Investeşte în oameni!

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007 – 2013

Axa prioritară: 1 „Educația şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societății bazate pe cunoaştere"

Domeniul major de intervenție: 1.5 „Programe doctorale şi postdoctorale în sprijinul cercetării"

Titlul proiectului: „Studii doctorale inovative într-o societate bazată pe cunoaştere"

Cod Contract: POSDRU/88/1.5/S/60185

Beneficiar: Universitatea Babeş - Bolyai

BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITY CLUJ-NAPOCA

FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

STUDIES ON THE EXPONENTIAL MAPPING AND GEOMETRIC MECHANICS

Ph.D. Thesis Summary

Professor DORIN ANDRICA, Ph.D.

Ph.D. Student:

RAMONA-ANDREEA ROHAN

CLUJ-NAPOCA

2012

Contents

Introduction

Lie group concept was first introduced by the Norwegian mathematician Sophus Lie in his "Theorie der Gruppen Transformations", published in 1881, which deals with the study of the transformation groups of the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. In the first phase the research was continued by his students Sophus Lie in the first or second generation. These include the F. Engel, W. Killing, L. Maurer, F. Schur, sounding name in Lie group theory. W. Killing succeeds in this first phase even a classification of simple Lie groups, indeed incomplete, omitting exceptional cases. Complete resolution does later in 1891, Élie Cartan in his famous doctoral thesis. Here he repeats many of the previous results, completing them and showing them rigorously. H. Weyl has the merit of having first introduced the notion of Lie algebra, which was an extremely important step in "streamlining" the whole theory of Lie groups. Exponential acts as an intermediary directly in this association, so is a very important tool in the study of Lie groups. It is natural to ask the question: who is the image of a Lie group exponenţialei?

Inventors groups and Lie algebras (from Sophus Lie) viewed these groups as symmetry groups of topological or geometric objects. Lie algebras are seen as associated infinitesimal symmetry transformations of Lie groups. For example, the rotation group $SO(n)$ is the group that preserves orientation isometric Euclidean space E^n. Lie algebra $so(n, \mathbb{R})$ containing square matrices of order n, antisymmetric, with real elements is the set corresponding infinitesimal rotations. Geometric connection between a Lie group and Lie algebra corresponding Lie algebra is that it can be regarded as the tangent space to the identity of the Lie group. There is an application defined on the tangent space of the Lie group with Lie algebra values, called exponential application. Lie algebra can be considered as the linearization of Lie group (with identity element). These concepts have a practical effect for group matrix case presented in this paper. Geometry and mechanics were "partners" close since the founding masters age (Kepler, Newton, Euler, Maupertuis, Lagrange, Poisson, KGJ Jacobi, Hamilton, Liouville) and then their followers (Noether, Lyapunov, GD Birkhoff, Poincaré, Cartan). In more recent times, the essential work of Arnold, Kirilov, Kostant, Moser, Smale, Sourian have reinforced this trend. Geometrically in mechanics has proven to be a phenomenal success in very different domains to bind both within and across borders mathematical disciplines.

This paper falls into this issue and it is structured in four chapters as follows:

Chapter 1, entitled *The exponential map and the classical Lie groups*, consists of five sections. This chapter is mainly monographic and introduces some of the fundamental concepts necessary to develop the next chapter. The first section, *The exponential map*, introduces its definition, that is well-defined, concrete examples and demonstrates some important properties. Application allows us to linearize exponential certain algebraic properties of matrices. The second section, *The classical matrices Lie groups*, Lie groups enter $GL(n,\mathbb{R})$ (general real linear group), $SL(n,\mathbb{R})$ (special linear group), $O(n)$ (orthogonal group), $SO(n)$ (the special orthogonal or rotation group), their corresponding algebras $gl(n,\mathbb{R})$, $sl(n,\mathbb{R})$, $u(n)$, $so(n)$ and associated exponential applications. The third section, *The special orthogonal group $SO(n)$ and the Lie algebra $so(n)$* shows that the application is well-defined associated exponential and surjective. If $n = 3$ we have an explicit formula for the application that is exponential formula Rodrigues (1840). The fourth section, *Hermitian matrices and other special complex matrices* introduces Lie groups $GL(n,\mathbb{C})$ (general linear group complex), $SL(n,\mathbb{C})$ (complex linear panel), $U(n)$ (group unit), $SU(n)$ (special unitary group), corresponding algebras $gl(n,\mathbb{C})$, $sl(n,\mathbb{C})$, $u(n)$, $SU(n)$, and very little applications are well-defined and surjective more application least $exp : sl(n,\mathbb{C}) \rightarrow SL(n,\mathbb{C})$ is not surjective. It also presents some results about matrices hermitiene. The last section of this chapter, *The special Euclidean group $SE(n)$ and the Lie algebra $se(n)$* studies the group $SE(n)$ of orthogonal transformations induced affine applications, also called rigid motions, and application corresponding Lie. In this case, the application exponential is surjective. The $SE(2)$and $SE(3)$ play groups a fundamental role in robotics, dynamics and motion planning.

Chapter 2, *Exponential Lie groups* are presented following two issues of particular importance: **Problem 1**. *Find conditions for Lie group G so that the application exponential is surjective* and **Problem 2**. *Determine the image of $E(G) = exp(g)$ application exponential.* J. Dixmier has considered for the first time the problem of determining the application image rezolubile exponential Lie groups that are simply connected. Only in some special cases we have G = E (G), and groups with this property are called exponential Lie groups. A monograph is devoted exponential Lie groups [76]. Compact and connected Lie groups are exponential. Section 2.2 introduces multiplicative and additive decompositions Jordan. They play an important role in investigating surjectivităţii exponential application. Section 2.3 presents notions of regularity. For Lie algebras there are two completely different notions of regularity, one related to representation and a deputy exponentially related to the application. Regular Lie group is considered to represent deputy. That both concepts of regularity of Lie algebras are related to regularity of application group data elements exponentially. In the fourth section, given that the issue of surjectivity application exponential Lie group pre-image leads to group elements, it is important to determine the pre-images ad-semisimple elements and Ad-unipotente. The fifth section presents examples of Lie groups $SL(2, \mathbb{R})$, $GL(2, \mathbb{C})$ and $SO(3)$. Section 2.6, *Weakly exponential Lie groups and strongly exponential Lie groups* introduces the notions of weak Lie group exponential, exponential and strongly exponential . The last section of this chapter, *The compact and connected Lie groups are exponential*, has two different demonstrations fundamental result gives a class of exponential groups The first demonstration is taken after T. Bröcker, T. tom Dieck [13] and D.

Andrica, I.N. Caşu [3]. The idea of the second demonstration is given by T. Tao [74] and it is described in R. -A. Rohan [67].

Thus **Chapter 3**, entitled The problem of determining the application exponential image starts with an issue of: What conditions must satisfy the polynomial f to be surjective function $\widetilde{f}$? Shown for $K = \mathbb{R}$ and f a polynomial of degree seem that the operator $\widetilde{f}$ is not surjective. When f is of odd degree, the problem is difficult and remains open to the general form. There were obtained examples of polynomials $f \in \mathbb{R}[X]$ of odd degree for which f is surjective. Results of this type belong to L. Mare which followed working methods of W.E. Roth's article.

Although if $K = \mathbb{R}$ problem that is very difficult to initially started, we have satisfactory results for $K = \mathbb{C}$. Starting from a set of general results of S. Radulescu and D. Andrica for when $\widetilde{f}$ is holomorphic in $\mathbb{C}$ obtain a characterization theorem of polynomials $f \in \mathbb{C}[x]$ with the property that f is surjective (i.e. equation $f(X) = A$ is the solution for any $A \in M_n(\mathbb{C})$. Finally will be presented several examples of polynomials $f \in \mathbb{C}[X]$ satisfying the conditions of the theorem, so for that f is surjective.We follow the presentation from D. Andrica, R.-A. Rohan [6] including important results on surjectivity, Hamiltion theorem, Cayley, Hermite-Lagrange interpolation theorem and examples. The second section , *The image of the exponential map for the $GL(n, \mathbb{R})$ group* will solve the problem of determining the application image real exponential general linear group. Further Lie groups $O_K(n)$ are presented in Section 3.3. The last section of this chapter, *Rodrigues-like formulas* introduces classical formulas for $SO(n)$, $n = 2$ and $n = 3$. Further, for the group $GL(n, \mathbb{R})$, the problem of determining a formula explicit application exponential $exp(X)$ is reduced to the problem of determining the coefficients of $a_0(X)$, $a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X)$. We call this general problem the *Rodrigues problem* and the coefficients $a_0(X)$, $a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X)$ the *Rodrigues coefficients* of application exponential relation matrix $X \in M_n(\mathbb{R})$. There are presented results from the article D. Andrica şi R.-A. Rohan [7] and furtheremore we will indicate a new method for determining the Rodrigues coefficients$a_0(X)$, $a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X)$ form the formula

(3.4.2). The main result cand be found in Theorem 3.4.4. Then, in the subsection 3.4.3, *The determination of the Rodrigues coeffcients using the Putzer method*, there is presented a new explicit formula for the problem (3.4.8). This is particularly useful if the matrix A can not be diagonalizată, where the Jordan canonical form of the matrix can not be determined. Comparing Putzer's method, the result from Theorem 3.4.4 is simpler when the eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ of the matrix X are pairwise distinct, because in that case you have to solve only linear system (3.4.5). Putzer's method is better if we multiplicity of the eigenvalues of the matrix X. The exponential map $\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ is defined by the formula 3.4.1, because is given by the restriction $\exp|_{\mathsf{so}(n)}$ of the exponential map $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$. We know that for every compact and connected Lie group the exponential map is surjective(see T.Bröcker, T.tom Dieck [13], D.Andrica, I.N.Caşu [3] for the standard proof or R.-A.Rohan [67] for a proof based on a new idea given by T.Tao), meaning that every compact and connected Lie group is exponential (see M.Wüstner [76]). Because the group $\mathbf{SO}(n)$ is compact we have that the exponential map $\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ is surjective. The surjectobity of the exponential map of the group $\mathbf{SO}(n)$ offers the possibility to describe the Euclidean space rotations $\mathbb{R}^n$(more details in [67]). In the subsection 3.4.5 we determine the Rodrigues coefficients and the Rodrigues formulas for the $\mathbf{SE}(n)$ group, when $n = 2$ and $n = 3$. The subsection 3.4.6 determines the Rodrigues coefficients for the $\mathbf{O}(2, 1)$ group. In D.Andrica, R.-A.Rohan [6] the Putzer's method was used. Furthermore, we will use the result obtained D.Andrica, R.-A.Rohan [7] contained in Thorem 3.4.4.

Chapter 4, *Results for the Geometric Mechanics,* makes the connection between geometry and mechanics. The section *The description of the* $\mathbf{SO}(n)$ *group using the*

Hamilton-Cayley form introduces the Cayley transformation for this group, Rodrigues fromulas for the Cayley transformation(Theorem 4.1.1) and the Cayley transformation $\mathbf{SE}(n)$, when $n = 2$ and $n = 3$. (Theorem 4.1.3). Furthermore, the formula (4.2.2) presents an explicit parametrization parametrizare for the group $\mathbf{SO}(3)$. The conclusion of the section 4.3, *The analitical form of $SO(n)$ group ele-*

ments, is that every rotation matrix can be expressed like in the formula 4.3.1. Rodrigues formulas for the Lorentz group $\mathbf{SO}(3,1)$ are presented in the section 4.4. The last section, *Motion of a charged particle in a constant electromagnetic field*, determines the movement of a particle with weight m which conduces an eletrical charge e in an electromagnetic constant field $\mathcal{F}$. In this direction we need to solve the Lorentz equations.

Key words: Lie group, Lie algebra, the exponential map of a Lie group, exponential Lie group, Rodrigues formula, Rodrigues coefficients, the general liniar group $GL(n,\mathbb{R})$, the special orthogonal group $\mathbf{SO}(n)$, the special Euclidean group $\mathbf{SE}(n)$, Euclidean izometry, the Hamilton-Cayley form, Cayley transformation, the Lorentz group $\mathbf{SO}(3,1)$.

Acknowledgment:

I would like to express my gratitude to my supervisor, Prof. Dr. Dorin Andrica from the Faculty of Mathematics and Computer Science, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca. He provided me an excellent and actual research topic in which he supervised me accurate and he carefully analyzed each of the obtained scientific results and also suggested useful improvements. He offered me his constant support and assistance in my doctoral studies. Also i would like to thank Prof. Univ. Dr. Oleg Mushkarov, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Science, Sofia, Bulgaria and Prof. Univ. Dr. Ivailo Mladenov from the Institute of Biophysiscs, Bulgarian Academy of Science, Sofia, Bulgaria for their support during my visit at the Institute of Mathematics and Informatics.

Special thanks to the adivising Ph.D. commission formed by Conf. Univ. Dr. Paul Aurel Blaga, Conf. Univ. Dr. Cornel-Sebastian Pintea and Lect. Univ. Dr. Liana Ţopan(Faculty of Mathematics and Computer Science, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca), to the public support commission of the Ph.D. thesis formed by Conf. Univ. Dr. Paul Aurel Blaga(Faculty of Mathematics and Computer Science, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca), Conf. Univ. Dr. Mircea Claudiu Crâşmăreanu(Faculty of Mathematics, "Al. I. Cuza" University, Iaşi) and Conf. Univ. Dr. Ioan Radu

Peter(Faculty of Automation and Computer Science, Technical University of Cluj Napoca, Cluj-Napoca) and to all the members from the chair of Geometry, Faculty of Mathematics and Computer Science, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca.

I am very gratefull for the financial support offered by the Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca and by the Institute of Ph.D Studies through the POSDRU/88/1.5/S/60185 Project.

Least, but not last i would like to express my thanks to my family for the unconditional love, understanding and encouragements.

Chapter 1

The exponential map and the classical Lie groups

1.1 The exponential map

Given an $n \times n$(real or complex) matrix $A = (a_{ij})$, we define the exponential map e^A of A, or $\exp A$, as the sum of series

$$e^A = I_n + \sum_{p \geq 1} \frac{A^p}{p!} = \sum_{p \geq 0} \frac{A^p}{p!},$$

letting $A^0 = I_n$. The problen is, why it is well-defined?

Lemma 1.1.1 *Let $A = (a_{ij})$ be a (real or complex) $n \times n$ matrix, and let*

$$\mu = \max \left\{ \left| a_{ij}^{(p)} \right| | 1 \leq i, j \leq n \right\}.$$

If $A^p = (a_{ij}^{(p)})$ then

$$\left| a_{ij}^{(p)} \right| \leq (n\mu)^p$$

for all $1 \leq i, j \leq n$. As a consequence, the n^2 series

$$\sum_{p \geq 0} \frac{a_{ij}^{(p)}}{p!}$$

converge absolutely, and the matrix

$$e^A = \sum_{p \geq 0} \frac{A^p}{p!}$$

is a well-defined matrix.

Lemma 1.1.2 *Let A şi U be (real or complex) matrices, and assume that U is invertible. Then*

$$e^{UAU^{-1}} = Ue^A U^{-1}.$$

Lemma 1.1.3 *Given any complex $n \times n$ matrix A, there is an invertible matrix P and an upper triangular matrix T such that*

$$A = PT^{-1}P.$$

Remark 1.1.4 If E is a Hermitian space, the proof of Lemma 1.1.3 can be easily adapted to provethat there is an orthonormal basis $(u_1, \ldots, u_n)$ with respect to which the matrix of f is upper triangular. In terms of matrices, this means that there is a unitary matrix U and an upper triangular matrix T such that $A = UTU^{-1}$. This is usually known as Schur's lemma. Using this result, we can immediately rederive the fact that if A is a Hermitian matrix, then there is a unitary matrix U and a real diagonal matrix D such that $A = UDU^*$.

Lemma 1.1.5 *Given any complex $n \times n$ matrix A, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ are the eigenvalues of A, then $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ are the eigenvalues of e^A. Furthermore, if u is an eigenvector of A for λ_i, then u is an eigenvector of e^A for e^{λ_i}.*

Lemma 1.1.6 *Given any two complex $n \times n$ matrices, A şi B, if $AB = BA$, then*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

1.2 Classical matrices Lie groups

The group $GL(n, \mathbb{R})$ is called *the general liniar real group* and its subgroup $SL(n, \mathbb{R})$ is called *the special liniar group*. The group $\mathbf{O}(n)$ of the orthogonal matrices is called the *orthogonal group*, and its subgroup $\mathbf{SO}(n)$ it is called the *special orthogonal group* (or the *rotations group*). The vector space of real $n \times n$ matrices with null trace is denoted by $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, and the vector space of real $n \times n$ skew symmetric matrices is denoted by $\mathfrak{so}(n)$.

Remark 1.2.1 The notation $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ and $\mathfrak{so}(n)$ is rather strange and deserves some explanation.The groups $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $\mathbf{O}(n)$ are $\mathbf{SO}(n)$ are more than just groups. They are also topological groups, which means that they are topological spaces (viewed as subspaces of $\mathbb{R}^{n^2}$) and that the multiplication and the inverse operations are continuous (in fact, smooth). Furthermore, they are smooth real manifolds. Such objects are called Lie groups. The real vector spaces $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ and $\mathfrak{so}(n)$ are what is called Lie algebras. However, we have not de ned the algebra structure on $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ şi $\mathfrak{so}(n)$ yet. The algebra structure is given by what is called the Lie bracket, which is defined as

$$[A, B] = AB - BA.$$

Lie algebras are associated with Lie groups. What is going on is that the Lie algebra of a Lie group is its tangent space at the identity, i.e., the space of all tangent vectors at the identity (in this case, I_n). In some sense, the Lie algebra achieves a "linearization" of the Lie group. The exponential map is a map from the Lie algebra to the Lie group, for example,

$$\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$$

and

$$\exp : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}).$$

The exponential map often allows a parametrization of the Lie group elements by simpler objects, the Lie algebra elements.

The properties of the exponential map play an important role in studying a Lie group. For example, it is clear that the map

$$\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}).$$

is well-de ned, but since every matrix of the form e^A has a positive determinant, exp is notsurjective. Similarly, since

$$\det\left(e^A\right) = e^{trA},$$

the map

$$\exp : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$$

is well-defined.

We showed in the Section 1.1 that this map is neither surjective. We will see in the Section 1.3 that the map

$$\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$$

is well-defined and surjective.

The map

$$\exp : \mathfrak{o}(n) \to \mathbf{O}(n)$$

is well-defined, but it is not surjective since there is a matrix from $\mathbf{O}(n)$ such that the value of the determinant is equat to -1.

1.3 The special orthogonal group $\mathbf{SO}(n)$ and the Lie algebra $\mathfrak{so}(n)$

Theorem 1.3.1 *The exponential map*

$$\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$$

is well-defined and surjective.

For the case when $n = 3$ (and A is a skew symmetric matrix) it is possible to work out an explicit formula for e^A. For any 3×3 real skew symmetric matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

letting $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ and

$$B = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix},$$

awe have the following result known as *Rodrigues's formula* (1840).

Lemma 1.3.2 *The exponential map* $\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathbf{SO}(3)$ *is given by*

$$e^A = (\cos\theta)\, I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} A + \frac{(1 - \cos\theta)}{\theta^2} B,$$

or

$$e^A = (\cos\theta)\, I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} A + \frac{(1 - \cos\theta)}{\theta^2} A^2,$$

if $\theta \neq 0$, *and* $e^{0_3} = I_3$.

Lemma 1.3.3 *For any symmetric matrix* B, *the matrix* e^B *is symmetric and positive defined. For any symmetric and positive defined matrix* A *there exist a unique symmetric matrix* B *suct that* $A = e^B$.

1.4 Hermitian matrices and other special complex matrices

The set of complex invertible $n \times n$ matrices forms a group under multiplication, denoted by $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. The subset of $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ consisting of those matrices having determinant $+1$ is a subgroup of $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, denoted by $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$. It is also easy to check that the set of complex $n \times n$ unitary matrices forms a group under multiplication, denoted by $\mathbf{U}(n)$. The subset of $\mathbf{U}(n)$ consisting of those matrices having determinant $+1$ is a subgroup of $\mathbf{U}(n)$, denoted by $\mathbf{SU}(n)$. We can also check that the set of complex $n \times n$ matrices with null trace forms a real vector space under addition, and similarly for the set of skew Hermitian matrices and the set of skew Hermitian matrices with null trace

Definition 1.4.1 The group $GL(n, \mathbb{C})$ is called the *special liniar complex group* and its subgroup $SL(n, \mathbb{C})$ is called *the special liniar complex group.* The group $\mathbf{U}(n)$ of unitary matrices is called the *unitary group* şi and its subgroup $\mathbf{SU}(n)$ it is called the *special unitary group.* The real vector space of complex $n \times n$ matrices with null trace is denoted by $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, the real vector space of skew Hermitian matrices is denoted by $\mathfrak{u}(n)$, and the real vector space $\mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ is denoted by $\mathfrak{su}(n)$.

Remark 1.4.2 (**1**)As in the real case, the groups $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{U}(n)$ and $\mathbf{SU}(n)$ are also topological groups (viewed as subspaces of $\mathbb{R}^{2n^2}$), and in fact, smooth real manifolds. Such objects are called (real) Lie groups. The real vector spaces $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{u}(n)$ and $\mathfrak{su}(n)$ are Lie algebras associated with $SL(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{U}(n)$ and $\mathbf{SU}(n)$. The algebra structure is given by the Lie bracket, which is defined as

$$[A, B] = AB - BA.$$

(**2**)It is also possible to de ne complex Lie groups, which means that they are topological groups and smooth complex manifolds. It turns out that $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ and $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ are complex manifolds, but not $\mathbf{U}(n)$ and $\mathbf{SU}(n)$.

Theorem 1.4.3 *The exponential maps*

$$\exp : \mathfrak{u}(n) \to \mathbf{U}(n) \text{ and } \exp : \mathfrak{su}(n) \to \mathbf{SU}(n)$$

are well-defined and surjective.

1.5 The special Euclidean group SE(n) and the Lie algebra $\mathfrak{se}(n)$

In the next section we study the group $SE(n)$ of a ne maps induced by orthogonal transformations, also called rigid motions, and its Lie algebra. We will show that the exponential map is surjective. The groups $SE(2)$ and $SE(3)$ play play a fundamental role in robotics, dynamics, and motion planning.

Definition 1.5.1 Definition 1.5.2 The set of afine maps ρ of $\mathbb{R}^n$, defined such that

$$\rho\left(X\right) = RX + U,$$

where R is a rotation matrix ($R \in \mathbf{SO}(n)$) and U is some vector in $\mathbb{R}^n$, is a group under composition called the group of direct afine isometries, or rigid motions, denoted by $SE(n)$.

Every rigid motion can be represented by the $(n+1) \times (n+1)$ matrix

$$\begin{pmatrix} R & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

in the sense that

$$\begin{pmatrix} \rho\left(X\right) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

if and only if

$$\rho\left(X\right) = RX + U.$$

Definition 1.5.3 The vector space of real$(n+1) \times (n+1)$ matrices of the form

$$A = \begin{pmatrix} \Omega & U \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where Ω is a skwe symmetric matrix and U is a vector $\mathbb{R}^n$, denoted by $\mathfrak{se}(n)$.

Remark 1.5.4 The group $SE(n)$ is a Lie group, and its Lie algebra is denoted by $\mathfrak{se}(n)$.

Lemma 1.5.5 *Given any $(n+1) \times (n+1)$ matrix of the form*

$$A = \begin{pmatrix} \Omega & U \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where Ω is a skwe symmetric matrix and U is a vector $\mathbb{R}^n$, we have

$$A^k = \begin{pmatrix} \Omega^k & \Omega^{k-1}U \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where $\Omega^0 = I_n$. As a consequence we obtain

$$e^A = \begin{pmatrix} e^\Omega & VU \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

where

$$V = I_n + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k+1)!}\Omega^k.$$

Theorem 1.5.6 *The exponential map*

$$\exp\colon \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$$

is well-defined and surjective.

When $n = 3$, given a skew symmetrice matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

letting $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, it is easy to show that if $\theta = 0$, then we have

$$e^A = \begin{pmatrix} I_3 & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

and if $\theta \neq 0$ (using the fact that $\Omega^3 = -\theta^2\Omega$), then we obtain

$$e^\Omega = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta}\Omega + \frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2}\Omega^2$$

and

$$V = I_3 + \frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2}\Omega + \frac{(\theta - \sin\theta)}{\theta^3}\Omega^2.$$

Chapter 2

Exponential Lie groups

2.1 The exponential map for a Lie group

Let G be a Lie group with its Lie algebra $\mathfrak{g}$. It is well known that the exponential map $\exp : \mathfrak{g} \to G$ is defined by $\exp(X) = \gamma_X(1)$, where $X \in \mathfrak{g}$ and γ_X is the one-parameter subgroup of G induced by X. Recall the following properties of the exponential map:

1) For any $t \in \mathbb{R}$ and for any $X \in \mathfrak{g}$ we have $\gamma_X(t) = \exp(tX)$;

2) For any $s, t \in \mathbb{R}$ and for any $X \in \mathfrak{g}$, we have $\exp(sX)\exp(tX) = \exp(s+t)X$;

3) For any $t \in \mathbb{R}$ and for any $X \in \mathfrak{g}$, we have $\exp(-tX) = (\exp tX)^{-1}$;

4) $\exp : \mathfrak{g} \to G$ is a smooth mapping, it is a local diffeomorphism at $0 \in L(G)$ and $\exp(0) = e$, where e is the unity element of the group G;

5) The image $\exp(\mathfrak{g})$ of the exponential map generates the connected component G_e of the unity $e \in G$;

6) If $f : G_1 \to G_2$ if a morphism of Lie groups and $f_* : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ is the induced morphism of Lie algebras by f, then $f \circ \exp_1 = \exp_2 \circ f_*$.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{f_*} & \mathfrak{g}_2 \\ \exp_1 \downarrow & & \downarrow \exp_2 \\ G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 \end{array}$$

As we can note from the previous property 5, the following problems are of special importance:

Problem 1. *Find conditions on the group G such that the exponential map is surjective.*

Problem 2. *Determine the image $E(G)$ of the exponential map.*

J. Dixmier has proposed first time the Problem 2 for resoluble Lie groups. Concerning Problem 1, only in few special situations we have $G = E(G)$, i.e. the surjectivity of the exponential map. A Lie group satisfying this property is called *exponential*.

2.2 Jordan decompositions

În aceast paragraf se vor introduce descompunerile Jordan multiplicative si aditive. Acestea joacă un rol important în investigarea surjectivităţii aplicaţiei exponenţiale.

Definition 2.2.1 Fie $\mathbb{k}$ un corp de caracteristică 0 şi V un $\mathbb{k}-$spaţiu vectorial finit dimensonial. Un element $s \in End(V)$ se numeşte *semisimplu* dacă pentru orice subspaţiu $s-$invariant $W \subseteq V$ există un subspaţiu $s-$invariant $U \subseteq V$ astfel încât $V = W \oplus U$. Un element $n \in End(V)$ se numeşte *nilpotent* dacă există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $n^m = 0$. Un element $u \in \mathbf{GL}(V)$ se numeşte *unipotent* dacă elementul $u - 1$ este nilpotent.

Theorem 2.2.2 (i) *Fie $\mathbb{k}$ un corp de caracteristică 0 şi V un $\mathbb{k}-$spaţiu vectorial finit dimensonial. Pentru fiecare element $x \in End(V)$, există $x_s \in End(V)$ semisimplu şi $x_n \in \mathbf{GL}(V)$ nilpotent care satisfac relaţia $x_s x_n = x_n x_s$ şi avem $x = x_s + x_n$. Această descompunere este unică.*

(ii) *Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional cu elemente reale sau complexe. Pentru orice element $g \in \mathbf{GL}(V)$ există $g_s \in \mathbf{GL}(V)$ semisimplu şi $g_u \in \mathbf{GL}(V)$ nilpotent astfel încât $g = g_s g_u = g_u g_s$. Această descompunere este unică.*

Aceste descompuneri se numesc descompunerile *Jordan aditive,* respectiv *multiplicative.* În teoria grupurilor Lie este uzual să se scrie $\mathbf{GL}(V)$ în loc de $End(V)$, dacă în plus înzestrăm grupul $End(V)$ cu paranteza Lie $[x, y] := xy - yx$.

Definition 2.2.3 Pentru grupurile Lie abstracte, un element $g \in G$ se numeşte *Ad-semisimplu* dacă subgrupul $Ad(g)$ este semisimplu în $\mathbf{GL}(\mathfrak{g})$. Se numeşte *Ad-unipotent* dacă subgrupul $Ad(g)$ este unipotent în $\mathbf{GL}(\mathfrak{g})$. Similar, într-o algebră Lie $\mathfrak{g}$ abstractă finit dimensională, un element $x \in G$ se numeşte *ad-semisimplu* dacă $ad(x)$ este semisimplu în $\mathfrak{gl}(V)$. Elementul $x \in G$ se numeşte *ad-nilpotent* dacă $ad(x)$ este nilpotent.

Lemma 2.2.4 *Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional peste $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Dacă elementul $x \in \mathbf{GL}(V)$ este semisimplu, atunci $\exp x$ este semisimplu în $\mathbf{GL}(V)$. Dacă elementul $x \in \mathbf{GL}(V)$ este nilpotent, atunci $\exp x$ este unipotent în $\mathbf{GL}(V)$. Mai mult dacă elementul $y \in \mathbf{GL}(V)$, având descompunerea Jordan aditivă $y = y_s + y_n$, $[y_s, y_n] = 0$, atunci $\exp y_s$ este semisimplu şi $\exp y_n$ este partea unipotentă a descompunerii Jordan multuplicative a lui $\exp y$.*

2.3 Regular elements

În ceea ce urmează vor fi prezentate noţiuni legate de regularitate. Pentru algebre Lie există două noţiuni legate de regularitate total diferite; una legată de reprezentarea adjunctă şi una legată de aplicaţia exponenţială. Pentru grupuri Lie regularitatea este considerată faţă de reprezentarea adjunctă. Rezultă că ambele concepte de regularitate ale algebrelor Lie sunt legate de regularitatea grupurilor de elemente date de aplicaţia exponenţială.

Definition 2.3.1 Fie $\mathfrak{g}$ o algebră Lie finit dimensională cu elemente reale sau complexe.

(i) Un element x al algebrei Lie $\mathfrak{g}$ se numeşte *regular* dacă nil-spaţiul

$$\mathfrak{g}^0 := \{y \in \mathfrak{g} : (\exists n \in \mathbb{N}) \text{ cu } ad(x)^n y = 0\}$$

are dimensiune minimă.

Mulţimea tuturor elementelor regulare ale algebrei $\mathfrak{g}$ se notează cu $reg(\mathfrak{g})$.

(ii) Fie G un grup Lie. Un element x al unei algebre Lie $\mathfrak{g}$ se numeşte *exp-regular* dacă aplicaţia exponenţială este regulară în x. În caz contrar elementul se numeşte *exp-singular.* Mulţimea tuturor elementelor exp-regulare se notează cu *reg exp* şi mulţimea tuturor elementelor exp-singulare se notează cu *sing exp.*

(iii) Un element g al unui grup Lie G se numeşte *regular* dacă unispaţiul

$$\mathfrak{g}^1 := \{y \in \mathfrak{g} : (\exists n \in \mathbb{N})\, (Ad(g) - id)^n y = 0\}$$

are dimensiune minimă.

Mulţimea tuturor elementelor regulare se notează cu $\operatorname{Re} g(G)$.

Lema 5 din [34] redă următorul rezultat:

Lemma 2.3.2 *Dacă G este un grup Lie şi $x, y \in \mathfrak{g}$ cu $\exp x = \exp y$, unde x este un element exp-regular, atunci avem $[x, y] = 0$ şi $\exp(x - y) = 1$.*

2.4 Pre-images of Ad-unipotent and Ad-semisimple elements

Având în vedere că problema referitoare la surjectivitatea aplicaţiei exponenţiale a unui grup Lie conduce la pre-imaginea elementelor grupului, este important de determinat pre-imaginile elementelor Ad-semisimple si Ad-unipotente.

În cele ce urmează V defineşte un spaţiu vectorial finit dimensional cu elemente reale sau complexe.

Fie grupul Lie liniar $\mathbf{GL}(V)$ şi algebra Lie corespunzătoare $\mathbf{GL}(V)$. Pentru un element $p \in \mathbb{N}$, se definesc mulţimile $n_p = \{x \in \mathbf{GL}(V) : x^p = 0\}$ şi $N_p = \{g \in \mathbf{GL}(V) : g = 1 + x, x \in n_p\}$. Atunci aplicaţia $\exp|_{n_p} : n_p \to N_p$ este bijectivă, iar inversa ei

$$\log : g \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} (g-1)^k.$$

Ca şi o consecinţă se obţine rezultatul următor:

Lemma 2.4.1 *Fie* $G \subseteq \mathbf{GL}(V)$ *un subgrup analitic şi se presupune că pentru elementele nilpotente* $x, y \in g$ *are loc relaţia* $\exp x = \exp y$*. Atunci* $x = y$*. Ca şi caz particular,* 0 *este singurul element nilpotent al algebrei* $\mathfrak{g}$ *faţă de* $\exp^{-1}(1)$*.*

Fie G un grup Lie cu elemente reale sau complexe. Se notează cu S mulţimea tuturor elementelor semisimple ale grupului G şi cu $\mathfrak{s}$ mulţimea tututor elementelor semisimple ale algebrei $\mathfrak{g}$.

Lemma 2.4.2 *Fie* $G \subseteq \mathbf{GL}(V)$ *un grup analitic. Atunci* $\exp^{-1}(S) = s$*.*

Se notează cu S^{Ad} mulţimea tuturor elementelor Ad-semisimple ale grupului G şi cu $\mathfrak{s}^{ad}$ mulţimea tuturor elementelor ad-semisimple ale algebrei $\mathfrak{g}$. Astfel se obţine:

Corollary 2.4.3 *Fie* G *un grup Lie conex cu elemente reale. Atunci* $s^{ad} = \exp^{-1}(S^{Ad})$*.*

Mai multe informaţii pot fi găsite în [77].

2.5 Examples

Mai jos sunt prezentate exemple care ilustrează unele aspecte apărute în studiul surjectivităţii aplicaţiei exponenţiale.

Se consideră grupul liniar Lie $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ şi algebra Lie corespunzătoare $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (mai multe detalii despre acest grup se găsesc în paragraful 1.2).

Pentru grupul $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ avem o altă situaţie. Orice element g al grupului $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ este conjugat cu matricea

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ sau cu matricea } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ unde } \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Se poate observa că ambele elemente sunt imagini exponenţiale ale elementelor algebrei $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Următorul grup considerat ca si exemplu este grupul special liniar $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$. Fie un pătrat definit de baza canonică de vectori a lui $\mathbb{R}^2$. Dacă se doreşte transformarea pătratului într-un dreptunghi definit de vectorii de componente $(-2, 0)$ şi $(0, -\frac{1}{2})$, acest lucru poate fi făcut cu ajutorul unei transformări a grupului $SL(2, \mathbb{R})$.

2.6 Weakly exponential Lie groups and strongly exponential Lie groups

Definition 2.6.1 Un grup Lie G cu elemente reale sau complexe se numeşte *slab exponenţial* dacă imaginea exponenţială este densă în grupul G. Se numeşte *exponenţial* dacă aplicaţia exponenţială este surjectivă şi se numeşte *tare exponenţial* dacă aplicaţia exponenţială este un difeormorfism.

Dacă G este un grup Lie atunci *unu-componenta*, adică componenta conexă a unităţii, este un subgrup normal al lui G şi se notează cu G_0. Subgrupul comutator al lui G se notează cu G'. Se consideră că un grup Lie conect este *simplu(semisimplu)* dacă algebra Lie corespunzătoare este *simplă(semisimplă)*. Dacă $\mathfrak{g}$ este o algebră Lie finit dimensională şi $\mathfrak{r}$ este o subalgebră atunci $\mathfrak{r}$ se numeşte *reductivă* dacă $\mathfrak{g}$ este un $\mathfrak{r}$-modul semisimplu faţă de ad. Similar, un subgrup R al unui grup Lie G se numeşte *reductiv* în G dacă $\mathfrak{g}$ este un R-modul semisimplu faţă de Ad.

O subalgebră $\mathfrak{p}$ a unei algebre Lie reale $\mathfrak{g}$ se numeşte compact înzestrată dacă $\overline{e^{ad\mathfrak{p}}}$ este compactă în $Aut(\mathfrak{g})$. Dacă un element x este conţinut într-o subalgebră compact înzestrată atunci se numeşte compact. O subalgebră compact înzestrată maximală este o algebră compact înzestrată care este maximală cu această proprietate. Două subalgebre compact înzestrate maximale sunt conjugate. Mulţimea tuturor elementelor compacte ale lui $\mathfrak{g}$ este reuniunea tuturor subalgebrelor compact înzestrate maximale şi se notează cu $comp\mathfrak{g}$. Un subgrup K al unui grup Lie G real se numeşte *compact înzestrat* dacă $\overline{Ad(K)}$ este compact în $Aut(\mathfrak{g})$. În orice grup Lie conex există subgrupuri compact înzestrate maximale şi care sunt conexe. Evident, sugrupurile compact înzestrate au algebre Lie compact înzestrate. Deoarece subalgebrele compact înzestrate sunt şi algebre Lie compacte, adică există un grup Lie compact a cărui algebră Lie este izomorfă la acea algebră Lie, atunci aplicaţia exponenţială a unui grup Lie compact înzestrat conex este surjectivă. Aşadar, subgrupurile compact înzestrate maximale sunt de asemenea conjugate.

Fie $\mathfrak{g}$ o algebră Lie şi S o submulţime a lui $\mathfrak{g}$. Mulţimea

$$\zeta_{\mathfrak{g}}(S) := \{y \in G : [y, S] = 0\}$$

se numeşte *centralizatorul* lui S.

Dacă S este, în plus, o subalgebră, atunci

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(S) := \{y \in \mathfrak{g} : [y, S] \subseteq S\}$$

se numeşte *normalizatorul* lui S.

Atât $\zeta_{\mathfrak{g}}(S)$ cât şi $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(S)$ sunt subalgebre ale lui $\mathfrak{g}$.

Centralizatorul $\zeta_{\mathfrak{g}}(S)$ se numeşte *centrul* lui $\mathfrak{g}$ şi se notează cu $\zeta(\mathfrak{g})$ sau pe scurt ζ.

Fie un grup Lie G (nu neapărat conex) şi $\mathfrak{g}$ algebra Lie corespunzătoare. Fie S o submulţime a lui $\mathfrak{g}$.

Mulţimea

$$Z_G(S) := \{g \in G : (\forall x \in G) Ad(g)(s) = x\}$$

se numeşte *centralizatorul* lui S în G.

Dacă în plus S este o subalgebră a lui $\mathfrak{g}$, atunci

$$N_G(S) := \{g \in G : Ad(g).S \subseteq S\}$$

se numeşte *normalizatorul* lui S în G.

Dacă U este o submulţime a lui G, atunci se poate considera centralizatorul

$$Z_G(U) := \{g \in G : (\forall u \in U) gu = ug\}.$$

Centralizatorul $Z_G(U)$ se numeşte *centrul* lui G şi se notează cu $Z(G)$ sau mai simplu Z.

Dacă U este un subgrup, atunci

$$N_G(U) := \left\{g \in G : gUg^{-1} = U\right\}$$

notează ca de obicei *normalizatorul* lui U.

Are loc următorul rezultat:

Lemma 2.6.2 *Fie G un grup Lie real, $\mathfrak{g}$ algebra Lie corespunzătoare şi S o submulţime a lui $\mathfrak{g}$. Atunci algebra Lie $L(Z_G(S))$ a lui $Z_G(S)$ coincide cu $L(Z_G(S)_0) = \zeta_{\mathfrak{g}}(S)$. Dacă, în plus, S este o subalgebră, atunci $L(N_G(S))$ este egală cu $L(N_G(S)_0) = n_{\mathfrak{g}}(S)$. Mai mult, are loc relaţia $L(Z) = L(Z_0) = \zeta$.*

2.7 The exponential map of quotient groups

Grupurile factor ale grupurilor exponenţiale (respectiv slab exponenţiale) sunt exponenţiale (respectiv slab exponenţiale). În schimb, dacă grupul cât G/Z_0 este exponenţial atunci un calcul scurt arată că şi grupul G este exponenţial. Pentru a demonstra că grupul G este exponenţial se presupune că centrul lui G este discret.

Lemma 2.7.1 *Fie G un grup Lie conex şi N un subgrup analitic normal. Atunci are loc incluziunea* $\exp(x + n) \subseteq \exp x \cdot N$, *oricare ar fi $x \in \mathfrak{g}$.*

Pentru demonstraţie este folositor următorul rezultat:

Lemma 2.7.2 *Dacă G este un grup Lie, $\mathfrak{g}$ algebra Lie corespunzătoare, N un subgrup analitic normal, şi dacă elementele $a, b \in \mathfrak{g}$ satisfac $[a, b] \in n$, atunci are loc* $\exp(a + b) \in \exp a \exp b \cdot N$.

Lemma 2.7.3 *Fie G un grup Lie real conex, N un subgrup normal analitic care conţine grupul G', $B \supseteq N$ un subgrup analitic al lui G şi ω un spaţiu vectorial complementar al lui n în b. Atunci $B = \exp\,\omega \cdot N$.*

2.8 The compact and connected Lie groups are exponential

Theorem 2.8.1 *Any compact and connected Lie group is exponential.*

When $n = 2$, a skew-symmetric matrix $B \in \mathfrak{so}(2)$ can be written as $B = \theta J$, where

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

and from the Hamilton-Cayley relation $J^2 = -I_2$ and the series expansion of $\sin\theta$ and $\cos\theta$ it is easy to show that:

$$e^B = e^{\theta J} = (\cos\theta) I_2 + (\sin\theta) J = (\cos\theta) I_2 + \frac{\sin\theta}{\theta} B. \tag{2.8.1}$$

When $n = 3$, a real skew-symmetric matrix $B \in \mathfrak{so}(3)$ is of the form:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

and letting $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{2}||B||$ with $||B||$ the Frobenius norm of matrices, we have the well-known formula due to Rodrigues (see the subsection 3.4.4):

$$e^B = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} B + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} B^2 \tag{2.8.2}$$

with $e^B = I_3$ when $B = 0$.

2.8.1 The Euclidean isometries

Consider the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ with the well-known Euclidean norm $\|\cdot\|$. An *isometry* of $\mathbb{R}^n$ is a map $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, preserving the distances, that is for every $x, y \in \mathbb{R}^n$ the following relation holds

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|. \tag{2.8.3}$$

According to the Ulam theorem, every isometry of $\mathbb{R}^n$ with $f(0) = 0$, is a linear map of the form $f(x) = Rx$, with $R \in O(n)$, the orthogonal group. If $\det R = 1$, that is $R \in SO(n)$, then the isometry f *preserves the orientation*. Otherwise, we say that f *reverses the orientation*. The problem to describe geometrically the Euclidean isometries is reduced in this way to the interpretation of the matrices in $O(n)$ or $SO(n)$.

Using the surjectivity of the exponential map, $\exp : \mathfrak{so}(n) \rightarrow SO(n)$, we can describe the isometries of $\mathbb{R}^n$ preserving the orientation.

When $n = 2$, from the previous alternative proof from the section 2.6, we have $R \in \mathbf{SO}(2)$ if and only if R is a rotation matrix, i.e.

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

where the rotation angle θ is defined by the equation $2\cos\theta = tr(R)$.

When $n = 3$, then $R \in \mathbf{SO}(3)$ if and only if (see the subsection 3.4.4)

$$R = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta}B + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}B^2, \tag{2.8.4}$$

where the angle θ is defined by the equation $1 + 2\cos\theta = tr(R)$, that is $\theta = \arccos\frac{tr(R)-1}{2}$, if $\theta \neq 0$. Hence, when $\theta \neq \pi$, B is the skew-symmetric matrix uniquely defined by the equation

$$B = \frac{\theta}{2\sin\theta}(R - R^{\top}).$$

If $\theta = 0$, then $R = I_3$, and the isometry f is the identity map of $\mathbb{R}^3$. If $\theta = \pi$, then we can find the matrix B_1 as in the discussion in the previous section.

Assuming that

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

then formula 2.8.4 expresses a rotation in $\mathbb{R}^3$ of axis defined by the vector $\overrightarrow{v}(a, b, c)$ and angle θ.

If the isometry of $\mathbb{R}^3$ reverses the orientation, then $\det R = -1$. Because $\det(-R) = (-1)^3 \det R = (-1)(-1) = 1$, it follows that the isometry g of $\mathbb{R}^3$, defined by $g(x) = (-R)x$, preserves the orientation. In this case we obtain the representation formula

$$R = -I_3 - \frac{\sin\theta}{\theta}B - \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}B^2,$$

with the same geometric interpretation. In this way all isometries of the space $\mathbb{R}^3$ are completely described.

Remark 2.8.2 In the paper [25] the following description of the matrices $R \in SO(n)$ for $n \geq 4$ is given : If $\{e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_p}, e^{-i\theta_p}\}$ is the set of distinct eigenvalues of R different from 1, where $2p \leq n$ and $0 < \theta_i \leq \pi$, then there are p skew-symmetric matrices $B_1, \cdots, B_p$ such that $B_iB_j = B_jB_i = O_n, i \neq j$, $B_i^3 = -B_i$, for all i, j with $1 \leq i, j \leq p$, and

$$R = I_n + \sum_{i=1}^{n} [(\sin\theta_i)B_i + (1 - \cos\theta_i)B_i^2].$$

This result gives an implicit description of the Euclidean isometries of the space $\mathbb{R}^n$ when $n \geq 4$, in terms of $2p$ parameters $\theta_1, \cdots, \theta_p, B_1, \cdots, B_p$.

Chapter 3

The problem of determining the image of the exponential map

3.1 Results on the surjectivity of certain matrices maps

Let $M_n(K)$ be the algebra of the square matrices with entrees in the commutative field K ($K = \mathbb{R}$ or $K = \mathbb{C}$). Consider the convergent power series with coefficients in K, $\sum_{m\geq 0} a_m z^m$, $z \in K$. Let

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m, z \in K.$$

For $n \geq 2$ and for $X \in M_n(K)$ we know that the series $\sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m$ is also convergent and we denote its sum by $\widetilde{f}(X)$.

The following problem is important.

Problem 1. *What are the conditions on function f such that the operator $\widetilde{f}$ is surjective ?*

If f is a holomorphic function in $\mathbb{C}$ and let the set

$$M = \{z \in \mathbb{C} : f'(z) = 0\}$$

For a matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ we consider $\sigma(A)$ *the spectrum of matrix A.*

Theorem 3.1.1 *If* $\sigma(A) \subset f(\mathbb{C}\backslash M)$ *then* $A \in \operatorname{Im} \widetilde{f}$.

Lemma 3.1.2 *Let* f, g *be two holomorphic functions in* $\mathbb{C}$ *cu* $f^{-1}(0) \subseteq g^{-1}(0)$. *If* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *has the property that* $\sigma\left(\widetilde{f}(A)\right) = \{0\}$ *then* $\widetilde{g}^n(A) = O_n$.

Lemma 3.1.3 *If* $f \in \mathbb{C}[X]$, $gradf = n \geq 2$, *then we have:*

1) $f^{-1}(y) \subseteq M \Longleftrightarrow y \in \mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C}\backslash M)$

2) $f^{-1}(y_1) \subseteq M$, $f^{-1}(y_2) \subseteq M \Rightarrow y_1 = y_2$

3) $f(\mathbb{C}\backslash M) = \mathbb{C} \Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{C}$ *the equation* $f(x) = y$ *has at least one simple root*

4) $f(\mathbb{C}\backslash M) = \mathbb{C}\backslash\{z\} \Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{C}$ *the equation* $f(x) = y$ *has mutiplicative roots.*

Theorem 3.1.4 *Let* $f \in \mathbb{C}[X]$ *of degree* ≥ 2. *The following statements are equivalent:*

Theorem 1 **1**) *for any* $y \in \mathbb{C}$ *the equation* $f(x) = y$ *has at least one simple root;*

2) *the map* $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ *is surjective.*

Example 3.1.5 The map $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, $\widetilde{f}(X) = X^m$, is not surjective, where $m \geq 2$. Indeed, the equation $x^m = 0$ has 0 as a multiple root of order m, do the resulted property from Theorem 3.1.4.

Example 3.1.6 Let $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f \geq 2$, $a \in \mathbb{C}$,

$$f'(x) = a(x - x_1')^{\alpha_1} \dots (x - x_r')^{\alpha_r}, \alpha_j \geq 1, j = 1, \dots, r$$

and $x_1', \dots, x_r'$ distinct. If $\alpha_j \geq r - 1$, $\forall j \in \{1, \dots, r\}$, then for every $y \in \mathbb{C}$ the equation $f(x) = y$ has at least one simple root.

In this case the condition from Theorem 3.1.8 it is easy to verify.

Example 3.1.7 Let $f \in \mathbb{C}[X]$,

$$f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$$

and

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3,$$

has the property from Theorem 3.1.8. Indeed, we have

$$f'(x) = 3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$$

and $\Delta \neq 0$. Then f' has only simple roots, meaning $f - y$ has at least one simple root, $\forall y \in \mathbb{C}$.

Theorem 3.1.8 *Let $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f = n \geq 2$. Dacă $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$,*

$$f'(x) = a(x - x_1')^{\alpha_1} \dots (x - x_r')^{\alpha_r}, \alpha_j \geq 1, j = 1, \dots, r$$

şi pentru orice submulţime L a lui $\{1, \dots, r\}$ avem

$$\sum_{j \in L} (1 + \alpha_j) \neq r - 1,$$

atunci pentru orice $y \in \mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = y$ are cel puţin o rădăcină simplă în $\mathbb{C}$.

Example 3.1.9 Fie $f \in \mathbb{C}[X]$,

$$f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$$

şi

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3,$$

are proprietatea din *Teorema* 3.1.8. Într-adevăr, dacă ţinem seama de relaţiile lui Viète, avem

$$f'(x) = 3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$$

şi $\Delta \neq 0$, conform ipotezei făcute iniţial. Atunci f' are rădăcinile simple, adică $f - y$ are cel puţin o rădăcină simplă, $\forall y \in \mathbb{C}$.

Remark 3.1.10 Toate rezultatele obţinute rămân valabile dacă $\mathbb{C}$ se înlocuieşte cu un corp algebric închis K şi, acolo unde este cazul, în loc de f olomorfă în $\mathbb{C}$ se presupune că f este polinomială.

Vom adopta în continuare următoarele notaţii: dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ se notează cu p_A polinomul caracteristic al lui A, adică polinomul

$$p_A(t) = \det(tI_n - A),$$

şi cu $\sigma(A)$ mulţimea valorilor proprii ale matricei A (adică rădăcinile polinomului p_A). Se presupun cunoscute următoarele rezultate:

Theorem 3.1.11 ***(Hamilton-Cayley)*** *Pentru orice matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ avem $p_n(A) = O_n$, adică orice matrice satisface ecuaţia sa caracteristică.*

Theorem 3.1.12 ***(de interpolare Lagrange-Hermite)*** *Fiind date $n \in \mathbb{N}^*$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ numere reale distincte, $r_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ şi $b_k^{(i)} \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, r_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, există un polinom $P \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât*

$$P^{(i)}(a_k) = b_k^{(i)}, k = 1, 2, \ldots, n, i = 0, \ldots, r_k.$$

Theorem 3.1.13 *Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ şi $A \in M_n(\mathbb{C})$,*

$$\sigma(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}.$$

Dacă pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ ecuaţia $f(x) = \alpha_i$ are cel puţin o rădăcină simplă atunci $A \in \operatorname{Im} \widetilde{f}$.

Corollary 3.1.14 *Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ are proprietatea că $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, ecuaţia $f(x) = \alpha$ are cel puţin o rădăcină simplă atunci $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ este surjectivă.*

Theorem 3.1.15 *Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ are proprietatea că $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ este surjectivă, atunci $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, ecuaţia $f(x) = \alpha$ are cel puţin o rădăcină simplă.*

Lemma 3.1.16 *Pentru $p \in \mathbb{N}$ impar, considerăm polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, unde*

$$f_p = 1 + \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X^2 + \ldots + \frac{1}{p!}X^p.$$

Atunci $\widetilde{f_p} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ este surjectivă.

Theorem 3.1.17 *a) Pentru $n = 2$ sau $n = 3$, polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ are proprietatea că $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ este surjectivă dacă şi numai dacă $\forall \mu \in \mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = \mu$ are cel puţin o rădăcină simplă în $\mathbb{R}$.*

b) Pentru $n \geq 4$, polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ are proprietatea că $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ este surjectivă dacă şi numai dacă au loc simultan:

(i) $\forall \mu \in \mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = \mu$ are cel puţin o rădăcină simplă în $\mathbb{R}$;

(ii) $\forall \mu \in \mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = \mu$ are cel puţin o rădăcină simplă.

Theorem 3.1.18 *Fie $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\sigma(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ spectrul punctual al operatorului A. Dacă pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, ecuaţia $f(z) = \alpha_j$ are cel puţin o rădăcină simplă atunci $A \in \operatorname{Im} \widetilde{f}$.*

Corollary 3.1.19 *Aplicaţia $\exp = \widetilde{\exp} : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ este surjectivă.*

Theorem 3.1.20 *Fie $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ o serie de puteri cu coeficienţi reali şi raza de convergenţă ∞, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*

I. $n \in \{2, 3\}$. Atunci $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ e surjectiv dacă şi numai dacă au loc:

(i) $\forall \mu \in \mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = \mu$ are cel puţin o rădăcină reală simplă.

(ii) $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

II. $n \geq 4$. Atunci $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ e surjectiv dacă şi numai dacă au loc:

$(i)'$ $\forall \mu \in \mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = \mu$ are cel puţin o rădăcină reală simplă.

$(ii)'$ $\forall \mu \in \mathbb{R}$ ecuaţia $f(z) = \mu$ are cel puţin o rădăcină simplă în $\mathbb{C}$.

Studiul imaginii exponenţialei în acest caz este şi el mult mai complicat şi un rezultat tranşant ca cel din Corolarul 3.1.17 nu mai are loc. O primă constatare este că are loc incluziunea:

$$\exp(M_n(\mathbb{R})) \subseteq \mathbf{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) : \det A > 0\},$$

deci grupul $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ nu este exponenţial.

3.2 The image of the exponential map for the $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ group

În această secţiune se va rezolva problema determinării imaginii aplicaţiei exponenţiale pentru grupul liniar general real $G = \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$.

Lemma 3.2.1 *Dacă* $A \in \mathbf{GL}^+(n,\mathbb{R})$ *şi* $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_+^* \cup (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$*, atunci* $A \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$*.*

Theorem 3.2.2 *Se consideră matricea* $A \in \mathbf{GL}^+(n,\mathbb{R})$*. Atunci* $A \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$ *dacă şi numai dacă blocurile corespunzătoare valorilor proprii negative din descompunerea sa Jordan apar cu multiplicitate pară.*

Theorem 3.2.3 *Fie* $A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$*. Atunci* $A \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$ *dacă şi numai dacă există* $B \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ *astfel încât* $A = B^2$*.*

Corollary 3.2.4 *Fie* $A \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$*. Atunci* $A \in \exp(\mathbf{SL}(n,\mathbb{R}))$ *dacă şi numai dacă există* $B \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ *astfel încât* $A = B^2$*.*

Corollary 3.2.5 *Fie* $X \in M_n(\mathbb{R})$*,* $n \geq 2$*. Atunci există* $Y \in M_n(\mathbb{R})$ *astfel ca* $X^2 + I_n = Y^2$*.*

Corollary 3.2.6 *Pentru orice* $X \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ *există* $A \in SL(2,\mathbb{R})$ *astfel încât* $X = A^2$ *sau* $-X = A^2$*.*

Remark 3.2.7 1) Topologia mulţimii $E(G)$ este deosbit de interesantă. În general, $E(G)$ nu este nici deschisă şi nici închisă în G. Un exemplu în acest sens este dat de grupul Lie $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$. Pentru a arăta că mulţimea $E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R}))$ nu este deschisă se consideră matricea

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, pentru orice $\epsilon > 0$, matricea $\begin{pmatrix} -1 & \epsilon \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nu aparţine lui $E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R}))$ deoarce numărul blocurilor corespunzătoare valorii proprii -1 este egal cu 1.(Teorema 2.1.2). Se observă că $E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R}))$ nu este nici închisă. Pentru aceasta se consideră matricea

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{R}) \diagdown E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R}))$$

şi avem că pentru orice $\epsilon > 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \epsilon & -1 \end{pmatrix} \in E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})),$$

deci dacă $E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R}))$ ar fi închisă, atunci am avea

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \epsilon & -1 \end{pmatrix} \in E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})),$$

ceea ce este imposibil.

2) Interiorul şi frontiera lui $E(\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}))$ au fost determinate şi s-a arătat că:

i) $A \in intE(\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}))$ dacă şi numai dacă A nu are valori proprii negative;

ii) A este punct de frontieră pentru $E(\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}))$ dacă şi numai dacă $A \notin intE(\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}))$ şi blocurile corespunzătoare valorilor proprii negative din descompunerea Jordan a lui A apar cu multiplicitate pară.

3.3 The Lie groups $\mathbf{O}_K(n)$

Fie $K \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă şi simetrică. Se consideră mulţimea

$$\mathbf{O}_K(n) = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \ {}^tAKA = K \right\}.$$

Se observă că $(\mathbf{O}_K(n), \cdot)$ este un subgrup al lui $GL(n,\mathbb{R})$. Într-adevăr, dacă $A, B \in \mathbf{O}_K(n)$, atunci putem scrie

$${}^t(AB)K(AB) = {}^tB\, {}^tAKAB = {}^tB({}^tAKA)B = {}^tBKB = K,$$

adică $AB \in \mathbf{O}_K(n)$. Mai mult, dacă $A \in \mathbf{O}_K(n)$ avem

$${}^t(A^{-1})KA^{-1} = ({}^tA)^{-1}KA^{-1} = KAA^{-1} = K,$$

deci $A^{-1} \in \mathbf{O}_K(n)$.

Se remarcă faptul că pentru $K \in M_n(\mathbb{R})$ se poate defini forma biliniară f_K : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, prin $f_K(x,y) = {}^t xKy$. Pentru $A \in \mathbf{O}_K(n)$ avem

$$f_K(Ax, Ay) = {}^t(Ax)K(Ay) = {}^t x({}^t AKA)y = {}^t xKy = f_K(x,y),$$

prin umare mulţimea $\mathbf{O}_K(n)$ este formată din toate matricele inversabile A cu proprietatea că forma f_K este invariantă, adică $f_K(Ax, Ay) = f_K(x,y)$.

Reamintim că matricele $K, K' \in M_n(\mathbb{R})$ sunt *echivalente*, adică $K \sim K'$, dacă există $U \in GL(n,\mathbb{R})$ cu proprietatea că $K' ={}^t UKU$. În acest caz $\mathbf{O}_K(n) \sim \mathbf{O}_{K'}(n)$. Într-adevăr, grupul $GL(n,\mathbb{R})$ acţionează pe $M_n(\mathbb{R})$ prin $UA ={}^t UAU$ şi $\mathbf{O}_K(n)$ este grupul de izotropie coresounzător matricei K. Din $K \sim K'$ rezultă faptul că matricele K şi K' au aceeaşi orbită în raport cu acţiunea considerată, deci în mod necesar $\mathbf{O}_K(n) \simeq \mathbf{O}_{K'}(n)$. De fapt aceste subgrupuri sunt conjugate în $GL(n,\mathbb{R})$.

Folosind teorema lui Sylvester, rezultă faptul că matricea K este echivalentă cu o matrice diagonală de forma

$$diag(\underbrace{1,\ldots,1}_{r}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{n-r}),$$

unde r reprezintă siganatura lui K. În acest caz grupul $\mathbf{O}_K(n)$ se mai notează şi cu $\mathbf{O}(r, n-r)$ şi el este perfect determinat de signatura sa r.

Evident $\mathbf{O}(r, n-r) = \mathbf{O}(n-r, r)$, deci prezintă importanţă doar situaţia $r \le \frac{n}{2}$. Numărul r este un invariant al grupului $\mathbf{O}(r, n-r)$.

Grupul $\mathbf{O}(1,3)$ se numeşte *grupul Lorentz* şi poartă un rol important în teoria relativităţii speciale.

Theorem 3.3.1 *Pentru orice matrice inversabilă şi simetrică $K \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{O}_K(n)$ este un grup Lie de dimensiune $\frac{n(n-1)}{2}$ cu algebra Lie $\mathfrak{o}_K(n) = K \cdot AS_n(\mathbb{R})$.*

Dacă $A \in SO_K(n)$, din relaţia ${}^t AKA = K$ prin trecere la determinanţi obţinem $\det^2 A = 1$, deci $\det A = \pm 1$. Prin urmare grupul Lie $\mathbf{O}_K(n)$ are două componente conexe, anume

$$\mathbf{O}_K^+(n) = \{A \in \mathbf{O}_K(n) : \det A = 1\}$$

şi

$$\mathbf{O}_K^-(n) = \{A \in \mathbf{O}_K(n) : \det A = -1\}.$$

Subcomponenta conexă a unităţii $\mathbf{O}_K^+(n)$ se mai notează cu $\mathbf{SO}_K(n)$ şi este un subgrup al grupului $\mathbf{O}_K(n)$ de dimensiune $\frac{n(n-1)}{2}$.

3.4 Rodrigues-like formulas

3.4.1 Classical formulas for $\mathbf{SO}(n)$, $n = 2$ and $n = 3$

Fie $\mathbf{SO}(3)$ grupul special ortogonal al matricilor de ordin 3, cu elemente reale, ortogonale şi având determinantul egal cu 1, adică

$$\mathbf{SO}(3) := \left\{A \in M_3(\mathbb{R}) | A\ {}^tA = I_3, \det A = 1\right\}.$$

Conform rezultatelor din paragraful 3.3 rezultă că grupul $\mathbf{SO}(3)$ are o structură de grup Lie şi $\dim \mathbf{SO}(3) = 3$.

Proposition 3.4.1 *Algebra Lie* $(\mathfrak{so}(3), [\cdot,\cdot])$ *poate fi identificată în mod canonic cu algebra Lie* $(\mathbb{R}^3, \times)$, *unde* " $\times$ " *este produsul vectorial clasic.*

Pentru cazul $n = 2$, s-a demonstrat deja formula (paragraful 2.8, formula 2.8.1)

$$\exp(B) = (\cos\theta) I_2 + \frac{\sin\theta}{\theta} B.$$

În cazul $n = 3$, prezentăm demonstraţia clasică a formulei lui Rodrigues (1840). O prezentare uşor diferită a fost dată în Lema 1.3.2.

Proposition 3.4.2 ***(Rodrigues)*** *Cu notaţiile de mai sus, aplicaţia exponenţială*

$$\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathbf{SO}(3),$$

satisface relaţia

$$\exp(\widehat{v}) = I_3 + \frac{\sin||v||}{||v||}\widehat{v} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{||v||}{2}}{\frac{||v||}{2}}\right)\widehat{v}^2.$$

Proposition 3.4.3 *The exponential maop*

$$\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathbf{SO}(3)$$

is surjective, so the group $\mathbf{SO}(3)$ *is exponential.*

3.4.2 The determination problem of the Rodrigues coefficients for the $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ group

Aplicaţia exponenţială $\exp : \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$, unde $GL(n,\mathbb{R})$ reprezintă grupul Lie al matricelor pătratice, de ordin n, inversabile, cu valori reale, este definită prin

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k. \tag{3.4.1}$$

Folosind cunoscuta teoremă Hamilton-Cayley, rezultă că fiecare putere $X^k, k \geq n$, este o combinaţie liniară de puteri ale matricei X, mai precis de puterile $X^0, X^1, \ldots, X^{n-1}$. Prin urmare putem rescrie formula 3.4.1 sub forma

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(X)\, X^k, \tag{3.4.2}$$

unde coeficienţii reali $a_0(X), a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X)$ sunt unic determinaţi şi depind de matricea X. Din această formulă rezultă că pentru $\exp(X)$ este un polinom în X, cu coeficienţi în funcţie de X. Problema determinării unei formule explicite a aplicaţiei exponenţiale $\exp(X)$ se reduce la problema determinării coeficienţilor $a_0(X), a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X)$. Vom numi această problemă generală *problema Rodrigues* şi coeficienţii $a_0(X), a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X)$ *coeficienţii Rodrigues* ai aplicaţiei exponenţiale în raport cu matricea $X \in M_n(\mathbb{R})$.

Invarianţa la echivalenţa matricelor subliniază importanţa spectrului matricei X în relaţia (3.4.2). O metodă importantă pentru a obţine coeficienţii Rodrigues este o aşa numită *metoda Putzer.*

În acest subparagraf, prezentăm rezultatele din lucrarea D. Andrica şi R.-A. Rohan [7] şi mai departe vom indica o modalitate nouă de determinare a coeficienţilor lui Rodrigues $a_0(X)$, $a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X)$ din formula (3.4.2). Ideea principală constă în reducerea relaţiei (3.4.2) la un sistem liniar având necunoscutele $a_0(X), a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X)$. În acest sens multiplicăm ambii membrii ai relaţiei (3.4.2) cu puterile $X^j, j = 0, \ldots, n-1$ şi obţinem următoarele relaţii matriciale

$$X^j \exp(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{k+j}, j = 0, \ldots, n-1, \tag{3.4.3}$$

unde $a_k = a_k(X), k = 0, \ldots, n-1$. Considerând urma matricei în ambele părţi ale relaţiei (3.4.3), obţinem sistemul liniar

$$\sum_{k=0}^{n-1} tr\left(X^{k+j}\right) a_k = tr\left(X^j \exp(X)\right), j = 0, \ldots, n-1, \tag{3.4.4}$$

având coeficienţii funcţii de matricea X. Presupunem că $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui X. Este cunoscut faptul că matricea X^{k+j} are valorile proprii $\lambda_1^{k+j}, \ldots, \lambda_n^{k+j}$ şi matricea $X^j \exp(X)$ are valorile proprii $\lambda_1^j e^{\lambda_1}, \ldots, \lambda_n^j e^{\lambda_n}$. Într-adevăr, funcţia $f_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^j e^z$, este analitică, prin urmare valorile proprii ale matricei $f_j(X)$ sunt $f_j(\lambda_1), \ldots, f_j(\lambda_n)$. Dar avem $f_j(\lambda_s) = \lambda_s^j e^{\lambda_s}, s = 1, \ldots, n$ şi proprietatea este demonstrată.

Sistemul (3.4.4) este echivalent cu

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{k+j} \right) a_k = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^j e^{\lambda_s}, j = 0, \ldots, n-1, \tag{3.4.5}$$

adică

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_{k+j} a_k = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^j e^{\lambda_s}, j = 0, \ldots, n-1, \tag{3.4.6}$$

unde $S_j = \lambda_1^j + \ldots + \lambda_n^j$, cu convenţia $0^0 = 1$, în cazul în care avem valori proprii egale cu 0.

Folosind sistemul (3.4.5) obţinem următorul rezultat privind soluţia problemei Rodrigues pentru grupul $GL(n, \mathbb{R})$.

Theorem 3.4.4 *1) The Rodrigues coefficients in formula (3.4.2) are solutions to the system (3.4.5).*

2) If the eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ of the matrix X are pairwise distinct, then the Rodrigues coefficients $a_0, \ldots, a_{n-1}$ are linear combinations of $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ having the coefficients rational functions of $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, i.e. we have

$$a_k = A_k^{(1)} e^{\lambda_1} + \ldots + A_k^{(n)} e^{\lambda_n}, k = 0, \ldots, n-1. \tag{3.4.7}$$

3.4.3 The determination of the Rodrigues coefficients using the Putzer method

Se consideră problema la limită

$$\dot{x} = Xx;\ x(0) = x_0;\ 0 \leq t < \infty \tag{3.4.8}$$

unde x şi $\dot{x}$ sunt vectori n-dimensionali şi X este o matrice pătratică de ordinul n, cu elemente constante. În cele ce urmează va fi prezentată o metodă utilă pentru scrierea explicită a problemei (3.4.8). Acest lucru este în mod particular util în cazul în care matricea X nu poate fi diagonalizată, caz în care forma canonică Jordan a matricei nu poate fi determinată.

Soluţia ecuaţiei (3.4.8) este de forma

$$x = \exp(tX)x_0,$$

deci problema este echivalentă cu a determina matrice $\exp(tX)$.

Această metodă, pe care o vom numi *metoda lui Putzer*, este importantă şi pentru a obţine coeficienţii Rodrigues. Metoda constă în următorii paşi. Mai întâi, considerăm polinomul caracteristic al matricei X,

$$p_X(t) = \det(tI_n - X) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0,$$

şi definim *matricea Putzer*

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} & 1 \\ c_2 & c_3 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

În cel de-al doilea pas, construim funcţia scalară z care este soluţia a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene având coeficienţii constanţi care satisface condiţiile iniţiale

$$z^{(n)} + c_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + c_1 z' + c_0 z = 0$$

având condiţia iniţială $z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-2)}(0) = 0, z^{(n-1)}(0) = 1$. Următoarea relaţie are loc

$$A = C \cdot Z, \tag{3.4.9}$$

unde A este matricea de ordin $n \times 1$ având ca şi elemente coeficienţii lui Rodrigues $a_0(X), a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X)$ şi Z este matricea de ordin $n \times 1$ având ca şi valori $z(1), z'(1), \ldots, z^{(n-1)}(1)$.

Corollary 3.4.5 *Dacă valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricei X sunt distincte două câte două, atunci matricea Z de ordinul $n \times 1$ din metoda lui Putzer este dată de*

$$Z = (SC)^{-1}B,$$

unde matricea S este definită prin

$$S = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-1} \end{pmatrix},$$

C este matricea lui Putzer şi B este matricea de ordin $n \times 1$ având elementele $b_j = \sum\limits_{s=1}^{n} \lambda_s^j e^{\lambda_s}, j = 0, \ldots, n-1$.

Observaţie. Comparând cu metoda lui Putzer, rezultatul obţinut în Teorema 3.4.4 este mai simplu în cazul în care valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricei X sunt distincte două câte două, deoarece în acest caz trebuie sa rezolvăm doar sistemul liniar (3.4.5) Metoda lui Putzer este mai bună în cazul în care avem multiplicităţi ale valorilor proprii ale matricei X. În situaţii concrete putem combina cele două metode.

3.4.4 The determination of the Rodrigues coefficients for the SO(n) group

Este uşor de verificat faptul că mulţimea matricelor pătratice, de dimensiune n, ortogonale, cu valori reale formează un grup Lie împreună cu operaţia de multiplicare, notat prin $\mathbf{O}(n)$. Submulţimea grupului $\mathbf{O}(n)$ formată din acele matrice care au valoarea determinantului egală cu +1 alcătuieşte un subgrup notat prin $\mathbf{SO}(n)$ şi care se numeşte *grupul special ortogonal* al spaţiului Euclidean $\mathbb{R}^n$. Din motive geometrice, metricile acestui grup se numesc *matrici de rotaţie.*

Matricele algebrei $\mathfrak{so}(n)$ au două proprietăţi esenţiale care simplifică simţitor calculul coeficienţilor Rodrigues:

- Dacă n este impar atunci matricele sunt singulare, adică au cel puţin o valoare proprie egală cu 0;
- Valorile proprii diferite de 0 sunt pur imaginare şi bineînţeles conjugate.

Folosind cunoscuta formulă a lui Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ obţinem următoarea consecinţă a Teoremei 3.4.4, care este utilă în aplicaţiile practice (a se vedea lucrarea R.-A. Rohan [68]).

Corollary 3.4.6 *Dacă valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricei X sunt distincte două câte două, atunci coeficienţii Rodrigues $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sunt unic determinaţi de sistem şi sunt exprimaţi de combinaţii liniare ale $\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_m, \sin\alpha_1, \ldots, \sin\alpha_m$, având coeficienţii funcţii raţionale ale $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, unde $\pm i\alpha_1, \ldots, \pm i\alpha_m$, $m = \left[\frac{n}{2}\right]$, sunt valorile proprii ale matricei X. Astfel avem relaţia*

$$a_k = b_k^{(1)}\cos\alpha_1 + \ldots + b_k^{(m)}\cos\alpha_m + c_k^{(1)}\sin\alpha_1 + \ldots + c_k^{(m)}\sin\alpha_m, k = 0, \ldots, n-1.$$

Când $X = O_n$, urmează că $\exp(X) = I_n$, prin urmare avem $a_0 = 1, a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$.

În cazul în care $n = 2$, o matrice antisimetrică $X \neq O_2$ poate fi scrisă ca

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*,$$

având valorile proprii $\lambda_1 = ai, \lambda_2 = -ai$.

Sistemul (3.4.5) devine în acest caz

$$\begin{cases} 2a_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)a_1 = e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} \\ (\lambda_1 + \lambda_2)a_0 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)a_1 = \lambda_1 e^{\lambda_1} + \lambda_2 e^{\lambda_2}, \end{cases}$$

prin urmare obţinem

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(e^{ai} + e^{-ai}\right) = \cos a,$$

$$a_1 = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1} + \lambda_2 e^{\lambda_2}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \frac{e^{ai} - e^{-ai}}{2a} = \frac{\sin a}{a},$$

şi apoi

$$\exp(X) = (\cos a)\, I_2 + \frac{\sin a}{a} X.$$

Urmează că

$$a_0(X) = \cos a, a_1(X) = \frac{\sin a}{a}.$$

În cazul în care $n = 3$, o matrice antisimetrică este de forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

având polinomul caracteristic $p_X(t) = t^3 + (a^2 + b^2 + c^2)\, t = t^3 + \theta^2 t$, unde $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Valorile proprii ale matricei X sunt $\lambda_1 = \theta i, \lambda_2 = -\theta i, \lambda_3 = 0$. Este clar că $X = O_3$ dacă şi numai dacă $\theta = 0$, prin urmare este suficient să considerăm doar situaţia în care $\theta \neq 0$. Sistemul (3.4.5) devine

$$\begin{cases} 3a_0 - 2\theta^2 a_2 = 1 + e^{\theta i} + e^{-\theta i} \\ -2\theta^2 a_1 = \theta i \left(e^{\theta i} - e^{-\theta i}\right) \\ -2\theta^2 a_0 + 2\theta^4 a_2 = -\theta^2 \left(e^{\theta i} + e^{-\theta i}\right). \end{cases}$$

Deoarece $\theta \neq 0$, urmează că

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{\sin\theta}{\theta}, a_2 = \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2},$$

regăsind cunoscuta formulă a lui Rodrigues (Propoziţia 3.4.2)

$$\exp(X) = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} X + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} X^2.$$

În cazul în care $n = 4$, o matrice antisimetrică $X \in \mathfrak{so}(4)$ este de forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix},$$

şi polinomul caracteristic corespunzător este

$$p_X(t) = t^4 + \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2\right) t^2 + (af - be + cd)^2 .$$

Fie $\lambda_{1,2} = \pm\alpha i, \lambda_{3,4} = \pm\beta i$ valorile proprii ale matricei X, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. După câteva calcule algebrice, sistemul (3.4.5) devine

$$\begin{cases} 2a_0 - \left(\alpha^2 + \beta^2\right) a_2 = \cos\alpha + \cos\beta \\ -\left(\alpha^2 + \beta^2\right) a_1 + \left(\alpha^4 + \beta^4\right) a_3 = -\alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta \\ -\left(\alpha^2 + \beta^2\right) a_0 + \left(\alpha^4 + \beta^4\right) a_2 = -\alpha^2\sin\alpha - \beta^2\sin\beta \\ \left(\alpha^4 + \beta^4\right) a_1 - \left(\alpha^6 + \beta^6\right) a_3 = \alpha^3\sin\alpha + \beta^3\sin\beta \end{cases} .$$

Considerăm următoarele trei cazuri:

Cazul 1. Dacă $\alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, apoi grupând prima ecuaţie cu cea de-a treia şi cea de-a doua cu ultima obţinem coeficienţii lui Rodrigues

$$a_0 = \frac{\beta^2\cos\alpha - \alpha^2\cos\beta}{\beta^2 - \alpha^2},$$

$$a_1 = \frac{\beta^3\sin\alpha - \alpha^3\sin\beta}{\alpha\beta\left(\beta^2 - \alpha^2\right)},$$

$$a_2 = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\beta^2 - \alpha^2},$$

$$a_3 = \frac{\beta\sin\alpha - \alpha\sin\beta}{\alpha\beta\left(\beta^2 - \alpha^2\right)}.$$

Urmează că formula corespunzătoare a lui Rodrigues în acest caz este

$$\exp(X) = \frac{\beta^2\cos\alpha - \alpha^2\cos\beta}{\beta^2 - \alpha^2} I_4 + \frac{\beta^3\sin\alpha - \alpha^3\sin\beta}{\alpha\beta\left(\beta^2 - \alpha^2\right)} X + \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\beta^2 - \alpha^2} X^2 + \frac{\beta\sin\alpha - \alpha\sin\beta}{\alpha\beta\left(\beta^2 - \alpha^2\right)} X^3. \tag{3.4.10}$$

Cazul 2. Dacă $\alpha \neq 0$ şi $\beta = 0$, atunci vom utiliza metoda lui Putzer. În acest caz polinomul caracteristic este $p_X(t) = t^4 + \alpha^2 t^2$ şi matricea Putzer este de forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Funcţia scalară z, soluţie a ecuaţiei diferenţiale $z^{(4)} + \alpha^2 z^{(2)} = 0$ având condiţia iniţială $z(0) = z'(0) = z''(0) = 0, z^{(3)}(0) = 1$, este $z(u) = -\frac{\sin \alpha u}{\alpha^3} + \frac{u}{\alpha^2}$.Matricea Z, de dimensiune 4×1, este de forma

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3} \\ \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} \\ \frac{\sin\alpha}{\alpha} \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Folosind formula (3.4.3) obţinem

$$A = C \cdot Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} \\ \frac{\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3} \end{pmatrix},$$

prin urmare formula lui Rodrigues corespunzătoare acestui caz devine

$$\exp(X) = I_4 + X + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} X^2 + \frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3} X^3. \tag{3.4.11}$$

Cazul 3. Dacă $\alpha = \beta \neq 0,$ atunci vom folosi din nou metoda lui Putzer. Polinomul caracteristic al matricei X este dat de $p_X(t) = t^4 + 2\alpha^2 t^2 + \alpha^4$ şi matricea Putzer este definită ca fiind

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha^2 & 0 & 1 \\ 2\alpha^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conform teoriei generale a ecuaţiilor liniare diferenţiale omogene având coeficienţi constanţi, funcţia scalară z care satisface relaţia $z^{(4)} + 2\alpha^2 z^{(2)} + \alpha^4 = 0$ este de forma $z(u) = (C_1 + C_2 u)\cos\alpha u + (C_3 + C_4 u)\sin\alpha u$. Din condiţiile iniţiale $z(0) = z'(0) = z''(0) = 0, z^{(3)}(0) = 1$, după câteva calcule simple, obţinem funcţia $z(u) =$

$-\frac{u}{2\alpha^2}\cos\alpha u + \frac{1}{2\alpha^3}\sin\alpha u$. Matricea Z, de dimensiune 4×1, este de forma

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha^3} \\ \frac{\sin\alpha}{2\alpha} \\ \frac{\sin\alpha + \alpha\cos\alpha}{2\alpha} \\ \frac{2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

Using the formula (3.4.3) we obtain

$$A = C \cdot Z = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\sin\alpha + 2\cos\alpha}{2} \\ \frac{3\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha} \\ \frac{\sin\alpha}{2\alpha} \\ \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha^3} \end{pmatrix},$$

so the corresponding Rodrigues formula becomes in this case

$$\exp(X) = \frac{\alpha\sin\alpha + 2\cos\alpha}{2} I_4 + \frac{3\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha} X + \frac{\sin\alpha}{2\alpha} X^2 + \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha^3} X^3. \tag{3.4.12}$$

Remark 3.4.7 În lucrarea R.-A. Rohan [68], folosind rezultatul principal din lucrarea D. Andrica şi R.-A. Rohan [9], sunt obţinute formulele (3.4.11) şi (3.4.12) corespunzătoare celor două cazuri singulare, direct din formula (3.4.10) prin trecere la limită cu $\beta \to 0$, respectiv $\beta \to \alpha$.

3.4.5 The Rodrigues-like formulas for the SE(n) group, $n = 2$ and $n = 3$

Grupul special euclidean $\mathbf{SE}(n)$ a fost deja introdus în paragraful 1.5. Vom completa unele proprietăţi ale acestui grup.

Grupul euclidean $\mathbf{E}(n)$ este grupul care conţine toate izometriile spaţiului euclidean $\mathbb{R}^n$. În cazul în care $n = 2$, grupul $\mathbf{E}(2)$ conţine toate translaţiile, rotaţiile şi reflecţiile planului.

Este cunoscut faptul că orice izometrie este de forma

$$F(x) = Rx + \mathbf{v}$$

unde $R\in\mathbf{O}(n)$ şi $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$.

Grupul izometriilor poate fi reprezentat de grupul matricelor notat prin $\mathbf{E}(n)$,

$$\mathbf{E}(n):=\left\{\begin{pmatrix} R & \mathbf{v}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathbf{GL}(n+1,\mathbb{R})|\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n\times 1}\right\}$$

conţinând matrici pătratice de ordinul $n+1$. Mulţimea aplicaţiilor afine ρ ale lui $\mathbb{R}^n$ definite în felul următor

$$\rho\left(X\right)=RX+\mathbf{u}$$

unde $R\in\mathbf{SO}(n)$ este o matrice de rotaţie şi $\mathbf{u}$ este un vector din $\mathbb{R}^n$, dar considerat ca şi o matrice din $\mathbb{R}^{n+1}$, formează un grup împreună cu operaţia de compunere a matricelor, numit grupul izometriilor afine directe, sau mişcări rigide, notat prin $\mathbf{SE}(n)$.

Se dovedeşte că grupul $\mathbf{E}(n)$ nu este un grup Lie conex. Grupul special euclidean $\mathbf{SE}(n)$ este de fapt componenta conexă a identităţii a grupului $\mathbf{E}(n)$. Subgrupul Lie $\mathbf{SE}(n)$ corespunde grupului care conţine toate izometriile R care păstrează orientarea având proprietatea că $\det R=1$. Astfel grupul $\mathbf{SE}(n)$ este închis în $\mathbf{GL}(n+1,\mathbb{R})$. Prin urmare este un grup Lie de matrice.

Grupul $\mathbf{SE}(n)$ nu este mărginit, deci nu este compact. Pentru a demonstra această proprietatea considerăm şirul de matrice

$$A_m=\begin{pmatrix} I_m & \mathbf{v}_m\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

unde vectorul $\mathbf{v}_m\in\mathbb{R}^n$ are prima componentă m şi celelalte componente egale cu 0. Norma Frobenius a lui A_m este $\|A_m\|=\sqrt{m+2}$, deci secvenţa A_m nu este mărginită. Astfel grupul $\mathbf{SE}(n)$ nu este mărginit, deci nu este compact.

Avem

$$\mathbf{SE}(n):=\mathbf{SO}(n)\rtimes\mathbb{R}^n,$$

unde

$$\mathbf{SO}(n):=\left\{A\in M_n(\mathbb{R})|A\ {}^tA=I_n,\det(A)=1\right\}$$

şi " $\rtimes$ " notează produsul semidirect de grupuri.

Proposition 3.4.8 *Algebra lui Lie* $\mathfrak{se}(3)$ *a lui* $\mathbf{SE}(3)$ *se identifică cu* $\mathfrak{so}(3)\times\mathbb{R}^3$ *şi baza canonică a ei este dată de matricele:*

$$e_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$e_4=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ e_5=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ e_6=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Remark 3.4.9 Folosind aplicaţia $\widehat{\ }:\mathbb{R}^3\to\mathfrak{so}(3), x\longmapsto\widehat{x}$, dată mai sus se poate observa uşor că avem izomorfismul de algebre Lie

$$\mathfrak{se}(3)\cong\mathbb{R}^6.$$

Remark 3.4.10 Ca o consecinţă a propoziţilor de mai sus avem că tabla înmulţirii (tabela croşetului) pentru algebra Lie $\mathfrak{se}(3)$ este dată de

$[\cdot,\cdot]$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	0	e_3	$-e_2$	0	e_6	$-e_5$
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-e_6$	0	e_4
e_3	e_2	$-e_1$	0	e_5	$-e_4$	0
e_4	0	e_6	$-e_5$	0	0	0
e_5	$-e_6$	0	e_4	0	0	0
e_6	e_5	$-e_4$	0	0	0	0

.

Proposition 3.4.11 *În raport cu baza canonică* $(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6)$ *constantele de structură ale algebrei Lie* $\mathfrak{se}(3)$ *sunt*

$$c_{12}^3=1,\ c_{13}^2=-1,\ c_{14}^k=0,\ c_{15}^6=1,\ c_{16}^5=-1,$$

$$c_{23}^1=1,\ c_{24}^6=-1,\ c_{25}^k=0,\ c_{26}^4=1,$$

$$c_{34}^{5}= 1\,, c_{35}^{4}= -1\,, c_{36}^{k}= 0,$$

$$c_{45}^{k}= 0, c_{46}^{k}= 0,$$

$$c_{56}^{k}= 0,$$

unde $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Fie Ω o matrice a algebrei $\mathfrak{se}(n)$,

$$\Omega = \begin{pmatrix} X & \mathbf{u} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unde X este o matrice antisimetrică, pătratică, cu elemente reale. Următoare observaţia simplă este folositoare în determinarea unei formule Rodrigues pentru grupul $\mathbf{SE}(n)$. Polnomul caracteristic p_Ω al matricei Ω verifică următoarea relaţie

$$p_\Omega(t) = tp_X(t).$$

Într-adevăr, avem

$$p_\Omega(t) = \det(tI_{n+1} - \Omega) = \det \begin{pmatrix} tI_n - X & -\mathbf{u} \\ 0 & t \end{pmatrix} = t\det(tI_n - X) = tp_X(t).$$

În cazul în care $n = 2$, considerăm o matrice antisimetrică $X \neq O_2$,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*.$$

Folosind observaţia de mai sus, matricea $\Omega \in \mathfrak{se}(2)$ are valorile proprii $\lambda_1 = ai, \lambda_2 = -ai, \lambda_3 = 0$. Formula Rodrigues este de forma

$$\exp(\Omega) = A_0 I_3 + A_1\Omega + A_2\Omega^2$$

şi folosind Teorema 3.4.4. coeficienţii Rodrigues A_0, A_1, A_2 satisfac sistemul 3.4.6 care se reduce exact la sistemul care are ca şi soluţii coeficienţii Rodrigues clasici din paragraful 3.4.4.

Obţinem formula

$$\exp(\Omega) = I_3 + \frac{\sin a}{a}\Omega + \frac{1-\cos a}{a^2}\Omega^2. \tag{3.4.13}$$

Relaţia (3.4.13) ne ajută să demonstrăm uşor că $\exp A \in \mathbf{SE}(2)$ pentru toate elementele $A \in \mathfrak{se}(2)$.

În cazul în care $n = 3$, considerăm o matrice antisimetrică $X \neq O_3$,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

având polinomul caracteristic $p_X(t) = t^3 + (a^2 + b^2 + c^2)\, t = t^3 + \theta^2 t$, unde $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Polinomul caracteristic corespunzător matricei $\Omega \in \mathfrak{se}(3)$ este $p_\Omega(t) = tp_X(t) = t^4 + \theta^2 t^2$, prin urmare valorile proprii ale lui Ω sunt $\lambda_1 = \theta i, \lambda_2 = -\theta i, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Formula Rodrigues este în acest caz

$$\exp(\Omega) = A_0 I_4 + A_1 \Omega + A_2 \Omega^2 + A_3 \Omega^3.$$

Deoarece avem o valoare proprie cu multiplicitatea doi vom folosi metoda Putzer (a se vedea subparagraful 3.4.3, lucrarea originală a lui E.J. Putzer [65] sau lucrarea D.Andrica şi R.-A. Rohan [7]). Matricea Putzer este

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \theta_2 & 0 & 1 \\ \theta^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi după câteva calcule simple care se găsesc în detaliu în lucrarea D.Andrica şi R.-A. Rohan [7], obţinem următoarea formulă Rodrigues

$$\exp(\Omega) = I_4 + \Omega + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2}\Omega^2 + \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}\Omega^3. \tag{3.4.14}$$

Această formulă este menţionată în cartea J.M.Selig [72, Capitolul 4, pg $51 - 83$], unde este obţinută printr-o metodă diferită. De reţinut este faptul că este exact aceeaşi formă ca a formulei 3.4.11 obţinută în Cazul 2 al paragrafului 3.4.4.

Folosind izomorfismul de algebre Lie $\mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3), \omega \longmapsto \widehat{\omega}$, obţinem următoare reformulare pentru formula Rodrigues (a se vedea D. Andrica, I.N. Caşu [68, Propoziţia 7.1.8]).

Proposition 3.4.12 *Aplicaţia exponenţială*

$$\exp : \mathfrak{se}(3) \to \mathbf{SE}(3)$$

este dată de relaţiile următoare

(i) Dacă $\omega \neq 0$, *atunci*

$$\exp\left(\begin{pmatrix} \widehat{\omega} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \exp\widehat{\omega} & \frac{1}{\|\omega\|^2}\left\{[I_3 - (\exp\widehat{\omega})\widehat{\omega} + \omega\omega^t I_3]\,\mathbf{v}\right\} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Dacă $\omega = 0$, *atunci*

$$\exp\left(\begin{pmatrix} \widehat{0} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} I_3 & \mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propoziţia 3.4.12 oferă o demonstraţie directă pentru surjectivitatea aplicaţiei exponenţiale $\exp : \mathfrak{se}(3) \to \mathbf{SE}(3)$. (a se vedea monografia D.Andrica, I.N.Caşu [3, Propoziţia 7.1.9])

3.4.6 The Rodrigues-like formulas for the $\mathbf{SO}(2,1)$ group

În cele ce urmează vom determina coeficienţii Rodrigues pentru grupul $\mathbf{O}(2,1)$. În lucrarea D.Andrica, R.-A.Rohan [6] a fost utilizată metoda lui Putzer. În continuare vom folosi rezultatul principal din lucrarea D.Andrica, R.-A.Rohan [7] conţinut în Teorema 3.4.4.

Pentru o matrice $A \in \mathfrak{o}(2,1)$, adică

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix},$$

polinomul său caracteristic este dat de

$$p_A(t) = t^3 - (b^2 + c^2 - a^2)t.$$

Vom discuta cele 3 cazuri:

Cazul 1. $u = b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Atunci valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = \sqrt{u}, \lambda_2 = -\sqrt{u}, \lambda_3 = 0$. Sistemul 3.4.6 devine

$$\begin{cases} 3a_0 + 2ua_2 = 1 + e^{\sqrt{u}} + e^{-\sqrt{u}} \\ 2ua_1 = \sqrt{u}\left(e^{\sqrt{u}} - e^{-\sqrt{u}}\right) \\ 2ua_0 + 2u^2a_2 = u\left(e^{\sqrt{u}} + e^{-\sqrt{u}}\right). \end{cases}$$

deci obţinem

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{sh\sqrt{u}}{\sqrt{u}}, a_2 = \frac{ch\sqrt{u} = 1}{u},$$

ceea ce conduce la formula Rodrigues

$$\exp(A) = I_3 + \frac{sh(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}A + \frac{ch(\sqrt{u}) - 1}{u}A^2.$$

Cazul 2. $u = b^2 + c^2 - a^2 = 0$. Prin trecerea la limită cu $u \to 0$, în formulele precedente pentru a_0, a_1, a_2, obţinem formula

$$\exp(A) = I_3 + A + \frac{1}{2}A^2.$$

Cazul 3. $u = b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Un raţionament analog celui din Cazul 1 conduce la

$$\exp(A) = I_3 + \frac{\sin(\sqrt{-u})}{\sqrt{-u}}A + \frac{\cos(\sqrt{-u}) - 1}{u}A^2.$$

Rezultă astfel

$$\exp(A) = \begin{cases} I_3 + \frac{sh\left(\sqrt{u}\right)}{\sqrt{u}}A + \frac{ch\left(\sqrt{u}\right)-1}{u}A^2 \text{ dacă } u > 0 \\ I_3 + A + \frac{1}{2}A^2 \text{ dacă } u = 0 \\ I_3 + \frac{\sin\left(\sqrt{-u}\right)}{\sqrt{-u}}A + \frac{\cos\left(\sqrt{-u}\right)-1}{u}A^2 \text{ dacă } u < 0 \end{cases}$$

unde $u = b^2 + c^2 - a^2$.

Chapter 4

Results for the geometric mechanics

4.1 The description of the $\mathbf{SO}(n)$ group using the Hamilton-Cayley form

4.1.1 The Cayley transformation for the $\mathbf{SO}(n)$ group

Matricele grupului $\mathbf{SO}(n)$ descriu mişcările de rotaţie din $\mathbb{R}^n$. Dacă matricea A aparţine algebrei Lie $\mathfrak{so}(n)$corespunzătoare grupului Lie $\mathbf{SO}(n)$, atunci matricea $I_n - A$ este inversabilă.

Într-adevăr, valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale lui A sunt 0 sau pur imaginare, deci valorile proprii ale matricei $I_n - A$ sunt $1 - \lambda_1, \ldots, 1 - \lambda_n$. Acestea sunt evident diferite de 0, prin umare $\det(I_n - A) = (1 - \lambda_1) \cdots (1 - \lambda_n) \neq 0$, adică $I_n - A$ este inversabilă.

Aplicaţia $Cay : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$, definită prin

$$Cay(A) = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$$

se numeşte *transformarea Cayley* a grupului $\mathbf{SO}(n)$. Să arătăm că această aplicaţie este corect definită. Fie $Cay(A) = R$.

Aplicaţia Cay este evident continuă şi $Cay(O_n) = I_n \in \mathbf{SO}(n)$, deci în mod necesar avem $R \in \mathbf{SO}(n)$.

Notăm cu $\sum$ mulţimea elementelor grupului $\mathbf{SO}(n)$ care are pe -1 ca valoare proprie. Evident avem $R \in \sum$ dacă şi numai dacă matricea $I_n + R$ este singulară.

Theorem 4.1.1 *Aplicaţia $Cay : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)\backslash\sum$ este bijectivă şi inversa acesteia este $Cay^{-1} : \mathbf{SO}(n)\backslash\sum \to \mathfrak{so}(n)$, $Cay^{-1}(R) = (R + I_n)^{-1}(R - I_n)$.*

4.1.2 The Rodrigues-like formulas for the Cayley transformation

Deoarece inversa matricei $I_n - A$ se poate scrie sub forma

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots,$$

pe o vecinătate suficient de mică a lui O_n, ţinând seama de teorema Hamilton-Cayley, rezultă că transformarea Cayley se poate scrie sub formă polinomială

$$Cay(A) = b_0(A)I_n + b_1(A)A + \dots + b_{n-1}(A)A^{n-1}, \tag{4.1.1}$$

unde coeficienţii $b_0, \dots, b_{n-1}$ sunt unic determinaţi şi depind de matricea A. Vom numi aceste numere, prin analogie cu situaţia aplicaţiei exponenţiale, *coeficienţii Rodrigues* ai lui A relativ la aplicaţia Cay.

Theorem 4.1.2 *Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valorile proprii ale matricei $A \in \mathfrak{so}(n)$.*

1) *Coeficienţii Rodrigues ai lui A relativ la trasnformarea Cay sunt soluţii ale sistemului*

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_{k+j} b_k = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^j \frac{1 + \lambda_s}{1 - \lambda_s}, \; j = 0, \dots, n-1, \tag{4.1.2}$$

unde $Sj = \lambda_1^j + \dots + \lambda_n^j$.

2) *Dacă valorile proprii $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ale matricei A sunt distincte două câte două, atunci coeficienţii Rodrigues $b_0, \dots, b_{n-1}$ sunt perfect determinaţi de acest sistem şi sunt funcţii raţionale de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.*

Vom ilustra în continuare cazurile particulare $n = 2$ şi $n = 3$. Dacă $A = O_n$, atunci $Cay(A) = I_n$ şi deci $b_0 = 1, b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$.

În cazul $n = 2$, considerăm matricea antisimetrică $A \neq O_2$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*,$$

având valorile proprii $\lambda_1 = ai, \lambda_2 = -ai$. Sistemul (4.1.2) devine în acest caz

$$\begin{cases} 2b_0 = \frac{1+ai}{1-ai} + \frac{1-ai}{1+ai} \\ -2a^2 b_1 = ai\frac{1+ai}{1-ai} - ai\frac{1-ai}{1+ai} \end{cases}$$

şi obţinem

$$b_0 = \frac{1-a^2}{1+a^2}, b_1 = \frac{1}{1+a^2}$$

Rezultă astfel formula de tip Rodrigues pentru transformarea Cayley

$$Cay(A) = \frac{1-a^2}{1+a^2} I_2 + \frac{2}{1+a^2} A. \tag{4.1.3}$$

Pentru $n = 3$, o matrice antisimetrică este de forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

având polinomul caracteristic $p_A(t) = t^3 + \theta^2 t$, unde $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = \theta i, \lambda_2 = -\theta i, \lambda_3 = 0$. Avem $A = O_3$ dacă şi numai dacă $\theta = 0$, deci este suficient să considerăm doar situaţia în care $\theta \neq 0$. Sistemul (4.1.2) devine

$$\begin{cases} 3b_0 - 2\theta^2 b_2 = \frac{1+\theta i}{1-\theta i} + \frac{1-\theta i}{1+\theta i} + 1 \\ -2\theta^2 b_1 = \theta i\frac{1+\theta i}{1-\theta i} - \theta i\frac{1-\theta i}{1+\theta i} \\ -2\theta^2 b_0 + 2\theta^4 b_2 = -\theta^2 \left(\frac{1+\theta i}{1-\theta i} + \frac{1-\theta i}{1+\theta i}\right) \end{cases}$$

cu soluţia

$$b_0 = 1, b_1 = \frac{2}{1+\theta^2}, b_2 = \frac{2}{1+\theta^2}.$$

Rezultă formula de tip Rodrigues pentru transformarea Cayley a grupului $\mathbf{SO}(3)$

$$Cay(A) = I_3 + \frac{2}{1+\theta^2} A + \frac{2}{1+\theta^2} A^2. \tag{4.1.4}$$

Formula (4.1.4) oferă posibilitatea să obţinem o altă formă pentru inversa transformatei Cayley. Fie $R \in \mathbf{SO}(3)$ astfel încât avem

$$R = I_3 + \frac{2}{1+\theta^2}A + \frac{2}{1+\theta^2}A^2,$$

unde A este o matrice antisimetrică. Considerând operaţia de transpunere în ambii membrii ai acestei relaţii şi ţinând seama că ${}^tA = -A$, obţinem

$$R - {}^tR = \frac{4}{1+\theta^2}A. \tag{4.1.5}$$

Pe de altă parte, avem

$$tr(R) = 3 - \frac{4\theta^2}{1+\theta^2} = -1 + \frac{4}{1+\theta^2},$$

şi prin înlocuirea în relaţia (4.1.5) obţinem formula

$$Cay^{-1}(R) = \frac{1}{1+tr(R)}(R - {}^tR). \tag{4.1.6}$$

Formula (4.1.6) are sens pentru rotaţiile $R \in \mathbf{SO}(3)$ pentru care $1 + tr(R) \neq 0$. Dacă R este o rotaţie de unghi α, atunci avem $tr(R) = 1 + 2\cos\alpha$, deci aplicaţia Cay^{-1} nu este definită pentru rotaţiile de unghi $\alpha = \pm\pi$. Deoarece în regiunea unde este definită aplicaţia Cay este bijectivă, rezultă că matricele antisimetrice din $\mathfrak{so}(3)$ pot fi folosite ca şi coordonate pentru rotaţii. Ţinând seama de izomorfismul "$\widehat{\ }$" de algebre Lie între $(\mathbb{R}^3, \times)$ şi $(\mathfrak{so}(3), [\cdot,\cdot])$, unde " $\times$ " notează produsul vectorial, definit prin $v \in \mathbb{R}^3 \to \widehat{v} \in \mathfrak{so}(3)$, unde

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ şi } \widehat{v} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

prin compunerea aplicaţiilor

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\widehat{\ }} \mathfrak{so}(3) \xrightarrow{Cay} \mathbf{SO}(3)$$

obţinem o parametrizare vectorială a rotaţiilor din $\mathbf{SO}(3)$.

4.1.3 The Cayley transformation for the $\mathbf{SE}(n)$ group

În acest subparagraf vom defini o transformare de tip Cayley pentru grupul special euclidean $\mathbf{SE}(n)$. Prin analogie cu grupul special ortogonal $\mathbf{SO}(n)$, definim aplicaţia $Cay_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$, unde

$$Cay_{n+1}(S) = (I_{n+1} - S)^{-1}(I_{n+1} + S). \tag{4.1.7}$$

Vom numi această aplicaţie *transformarea Cayley* a grupului $\mathbf{SE}(n)$. În primul rând să arătăm că ea este corect definită. Fie $S \in \mathfrak{se}(n)$, o matrice definită în blocuri

$$S = \begin{pmatrix} A & \mathbf{u} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde $A \in \mathfrak{so}(n)$ şi $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Un calcul simplu arată că avem formula

$$(I_{n+1} - S)^{-1}(I_{n+1} + S) = \begin{pmatrix} R & (R + I_n)\mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde $R = (I_n - A)^{-1}(I_n + A) = Cay(A) \in \mathbf{SO}(n)$, ceea ce ne-am propus să demonstrăm.

Legătura dintre transformarea $Cay : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ şi $Cay_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$ se realizează prin formula

$$Cay_{n+1}(S) = \begin{pmatrix} Cay(A) & (R + I_n)\mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ca şi pentru transformarea clasică $Cay : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$, putem obţine formule de tip Rodrigues pentru transformarea $Cay_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$, pentru valori mici ale lui n. Folosind observaţia din Secţiunea 5.1 a lucrării R.-A.Rohan [68] obţinem că pentru o matrice $S \in \mathfrak{se}(n)$ definită în blocuri ca mai sus, polinomul ei caracteristic p_S satisface relaţia $p_S(t) = tp_A(t)$. Formula lui Rodrigues pentru transformarea $Cay_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$ este de forma

$$Cay_{n+1}(S) = c_0 I_{n+1} + c_1 S + \ldots + c_n S^n,$$

unde coeficienţii $c_0, c_1, \ldots, c_n$ depind de matricea S.

Theorem 4.1.3 *Aplicaţia* $Cay_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n) \backslash \sum_{n+1}$ *este bijectivă şi inversa ei este dată de*

$$Cay_{n+1}^{-1}(M) = \begin{pmatrix} Cay^{-1}(M) & (R + I_n)^{-1}\mathbf{t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde matricea M *este definită în blocuri prin*

$$M = \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Rotations vector parametrization

Fie grupul special ortogonal $\mathbf{SO}(3)$

$$\mathbf{SO}(3) = \left\{ O \in \mathbf{GL}(3, \mathbb{R}) : \det O = 1, O\ {}^tO = I_n \right\} \tag{4.2.1}$$

unde $GL(3, \mathbb{R})$ reprezintă grupul matricelor pătratice, de ordin 3, cu elemente reale împreună cu algebra Lie $\mathfrak{so}(3)$ (adică generatorii infiniezimali) care este dată de matricele pătratice, de dimensiune 3, antisimetrice. Dacă matricea O aparţine algebrei Lie $\mathfrak{so}(3)$ grupului $\mathbf{SO}(3)$ atunci matricea $I_n - O$ este inversabilă şi transformarea Cayley studiată în subparagraful 4.1. Am văzut că avem izomorfismul de algebre Lie între $(\mathbb{R}^3, \times)$ şi $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$, unde "$\times$" notează produsul vectorial, definit prin $v \in \mathbb{R}^3 \to \widehat{v} \in \mathfrak{so}(3)$, unde

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ şi } \widehat{v} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prin compunerea aplicaţiilor

$$\mathbb{R}^3 \overset{\widehat{}}{\to} \mathfrak{so}(3) \overset{Cay}{\to} \mathbf{SO}(3)$$

rezultă că orice matrice de rotaţie $R \in \mathbf{SO}(3) \backslash \sum$, poate si scrisă sub forma $R = Cay(\widehat{v})$, unde vectorul $v \in \mathbb{R}^3$ este unic cu această proprietate. Această relaţie este echivalentă cu

$$R = Cay(\widehat{v}) = (I_3 + \widehat{v})(I_3 - \widehat{v})^{-1} = \frac{(1 - v^2)I_3 + 2v \otimes v + 2\widehat{v}}{1 + v^2} \tag{4.2.2}$$

unde $v \otimes v$ notează matricea diadică $v \cdot {}^t v$, adică matricea

$$v \otimes v = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Din formula (4.1.6) avem

$$\widehat{v} = Cay^{-1}(R) = \frac{1}{1 + tr(R)}(R - {}^t R). \qquad (4.2.3)$$

Formula (4.2.2) reprezintă o parametrizare explicită a matricelor de rotaţie din $\mathbf{SO}(3) \setminus \sum$. Vectorul $v \in \mathbb{R}^3$ se numeşte *vector parametru*, este paralel cu axa de rotaţie şi modulul său $|v|$ este egal cu $tg\frac{\alpha}{2}$, unde α este unghiul de rotaţie.

Mulţimea tuturor vectorilor parametru formează un grup Lie în raport cu multiplicarea

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{v_1 + v_2 + v_1 \times v_2}{1 - v_1 \cdot v_2}, \qquad (4.2.4)$$

unde " $\times$ " este produsul vectorial şi " $\cdot$ " produsul scalar al vectorilor v_1 şi v_2.

4.3 The analitical form of SO(n) group elements

Un bloc diagonal al matricei de rotaţie a lui Givens $R_i(\phi) \in M_n(\mathbb{R})$, este de forma

$$R_i(\phi) = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\cos\phi)_{i,i} & (-\sin\phi)_{i,i+1} & 0 \\ 0 & (\sin\phi)_{i+1,i} & (\cos\phi)_{i+1,i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{pmatrix} \qquad (4.3.1)$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Aşa cum se poate observa, matricea de rotaţie a lui Givens $R_i(\phi)$ implică numai două coordonate care sunt influenţate de unghiul de rotaţie ϕ întrucât celelalte direcţii, care corespund valorii proprii 1, nu sunt afectate. În dimesiunea n, există $n-1$ matrice de rotaţie Givens de tipul (4.3.1). Prin înmulţire, acestea pot genera o matrice pătratică, de ordin n dată de relaţia

$$R(\phi) = R_1(\phi) R_2(\phi) \ldots R_{n-1}(\phi).$$

Este clar că matricea $R(\phi)$ este una specială, atunci când unghiurile matricelor $R_i(\phi)$ sunt considerate egale. O formulă explicită a matricei $R(\phi)$ este dată de

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\cos\phi\sin\phi & \dots & \dots & (-1)^n\cos\phi\sin^{n-2}\phi & (-1)^{n+1}\sin^{n-1}\phi \\ \sin\phi & \cos^2\phi & -\cos^2\phi\sin\phi & \dots & (-1)^{n-1}\cos^2\phi\sin^{n-3}\phi & (-1)^n\cos\phi\sin^{n-2}\phi \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\cos^2\phi\sin\phi & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \cos^2\phi & -\cos\phi\sin\phi \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Matricea (4.3.1) este aproape o matrice superior triunghiulară, dar cu $\sin\phi$ pe prima subdiagonală şi cele $(n-2)\times(n-2)$ submatrice începând de pe poziţia $(2,2)$ este de fapt o matrice Toeplitz superior triunghiulară. (O matrice Toeplitz T sau o matrice diagonal-constantă este o matrice în care fiecare diagonală descendentă de la stânga la dreapta este constantă, adică $T_{i,j} = T_{i+1,j+1}$).

4.4 The Rodrigues formula for the Lorentz group $\mathbf{SO}(3,1)$

Multe modele matematice ale proceselor din fizică, biologie şi chimie sunt bazate pe sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare având coeficienţi constanţi. De exemplu, prin rescrierea ecuaţiei clasice a legii de energie a lui Lorentz în forma relativă, mişcarea unei particule încărcate într-un câmp electromagnetic constant poate fi descrisă de un sistem cu patru ecuaţii diferenţiale, numite *ecuaţiile lui Lorentz*

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = a\mathcal{F}^\alpha_\beta U^\beta, \alpha, \beta = x, y, z, t. \tag{4.4.1}$$

Aici U notează vectorul patru-viteză al particulei (coloană) faţă de sistemul inerţial fix

$$U = \ {}^t\left(U^x, U^y, U^z, U^t\right), \tag{4.4.2}$$

cu

$$U^\gamma = \frac{d\gamma}{d\tau}\ \gamma = x, y, x \text{ şi } U^t = \frac{E}{m} \tag{4.4.3}$$

fiind spaţiul său, respectiv componentele timpului, τ este timpul, E fiind energia particulei energie şi m masa sa. În scrierea sistemului (4.4.1) am folosit în mod implicit convenţia de sumare a lui Einstein, adică dacă într-o sumă doi indici se repetă, simbolul sumă se omite. Parametrul real a reprezintă constantele fizice, mai precis avem $a = \frac{e}{m}$, unde e este sarcina electrică a particulei.

În final, câmpul electromagnetic independent de timp, considerat faţă de acelaşi sistem de referinţă inerţial fix este reprezentat de un tensor $\mathcal{F}$ de ordinul doi,

$$\mathcal{F}=\begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4.4}$$

unde E_1, E_2, E_3 şi B_1, B_2, B_3 sunt componentele câmpurilor electrice, respectiv magnetice, măsurate în sistemul inerţial fix şi presupunem că unităţile de măsură sunt alese astfel încât viteza luminii este unitatea, adică avem $c = 1$.

Introducem

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.4.5}$$

şi astfel putem verifica într-un mod simplu că orice matrice $\mathcal{F}$ de forma (4.4.4) satisface relaţia

$${}^t\mathcal{F}\eta + \eta\mathcal{F} = 0 \tag{4.4.6}$$

ceea ce înseamnă că $\mathcal{F}$ aparţine algebrei Lie $\mathfrak{so}(3,1)$ corespunzătoare grupului Lorentz

$$\mathbf{SO}(3,1) = \left\{ A \in \mathbf{GL}(4,\mathbb{R}) |\ {}^tA\eta A = \eta, \det A = 1 \right\}. \tag{4.4.7}$$

Dacă alegem un alt sistem de referinţă, matricea care reprezintă câmpul electromagnetic, se transformă într-o nouă matrice printr-un automorfism interior $\zeta \in Int(\mathfrak{so}(3,1))$ a algebrei Lie $\mathfrak{so}(3,1)$.

Pe de altă parte, soluţia generală a sistemului (4.4.1) este

$$U(\tau) = \exp(a\mathcal{F}\tau)U_0 \tag{4.4.8}$$

unde exp este aplicaţia exponenţială corespunzătoare grupului Lorentz şi $U_0 = U(0)$ este valoarea iniţială a vectorului patru-viteză (în momenul $\tau = 0$), deci este important să determinăm o formulă de tip Rodrigues pentru aplicaţia $\exp : \mathfrak{so}(3,1) \to \mathbf{SO}(3,1)$.

În acest paragraf vom urma două căi diferite pentru a obţine o astfel de formulă care simplifică soluţia generală (4.4.8) a sistemului (4.4.1).

4.4.1 Structure based algebra $\mathfrak{so}(3,1)$ demonstration

În acest subparagraf prezentăm metoda dezvoltată de G.K. Dimitrov şi I.M. Mladenov [21].

4.4.2 The alternative proof using the system (3.4.6)

În acest subparagraf prezentăm rezultatul din lucrarea D. Andrica şi R.-A. Rohan [8].

4.5 Motion of a charged particle in a constant electromagnetic field

În această secţiune vom determina traiectoriile unei particule cu masa m şi încărcătura electrică e într-un câmp electromagnetic constant $\mathcal{F}$. În acest scop trebuie să rezolvăm sistemul ecuaţiilor lui Lorentz cu datele iniţiale respective.

Cazul 1. $E.B \neq 0$.

Rezultă că în acest caz câmpul electromagnetic poate fi reprezentat printr-o matrice de tipul

$$\zeta(\mathcal{F}) = \widetilde{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix}, E = (0,0,\sigma), B = (0,0,\alpha), \tag{4.5.1}$$

unde $\alpha, \sigma \in \mathbb{R}^*$.

Obţinem imediat

$$\exp(a\widetilde{\mathcal{F}}\tau) = \begin{pmatrix} \cos(a\alpha\tau) & \sin(a\alpha\tau) & 0 & 0 \\ -\sin(a\alpha\tau) & \cos(a\alpha\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ch(a\sigma\tau) & sh(a\sigma\tau) \\ 0 & 0 & sh(a\sigma\tau) & ch(a\sigma\tau) \end{pmatrix}. \tag{4.5.2}$$

şi în plus avem

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} U^x(\tau) \\ U^y(\tau) \\ U^z(\tau) \\ U^t(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \sin(a\alpha\tau) \\ \mu \cos(a\alpha\tau) \\ \sqrt{1+\mu^2} sh(a\sigma\tau) \\ \sqrt{1+\mu^2} ch(a\sigma\tau) \end{pmatrix}. \tag{4.5.3}$$

Astfel de traiectorii pot fi găsite după o integrare directă, care ne conduce la soluţia

$$\begin{cases} x(\tau) = x_0 + \frac{\mu}{a\alpha}(1 - \cos(a\alpha\tau)) \\ y(\tau) = y_0 + \frac{\mu}{a\alpha}\sin(a\alpha\tau) \\ z(\tau) = z_0 + \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{a\sigma}(ch(a\sigma\tau) - 1). \end{cases} \tag{4.5.4}$$

O astfel de traiectorie, care este o spirală de-a lungul axei z, este reprezentată în Figura 4.1 pentru un electron care porneşte cu viteza U_0 din poziţia iniţială x_0, cu valorile iniţiale

$$x_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0,0,0) \text{ şi } U_0 = (U^x(\tau), U^y(\tau), U^z(\tau)) = (0, 4 \times 10^5, 0). \tag{4.5.5}$$

Menţionăm că în figurile prezentate, unităţile de măsură pentru vectorii E şi B sunt volt pe metru şi volt×secundă/(3×10^8) pe metru pătrat, timpul este măsurat în secunde, distanţele (cu câteva execepţii) în metrii şi vitezele în metrii pe secundă.

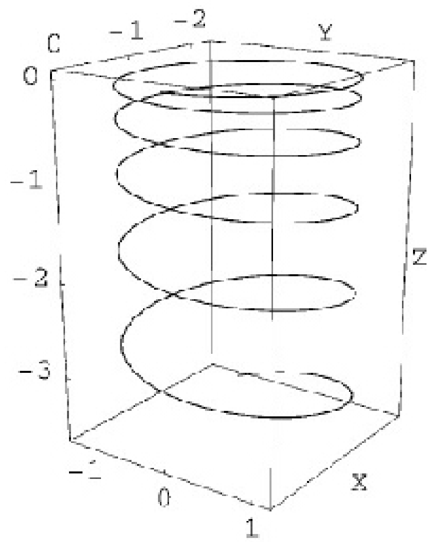


Figure 4.1: $E = (0, 0, 41 \times 10^{-4})$, $B = (0, 0, 6 \times 10^{2})$, $\tau \in [0, 10^{-4}]$

Cazul 2. $E.B = 0$ şi $B^2 - E^2 < 0$.

Câmpul electromagentic poate fi reprezentat din nou printr-o matrice de tipul I) şi putem concluziona că acest lucru este posibil doar în cazul în care avem

$$\alpha = 0. \tag{4.5.6}$$

Prin urmare putem scrie

$$\zeta(\mathcal{F}) = \widetilde{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix}, E = (0, 0, \sigma), B = (0, 0, 0). \tag{4.5.7}$$

unde $\sigma \in \mathbb{R}^*$.

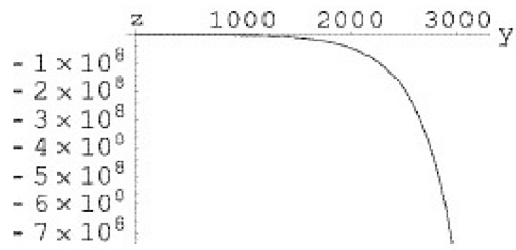


Figure 4.2: $E = (0, 0, 2 \times 10^{-3})$, $B = (0, 0, 0)$, $\tau \in [0, 8]$

Obţinem

$$\exp(a\widetilde{\mathcal{F}}\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ch(a\sigma\tau) & sh(a\sigma\tau) \\ 0 & 0 & sh(a\sigma\tau) & ch(a\sigma\tau) \end{pmatrix}, \tag{4.5.8}$$

ceea ce ne conduce la

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} U^x(\tau) \\ U^y(\tau) \\ U^z(\tau) \\ U^t(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{1+\mu^2} sh(a\sigma\tau) \\ \sqrt{1+\mu^2} ch(a\sigma\tau) \end{pmatrix}. \tag{4.5.9}$$

Integrarea relaţiei (4.5.9) ne dă traiectoria descrisă de curba

$$\begin{cases} x(\tau) = x_0 \\ y(\tau) = y_0 + \mu\tau \\ z(\tau) = z_0 + \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{a\sigma}(ch(a\sigma\tau) - 1). \end{cases} \tag{4.5.10}$$

Această curbă este uşor de recunoscut ca fiind o catenară în planul OYZ. Mai multe detalii despre proprietăţile geometrice şi mecanice a acestei curbe pot fi găsite în [59] şi [60]. Folosind formulele (4.5.10) am ilustrat grafic traiectoria pe care o urmează electronul în Figura 4.2 cu datele iniţiale specificate în (4.5.5), iar scara pentru axe este aleasă astfel încât o unitate să corespundă la 10^3 metrii.

Cazul 3. $E.B = 0$ şi $B^2 - E^2 > 0$.

Câmpul electromagentic poate fi reprezentat din printr-o matrice de tipul I) în care

$$\sigma = 0, \tag{4.5.11}$$

şi prin urmare obţinem

$$\zeta(\mathcal{F}) = \widetilde{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E = (0,0,0), B = (0,0,\alpha), \tag{4.5.12}$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Procedând la fel ca în cazul anterior obţinem

$$\exp(a\widetilde{\mathcal{F}}\tau) = \begin{pmatrix} \cos(a\alpha\tau) & \sin(a\alpha\tau) & 0 & 0 \\ -\sin(a\alpha\tau) & \cos(a\alpha\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.5.13}$$

şi

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} U^x(\tau) \\ U^y(\tau) \\ U^z(\tau) \\ U^t(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\sin(a\alpha\tau) \\ \mu\cos(a\alpha\tau) \\ 0 \\ \sqrt{1+\mu^2}\tau \end{pmatrix}. \tag{4.5.14}$$

Integrarea relaţiei (4.5.14) va conduce la traiectoria descrisă de curba

$$\begin{cases} x(\tau) = x_0 + \frac{\mu}{a\alpha}(1 - \cos(a\alpha\tau)) \\ y(\tau) = y_0 + \frac{\mu}{a\alpha}\sin(a\alpha\tau) \\ z(\tau) = z_0, \end{cases} \tag{4.5.15}$$

care este un cerc în planul OXY. Acest rezultat este de o importanţă deosebită în teoria ciclotoanelor şi a spectometrelor de masă.

Cazul 4. $E.B = 0$ şi $B^2 - E^2 = 0$.

Câmpul electromagentic poate fi reprezentat printr-o matrice de tipul II), adică

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & -\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \nu & 0 \end{pmatrix}, E = (0,0,\nu), B = (\nu, 0, 0), \tag{4.5.16}$$

unde $\nu \in \mathbb{R}$.

Obţinem

$$\exp(a\widetilde{\mathcal{F}}\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}a^2\nu^2\tau^2 & a\nu\tau & \frac{1}{2}a^2\nu^2\tau^2 \\ 0 & -a\nu\tau & 1 & a\nu\tau \\ 0 & -\frac{1}{2}a^2\nu^2\tau^2 & 1 & 1 + \frac{1}{2}a^2\nu^2\tau^2 \end{pmatrix} \tag{4.5.17}$$

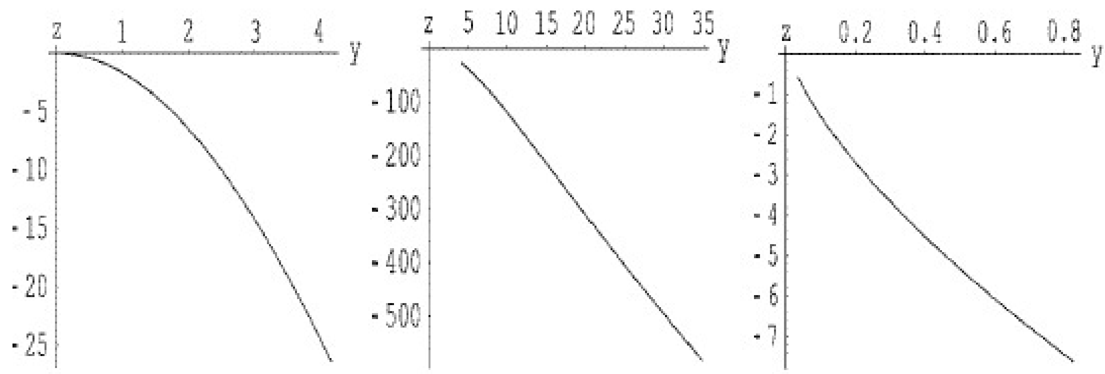
ceea ce conduce la

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} U^x(\tau) \\ U^y(\tau) \\ U^z(\tau) \\ U^t(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu + \frac{1}{2}a^2\nu^2\left(\sqrt{1+\mu^2} - \mu\right)\tau^2 \\ a\nu\left(\sqrt{1+\mu^2} - \mu\right)\tau \\ \sqrt{1+\mu^2} + \frac{1}{2}a^2\nu^2\left(\sqrt{1+\mu^2} - \mu\right)\tau^2 \end{pmatrix}. \tag{4.5.18}$$

Integrând relaţia (4.5.18) putem găsi parabola semi-cubică generalizată în planul OYZ (mai multe detalii se pot găsi în [28]) descrisă parametric de

$$\begin{cases} x(\tau) = x_0 \\ y(\tau) = y_0 + \mu x + \frac{1}{6}a^2\nu^2\left(\sqrt{1+\mu^2} - \mu\right)\tau^3 \\ z(\tau) = z_0 + \frac{1}{2}a\nu\left(\sqrt{1+\mu^2} - \mu\right)\tau^2. \end{cases} \tag{4.5.19}$$

Trei tipuri diferite pentru traiectorii astfel generate, cu datele iniţiale specificate în (4.5.5), sunt prezentate în Figura 4.3 pentru a evidenţia caracterul specific în intervale diferite de timp alese corespunzător. În Figura 4.3, scara considerată de pe axe este aleasă astfel încât o unitate corespunde valorii de 10^3 metrii.



$\tau \in [0, 10^{-5}]$ $\quad$ $\tau \in [10^{-5},\, 4.7 \times 10^{-5}]$ $\quad$ $\tau \in [4.7 \times 10^{-5},\, 17 \times 10^{-5}]$

Figure 4.3: $E = (0, 0, 3)$, $B = (3, 0, 0)$

Bibliography

[1] Abraham, R., Marsden, J.E., *Foundations of Mechanics*, Addison Wesley, 2nd Edition, 1978.

[2] Andrica, D., *Critical Point Theory and Some Applications*, Cluj University Press, 2005.

[3] Andrica, D., Caşu, I.N., *Grupuri Lie, aplicaţia exponenţială şi mecanica geometrică,* Presa Universitară Clujeană, 2008.

[4] Andrica, D., Mare, L., *The image of exponential mapping on the linear group* $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, 1989.

[5] Andrica, D., Mare, L., *An application of the fibration theorem of Ehresmann*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank., Series A1, Vol. **41**(1992), 151-155.

[6] Andrica, D., **Rohan, R.-A.**, *The image of the exponential map and some applications*, Proceedings of the 8th Joint Conference on Mathematics and Computer Science MaCS 2010, Komarno, Slovakia, July $14-17$, 2010, $3-14$.

[7] Andrica, D., **Rohan, R.-A**., *Computing the Rodrigues coefficients of the exponential map of the Lie groups of matrices*, Balkan Journal of Geometry and Applications. (trimis spre publicare)

[8] Andrica, D., **Rohan,R.-A.**, *A new way to find the Rodrigues formula fo the Lorentz group*, Carphatian Journal of Mathematics. (trimis spre publicare)

[9] Andrica, D., **Rohan, R.-A.**, *A direct method to determine the Rodrigues coefficients with application to the group $SO(n)$*. (în pregătire)

[10] Baker, A., *Matrix Groups. An Introduction to Lie Group Theory*, SUMS, Springer, 2002.

[11] Belmann, R., E., *Stability Theory of Differential Equations*, McGraw-Hill, New Tork, 1953.

[12] Bourbaki, N., *Elements of Mathematics.Lie Goups and Lie Algebra,* Chapters 1-3, Springer, 1989.

[13] Bröcker, T., tom Dieck, T., *Representations of compact Lie groups*, Springer-Verlag, GTM, vol. **98**, New York, 1985.

[14] Cartan, E., *The Theory of Spinors*, MIT Press, 1966.

[15] Carter, R., Segal, G., MacDonald, I., *Lectures on Lie Goups and Lie Algebra*, Cambridge University Press, 1985.

[16] Chevalley, C., *Theory of Lie Goups I*, Princeton Mathematical Series, No.8, Princeton University Press, 1946.

[17] Coddington, E., A., Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New Tork, 1955.

[18] Curtis, M.L., *Matrix Groups*,Universitext, Springer Verlag, 2nd Edition, 1984.

[19] Dieudonne, J., *Sur les Groupes Clasiques*, Hermann, 3rd Edition, 1967.

[20] Dieudonne, J., *Elements d'Analyse, Tome V. Groupes de Lie Compacts, Groupes de Lie Semi-Simple*, Edition Jacques Gabay, 2003.

[21] Dimitrov, G.K., Mladenov I.M., *A new formula for the exponents of the generators for theLorentz group*, Sevent International Conference on Geometry, Intergrability and Quantization, June $2-10$, 2005, Varna, Bulgaria, I.M. Mladenov and M. de León ,Eds., pp 96-113.

[22] Djokovic, D., *On the exponential map in classical Lie groups*, Journal of Algebra, **64**:76-88,1980.

[23] Duistermaat, J.J., Kolk, J.A.C., *Lie Groups*, Universitext, Springer Verlag, 2000.

[24] Gallier, J.H., *Geometric Methods and Applications, For Computer Science and Engineering*, TAM, Vol.**38**, Springer, 2011.

[25] Gallier, J., Xu, D.,*Computing exponentials of skew-symmetric matrices and logarithms of orthogonal matrices*, International Journal of Robotics and Automation, Vol.17, No.4, 2002, $2-11$.

[26] Gallier, J., *A Concrete Introduction to Classical Loe Groups Via the Exponential Map*, University of Pennsylvania, 2002,

[27] Gantmacher, F.R., *The Theory of Matrices*, Vol.**I**, AMS, Chelsea, 1977.

[28] Gray, A., *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Second Edition, CRC Press, Boca Raton, 1998.

[29] Hall, B., *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations.An Elementary Introduction*, GTM No.**222**, Springer Verlag, 2003.

[30] Helgason, S., *Groups and Geomeric Analysis.Integral Geometry, Invariant Differential Operators and Spherical Functions*, MSM, Vol.**83**, AMS, 2000.

[31] Higham, N.J., *The scaling and squaring method of the matrix exponential revised*, SIAM Journal on Matrix Analisis and Applications, **26**:1179-1193, 2005.

[32] Hilgert, J., and Hofmann, K.H., *Old and new on $SL(2)$*, Manusc. Math. **54** (1985), $17-52$.

[33] Hofmann, K.H., *A memo on the exponential function and regular points*, Arch. Math. **59** (1992), $24-37$.

[34] Hofmann, K.H., and Lawson, J.D., *Divisible subsemigroups of Lie groups*, J. London Math. Soc. **27**, $427 - 437$ (1983).

[35] Hofmann, K.H., and Mukhergea, A., *On the density of the image of the exponential function*, Math. Ann. **234**(1978), $263 - 273$.

[36] Hofmann, K.H., and Rupert, W.A.F., *Lie groups and subsemigroups with surjective exponential function*, Memoirs of the Amer. Math. Soc **618**(1997).

[37] Horn, R.A., Johnson,Ch.R., *Matrix Analysis*,Cambridge University Press, 1990.

[38] Knapp, A.W., *Lie Groups Beyond an Introduction*,Progress in Mathematics Vol.**140**, Birkhauser, 2nd Edition, 2002.

[39] Kim, M.-J.,Kim, M.-S.,Shin, A., *A general construction scheme for unit quaternion curves with simple high order derivatives*, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM, 1995, 369-376.

[40] Kim, M.-J.,Kim, M.-S.,Shin, A., *A compact differential formulafor the first derivative of a unit quaternion curve,* Journal of Visualization and Computer Animation, **7**(1996), 43-57.

[41] Lai, H.L., *Surjectivity of exponential mapping on semisimple Lie groups*, J. Math. Soc. Japan, **29**(1977), 303-325.

[42] Jütler, B., *Visualization of moving objects using dual quaternion curves*, Computers and Graphics, **18**(3), 1994, 315-326.

[43] Jütler, B., *An osculating motion with second order contact for spacial Euclidean motions*, Mechanics and Machine Theory, **32**(7), 1997, 843-853.

[44] Mare, L., *The image of exponential map on a few classes of Lie groups*, Babeş-Bolyai University, Faculty of Mathematics, Seminar on Geometry, Preprint No.2, 1991, 71-78.

[45] Mare, L., *A topological property of the exponential*, Proc. Symposium in Geometry on the occasion of the 190th aniversary of Janos Bolyai and of the 60th aniversary of Marian Ţarină, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca and Târgu Mureş, August 31-September 1, 1992, Preprint No.**2**, 1993 (P. Enghiş and D. Andrica, Eds.), 127-132.

[46] Marsden, J.E., Ratiu, T.S., *Introduction to Mechanics and Symmetry*, TAM, Vol.**17**, Springer Verlag, 1994.

[47] Mladenova, C., *An approach to description of a rigid body motion*, C. R. Acad. Sci. Bulg. **38**, $1657-1660$ (1985).

[48] Mladenova, C.D., *Group theory in the problems of modeling and control of multi-body systems*, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, **8**(2006), 17-121.

[49] Moskowitz, M., and Wüstner, M., *Exponentiality of certain real solvable Lie groups*, Cand. Math. Bull. **41**(1998), $386-373$.

[50] Müller, A., *Group theoretical approaches to vector parametrziation of rotations*, Journal of Geometry and Symmetry un Physics (JGSP) **19**(2010), 43-72.

[51] Naber, G., *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Springer, New York, 1992. Reprinted by Dover, Mineola, New York, 2003.

[52] Nishikawa, M., *Exponential image in the real general linear group*, Bull. Fukuoka Univ. Ed. III, **26**(1976), $35-44$.

[53] Nishikawa, M., *Exponential image in the real special linear group*, Bull. Fukuoka Univ., Ed. III, **28**(1978), 1-6.

[54] Nishikawa, M., *Exponential image in the Lorentz group* $\mathbf{O}(2,1)$, Bull. Fukuoka Univ., Ed. III, **29**(1979), 9-19.

[55] Nishikawa, M., *Exponential image in the group* $\mathbf{O}(n,1)$*, for* $n = 3,4$, Bull. Fukuoka Univ. Ed. III, **31**(1981), 1-11(1982).

[56] Nishikawa, M., *On the exponential map of the group $O(p,q)_0$*, Mem. Fac. Sco. Kyushu Univ. Ser. A, **37**(1983), no.1, 63-69.

[57] Nishikawa, M., *Exponential image in the group* $\mathbf{O}(3,3)$, Bull. Fukuoka Univ., Ed. III, **34**(1984), 13-18(1985).

[58] Nôno, T., *On the singularity of general linear groups*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, **20**(1956/1957), 115-123.

[59] Oprea, J., *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*, AMS, Providencem, Rhode Island, 2000.

[60] Oprea, J., *Differential Geomemtry and Its Applications,* Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2004.

[61] Park, F.C., Ravani, B., *Bézier curves on Riemmanian manifolds and Lie groups with kinematic applications,* Mechanism, Synthesis and Analysis, **70**(1994), 15-21.

[62] Park, F.C., Ravani, B., *Smooth invariant interpolation of rotations*, ACM Transactions of Graphics, **16**(1997), 277-295.

[63] Politi, T.A., *A formula for the exponential of a real skew-symmetric matrix of order 4*, BIT, 2001, vol **41**, No 4, 842-845.

[64] Puta, M., Sima, A., *Some remarks on the Lie groups* $\mathbf{SO}(2,1)$, in Proc. of the 9th National Conf. of the Romanian Mathematical Society, Lugoj, May 2005, M. Megan, Ed., Editura Universităţii de Vest, Timişoara, 354-360.

[65] Putzer, E.J., *Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients*, Amer. Math. Monthly **73**(1966), 2-7.

[66] Rădulescu, S., Andrica, D., *Some remarks on the equation* $f(X) = A$ *in* $M_n(\mathbb{C})$ *and applications*, Itinerant seminar on functional equations, approximation and convexity, Cluj-Napoca, 1988, 281-285.

[67] **Rohan, R.-A.**, *The exponential map and the Euclidean isometries*, Acta Univeristatis Apulensis, **31**(2012), 199-204.

[68] **Rohan, R.-A.**, *Some remarks on the exponential map on the group* $\mathbf{SO}(n)$ *and* $SE(n)$, In Proc. of the XIV Int.Conference Geometry, Integrability and Quantization, $8-13$ June, Varna, Bulgaria, 2012. (acceptată spre publicare)

[69] Rossmann, W., *Lie Groups. An Introduction Through Linear Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Oxford University Press, 2002.

[70] Sagle, A.A., Walde, R.E.,*Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Academic Press, 1973.

[71] Sattinger, D.H., Weaver, O.L., *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*, Applied Math.Science, Vol.**61**, Springer Verlag, 1986.

[72] Selig, J.M., *Lie Algebra*, Monographs in Computer Science, Springer New York, 2005.

[73] Silva Leite, F., Crouch, P, *Closed forms for the exponential mapping on matrix Lie groups based on Putzer's method*, Journal of Mathematical Physics, Vol. **40,** No. **7**(1999), 3561-3568

[74] Tao, T., *Two small facts about Lie Groups*, 25 June, 2011.

[75] Warner, F., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, GTM No.**94**, Springer Verlag, 1983.

[76] Wüstner, M., *Lie groups with surjective exponential function*, Shaker Verlag, Berichte aus der Mathematik, Aachen 2001.

[77] Wüstner, M., *On the exponential function of real splittable and real semisimple Lie groups*, Beitr. Alg. Geometrie **39** (1998), $37-46$.

[78] Wüstner, M., *On the surjectivity of the exponential function of solvable Lie groups*, Math. Nachr. **192** (1998), 255 – 266.

[79] Wüstner, M., *Product decomposition of solvable Lie groups*, Man. Math. **91** (1996), 179 – 194.