X}_R$, astfel încât*

$$F(x) = \inf F\left(\overline{X}_R\right).$$

### 4.1.1 O aplicaţie

Această subsecțiune prezintă o aplicație concretă a Teoremei 4.1 de tip Schechter pentru puncte critice.

Fie $\Omega$ un domeniu mărginit în $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}_{\ge 2}$), cu frontieră $\partial\Omega$ regulată de clasă $C^1$. Considerăm spațiul Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$ înzestrat cu norma $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ și notăm cu $W^{-1,2}(\Omega)$ dualul topologic al spațiului $\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*$.

Datorită teoremei Rellich–Kondrachov, scufundarea $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ este compactă pentru orice $q \in \left(1, 2^* = \frac{2N}{N-2}\right)$ și există o constantă $C_q > 0$, astfel încât

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C_q \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{4.2}$$

Considerăm funcția Carathéodory $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care îndeplinește condițiile:

(a) $F(\cdot, u)$ este măsurabilă pentru fiecare $u \in \mathbb{R}$;

(b) $F(x, \cdot)$ este local Lipschitz pentru fiecare $x \in \Omega$;

(c) $F(\cdot, 0) \in L^1(\Omega)$;

și de asemenea, presupunem că condiția de creștere

$$|z| \le a(x) + b(x)|y|^{q-1}, \ \forall z \in \partial_y F(x, y), \ (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} \tag{4.3}$$

este satisfăcută, unde $a \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$ și $b \in L^\infty(\Omega)$ sunt funcții pozitive, iar $q \in \left(1, 2^* = \frac{2N}{N-2}\right)$.

În condițiile de mai sus, considerăm problema netedă Dirichlet de incluziune

$$\begin{cases} -\Delta u \in \partial_y F(x, u) & \text{a.p.t. } x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.4.P}$$

Reamintim notațiile

$$\overline{X}_R := \left\{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le R\right\}$$

și

$$\partial X_R := \left\{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = R\right\}.$$

**Definiția 4.1** (Soluții slabe ale problemei (4.4.$P$))**.** *O funcție $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ este o soluție slabă a problemei (4.4.$P$), dacă există $w_F(x) \in \partial_y F(x, u(x))$ pentru a.p.t. $x \in \Omega$, astfel încât*

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega w_F(x)\cdot v(x)\mathrm{d}x,\ \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Fie $\mathcal{E} : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x, u(x))\mathrm{d}x \tag{4.5}$$

funcționala de energie asociată problemei (4.4.$P$), ale cărei puncte critice sunt soluțiile slabe ale problemei (4.4.$P$).

**Propoziția 4.1** ([**Vas**, 2015])**.** *Dacă $R > 0$ este soluția inegalității*

$$R - C_q^q\,\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\,R^{q-1} > C_q\,\|a\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)} \tag{4.6}$$

*în $\mathbb{R}$, atunci*

$$\langle u^*, u\rangle + \mu\cdot\langle \Lambda u, u\rangle \neq 0,\ \forall u^* \in \partial\mathcal{E}(u)$$

*pentru orice $\mu > 0$, unde $u \in \partial X_R$.*

Folosind condițiile Propoziției 4.1 și Teorema 4.1 de tip Schechter pentru puncte critice, putem formula următorul rezultat.

**Teorema 4.2** ([**Vas**, 2015])**.** *Dacă alegem $R > 0$ să fie soluția inegalității*

$$R - C_q^q\,\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\,R^{q-1} > C_q\,\|a\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)}$$

*în $\mathbb{R}$, atunci problem (4.4.$P$) admite o soluție slabă $u \in \overline{X}_R$, care minimizează pe $\mathcal{E}$ pe $\overline{X}_R$.*

## 4.2 Un rezultat de tip Schechter pentru puncte critice în spații Banach

Pe baza articolului [Lisei şi **Vas**, 2016], această secțiune prezintă două aplicații ale teoremei [Lisei şi **Vas**, 2016, Teorema 3.1] de tip Schechter pentru punctele critice ale funcționalelor de clasă $C^1$ în spațiile Banach. În ambele exemple, teorema va fi utilizată pentru a localiza soluțiile unor ecuații diferențiale parțiale care conțin operatorul $p$-Laplace, în cazul primei probleme vom lucra pe domenii mărginite, iar în cazul celei de-a doua probleme pe domenii nemărginite.

### 4.2.1 Primul exemplu

Fie $\Omega$ un domeniu mărginit în $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$) cu frontieră continuă Lipschitz și fie $p \in (1, \infty)$ fixat. Considerăm spațiul Banach $\left(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)$ uniform convex și neted cu dualul său topologic $W^{-1,p'}(\Omega)$ uniform convex.

Datorită teoremei Rellich–Kondrachov, scufundarea $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ este compactă pentru $q \in (1, p^*)$ (unde $p^* = \frac{Np}{N-p}$, dacă $p < N$, respectiv $p^* = \infty$, dacă $p \geq N$), prin urmare există $C_q > 0$, astfel încât

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_q\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.7}$$

Fie $J_\varphi : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ funcția de dualitate corespunzătoare funcției de normalizare $\varphi(t) = t^{p-1}$, $t \in \mathbb{R}_+$ și să considerăm funcția $\bar{J} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$, $\bar{J} = J_\varphi^{-1}$. Datorită [Dinca et al., 2001, Teorema 5], $\bar{J}$ este mărginită, continuă și monotonă, în plus, pentru fiecare $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$ avem

$$\langle w, \bar{J}w\rangle = \varphi^{-1}\left(\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \ \text{ și }\ \|\bar{J}w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \varphi^{-1}\left(\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right). \tag{4.8}$$

De asemenea, considerăm operatorul $p$-Laplace $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$,

$$\langle -\Delta_p(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla v(x)\mathrm{d}x,\ \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Funcționala $H : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definită prin $H(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ este continuu Fréchet-diferențiabilă în $W_0^{1,p}(\Omega)$ și $H' = -\Delta_p$. Deoarece operatorul $-\Delta_p$ este funcția de dualitate $J_\varphi$, avem că $H' = J_\varphi$, vezi [Dinca et al., 2001, Teoremele 7 și 9]. În acest exemplu vom folosi din nou notațiile

$$\overline{X}_R \coloneqq \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le R\right\}$$

și

$$\partial X_R \coloneqq \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = R\right\}.$$

Presupunem că $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție Carathéodory, astfel încât $f(x, 0) \neq 0$ pentru a.p.t. $x \in \Omega$ și, de asemenea, îndeplinește condiția de creștere

$$|f(x,s)| \le a(x)|s|^{q-1} + b(x),\ \forall x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}, \tag{4.9}$$

unde $a \in L^\infty(\Omega)$ și $b \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$ sunt funcții pozitive, iar $q \in (1, p^*)$. Operatorul Nemytskii $N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ asociat lui $f$ este

$$N_f\,(u)\,(x) = f(x, u(x)).$$

În condițiile de mai sus, avem $N_f(W_0^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow N_f(L^q(\Omega)) \subset L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega) = (L^q(\Omega))^* \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ și $N_f$ este o funcție continuă care transformă mulțimile mărginite în mulțimi mărginite (vezi [Goldberger et al., 1992]).

Folosind operatorul $p$-Laplace, considerăm problema Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{a.p.t. } x \in \Omega, \\ \quad\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.10.$P$}$$

**Definiția 4.2** (Soluții slabe ale problemei (4.10.$P$))**.** *O funcție $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ este o soluție slabă a problemei (4.10.$P$), dacă*

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla v(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)\mathrm{d}x,\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.11}$$

Fie $\mathcal{E} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{E}\,(u) = \frac{1}{p}\,\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega h\,(x, u(x))\,\mathrm{d}x \tag{4.12}$$

funcţionala de energie asociată prolemei (4.10.$P$), unde $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este $h\,(x,t) = \int_0^t f\,(x,s)\,\mathrm{d}s$. Datorită [Goldberger et al., 1992, Teorema 7], în acest caz avem că

$$\mathcal{E}'\,(u) = H'\,(u) - N_f\,(u)\,.$$

Mai mult, punctele critice ale funcţionalei de energie $\mathcal{E}$ sunt soluţiile ecuaţiei (4.11) și, în consecinţă, soluţiile slabe ale problemei (4.10.$P$).

Acum, formulăm câteva condiții pentru $R$: notăm cu $C$ o limită superioară pentru constanta $C_q$ și presupunem că una dintre următoarele trei condiții este îndeplinită:

$(\mathbf{C}^1_R)$ dacă $p > q$, atunci fie $R > 0$ soluția inegalității

$$R^{\frac{p-1}{p}} > C^q p^{\frac{q-p}{p}}\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)} R^{\frac{q-1}{p}} + C p^{\frac{1-p}{p}}\,\|b\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)}$$

în $\mathbb{R}$;

$(\mathbf{C}_R^2)$ dacă $p = q$, presupunem că $1 > C^p\|a\|_{L^\infty(\Omega)}$ și fie $R$ astfel încât

$$R > \left( \frac{Cp^{\frac{1-p}{p}}\|b\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}}{1 - C^p\|a\|_{L^\infty(\Omega)}} \right)^{\frac{p}{p-1}};$$

$(\mathbf{C}_R^3)$ dacă $q > p$, presupunem că $1 > C^q p^{\frac{q-p}{p}}\|a\|_{L^\infty(\Omega)} + Cp^{\frac{1-p}{p}}\|b\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)}$ și fie $R > 0$ soluția inegalității

$$R^{\frac{p-1}{p}} - C^q p^{\frac{q-p}{p}}\|a\|_{L^\infty(\Omega)} R^{\frac{q-1}{p}} > Cp^{\frac{1-p}{p}}\|b\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)}$$

în $\mathbb{R}$.

**Propoziția 4.2** ([Lisei şi **Vas**, 2016]). *Dacă $R$ îndeplinește una dintre condițiile $(\mathbf{C}_R^1)$–$(\mathbf{C}_R^3)$, relația*

$$\mathcal{E}'(u) + \mu H'(u) \neq 0, \ \forall \mu > 0, \ u \in \partial X_R$$

*este satisfăcută.*

**Propoziția 4.3** ([Lisei şi **Vas**, 2016]). *Presupunând că $R$ îndeplinește una dintre condițiile $(\mathbf{C}_R^1)$–$(\mathbf{C}_R^3)$, funcționala $\mathcal{E}$ satisface următoarea condiție de compactitate $(PS)$: dacă $(u_n)_n$ este un șir din $\overline{X}_R$ astfel încât una dintre următoarele afirmații este valabilă*

*(a) $\mathcal{E}'(u_n) \to 0$ dacă $n \to \infty$;*

*(b) pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ avem că $H(u_n) = R$, $\langle H'(u_n), \bar{J}\mathcal{E}'(u_n)\rangle \leq 0$ și*

$$\mathcal{E}'(u_n) - \frac{\langle \mathcal{E}'(u_n), u_n\rangle}{\langle H'(u_n), u_n\rangle} H'(u_n) \to 0 \ \text{ as } n \to \infty,$$

*atunci $(u_n)_n$ admite un subșir convergent.*

Pentru a localiza soluțiile problemei (4.10.$P$), aplicăm versiunea noastră netedă a teoremei de tip Schechter pentru punctele critice, vezi [Lisei şi **Vas**, 2016, Teorema 3.1].

**Teorema 4.3** ([Lisei şi **Vas**, 2016]). *Presupunând că $R$ îndeplinește una dintre condițiile $(\mathbf{C}_R^1)$–$(\mathbf{C}_R^3)$, problema (4.10.$P$) admite o soluție slabă $u \in \overline{X}_R$, care minimizează $\mathcal{E}$ pe $\overline{X}_R$.*

Studiem situațiile în care cea mai bună constantă Sobolev $C_q$ admite o estimare superioară, care poate fi calculată după cum urmează.

Notând cu $\lambda_p(\Omega) := \min\limits_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \dfrac{\int_\Omega |\nabla v(x)|^p \mathrm{d}x}{\int_\Omega |v(x)|^p \mathrm{d}x}$ prima valoare proprie a operatorului $p$-Laplace, avem inegalitatea

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_p(\Omega)}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Prin urmare, cea mai bună constantă de scufundare de $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ este $C_p = \left(\frac{1}{\lambda_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$, în timp ce pentru $q < p$ cea mai bună constantă de scufundare de $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ îndeplinește inegalitatea $C_q \leq |\Omega|^{\frac{p-q}{pq}} \left(\frac{1}{\lambda_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$ datorită inegalității lui Hölder, unde $|\Omega|$ notează măsura Lebesgue, adică, volumul $N$-dimensional al mulțimii $\Omega$. Pentru a obține limite superioare pentru constanta $C_q$ $(q \leq p)$, trebuie să determinăm limite inferioare pentru prima valoare proprie $\lambda_p(\Omega)$.

Datorită inegalității lui Faber-Kahn [Bhattacharya, 1999, Teorema 1], avem că $\lambda_p(\Omega) \geq \lambda_p(\Omega^*)$, unde $\Omega^*$ notează bila $N$-dimensională centrată în origine, volum căreia coincide cu măsura Lebesgue a lui $\Omega$, în consecință, are raza $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(|\Omega|\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)\right)^{\frac{1}{N}}$.

Folosind [Lefton şi Wei, 1997], pentru bila $\Omega^* \subset \mathbb{R}^N$ cu raza $r$ avem inegalitatea $\lambda_p(\Omega^*) \geq \left(\frac{N}{rp}\right)^p$, prin urmare, cea mai bună constantă Sobolev $C_p$ are estimarea superioară

$$C_p \leq \frac{p}{N\sqrt{\pi}} \left(|\Omega|\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)\right)^{\frac{1}{N}},$$

și pentru $q \in (1,p)$ avem

$$C_q \leq \frac{p}{N\sqrt{\pi}} \left(|\Omega|^{\frac{(p-q)}{pq}+\frac{1}{N}}\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)\right)^{\frac{1}{N}}.$$

În cazul unidimensional dacă $\Omega = (0,T) \subset \mathbb{R}$, atunci prima valoare proprie este (vezi [Drábek şi Manásevich, 1999]) $\lambda_p(\Omega) = (p-1)\left(\frac{2\pi}{Tp\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)^p$, în consecință

$$C_p = \frac{Tp\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}{2\pi(p-1)^{\frac{1}{p}}}.$$

Din inegalitatea optimă a lui Poincaré (vezi [Talenti, 1976, p. 357]) aplicată pentru $\Omega = (0,T) \subset \mathbb{R}$, $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty)$ și $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, obținem că inegalitatea

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_q \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

este îndeplinită cu constanta de scufundare

$$C_q = \frac{T^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}}}{2B\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p'}\right)} (p')^{\frac{1}{q}}\, q^{\frac{1}{p'}}\, (p'+q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

unde $p' = \frac{p}{p-1}$ și $B$ este funcția beta a lui Euler.

### 4.2.2 Al doilea exemplu

Pentru $p \in (1,\infty)$ fixat, definim subspațiul închis

$$W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) = \left\{u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) : u(x) = u(x'),\ \forall\ x, x' \in \mathbb{R}^N : |x| = |x'|\right\}$$

al funcțiilor radial simetrice ale spațiului Banach $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ separabil, reflexiv, uniform convex și neted, înzestrat cu norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u(x)|^p + |u(x)|^p\right) \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.13}$$

indusă de norma lui $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Atunci, $W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ este uniform neted și dualul său topologic $\left(W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^*$ este uniform convex.

Fie $J_\varphi : W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \to \left(W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^*$ funcția de dualitate corespunzătoare funcției de normalizare $\varphi(t) = t^{p-1}$, $t \in \mathbb{R}_+$ (vezi [Chabrowski, 1997, Propoziția 2.2.4]). În condițiile de mai sus, funcția de dualitate $J_\varphi$ îndeplinește proprietățiile

$$\|J_\varphi u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \varphi\left(\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}\right) \quad \text{și} \quad \langle J_\varphi u, u\rangle = \|J_\varphi u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

pentru orice $u \in W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. În plus, funcționala $H : W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \to \mathbb{R}$, $H(u) = \dfrac{1}{p}\|u\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$ este convexă și Fréchet-diferențiabilă cu $H' = J_\varphi$. De asemenea, considerăm $\bar{J} : \left(W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^* \to W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $\bar{J} = J_\varphi^{-1}$.

Datorită [Lions, 1982, Théorème II.1], scufundarea $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ este compactă pentru $q \in (p, p^*)$ (unde $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ dacă $p < N$, respectiv $p^* = \infty$, dacă $p \geq N$) și există cea mai bună constantă de scufundare $C_q > 0$, astfel încât

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C_q \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}, \ \forall u \in W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{4.14}$$

Fie $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție Carathéodory, astfel încât $f(x, 0) \neq 0$ pentru a.p.t. $x \in \mathbb{R}^N$ și care îndeplinește condiția de creștere

$$|f(x,s)| \leq a(x)|s|^{q-1} + b(x), \ \forall (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

unde $a \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ și $b \in L^{\frac{q}{q-1}}\left(\mathbb{R}^N\right)$ sunt funcții pozitive, $q \in (p, p^*)$, iar $f(x, \cdot) = f(x', \cdot)$ pentru orice $x, x' \in \mathbb{R}^N$ astfel încât $|x| = |x'|$ (adică, $f$ este radial simetric în prima variabilă).

Folosind operatorul $p$-Laplace, considerăm problema

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(x, u) \ \text{ a.p.t. } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.15.P}$$

**Definiția 4.3** (Soluțiile slabe ale problemei (4.15.$P$)). *O funcție $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ este o soluție slabă a problemei (4.15.$P$), dacă egalitatea*

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla v(x) + |u(x)|^{p-2}u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)\mathrm{d}x \tag{4.16}$$

*este îndeplinită pentru orice $v \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$.*

Definim operatorul Nemytskii $N_f : W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \to \left(W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^*$ prin $N_f\left(u\right)\left(x\right) = f(x, u(x))$. Fie $\mathcal{E} : W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \to \mathbb{R}$ funcționala de energie asociată problemei (4.15.$P$) definită prin

$$\mathcal{E}\left(u\right) = \frac{1}{p}\left\|u\right\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - \int_{\mathbb{R}^N} h\left(x, u(x)\right)\mathrm{d}x, \tag{4.17}$$

unde $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este $h\left(x, t\right) = \displaystyle\int_0^t f\left(x, s\right)\mathrm{d}s$. Prin urmare, avem

$$\mathcal{E}'\left(u\right) = H'\left(u\right) - N_f\left(u\right).$$

Fie $\mathbb{G} = O\left(\mathbb{R}^N\right)$ mulțimea tuturor rotațiilor pe $\mathbb{R}^N$, elementele căreia îl lasă pe $\mathbb{R}^N$ invariant, adică $g(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$ pentru orice $g \in \mathbb{G}$. Se observă, că $\mathbb{G}$ induce o acțiune liniară izometrică pe spațiul $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ prin formula

$$(gu)(x) = u(g^{-1}x), \ g \in \mathbb{G}, \ u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \ \text{ a.p.t. } x \in \mathbb{R}^N.$$

O funcție $\phi \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ este $\mathbb{G}$-invariantă dacă

$$\phi(gu) = \phi(u), \ \forall g \in \mathbb{G}, \ u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

$W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ este de fapt mulțimea punctelor fixe a lui $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ sub $\mathbb{G}$ și norma (4.13) este $\mathbb{G}$-invariantă în $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Pe baza atât a ipotezelor stabilite pentru funcția $f$, cât și a observației de mai sus, funcționala de energie $\mathcal{E}$ este $\mathbb{G}$-invariantă, prin urmare, folosind principiul simetriei critice [Palais, 1979], fiecare punct critic a lui $\mathcal{E}$ este totodată și o soluție a problemei (4.16).

Considerând mulțimea

$$\overline{X}_R = \left\{u \in W_r^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) : \frac{1}{p}\|u\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq R\right\},$$

următorul rezultat poate fi demonstrat similar cu cazul exemplului nostru anterior din Secțiunea 4.2.1.

**Teorema 4.4** ([Lisei și **Vas**, 2016]). *Presupunând că $R$ îndeplinește una dintre condițiile $(\mathbf{C}_R^1)$–$(\mathbf{C}_R^3)$, funcționala $\mathcal{E}$ admite un punct critic $u \in \overline{X}_R$, care minimizează $\mathcal{E}$ pe $\overline{X}_R$. În plus, acest punct critic este totodată o soluție slabă a problemei (4.15.$P$).*

Prezentăm situații în care constanta Sobolev $C_q$ admite o estimare superioară, care poate fi calculată după cum urmează.

Datorită [Talenti, 1976], avem rezultatul următor: pentru $p \in (1, N)$ și $p^* = \frac{Np}{N-p}$ inegalitatea

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$$

este îndeplinită, unde

$$C_{\mathbb{R}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} N^{\frac{1}{p}}} \left( \frac{p-1}{N-p} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left( \frac{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)\Gamma(N)}{\Gamma\left(\frac{N}{p}\right)\Gamma\left(1+N-\frac{N}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{N}}.$$

În consecință,

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_{\mathbb{R}} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}, \ \forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Pentru orice $q \in (p, p^*)$ există $\theta \in (0,1)$, astfel încât $q = \theta p + (1-\theta)p^*$, prin urmare, folosind inegalitatea lui Hölder, pentru fiecare $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ obținem, că

$$\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|^{\theta p}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{(1-\theta)p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_{\mathbb{R}}^{Nq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|^q_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Astfel, constanta Sobolev $C_q$ are estimarea superioară

$$C_q \leq C_{\mathbb{R}}^{N\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, \ q \in \left(p, \frac{Np}{N-p}\right), \ p \in (1, \infty).$$

# 5

# O metodă de localizare a soluţiilor ale unor ecuaţii cu operatori neomogeni

Acest capitol este bazată pe articolul [Lisei, Varga şi **Vas**, 2018]. După un scurt rezumat al noțiunilor și proprietăților preliminare, Secțiunea 5.2 prezintă câteva rezultate auxiliare care sunt necesare pentru a demonstra declarațiile principale ale Secțiunii 5.3 în care discutăm noua varianta: a lemei de deformare și a versiunii mărginită a teoremei generale de tip minimax a lui [Willem, 1996]; a teoremei trecătorii montane a lui [Ambrosetti şi Rabinowitz, 1973]; și a principiului variațional al lui Ekeland [Ekeland, 1974] pentru cazul unei mulțimi conice intersectate cu o bilă într-un spațiu Banach reflexiv, local uniform convex și neted. În cele din urmă, în Secțiunea 5.4 aplicăm rezultatele noastre pentru a localiza două soluții netriviale ale problemelor Dirichlet cu operatori neomogeni în contextul spațiilor Orlicz–Sobolev.

## 5.1 Noțiuni preliminare

Considerăm spațiul real Banach $(X, \|\cdot\|_X)$, dualul său topologic $X^*$ și notăm cu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dualitatea dintre $X^*$ și $X$.

De asemenea, considerăm operatorul $J_\varphi : X \to \mathcal{P}(X^*)$,

$$J_\varphi x = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \varphi(\|x\|_X)\|x\|_X,\ \|x^*\|_X = \varphi(\|x\|_X)\},\ x \in X,$$

care este funcția de dualitate corespunzătoare funcției de normalizare $\varphi$.

În continuare, presupunem, că:

$(\mathbf{C}^1_X)$ $X$ este un spațiu Banach local uniform convex, reflexiv și neted.

Deoarece $X$ este neted, avem $\operatorname{card}(J_\varphi x) = 1$, datorită [Ciorănescu, 1990, Corolarul 4.5, p. 27]. Prin urmare, $J_\varphi : X \to X^*$ și avem că $\langle J_\varphi x, x\rangle = \varphi(\|x\|_X)\|x\|_X$ și $\|J_\varphi x\|_X = \varphi(\|x\|_X)$. În aceste condiții, prin intermediul [Dinca şi Matei, 2007, Teorema 5], funcția de dualitate $J_\varphi$ este bijectivă și inversa sa $J_\varphi^{-1}$ este mărginită, continuă și monotonă. Mai mult, folosind izomorfismul canonic $\chi : X \to X^{**}$ și funcția de dualitate $J^*_{\varphi^{-1}} : X^* \to X^{**}$ corespunzătoare funcției de normalizare $\varphi^{-1}$, avem că $J_\varphi^{-1} = \chi^{-1}J^*_{\varphi^{-1}}$.

Considerăm funcția $\bar{J} : X^* \to X$ definită prin $\bar{J} = J_\varphi^{-1}$, care datorită rezultatului de mai sus este mărginită, continuă și monotonă. În plus, avem că

$$\langle w, \bar{J}w \rangle = \varphi^{-1}(\|w\|_X)\|w\|_X \text{ și } \|\bar{J}w\|_X = \varphi^{-1}(\|w\|_X), \ \forall w \in X^*. \tag{5.1}$$

Pentru funcția de normalizare $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vom folosi notația $\Psi(t) \coloneqq \int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s$, care este o funcție convexă, datorită [Ciorănescu, 1990, Lema 4.3]. Deoarece $X$ îndeplinește condiția $(\mathbf{C}_X^1)$, folosind [Ciorănescu, 1990, Corolarul 4.5], avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(\|x+ty\|_X)\Big|_{t=0} = \langle J_\varphi x, y\rangle, \ \forall x, y \in X.$$

În consecință, derivata Gâteaux a lui $x \in X \mapsto \Psi(\|x\|_X) \in \mathbb{R}$ în direcția $y \in X$ este

$$\langle \Psi'(\|x\|_X), y\rangle = \langle J_\varphi x, y\rangle, \ \forall x, y \in X. \tag{5.2}$$

De asemenea, presupunem că:

$(\mathbf{C}_X^2)$ funcția de dualitate $J_\varphi : X \to X^*$ este continuă.

**Obsevația 5.1.** *Datorită* [Ciorănescu, 1990, Corolarul 5.3, p. 77]*, dacă $X^*$ este local uniform convex și $X$ este reflexiv, atunci $J_\varphi$ este continuă. În cazul aplicațiilor noastre pe care le-am studiate, este mai ușoară să arătăm proprietatea de continuitate a funcției de dualitate $J_\varphi$ decât să demonstrăm proprietatea local uniform convexă a spațiului $X^*$, deci avem nevoie de condița $(\mathbf{C}_X^2)$. În acest fel totodată putem să evităm teoremele care presupun renormări echivalente, deoarece avem nevoie de expresia concretă și de anumite proprietăți ale funcției de dualitate în aplicațiile noastre.*

Fie $K \subset X,\ K \neq \{0\}$ o mulțime conică a lui $X$, adică, este o mulțime convexă închisă astfel încât $\lambda u \in K$ pentru fiecare $u \in K$ și $\lambda \geq 0$. Pentru $R > 0$ introducem notațiile

$$X_R \coloneqq \{x \in X : \|u\|_X < R\}, \ \overline{X}_R \coloneqq \{x \in X : \|u\|_X \leq R\}$$

și

$$K_R \coloneqq \{x \in K : \|u\|_X \leq R\}, \ \partial K_R \coloneqq \{x \in K : \|u\|_X = R\}.$$

Considerăm o submulţime $S \subset K$ și pentru un $\rho > 0$ fixat să fie

$$S_\rho \coloneqq \{x \in K : \mathrm{dist}(x, S) = \inf\{\|x-y\|_X : y \in S\} \leq \rho\}.$$

o $\rho$-vecinătate a lui $S$. Considerăm funcţionala $E : X \to \mathbb{R}$ de clasă $C^1$, și pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \leq b$ definim mulţimile

$$E_a \coloneqq \{x \in K_R : E(x) \geq a\}, \ E^b \coloneqq \{x \in K_R : E(x) \leq b\}$$

și

$$E_a^b \coloneqq \{x \in K_R : a \leq E(x) \leq b\}.$$

## 5.2 Rezultate auxiliare

Această secțiune prezintă câteva rezultate auxiliare, care joacă un rol important în demonstrarea rezultatelor noastre principale pentru cazul unei mulțimi conice într-un spațiu Banach.

**Propoziția 5.1** ([Lisei, Varga şi **Vas**, 2018])**.** *Presupunem că condiția $(\mathbf{C}_X^1)$ este îndeplinită. Fie $\alpha$ și $\theta$ numere reale astfel încât $0 < \alpha < \frac{1}{2}(1-\theta)$. Atunci, pentru fiecare $x^*, y^* \in X^* \setminus \{0\}$, astfel încât*

$$-\langle x^*, \bar{J}y^*\rangle \leq \theta\|x^*\|_X\|\bar{J}y^*\|_X, \tag{5.3}$$

*există* $h \in X$ *pentru care*

$$\langle x^*, h \rangle \leq -\alpha \|x^*\|_X \|h\|_X \quad \text{și} \quad \langle y^*, h \rangle < 0. \tag{5.4}$$

*Mai mult, dacă* $K \subset X$ *este o mulțime conică și* $\bar{J}y^*, \bar{J}y^* - \bar{J}x^* \in K$*, atunci* $\bar{J}y^* + \mu h \in K$ *pentru orice* $\mu \in \left[0, \frac{\theta+\alpha}{\theta+1}\right]$.

Apoi, folosind Propoziția 5.1, demonstrăm o lemă pseudo-gradientă care generalizează rezultatele lui [Schechter, 1999, Lema 5.9.2] pentru cazul unei mulțimi conice într-un spațiu Banach.

**Lema 5.1** ([Lisei, Varga şi **Vas**, 2018])**.** *Presupunem că condițiile* $(\mathbf{C}^1_X)$ *și* $(\mathbf{C}^2_X)$ *sunt îndeplinite. Fie* $E : X \to \mathbb{R}$ *o funcțională de clasă* $C^1$ *și pentru* $a > 0$ *considerăm mulțimea* $U := \{u \in K_R : \|E'(u)\|_X > a\} \neq \emptyset$ *și submulțimea închisă* $U_0 \subseteq U \cap \partial K_R$*. Presupunem că există* $\theta \in (0, 1)$*, astfel încât*

$$-\langle E'(u), u \rangle \leq \theta \|E'(u)\|_X \|u\|_X, \ \forall u \in U_0$$

*și*

$$u - \bar{J}E'(u) \in K, \ \forall u \in K_R.$$

*Atunci, există* $\alpha \in (0, 1)$ *și o funcție local Lipschitz continuă* $H : U \to X$ *astfel încât*

$$u + H(u) \in K, \ \|H(u)\|_X \leq 1, \ \langle E'(u), H(u) \rangle \leq -\alpha \|E'(u)\|_X, \ \forall u \in U \tag{5.5}$$

*și*

$$\langle J_\varphi u, H(u) \rangle < 0, \ \forall u \in U_0. \tag{5.6}$$

Următorul corolar studiază cazul când în Lema 5.1 se presupune că $U \cap \partial K_R = \emptyset$ și proprietatea (5.6) este abandonată.

**Corolarul 5.1.** *Presupunem că condiția* $(\mathbf{C}^1_X)$ *este îndeplinită. Fie* $E : X \to \mathbb{R}$ *o funcțională de clasă* $C^1$ *și pentru* $a > 0$ *considerăm mulțimea* $U := \{u \in K_R : \|E'(u)\|_X > a\} \neq \emptyset$ *cu* $U \cap \partial K_R = \emptyset$*. Prespunem că* $u - \bar{J}E'(u) \in K$ *pentru fiecare* $u \in K_R$*. Atunci, există* $\alpha > 0$ *și o funcție local Lipschitz continuă* $H : U \to X$*, astfel încât*

$$u + H(u) \in K, \ \|H(u)\|_X \leq 1 \quad \text{și} \quad \langle E'(u), H(u) \rangle \leq -\alpha \|E'(u)\|_X, \ \forall u \in U. \tag{5.7}$$

## 5.3 O lemă de deformare și teoreme de tip minimax

Pe baza rezultatelor auxiliare prezentate în Secțiunea 5.2, în această secțiune oferim o lemă de deformare a lui [Willem, 1996], o versiune mărginită a teoremei generale de tip minimax a lui [Willem, 1996] și a teoremei trecătorii montane a lui [Ambrosetti şi Rabinowitz, 1973], și un caz particular al principiului variațional al lui Ekeland [Ekeland, 1974] pentru cazul unei mulțimi conice în spațiile Banach.

În primul rând, prezentăm o lemă de deformare de tip Willem pe o mulțime conică, care este o generalizare a lui [Willem, 1996, Lema 2.3].

**Lema 5.2** ([Lisei, Varga şi **Vas**, 2018])**.** *Presupunem că condițiile* $(\mathbf{C}^1_X)$ *și* $(\mathbf{C}^2_X)$ *sunt îndeplinite. Considerăm funcționala* $E : X \to \mathbb{R}$ *de clasă* $C^1$*, astfel încât* $u - \bar{J}E'(u) \in K$ *pentru orice* $u \in K_R$ *și există* $\theta \in (0, 1)$ *pentru care*

$$\langle E'(u), u \rangle + \theta R \|E'(u)\|_X \geq 0, \ \forall u \in \partial K_R. \tag{5.8}$$

*Considerăm submulțimea închisă* $S \subset K_R$ *și presupunem că pentru anumite constante* $c \in \mathbb{R}$ *și* $\varepsilon, \rho > 0$ *funcționala* $E$ *îndeplinește condiția*

$$\|E'(u)\|_X \geq \frac{2\varepsilon}{\rho}, \ \forall u \in E^{c+2\varepsilon}_{c-2\varepsilon} \cap S_{2\rho} \tag{5.9}$$

*și* $E_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \cap S_\rho \neq \emptyset$.

*Atunci, există o deformare continuă* $\sigma : [0,1] \times K_R \to K_R$*, care îndeplinește următoarele proprietăți:*

$(\mathbf{C}_\sigma^1)$ $\sigma(0,\cdot) = \mathrm{id}_{K_R}$;

$(\mathbf{C}_\sigma^2)$ $\sigma(t,\cdot) : K_R \to K_R$ *este un homeomorfism pentru orice* $t \in [0,1]$;

$(\mathbf{C}_\sigma^3)$ $\sigma(t,\cdot) = \mathrm{id}$ *pe* $K_R \setminus (E_{c-2\varepsilon}^{c+2\varepsilon} \cap S_{2\rho})$ *pentru orice* $t \in [0,1]$;

$(\mathbf{C}_\sigma^4)$ *pentru fiecare* $u \in K_R$ *funcția* $t \in [0,1] \mapsto E(\sigma(t,u))$ *este necrescătoare;*

$(\mathbf{C}_\sigma^5)$ *există* $\alpha \in (0,1)$*, astfel încât* $\sigma(\alpha, E^{c+\alpha\varepsilon} \cap S) \subset E^{c-\alpha\varepsilon} \cap S_\rho$.

**Obsevația 5.2.** *Dacă* $E : X \to \mathbb{R}$ *este o funcțională de clasă* $C^1$*, astfel încât există* $\theta \in (0,1)$ *pentru care inegalitatea*

$$\langle E'(u), u\rangle + \theta R \|E'(u)\|_X \geq 0, \ \forall u \in \partial K_R \tag{5.10}$$

*este îndeplinită, atunci*

$$E'(u) + \lambda J_\varphi u \neq 0, \ \forall \lambda > 0 \text{ și } \ \forall u \in \partial K_R.$$

*Pentru a demonstra această afirmație, presupunem că există o funcție* $v \in \partial K_R$ *și* $\lambda > 0$*, astfel încât* $E'(v) = -\lambda J_\varphi v$*. Atunci, inegalitatea* (5.10) *implică*

$$-\lambda\langle Jv, v\rangle + \theta R \lambda \|Jv\|_X \geq 0,$$

*de unde urmează că* $\theta \geq 1$*, ceea ce contrazice că* $\theta \in (0,1)$.

Apoi, afirmăm o versiune mărginită a teoremei generale de tip minimax a lui [Willem, 1996, Teorema 2.8] pe o mulțime conică, care poate fi demonstrată folosind Lema 5.2 de deformare de tip Willem .

**Teorema 5.1** ([Lisei, Varga şi **Vas**, 2018]). *Fie* $(X, \|\cdot\|_X)$ *un spațiu Banach care îndeplinește condițiile* $(\mathbf{C}_X^1)$ *și* $(\mathbf{C}_X^2)$*. Considerăm funcționala* $E : X \to \mathbb{R}$ *de clasă* $C^1$*. Presupunem că* $u - \bar{J}E'(u) \in K$ *pentru orice* $u \in K_R$ *și că există* $\theta \in (0,1)$*, astfel încât*

$$\langle E'(u), u\rangle + \theta R \|E'(u)\|_X \geq 0, \ \forall u \in \partial K_R.$$

*Considerăm subspațiul închis* $M_0$ *al spațiului metric* $M$ *și* $\Gamma_0 \subset \mathcal{C}(M_0, K_R)$*, mai mult, definim mulțimea*

$$\Gamma := \{\gamma \in \mathcal{C}(M, K_R) : \ \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

*Dacă* $E$ *îndeplinește*

$$\infty > c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{u\in M} E(\gamma(u)) > a := \sup_{\gamma_0\in\Gamma_0} \sup_{u\in M_0} E(\gamma(u)), \tag{5.11}$$

*atunci pentru fiecare* $(\gamma_n)_n \subset \Gamma$ *satisfăcând limita*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in M} E(\gamma_n(u)) = c, \tag{5.12}$$

*și pentru* $n \in \mathbb{N}_{>\frac{2}{c-a}}$ *există* $u_n \in K_R$*, astfel încât* $u_n \in E_{c-\frac{2}{n}}^{c+\frac{2}{n}}$, $\mathrm{dist}(u_n, \gamma_n(M)) \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$ *și* $\|E'(u_n)\|_X < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Din Teorema 5.1 derivăm următoarea versiune mărginită a teoremei trecătorii montane a lui [Ambrosetti şi Rabinowitz, 1973] pentru cazul unei mulțimi conice.

**Teorema 5.2** ([Lisei, Varga şi **Vas**, 2018]). *Fie* $(X, \|\cdot\|_X)$ *un spațiu Banach care îndeplinește condițiile* $(\mathbf{C}_X^1)$ *și* $(\mathbf{C}_X^2)$*. Considerăm funcționala* $E : X \to \mathbb{R}$ *de clasă* $C^1$*. Presupunem că* $u - \bar{J}E'(u) \in K$ *pentru orice* $u \in K_R$ *și există* $\theta \in (0,1)$*, astfel încât*

$$\langle E'(u), u\rangle + \theta R \|E'(u)\|_X \geq 0, \ \forall u \in \partial K_R.$$

*Fie $e \in K_R$ și $r > 0$ fixate, cu $\|e\|_X > r$ pentru care*

$$\inf\{E(u) : u \in K_R, \|u\|_X = r\} > \max\{E(0), E(e)\}.$$

*Vom folosi notația*

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], K_R) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}$$

*și*

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} E(\gamma(t)).$$

*Atunci, există un șir $(u_n)_n \subset K_R$, astfel încât*

$$E(u_n) \to c \quad \text{și} \quad E'(u_n) \to 0.$$

Un caz particular al principiului variațional al lui Ekeland [Ekeland, 1974] poate fi demonstrată urmând pașii date în demonstrația din [Willem, 1996, Teorema 2.4].

**Teorema 5.3** ([Lisei, Varga și **Vas**, 2018]). *Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ un spațiu Banach care îndeplinește condițiile $(\mathbf{C}^1_X)$ și $(\mathbf{C}^2_X)$. Fie $E : X \to \mathbb{R}$ o funcțională de clasă $C^1$ care este mărginită inferior pe $K_R$. Presupunem că $u - \bar{J}E'(u) \in K$ pentru orice $u \in K_R$ și există $\theta \in (0,1)$, astfel încât*

$$\langle E'(u), u\rangle + \theta R\|E'(u)\|_X \geq 0,\ \forall u \in \partial K_R.$$

*Fie $(v_n)_n \subset K_R$ un șir pentru care*

$$\lim_{n\to\infty} E(v_n) = \inf E(K_R). \tag{5.13}$$

*Atunci, există $(w_n)_n \subset K_R$, astfel încât*

$$E(w_n) \leq \inf E(K_R) + \frac{2}{n},\ \|E'(w_n)\|_X < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{și} \quad \operatorname{dist}(w_n, S) \leq \frac{2}{\sqrt{n}},$$

*unde $S = \operatorname{cl}(\{v_n : n \in \mathbb{N}\})$.*

**Teorema 5.4** ([Lisei, Varga și **Vas**, 2018]). *Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ un spațiu Banach care îndeplinește condițiile $(\mathbf{C}^1_X)$ și $(\mathbf{C}^2_X)$. Considerăm funcționala $E : X \to \mathbb{R}$ de clasă $C^1$, astfel încât $E(0) = 0$. Presupunem că $u - \bar{J}E'(u) \in K$ pentru orice $u \in K_R$ și există $\theta \in (0,1)$, astfel încât*

$$\langle E'(u), u\rangle + \theta R\|E'(u)\|_X \geq 0,\ \forall u \in \partial K_R. \tag{5.14}$$

*Fie $e \in K_R$ și $r > 0$, cu $\|e\|_X > r$, pentru care $E(e) < 0$ și*

$$\inf\{E(u) : u \in K_R, \|u\|_X = r\} > 0. \tag{5.15}$$

*Presupunem că $E$ este mărginită inferior pe $K_R$ și îndeplinește condiția $(PS)$ pe $K_R$. Atunci, funcționala $E$ admite două puncte critice netriviale localizate pe $K_R$ și unul dintre ele este minimul global a lui $E$ pe $K_R$.*

## 5.4 Aplicarea în cazul ecuațiilor cu operatori neomogeni

În această secțiune, aplicăm rezultatele prezentate în secțiunea anterioară în cazul ecuațiilor cu operatori neomogeni.

Pe baza rezultatelor [Adams și Fournier, 2003; Dinca și Matei, 2007; Pick et al., 2013], enumerăm câteva ipoteze de bază necesare pentru a lucra în spațiile Orlicz–Sobolev.

Fie $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție admisibilă. Considerăm $N$-funcția $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ A(t) = \displaystyle\int_0^t a(s)ds$ și $N$-funcția sa complementara $\bar{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ \bar{A}(t) = \displaystyle\int_0^t a^{-1}(s)ds$ determinate de funcțiile admisibile $a$, respectiv $a^{-1}$.

Presupunem că proprietățiile următoare sunt îndeplinite:

$(\mathbf{C}_A^1)$ $p_0 = \inf_{t>0} \frac{ta(t)}{A(t)} > 1$ și $p^* = \sup_{t>0} \frac{ta(t)}{A(t)} < \infty$;

$(\mathbf{C}_A^2)$ funcția $t \in (0,\infty) \mapsto \frac{a(t)}{t}$ este nedescrescătoare;

$(\mathbf{C}_A^3)$ există o constantă $C > 0$, astfel încât $A(t) \geq C \cdot t^{p_0}$ pentru orice $t \in (0,1)$;

$(\mathbf{C}_A^4)$ $\int_0^1 \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{\frac{N+1}{N}}} \mathrm{d}\tau < \infty$ și $\int_1^\infty \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{\frac{N+1}{N}}} \mathrm{d}\tau = \infty$;

$(\mathbf{C}_A^5)$ pentru constanta $p_0$ definită în $(\mathbf{C}_A^1)$ are loc inegalitatea $p_0 < p_* := \liminf_{t\to\infty} \frac{tA_*'(t)}{A_*(t)}$, unde $A_*$ notează conjugatul Sobolev al lui $A$.

Datorită [Pick et al., 2013, Teorema 4.4.4], [Clément et al., 2004, Lema C.8] și $(\mathbf{C}_A^1)$, $N$-funcţiile $A$ și $\bar{A}$ îndeplinesc condiţia $\Delta_2$.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N}_{\geq 2})$ o mulțime deschisă și mărginită și considerăm spațiul Orlicz $L_A(\Omega)$ asociată $N$-funcției $A$, care este un spațiu reflexiv și separabil cu privire la norma Luxemburg

$$\|u\|_{L_A(\Omega)} := \inf\left\{k > 0 : \int_\Omega A\left(\frac{u(x)}{k}\right) \mathrm{d}x \leq 1\right\}. \tag{5.16}$$

Datorită condiției $(\mathbf{C}_A^1)$, la început avem că $1 < p_0 = \inf_{t>0} \frac{ta(t)}{A(t)}$, prin urmare, folosind [Clément et al., 2004, Lema C.9], obținem

$$\int_\Omega A(u(x))\mathrm{d}x \leq \|u\|_{L_A(\Omega)}^{p_0}, \ \forall u \in L_A(\Omega) \text{ cu } \|u\|_{L_A(\Omega)} \leq 1; \tag{5.17}$$

în al doilea rând, avem că $1 < p^* = \sup_{t>0} \frac{ta(t)}{A(t)} < \infty$, care prin [Dinca şi Matei, 2007, Observația 7.2] implică inegalitatea

$$A(t) \leq t^{p^*} A(1), \ \forall t \geq 1, \tag{5.18}$$

și prin [Dinca şi Matei, 2007, Lema 6.5] rezultă, că

$$\int_\Omega A(u(x))\mathrm{d}x \leq \|u\|_{L_A(\Omega)}^{p^*}, \ \forall u \in L_A(\Omega) \text{ cu } \|u\|_{L_A(\Omega)} > 1. \tag{5.19}$$

În consecință, utilizând (5.17) și (5.19), pentru orice $u \in L_A(\Omega)$ avem inegalitatea

$$\int_\Omega A(u(x))\,\mathrm{d}x \leq \|u\|_{L_A(\Omega)}^{p_0} + \|u\|_{L_A(\Omega)}^{p^*}. \tag{5.20}$$

**Obsevația 5.3.** *Dacă pe lângă condițiile* $(\mathbf{C}_A^1)$–$(\mathbf{C}_A^4)$ *pentru $N$-funcția $A$ avem și*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{ta(t)}{A(t)} = \ell,$$

*atunci, datorită unei proprietăți dată în [Clément et al., 2000, p. 55], obținem că*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{tA_*'(t)}{A_*(t)} = \frac{N\ell}{N-\ell}. \tag{5.21}$$

Pentru $m \in \mathbb{N}^*$ fixat considerăm spațiul Orlicz–Sobolev $W_0^m L_A(\Omega)$ și fie $T[\cdot,\cdot]$ o formă biliniară simetrică nenegativă pe spațiul $W_0^m L_A(\Omega)$ implicând doar derivate generalizate de ordinul $m$, care îndeplinesc condiția

$(\mathbf{C}_T^1)$ $$c_1 \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u)^2 \leq T[u,u] \leq c_2 \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u)^2$$

a.p.t. pe $\Omega$ pentru orice $u \in W_0^m L_A(\Omega)$, unde $c_1, c_2 > 0$ sunt constante.

Notăm cu $\|\cdot\|_{W_0^m L_A(\Omega)} := \left\|\sqrt{T[\cdot,\cdot]}\right\|_{L_A(\Omega)}$ norma în spațiul Orlicz–Sobolev $W_0^m L_A(\Omega)$, iar cu $C_A > 0$

constanta pentru care

$$\left(\sum_{|\alpha|<m} \|D^\alpha u\|^2_{L_A(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_A \|u\|_{W_0^m L_A(\Omega)}. \tag{5.22}$$

Deoarece scufundarea $W_0^m L_A(\Omega) \hookrightarrow L_{A_*}(\Omega)$ este continuă, există o constantă pozitivă $C_*$ astfel încât

$$\|D^\alpha u\|_{L_{A_*}(\Omega)} \leq C_* \|u\|_{W_0^m L_A(\Omega)} \tag{5.23}$$

pentru orice $\alpha$ cu $|\alpha| < m$.

Fie $J_a : W_0^m L_A(\Omega) \to \left(W_0^m L_A(\Omega)\right)^*$ funcția de dualitate corespunzătoare funcției de normalizare $a$ cu

$$J_a(0) = 0 \;\; \text{și} \;\; J_a u = a(\|\cdot\|_{W_0^m L_A(\Omega)})\|\cdot\|'_{W_0^m L_A(\Omega)}(u), \;\; \forall u \in W_0^m L_A(\Omega) \setminus \{0\}. \tag{5.24}$$

Considerăm mulțimea funcțiilor Carathéodory $\{f_\alpha : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : |\alpha| < m\}$ care au primitivele

$$F_\alpha(x,s) = \int_0^s f_\alpha(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

pentru orice multi-index $\alpha$ cu $|\alpha| < m$ și presupunem că:

$\left(\mathbf{C}^1_{f_\alpha}\right)$ pentru fiecare multi-index $\alpha$ cu $|\alpha| < m$, există $N$-funcții $M_\alpha$, care cresc esențial mai încet decât $A_*$ aproape de infinit,

$$1 < q_\alpha = \inf_{t>0} \frac{tM'_\alpha(t)}{M_\alpha(t)} \leq q^*_\alpha = \sup_{t>0} \frac{tM'_\alpha(t)}{M_\alpha(t)}$$

și

$$f_\alpha(x,s) \leq c_\alpha + d_\alpha \overline{M}_\alpha^{-1}\left(M_\alpha(s)\right), \;\; \forall s \in \mathbb{R} \text{ și a.p.t. } x \in \Omega,$$

unde $\overline{M}_\alpha$ sunt $N$-funcțiile coplementare cu $M_\alpha$ și $c_\alpha, d_\alpha > 0$ sunt constante;

$\left(\mathbf{C}^2_{f_\alpha}\right)$ pentru fiecare multi-index $\alpha$ cu $|\alpha| < m$ avem

$$\limsup_{s\to 0} \frac{f_\alpha(x,s)}{a(s)} < \frac{C}{2N_0 C_A^{p_0}} \text{ uniform pentru a.p.t. } x \in \Omega,$$

unde $N_0 := \sum_{|\alpha|<m} 1$, $C$ și $p_0$ sunt constantele din $(\mathbf{C}^1_A)$ și $(\mathbf{C}^3_A)$, iar $C_A$ este constanta din (5.22);

$\left(\mathbf{C}^3_{f_\alpha}\right)$ pentru fiecare multi-index $\alpha$, există $s_\alpha > 0$ și $\theta_\alpha > p^*$ ($p^*$ definită în $(\mathbf{C}^1_A)$) astfel încât

$$0 < \theta_\alpha F_\alpha(x,s) \leq s f_\alpha(x,s), \;\; \forall |s| \geq s_\alpha \text{ și a.p.t. } x \in \Omega.$$

În aceste condiții, scopul nostru este de a localiza soluțiile problemei la limită

$$\begin{cases} J_a u = \sum_{|\alpha|<m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x, D^\alpha u) & \text{în } \Omega, \\ D^\alpha u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \;\; |\alpha| \leq m-1, \end{cases} \tag{5.25.P}$$

Mai mult, când $m = 1$ și $a(t) = |t|^{p-2}t$, $t \in \mathbb{R}$ cu $p \in (1, N)$ fixat, putem localiza soluțiile pozitive ale problemei de mai sus, vezi Exemplul 5.3.

Datorită condițiilor $(\mathbf{C}^1_A)$ și $(\mathbf{C}^2_A)$, prin [Dinca şi Matei, 2007, Teoremele 3.6, 3.14 și 4.5], spațiul Banach este neted și uniform convex, în plus, funcția de dualitate în $\left(W_0^m L_A(\Omega), \|\cdot\|_{W_0^m L_A(\Omega)}\right)$ subordonată funcției de normalizare $a$ este

$$\langle J_a u, h\rangle = \frac{a\left(\|u\|_{W_0^m L_A(\Omega)}\right) \cdot \displaystyle\int_\Omega a\left(\frac{\sqrt{T[u,u](x)}}{\|u\|_{W_0^m L_A(\Omega)}}\right) \frac{T[u,h](x)}{\sqrt{T[u,u](x)}}\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega a\left(\frac{\sqrt{T[u,u](x)}}{\|u\|_{W_0^m L_A(\Omega)}}\right) \frac{\sqrt{T[u,u](x)}}{\|u\|_{W_0^m L_A(\Omega)}}\,\mathrm{d}x} \tag{5.26}$$

pentru $u, h \in W_0^m L_A(\Omega)$, $u \neq 0$. În plus, $J_a$ este bijectivă și inversa sa $\bar{J} = J_a^{-1}$ este continuă.

De asemenea, considerăm funționala $\mathcal{E} : W_0^m L_A(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{E}(u) = A\left(\|u\|_{W_0^m L_A(\Omega)}\right) - \sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega F_\alpha(x, D^\alpha u(x))\mathrm{d}x, \tag{5.27}$$

a cărei puncte critice sunt soluțiile slabe ale problemei (5.25.$P$). Datorită [Dinca şi Matei, 2007, Propoziția 7.5], avem că

$$\langle \mathcal{E}'(u), v\rangle = \langle J_a(u), v\rangle - \sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega f_\alpha(x, D^\alpha u(x)) D^\alpha v(x)\mathrm{d}x, \ \forall u, v \in W_0^m L_A(\Omega).$$

Fie $K \subseteq W_0^m L_A(\Omega)$ o mulțime conică și pentru $R > 0$ reamintim notațiile

$$K_R \coloneqq \{u \in W_0^m L_A(\Omega) : u \in K \text{ și } \|u\|_{W_0^m L_A(\Omega)} \leq R\}$$

și

$$\partial K_R \coloneqq \{u \in W_0^m L_A(\Omega) : u \in K \text{ și } \|u\|_{W_0^m L_A(\Omega)} = R\}.$$

**Propoziția 5.2** ([Lisei, Varga şi **Vas**, 2018]). *Presupunem că condițiile* $(\mathbf{C}_A^1)$–$(\mathbf{C}_A^2)$, $(\mathbf{C}_A^4)$, $(\mathbf{C}_T^1)$ *și* $\left(\mathbf{C}_{f_\alpha}^1\right)$ *sunt îndeplinite. Atunci, funcționala* $\mathcal{E}$ *satisface condiția* $(PS)$ *pe* $K_R$.

**Propoziția 5.3** ([Lisei, Varga şi **Vas**, 2018]). *Presupunem că conițiile* $(\mathbf{C}_A^1)$–$(\mathbf{C}_A^2)$, $(\mathbf{C}_A^4)$, $(\mathbf{C}_T^1)$ *și* $\left(\mathbf{C}_{f_\alpha}^1\right)$ *sunt îndeplinite. Atunci, pentru orice* $s \in \mathbb{R}$ *și a.p.t.* $x \in \Omega$ *inegalitatea*

$$|F_\alpha(x, s)| \leq c_\alpha |s| + 2d_\alpha M_\alpha(|s|) \tag{5.28}$$

*este satisfăcută și* $\mathcal{E}$ *transformă mulțimile mărginite în mulțimi mărginite.*

**Propoziția 5.4** ([Lisei, Varga şi **Vas**, 2018]). *Presupunem că condițiile* $(\mathbf{C}_A^1)$–$(\mathbf{C}_A^2)$, $(\mathbf{C}_A^4)$, $(\mathbf{C}_T^1)$ *și* $\left(\mathbf{C}_{f_\alpha}^1\right)$–$\left(\mathbf{C}_{f_\alpha}^2\right)$ *sunt îndeplinite. Pentru orice multi-index* $\alpha$ *cu* $|\alpha| < m$ *există* $\mu_\alpha \in \left(0, \frac{C}{2N_0 C_A^{p_0}}\right)$ *și* $t_\alpha > 0$, *astfel încât*

$$F_\alpha(x, s) \leq \mu_\alpha A(s), \ \forall |s| < t_\alpha \text{ și a.p.t. } x \in \Omega, \tag{5.29}$$

*și*

$$|F_\alpha(x, s)| \leq \left(\frac{c_\alpha t_\alpha}{M_\alpha(t_\alpha)} + 2d_\alpha\right) M_\alpha(|s|), \ \forall |s| \geq t_\alpha \text{ și a.p.t. } x \in \Omega. \tag{5.30}$$

Deoarece, conform presupunerilor noastre, $N$-funcția $M_\alpha$ crește esențial mai încet decât $A_*$ aproape de infinit, în particular se obține

$$\lim_{s\to\infty} \frac{M_\alpha(s)}{A_*(s)} = 0.$$

În consecință, există $t'_\alpha \geq t_\alpha$, astfel încât

$$M_\alpha(s) \leq A_*(s), \ \forall s \geq t'_\alpha. \tag{5.31}$$

Folosind definiția lui $p_*$ din $(\mathbf{C}_A^1)$ pentru orice $\mu \in (0, p_* - p_0)$ există $t''_\alpha \geq t'_\alpha$, astfel încât

$$\frac{A'_*(s)}{A_*(s)} \geq \frac{p_* - \mu}{s}, \ \forall s \geq t''_\alpha. \tag{5.32}$$

Pentru fiecare $|\alpha| < m$ introducem notația

$$k_\alpha \coloneqq \frac{t''_\alpha}{t_\alpha} > 1. \tag{5.33}$$

Formulăm următoarele condiții pentru $R$:

$(\mathbf{C}_R^1)$
$$2C_W \sum_{|\alpha|<m} \left( a_\alpha + d_\alpha((C_W R)^{q_\alpha - 1} + (C_W R)^{q_\alpha^* - 1}) \right) \leq a(R),$$

unde $a_\alpha := \frac{c_\alpha}{M_\alpha^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{vol}(\Omega)}\right)}$ și $C_W$ este constanta din scufundarea compactă $W_0^m L_A(\Omega) \hookrightarrow W := \bigcap_{|\alpha|<m} W^{m-1} L_{M_\alpha}(\Omega)$;

$(\mathbf{C}_R^2)$
$$R > \rho_0 := \min \left\{ 1, \frac{1}{C_A}, \frac{1}{\left(\max\limits_{|\alpha|<m} k_\alpha\right) C_*}, \left(\frac{C}{3D}\right)^{\frac{1}{p_* - \mu - p_0}} \right\},$$

unde $C_*$ și $C_A$ sunt constante (5.23), respectiv din (5.22),

$$D := C_*^{p_* - \mu} \sum_{|\alpha|<m} \left( \frac{c_\alpha t_\alpha}{M_\alpha(t_\alpha)} + 2d_\alpha \right) k_\alpha^{p_* - \mu},$$

cu $t_\alpha$ obținută în Propoziția 5.4, $k_\alpha$ este definită în (5.33), iar $\mu \in (0, p_* - p_0)$ este fixat arbitrar;

$(\mathbf{C}_R^3)$ fie $v \in W_0^m L_A(\Omega)$ o funcție astfel încât mulțimea

$$\widehat{\Omega}_\alpha^1 := \{x \in \Omega : |D^\alpha v(x)| \geq s_\alpha\}$$

are $\operatorname{vol}\left(\widehat{\Omega}_\alpha^1\right) > 0$ pentru (cel puțin un) multi-index $\alpha$ cu $|\alpha| < m$ , și fie $\lambda$ cel mai mic număr real cu $\lambda > \max \left\{ 1, \frac{\rho_0}{\|v\|_{W_0^m L_A(\Omega)}} \right\}$, astfel încât

$$A(1)\lambda^{p^*} \|v\|_{W_0^m L_A(\Omega)}^{p^*} - \sum_{|\alpha|<m} \lambda^{\theta_\alpha} \gamma_\alpha + \sum_{|\alpha|<m} b_\alpha < 0,$$

unde

$$\gamma_\alpha := \int_{\widehat{\Omega}_\alpha^1} \min\{F_\alpha(x, s_\alpha), F_\alpha(x, -s_\alpha)\} \mathrm{d}x$$

și

$$b_\alpha := (c_\alpha s_\alpha + 2d_\alpha M_\alpha(s_\alpha)) \operatorname{vol}(\Omega)$$

cu $s_\alpha$ dată în condiția $\left(\mathbf{C}_{f_\alpha}^3\right)$; mai mult, presupunem că $R \geq \lambda \|v\|_{W_0^m L_A(\Omega)}$.

Urmând ideile din articolele [Clément et al., 2000; Dinca şi Matei, 2007] și totodată folosind Teorema 5.4, putem demonstra următorul rezultat referitor la existența și localizarea soluțiilor problemei (5.25.$P$).

**Teorema 5.5** ([Lisei, Varga şi **Vas**, 2018]). *Presupunem că* $u - \bar{J}\mathcal{E}'(u) \in K$ *pentru orice* $u \in K_R$ *și condițiile* $(\mathbf{C}_A^1)$*–*$(\mathbf{C}_A^5)$*,* $(\mathbf{C}_T^1)$ *și* $\left(\mathbf{C}_{f_\alpha}^1\right)$*–*$\left(\mathbf{C}_{f_\alpha}^3\right)$ *sunt îndeplinite. Fie* $R$ *cel mai mic număr pozitiv astfel încât condițiile* $(\mathbf{C}_R^1)$*–*$(\mathbf{C}_R^3)$ *sunt satisfăcute. Atunci, problema* (5.25.$P$) *admite două soluții netriviale în* $K_R$ *și una dintre ele este minimul global al funcționalei* $\mathcal{E}$ *pe* $K_R$*.*

## 5.5 Exemple

Această secțiune prezintă trei exemple concrete pentru a arăta aplicabilitatea rezultatelor discutate în Secțiunea 5.4.

În exemplele de mai jos, forma biliniară simetrică nenegativă $T$ este

$$T[u, u] = \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u)^2, \;\; \forall u \in W_0^m L_A(\Omega)$$

și mulțimea conică $K = W_0^m L_A(\Omega)$ este întregul spațiul Orlicz–Sobolev. În acest caz, $K_R = \overline{X}_R$ și evident $u - \bar{J}\mathcal{E}'(u) \in K$ pentru orice $u \in K_R$.

**Examplul 5.1.** *Fie $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < N$ și considerăm funcția admisibilă*

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a(t) = \sum_{i=1}^{n} |t|^{p_i - 2} t \tag{5.34}$$

*cu $N$-funcția corespunzătoare*

$(\mathbf{E}_{5.1}|\mathbf{C}_A)$ $$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ A(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} |t|^{p_i},$$

*unde $p_0 = p_1 > 1$ și $p^* = p_n < N$.*

*De asemenea, considerăm mulțimea funcțiilor Carathéodory $\{f_\alpha : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : |\alpha| < m\}$ care au primitivele*

$$F_\alpha(x, s) = \int_0^s f_\alpha(x, \tau)\, \mathrm{d}\tau$$

*pentru orice multi-index $\alpha$ cu $|\alpha| < m$ și care îndeplinesc următoarele condiții:*

$\left(\mathbf{E}_{5.1}|\mathbf{C}^1_{f_\alpha}\right)$ *pentru fiecare multi-index $\alpha$ cu $|\alpha| < m$ există $q_\alpha \in \left(1, \frac{Np_n}{N - p_n}\right)$, astfel încât*

$$|f_\alpha(x, s)| \le c_\alpha + d_\alpha |s|^{q_\alpha - 1},\ \forall s \in \mathbb{R} \text{ și a.p.t. } x \in \Omega; \tag{5.35}$$

$\left(\mathbf{E}_{5.1}|\mathbf{C}^2_{f_\alpha}\right)$ *folosind notația $N_0 := \sum_{|\alpha|<m} 1$, presupunem că*

$$\limsup_{s \to 0} \frac{f_\alpha(x, s)}{a(s)} < \frac{1}{2 p_1 N_0 C_A^{p_1}} \text{ uniform pentru a.p.t. } x \in \Omega;$$

$\left(\mathbf{E}_{5.1}|\mathbf{C}^3_{f_\alpha}\right)$ *pentru fiecare multi-index $\alpha$ cu $|\alpha| < m$ există $s_\alpha > 0$ și $\theta_\alpha > p_n$, astfel încât*

$$0 < \theta_\alpha F_\alpha(x, s) \le s f_\alpha(x, s),\ \forall s \in \mathbb{R} \text{ cu } |s| \ge s_\alpha \text{ și pentru a.p.t. } x \in \Omega. \tag{5.36}$$

*În condițiile de mai sus, problema (5.25.$P$) admite două soluții slabe netriviale în $\overline{X}_R$, unde $R$ este cel mai mic număr pozitiv, astfel încât condițiile $(\mathbf{C}^1_R)$–$(\mathbf{C}^3_R)$ sunt îndeplinite.*

**Obsevația 5.4.** *Dacă funcția admisibilă este $a(t) = |t|^{p-2} \cdot t$, $p \in (1, N)$, $m = 1$ și $T[u, v] = \nabla u \cdot \nabla v$, spațiul $X$ devine spațiul obișnuit Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ și funcția de dualitate este $J_a = -\Delta_p$. Rezultatul de existență obținut în acest Exemplu 5.1 completează rezultatele de localizare din Secțiunea 4.2, asigurând că problema Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f_0(x, u) & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

*admite două soluții slabe netriviale localizate în $\overline{X}_R \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, unde $R$ este cel mai mic număr pozitiv astfel încât condițiile $(\mathbf{C}^1_R)$–$(\mathbf{C}^3_R)$ sunt îndeplinite și funcția $f_0$ satisface condițiile $\left(\mathbf{E}_{5.1}|\mathbf{C}^1_{f_\alpha}\right)$–$\left(\mathbf{E}_{5.1}|\mathbf{C}^3_{f_\alpha}\right)$. Pentru localizarea soluțiilor pozitive vezi Examplul 5.3.*

**Examplul 5.2.** *Fie $p \in (1, N-1)$ fixat și considerăm funcția admisibilă*

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a(t) = |t|^{p-2} t \sqrt{t^2 + 1}. \tag{5.37}$$

*De asemenea, considerăm mulțimea funcțiilor Carathéodory $\{f_\alpha : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : |\alpha| < m\}$ care au primitivele*

$$F_\alpha(x, s) = \int_0^s f_\alpha(x, \tau)\, \mathrm{d}\tau$$

*pentru orice multi-index $\alpha$ cu $|\alpha| < m$ și care îndeplinesc următoarele condiții:*

$\left(\mathbf{E}_{5.2}|\mathbf{C}^1_{f_\alpha}\right)$ *pentru fiecare multi-index $\alpha$ cu $|\alpha| < m$ există $q_\alpha \in \left(1, \frac{Np}{N-p}\right)$, astfel încât inegalitatea (5.35) este satisfăcută;*

$\left(\mathbf{E}_{5.2}|\mathbf{C}^2_{f_\alpha}\right)$ *folosind notația* $N_0 := \sum_{|\alpha|<m} 1$, *presupunem că*

$$\limsup_{s\to 0} \frac{f_\alpha(x,s)}{a(s)} < \frac{1}{2pN_0C_A^p}, \text{ uniform pentru a.p.t. } x \in \Omega;$$

$\left(\mathbf{E}_{5.2}|\mathbf{C}^3_{f_\alpha}\right)$ *pentru fiecare multi-index* $\alpha$ *cu* $|\alpha| < m$ *există* $s_\alpha > 0$ *și* $\theta_\alpha > p+1$, *astfel încât* (5.36) *este îndeplinită.*

*În condițiile de mai sus, problema* (5.25.$P$) *admite două soluții slabe netriviale în* $\overline{X}_R$, *unde* $R$ *este cel mai mic număr pozitiv, astfel încât condițiile* $(\mathbf{C}^1_R)$–$(\mathbf{C}^3_R)$ *sunt îndeplinite.*

**Obsevația 5.5.** *În Examplele* 5.1 *și* 5.2, *o expresie mai explicită a funcției de dualitate* $J_a$ *poate fi calculată, dacă funcția admisibilă este scrisă în forma* $a(t) = b(t)t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *și* $A$ *este* $N$*-funcția corespunzătoare. Atunci, funcția de dualitate are formula*

$$\langle J_a u, h\rangle = \frac{b\left(\|u\|_{W_0^1L_A(\Omega)}\right)}{\int_\Omega b\left(\frac{|\nabla u(x)|}{\|u\|_{W_0^1L_A(\Omega)}}\right)|\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x} \int_\Omega b\left(\frac{|\nabla u(x)|}{\|u\|_{W_0^1L_A(\Omega)}}\right)\nabla u(x)\nabla h(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.38}$$

*unde* $u, h \in W_0^1L_A(\Omega), u \neq 0$.

**Examplul 5.3.** *Pentru* $p \in (1,N)$ *fixat considerăm funcția admisibilă* $a(t) = |t|^{p-2}\cdot t$ *și alegem* $m = 1$, $T[u,v] = \nabla u \cdot \nabla v$ *și* $X = W_0^{1,p}(\Omega)$. *Atunci, funcția de dualitate este* $J_a = -\Delta_p$. *Alegând* $M_0(t) = \frac{|t|^q}{q}$, *avem*

$(\mathbf{E}_{5.3}|\mathbf{C}_A)$ $\quad A(t) = \frac{|t|^p}{p},\ \|u\|_{L_A(\Omega)} = p^{-\frac{1}{p}}\|u\|_{L^p(\Omega)},\ \|u\|_{W_0^1L_A(\Omega)} = p^{-\frac{1}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$

$$A_*(t) = \left(\frac{N-p}{Np}\right)^{\frac{Np}{N-p}} \cdot p^{-\frac{N}{N-p}} \cdot t^{\frac{N-p}{Np}},\ \ \|u\|_{L_{A_*}(\Omega)} = \frac{N-p}{Np}\cdot p^{-\frac{1}{p}}\|u\|_{L^{\frac{N-p}{Np}}(\Omega)}$$

*și*

$$p_0 = p^* = p,\ p_* = \frac{Np}{N-p}.$$

*În acest caz, constantele* $C_A$ *și* $C_W$ *din* (5.22), *respectiv din scufundarea compactă* $W_0^mL_A(\Omega) \hookrightarrow W := \bigcap_{|\alpha|<m} W^{m-1}L_{M_\alpha}(\Omega)$ *sunt cum urmează:*

- $C_A = C_p$ *este cea mai bună constantă a scufundării* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, *adică,* $C_A = C_p = \left(\frac{1}{\lambda_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$, *unde* $\lambda_p(\Omega)$ *este prima valoare proprie a operatorului* $p$*-Laplace definită pe* $\Omega$;
- $C_W = C_q$ *este cea mai bună constantă a scufundării compacte* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *deoarece* $q \in \left(1, \frac{Np}{N-p}\right)$ *și* $p < N$.

*Pe baza articolului* [Lisei şi **Vas**, 2016, Secțiunea 4], *în Secțiunea* 4.2 *a tezei am prezentat detaliată construirea estimărilor superioare pentru constantele* $C_p$ *și* $C_q$.

*Fie*

$$K := \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : u(x) \geq 0 \text{ pentru a.p.t. } x \in \Omega\right\}$$

*o mulțime conică și presupunem că funcția Carathéodory* $f_0 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *îndeplinește condițiile:*

$\left(\mathbf{E}_{5.3}|\mathbf{C}^1_{f_0}\right)$ *există* $q \in \left(1, \frac{Np}{N-p}\right)$, *astfel încât pentru constantele* $c_0, d_0 > 0$ *avem că*

$$|f_0(x,s)| \leq c_0 + d_0|s|^{q-1},\ \forall s \in \mathbb{R} \text{ și a.p.t. } x \in \Omega;$$

$\left(\mathbf{E}_{5.3}|\mathbf{C}^2_{f_0}\right)$ $\limsup_{s\to 0} \frac{f_0(x,s)}{s^{p-1}} < \frac{\lambda_p(\Omega)}{2p}$ *uniform pentru a.p.t.* $x \in \Omega$;

$\left(\mathbf{E}_{5.3}|\mathbf{C}^3_{f_0}\right)$ *există $s_0 > 0$ și $\theta_0 > p$, astfel încât*

$$0 < \theta_0 F_0(x,s) \leq s f_0(x,s),\ \forall |s| \geq s_0 \text{ și a.p.t. } x \in \Omega.$$

*În condițiile de mai sus, problema Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f_0(x,u) & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

*admite două soluții slabe netriviale în $K_R$, unde $R$ este cel mai mic număr pozitiv, astfel încât următoarele condiții sunt îndeplinite:*

$(\mathbf{E}_{5.3}|\mathbf{C}^1_R)$ $$c_0 C_q(\mathrm{vol}(\Omega))^{\frac{q-1}{q}} + d_0 C_q^q R^{q-1} \leq R^{p-1};$$

$(\mathbf{E}_{5.3}|\mathbf{C}^2_R)$ $$R > \rho_0 := \min\left\{1, \frac{1}{C_p}, \frac{1}{k_0 C_*}, \left(\frac{C}{3D}\right)^{\frac{1}{p_* - \mu - p_0}}\right\},$$

*unde $k_0$ este dată în (5.33), $C_* := \frac{N-p}{Np} C_{\frac{Np}{N-p}}$, $C := \frac{1}{p}$, $D := c_0 t_0^{1-q} + \frac{d_0}{q}$ cu $t_0$ obținut in Propziția 5.4, iar $\mu \in \left(0, \frac{p^2}{N-p}\right)$ este fixat arbitrar;*

$(\mathbf{E}_{5.3}|\mathbf{C}^3_R)$ *fie $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ astfel încât mulțimea*

$$\widehat{\Omega}^1_\alpha := \{x \in \Omega : |v(x)| \geq s_0\}$$

*are $\mathrm{vol}\left(\widehat{\Omega}^1_0\right) > 0$ și fie $\lambda$ cel mai mic număr real cu $\lambda > \max\left\{1, \frac{\rho_0}{\|v\|_{W_0^1 L_A(\Omega)}}\right\}$ pentru care*

$$\frac{1}{p}\lambda^p \|v\|^p_{W_0^1 L_A(\Omega)} - \lambda^{\theta_0}\gamma_0 + b_0 < 0,$$

*unde*

$$\gamma_0 := \int_{\widehat{\Omega}^1_0} \min\{F_0(x,s_0), F_0(x,-s_0)\} \mathrm{d}x$$

*și*

$$b_0 := \left(c_0 s_0 + \frac{d_0 s_0^q}{q}\right) \mathrm{vol}(\Omega);$$

*mai mult, presupunem că $\lambda \|v\|_{W_0^1 L_A(\Omega)} \leq R$.*

**Obsevația 5.6.** *Pentru acest caz special, condițiile $(\mathbf{E}_{5.3}|\mathbf{C}^1_R)$–$(\mathbf{E}_{5.3}|\mathbf{C}^3_R)$ sunt versiunile adaptate ale $(\mathbf{C}^1_R)$–$(\mathbf{C}^3_R)$, prin urmare aceste estimări sunt mai bune, deoarece au fost calculate pentru acest caz.*

Pentru $u \in K$ notăm $v := u - \bar{J}\mathcal{E}'(u)$. Atunci, $J_a(u - v) = \mathcal{E}'(u) \leq J_a u$ (slab), deoarece, din ipotezele noastre, $f_0$ este o funcție pozitivă. Datorită principiului slab de comparație pentru $J_a$ (vezi [Shapiro, 1980, Teorema, p. 259]), avem că $u - v \leq u$. Prin urmare, $v = u - \bar{J}\mathcal{E}'(u) \in K$.

**Teorema 5.6** ([Lisei, Varga şi **Vas**, 2018]). *Presupunem că $R$ și $f_0$ îndeplinesc condițiile $(\mathbf{E}_{5.3}|\mathbf{C}^1_R)$–$(\mathbf{E}_{5.3}|\mathbf{C}^3_R)$ respectiv $\left(\mathbf{E}_{5.3}|\mathbf{C}^1_{f_0}\right)$–$\left(\mathbf{E}_{5.3}|\mathbf{C}^3_{f_0}\right)$ sunt satisfăcute la fel. Atunci, problema (5.25.$P$) admite două soluții slabe netriviale în $K_R$ și una dintre ele este minimul global a funcționalei $\mathcal{E}$ pe $K_R$.*

# 6

# Rezultate de existenţă ale unor probleme Dirichlet cu operator Finsler-Laplace

Pe baza articolului [Mezei şi **Vas**, 2019], în acest capitol prezentăm câteva rezultate de existență și localizare pentru două probleme Dirichlet care includ operatorul Finsler–Laplace.

În primul rând, fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}_{\geq 2})$ un domeniu mărginit și neted și considerăm problema

$$\begin{cases} -\Delta_F u = g\left(x, u\right) & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.1.$P$}$$

unde $-\Delta_F : W_0^{1,2}\left(\Omega\right) \to W^{-1,2}\left(\Omega\right)$ notează operatorul Finsler–Laplace și $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție Carathéodory care îndeplinește condiții speciale de creștere. În cazul primei noastre probleme (6.1.$P$), pe baza rezultatelor [Dinca et al., 2001], arătăm existența soluțiilor în două moduri diferite: atât prin aplicarea metodei directe a calculului variațional, cât și prin folosirea alternativei lui Leray–Schauder.

În al doilea rând, considerăm problema

$$\begin{cases} -\Delta_F u = g\left(u\right) & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.2.$P$}$$

unde funcția $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. În cazul celei de-a doua probleme (6.2.$P$), demonstrăm un rezultat de existență și localizare, prin utilizarea combinată a inegalității lui Harnack și a teoremei de punct fix de tip Krasnosel'skii a lui [Precup, 2012].

În continuare, presupunem că $F$ este o normă în $\mathbb{R}^n$ pentru care $F^2$ tare convexă în $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}_{\geq 2})$ un domeniu mărginit și neted și considerăm spațiul Sobolev $W_0^{1,2}\left(\Omega\right)$ înzestrat cu produsul interior $\langle u, v\rangle = \int_\Omega \left(\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\right) \mathrm{d}x$ care induce norma $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} := \left(\int\limits_\Omega \left|\nabla u\left(x\right)\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$. Atunci, $\left(W_0^{1,2}\left(\Omega\right), \|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\right)$ este un spațiu Hilbert și $W^{-1,2}\left(\Omega\right)$ este dualul său topologic. Bazată pe

[Xia, 2012], definim operatorul Finsler–Laplace $-\Delta_F : W_0^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$,

$$\Delta_F u := \operatorname{div}(F(\nabla u) F_\xi(\nabla u)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(F(\nabla u) F_{\xi_i}(\nabla u)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{2}F^2(\nabla u)\right)\right).$$

## 6.1 Rezultate de existență pentru problema (6.1.$P$) prin teoria punctelor critice

Această secțiune studiază prima noastră problemă Dirichlet (6.1.$P$), unde $-\Delta_F : W_0^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ notează operatorul Finsler–Laplace și $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție Carathéodory.

Pentru a demonstra existența soluțiilor problemei (6.1.$P$) prin aplicarea elementelor teoriei punctelor critice, trebuie să definim operatorul Nemytskii asociat funcției Carathéodory $g$ .

Considerăm mulțimea $\mathcal{M} := \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ este măsurabilă}\}$.

**Propoziția 6.1.** *Dacă $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție Carathéodory, atunci pentru fiecare funcție măsurabilă $u \in \mathcal{M}$ funcția $N_g(u) : \Omega \to \mathbb{R}$,*

$$N_g(u)(x) = g(x, u(x)), \ \forall x \in \Omega$$

*este măsurabilă în $\Omega$.*

**Obsevația 6.1.** *Funcția $N_g : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ este operatorul Nemytskii asociat funcției $g$.*

**Propoziția 6.2** ([Dinca et al., 2001, Propoziția 6.]). *Presupunem că $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție Carathéodory care îndeplinește condiția de creștere*

$$|g(x,s)| \le C|s|^{q-1} + b(x), \ \forall x \in \Omega, \ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{6.3}$$

*unde $C \ge 0$ este o constantă, $q > 1$, $b \in L^{q'}(\Omega)$ și $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. În plus, considerăm funcția $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x,s) = \int_0^s g(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Atunci:*

*(a) funcția $G$ este Carathéodory și există o constantă $C_1 \ge 0$ și o funcție $c \in L^1(\Omega)$, astfel încât*

$$|G(x,s)| \le C_1 |s|^q + c(x), \ \forall x \in \Omega, \ \forall s \in \mathbb{R};$$

*(b) funcționala $\Phi : L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\Phi(u) := \int_\Omega N_G(u)(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega G(x,u(x))\,\mathrm{d}x$ este continuu Fréchet-diferențiabilă și $\Phi'(u) = N_g(u)$ pentru orice $u \in L^q(\Omega)$.*

**Obsevația 6.2.** *În condițiile menționate mai sus, avem $N_g(L^q(\Omega)) \subset L^{q'}(\Omega)$ și $N_G(L^q(\Omega)) \subset L^1(\Omega)$, iar operatorii Nemytskii $N_g$ și $N_G$ sunt continue și mărginite. Mai mult, ecuația $N_g(u) = \Phi'(u) \in L^{q'}(\Omega)$ este îndeplinită pentru fiecare $u \in L^q(\Omega)$ fixat.*

În continuare presupunem că funcția Carathéodory $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ îndeplinește condiția de creștere (6.3) cu $q \in (1, 2^*)$.

Datorită restricției $q \in (1, 2^*)$, scufundarea $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ este coompactă cu constanta $C_q$, iar $N_g : W_0^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ este un operator compact, adică $W_0^{1,2}(\Omega) \overset{I_d}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \xrightarrow{N_g} L^{q'}(\Omega) \overset{I_d^*}{\hookrightarrow} W^{-1,2}(\Omega)$.

### 6.1.1 Un rezultat de existenţă prin metoda directă a calculului variaţional

Definim $J_G : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ prin $J_G(u) = \int_\Omega G(x,u(x))\mathrm{d}x$ și fie $\mathcal{E} : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funcționala de energie

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega F^2(\nabla u(x))\mathrm{d}x - J_G(u) \tag{6.4}$$

asociată problemei (6.1.$P$), unde $\mathcal{E}$ este bine definită, mai mult, punctele critice ale funcționalei de energie $\mathcal{E}$ sunt soluțiile slabe ale problemei (6.1.$P$).

Pentru a demonstra existența punctelor critice a lui $\mathcal{E}$ utilizând metoda directă a calculului variațional este suficient să se arate coercivitatea și proprietatea slab secvențial inferior semicontinuă ale lui $\mathcal{E}$.

**Lema 6.1** ([Mezei și **Vas**, 2019]). *Dacă funcția $g$ îndeplinește condiția de creștere (6.3) cu $q \in (1, 2)$, atunci funcționala de energie $\mathcal{E}$ este coercivă și slab secvențial inferior semicontinuă.*

**Teorema 6.1** ([Mezei și **Vas**, 2019]). *Dacă funcția $g$ îndeplinește condiția de creștere (6.3) cu $q \in (1, 2)$, atunci funcționala de enegie $\mathcal{E}$ este coercivă și slab secvențial inferior semicontinuă, prin urmare $\mathcal{E}$ admite cel puțin un punct critic în $W_0^{1,2}(\Omega)$, care este o soluție a problemei (6.1.$P$).*

### 6.1.2 Un rezultat de existenţă prin alternativa lui Leray–Schauder

Pentru a demonstra existența soluțiilor ale problemei (6.1.$P$) utilizând tehnica lui Leray–Schauder, ne reducem problema la o problemă de punct fix cu un operator compact.

**Definiția 6.1.** *Dacă ecuația*

$$-\Delta_F u = N_g(u) \tag{6.5}$$

*este îndeplinită pentru niște $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, adică,*

$$\langle -\Delta_F u, v\rangle = \langle N_g(u), v\rangle = \int_\Omega g(x, u(x)) \cdot v(x)\, \mathrm{d}x, \ \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

*atunci $u$ este o soluție a problemei (6.1.$P$) în sensul lui $W^{-1,2}(\Omega)$.*

**Lema 6.2.** *Funcția $-\Delta_F : W_0^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ este o bijecţie și $(-\Delta_F)^{-1} : W^{-1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ este Lipschitzian.*

Deoarece operatorul $(-\Delta_F)^{-1}$ este mărginit și continuu, ecuaţia poate fi rescrisă în forma

$$u = (-\Delta_F)^{-1} \circ N_g(u),$$

unde $(-\Delta_F)^{-1} \circ N_g : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ este un operator compact.

**Teorema 6.2** (Alternativa lui Leray–Schauder, [Granas și Dugundji, 2003]). *Fie $T : X \to X$ un operator compact și considerăm mulțimea $\mathcal{S} = \{x \in X : x = \alpha T(x), \alpha \in [0, 1)\}$. Atunci, ori mulțimea $\mathcal{S}$ este mărginită, ori operatorul $T$ are cel puțin un punct fix.*

Bazată pe tehnica prezentată în [Dinca et al., 2001, Theorem 11], putem formula următorul rezultat de existență pentru soluțiile problemei (6.1.$P$).

**Teorema 6.3** ([Mezei și **Vas**, 2019]). *Dacă funcția Carathéodory $g$ îndeplinește condiția de creștere (6.3) cu $q \in (1, 2)$, atunci operatorul $(-\Delta_F)^{-1} \circ N_g$ admite cel puțin un punct fix în $W_0^{1,2}(\Omega)$, care este soluția problemei (6.1.$P$).*

## 6.2 Un rezultat de existență pentru problema (6.2.$P$) prin inegalitatea lui Harnack și teorema lui Krasnosel'skii

Această secțiune este dedicată studiului celei de-a doua probleme (6.2.$P$), cazul căreia existența soluțiilor va fi dovedită prin utilizarea combinată a inegalității lui Harnack și a teoremei de punct fix de tip Krasnosel'skii.

Luând $A(x,u,\nabla u) = \nabla_\xi \left(\frac{1}{2}F^2(\nabla u)\right)$ și $B(x,u,\nabla u) = 0$ în inegalitatea slabă a lui Harnack din [Pucci şi Serrin, 2007, Teorema 7.1.2], toate ipotezele sunt îndeplinite, deci avem inegalitățiile

$$\left\langle \nabla_\xi \left(\frac{1}{2}F^2(\xi)\right), \xi \right\rangle = F^2(\xi) \geq a\,|\xi|^2 \quad \text{și} \quad \left|\nabla_\xi \left(\frac{1}{2}F^2(\xi)\right)\right| \leq a_1\,|\xi|\,,$$

cu ajutorul cărora putem formula varianta relevantă a inegalității slabe a lui Harnack.

**Teorema 6.4** (Inegalitatea slabă a lui Harnack ). *Fixăm parametrul $p \in (1,n)$ și fie funcția $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ o soluție nenegativă a inegalității*

$$-\Delta_F u \geq 0. \tag{6.6}$$

*Atunci, pentru oricare bilă $B_{4R}$ în $\Omega$ și orice $s \in \left(0, \frac{(p-1)n}{n-p}\right)$, avem că*

$$R^{-\frac{n}{s}}\,\|u\|_{L^s(B_{2R})} \leq C \cdot \inf_{B_{2R}} u, \tag{6.7}$$

*ceea ce este echivalentă cu*

$$M_0\,\|u\|_{L^s(B_{2R})} \leq \inf_{B_{2R}} u, \tag{6.8}$$

*unde constanta $C$ depinde numai de parametrii $n, s$ și $M_0 := \dfrac{R^{-\frac{n}{s}}}{C}$.*

[Precup, 2012, Teorema 1.3] oferă o estimare foarte similară cu (6.7) pentru orice funcție supraarmonică nenegativă, care rămâne adevărată pe orice subdomeniu mărginit $\Omega_0$ cu $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ (adică, $\Omega_0 \Subset \Omega$), nu numai pe bile, ca în cazul [Pucci şi Serrin, 2007, Teorema 7.1.2]. Înlocuind în [Precup, 2012, Teorema 1.3] funcția supraarmonică cu o funcție $\Delta_F$-supraarmonică, putem afirma următoarea inegalitate de tip Moser–Harnack.

**Teorema 6.5.** *Fie ori $n \geq 3$ și $s \in \left(1, \frac{n}{n-2}\right)$, sau $n = 2$ și $s \in (1,\infty)$ numere fixate arbitrar și să considerăm domeniul $\Omega_0 \Subset \Omega$. Atunci, există o constantă $M = M(n,s,\Omega,\Omega_0) > 0$, astfel încât inegalitatea*

$$M\,\|u\|_{L^s(\Omega_0)} \leq \inf_{\Omega_0} u \tag{6.9}$$

*este îndeplinită pentru orice funcție nenegativă $\Delta_F$-supraarmonică $u \in \Omega$.*

În continuare, presupunem că $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$) este un domeniu regular și mărginită și considerăm o funcție continuă $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Folosind rezultatele lui [Precup, 2012], obiectivul nostru este să demonstrăm existența unor soluții pozitive și $\Delta_F$-supraarmonice ale problemei (6.2.$P$), adică, $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $u(x) > 0$ și $-\Delta_F u \geq 0$ pentru oricare $x \in \Omega$ și pentru fiecare $u$ care satisface (6.2.$P$).

Pentru a formula rezultatul principal de existență al acestei secțiuni, introducem câteva notații și niște rezultate preliminare relevante. Fie $X = C_0\left(\overline{\Omega}\right) = \{u \in C\left(\overline{\Omega}\right) : u = 0 \text{ pe } \partial\Omega\}$ înzestrat cu norma $|u| = |u|_\infty = \max_{\overline{\Omega}} |u(x)|$. Fixăm orice subdomeniu mărginit $\Omega_0 \Subset \Omega$ și considerăm spațiul $Y = L^p(\Omega_0)$ înzestrat cu norma $\|v\|_{L^p(\Omega_0)} = \left(\int_{\Omega_0} |v(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$, unde $p \in \left[1, \frac{n}{n-2}\right)$ dacă $n > 2$, iar $p \in [1,\infty)$ când $n = 2$.

Definim funcția liniară $\mathcal{I} : C_0\left(\overline{\Omega}\right) \to L^p(\Omega_0)$, $\mathcal{I}u = u|_{\Omega_0}$. Pentru orice funcție $u \in C_0\left(\overline{\Omega}\right)$, inegalitatea $\|u\|_{L^p(\Omega_0)} \leq |u|\,(\mathrm{meas}(\Omega_0))^{\frac{1}{p}}$ este îndeplinită, ceea ce implică $|\mathcal{I}| \leq (\mathrm{meas}(\Omega_0))^{\frac{1}{p}}$.

Datorită [Azizieh şi Clèment, 2002, Lema 1.1] și [Lieberman, 1988, Teorema 1], când $\Omega$ este un domeniu regular de clasă $C^{1,\beta}$ pentru niște $\beta \in (0,1)$ și $g \in L^\infty(\Omega)$, soluția slabă în $W^{1,2}_0(\Omega)$ a problemei Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_F u = g(u) & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.10}$$

aparține lui $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ și $(-\Delta_F)^{-1} : L^\infty(\Omega) \to C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ este continuu, compact și păstrează ordinul.

Folosind funcția $G : C\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}_+\right) \to C\left(\overline{\Omega}\right)$, $G(u)(x) = g(u(x))$, definim funcția $\mathcal{N} : C\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}_+\right) \to C_0\left(\overline{\Omega}\right)$,

$$\mathcal{N} = (-\Delta_F)^{-1} \circ G.$$

Deoarece funcția $g$ este nenegativă și $(-\Delta_F)^{-1}$ este pozitivă, funcția $\mathcal{N}$ transformă $C\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}_+\right)$ în $C\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}_+\right)$.

Introducem mulțimea

$$K := \{u \in C_0\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}_+\right) : u(x) \geq M \|u\|_{L^p(\Omega_0)}, \ \forall x \in \Omega_0\},$$

unde constanta $M > 0$ provine din inegalitatea lui Harnack (6.9).

Prin definiţia funcţiei $\mathcal{N}$, avem că $\mathcal{N}(u)$ este $\Delta_F$-supraarmonică, astfel, datorită Teoremei 6.5, funcţia $\mathcal{N}$ transformă $K$ în $K$, deci putem aplica următoarea variantă a teoremei de punct fix a lui Krasnosel'skii.

**Teorema 6.6** (Teorema lui Krasnosel'skii, [Precup, 2012, Teorema 2.1])**.** *Fie $\mathcal{N} : K \to K$ complet continuă, fie $\phi \in K$, $|\phi| = 1$ orice element fixat, fie $R_0$ și $R_1$ numere pozitive cu $R_0 < \|\phi\|_{L^p(\Omega_0)} R_1$ și fie $h \in K$ astfel încât $\|h\|_{L^p(\Omega_0)} > R_0$. Presupunem că condițiile*

$$\mathcal{N}u \neq \lambda u, \ \forall |u| = R_1, \ \forall \lambda \geq 1 \tag{6.11}$$

*și*

$$(1-\mu)\mathcal{N}\left(\min\left\{\frac{R_1}{|u|}, 1\right\} u\right) + \mu h \neq u, \ \forall \mu \in (0,1), \ \|u\|_{L^p(\Omega_0)} = R_0, \ \forall |u| \leq R_2 \tag{6.12}$$

*sunt îndeplinite, unde $R_2 = \max\left\{R_1, |h|, \max_{|u|\leq R_1} |\mathcal{N}u|\right\}$.*

*Atunci, funcția $\mathcal{N}$ admite un punct fix $u$ în $K_{R_0R_1} := \left\{u \in K : R_0 < \|u\|_{L^p(\Omega_0)}, |u| < R_1\right\}$.*

Folosind [Franzina, 2012, Teorema 3.2.1], putem lua $\phi$ ca funcție proprie pozitivă care corespunde primei valori proprii $\lambda_1$, adică

$$\begin{cases} \Delta_F \phi + \lambda_1 \phi = 0 & \text{în } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases}$$

cu $|\phi| = 1$.

Fie $\chi_{\Omega_0} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_+$ funcția caracteristică a lui $\Omega_0$, adică

$$\chi_{\Omega_0}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_0, \\ 0, & x \notin \Omega_0, \end{cases}$$

și considerăm mulțimea $C = |1|_{L^p(\Omega_0)} = (\text{meas}(\Omega_0))^{\frac{1}{p}}$. Inegalitatea

$$(-\Delta_F)^{-1} \chi_{\Omega_0} \geq M \left\|(-\Delta_F)^{-1} \chi_{\Omega_0}\right\|_{L^p(\Omega_0)} \quad \text{in } \Omega_0$$

implică

$$\left\|(-\Delta_F)^{-1} \chi_{\Omega_0}\right\|_{L^p(\Omega_0)} \geq MC \left\|(-\Delta_F)^{-1} \chi_{\Omega_0}\right\|_{L^p(\Omega_0)},$$

de unde rezultă că $MC \leq 1$.

Prin introducerea notațiilor $A := \dfrac{1}{MC\left\|(-\Delta_F)^{-1}\chi_{\Omega_0}\right\|_{L^p(\Omega_0)}}$ și $B := \dfrac{1}{\left|(-\Delta_F)^{-1} 1\right|}$, putem formula rezultatul principal de existență al secțiunii curente pentru problema (6.2.$P$).

**Teorema 6.7** ([Mezei şi **Vas**, 2019])**.** *Presupunem că $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcție continuă și există $R_0, R_1$ cu $R_0 \in \left(0, MC\|\phi\|_{L^p(\Omega_0)} R_1\right)$, astfel încât*

$$\min_{\tau \in [MR_0, R_1]} g(\tau) > A \cdot R_0 \tag{6.13}$$

*și*

$$\max_{\tau \in [0, R_1]} g(\tau) < B \cdot R_1. \tag{6.14}$$

*Atunci, problema (6.2.$P$) admite cel puțin o soluție îndeplinând inegalitățile $R_0 < \|u\|_{L^p(\Omega_0)}$ și $|u| < R_1$.*

# Bibliografie


Adams, R.A., Fournier, J., 2003. Sobolev Spaces. Second Edition, Academic Press. ISBN: 978-0-12-044143-3.

Ambrosetti, A., Malciodi, A., 2007. Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems. Cambridge University Press, Cambridge. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511618260.

Ambrosetti, A., Rabinowitz, P.H., 1973. Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal. **14**, 349–381. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7.

Aubin, J.P., Ekeland, I., 1984. Applied Nonlinear Analysis. John Wiley & Sons, Inc., New York. DOI: https://doi.org/10.1112/blms/17.5.487.

Azizieh, C., Clèment, P., 2002. A priori estimates and continuation methods for positive solutions of p-Laplace equations. J. Differ. Equations **179**, 213–245. DOI: https://doi.org/10.1006/jdeq.2001.4029.

Bartsch, T., Wang, Z.Q., 1995. Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$. Commun. Partial Differ. Equations **20**: 9–10, 1725–1741. DOI: https://doi.org/10.1080/03605309508821149.

Bhattacharya, T., 1999. A proof of the Faber–Krahn inequality for the first eigenvalue of the $p$-Laplacian. Ann. Mat. Pura Appl. **IV**: CLXXVII, 225–240. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02505910.

Bishop, E., Phelps, R.R., 1963. The support functionals of a convex set. Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc. **VII**, 27–35. DOI: https://doi.org/10.1142/9789814415514_0020.

Brezis, H., Nirenberg, L., 1991. Remarks on finding critical points. Commun. Pure Appl. Math. **44**: 8–9, 939–963. DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160440808.

Chabrowski, J., 1997. Variational Methods for Potential Operator Equations. Walter de Gruyter. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110809374.

Ciorănescu, I., 1990. Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems. Springer Netherlands, Kluwer Academic Publishers. ISBN: 978-0-7923-0910-9, DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-009-2121-4.

Clément, P., Garcia-Huidobro, M., Manasevich, R., Schmitt, K., 2000. Mountain pass type solutions for quasilinear elliptic equations. Calc. Var. Partial Differ. Equations **11**, 33–62. DOI: https://doi.org/10.1007/s005260050002.

Clément, P., de Pagter, B., Sweers, G., de Thélin, F., 2004. Existence of solutions to a semilinear elliptic system through orlicz-sobolev spaces. Mediterranean Journal of Mathematics **1**, 241–267. DOI: https://doi.org/10.1007/s00009-004-0014-6.

Dinca, G., Jebelean, P., Mawhin, J., 2001. Variational and topological methods for Dirichlet problems with $p$-Laplacian. Portugaliae Mathematica. Nova Série **58**, 339–378. URL: https://eudml.org/doc/49321.

Dinca, G., Matei, P., 2007. Variational and topological methods for operator equations involving duality mappings on orlicz-sobolev spaces. Electron. J. Differ. Equations **2007**, 1–47. Retrieved August 9, 2021 from http://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2007/93/dinca.pdf.

Drábek, P., Manásevich, R., 1999. On the closed solution to some nonhomogeneous eigenvalue problems with $p$-Laplacian. Differential Integral Equations **12**, 773–788. URL: https://projecteuclid.org/journalArticle/Download?urlId=die%2F1367241475.

Ekeland, I., 1972. Remarques sur les problemes variationnels. I, C. R. Acad. Sci., Note CRAS Paris I **275**, 1057–1059. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90025-0.

Ekeland, I., 1974. On the variational principle. J. Math. Anal. Appl. **47**, 324–353. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90025-0.

Farkas, Cs., Mezei, I.I., 2013. Group-invariant multiple solutions for quasilinear elliptic problems on strip-like domains. Nonlinear Anal. **79**, 238–246. DOI: https://doi.org/10.1016/j.na.2012.11.012.

Farkas, Cs., Varga, Cs., 2014. Multiple symmetric invariant non trivial solutions for a class of quasilinear elliptic variational systems. Appl. Math. Comput. **241**, 347–355. DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.05.013.

Filippucci, R., Pucci, P., Varga, Cs., 2015. Symmetry and multiple solutions for certain quasilinear elliptic equations. Adv. Differ. Equations **20**, 601–634. Retrieved August 9, 2021 from https://apps.webofknowledge.com/full_record.do?product=WOS&search_mode=GeneralSearch&qid=10&SID=D4BIZyZGXOy1JJ7iibv&page=1&doc=1.

Franzina, G., 2012. Existence, Uniqueness, Optimization and Stability for low Eigenvalues of some Nonlinear Operators, Ph.D. Thesis. Università Degli Studi di Trento, Dipartimento di Matematica. Retrieved August 9, 2021 from https://cvgmt.sns.it/paper/2102/.

Ghoussoub, N., Preiss, D., 1989. A general mountain pass principle for locating and classifying critical points. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **6**, 321–330. DOI: https://doi.org/10.1016/S0294-1449(16)30313-4.

Goldberger, H., Kampowskoy, W., Troltzsch, F., 1992. On Nemytskij operators in $L^p$-spaces of abstract functions. Math. Nachr. **155**, 127–140. DOI: https://doi.org/10.1002/mana.19921550110.

Granas, A., Dugundji, J., 2003. Fixed Point Theory. Springer-Verlag, New York. ISBN: 978-0-387-00173-9, DOI:https://doi.org/10.1007/978-0-387-21593-8.

Jabri, Y., 2003. The Mountain Pass Theorem. Variants, Generalizations and Some Applications. Cambridge University Press. ISBN: 9781107403338.

Kristály, A., Mezei, I.I., 2012. Multiple solutions for a perturbed system on strip-like domains. Discrete Contin. Dyn. Syst. - S **4**, 789–796. DOI: https://doi.org/10.3934/dcdss.2012.5.789.

Kristály, A., Rădulescu, V., Varga, Cs., 2010. Variational Principles in Mathematical Physics, Geometry, and Economics. Number 136 in Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, UK. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511760631.003.

Kristály, A., Varga, Cs., 2004. An Introduction To Critical Point Theory for Non-Smooth Functions. Casa Cărţii de Ştinţă, Cluj-Napoca. ISBN 973-686-604-1.

Lefton, L., Wei, D., 1997. Numerical approximation of the first eigenpair of the $p$-Laplacian using finite elements and the penalty method. Numer. Funct. Anal. Optim. **18**, 389–399. DOI: https://doi.org/10.1080/01630569708816767.

Lieberman, G.M., 1988. Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. **12**, 1203–1219. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(88)90053-3.

Lions, P.L., 1982. Symétrie et compacité dans les espaces Sobolev. J. Funct. Anal. **49**, 315–334. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(82)90072-6.

Lisei, H., **Vas**, O., 2016. Critical point result of Schechter type in a Banach space. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. No. 14, 1–16. DOI: https://doi.org/10.14232/ejqtde.2016.1.14.

Lisei, H., Varga, Cs., **Vas**, O., 2018. Localization method for the solutions of nonhomogeneous operator equations. Appl. Math. Comput. 329, 64–83. DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.01.031.

Mahwin, J., Willem, M., 1989. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, NY. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2061-7.

Mezei, I.I., Molnár, A.É., **Vas**, O., 2014. Multiple symmetric solutions for some hemivariational inequalities. Stud. Univ. Babeş–Bolyai Math. **59**, 369–384. Retrieved August 9, 2021 from http://193.0.225.37/download/pdf/877.pdf.

Mezei, I.I., **Vas**, O., 2019. Existence results for some Dirichlet problems involving Finsler–Laplacian operator. Acta Mathematica Hungarica 157 **1**, 39–53. DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-018-0894-8.

Motreanu, D., Panagiotopoulos, P.D., 1999. Minimax Theorems and Quaitative Properties of the Solutions of Hemivariational Inequalities. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4064-9.

Palais, R.S., 1979. The Principle of Symmetric Criticality. Commun. Math. Phys. **69**, 19–30. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01941322.

Palais, R.S., Smale, S., 1964. A generalized morse theory. Bull. Amer. Math. Soc. **70**, 165–172. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1964-11062-4.

Pick, L., Kufner, A., John, O., Fučík, S., 2013. Function spaces. Vol. 1. Walter de Gruyter & Co., Berlin. ISBN: 978-3-11-025042-8.

Precup, R., 2009. The Leray-Schauder condition in critical point theory. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. **71**, 3218–3228. DOI: https://doi.org/10.1016/j.na.2009.01.195.

Precup, R., 2012. Moser–Harnack inequality, Krasnosel'skii type fixed point theorems in cones and elliptic problems. Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Juliusz Schauder University Centre **40**, 301–313. URL: https://projecteuclid.org/accountAjax/Download?downloadType=journal%20article&urlId=tmna%2F1461259703&isResultClick=True.

Precup, R., 2013. On a bounded critical point theorem of schechter. Stud. Univ. Babeş–Bolyai Math. **58**, 87–95. Retrieved August 9, 2021 from http://www.cs.ubbcluj.ro/~studia-m/2013-1/10-Precup-final2.pdf.

Pucci, P., Serrin, J., 1984. Extensions of the mountain-pass theorem. J. Funct. Anal. **59**, 185–210. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(84)90072-7.

Pucci, P., Serrin, J., 1985. A mountain pass theorem. J. Differential Equations **60**, 142–149. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-0396(85)90125-1.

Pucci, P., Serrin, J., 2007. The Maximum Principle. Birkhäuser Basel. ISBN: 978-3-7643-8144-8, DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8145-5.

Rabinowitz, H.P., 1986. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. American Mathematical Society, Providence. ISBN: 978-0-8218-0715-6.

Schaftingen, J.V., 2005. Symmetrization and minimax principles. Commun. Contemp. Math. **7**, 463–481. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219199705001817.

Schechter, M., 1992. A bounded mountain pass lemma without the $(PS)$ condition and applications. Trans. Am. Math. Soc. **331**, 681–703. DOI: https://doi.org/10.2307/2154135.

Schechter, M., 1999. Linking Methods in Critical Point Theory. Birkhäuser, Basel. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1596-7.

Shapiro, V.L., 1980. $n$-functions and the weak comparison principle. J. Diff. Equations **36**, 257–269. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-0396(80)90066-2.

Squassina, M., 2011. Radial symmetry of minimax critical points for nonsmooth functional. Commun. Contemp. Math. **13**, 487–508. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219199711004361.

Squassina, M., 2012. Symmetry in variational principles and applications. J. London Math. Soc. **85**, 323–348. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/jdr046.

Struwe, M., 2008. Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Springer-Verlag, Berlin. ISBN: 978-3-540-74012-4, DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-74013-1.

Talenti, G., 1976. Best constant in Sobolev inequality. Ann. Mat. Pura Appl. **110**, 353–372. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02418013.

**Vas**, O., 2015. A Schechter-type critical point result for locally Lipschitz functions. Mathematica Tome 57 **80**, 117–125. Retrieved August 9, 2021 from http://math.ubbcluj.ro/~mathjour/articles/2015/vas.pdf.

Willem, M., 1996. Minimax Theorems. volume **24** of *Progress Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser, Basel. ISBN: 978-1-4612-4146-1, DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1.

Xia, C., 2012. On a class of anisotropic problems, Ph. D Thesis. Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Facultät für Mathematik und Physik. Retrieved August 9, 2021 from https://d-nb.info/1123470936/34.