UNIUNEA EUROPEANA

GUVERNUL ROMANIEI
MINISTERUL MUNCII, FAMILIEI ŞI PROTECŢIEI SOCIALE
AMPOSDRU

Fondul Social European
POSDRU 2007-2013

Instrumente Structurale
2007-2013

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI
OIPOSDRU

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
CLUJ-NAPOCA

Investeşte în oameni!

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007 – 2013

Axa prioritară: 1 „Educația şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societății bazate pe cunoaştere”

Domeniul major de intervenție: 1.5 „Programe doctorale şi postdoctorale în sprijinul cercetării”

Titlul proiectului: „Studii doctorale inovative într-o societate bazată pe cunoaştere”

Cod Contract: POSDRU/88/1.5/S/60185

Beneficiar: Universitatea Babeş - Bolyai

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

CERCETĂRI ASUPRA APLICAŢIEI EXPONENŢIALE ŞI MECANICA GEOMETRICĂ

Rezumatul tezei de doctorat

Coordonator ştiinţific:

Prof. Univ. Dr. DORIN ANDRICA

Doctorand:

RAMONA-ANDREEA ROHAN

CLUJ-NAPOCA

2012

Cuprins

Introducere

Noţiunea de grup Lie a fost pentru prima dată abordată de matematicianul norvegian Sophus Lie în lucrarea sa "Theorie der Transformations Gruppen", publicată în anul 1881, unde se ocupă cu studiul grupurilor de transformări ale spaţiului euclidean $\mathbb{R}^n$. Într-o primă etapă au fost continuate cercetările lui Sophus Lie de către elevii săi din prima sau a doua generaţie. Dintre aceştia amintim pe F. Engel, W. Killing, L. Maurer, F. Schur, nume cu rezonanţă în teoria grupurilor Lie. W. Killing reuşeşte în această primă fază chiar o clasificare a grupurilor Lie simple, e adevărat incompletă, omiţând cazurile excepţionale. Rezolvarea completă o face mai târziu, în 1891, Élie Cartan în celebra sa teză de doctorat. Aici el reia multe dintre rezultatele anterioare, completându-le şi demonstrându-le în mod riguros. Lui H. Weyl îi revine meritul de a fi introdus pentru prima dată noţiunea de algebră Lie, ceea ce a reprezentat un pas extrem de important în "liniarizarea" întregii teorii a grupurilor Lie. Exponenţiala joacă rolul de intermediar nemijlocit în această asociere, deci reprezintă un instrument extrem de important în studiul grupurilor Lie. Este natural să ne punem problema: care este imaginea exponenţialei pe un grup Lie?

Inventatorii grupurilor şi algebrelor Lie (începând cu Sophus Lie) au privit aceste grupuri ca şi grupuri de simetrie ale obiectelor topologice sau geometrice. Algebrele Lie sunt văzute ca şi transformări infinitezimale asociate simetriilor din grupurile Lie. De exemplu, grupul rotaţiilor $\mathbf{SO}(n)$ este grupul care păstrează orientarea izometriilor spaţiului euclidean E^n. Algebra Lie $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ care conţine matricele pătratice, de ordin n, antisimetrice, cu elemente reale este mulţimea corespunzătoare rotaţiilor infinitezimale. Legătura geometrică dintre un grup Lie şi algebra Lie corespunzătoare constă în faptul că algebra Lie poate fi privită ca şi spaţiul tangent al grupului Lie faţă de identitate. Există o aplicaţie definită pe spaţiul tangent al grupului Lie cu valori în algebra Lie, numită *aplicaţia exponenţială*. Algebra Lie poate fi considerată ca şi liniarizarea grupului Lie (faţă de elementul identitate). Aceste concepte au o realizare concretă în cazul grupurilor de matrice, caz prezentat în lucrarea de faţă. Geometria şi mecanica au fost "parteneri" apropiaţi încă din epoca maeştrilor fondatori (Kepler, Newton, Euler, Maupertuis, Lagrange, Poisson, K.G.J. Jacobi, Hamilton, Liouville) şi apoi a continuatorilor acestora (Noether, Lyapunov, G.D. Birkhoff, Poincaré, Cartan). În vremuri mai apropiate de noi, lucrările esenţiale ale lui Arnold, Kirilov, Kostant, Moser, Smale, Sourian au consolidat această tendinţă. Punctul de vedere geometric în mecanică s-a dovedit a fi un fenomenal succes în a lega domenii extrem de diverse, atât în interiorul, cât şi peste frontierele disciplinelor matematice.

Prezenta lucrare se încadrează în această tematică şi este structurată în patru capitole după cum urmează:

Capitolul 1, întitulat *Aplicaţia exponenţială şi grupurile Lie clasice de matrice*, este format din cinci secţiuni. Acest capitol are în principal un caracter monografic şi introduce o parte din noţiunile fundamentale necesare în dezvoltarea capitolelor următoare. Prima secţiune, *Aplicaţia exponenţială*, introduce definiţia acesteia, faptul că este bine-definită, câteve exemple concrete şi demonstrează câteva proprietăţi importante. Aplicaţia exponenţială ne permite să liniarizăm anumite proprietăţi algebrice ale matricelor. A doua secţiune, *Grupurile Lie clasice de matrice*, introduce grupurile Lie $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ (*grupul general liniar real*), $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ (*grupul special liniar*), $\mathbf{O}(n)$ (*grupul ortogonal*), $\mathbf{SO}(n)$ (*grupul special ortogonal* sau *grupul rotaţiilor*), algebrele lor corespunzătoare $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$ şi aplicaţiile exponenţiale asociate. A treia secţiune, *Grupul special ortogonal* $\mathbf{SO}(n)$ *şi algebra Lie* $\mathfrak{so}(n)$, arată că aplicaţia exponenţială asociată este bine-definită şi surjectivă. În cazul în care $n = 3$ avem o formulă explicită pentru aplicaţia exponenţială şi anume formula Rodrigues (1840). Cea de-a patra secţiune, *Matrice hermitiene şi alte matrice complexe speciale*, introduce grupurile Lie $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ (*grupul general liniar complex*), $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$ (*grupul special liniar complex*), $\mathbf{U}(n)$ (*grupul unitar*), $\mathbf{SU}(n)$ (*grupul special unitar*), algebrele corespunzătoare $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$, iar aplicaţiile corepunzătoare sunt bine-definite şi surjective, mai puţin pentru aplicaţia $\exp : \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \to \mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$, care nu este surjectivă. De asemenea sunt prezentate câteva rezultate despre matricele hermitiene. Ultima secţiune a acestui capitol, *Grupul special Euclidean $SE(n)$ şi algebra Lie $se(n)$*, studiază grupul $SE(n)$ al aplicaţiilor afine induse de transformările ortogonale, de asemenea numite mişcări rigide, şi aplicaţia Lie corespunzătoare. În acest caz, aplicaţia exponenţială este surjectivă. Grupurile $SE(2)$ şi $SE(3)$ joacă un rol fundamental în robotică, dinamică şi planificarea mişcării.

În **Capitolul 2**, *Grupuri Lie exponenţiale*, sunt prezentate următoarele două probleme de o importanţă deosebită: **Problema 1.** *Să se găsească condiţiile pentru grupul Lie G astfel încât aplicaţia exponenţială este surjectivă* şi **Problema 2.** *Să se determine imaginea $E(G) = \exp(g)$ a aplicaţiei exponenţiale.* J. Dixmier a pus pentru prima oară problema determinării imaginii aplicaţiei exponenţiale pentru grupurile Lie rezolubile care sunt simplu conexe. Numai în câteva situaţii speciale avem $G = E(G)$, iar grupurile cu această proprietate se numesc *grupuri Lie exponenţiale*. O monografie dedicată grupurilor Lie exponenţiale este [76]. Grupurile Lie compacte şi conexe sunt exponenţiale. Secţiunea 2.2 introduce descompunerile Jordan multiplicative si aditive. Acestea joacă un rol important în investigarea surjectivităţii aplicaţiei exponenţiale. Secţiunea 2.3 prezintă noţiuni legate de regularitate. Pentru algebrele Lie există două noţiuni legate de regularitate total diferite; una legată de reprezentarea adjunctă şi una legată de aplicaţia exponenţială. Pentru grupuri Lie regularitatea este considerată faţă de reprezentarea adjunctă. Rezultă că ambele concepte de regularitate ale algebrelor Lie sunt legate de regularitatea grupurilor de elemente date de aplicaţia exponenţială. În cea de-a patra secţiune, având în vedere că problema referitoare la surjectivitatea aplicaţiei exponenţiale a unui grup Lie conduce la pre-imaginea elementelor grupului, este important de determinat pre-imaginile elementelor Ad-semisimple si Ad-unipotente. Cea de-a cincea secţiune prezintă exemple referitoare la grupurile Lie $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$, $\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$ şi $\mathbf{SO}(3)$. Secţiunea 2.6, *Grupuri Lie slab exponenţiale şi grupuri Lie tare exponenţiale*, introduce noţiunile de grup Lie *slab exponenţial*, *exponenţial* şi *tare exponenţial*. Ultima secţiunea a acestui capitol, *Grupurile Lie compacte şi conexe sunt exponenţiale*, prezintă două demonstraţii diferite pentru un rezultat fundamental care dă o clasă de grupuri exponenţiale. Prima demonstraţie este preluată după T. Bröcker, T. tom Dieck [13] şi D. Andrica, I.N. Caşu [3]. Ideea celei de-a doua demonstraţii este dată de T. Tao [74] şi este descrisă în detaliu în R. -A. Rohan [67].

Astfel **Capitolul 3**, întitulat *Problema determinării imaginii aplicaţiei exponenţiale*, începe cu o probleme de interes: *Ce condiţii trebuie să satisfacă polinomul f pentru ca funcţia $\widetilde{f}$ să fie surjectivă?* S-a arătat în cazul $K=\mathbb{R}$ şi f un polinom de grad par, că operatorul $\widetilde{f}$ nu este surjectiv. În cazul în care f este de grad impar, problema este foarte dificilă şi rămâne, sub formă generală deschisă. S-au obţinut exemple de polinoame $f\in\mathbb{R}[X]$ de grad impar pentru care $\widetilde{f}$ este surjectiv. Rezultatele de acest tip îi aparţin lui L. Mare care a urmat metode de lucru din articolul lui W.E. Roth.

Deşi în cazul $K=\mathbb{R}$ problema de la care s-a pornit iniţial este foarte dificilă, avem rezultate satisfăcătoare pentru $K=\mathbb{C}$. Pornind de la un rezultat cu caracter general enunţat de S. Rădulescu şi D. Andrica pentru situaţia în care f este olomorfă în $\mathbb{C}$ se obţine o teoremă de caracterizare a polinoamelor $f\in\mathbb{C}[X]$ cu proprietatea că $\widetilde{f}$ este surjectivă (adică ecuaţia $f(X)=A$ are soluţie pentru orice $A\in M_n(\mathbb{C})$). În final vor fi prezentate mai multe exemple de polinoame $f\in\mathbb{C}[X]$ care satisfac condiţiile teoremei, deci pentru care $\widetilde{f}$ este surjectivă. Urmărim prezentarea din articolul D. Andrica, R.-A. Rohan [6] cuprinzând rezultate importante asupra surjectivităţii, Teorema Hamiltion-Cayley, Teorema de interpolare Hermite-Lagrange şi exemple. Secţiunea a doua, *Imaginea aplicaţiei exponenţiale pe grupul $GL(n,\mathbb{R})$*, va rezolva problema determinării imaginii aplicaţiei exponenţiale pentru grupul liniar general real. În continuare grupurile Lie $\mathbf{O}_K(n)$ sunt prezentate în secţiunea 3.3. Ultima secţiune a acestui capitol, *Formule de tip Rodrigues*, introduce formulele clasice pentru $\mathbf{SO}(n)$, $n = 2$ şi $n = 3$. Mai departe, pentru grupul $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, problema determinării unei formule explicite a aplicaţiei exponenţiale $\exp(X)$ se reduce la problema determinării coeficienţilor $a_0(X), a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X)$. Vom numi această problemă generală *problema Rodrigues* şi coeficienţii $a_0(X), a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X)$ *coeficienţii Rodrigues* ai aplicaţiei exponenţiale în raport cu matricea $X \in M_n(\mathbb{R})$. Sunt prezente rezultatele din lucrarea D. Andrica şi R.-A. Rohan [7] şi mai departe vom indica o modalitate nouă de determinare a coeficienţilor lui Rodrigues $a_0(X)$, $a_1(X), \ldots,$ $a_{n-1}(X)$ din formula (3.4.2). Rezultatul principal se regăseşte în Teorema 3.4.4. Apoi, în subsecţiunea 3.4.3, *Determinarea coeficienţilor Rodrigues prin metoda lui Putzer*, este prezentată o metodă utilă pentru scrierea explicită a problemei (3.4.8). Acest lucru este în mod particular util în cazul în care matricea A nu poate fi diagonalizată, caz în care forma canonică Jordan a matricei nu poate fi determinată. Comparând cu metoda lui Putzer, rezultatul obţinut în Teorema 3.4.4 este mai simplu în cazul în care valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricei X sunt distincte două câte două, deoarece în acest caz trebuie sa rezolvăm doar sistemul liniar (3.4.5) Metoda lui Putzer este mai bună în cazul în care avem multiplicităţi ale valorilor proprii ale matricei X. În situaţii concrete putem combina cele două metode. Este cunoscut faptul că algebra Lie $\mathfrak{so}(n)$ corespunzătoare grupului $\mathbf{SO}(n)$ este formată din toate matricele antisimetrice din $M_n(\mathbb{R})$ şi paranteza Lie este comutatorul standard al matricelor $[A, B] = AB - BA$. Aplicaţia exponenţială $\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ este definită prin formula 3.4.1, deoarece este dată de restricţia $\exp|_{\mathsf{so}(n)}$ a aplicaţiei exponenţiale $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$. Ştim că pentru orice grup Lie compact şi conex aplicaţia exponenţială este surjectivă (a se vedea T.Bröcker, T.tom Dieck [13], D.Andrica, I.N.Caşu [3] pentru demonstraţia standard sau R.-A.Rohan [67] pentru o demonstraţie bazată pe o idee nouă dată de T.Tao), adică orice grup Lie compact şi conex este exponenţial (mai multe detalii despre grupurile exponenţiale se pot găsi în monografia M.Wüstner [76]). Deoarece grupul $\mathbf{SO}(n)$ este compact rezultă că aplicaţia exponenţială $\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ este surjectivă. Surjectivitatea aplicaţiei exponenţiale pentru grupul $\mathbf{SO}(n)$ este o proprietate importantă. Într-adevăr, acesta implică existenţa unei inverse locale $\log : \mathbf{SO}(n) \to \mathfrak{so}(n)$ care are aplicaţii interesante. În lucrarea J.Gallier, D.Xu [25] este menţionat faptul că funcţiile exp şi log ale grupului $\mathbf{SO}(n)$ pot fi folosite pentru interpolarea mişcării (a se vedea M.J.Kim, M.-S.Shin [39], [40] şi F.C.Park, B.Ravani [61], [62]). Interpolarea mişcării şi mişcările raţionale au fost totodată investigate de B.Jütler [42], [43]. De asemenea, surjectivitatea aplicaţiei exponenţiale a grupului $\mathbf{SO}(n)$ oferă posibilitatea descrierii rotaţiilor spaţiului Euclidean $\mathbb{R}^n$(mai multe detalii în lucrarea [67]). În subsecţiunea 3.4.5 sunt determinaţi coeficienţii şi formulele Rodrigues pentru grupul $\mathbf{SE}(n)$, pentru cazurile $n = 2$ şi $n = 3$. Subsecţiunea 3.4.6 determină coeficienţii Rodrigues pentru grupul $\mathbf{O}(2, 1)$. În lucrarea D.Andrica, R.-A.Rohan [6] a fost utilizată metoda lui Putzer. În continuare vom folosi rezultatul principal din lucrarea D.Andrica, R.-A.Rohan [7] conţinut în Teorema 3.4.4.

Capitolul 4, *Aplicaţii în mecanica geometrică*, face legătura între geometrie şi mecanică. Secţiunea *Descrierea grupului* $\mathbf{SO}(n)$ *în forma Hamilton-Cayley* introduce aplicaţia Cayley a acestui grup, formule de tip Rodrigues pentru transformarea Cayley (rezultatul este dat de Teorema 4.1.1) şi transformarea Cayley pentru grupul $\mathbf{SE}(n)$, pentru cazurile $n = 2$ şi $n = 3$. (rezultatul principal este dat de Teorema 4.1.3). Mai departe formula (4.2.2) redă o parametrizare explicită pentru grupul $\mathbf{SO}(3)$. Concluzia secţiunii 4.3, *Forma analitică a elementelor din* $\mathbf{SO}(n)$, este aceea că orice matrice de rotaţie, atunci când exprimată într-un sistem de coordonate adecvat, se împarte în rotaţii independente ale subpaţiilor doi-dimensionale la fel ca în formula 4.3.1. Rezultate referitoare la formulele de tip Rodrigues pentru grupul Lorentz $\mathbf{SO}(3, 1)$ sunt prezentate în secţiunea 4.4. şi două demonstraţii, una bazată pe structura algebrei Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$ şi una alternativă care utilizează sistemul 3.4.6. Multe modele matematice ale proceselor din fizică, biologie şi chimie sunt bazate pe sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare având coeficienţi constanţi. De exemplu, prin rescrierea ecuaţiei clasice a legii de energie a lui Lorentz în forma relativă, mişcarea unei particule încărcate într-un câmp electromagnetic constant poate fi descrisă de un sistem cu patru ecuaţii diferenţiale, numite *ecuaţiile lui Lorentz*.Ultima secţiune, *Mişcarea unei particule încărcate într-un câmp electromagnetic constant*, determină traiectorile unei particule cu masa m care conduce o încărcătură electrică e într-un câmp electromagnetic constant $\mathcal{F}$. În acest scop trebuie să rezolvăm sistemul ecuaţiilor lui Lorentz cu datele iniţiale respective.

Cuvinte cheie: grup Lie, algebră Lie, aplicaţia exponenţială a unui grup Lie, grup Lie exponenţial, formula Rodrigues, coeficienţi Rodrigues, grupul general liniar $GL(n, \mathbb{R})$, grupul special ortogonal $\mathbf{SO}(n)$, grupul special euclidean $\mathbf{SE}(n)$, izometrie euclideană, forma Hamilton-Cayley, transformare Cayley, grupul Lorentz $\mathbf{SO}(3, 1)$.

Mulţumiri:

În încheiere aş dori să-i mulţumesc îndrumătorului meu de doctorat, Prof. Univ. Dr. Dorin Andrica, pentru modul în care m-a îndrumat, pentru sprijin şi pentru observaţiile pertinente de care am beneficiat pe parcursul eleborării acestei lucrări. Totodată, aş dori să le mulţumesc pentru îndrumarea oferită pe parcursul stagiului de mobilitate de la Institutul de Matematică şi Informatică, Academia Bulgară de Ştiinţe, Sofia, Bulgaria Prof. Univ. Dr. Oleg Mushkarov şi Prof. Univ. Dr. Ivailo Mladenov de la Institutul de Biofizică, Academia Bulgară de Ştiinţe, Sofia, Bulgaria.

Mulţumiri speciale sunt aduse comisiei de îndrumare formată din Conf. Univ. Dr. Paul Aurel Blaga, Conf. Univ. Dr. Cornel-Sebastian Pintea şi Lect. Univ. Dr. Liana Ţopan(Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca), comisiei pentru susţinerea publică a tezei de doctorat formată din Conf. Univ. Dr. Paul Aurel Blaga(Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca), Conf. Univ. Dr. Mircea Claudiu Crâşmăreanu(Facultatea de Matematică, Universitatea "Al. I. Cuza", Iaşi) şi Conf. Univ. Dr. Ioan Radu Peter(Facultatea de Automatizări şi Calculatoare, Universitatea Tehnică, Cluj-Napoca) şi profesorilor de la catedra de Geometrie, Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca.

Sunt, de asemenea, recunoscătoare pentru sprijinul financiar dat de Universitatea

Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca şi de Institutul de Studii Doctorale prin intermediul Proiectului POSDRU/88/1.5/S/60185.

Nu în ultimul rând, doresc să mulţumesc familiei mele pentru sprijinul necondiţionat, încurajare şi încredere.

Capitolul 1

Aplicaţia exponenţială şi grupurile Lie clasice de matrice

Acest capitol începe cu prezentarea definiţiilor şi fundamentele referitoare la aplicaţia exponenţială pentru matrice pătratice cu elemente reale. În paragraful 1.2 sunt trecute în revistă grupurile Lie clasice de matrice: grupul general liniar real $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, grupul ortogonal $\mathbf{O}(n)$ şi grupul special ortogonal $\mathbf{SO}(n)$, algebrele lor Lie, insistându-se asupra aplicaţiei exponenţiale. Paragraful 1.3 este dedicat grupului special ortogonal $\mathbf{SO}(n)$. Se arată că aplicaţia exponenţială $\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ este corect definită şi surjectivă (Teorema 1.3.1). Demonstraţia prezentată are un caracter algebric, urmând ca implicaţiile geometrice să fie dezvoltate în capitolele următoare. Tot în acest paragraf prezentăm, din punct de vedere algebric, formula clasică a lui Rodrigues (Lema 1.3.2) care simplifică calculul exponenţialei grupului $\mathbf{SO}(3)$, formulă cu multiple implicaţii în mecanica corpului solid. Paragraful 1.4 prezintă grupul general liniar complex $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, grupul unitar $\mathbf{U}(n)$ şi grupul special unitar, insistându-se asupra surjectivităţii aplicaţiei exponenţiale asociate (Teorema 1.4.3). Ultimul paragraf este dedicat grupului special euclidean $\mathbf{SE}(n)$, rezultatul principal fiind conţinut în Teorema 1.5.5. Aceasta arată că aplicaţia exponenţială a acestui grup este bine definită şi este surjectivă. Dintre referinţele utilizate în elaborarea acestui capitol menţionăm A. Baker [10], M.L. Curtis [18], J. Dieudonné [19], J.H. Gallier [24], D.H. Sattinger, O.L. Weaver [71], F. Warner [75].

1.1 Aplicaţia exponenţială

Fiind dată o matrice $A = (a_{ij})$, pătratică, de ordin n, cu elemente reale sau complexe, definim aplicaţia exponenţială a lui A, notată cu e^A, sau $\exp A$, ca fiind matricea definită prin seria formală

$$e^A = I_n + \sum_{p\geq 1} \frac{A^p}{p!} = \sum_{p\geq 0} \frac{A^p}{p!},$$

considerând $A^0 = I_n$. Problema care se ridică constă în bine-definirea exponenţialei. Următoarea lemă arată că seria mai sus definită este absolut convergentă.

Lema 1.1.1 *Fie $A = (a_{ij})$ o matrice pătratică, de ordin n, cu elemente reale sau complexe şi definim numărul*

$$\mu = \max\left\{\left|a_{ij}^{(p)}\right| |1 \leq i, j \leq n\right\}.$$

Dacă $A^p = (a_{ij}^{(p)})$ atunci au loc inegalităţile

$$\left|a_{ij}^{(p)}\right| \leq (n\mu)^p$$

pentru $1 \leq i, j \leq n$. Ca şi o consecinţă, pentru orice indici i, j, cu $1 \leq i, j \leq n$ seria

$$\sum_{p\geq 0} \frac{a_{ij}^{(p)}}{p!}$$

este absolut convergentă şi prin urmare matricea

$$e^A = \sum_{p\geq 0} \frac{A^p}{p!}$$

este bine-definită.

Lema 1.1.2 *Fie A şi U matrici cu elemente reale sau complexe şi presupunem că matricea U este inversabilă. Atunci are loc relaţia*

$$e^{UAU^{-1}} = Ue^AU^{-1}.$$

Lema 1.1.3 *Fiind dată o matrice pătratică A, cu elemente complexe, de ordin n, există o matrice inversabilă P şi o matrice superior triunghiulară T astfel încât*

$$A = PT^{-1}P.$$

Observaţia 1.1.4 Dacă E este un spaţiu hermitian, demonstraţia Lemei 1.1.3 poate fi uşor adaptată pentru a dovedi că există o bază ortonormată $(u_1, \ldots, u_n)$ faţă de care matricea aplicaţiei f este superior triunghiulară. Cu alte cuvinte există o matrice *unitară* U şi o matrice superior triunghiulară T astfel încât $A = UTU^{-1}$, afirmaţie cunoscută ca şi *lema lui Schur*. Utilizând acest rezultat putem ajunge imediat la faptul că dacă A este o matrice hermitiană atunci există o matrice unitară U astfel şi o matrice diagonală D cu elemente reale astfel încât $A = UDU^*$.

Lema 1.1.5 *Fiind dată o matrice pătratică A, de ordinul n, cu elemente complexe, dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale acesteia, atunci $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ sunt valorile proprii ale matricei e^A. Mai mult, dacă u este un vector propriu al matricei A corepunzător lui λ_i atunci u este vector propriu al matricei e^A pentru valoarea proprie e^{λ_i}.*

Lema 1.1.6 *Fiind date două matrice complexe, pătratice, de ordinul n, A şi B, dacă are loc relaţia $AB = BA$, atunci avem*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

1.2 Grupurile Lie clasice de matrice

Mulţimea matricelor pătratice, inversabile, de ordin n, cu elemente reale formează un grup împreună cu operaţia de înmulţire, notat prin $GL(n, \mathbb{R})$. Submulţimea formată din acele matrice din grupul $GL(n, \mathbb{R})$ care au valoarea determinantului egală cu $+1$ este un subgrup al lui $GL(n, \mathbb{R})$, notat prin $SL(n, \mathbb{R})$. Este uşor de verificat că mulţimea matricelor pătratice, de ordin n, ortogonale formează un grup împreună cu operaţia de înmulţire, notat prin $\mathbf{O}(n)$. Submulţimea grupului $\mathbf{O}(n)$ formată din acele matrice care au valoarea determinantului egală cu $+1$ este un subgrup al lui $\mathbf{O}(n)$, notat cu $\mathbf{SO}(n)$. Matricele din grupul $\mathbf{SO}(n)$ se mai numesc şi *matrice de rotaţie*. Se arată că mulţimea matricelor pătratice, de ordin n, cu valori reale şi care au urma nulă formează un spaţiu vectorial împreună cu operaţiile clasice de adunare şi înmulţire cu scalari; la fel se poate arăta că mulţimea matricelor antisimetrice formează un spaţiu vectorial.

Grupul $GL(n, \mathbb{R})$ se numeşte *grupul general liniar real* şi subgrupul său $SL(n, \mathbb{R})$ se numeşte *grupul special liniar*. Grupul $\mathbf{O}(n)$ al matricelor ortogonale se numeşte *grupul ortogonal*, iar subgrupul său $\mathbf{SO}(n)$ se numeşte *grupul special ortogonal* (sau *grupul rotaţiilor*). Spaţiul vectorial al matricelor pătratice, de dimensiune n, cu elemente reale şi cu urma nulă este notat prin $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ şi spaţiul vectorial al matricelor antisimetrice, pătratice, de dimensiune n este notat prin $\mathfrak{so}(n)$.

Observaţia 1.2.1 Notaţiile $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ şi $\mathfrak{so}(n)$ necesită câteva explicaţii suplimentare. Grupurile $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $\mathbf{O}(n)$ şi $\mathbf{SO}(n)$ sunt şi grupuri topologice, ceea ce înseamnă că sunt spaţii topologice (văzute ca şi subspaţii ale lui $\mathbb{R}^{n^2}$) şi înmulţirea şi inversa sunt operaţii continue (de fapt chiar netede). Aceste grupuri se numesc *grupuri Lie*. Spatiile reale vectoriale $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ şi $\mathfrak{so}(n)$ sunt *algebre Lie*. Încă nu am definit structura pentru cele două algebre $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ şi $\mathfrak{so}(n)$. Structura de algebră este dată de *paranteza Lie*, care este definită de comutatorul matricelor

$$[A, B] = AB - BA.$$

Algebrele Lie sunt asociate grupurilor Lie. De fapt algebra Lie a unui grup Lie este spaţiul tangent al grupului la elementul identitate, adică spaţiul tuturor vectorilor tangenţi la elementul unitate (în acest caz matricea unitate I_n). Într-un anume sens, algebra Lie este o liniarizare a grupului Lie. Aplicaţie exponenţială este o aplicaţie definită pe algebra Lie cu valori în grupul Lie, spre exemplu avem

$$\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$$

şi

$$\exp : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}).$$

Aplicaţia exponenţială permite de obicei o parametrizare a elementelor grupului Lie cu obiectele mai simple ale algebrei Lie.

Vom vedea în cele ce urmează că algebra Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ constă în mulţimea matricelor pătratice, de dimensiune n, cu valori reale şi că $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$.

Proprietăţile aplicaţiei exponenţiale joacă un rol important în studiul unui grup Lie. De exemplu, este usor de arătat că aplicaţia

$$\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}).$$

este bine-definită, dar din moment ce orice matrice de forma e^A are valoarea determinantului pozitivă rezultă că aplicaţia exp nu este surjectivă. Datorită proprietăţii

$$\det\left(e^A\right) = e^{trA},$$

aplicaţia

$$\exp : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$$

este bine-definită.

Am arătat în Secţiunea 1.1 că nu este nici această aplicaţie sujectivă. Vom vedea însă în Secţiunea 1.3 că aplicaţia

$$\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$$

este bine-definită şi surjectivă.

Aplicaţia

$$\exp : \mathfrak{o}(n) \to \mathbf{O}(n)$$

este bine-definită, dar nu este surjectivă din moment ce există matrice în $\mathbf{O}(n)$ cu valoarea determinantului egală cu -1.

1.3 Grupul special ortogonal SO(n) şi algebra Lie $\mathfrak{so}(n)$

Teorema 1.3.1 *Aplicaţia exponenţială*

$$\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$$

este bine-definită şi surjectivă.

Pentru cazul în care $n = 3$ (şi matricea A este antisimentrică) există o formulă explicită pentru matricea e^A. Pentru orice matrice antisimetrică pătratică, de ordinul 3, cu elemente reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

fie $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ şi

$$B = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix},$$

avem următorul rezultat cunoscut ca şi *formula lui Rodrigues* (1840).

Lema 1.3.2 *Aplicaţia exponenţială* $\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathbf{SO}(3)$ *este dată de*

$$e^A = (\cos\theta)\, I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} A + \frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2} B,$$

sau echivalent de

$$e^A = (\cos\theta)\, I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} A + \frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2} A^2,$$

dacă $\theta \neq 0$*, cu* $e^{0_3} = I_3$*.*

Lema 1.3.3 *Pentru orice matrice simetrică* B*, matricea* e^B *este simetrică şi pozitiv definită. Pentru orice matrice simetrică şi pozitiv definită* A *există o matrice simetrică unică* B *astfel încât are loc relaţia* $A = e^B$*.*

1.4 Matrice hermitiene şi alte matrice complexe speciale

Mulţimea matricelor pătratice, de dimensiune n, inversabile şi cu elemente complexe formează un grup împreună cu multiplicarea, notat prin $GL(n, \mathbb{C})$. Submulţimea care conţine acele matrici din grupul $GL(n, \mathbb{C})$ a căror determinant au valoarea +1 formează un subgrup al lui $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, notat cu $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$. Este uşor de verificat că mulţimea matricelor unitate, pătratice, de dimensiune n, cu elemente complexe formează un subgrup împreună cu operaţia de multiplicare, notat prin $\mathbf{U}(n)$. Submulţimea grupului $\mathbf{U}(n)$ conţinând acele matrice care au valoarea determinantului egală cu +1 este un subgrup al grupului $\mathbf{U}(n)$, notat cu $\mathbf{SU}(n)$. Putem verifica faptul că mulţimea matricelor pătratice, de dimensiune n, cu elemente complexe şi care au urma nulă formează un spaţiu vectorial real împreună cu operaţia de adunare şi în mod similar pentru matricele hermitiene simetrice şi pentru matricele hermitiene simetrice cu urma nulă.

Definiţia 1.4.1 Grupul $GL(n, \mathbb{C})$ se numeşte *grupul special liniar complex* şi subgrupul său $SL(n, \mathbb{C})$ se numeşte *grupul special liniar complex*. Grupul $\mathbf{U}(n)$ al matricelor unitare se numeşte *grupul unitar* şi subgrupul său $\mathbf{SU}(n)$ se numeşte *grupul special unitar*. Spaţiul vectorial real al matricelor pătratice, de dimensiune n, cu elemente complexe care au urma nulă se notează cu $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, spaţiul matricelor hermitiene simetrice se notează cu $\mathfrak{u}(n)$ şi spaţiul vectorial real definit de intersecţia $\mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ se notează cu $\mathfrak{su}(n)$.

Observaţia 1.4.2 (**1**) La fel ca şi în cazul real, grupurile $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{U}(n)$ şi $\mathbf{SU}(n)$ sunt grupuri topologice (văzute ca şi subspaţii ale lui $\mathbb{R}^{2n^2}$), de fapt varietăţi reale nedete. Ele posedă o structură de grup *Lie*. Spaţiile vectoriale reale $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{u}(n)$ şi $\mathfrak{su}(n)$ sunt *algebrele Lie* asociate grupurilor $SL(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{U}(n)$ şi $\mathbf{SU}(n)$. Structura de algebră este dată de *paranteza Lie*, care este definită ca şi comutatorul uzual al matricelor

$$[A, B] = AB - BA.$$

(**2**) Este de asemenea posibil să definim grupuri Lie complexe, ceea ce înseamnă că sunt grupuri topologice şi varietăţi complexe netede. Se dovedeşte că grupurile $GL(n, \mathbb{C})$ şi $SL(n, \mathbb{C})$ sunt varietăţi complexe în timp ce grupurile $\mathbf{U}(n)$ şi $\mathbf{SU}(n)$ nu sunt.

Teorema 1.4.3 *Aplicaţiile exponenţiale*

$$\exp : \mathfrak{u}(n) \to \mathbf{U}(n) \text{ şi } \exp : \mathfrak{su}(n) \to \mathbf{SU}(n)$$

sunt bine-definite şi surjective.

1.5 Grupul special euclidean SE(n) şi algebra Lie $\mathfrak{se}(n)$

În această secţiune studiem grupul $SE(n)$ al aplicaţiilor afine induse de transformările ortogonale, de asemenea numite mişcări rigide, şi aplicaţia Lie corespunzătoare. Vom arăta că aplicaţia exponenţială este surjectivă. Grupurile $SE(2)$ şi $SE(3)$ joacă un rol fundamental în robotică, dinamică şi planificarea mişcării.

Definiţia 1.5.1 Mulţimea aplicaţiilor afine ρ ale spaţiului $\mathbb{R}^n$, definite prin

$$\rho(X) = RX + U,$$

unde R este o matrice de rotaţie ($R \in \mathbf{SO}(n)$) şi U este un vector din $\mathbb{R}^n$, formează un grup împreună cu operaţia de compunere numit *grupul izometriilor afine directe* (sau mişcări rigide) sau *grupul special Euclidean*. Acesta se notează cu $SE(n)$.

Fiecare mişcare rigidă poate fi reprezentată de o matrice pătratică de dimensiune $n+1$ descompusă în blocuri de forma

$$\begin{pmatrix} R & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

adică avem

$$\begin{pmatrix} \rho(X) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

dacă şi numai dacă

$$\rho(X) = RX + U.$$

Definiţia 1.5.2 Spaţiul vectorial al matricelor pătratice, cu valori reale, de ordinul $n+1$, descompuse în blocuri de forma

$$A = \begin{pmatrix} \Omega & U \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde Ω este o matrice antisimetrică şi U este un vector din spaţiul $\mathbb{R}^n$, este notat prin $\mathfrak{se}(n)$.

Observaţia 1.5.3 Grupul $SE(n)$ este un grup Lie, iar algebra sa Lie corespunzătoare este $\mathfrak{se}(n)$.

Lema 1.5.4 *Fiind dată o matrice pătratică, de dimensiune $n+1$, definită în blocuri*

$$A = \begin{pmatrix} \Omega & U \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde Ω este o matrice antisimetrică şi U este un vector din spaţiul $\mathbb{R}^n$, are loc relaţia

$$A^k = \begin{pmatrix} \Omega^k & \Omega^{k-1}U \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde $\Omega^0 = I_n$. Ca şi o consecinţă, avem

$$e^A = \begin{pmatrix} e^\Omega & VU \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde

$$V = I_n + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k+1)!} \Omega^k.$$

Teorema 1.5.5 *Aplicaţia exponenţială*

$$\exp : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$$

este bine-definită şi surjectivă.

În cazul în care $n = 3$, fiind dată o matrice antisimetrică

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

fie $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, este uşor de arătat că dacă $\theta = 0$, atunci avem

$$e^A = \begin{pmatrix} I_3 & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

şi dacă $\theta \neq 0$ (folosind faptul că $\Omega^3 = -\theta^2\Omega$), atunci

$$e^\Omega = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta}\Omega + \frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2}\Omega^2$$

şi

$$V = I_3 + \frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2}\Omega + \frac{(\theta - \sin\theta)}{\theta^3}\Omega^2.$$

Capitolul 2

Grupuri Lie exponenţiale

2.1 Aplicaţia exponenţială pe un grup Lie

În ceea ce urmează grupurile Lie vor fi notate cu majuscule din limba latină şi algebrele Lie corespunzătoare, prin litere mici corespunzătoare din alfabetul gotic.

Se consideră un grup Lie G cu elemente reale sau complexe, algebra Lie corespunzătoare $\mathfrak{g}$ şi aplicaţia exponenţială $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$. Deşi această funcţie este remarcabilă este încă o problemă deschisă în cazul general de a determina condiţii când aplicaţia exponenţială este surjectivă. Un lucru cunoscut este faptul că un grup Lie abelian conex are o aplicaţie exponenţială surjectivă. Mai mult, grupurile Lie conexe nilpotente au aplicaţia exponenţială surjectivă la fel ca şi grupurile Lie conexe compacte. Cu toate acestea în ultimii s-au făcut progrese şi astfel această problemă a fost rezolvată pentru multe clase de grupuri Lie.

Fie G un grup Lie cu algebra sa Lie $\mathfrak{g}$. Este cunoscut faptul că aplicaţia exponenţială $\exp : \mathfrak{g} \to G$ este definită prin $\exp(X) = \gamma_X(1)$, unde $X \in \mathfrak{g}$ şi γ_X este subgrupul cu un parametru al lui G corespunzător lui X. Reamintim următoarele proprietăţi ale aplicaţiei exponenţiale:

1) $\gamma x\,(t) = \exp\,(tX)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi orice $X \in \mathfrak{g}$;

2) $\exp\,(sX)\exp\,(tX) = \exp\,(s+t)\,X$, pentru orice $s,\, t \in \mathbb{R}$ şi orice $X \in \mathfrak{g}$;

3) $\exp\,(-tX) = (\exp tX)^{-1}$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi orice $X \in \mathfrak{g}$;

4) $\exp : \mathfrak{g} \to G$ este o aplicaţie netedă care este un difeomorfism local în $0 \in \mathfrak{g}$ şi $\exp(0) = e$, unde e este elementul neutru al grupului G;

5) imaginea $\exp(\mathfrak{g})$ a aplicaţiei exponenţiale generează componenta conexă G_e a unităţii $e \in G$;

6) dacă $f : G_1 \to G_2$ este un morfism de grupuri Lie şi $f_* : L(\mathfrak{g}_1) \to L(\mathfrak{g}_2)$ este morfismul de algebre Lie indus de f, atunci următoarea diagramă este comutativă

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{f_*} & \mathfrak{g}_2 \\ \exp_1 \downarrow & & \downarrow \exp_2 \\ G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 \end{array}$$

adică avem relaţia $f \circ \exp_1 = \exp_2 \circ f_*$.

Din proprietatea 5) rezultă că următoarele două probleme sunt de o importanţă deosebită:

Problema 1. *Să se găsească condiţiile pentru grupul Lie G astfel încât aplicaţia exponenţială este surjectivă.*

Problema 2. *Să se determine imaginea $E(G) = \exp(g)$ a aplicaţiei exponenţiale.*

2.2 Descompuneri Jordan

În aceast paragraf se vor introduce descompunerile Jordan multiplicative si aditive. Acestea joacă un rol important în investigarea surjectivităţii aplicaţiei exponenţiale.

Definiţia 2.2.1 Fie $\mathbb{k}$ un corp de caracteristică 0 şi V un $\mathbb{k}-$spaţiu vectorial finit dimensonial. Un element $s \in End(V)$ se numeşte *semisimplu* dacă pentru orice subspaţiu $s-$invariant $W \subseteq V$ există un subspaţiu $s-$invariant $U \subseteq V$ astfel încât $V = W \oplus U$. Un element $n \in End(V)$ se numeşte *nilpotent* dacă există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $n^m = 0$. Un element $u \in \mathbf{GL}(V)$ se numeşte *unipotent* dacă elementul $u - 1$ este nilpotent.

Teorema 2.2.2 (i) *Fie $\mathbb{k}$ un corp de caracteristică 0 şi V un $\mathbb{k}-$spaţiu vectorial finit* *dimensonial. Pentru fiecare element $x \in End\,(V)$, există $x_s \in End\,(V)$ semisimplu şi $x_n \in \mathbf{GL}\,(V)$ nilpotent care satisfac relaţia $x_s x_n = x_n x_s$ şi avem $x = x_s + x_n$. Această descompunere este unică.*

(ii) Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional cu elemente reale sau complexe. Pentru orice element $g \in \mathbf{GL}\,(V)$ există $g_s \in \mathbf{GL}\,(V)$ semisimplu şi $g_u \in \mathbf{GL}\,(V)$ nilpotent astfel încât $g = g_s g_u = g_u g_s$. Această descompunere este unică.

Aceste descompuneri se numesc descompunerile *Jordan aditive,* respectiv *multiplicative.* În teoria grupurilor Lie este uzual să se scrie $\mathbf{GL}\,(V)$ în loc de $End\,(V)$, dacă în plus înzestrăm grupul $End\,(V)$ cu paranteza Lie $[x, y] := xy - yx$.

Definiţia 2.2.3 Pentru grupurile Lie abstracte, un element $g \in G$ se numeşte *Ad-semisimplu* dacă subgrupul $Ad(g)$ este semisimplu în $\mathbf{GL}\,(\mathfrak{g})$. Se numeşte *Ad-unipotent* dacă subgrupul $Ad(g)$ este unipotent în $\mathbf{GL}\,(\mathfrak{g})$. Similar, într-o algebră Lie $\mathfrak{g}$ abstractă finit dimensională, un element $x \in G$ se numeşte *ad-semisimplu* dacă $ad(x)$ este semisimplu în $\mathfrak{gl}\,(V)$. Elementul $x \in G$ se numeşte *ad-nilpotent* dacă $ad(x)$ este nilpotent.

Lema 2.2.4 *Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional peste $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Dacă elementul $x \in \mathbf{GL}\,(V)$ este semisimplu, atunci $\exp x$ este semisimplu în $\mathbf{GL}\,(V)$. Dacă elementul $x \in \mathbf{GL}\,(V)$ este nilpotent, atunci $\exp x$ este unipotent în $\mathbf{GL}\,(V)$. Mai mult dacă elementul $y \in \mathbf{GL}\,(V)$, având descompunerea Jordan aditivă $y = y_s + y_n$, $[y_s, y_n] = 0$, atunci $\exp y_s$ este semisimplu şi $\exp y_n$ este partea unipotentă a descompunerii Jordan multuplicative a lui $\exp y$.*

2.3 Elemente regulare

În ceea ce urmează vor fi prezentate noţiuni legate de regularitate. Pentru algebre Lie există două noţiuni legate de regularitate total diferite; una legată de reprezentarea adjunctă şi una legată de aplicaţia exponenţială. Pentru grupuri Lie regularitatea este considerată faţă de reprezentarea adjunctă. Rezultă că ambele concepte de regularitate ale algebrelor Lie sunt legate de regularitatea grupurilor de elemente date de aplicaţia exponenţială.

Definiţia 2.3.1 Fie $\mathfrak{g}$ o algebră Lie finit dimensională cu elemente reale sau complexe.

(i) Un element x al algebrei Lie $\mathfrak{g}$ se numeşte *regular* dacă nil-spaţiul

$$\mathfrak{g}^0 := \{y \in \mathfrak{g} : (\exists n \in \mathbb{N}) \text{ cu } ad(x)^n y = 0\}$$

are dimensiune minimă.

Mulţimea tuturor elementelor regulare ale algebrei $\mathfrak{g}$ se notează cu $reg(\mathfrak{g})$.

(ii) Fie G un grup Lie. Un element x al unei algebre Lie $\mathfrak{g}$ se numeşte *exp-regular* dacă aplicaţia exponenţială este regulară în x. În caz contrar elementul se numeşte *exp-singular.* Mulţimea tuturor elementelor exp-regulare se notează cu *reg exp* şi mulţimea tuturor elementelor exp-singulare se notează cu *sing exp.*

(iii) Un element g al unui grup Lie G se numeşte *regular* dacă unispaţiul

$$\mathfrak{g}^1 := \{y \in \mathfrak{g} : (\exists n \in \mathbb{N}) \, (Ad(g) - id)^n y = 0\}$$

are dimensiune minimă.

Mulţimea tuturor elementelor regulare se notează cu $\operatorname{Re} g(G)$.

Lema 5 din [34] redă următorul rezultat:

Lema 2.3.2 *Dacă G este un grup Lie şi $x, y \in \mathfrak{g}$ cu $\exp x = \exp y$, unde x este un element exp-regular, atunci avem $[x, y] = 0$ şi $\exp(x - y) = 1$.*

2.4 Preimaginea elementelor Ad-unipotente şi Ad-semisimple

Având în vedere că problema referitoare la surjectivitatea aplicaţiei exponenţiale a unui grup Lie conduce la pre-imaginea elementelor grupului, este important de determinat pre-imaginile elementelor Ad-semisimple si Ad-unipotente.

În cele ce urmează V defineşte un spaţiu vectorial finit dimensional cu elemente reale sau complexe.

Fie grupul Lie liniar $\mathbf{GL}(V)$ şi algebra Lie corespunzătoare $\mathbf{GL}(V)$. Pentru un element $p \in \mathbb{N}$, se definesc mulţimile $n_p = \{x \in \mathbf{GL}(V) : x^p = 0\}$ şi $N_p = \{g \in \mathbf{GL}(V) : g = 1 + x, x \in n_p\}$. Atunci aplicaţia $\exp|_{n_p} : n_p \to N_p$ este bijectivă, iar inversa ei

$$\log : g \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} (g-1)^k.$$

Ca şi o consecinţă se obţine rezultatul următor:

Lema 2.4.1 *Fie $G \subseteq \mathbf{GL}(V)$ un subgrup analitic şi se presupune că pentru elementele nilpotente $x, y \in g$ are loc relaţia $\exp x = \exp y$. Atunci $x = y$. Ca şi caz particular, 0 este singurul element nilpotent al algebrei $\mathfrak{g}$ faţă de $\exp^{-1}(1)$.*

Fie G un grup Lie cu elemente reale sau complexe. Se notează cu S mulţimea tuturor elementelor semisimple ale grupului G şi cu $\mathfrak{s}$ mulţimea tututor elementelor semisimple ale algebrei $\mathfrak{g}$.

Lema 2.4.2 *Fie $G \subseteq \mathbf{GL}(V)$ un grup analitic. Atunci $\exp^{-1}(S) = s$.*

Se notează cu S^{Ad} mulţimea tuturor elementelor Ad-semisimple ale grupului G şi cu $\mathfrak{s}^{ad}$ mulţimea tuturor elementelor ad-semisimple ale algebrei $\mathfrak{g}$. Astfel se obţine:

Corolarul 2.4.3 *Fie G un grup Lie conex cu elemente reale. Atunci $s^{ad} = \exp^{-1}(S^{Ad})$.*

Mai multe informaţii pot fi găsite în [77].

2.5 Exemple

Mai jos sunt prezentate exemple care ilustrează unele aspecte apărute în studiul surjectivităţii aplicaţiei exponenţiale.

Se consideră grupul liniar Lie $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ şi algebra Lie corespunzătoare $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (mai multe detalii despre acest grup se găsesc în paragraful 1.2).

Pentru grupul $\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$ avem o altă situaţie. Orice element g al grupului $\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$ este conjugat cu matricea

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ sau cu matricea } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ unde } \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Se poate observa că ambele elemente sunt imagini exponenţiale ale elementelor algebrei $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

Următorul grup considerat ca si exemplu este grupul special liniar $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$. Fie un pătrat definit de baza canonică de vectori a lui $\mathbb{R}^2$. Dacă se doreşte transformarea pătratului într-un dreptunghi definit de vectorii de componente $(-2,0)$ şi $(0,-\frac{1}{2})$, acest lucru poate fi făcut cu ajutorul unei transformări a grupului $SL(2,\mathbb{R})$.

2.6 Grupuri Lie slab exponenţiale şi grupuri Lie tare exponenţiale

Definiţia 2.6.1 Un grup Lie G cu elemente reale sau complexe se numeşte *slab exponenţial* dacă imaginea exponenţială este densă în grupul G. Se numeşte *exponenţial* dacă aplicaţia exponenţială este surjectivă şi se numeşte *tare exponenţial* dacă aplicaţia exponenţială este un difeormorfism.

Dacă G este un grup Lie atunci *unu-componenta*, adică componenta conexă a unităţii, este un subgrup normal al lui G şi se notează cu G_0. Subgrupul comutator al lui G se notează cu G'. Se consideră că un grup Lie conect este *simplu(semisimplu)* dacă algebra Lie corespunzătoare este *simplă(semisimplă)*. Dacă $\mathfrak{g}$ este o algebră Lie finit dimensională şi $\mathfrak{r}$ este o subalgebră atunci $\mathfrak{r}$ se numeşte *reductivă* dacă $\mathfrak{g}$ este un $\mathfrak{r}$-modul semisimplu faţă de ad. Similar, un subgrup R al unui grup Lie G se numeşte *reductiv* în G dacă $\mathfrak{g}$ este un R-modul semisimplu faţă de Ad.

O subalgebră $\mathfrak{p}$ a unei algebre Lie reale $\mathfrak{g}$ se numeşte compact înzestrată dacă $\overline{e^{ad\mathfrak{p}}}$ este compactă în $Aut(\mathfrak{g})$. Dacă un element x este conţinut într-o subalgebră compact înzestrată atunci se numeşte compact. O subalgebră compact înzestrată maximală este o algebră compact înzestrată care este maximală cu această proprietate. Două subalgebre compact înzestrate maximale sunt conjugate. Mulţimea tuturor elementelor compacte ale lui $\mathfrak{g}$ este reuniunea tuturor subalgebrelor compact înzestrate maximale şi se notează cu *comp*$\mathfrak{g}$. Un subgrup K al unui grup Lie G real se numeşte *compact înzestrat* dacă $\overline{Ad(K)}$ este compact în $Aut(\mathfrak{g})$. În orice grup Lie conex există subgrupuri compact înzestrate maximale şi care sunt conexe. Evident, sugrupurile compact înzestrate au algebre Lie compact înzestrate. Deoarece subalgebrele compact înzestrate sunt şi algebre Lie compacte, adică există un grup Lie compact a cărui algebră Lie este izomorfă la acea algebră Lie, atunci aplicaţia exponenţială a unui grup Lie compact înzestrat conex este surjectivă. Aşadar, subgrupurile compact înzestrate maximale sunt de asemenea conjugate.

Fie $\mathfrak{g}$ o algebră Lie şi S o submulţime a lui $\mathfrak{g}$. Mulţimea

$$\zeta_{\mathfrak{g}}(S) := \{y \in G : [y, S] = 0\}$$

se numeşte *centralizatorul* lui S.

Dacă S este, în plus, o subalgebră, atunci

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(S) := \{y \in \mathfrak{g} : [y, S] \subseteq S\}$$

se numeşte *normalizatorul* lui S.

Atât $\zeta_{\mathfrak{g}}(S)$ cât şi $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(S)$ sunt subalgebre ale lui $\mathfrak{g}$.

Centralizatorul $\zeta_{\mathfrak{g}}(S)$ se numeşte *centrul* lui $\mathfrak{g}$ şi se notează cu $\zeta(\mathfrak{g})$ sau pe scurt ζ.

Fie un grup Lie G (nu neapărat conex) şi $\mathfrak{g}$ algebra Lie corespunzătoare. Fie S o submulţime a lui $\mathfrak{g}$.

Mulţimea

$$Z_G(S) := \{g \in G : (\forall x \in G) Ad(g)(s) = x\}$$

se numeşte *centralizatorul* lui S în G.

Dacă în plus S este o subalgebră a lui $\mathfrak{g}$, atunci

$$N_G(S) := \{g \in G : Ad(g).S \subseteq S\}$$

se numeşte *normalizatorul* lui S în G.

Dacă U este o submulţime a lui G, atunci se poate considera centralizatorul

$$Z_G(U) := \{g \in G : (\forall u \in U) gu = ug\}.$$

Centralizatorul $Z_G(U)$ se numeşte *centrul* lui G şi se notează cu $Z(G)$ sau mai simplu Z.

Dacă U este un subgrup, atunci

$$N_G(U) := \left\{g \in G : gUg^{-1} = U\right\}$$

notează ca de obicei *normalizatorul* lui U.

Are loc următorul rezultat:

Lema 2.6.2 *Fie G un grup Lie real, $\mathfrak{g}$ algebra Lie corespunzătoare şi S o submulţime a lui $\mathfrak{g}$. Atunci algebra Lie $L(Z_G(S))$ a lui $Z_G(S)$ coincide cu $L(Z_G(S)_0) = \zeta_{\mathfrak{g}}(S)$. Dacă, în plus, S este o subalgebră, atunci $L(N_G(S))$ este egală cu $L(N_G(S)_0) = n_{\mathfrak{g}}(S)$. Mai mult, are loc relaţia $L(Z) = L(Z_0) = \zeta$.*

2.7 Aplicaţia exponenţială pe grupuri cât

Grupurile factor ale grupurilor exponenţiale (respectiv slab exponenţiale) sunt exponenţiale (respectiv slab exponenţiale). În schimb, dacă grupul cât G/Z_0 este exponenţial atunci un calcul scurt arată că şi grupul G este exponenţial. Pentru a demonstra că grupul G este exponenţial se presupune că centrul lui G este discret.

Lema 2.7.1 *Fie G un grup Lie conex şi N un subgrup analitic normal. Atunci are loc incluziunea* $\exp(x + n) \subseteq \exp x \cdot N$, *oricare ar fi $x \in \mathfrak{g}$.*

Pentru demonstraţie este folositor următorul rezultat:

Lema 2.7.2 *Dacă G este un grup Lie, $\mathfrak{g}$ algebra Lie corespunzătoare, N un subgrup analitic normal, şi dacă elementele $a, b \in \mathfrak{g}$ satisfac $[a, b] \in n$, atunci are loc* $\exp(a + b) \in \exp a \exp b \cdot N$.

Lema 2.7.3 *Fie G un grup Lie real conex, N un subgrup normal analitic care conţine grupul G', $B \supseteq N$ un subgrup analitic al lui G şi ω un spaţiu vectorial complementar al lui n în b. Atunci $B = \exp \omega \cdot N$.*

2.8 Grupurile Lie compacte şi conexe sunt exponenţiale

Teorema 2.8.1 *Orice grup Lie compact şi conex este exponenţial.*

Când $n = 2$, o matrice antisimetrică B poate fi scrisă sub forma $B = \theta J$, unde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şi din relaţia Hamilton-Cayley $J^2 = I_2$ şi din dezvoltarea în serie a funcţiilor $\sin\theta$ şi $\cos\theta$ este uşor de arătat că

$$e^B = e^{\theta J} = (\cos\theta)I_2 + (\sin\theta)J = (\cos\theta)I_2 + \frac{\sin\theta}{\theta}B. \tag{2.8.1}$$

Când $n = 3$, o matrice antisimetrică $B \in \mathfrak{so}\,(3)$ este de forma

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

şi notând $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{2}\|B\|$, unde $\|\cdot\|$ este norma Frobenius a matricelor, obţinem formula lui Rodrigues (a se vedea paragraful 3.4.4)

$$e^B = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta}B + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}B^2 \tag{2.8.2}$$

cu $e^B = I_3$ atunci când $B = 0$.

2.8.1 Descrierea izometriilor euclidiene

Fie spaţiul euclidean $\mathbb{R}^n$ împreună cu bine-cunoscuta normă euclideană $\|\cdot\|$. O *izometrie* a spaţiului $\mathbb{R}^n$ este o aplicaţie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ care păstrează distanţele, adică pentru orice două elemente x, $y \in \mathbb{R}^n$ au loc următoarele relaţii

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \,. \tag{2.8.3}$$

Conform binecunoscutei teoreme a lui Ulam, avem că orice izometrie a spaţiului $\mathbb{R}^n$ care are proprietatea $f(0) = 0$, este o aplicaţie liniară de forma $f(x) = Rx$, cu $R \in \mathbf{O}(n)$, unde $\mathbf{O}(n)$ este grupul ortogonal. Dacă $\det R = 1$, adică $R \in \mathbf{SO}(n)$, atunci izometria f *păstrează orientarea*. În caz contrar se spune că aplicaţia f *inversează orientarea*.

Folosind surjectivitatea aplicaţiei exponenţiale, $\exp : \mathfrak{so}\,(n) \to \mathbf{SO}(n)$, putem descrie izometriile spaţiului $\mathbb{R}^n$ care păstrează orientarea.

Când $n = 2$, din demonstraţia alternativă prezentată în paragraful 2.6, avem că $R \in \mathbf{SO}(2)$ dacă şi numai dacă R este o matrice de rotaţie, adică este de forma

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

unde unghiul de rotaţie θ este definit de relaţia $2\cos\theta = tr(R)$. Acest fapt conduce la descrierea izometriilor planului euclidean carea păstrează orientarea, ca fiind compuneri de rotaţii şi translaţii.

Când $n = 3$, atunci avem $R \in \mathbf{SO}(3)$ dacă şi numai dacă are loc relaţia (a se vedea paragraful 3.4.4)

$$R = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} B + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} B^2, \tag{2.8.4}$$

unde unghiul de rotaţie θ este definit de relaţia $1 + 2\cos\theta = tr(R)$, ceea ce conduce la $\theta = \arccos\frac{tr(R)-1}{2}$, dacă $\theta \neq 0$. Prin urmare, când $\theta \neq \pi$, B este o matrice antisimetrică determinată în mod unic de ecuaţia

$$B = \frac{\theta}{2\sin\theta}\left(R - {}^tR\right).$$

Dacă $\theta = 0$, atunci avem $R = I_3$, şi izometria f este aplicaţia identitate a spaţiului $\mathbb{R}^3$. Dacă $\theta = \pi$, atunci putem găsi matricea B_1 în acelaşi mod ca şi în secţiunea anterioară.

Presupunând că

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

atunci formula 2.8.4 exprimă o rotaţie în $\mathbb{R}^3$ de axă definită de vectorul (a,b,c) şi unghi θ. Acest rezultat conduce la descrierea izometriilor spaţiului euclidean care păstrează orientarea.

Dacă izometria spaţiului $\mathbb{R}^3$ inversează orientarea, atunci $\det R=-1$. Deoarece $\det(-R)=(-1)^3\det R=(-1)(-1)=1$, urmează că izometria $g\in\mathbb{R}^3$, definită prin $g(x)=(-R)x$, păstrează orientarea. În acest caz formula de reprezentare este

$$R=-I_3-\frac{\sin\theta}{\theta}B-\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}B^2,$$

având aceeaşi interpretare geometrică. În acest fel toate izometriile spaţiului $\mathbb{R}^3$ sunt descrise complet.

Observaţia 2.8.2 În lucrarea [25] este dată următoarea descriere a matricelor $R\in\mathbf{SO}(n)$, pentru $n\geq 4$ este dată. Dacă $\left\{e^{i\theta_1},e^{-i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_p},e^{-i\theta_p}\right\}$ este mulţimea valorilor proprii distincte ale lui R, diferite de 1, unde $2p\leq n$ şi $0\leq\theta_i\leq\pi$, atunci există p matrice antisimetrice $B_1,\ldots,B_p$ astfel încât $B_iB_j=B_jB_i=O_n$, $i\neq j$, $B_i^3=-B_i$, pentru orice i,j cu $1\leq i,j\leq p$, şi

$$R=I_n+\sum_{i=1}^{n}\left[(\sin\theta_i)\,B_i+(1-\cos\theta_i)\,B_i^2\right].$$

Acest rezultat redă o descriere implicită a izometriilor Euclidiene a spaţiului $\mathbb{R}^n$ când $n\geq 4$, în termeni de $2p$ parametrii $\theta_1,\ldots,\theta_p,B_1,\ldots,B_p$. Evident că numărul parametriilor fiind prea mare, această relaţie are un caracter formal.

Capitolul 3

Problema determinării imaginii aplicaţiei exponenţiale

Deşi problema clasificării complete a grupurilor Lie exponenţiale este departe de a fi rezolvată, o direcţie naturală de cercetare înrudită este dată de problema determinării imaginii aplicaţiei exponenţiale. În acest capitol trecem în revistă rezultatele în această direcţie. Paragraful 3.1 prezintă unele rezultate asupra surjectivităţii unor funcţii de matrice, urmând referinţele D. Andrica, I.N. Caşu [3], D. Andrica, R.-A. Rohan [6], L. Mare [44], [45], S. Rădulescu, D. Andrica [66]. În paragraful 3.2 se rezolvă această problemă pentru grupul general liniar real $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ (Teorema 3.2.2), prezentându-se rezultatul iniţial obţinut de M. Nishikawa [52] şi independent de D. Andrica, L. Mare [4]. Pentru alte grupuri, rezultate de acest tip au fost obţinute de M. Nishikawa [53]-[57]. Paragraful 3.3 este dedicat prezentării într-o manieră originală a grupurilor pseudo-ortogonale $\mathbf{O}_K(n)$, urmând lucrarea D. Andrica, R.-A. Rohan [6]. Paragraful 3.4 are un caracter original şi prezintă diferite formule de tip Rodrigues. Rezultatele incluse sunt preluate după lucrările D. Andrica, R.-A. Rohan [7], [9] şi R.-A. Rohan [68].

3.1 Rezultate asupra surjectivităţii unor funcţii de matrice

Considerăm $M_n(K)$ algebra matricelor pătratice cu elemente din corpul comutativ K ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$), $f \in K[X]$ un polinom de grad arbitrar şi $\widetilde{f} : M_n(K) \to M_n(K)$ funcţia de matrice asociată lui f. Prezintă interes următoarea problemă:

Problemă: *Ce condiţii trebuie să satisfacă polinomul f pentru ca funcţia $\widetilde{f}$ să fie surjectivă?*

Dacă f este o funcţie olomorfă în $\mathbb{C}$ se consideră mulţimea

$$M = \{z \in \mathbb{C} : f'(z) = 0\}$$

Pentru o matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ se consideră $\sigma(A)$ ca fiind spectrul punctual al lui A.

Teorema 3.1.1 *Dacă $\sigma(A) \subset f(\mathbb{C} \backslash M)$ atunci $A \in \operatorname{Im} \widetilde{f}$.*

Lema 3.1.2 *Fie f, g două funcţii olomorfe în $\mathbb{C}$ cu $f^{-1}(0) \subseteq g^{-1}(0)$. Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ are proprietatea că $\sigma\left(\widetilde{f}(A)\right) = \{0\}$ atunci $\widetilde{g}^n(A) = O_n$.*

Lema 3.1.3 *Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, $\operatorname{grad} f = n \geq 2$, atunci au loc următoarele afirmaţii:*

1) $f^{-1}(y) \subseteq M \Longleftrightarrow y \in \mathbb{C} \backslash f(\mathbb{C} \backslash M)$

2) $f^{-1}(y_1) \subseteq M$, $f^{-1}(y_2) \subseteq M \Rightarrow y_1 = y_2$

3) $f(\mathbb{C} \backslash M) = \mathbb{C} \Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{C}$ *ecuaţia* $f(x) = y$ *are cel puţin o rădăcină simplă*

4) $f(\mathbb{C} \backslash M) = \mathbb{C} \backslash \{z\} \Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{C}$ *ecuaţia* $f(x) = y$ *are toate rădăcinile multiple.*

Teorema 3.1.4 *Următoarele afirmarţii sunt echivalente:*

1) *pentru orice $y \in \mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = y$ are cel puţin o rădăcină simplă;*

2) *aplicaţia $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ asociată lui f este surjectivă.*

Exemplul 3.1.5 Aplicaţia $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, $\widetilde{f}(X) = X^m$, nu este surjectivă, unde $m \geq 2$. Într-adevăr, ecuaţia $x^m = 0$ are 0 ca rădăcină multiplă de ordinul m, deci proprietatea rezultată direct din Teorema 3.1.4.

Exemplul 3.1.6 Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f \geq 2$, $a \in \mathbb{C}$,

$$f'(x) = a(x - x_1')^{\alpha_1} \dots (x - x_r')^{\alpha_r}, \alpha_j \geq 1, j = 1, \dots, r$$

şi $x_1', \dots, x_r'$ distincte. Dacă $\alpha_j \geq r - 1$, $\forall j \in \{1, \dots, r\}$, atunci pentru orice $y \in \mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = y$ are cel puţin o rădăcină simplă.

În acest caz condiţia din Teorema 3.1.8 se verifică în mod trivial.

Exemplul 3.1.7 Fie $f \in \mathbb{C}[X]$,

$$f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$$

şi

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3,$$

are proprietatea din *Teorema* 3.1.8. Într-adevăr, dacă ţinem seama de relaţiile lui Viète, avem

$$f'(x) = 3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$$

şi $\Delta \neq 0$, conform ipotezei făcute iniţial. Atunci f' are rădăcinile simple, adică $f - y$ are cel puţin o rădăcină simplă, $\forall y \in \mathbb{C}$.

Teorema 3.1.8 *Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f = n \geq 2$. Dacă $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$,*

$$f'(x) = a(x - x_1')^{\alpha_1} \dots (x - x_r')^{\alpha_r}, \alpha_j \geq 1, j = 1, \dots, r$$

şi pentru orice submulţime L a lui $\{1, \dots, r\}$ avem

$$\sum_{j \in L} (1 + \alpha_j) \neq r - 1,$$

atunci pentru orice $y \in \mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = y$ are cel puţin o rădăcină simplă în $\mathbb{C}$.

Exemplul 3.1.9 Fie $f \in \mathbb{C}[X]$,

$$f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$$

şi

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\neq x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3,$$

are proprietatea din *Teorema* 3.1.8. Într-adevăr, dacă ţinem seama de relaţiile lui Viète, avem

$$f'(x)=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$$

şi $\Delta\neq 0$, conform ipotezei făcute iniţial. Atunci f' are rădăcinile simple, adică $f-y$ are cel puţin o rădăcină simplă, $\forall y\in\mathbb{C}$.

Observaţia 3.1.10 Toate rezultatele obţinute rămân valabile dacă $\mathbb{C}$ se înlocuieşte cu un corp algebric închis K şi, acolo unde este cazul, în loc de f olomorfă în $\mathbb{C}$ se presupune că f este polinomială.

Vom adopta în continuare următoarele notaţii: dacă $A\in M_n(\mathbb{C})$ se notează cu p_A polinomul caracteristic al lui A, adică polinomul

$$p_A(t)=\det(tI_n-A),$$

şi cu $\sigma(A)$ mulţimea valorilor proprii ale matricei A (adică rădăcinile polinomului p_A). Se presupun cunoscute următoarele rezultate:

Teorema 3.1.11 ***(Hamilton-Cayley)*** *Pentru orice matrice* $A\in M_n(\mathbb{C})$ *avem* $p_n(A)=O_n$*, adică orice matrice satisface ecuaţia sa caracteristică.*

Teorema 3.1.12 ***(de interpolare Lagrange-Hermite)*** *Fiind date* $n\in\mathbb{N}^*$*,* $a_k\in\mathbb{R}$*,* $k=1,2,\ldots,n$ *numere reale distincte,* $r_k\in\mathbb{N}$*,* $k=1,2,\ldots,n$ *şi* $b_k^{(i)}\in\mathbb{R}$*,* $i=0,\ldots,r_k$*,* $k=1,2,\ldots,n$*, există un polinom* $P\in\mathbb{R}[X]$ *astfel încât*

$$P^{(i)}(a_k)=b_k^{(i)},k=1,2,\ldots,n,i=0,\ldots,r_k.$$

Teorema 3.1.13 *Fie* $f\in\mathbb{C}[X]$ *şi* $A\in M_n(\mathbb{C})$*,*

$$\sigma(A)=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\}.$$

Dacă pentru orice $i\in\{1,2,\ldots,s\}$ *ecuaţia* $f(x)=\alpha_i$ *are cel puţin o rădăcină simplă atunci* $A\in\operatorname{Im}\widetilde{f}$*.*

Corolarul 3.1.14 *Dacă* $f \in \mathbb{C}[X]$ *are proprietatea că* $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, *ecuaţia* $f(x) = \alpha$ *are cel puţin o rădăcină simplă atunci* $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ *este surjectivă.*

Teorema 3.1.15 *Dacă* $f \in \mathbb{C}[X]$ *are proprietatea că* $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ *este surjectivă, atunci* $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, *ecuaţia* $f(x) = \alpha$ *are cel puţin o rădăcină simplă.*

Lema 3.1.16 *Pentru* $p \in \mathbb{N}$ *impar, considerăm polinomul* $f \in \mathbb{C}[X]$, *unde*

$$f_p = 1 + \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X^2 + \ldots + \frac{1}{p!}X^p.$$

Atunci $\widetilde{f_p} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ *este surjectivă.*

Teorema 3.1.17 *a) Pentru* $n = 2$ *sau* $n = 3$, *polinomul* $f \in \mathbb{R}[X]$ *are proprietatea că* $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ *este surjectivă dacă şi numai dacă* $\forall \mu \in \mathbb{R}$ *ecuaţia* $f(x) = \mu$ *are cel puţin o rădăcină simplă în* $\mathbb{R}$.

b) Pentru $n \geq 4$, *polinomul* $f \in \mathbb{R}[X]$ *are proprietatea că* $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ *este surjectivă dacă şi numai dacă au loc simultan:*

(i) $\forall \mu \in \mathbb{R}$ *ecuaţia* $f(x) = \mu$ *are cel puţin o rădăcină simplă în* $\mathbb{R}$;

(ii) $\forall \mu \in \mathbb{C}$ *ecuaţia* $f(x) = \mu$ *are cel puţin o rădăcină simplă.*

Teorema 3.1.18 *Fie* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *o funcţie olomorfă,* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *şi* $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\sigma(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ *spectrul punctual al operatorului* A. *Dacă pentru orice* $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, *ecuaţia* $f(z) = \alpha_j$ *are cel puţin o rădăcină simplă atunci* $A \in \operatorname{Im} \widetilde{f}$.

Corolarul 3.1.19 *Aplicaţia* $\exp = \widetilde{\exp} : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ *este surjectivă.*

Teorema 3.1.20 *Fie* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *o serie de puteri cu coeficienţi reali şi raza de convergenţă* ∞, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

I. $n \in \{2, 3\}$. *Atunci* $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ *e surjectiv dacă şi numai dacă au loc:*

(i) $\forall \mu \in \mathbb{R}$ *ecuaţia* $f(x) = \mu$ *are cel puţin o rădăcină reală simplă.*

(ii) $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

II. $n \geq 4$. *Atunci* $\widetilde{f} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ *e surjectiv dacă şi numai dacă au loc:*

(i)' $\forall \mu \in \mathbb{R}$ *ecuaţia* $f(x) = \mu$ *are cel puţin o rădăcină reală simplă.*

(ii)' $\forall \mu \in \mathbb{R}$ *ecuaţia* $f(z) = \mu$ *are cel puţin o rădăcină simplă în* $\mathbb{C}$.

Studiul imaginii exponenţialei în acest caz este şi el mult mai complicat şi un rezultat tranşant ca cel din Corolarul 3.1.17 nu mai are loc. O primă constatare este că are loc incluziunea:

$$\exp\left(M_n(\mathbb{R})\right) \subseteq \mathbf{GL}^+\left(n, \mathbb{R}\right) = \left\{A \in \mathbf{GL}\left(n, \mathbb{R}\right) : \det A > 0\right\},$$

deci grupul $\mathbf{GL}\left(n, \mathbb{R}\right)$ nu este exponenţial.

3.2 Imaginea aplicaţiei exponenţiale pe grupul $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$

În această secţiune se va rezolva problema determinării imaginii aplicaţiei exponenţiale pentru grupul liniar general real $G = \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.

Lema 3.2.1 *Dacă $A \in \mathbf{GL}^+(n, \mathbb{R})$ şi $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_+^* \cup (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, atunci $A \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$.*

Teorema 3.2.2 *Se consideră matricea $A \in \mathbf{GL}^+(n, \mathbb{R})$. Atunci $A \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$ dacă şi numai dacă blocurile corespunzătoare valorilor proprii negative din descompunerea sa Jordan apar cu multiplicitate pară.*

Teorema 3.2.3 *Fie $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. Atunci $A \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$ dacă şi numai dacă există $B \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ astfel încât $A = B^2$.*

Corolarul 3.2.4 *Fie $A \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$. Atunci $A \in \exp(\mathbf{SL}(n, \mathbb{R}))$ dacă şi numai dacă există $B \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ astfel încât $A = B^2$.*

Corolarul 3.2.5 *Fie $X \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Atunci există $Y \in M_n(\mathbb{R})$ astfel ca $X^2 + I_n = Y^2$.*

Corolarul 3.2.6 *Pentru orice $X \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ există $A \in SL(2, \mathbb{R})$ astfel încât $X = A^2$ sau $-X = A^2$.*

Observaţia 3.2.7 1) Topologia mulţimii $E(G)$ este deosbit de interesantă. În general, $E(G)$ nu este nici deschisă şi nici închisă în G. Un exemplu în acest sens este dat de grupul Lie $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$. Pentru a arăta că mulţimea $E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R}))$ nu este deschisă se consideră matricea

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, pentru orice $\epsilon > 0$, matricea $\begin{pmatrix} -1 & \epsilon \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nu aparţine lui $E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R}))$ deoarce numărul blocurilor corespunzătoare valorii proprii -1 este egal cu 1.(Teorema 2.1.2). Se observă că $E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R}))$ nu este nici închisă. Pentru aceasta se consideră matricea

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{R}) \diagdown E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R}))$$

şi avem că pentru orice $\epsilon > 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \epsilon & -1 \end{pmatrix} \in E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})),$$

deci dacă $E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R}))$ ar fi închisă, atunci am avea

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \epsilon & -1 \end{pmatrix} \in E(\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})),$$

ceea ce este imposibil.

2) Interiorul şi frontiera lui $E(\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}))$ au fost determinate şi s-a arătat că:

i) $A \in intE(\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}))$ dacă şi numai dacă A nu are valori proprii negative;

ii) A este punct de frontieră pentru $E(\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}))$ dacă şi numai dacă $A \notin intE(\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}))$ şi blocurile corespunzătoare valorilor proprii negative din descompunerea Jordan a lui A apar cu multiplicitate pară.

3.3 Grupurile Lie $\mathbf{O}_K(n)$

Fie $K \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă şi simetrică. Se consideră mulţimea

$$\mathbf{O}_K(n) = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \ {}^tAKA = K \right\}.$$

Se observă că $(\mathbf{O}_K(n), \cdot)$ este un subgrup al lui $GL(n, \mathbb{R})$. Într-adevăr, dacă $A, B \in \mathbf{O}_K(n)$, atunci putem scrie

$$ {}^t(AB)K(AB) = {}^tB\,{}^tAKAB = {}^tB({}^tAKA)B = {}^tBKB = K, $$

adică $AB \in \mathbf{O}_K(n)$. Mai mult, dacă $A \in \mathbf{O}_K(n)$ avem

$$ {}^t(A^{-1})KA^{-1} = ({}^tA)^{-1}KA^{-1} = KAA^{-1} = K, $$

deci $A^{-1} \in \mathbf{O}_K(n)$.

Se remarcă faptul că pentru $K \in M_n(\mathbb{R})$ se poate defini forma biliniară f_K : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, prin $f_K(x, y) = {}^txKy$. Pentru $A \in \mathbf{O}_K(n)$ avem

$$ f_K(Ax, Ay) = {}^t(Ax)K(Ay) = {}^tx({}^tAKA)y = {}^txKy = f_K(x, y), $$

prin umare mulţimea $\mathbf{O}_K(n)$ este formată din toate matricele inversabile A cu proprietatea că forma f_K este invariantă, adică $f_K(Ax, Ay) = f_K(x, y)$.

Reamintim că matricele $K, K' \in M_n(\mathbb{R})$ sunt *echivalente*, adică $K \sim K'$, dacă există $U \in GL(n, \mathbb{R})$ cu proprietatea că $K' =^t UKU$. În acest caz $\mathbf{O}_K(n) \sim \mathbf{O}_{K'}(n)$. Într-adevăr, grupul $GL(n, \mathbb{R})$ acţionează pe $M_n(\mathbb{R})$ prin $UA =^t UAU$ şi $\mathbf{O}_K(n)$ este grupul de izotropie coresounzător matricei K. Din $K \sim K'$ rezultă faptul că matricele K şi K' au aceeaşi orbită în raport cu acţiunea considerată, deci în mod necesar $\mathbf{O}_K(n) \simeq \mathbf{O}_{K'}(n)$. De fapt aceste subgrupuri sunt conjugate în $GL(n, \mathbb{R})$.

Folosind teorema lui Sylvester, rezultă faptul că matricea K este echivalentă cu o matrice diagonală de forma

$$ diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-r}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{r}), $$

unde r reprezintă siganatura lui K. În acest caz grupul $\mathbf{O}_K(n)$ se mai notează şi cu $\mathbf{O}(n-r, r)$ şi el este perfect determinat de signatura sa r.

Teorema 3.3.1 *Pentru orice matrice inversabilă şi simetrică $K \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{O}_K(n)$ este un grup Lie de dimensiune $\frac{n(n-1)}{2}$ cu algebra Lie $\mathfrak{o}_K(n) = K \cdot AS_n(\mathbb{R})$.*

Dacă $A \in \mathbf{O}_K(n)$, din relaţia ${}^tAKA = K$ prin trecere la determinanţi obţinem $\det^2 A = 1$, deci $\det A = \pm 1$. Se ştie că pentru $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$ grupul Lie $\mathbf{O}_K(n)$ are patru componente conexe. Mulţimea

$$\mathbf{O}_K^+(n) = \{A \in \mathbf{O}_K(n) : \det A = 1\}$$

conţinând componenta conexă a unităţii I_n se mai notează cu $\mathbf{SO}(n-r, r)$ de dimensiune $\frac{n(n-1)}{2}$ şi este un subgrup al grupului $\mathbf{O}(n-r, r)$. În cazul $n = 4$, $r = 1$, grupul $\mathbf{SO}(3, 1)$ se numeşte *grupul Lorentz*. Acesta joacă un rol central în teoria specială a relativităţii.

3.4 Formule de tip Rodrigues

3.4.1 Formule clasice pentru $\mathbf{SO}(n)$, $n = 2$ şi $n = 3$

Fie $\mathbf{SO}(3)$ grupul special ortogonal al matricilor de ordin 3, cu elemente reale, ortogonale şi având determinantul egal cu 1, adică

$$\mathbf{SO}(3) := \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) | A\ {}^tA = I_3, \det A = 1 \right\}.$$

Conform rezultatelor din paragraful 3.3 rezultă că grupul $\mathbf{SO}(3)$ are o structură de grup Lie şi $\dim \mathbf{SO}(3) = 3$.

Propoziţia 3.4.1 *Algebra Lie* $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$ *poate fi identificată în mod canonic cu algebra Lie* $(\mathbb{R}^3, \times)$*, unde "* $\times$ *" este produsul vectorial clasic.*

Pentru cazul $n = 2$, s-a demonstrat deja formula (paragraful 2.8, formula 2.8.1)

$$\exp(B) = (\cos\theta) I_2 + \frac{\sin\theta}{\theta} B.$$

În cazul $n = 3$, prezentăm demonstraţia clasică a formulei lui Rodrigues (1840). O prezentare uşor diferită a fost dată în Lema 1.3.2.

Propoziţia 3.4.2 ***(Rodrigues)*** *Cu notaţiile de mai sus, aplicaţia exponenţială*

$$\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathbf{SO}(3),$$

satisface relaţia

$$\exp(\widehat{v}) = I_3 + \frac{\sin||v||}{||v||}\widehat{v} + \frac{1}{2}(\frac{\sin\frac{||v||}{2}}{\frac{||v||}{2}})\widehat{v}^2.$$

Propoziţia 3.4.3 *Aplicaţia exponenţială*

$$\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathbf{SO}(3)$$

este surjectivă, deci grupul $\mathbf{SO}(3)$ *este exponenţial.*

3.4.2 Problema deteminării coeficienţilor Rodrigues pentru grupul $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$

Aplicaţia exponenţială $\exp : \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$, unde $GL(n, \mathbb{R})$ reprezintă grupul Lie al matricelor pătratice, de ordin n, inversabile, cu valori reale, este definită prin

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k. \tag{3.4.1}$$

Folosind cunoscuta teoremă Hamilton-Cayley, rezultă că fiecare putere $X^k, k \geq n$, este o combinaţie liniară de puteri ale matricei X, mai precis de puterile $X^0, X^1, \ldots, X^{n-1}$. Prin urmare putem rescrie formula 3.4.1 sub forma

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,(X)\,X^k, \tag{3.4.2}$$

unde coeficienţii reali $a_0\,(X)\,, a_1\,(X)\,, \ldots, a_{n-1}\,(X)$ sunt unic determinaţi şi depind de matricea X. Din această formulă rezultă că pentru $\exp(X)$ este un polinom în X, cu coeficienţi în funcţie de X. Problema determinării unei formule explicite a aplicaţiei exponenţiale $\exp(X)$ se reduce la problema determinării coeficienţilor $a_0\,(X)\,, a_1\,(X)\,, \ldots, a_{n-1}\,(X)$. Vom numi această problemă generală *problema Rodrigues* şi coeficienţii $a_0\,(X)\,, a_1\,(X)\,, \ldots, a_{n-1}\,(X)$ *coeficienţii Rodrigues* ai aplicaţiei exponenţiale în raport cu matricea $X \in M_n(\mathbb{R})$.

Invarianţa la echivalenţa matricelor subliniază importanţa spectrului matricei X în relaţia (3.4.2). O metodă importantă pentru a obţine coeficienţii Rodrigues este o aşa numită *metoda Putzer*.

În acest subparagraf, prezentăm rezultatele din lucrarea D. Andrica şi R.-A. Rohan [7] şi mai departe vom indica o modalitate nouă de determinare a coeficienţilor lui Rodrigues $a_0(X)$, $a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X)$ din formula (3.4.2). Ideea principală constă în reducerea relaţiei (3.4.2) la un sistem liniar având necunoscutele $a_0(X), a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X)$. În acest sens multiplicăm ambii membrii ai relaţiei (3.4.2) cu puterile $X^j, j = 0, \ldots, n-1$ şi obţinem următoarele relaţii matriciale

$$X^j \exp(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{k+j}, j = 0, \ldots, n-1, \tag{3.4.3}$$

unde $a_k = a_k(X), k = 0, \ldots, n-1$. Considerând urma matricei în ambele părţi ale relaţiei (3.4.3), obţinem sistemul liniar

$$\sum_{k=0}^{n-1} tr\left(X^{k+j}\right) a_k = tr\left(X^j \exp(X)\right), j = 0, \ldots, n-1, \tag{3.4.4}$$

având coeficienţii funcţii de matricea X. Presupunem că $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui X. Este cunoscut faptul că matricea X^{k+j} are valorile proprii $\lambda_1^{k+j}, \ldots, \lambda_n^{k+j}$ şi matricea $X^j \exp(X)$ are valorile proprii $\lambda_1^j e^{\lambda_1}, \ldots, \lambda_n^j e^{\lambda_n}$. Într-adevăr, funcţia $f_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^j e^z$, este analitică, prin urmare valorile proprii ale matricei $f_j(X)$ sunt $f_j(\lambda_1), \ldots, f_j(\lambda_n)$. Dar avem $f_j(\lambda_s) = \lambda_s^j e^{\lambda_s}, s = 1, \ldots, n$ şi proprietatea este demonstrată.

Sistemul (3.4.4) este echivalent cu

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{k+j} \right) a_k = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^j e^{\lambda_s}, j = 0, \ldots, n-1, \tag{3.4.5}$$

adică

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_{k+j} a_k = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^j e^{\lambda_s}, j = 0, \ldots, n-1, \tag{3.4.6}$$

unde $S_j = \lambda_1^j + \ldots + \lambda_n^j$, cu convenţia $0^0 = 1$, în cazul în care avem valori proprii egale cu 0.

Folosind sistemul (3.4.5) obţinem următorul rezultat privind soluţia problemei Rodrigues pentru grupul $GL(n, \mathbb{R})$.

Teorema 3.4.4 1) *Coeficienţii Rodrigues din formula (3.4.2) sunt soluţii ale sistemului (3.4.5).*

2) *Dacă valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricei X sunt distincte două câte două, atunci coeficienţii Rodrigues $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sunt perfect determinaţi de sistemul (3.4.5) şi sunt combinaţii liniare ale valorilor $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ având coeficienţii funcţii raţionale ale valorilor proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, adică avem*

$$a_k = A_k^{(1)} e^{\lambda_1} + \ldots + A_k^{(n)} e^{\lambda_n}, k = 0, \ldots, n-1. \tag{3.4.7}$$

3.4.3 Determinarea coeficienţilor Rodrigues prin metoda lui Putzer

Se consideră problema la limită

$$\dot{x} = Xx;\ x(0) = x_0;\ 0 \leq t < \infty \tag{3.4.8}$$

unde x şi $\dot{x}$ sunt vectori n-dimensionali şi X este o matrice pătratică de ordinul n, cu elemente constante. În cele ce urmează va fi prezentată o metodă utilă pentru scrierea explicită a problemei (3.4.8). Acest lucru este în mod particular util în cazul în care matricea X nu poate fi diagonalizată, caz în care forma canonică Jordan a matricei nu poate fi determinată.

Soluţia ecuaţiei (3.4.8) este de forma

$$x = \exp(tX)x_0,$$

deci problema este echivalentă cu a determina matrice $\exp(tX)$.

Această metodă, pe care o vom numi *metoda lui Putzer*, este importantă şi pentru a obţine coeficienţii Rodrigues. Metoda constă în următorii paşi. Mai întâi, considerăm polinomul caracteristic al matricei X,

$$p_X(t) = \det(tI_n - X) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0,$$

şi definim *matricea Putzer*

$$C=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & 1 \\ c_2 & c_3 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

În cel de-al doilea pas, construim funcţia scalară z care este soluţia a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene având coeficienţii constanţi care satisface condiţiile iniţiale

$$z^{(n)}+c_{n-1}z^{(n-1)}+\ldots+c_1z'+c_0z=0$$

având condiţia iniţială $z(0)=z'(0)=\ldots=z^{(n-2)}(0)=0, z^{(n-1)}(0)=1$. Următoarea relaţie are loc

$$A=C\cdot Z, \tag{3.4.9}$$

unde A este matricea de ordin $n\times 1$ având ca şi elemente coeficienţii lui Rodrigues $a_0\left(X\right), a_1\left(X\right), \ldots, a_{n-1}\left(X\right)$ şi Z este matricea de ordin $n\times 1$ având ca şi valori $z(1), z'(1), \ldots, z^{(n-1)}(1)$.

Corolarul 3.4.5 *Dacă valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricei X sunt distincte două câte două, atunci matricea Z de ordinul $n\times 1$ din metoda lui Putzer este dată de*

$$Z=(SC)^{-1}B,$$

unde matricea S este definită prin

$$S=\begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-1} \end{pmatrix},$$

C este matricea lui Putzer şi B este matricea de ordin $n\times 1$ având elementele $b_j=\sum\limits_{s=1}^{n}\lambda_s^j e^{\lambda_s}, j=0,\ldots,n-1$.

Observaţie. Comparând cu metoda lui Putzer, rezultatul obţinut în Teorema 3.4.4 este mai simplu în cazul în care valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricei X sunt distincte două câte două, deoarece în acest caz trebuie sa rezolvăm doar sistemul liniar (3.4.5) Metoda lui Putzer este mai bună în cazul în care avem multiplicităţi ale valorilor proprii ale matricei X. În situaţii concrete putem combina cele două metode.

3.4.4 Determinarea coeficienţilor Rodrigues pentru grupul $\mathbf{SO}(n)$

Este uşor de verificat faptul că mulţimea matricelor pătratice, de dimensiune n, ortogonale, cu valori reale formează un grup Lie împreună cu operaţia de multiplicare, notat prin $\mathbf{O}(n)$. Submulţimea grupului $\mathbf{O}(n)$ formată din acele matrice care au valoarea determinantului egală cu $+1$ alcătuieşte un subgrup notat prin $\mathbf{SO}(n)$ şi care se numeşte *grupul special ortogonal* al spaţiului Euclidean $\mathbb{R}^n$. Din motive geometrice, metricile acestui grup se numesc *matrici de rotaţie*.

Matricele algebrei $\mathfrak{so}(n)$ au două proprietăţi esenţiale care simplifică simţitor calculul coeficienţilor Rodrigues:

- Dacă n este impar atunci matricele sunt singulare, adică au cel puţin o valoare proprie egală cu 0;

- Valorile proprii diferite de 0 sunt pur imaginare şi bineînţeles conjugate.

Folosind cunoscuta formulă a lui Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ obţinem următoarea consecinţă a Teoremei 3.4.4, care este utilă în aplicaţiile practice (a se vedea lucrarea R.-A. Rohan [68]).

Corolarul 3.4.6 *Dacă valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricei X sunt distincte două câte două, atunci coeficienţii Rodrigues $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sunt unic determinaţi de sistem şi sunt exprimaţi de combinaţii liniare ale $\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_m, \sin\alpha_1, \ldots, \sin\alpha_m$,* *având coeficienţii funcţii raţionale ale* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$*, unde* $\pm i\alpha_1, \ldots, \pm i\alpha_m$*,* $m = \left[\frac{n}{2}\right]$*, sunt valorile proprii ale matricei* X*. Astfel avem relaţia*

$$a_k = b_k^{(1)} \cos\alpha_1 + \ldots + b_k^{(m)} \cos\alpha_m + c_k^{(1)} \sin\alpha_1 + \ldots + c_k^{(m)} \sin\alpha_m, k = 0, \ldots, n-1.$$

Când $X = O_n$, urmează că $\exp(X) = I_n$, prin urmare avem $a_0 = 1, a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$.

În cazul în care $n = 2$, o matrice antisimetrică $X \neq O_2$ poate fi scrisă ca

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*,$$

având valorile proprii $\lambda_1 = ai, \lambda_2 = -ai$.

Sistemul (3.4.5) devine în acest caz

$$\begin{cases} 2a_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)a_1 = e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} \\ (\lambda_1 + \lambda_2)a_0 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)a_1 = \lambda_1 e^{\lambda_1} + \lambda_2 e^{\lambda_2}, \end{cases}$$

prin urmare obţinem

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(e^{ai} + e^{-ai}\right) = \cos a,$$

$$a_1 = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1} + \lambda_2 e^{\lambda_2}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \frac{e^{ai} - e^{-ai}}{2a} = \frac{\sin a}{a},$$

şi apoi

$$\exp(X) = (\cos a)\, I_2 + \frac{\sin a}{a} X.$$

Urmează că

$$a_0(X) = \cos a, a_1(X) = \frac{\sin a}{a}.$$

În cazul în care $n = 3$, o matrice antisimetrică este de forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

având polinomul caracteristic $p_X(t) = t^3 + (a^2 + b^2 + c^2)\, t = t^3 + \theta^2 t$, unde $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Valorile proprii ale matricei X sunt $\lambda_1 = \theta i, \lambda_2 = -\theta i, \lambda_3 = 0$. Este clar că $X = O_3$ dacă şi numai dacă $\theta = 0$, prin urmare este suficient să considerăm doar situaţia în care $\theta \neq 0$. Sistemul (3.4.5) devine

$$\begin{cases} 3a_0 - 2\theta^2 a_2 = 1 + e^{\theta i} + e^{-\theta i} \\ -2\theta^2 a_1 = \theta i \left(e^{\theta i} - e^{-\theta i}\right) \\ -2\theta^2 a_0 + 2\theta^4 a_2 = -\theta^2 \left(e^{\theta i} + e^{-\theta i}\right). \end{cases}$$

Deoarece $\theta \neq 0$, urmează că

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{\sin\theta}{\theta}, a_2 = \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2},$$

regăsind cunoscuta formulă a lui Rodrigues (Propoziţia 3.4.2)

$$\exp(X) = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} X + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} X^2.$$

În cazul în care $n = 4$, o matrice antisimetrică $X \in \mathfrak{so}(4)$ este de forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix},$$

şi polinomul caracteristic corespunzător este

$$p_X(t) = t^4 + \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2\right) t^2 + (af - be + cd)^2.$$

Fie $\lambda_{1,2} = \pm\alpha i, \lambda_{3,4} = \pm\beta i$ valorile proprii ale matricei X, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. După câteva calcule algebrice, sistemul (3.4.5) devine

$$\begin{cases} 2a_0 - \left(\alpha^2 + \beta^2\right) a_2 = \cos\alpha + \cos\beta \\ -\left(\alpha^2 + \beta^2\right) a_1 + \left(\alpha^4 + \beta^4\right) a_3 = -\alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta \\ -\left(\alpha^2 + \beta^2\right) a_0 + \left(\alpha^4 + \beta^4\right) a_2 = -\alpha^2\sin\alpha - \beta^2\sin\beta \\ \left(\alpha^4 + \beta^4\right) a_1 - \left(\alpha^6 + \beta^6\right) a_3 = \alpha^3\sin\alpha + \beta^3\sin\beta \end{cases}.$$

Considerăm următoarele trei cazuri:

Cazul 1. Dacă $\alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, apoi grupând prima ecuaţie cu cea de-a treia şi cea de-a doua cu ultima obţinem coeficienţii lui Rodrigues

$$a_0 = \frac{\beta^2\cos\alpha - \alpha^2\cos\beta}{\beta^2 - \alpha^2},$$

$$a_1 = \frac{\beta^3 \sin\alpha - \alpha^3 \sin\beta}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)},$$

$$a_2 = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\beta^2-\alpha^2},$$

$$a_3 = \frac{\beta \sin\alpha - \alpha \sin\beta}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)}.$$

Urmează că formula corespunzătoare a lui Rodrigues în acest caz este

$$\exp(X) = \frac{\beta^2\cos\alpha - \alpha^2\cos\beta}{\beta^2-\alpha^2} I_4 + \frac{\beta^3 \sin\alpha - \alpha^3 \sin\beta}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)} X + \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\beta^2-\alpha^2} X^2$$
$$+\frac{\beta \sin\alpha - \alpha \sin\beta}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)} X^3. \tag{3.4.10}$$

Cazul 2. Dacă $\alpha \neq 0$ şi $\beta = 0$, atunci vom utiliza metoda lui Putzer. În acest caz polinomul caracteristic este $p_X(t) = t^4 + \alpha^2 t^2$ şi matricea Putzer este de forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Funcţia scalară z, soluţie a ecuaţiei diferenţiale $z^{(4)} + \alpha^2 z^{(2)} = 0$ având condiţia iniţială $z(0) = z'(0) = z''(0) = 0, z^{(3)}(0) = 1$, este $z(u) = -\frac{\sin\alpha u}{\alpha^3} + \frac{u}{\alpha^2}$.Matricea Z, de dimensiune 4×1, este de forma

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3} \\ \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} \\ \frac{\sin\alpha}{\alpha} \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Folosind formula (3.4.3) obţinem

$$A = C \cdot Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} \\ \frac{\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3} \end{pmatrix},$$

prin urmare formula lui Rodrigues corespunzătoare acestui caz devine

$$\exp(X) = I_4 + X + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}X^2 + \frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}X^3. \tag{3.4.11}$$

Cazul 3. Dacă $\alpha = \beta \neq 0,$ atunci vom folosi din nou metoda lui Putzer. Polinomul caracteristic al matricei X este dat de $p_X(t) = t^4 + 2\alpha^2 t^2 + \alpha^4$ şi matricea Putzer este definită ca fiind

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha^2 & 0 & 1 \\ 2\alpha^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conform teoriei generale a ecuaţiilor liniare diferenţiale omogene având coeficienţi constanţi, funcţia scalară z care satisface relaţia $z^{(4)} + 2\alpha^2 z^{(2)} + \alpha^4 = 0$ este de forma $z(u) = (C_1 + C_2 u)\cos\alpha u + (C_3 + C_4 u)\sin\alpha u$. Din condiţiile iniţiale $z(0) = z'(0) = z''(0) = 0, z^{(3)}(0) = 1$, după câteva calcule simple, obţinem funcţia $z(u) = -\frac{u}{2\alpha^2}\cos\alpha u + \frac{1}{2\alpha^3}\sin\alpha u$. Matricea Z, de dimensiune 4×1, este de forma

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha^3} \\ \frac{\sin\alpha}{2\alpha} \\ \frac{\sin\alpha + \alpha\cos\alpha}{2\alpha} \\ \frac{2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

Folosind formula (3.4.3) obţinem

$$A = C \cdot Z = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\sin\alpha + 2\cos\alpha}{2} \\ \frac{3\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha} \\ \frac{\sin\alpha}{2\alpha} \\ \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha^3} \end{pmatrix},$$

prin urmare formula lui Rodrigues corespunzătoare acestui caz devine

$$\exp(X) = \frac{\alpha\sin\alpha + 2\cos\alpha}{2}I_4 + \frac{3\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha}X + \frac{\sin\alpha}{2\alpha}X^2 + \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha^3}X^3. \tag{3.4.12}$$

Observaţia 3.4.7 În lucrarea R.-A. Rohan [68], folosind rezultatul principal din lucrarea D. Andrica şi R.-A. Rohan [9], sunt obţinute formulele (3.4.11) şi (3.4.12) corespunzătoare celor două cazuri singulare, direct din formula (3.4.10) prin trecere la limită cu $\beta \to 0$, respectiv $\beta \to \alpha$.

3.4.5 Formule de tip Rodrigues pentru grupul $\mathbf{SE}(n)$, $n = 2$ şi $n = 3$

Grupul special euclidean $\mathbf{SE}(n)$ a fost deja introdus în paragraful 1.5. Vom completa unele proprietăţi ale acestui grup.

Grupul euclidean $\mathbf{E}(n)$ este grupul care conţine toate izometriile spaţiului euclidean $\mathbb{R}^n$. În cazul în care $n = 2$, grupul $\mathbf{E}(2)$ conţine toate translaţiile, rotaţiile şi reflecţiile planului.

Este cunoscut faptul că orice izometrie este de forma

$$F(x) = Rx + \mathbf{v}$$

unde $R \in \mathbf{O}(n)$ şi $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Grupul izometriilor poate fi reprezentat de grupul matricelor notat prin $\mathbf{E}(n)$,

$$\mathbf{E}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} R & \mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(n+1, \mathbb{R}) | \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \right\}$$

conţinând matrici pătratice de ordinul $n + 1$. Mulţimea aplicaţiilor afine ρ ale lui $\mathbb{R}^n$ definite în felul următor

$$\rho(X) = RX + \mathbf{u}$$

unde $R \in \mathbf{SO}(n)$ este o matrice de rotaţie şi $\mathbf{u}$ este un vector din $\mathbb{R}^n$, dar considerat ca şi o matrice din $\mathbb{R}^{n+1}$, formează un grup împreună cu operaţia de compunere a matricelor, numit grupul izometriilor afine directe, sau mişcări rigide, notat prin $\mathbf{SE}(n)$.

Se dovedeşte că grupul $\mathbf{E}(n)$ nu este un grup Lie conex. Grupul special euclidean $\mathbf{SE}(n)$ este de fapt componenta conexă a identităţii a grupului $\mathbf{E}(n)$. Subgrupul Lie

$\mathbf{SE}(n)$ corespunde grupului care conţine toate izometriile R care păstrează orientarea având proprietatea că $\det R = 1$. Astfel grupul $\mathbf{SE}(n)$ este închis în $\mathbf{GL}(n+1,\mathbb{R})$. Prin urmare este un grup Lie de matrice.

Grupul $\mathbf{SE}(n)$ nu este mărginit, deci nu este compact. Pentru a demonstra această proprietatea considerăm şirul de matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{v}_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde vectorul $\mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ are prima componentă m şi celelalte componente egale cu 0. Norma Frobenius a lui A_m este $\|A_m\| = \sqrt{m+2}$, deci secvenţa A_m nu este mărginită. Astfel grupul $\mathbf{SE}(n)$ nu este mărginit, deci nu este compact.

Avem

$$\mathbf{SE}(n) := \mathbf{SO}(n) \rtimes \mathbb{R}^n,$$

unde

$$\mathbf{SO}(n) := \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) | A\ {}^t A = I_n, \det(A) = 1 \right\}$$

şi " $\rtimes$ " notează produsul semidirect de grupuri.

Propoziţia 3.4.8 *Algebra lui Lie $\mathfrak{se}(3)$ a lui $\mathbf{SE}(3)$ se identifică cu $\mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R}^3$ şi baza canonică a ei este dată de matricele:*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observaţia 3.4.9 Folosind aplicaţia $\widehat{\ }: \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3), x \longmapsto \widehat{x}$, dată mai sus se poate observa uşor că avem izomorfismul de algebre Lie

$$\mathfrak{se}(3) \cong \mathbb{R}^6.$$

Observaţia 3.4.10 Ca o consecinţă a propoziţilor de mai sus avem că tabla înmulţirii (tabela croşetului) pentru algebra Lie $\mathfrak{se}(3)$ este dată de

$$\begin{array}{lllllll}
[\cdot,\cdot] & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & 0 & e_6 & -e_5 \\
e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -e_6 & 0 & e_4 \\
e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & e_5 & -e_4 & 0 \\
e_4 & 0 & e_6 & -e_5 & 0 & 0 & 0 \\
e_5 & -e_6 & 0 & e_4 & 0 & 0 & 0 \\
e_6 & e_5 & -e_4 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}.$$

Propoziţia 3.4.11 *În raport cu baza canonică* $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ *constantele de structură ale algebrei Lie* $\mathfrak{se}(3)$ *sunt*

$$c_{12}^{3}= 1\,, c_{13}^{2}= -1\,, c_{14}^{k}= 0, c_{15}^{6}= 1\,, c_{16}^{5}= -1\,,$$

$$c_{23}^{1}= 1\,, c_{24}^{6}= -1\,, c_{25}^{k}= 0, c_{26}^{4}= 1\,,$$

$$c_{34}^{5}= 1\,, c_{35}^{4}= -1\,, c_{36}^{k}= 0,$$

$$c_{45}^{k}= 0, c_{46}^{k}= 0,$$

$$c_{56}^{k}= 0,$$

unde $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Fie Ω o matrice a algebrei $\mathfrak{se}(n)$,

$$\Omega = \begin{pmatrix} X & \mathbf{u} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unde X este o matrice antisimetrică, pătratică, cu elemente reale. Următoare observaţia simplă este folositoare în determinarea unei formule Rodrigues pentru grupul $\mathbf{SE}(n)$. Polnomul caracteristic p_Ω al matricei Ω verifică următoarea relaţie

$$p_\Omega(t) = tp_X(t).$$

Într-adevăr, avem

$$p_\Omega(t) = \det(tI_{n+1} - \Omega) = \det \begin{pmatrix} tI_n - X & -\mathbf{u} \\ 0 & t \end{pmatrix} = t \det(tI_n - X) = tp_X(t).$$

În cazul în care $n = 2$, considerăm o matrice antisimetrică $X \neq O_2$,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*.$$

Folosind observaţia de mai sus, matricea $\Omega \in \mathfrak{se}(2)$ are valorile proprii $\lambda_1 = ai, \lambda_2 = -ai, \lambda_3 = 0$. Formula Rodrigues este de forma

$$\exp(\Omega) = A_0 I_3 + A_1 \Omega + A_2 \Omega^2$$

şi folosind Teorema 3.4.4. coeficienţii Rodrigues A_0, A_1, A_2 satisfac sistemul 3.4.6 care se reduce exact la sistemul care are ca şi soluţii coeficienţii Rodrigues clasici din paragraful 3.4.4.

Obţinem formula

$$\exp(\Omega) = I_3 + \frac{\sin a}{a}\Omega + \frac{1 - \cos a}{a^2}\Omega^2. \tag{3.4.13}$$

Relaţia (3.4.13) ne ajută să demonstrăm uşor că $\exp A \in \mathbf{SE}(2)$ pentru toate elementele $A \in \mathfrak{se}(2)$.

În cazul în care $n = 3$, considerăm o matrice antisimetrică $X \neq O_3$,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

având polinomul caracteristic $p_X(t) = t^3 + (a^2 + b^2 + c^2)\, t = t^3 + \theta^2 t$, unde $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Polinomul caracteristic corespunzător matricei $\Omega \in \mathfrak{se}(3)$ este $p_\Omega(t) = tp_X(t) = t^4 + \theta^2 t^2$, prin urmare valorile proprii ale lui Ω sunt $\lambda_1 = \theta i, \lambda_2 = -\theta i, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Formula Rodrigues este în acest caz

$$\exp(\Omega) = A_0 I_4 + A_1 \Omega + A_2 \Omega^2 + A_3 \Omega^3.$$

Deoarece avem o valoare proprie cu multiplicitatea doi vom folosi metoda Putzer (a se vedea subparagraful 3.4.3, lucrarea originală a lui E.J. Putzer [65] sau lucrarea D.Andrica şi R.-A. Rohan [7]). Matricea Putzer este

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \theta_2 & 0 & 1 \\ \theta^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi după câteva calcule simple care se găsesc în detaliu în lucrarea D.Andrica şi R.-A. Rohan [7], obţinem următoarea formulă Rodrigues

$$\exp(\Omega) = I_4 + \Omega + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\Omega^2 + \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}\Omega^3. \tag{3.4.14}$$

Această formulă este menţionată în cartea J.M.Selig [72, Capitolul 4, pg $51-83$], unde este obţinută printr-o metodă diferită. De reţinut este faptul că este exact aceeaşi formă ca a formulei 3.4.11 obţinută în Cazul 2 al paragrafului 3.4.4.

Folosind izomorfismul de algebre Lie $\mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3), \omega \longmapsto \widehat{\omega}$, obţinem următoare reformulare pentru formula Rodrigues (a se vedea D. Andrica, I.N. Caşu [68, Propoziţia 7.1.8]).

Propoziţia 3.4.12 *Aplicaţia exponenţială*

$$\exp : \mathfrak{se}(3) \to \mathbf{SE}(3)$$

este dată de relaţiile următoare

(i) Dacă $\omega \neq 0$, atunci

$$\exp\left(\begin{pmatrix} \widehat{\omega} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \exp\widehat{\omega} & \frac{1}{\|\omega\|^2}\left\{[I_3 - (\exp\widehat{\omega})\widehat{\omega} + \omega\omega^t I_3]\,\mathbf{v}\right\} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Dacă $\omega = 0$, atunci

$$\exp\left(\begin{pmatrix} \widehat{0} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} I_3 & \mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propoziţia 3.4.12 oferă o demonstraţie directă pentru surjectivitatea aplicaţiei exponenţiale $\exp : \mathfrak{se}(3) \to \mathbf{SE}(3)$. (a se vedea monografia D.Andrica, I.N.Caşu [3, Propoziţia 7.1.9])

3.4.6 Formule de tip Rodrigues pentru grupul $\mathbf{SO}(2,1)$

În cele ce urmează vom determina coeficienţii Rodrigues pentru grupul $\mathbf{O}(2,1)$. În lucrarea D.Andrica, R.-A.Rohan [6] a fost utilizată metoda lui Putzer. În continuare vom folosi rezultatul principal din lucrarea D.Andrica, R.-A.Rohan [7] conţinut în Teorema 3.4.4.

Pentru o matrice $A \in \mathfrak{o}(2,1)$, adică

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix},$$

polinomul său caracteristic este dat de

$$p_A(t) = t^3 - (b^2 + c^2 - a^2)t.$$

Vom discuta cele 3 cazuri:

Cazul 1. $u = b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Atunci valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = \sqrt{u}, \lambda_2 = -\sqrt{u}, \lambda_3 = 0$. Sistemul 3.4.6 devine

$$\begin{cases} 3a_0 + 2ua_2 = 1 + e^{\sqrt{u}} + e^{-\sqrt{u}} \\ 2ua_1 = \sqrt{u}\left(e^{\sqrt{u}} - e^{-\sqrt{u}}\right) \\ 2ua_0 + 2u^2a_2 = u\left(e^{\sqrt{u}} + e^{-\sqrt{u}}\right). \end{cases}$$

deci obţinem

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{sh\sqrt{u}}{\sqrt{u}}, a_2 = \frac{ch\sqrt{u} = 1}{u},$$

ceea ce conduce la formula Rodrigues

$$\exp(A) = I_3 + \frac{sh(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}A + \frac{ch(\sqrt{u}) - 1}{u}A^2.$$

Cazul 2. $u = b^2 + c^2 - a^2 = 0$. Prin trecerea la limită cu $u \to 0$, în formulele precedente pentru a_0, a_1, a_2, obţinem formula

$$\exp(A) = I_3 + A + \frac{1}{2}A^2.$$

Cazul 3. $u = b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Un raţionament analog celui din Cazul 1 conduce la

$$\exp(A) = I_3 + \frac{\sin(\sqrt{-u})}{\sqrt{-u}} A + \frac{\cos(\sqrt{-u}) - 1}{u} A^2.$$

Rezultă astfel

$$\exp(A) = \begin{cases} I_3 + \frac{sh\left(\sqrt{u}\right)}{\sqrt{u}} A + \frac{ch\left(\sqrt{u}\right)-1}{u} A^2 \text{ dacă } u > 0 \\ I_3 + A + \frac{1}{2} A^2 \text{ dacă } u = 0 \\ I_3 + \frac{\sin\left(\sqrt{-u}\right)}{\sqrt{-u}} A + \frac{\cos\left(\sqrt{-u}\right)-1}{u} A^2 \text{ dacă } u < 0 \end{cases}$$

unde $u = b^2 + c^2 - a^2$.

Capitolul 4

Aplicaţii în mecanica geometrică

În acest capitol prezentăm unele aplicaţii ale rezultatelor dezvoltate în capitolele precedente. Paragraful 4.1 trece în revistă într-o manieră matricială transformarea Cayley a grupurilor $\mathbf{SO}(n)$ şi $\mathbf{SE}(n)$. Aplicaţia $Cay : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ este deosebit de utilă în parametrizarea naturală a rotaţiilor, lucru ilustrat în paragraful 4.2. Formula lui Rodrigues pentru grupul Lorentz $\mathbf{SO}(3,1)$ prezintă un interes aparte în fizica teoretică, în studiul mişcării unei particule încărcate într-un câmp electromagnetic constant. Această formulă a fost determinată de către G.K. Dimitrov, I.M. Mladevov [21] utilizând structura algebrei Lie $\mathfrak{so}(3,1)$ şi izomorfismul cu algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. În lucrarea D. Andrica, R.-A. Rohan [8] este dată o metodă nouă de determinare a acestei formule (subparagraful 4.4.2). Ultimul paragraf aplică rezultele menţionate mai sus în determinarea traiectoriilor unei particule încărcate într-un câmp electromagnetic constant şi utilizează lucrarea menţionată [21].

4.1 Descrierea grupului SO(n) în forma Hamilton-Cayley

4.1.1 Transformarea Cayley a grupului SO(n)

Matricele grupului $\mathbf{SO}(n)$ descriu mişcările de rotaţie din $\mathbb{R}^n$. Dacă matricea A aparţine algebrei Lie $\mathfrak{so}(n)$corespunzătoare grupului Lie $\mathbf{SO}(n)$, atunci matricea $I_n - A$ este inversabilă.

Într-adevăr, valorile proprii $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ale lui A sunt 0 sau pur imaginare, deci valorile proprii ale matricei $I_n - A$ sunt $1 - \lambda_1, \dots, 1 - \lambda_n$. Acestea sunt evident diferite de 0, prin umare $\det(I_n - A) = (1 - \lambda_1) \cdots (1 - \lambda_n) \neq 0$, adică $I_n - A$ este inversabilă.

Aplicaţia $Cay : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$, definită prin

$$Cay(A) = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$$

se numeşte *transformarea Cayley* a grupului $\mathbf{SO}(n)$. Să arătăm că această aplicaţie este corect definită. Fie $Cay(A) = R$.

Aplicaţia Cay este evident continuă şi $Cay(O_n) = I_n \in \mathbf{SO}(n)$, deci în mod necesar avem $R \in \mathbf{SO}(n)$.

Notăm cu $\sum$ mulţimea elementelor grupului $\mathbf{SO}(n)$ care are pe -1 ca valoare proprie. Evident avem $R \in \sum$ dacă şi numai dacă matricea $I_n + R$ este singulară.

Teorema 4.1.1 *Aplicaţia $Cay : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n) \backslash \sum$ este bijectivă şi inversa acesteia este $Cay^{-1} : \mathbf{SO}(n) \backslash \sum \to \mathfrak{so}(n)$, $Cay^{-1}(R) = (R + I_n)^{-1}(R - I_n)$.*

4.1.2 Formule de tip Rodrigues pentru transformarea Cayley

Deoarece inversa matricei $I_n - A$ se poate scrie sub forma

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots,$$

pe o vecinătate suficient de mică a lui O_n, ţinând seama de teorema Hamilton-Cayley, rezultă că transformarea Cayley se poate scrie sub formă polinomială

$$Cay(A) = b_0(A)I_n + b_1(A)A + \ldots + b_{n-1}(A)A^{n-1}, \tag{4.1.1}$$

unde coeficienţii $b_0, \ldots, b_{n-1}$ sunt unic determinaţi şi depind de matricea A. Vom numi aceste numere, prin analogie cu situaţia aplicaţiei exponenţiale, *coeficienţii Rodrigues* ai lui A relativ la aplicaţia Cay.

Teorema 4.1.2 *Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valorile proprii ale matricei $A \in \mathfrak{so}(n)$.*

1) *Coeficienţii Rodrigues ai lui A relativ la trasnformarea Cay sunt soluţii ale sistemului*

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_{k+j} b_k = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^j \frac{1+\lambda_s}{1-\lambda_s}, \ j = 0, \ldots, n-1, \tag{4.1.2}$$

unde $Sj = \lambda_1^j + \ldots + \lambda_n^j$.

2) *Dacă valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricei A sunt distincte două câte două, atunci coeficienţii Rodrigues $b_0, \ldots, b_{n-1}$ sunt perfect determinaţi de acest sistem şi sunt funcţii raţionale de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.*

Vom ilustra în continuare cazurile particulare $n = 2$ şi $n = 3$. Dacă $A = O_n$, atunci $Cay(A) = I_n$ şi deci $b_0 = 1, b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$.

În cazul $n = 2$, considerăm matricea antisimetrică $A \neq O_2$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*,$$

având valorile proprii $\lambda_1 = ai, \lambda_2 = -ai$. Sistemul (4.1.2) devine în acest caz

$$\begin{cases} 2b_0 = \frac{1+ai}{1-ai} + \frac{1-ai}{1+ai} \\ -2a^2 b_1 = ai\frac{1+ai}{1-ai} - ai\frac{1-ai}{1+ai} \end{cases}$$

şi obţinem

$$b_0 = \frac{1-a^2}{1+a^2}, b_1 = \frac{1}{1+a^2}$$

Rezultă astfel formula de tip Rodrigues pentru transformarea Cayley

$$Cay(A) = \frac{1-a^2}{1+a^2} I_2 + \frac{2}{1+a^2} A. \tag{4.1.3}$$

Pentru $n = 3$, o matrice antisimetrică este de forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

având polinomul caracteristic $p_A(t) = t^3 + \theta^2 t$, unde $\theta = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = \theta i, \lambda_2 = -\theta i, \lambda_3 = 0$. Avem $A = O_3$ dacă şi numai dacă $\theta = 0$, deci este suficient să considerăm doar situaţia în care $\theta \neq 0$. Sistemul (4.1.2) devine

$$\begin{cases} 3b_0 - 2\theta^2 b_2 = \frac{1+\theta i}{1-\theta i} + \frac{1-\theta i}{1+\theta i} + 1 \\ -2\theta^2 b_1 = \theta i \frac{1+\theta i}{1-\theta i} - \theta i \frac{1-\theta i}{1+\theta i} \\ -2\theta^2 b_0 + 2\theta^4 b_2 = -\theta^2 \left(\frac{1+\theta i}{1-\theta i} + \frac{1-\theta i}{1+\theta i}\right) \end{cases}$$

cu soluţia

$$b_0 = 1, b_1 = \frac{2}{1+\theta^2}, b_2 = \frac{2}{1+\theta^2}.$$

Rezultă formula de tip Rodrigues pentru transformarea Cayley a grupului $\mathbf{SO}(3)$

$$Cay(A) = I_3 + \frac{2}{1+\theta^2}A + \frac{2}{1+\theta^2}A^2. \tag{4.1.4}$$

Formula (4.1.4) oferă posibilitatea să obţinem o altă formă pentru inversa transformatei Cayley. Fie $R \in \mathbf{SO}(3)$ astfel încât avem

$$R = I_3 + \frac{2}{1+\theta^2}A + \frac{2}{1+\theta^2}A^2,$$

unde A este o matrice antisimetrică. Considerând operaţia de transpunere în ambii membrii ai acestei relaţii şi ţinând seama că ${}^tA = -A$, obţinem

$$R - {}^tR = \frac{4}{1+\theta^2}A. \tag{4.1.5}$$

Pe de altă parte, avem

$$tr(R) = 3 - \frac{4\theta^2}{1+\theta^2} = -1 + \frac{4}{1+\theta^2},$$

şi prin înlocuirea în relaţia (4.1.5) obţinem formula

$$Cay^{-1}(R) = \frac{1}{1+tr(R)}(R - {}^tR). \tag{4.1.6}$$

Formula (4.1.6) are sens pentru rotaţiile $R \in \mathbf{SO}(3)$ pentru care $1 + tr(R) \neq 0$. Dacă R este o rotaţie de unghi α, atunci avem $tr(R) = 1 + 2\cos\alpha$, deci aplicaţia Cay^{-1} nu este definită pentru rotaţiile de unghi $\alpha = \pm\pi$. Deoarece în regiunea unde este definită aplicaţia Cay este bijectivă, rezultă că matricele antisimetrice din $\mathfrak{so}(3)$ pot fi folosite ca şi coordonate pentru rotaţii. Ţinând seama de izomorfismul "$\widehat{\ }$" de algebre Lie între $(\mathbb{R}^3, \times)$ şi $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$, unde " $\times$ " notează produsul vectorial, definit prin $v \in \mathbb{R}^3 \to \widehat{v} \in \mathfrak{so}(3)$, unde

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ şi } \widehat{v} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

prin compunerea aplicaţiilor

$$\mathbb{R}^3 \stackrel{\widehat{}}{\to} \mathfrak{so}(3) \stackrel{Cay}{\to} \mathbf{SO}(3)$$

obţinem o parametrizare vectorială a rotaţiilor din $\mathbf{SO}(3)$.

4.1.3 Transformarea Cayley pentru grupul $\mathbf{SE}(n)$

În acest subparagraf vom defini o transformare de tip Cayley pentru grupul special euclidean $\mathbf{SE}(n)$. Prin analogie cu grupul special ortogonal $\mathbf{SO}(n)$, definim aplicaţia $Cay_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$, unde

$$Cay_{n+1}(S) = (I_{n+1} - S)^{-1}(I_{n+1} + S). \tag{4.1.7}$$

Vom numi această aplicaţie *transformarea Cayley* a grupului $\mathbf{SE}(n)$. În primul rând să arătăm că ea este corect definită. Fie $S \in \mathfrak{se}(n)$, o matrice definită în blocuri

$$S = \begin{pmatrix} A & \mathbf{u} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde $A \in \mathfrak{so}(n)$ şi $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Un calcul simplu arată că avem formula

$$(I_{n+1} - S)^{-1}(I_{n+1} + S) = \begin{pmatrix} R & (R + I_n)\mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde $R = (I_n - A)^{-1}(I_n + A) = Cay(A) \in \mathbf{SO}(n)$, ceea ce ne-am propus să demonstrăm.

Legătura dintre transformarea $Cay : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ şi $Cay_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$ se realizează prin formula

$$Cay_{n+1}(S) = \begin{pmatrix} Cay(A) & (R + I_n)\mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ca şi pentru transformarea clasică $Cay : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$, putem obţine formule de tip Rodrigues pentru transformarea $Cay_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$, pentru valori mici ale lui n. Folosind observaţia din Secţiunea 5.1 a lucrării R.-A.Rohan [68] obţinem că pentru o matrice $S \in \mathfrak{se}(n)$ definită în blocuri ca mai sus, polinomul ei caracteristic p_S satisface relaţia $p_S(t) = tp_A(t)$. Formula lui Rodrigues pentru transformarea $Cay_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$ este de forma

$$Cay_{n+1}(S) = c_0 I_{n+1} + c_1 S + \ldots + c_n S^n,$$

unde coeficienţii $c_0, c_1, \ldots, c_n$ depind de matricea S.

Teorema 4.1.3 *Aplicaţia* $Cay_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n) \setminus \sum_{n+1}$ *este bijectivă şi inversa ei este dată de*

$$Cay_{n+1}^{-1}(M) = \begin{pmatrix} Cay^{-1}(M) & (R + I_n)^{-1}\mathbf{t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde matricea M *este definită în blocuri prin*

$$M = \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Parametrizarea vectorială a rotaţiilor

Fie grupul special ortogonal $\mathbf{SO}(3)$

$$\mathbf{SO}(3) = \left\{ O \in \mathbf{GL}(3, \mathbb{R}) : \det O = 1, O\,{}^tO = I_n \right\} \tag{4.2.1}$$

unde $GL(3, \mathbb{R})$ reprezintă grupul matricelor pătratice, de ordin 3, cu elemente reale împreună cu algebra Lie $\mathfrak{so}(3)$ (adică generatorii infiniezimali) care este dată de matricele pătratice, de dimensiune 3, antisimetrice. Dacă matricea O aparţine algebrei

Lie $\mathfrak{so}(3)$ grupului $\mathbf{SO}(3)$ atunci matricea $I_n - O$ este inversabilă şi transformarea Cayley studiată în subparagraful 4.1. Am văzut că avem izomorfismul de algebre Lie între $(\mathbb{R}^3, \times)$ şi $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$, unde " $\times$ " notează produsul vectorial, definit prin $v \in \mathbb{R}^3 \to \widehat{v} \in \mathfrak{so}(3)$, unde

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ şi } \widehat{v} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prin compunerea aplicaţiilor

$$\mathbb{R}^3 \overset{\widehat{}}{\to} \mathfrak{so}(3) \overset{Cay}{\to} \mathbf{SO}(3)$$

rezultă că orice matrice de rotaţie $R \in \mathbf{SO}(3) \backslash \sum$, poate si scrisă sub forma $R = Cay(\widehat{v})$, unde vectorul $v \in \mathbb{R}^3$ este unic cu această proprietate. Această relaţie este echivalentă cu

$$R = Cay(\widehat{v}) = (I_3 + \widehat{v})(I_3 - \widehat{v})^{-1} = \frac{(1 - v^2)I_3 + 2v \otimes v + 2\widehat{v}}{1 + v^2} \tag{4.2.2}$$

unde $v \otimes v$ notează matricea diadică $v \cdot {}^t v$, adică matricea

$$v \otimes v = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Din formula (4.1.6) avem

$$\widehat{v} = Cay^{-1}(R) = \frac{1}{1 + tr(R)}(R - {}^tR). \tag{4.2.3}$$

Formula (4.2.2) reprezintă o parametrizare explicită a matricelor de rotaţie din $\mathbf{SO}(3) \backslash \sum$. Vectorul $v \in \mathbb{R}^3$ se numeşte *vector parametru*, este paralel cu axa de rotaţie şi modulul său $|v|$ este egal cu $tg\frac{\alpha}{2}$, unde α este unghiul de rotaţie.

Mulţimea tuturor vectorilor parametru formează un grup Lie în raport cu multiplicarea

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{v_1 + v_2 + v_1 \times v_2}{1 - v_1 \cdot v_2}, \tag{4.2.4}$$

unde " $\times$ " este produsul vectorial şi " $\cdot$ " produsul scalar al vectorilor v_1 şi v_2.

4.3 Forma analitică a elementelor din SO(n)

Un bloc diagonal al matricei de rotaţie a lui Givens $R_i(\phi) \in M_n(\mathbb{R})$, este de forma

$$R_i(\phi) = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\cos\phi)_{i,i} & (-\sin\phi)_{i,i+1} & 0 \\ 0 & (\sin\phi)_{i+1,i} & (\cos\phi)_{i+1,i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{pmatrix} \tag{4.3.1}$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Aşa cum se poate observa, matricea de rotaţie a lui Givens $R_i(\phi)$ implică numai două coordonate care sunt influenţate de unghiul de rotaţie ϕ întrucât celelalte direcţii, care corespund valorii proprii 1, nu sunt afectate. În dimesiunea n, există $n-1$ matrice de rotaţie Givens de tipul (4.3.1). Prin înmulţire, acestea pot genera o matrice pătratică, de ordin n dată de relaţia

$$R(\phi) = R_1(\phi)R_2(\phi)\ldots R_{n-1}(\phi).$$

Este clar că matricea $R(\phi)$ este una specială, atunci când unghiurile matricelor $R_i(\phi)$ sunt considerate egale. O formulă explicită a matricei $R(\phi)$ este dată de

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\cos\phi\sin\phi & \ldots & \ldots & (-1)^n\cos\phi\sin^{n-2}\phi & (-1)^{n+1}\sin^{n-1}\phi \\ \sin\phi & \cos^2\phi & -\cos^2\phi\sin\phi & \ldots & (-1)^{n-1}\cos^2\phi\sin^{n-3}\phi & (-1)^n\cos\phi\sin^{n-2}\phi \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\cos^2\phi\sin\phi & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \cos^2\phi & -\cos\phi\sin\phi \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Matricea (4.3.1) este aproape o matrice superior triunghiulară, dar cu $\sin\phi$ pe prima subdiagonală şi cele $(n-2)\times(n-2)$ submatrice începând de pe poziţia $(2,2)$ este de fapt o matrice Toeplitz superior triunghiulară. (O matrice Toeplitz T sau o matrice diagonal-constantă este o matrice în care fiecare diagonală descendentă de la stânga la dreapta este constantă, adică $T_{i,j} = T_{i+1,j+1}$).

4.4 Formula lui Rodrigues pentru grupul Lorentz $\mathbf{SO}(3,1)$

Multe modele matematice ale proceselor din fizică, biologie şi chimie sunt bazate pe sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare având coeficienţi constanţi. De exemplu, prin rescrierea ecuaţiei clasice a legii de energie a lui Lorentz în forma relativă, mişcarea unei particule încărcate într-un câmp electromagnetic constant poate fi descrisă de un sistem cu patru ecuaţii diferenţiale, numite *ecuaţiile lui Lorentz*

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = a\mathcal{F}^\alpha_\beta U^\beta, \alpha, \beta = x, y, z, t. \tag{4.4.1}$$

Aici U notează vectorul patru-viteză al particulei (coloană) faţă de sistemul inerţial fix

$$U = \,^t\left(U^x, U^y, U^z, U^t\right), \tag{4.4.2}$$

cu

$$U^\gamma = \frac{d\gamma}{d\tau}\ \gamma = x, y, x \text{ şi } U^t = \frac{E}{m} \tag{4.4.3}$$

fiind spaţiul său, respectiv componentele timpului, τ este timpul, E fiind energia particulei energie şi m masa sa. În scrierea sistemului (4.4.1) am folosit în mod implicit convenţia de sumare a lui Einstein, adică dacă într-o sumă doi indici se repetă, simbolul sumă se omite. Parametrul real a reprezintă constantele fizice, mai precis avem $a = \frac{e}{m}$, unde e este sarcina electrică a particulei.

În final, câmpul electromagnetic independent de timp, considerat faţă de acelaşi sistem de referinţă inerţial fix este reprezentat de un tensor $\mathcal{F}$ de ordinul doi,

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4.4}$$

unde E_1, E_2, E_3 şi B_1, B_2, B_3 sunt componentele câmpurilor electrice, respectiv magnetice, măsurate în sistemul inerţial fix şi presupunem că unităţile de măsură sunt alese astfel încât viteza luminii este unitatea, adică avem $c = 1$.

Introducem

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.4.5}$$

şi astfel putem verifica într-un mod simplu că orice matrice $\mathcal{F}$ de forma (4.4.4) satisface relaţia

$$^t\mathcal{F}\eta + \eta\mathcal{F} = 0 \tag{4.4.6}$$

ceea ce înseamnă că $\mathcal{F}$ aparţine algebrei Lie $\mathfrak{so}(3,1)$ corespunzătoare grupului Lorentz

$$\mathbf{SO}(3,1) = \left\{ A \in \mathbf{GL}(4,\mathbb{R}) |\ ^tA\eta A = \eta, \det A = 1 \right\}. \tag{4.4.7}$$

Dacă alegem un alt sistem de referinţă, matricea care reprezintă câmpul electromagnetic, se transformă într-o nouă matrice printr-un automorfism interior $\zeta \in Int(\mathfrak{so}(3,1))$ a algebrei Lie $\mathfrak{so}(3,1)$.

Pe de altă parte, soluţia generală a sistemului (4.4.1) este

$$U(\tau) = \exp(a\mathcal{F}\tau)U_0 \tag{4.4.8}$$

unde exp este aplicaţia exponenţială corespunzătoare grupului Lorentz şi $U_0 = U(0)$ este valoarea iniţială a vectorului patru-viteză (în momenul $\tau = 0$), deci este important să determinăm o formulă de tip Rodrigues pentru aplicaţia $\exp : \mathfrak{so}(3,1) \to \mathbf{SO}(3,1)$.

În acest paragraf vom urma două căi diferite pentru a obţine o astfel de formulă care simplifică soluţia generală (4.4.8) a sistemului (4.4.1).

4.4.1 Demonstraţie bazată pe structura algebrei $\mathfrak{so}(3,1)$

În acest subparagraf prezentăm metoda dezvoltată de G.K. Dimitrov şi I.M. Mladenov [21].

4.4.2 Demonstraţie alternativă care utilizează sistemul (3.4.6)

În acest subparagraf prezentăm rezultatul din lucrarea D. Andrica şi R.-A. Rohan [8].

4.5 Mişcarea unei particule încărcate într-un câmp electromagnetic constant

În această secţiune vom determina traiectoriile unei particule cu masa m şi încărcătura electrică e într-un câmp electromagnetic constant $\mathcal{F}$. În acest scop trebuie să rezolvăm sistemul ecuaţiilor lui Lorentz cu datele iniţiale respective.

Cazul 1. $E.B \neq 0$.

Rezultă că în acest caz câmpul electromagnetic poate fi reprezentat printr-o matrice de tipul

$$\zeta(\mathcal{F}) = \widetilde{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix}, E = (0,0,\sigma), B = (0,0,\alpha), \tag{4.5.1}$$

unde $\alpha, \sigma \in \mathbb{R}^*$.

Obţinem imediat

$$\exp(a\widetilde{\mathcal{F}}\tau) = \begin{pmatrix} \cos(a\alpha\tau) & \sin(a\alpha\tau) & 0 & 0 \\ -\sin(a\alpha\tau) & \cos(a\alpha\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ch(a\sigma\tau) & sh(a\sigma\tau) \\ 0 & 0 & sh(a\sigma\tau) & ch(a\sigma\tau) \end{pmatrix}. \tag{4.5.2}$$

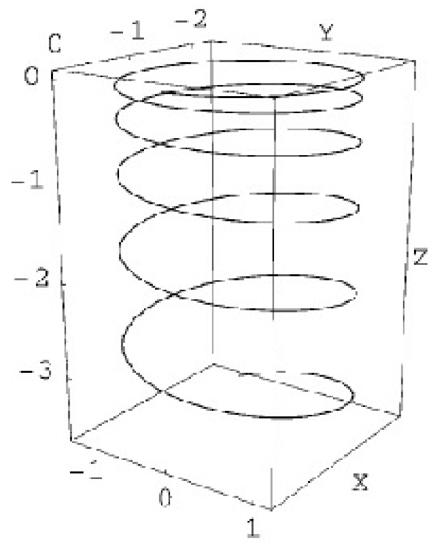

Figura 4.1: $E = (0, 0, 41 \times 10^{-4})$, $B = (0, 0, 6 \times 10^{2})$, $\tau \in [0, 10^{-4}]$

şi în plus avem

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} U^x(\tau) \\ U^y(\tau) \\ U^z(\tau) \\ U^t(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \sin(a\alpha\tau) \\ \mu \cos(a\alpha\tau) \\ \sqrt{1+\mu^2} sh(a\sigma\tau) \\ \sqrt{1+\mu^2} ch(a\sigma\tau) \end{pmatrix}. \tag{4.5.3}$$

Astfel de traiectorii pot fi găsite după o integrare directă, care ne conduce la soluţia

$$\begin{cases} x(\tau) = x_0 + \frac{\mu}{a\alpha}(1 - \cos(a\alpha\tau)) \\ y(\tau) = y_0 + \frac{\mu}{a\alpha} \sin(a\alpha\tau) \\ z(\tau) = z_0 + \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{a\sigma}(ch(a\sigma\tau) - 1). \end{cases} \tag{4.5.4}$$

O astfel de traiectorie, care este o spirală de-a lungul axei z, este reprezentată în Figura 4.1 pentru un electron care porneşte cu viteza U_0 din poziţia iniţială x_0, cu valorile iniţiale

$$x_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \text{ şi } U_0 = (U^x(\tau), U^y(\tau), U^z(\tau)) = (0, 4 \times 10^5, 0). \tag{4.5.5}$$

Menţionăm că în figurile prezentate, unităţile de măsură pentru vectorii E şi B sunt volt pe metru şi volt$\times$secundă/(3×10^8) pe metru pătrat, timpul este măsurat în secunde, distanţele (cu câteva exeсepţii) în metrii şi vitezele în metrii pe secundă.

Cazul 2. $E.B = 0$ şi $B^2 - E^2 < 0$.

Câmpul electromagentic poate fi reprezentat din nou printr-o matrice de tipul I) şi putem concluziona că acest lucru este posibil doar în cazul în care avem

$$\alpha = 0. \tag{4.5.6}$$

Prin urmare putem scrie

$$\zeta(\mathcal{F}) = \widetilde{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix}, E = (0,0,\sigma), B = (0,0,0). \tag{4.5.7}$$

unde $\sigma \in \mathbb{R}^*$.

Obţinem

$$\exp(a\widetilde{\mathcal{F}}\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ch(a\sigma\tau) & sh(a\sigma\tau) \\ 0 & 0 & sh(a\sigma\tau) & ch(a\sigma\tau) \end{pmatrix}, \tag{4.5.8}$$

ceea ce ne conduce la

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} U^x(\tau) \\ U^y(\tau) \\ U^z(\tau) \\ U^t(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{1+\mu^2} sh(a\sigma\tau) \\ \sqrt{1+\mu^2} ch(a\sigma\tau) \end{pmatrix}. \tag{4.5.9}$$

Integrarea relaţiei (4.5.9) ne dă traiectoria descrisă de curba

$$\begin{cases} x(\tau) = x_0 \\ y(\tau) = y_0 + \mu\tau \\ z(\tau) = z_0 + \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{a\sigma}(ch(a\sigma\tau) - 1). \end{cases} \tag{4.5.10}$$

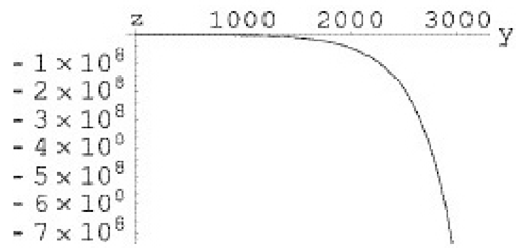

Figura 4.2: $E = (0, 0, 2 \times 10^{-3})$, $B = (0, 0, 0)$, $\tau \in [0, 8]$

Această curbă este uşor de recunoscut ca fiind o catenară în planul OYZ. Mai multe detalii despre proprietăţile geometrice şi mecanice a acestei curbe pot fi găsite în [59] şi [60]. Folosind formulele (4.5.10) am ilustrat grafic traiectoria pe care o urmează electronul în Figura 4.2 cu datele iniţiale specificate în (4.5.5), iar scara pentru axe este aleasă astfel încât o unitate să corespundă la 10^3 metrii.

Cazul 3. $E.B = 0$ şi $B^2 - E^2 > 0$.

Câmpul electromagentic poate fi reprezentat din printr-o matrice de tipul I) în care

$$\sigma = 0, \tag{4.5.11}$$

şi prin urmare obţinem

$$\zeta(\mathcal{F}) = \widetilde{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E = (0,0,0), B = (0,0,\alpha), \tag{4.5.12}$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Procedând la fel ca în cazul anterior obţinem

$$\exp(a\widetilde{\mathcal{F}}\tau) = \begin{pmatrix} \cos(a\alpha\tau) & \sin(a\alpha\tau) & 0 & 0 \\ -\sin(a\alpha\tau) & \cos(a\alpha\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.5.13}$$

şi

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} U^x(\tau) \\ U^y(\tau) \\ U^z(\tau) \\ U^t(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\sin(a\alpha\tau) \\ \mu\cos(a\alpha\tau) \\ 0 \\ \sqrt{1+\mu^2}\tau \end{pmatrix}. \tag{4.5.14}$$

Integrarea relaţiei (4.5.14) va conduce la traiectoria descrisă de curba

$$\begin{cases} x(\tau) = x_0 + \frac{\mu}{a\alpha}(1-\cos(a\alpha\tau)) \\ y(\tau) = y_0 + \frac{\mu}{a\alpha}\sin(a\alpha\tau) \\ z(\tau) = z_0, \end{cases} \tag{4.5.15}$$

care este un cerc în planul OXY. Acest rezultat este de o importanţă deosebită în teoria ciclotoanelor şi a spectometrelor de masă.

Cazul 4. $E.B = 0$ şi $B^2 - E^2 = 0$.

Câmpul electromagentic poate fi reprezentat printr-o matrice de tipul II), adică

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & -\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \nu & 0 \end{pmatrix}, E = (0,0,\nu), B = (\nu,0,0), \tag{4.5.16}$$

unde $\nu \in \mathbb{R}$.

Obţinem

$$\exp(a\widetilde{\mathcal{F}}\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{2}a^2\nu^2\tau^2 & a\nu\tau & \frac{1}{2}a^2\nu^2\tau^2 \\ 0 & -a\nu\tau & 1 & a\nu\tau \\ 0 & -\frac{1}{2}a^2\nu^2\tau^2 & 1 & 1+\frac{1}{2}a^2\nu^2\tau^2 \end{pmatrix} \tag{4.5.17}$$

ceea ce conduce la

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} U^x(\tau) \\ U^y(\tau) \\ U^z(\tau) \\ U^t(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu + \frac{1}{2}a^2\nu^2\left(\sqrt{1+\mu^2}-\mu\right)\tau^2 \\ a\nu\left(\sqrt{1+\mu^2}-\mu\right)\tau \\ \sqrt{1+\mu^2} + \frac{1}{2}a^2\nu^2\left(\sqrt{1+\mu^2}-\mu\right)\tau^2 \end{pmatrix}. \tag{4.5.18}$$

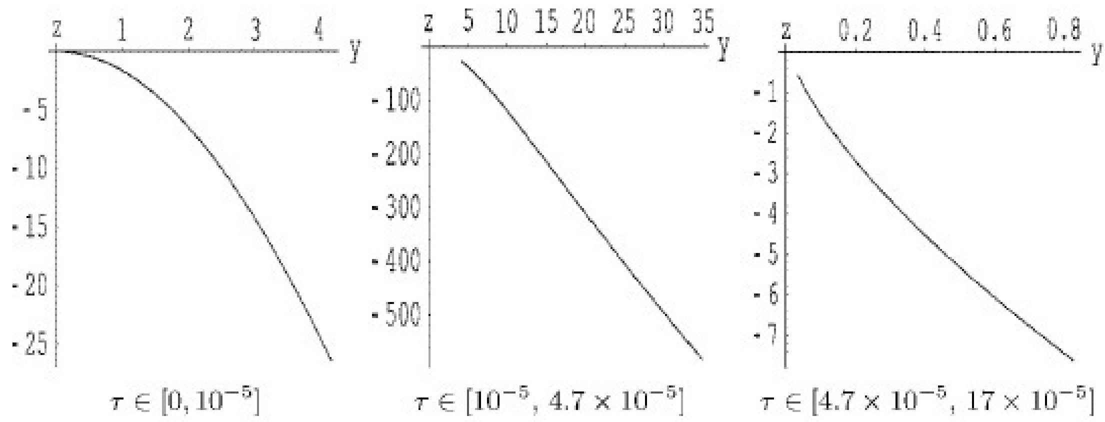

Figura 4.3: $E = (0, 0, 3)$, $B = (3, 0, 0)$

Integrând relaţia (4.5.18) putem găsi parabola semi-cubică generalizată în planul OYZ (mai multe detalii se pot găsi în [28]) descrisă parametric de

$$\begin{cases} x(\tau) = x_0 \\ y(\tau) = y_0 + \mu x + \frac{1}{6} a^2 \nu^2 \left(\sqrt{1+\mu^2} - \mu \right) \tau^3 \\ z(\tau) = z_0 + \frac{1}{2} a \nu \left(\sqrt{1+\mu^2} - \mu \right) \tau^2. \end{cases} \tag{4.5.19}$$

Trei tipuri diferite pentru traiectorii astfel generate, cu datele iniţiale specificate în (4.5.5), sunt prezentate în Figura 4.3 pentru a evidenţia caracterul specific în intervale diferite de timp alese corespunzător. În Figura 4.3, scara considerată de pe axe este aleasă astfel încât o unitate corespunde valorii de 10^3 metrii.

Bibliografie

[1] Abraham, R., Marsden, J.E., *Foundations of Mechanics*, Addison Wesley, 2nd Edition, 1978.

[2] Andrica, D., *Critical Point Theory and Some Applications*, Cluj University Press, 2005.

[3] Andrica, D., Caşu, I.N., *Grupuri Lie, aplicaţia exponenţială şi mecanica geometrică,* Presa Universitară Clujeană, 2008.

[4] Andrica, D., Mare, L., *The image of exponential mapping on the linear group* $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, 1989.

[5] Andrica, D., Mare, L., *An application of the fibration theorem of Ehresmann*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank., Series A1, Vol. **41**(1992), 151-155.

[6] Andrica, D., **Rohan, R.-A.**, *The image of the exponential map and some applications*, Proceedings of the 8th Joint Conference on Mathematics and Computer Science MaCS 2010, Komarno, Slovakia, July $14-17$, 2010, $3-14$.

[7] Andrica, D., **Rohan, R.-A**., *Computing the Rodrigues coefficients of the exponential map of the Lie groups of matrices*, Balkan Journal of Geometry and Applications. (trimis spre publicare)

[8] Andrica, D., **Rohan,R.-A.**, *A new way to find the Rodrigues formula fo the Lorentz group*, Carphatian Journal of Mathematics. (trimis spre publicare)

[9] Andrica, D., **Rohan, R.-A.**, *A direct method to determine the Rodrigues coefficients with application to the group $SO(n)$*. (în pregătire)

[10] Baker, A., *Matrix Groups. An Introduction to Lie Group Theory*, SUMS, Springer, 2002.

[11] Belmann, R., E., *Stability Theory of Differential Equations*, McGraw-Hill, New Tork, 1953.

[12] Bourbaki, N., *Elements of Mathematics.Lie Goups and Lie Algebra,* Chapters 1-3, Springer, 1989.

[13] Bröcker, T., tom Dieck, T., *Representations of compact Lie groups*, Springer-Verlag, GTM, vol. **98**, New York, 1985.

[14] Cartan, E., *The Theory of Spinors*, MIT Press, 1966.

[15] Carter, R., Segal, G., MacDonald, I., *Lectures on Lie Goups and Lie Algebra*, Cambridge University Press, 1985.

[16] Chevalley, C., *Theory of Lie Goups I*, Princeton Mathematical Series, No.8, Princeton University Press, 1946.

[17] Coddington, E., A., Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New Tork, 1955.

[18] Curtis, M.L., *Matrix Groups*,Universitext, Springer Verlag, 2nd Edition, 1984.

[19] Dieudonne, J., *Sur les Groupes Clasiques*, Hermann, 3rd Edition, 1967.

[20] Dieudonne, J., *Elements d'Analyse, Tome V. Groupes de Lie Compacts, Groupes de Lie Semi-Simple*, Edition Jacques Gabay, 2003.

[21] Dimitrov, G.K., Mladenov I.M., *A new formula for the exponents of the generators for theLorentz group*, Sevent International Conference on Geometry, Intergrability and Quantization, June $2-10$, 2005, Varna, Bulgaria, I.M. Mladenov and M. de León ,Eds., pp 96-113.

[22] Djokovic, D., *On the exponential map in classical Lie groups*, Journal of Algebra, **64**:76-88,1980.

[23] Duistermaat, J.J., Kolk, J.A.C., *Lie Groups*, Universitext, Springer Verlag, 2000.

[24] Gallier, J.H., *Geometric Methods and Applications, For Computer Science and Engineering*, TAM, Vol.**38**, Springer, 2011.

[25] Gallier, J., Xu, D.,*Computing exponentials of skew-symmetric matrices and logarithms of orthogonal matrices*, International Journal of Robotics and Automation, Vol.17, No.4, 2002, $2-11$.

[26] Gallier, J., *A Concrete Introduction to Classical Loe Groups Via the Exponential Map*, University of Pennsylvania, 2002,

[27] Gantmacher, F.R., *The Theory of Matrices*, Vol.**I**, AMS, Chelsea, 1977.

[28] Gray, A., *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Second Edition, CRC Press, Boca Raton, 1998.

[29] Hall, B., *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations.An Elementary Introduction*, GTM No.**222**, Springer Verlag, 2003.

[30] Helgason, S., *Groups and Geomeric Analysis.Integral Geometry, Invariant Differential Operators and Spherical Functions*, MSM, Vol.**83**, AMS, 2000.

[31] Higham, N.J., *The scaling and squaring method of the matrix exponential revised*, SIAM Journal on Matrix Analisis and Applications, **26**:1179-1193, 2005.

[32] Hilgert, J., and Hofmann, K.H., *Old and new on $SL(2)$*, Manusc. Math. **54** (1985), $17-52$.

[33] Hofmann, K.H., *A memo on the exponential function and regular points*, Arch. Math. **59** (1992), $24-37$.

[34] Hofmann, K.H., and Lawson, J.D., *Divisible subsemigroups of Lie groups*, J. London Math. Soc. **27**, 427 − 437 (1983).

[35] Hofmann, K.H., and Mukhergea, A., *On the density of the image of the exponential function*, Math. Ann. **234**(1978), 263 − 273.

[36] Hofmann, K.H., and Rupert, W.A.F., *Lie groups and subsemigroups with surjective exponential function*, Memoirs of the Amer. Math. Soc **618**(1997).

[37] Horn, R.A., Johnson,Ch.R., *Matrix Analysis*,Cambridge University Press, 1990.

[38] Knapp, A.W., *Lie Groups Beyond an Introduction*,Progress in Mathematics Vol.**140**, Birkhauser, 2nd Edition, 2002.

[39] Kim, M.-J.,Kim, M.-S.,Shin, A., *A general construction scheme for unit quaternion curves with simple high order derivatives*, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM, 1995, 369-376.

[40] Kim, M.-J.,Kim, M.-S.,Shin, A., *A compact differential formulafor the first derivative of a unit quaternion curve,* Journal of Visualization and Computer Animation, **7**(1996), 43-57.

[41] Lai, H.L., *Surjectivity of exponential mapping on semisimple Lie groups*, J. Math. Soc. Japan, **29**(1977), 303-325.

[42] Jütler, B., *Visualization of moving objects using dual quaternion curves*, Computers and Graphics, **18**(3), 1994, 315-326.

[43] Jütler, B., *An osculating motion with second order contact for spacial Euclidean motions*, Mechanics and Machine Theory, **32**(7), 1997, 843-853.

[44] Mare, L., *The image of exponential map on a few classes of Lie groups*, Babeş-Bolyai University, Faculty of Mathematics, Seminar on Geometry, Preprint No.2, 1991, 71-78.

[45] Mare, L., *A topological property of the exponential*, Proc. Symposium in Geometry on the occasion of the 190th aniversary of Janos Bolyai and of the 60th aniversary of Marian Ţarină, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca and Târgu Mureş, August 31-September 1, 1992, Preprint No.**2**, 1993 (P. Enghiş and D. Andrica, Eds.), 127-132.

[46] Marsden, J.E., Ratiu, T.S., *Introduction to Mechanics and Symmetry*, TAM, Vol.**17**, Springer Verlag, 1994.

[47] Mladenova, C., *An approach to description of a rigid body motion*, C. R. Acad. Sci. Bulg. **38**, $1657-1660$ (1985).

[48] Mladenova, C.D., *Group theory in the problems of modeling and control of multi-body systems*, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, **8**(2006), 17-121.

[49] Moskowitz, M., and Wüstner, M., *Exponentiality of certain real solvable Lie groups*, Cand. Math. Bull. **41**(1998), $386-373$.

[50] Müller, A., *Group theoretical approaches to vector parametrziation of rotations*, Journal of Geometry and Symmetry un Physics (JGSP) **19**(2010), 43-72.

[51] Naber, G., *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Springer, New York, 1992. Reprinted by Dover, Mineola, New York, 2003.

[52] Nishikawa, M., *Exponential image in the real general linear group*, Bull. Fukuoka Univ. Ed. III, **26**(1976), $35-44$.

[53] Nishikawa, M., *Exponential image in the real special linear group*, Bull. Fukuoka Univ., Ed. III, **28**(1978), 1-6.

[54] Nishikawa, M., *Exponential image in the Lorentz group* $\mathbf{O}(2,1)$, Bull. Fukuoka Univ., Ed. III, **29**(1979), 9-19.

[55] Nishikawa, M., *Exponential image in the group* $\mathbf{O}(n,1)$*, for* $n=3,4$, Bull. Fukuoka Univ. Ed. III, **31**(1981), 1-11(1982).

[56] Nishikawa, M., *On the exponential map of the group $O(p,q)_0$*, Mem. Fac. Sco. Kyushu Univ. Ser. A, **37**(1983), no.1, 63-69.

[57] Nishikawa, M., *Exponential image in the group* $\mathbf{O}(3,3)$, Bull. Fukuoka Univ., Ed. III, **34**(1984), 13-18(1985).

[58] Nôno, T., *On the singularity of general linear groups*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, **20**(1956/1957), 115-123.

[59] Oprea, J., *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*, AMS, Providencem, Rhode Island, 2000.

[60] Oprea, J., *Differential Geomemtry and Its Applications,* Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2004.

[61] Park, F.C., Ravani, B., *Bézier curves on Riemmanian manifolds and Lie groups with kinematic applications,* Mechanism, Synthesis and Analysis, **70**(1994), 15-21.

[62] Park, F.C., Ravani, B., *Smooth invariant interpolation of rotations*, ACM Transactions of Graphics, **16**(1997), 277-295.

[63] Politi, T.A., *A formula for the exponential of a real skew-symmetric matrix of order 4*, BIT, 2001, vol **41**, No 4, 842-845.

[64] Puta, M., Sima, A., *Some remarks on the Lie groups* $\mathbf{SO}(2,1)$, in Proc. of the 9th National Conf. of the Romanian Mathematical Society, Lugoj, May 2005, M. Megan, Ed., Editura Universităţii de Vest, Timişoara, 354-360.

[65] Putzer, E.J., *Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients*, Amer. Math. Monthly **73**(1966), 2-7.

[66] Rădulescu, S., Andrica, D., *Some remarks on the equation $f(X) = A$ in $M_n(\mathbb{C})$ and applications*, Itinerant seminar on functional equations, approximation and convexity, Cluj-Napoca, 1988, 281-285.

[67] **Rohan, R.-A.**, *The exponential map and the Euclidean isometries*, Acta Univeristatis Apulensis, **31**(2012), 199-204.

[68] **Rohan, R.-A.**, *Some remarks on the exponential map on the group* $\mathbf{SO}(n)$ *and* $SE(n)$, In Proc. of the XIV Int.Conference Geometry, Integrability and Quantization, $8-13$ June, Varna, Bulgaria, 2012. (acceptată spre publicare)

[69] Rossmann, W., *Lie Groups. An Introduction Through Linear Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Oxford University Press, 2002.

[70] Sagle, A.A., Walde, R.E.,*Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Academic Press, 1973.

[71] Sattinger, D.H., Weaver, O.L., *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*, Applied Math.Science, Vol.**61**, Springer Verlag, 1986.

[72] Selig, J.M., *Lie Algebra*, Monographs in Computer Science, Springer New York, 2005.

[73] Silva Leite, F., Crouch, P, *Closed forms for the exponential mapping on matrix Lie groups based on Putzer's method*, Journal of Mathematical Physics, Vol. **40,** No. **7**(1999), 3561-3568

[74] Tao, T., *Two small facts about Lie Groups*, 25 June, 2011.

[75] Warner, F., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, GTM No.**94**, Springer Verlag, 1983.

[76] Wüstner, M., *Lie groups with surjective exponential function*, Shaker Verlag, Berichte aus der Mathematik, Aachen 2001.

[77] Wüstner, M., *On the exponential function of real splittable and real semisimple Lie groups*, Beitr. Alg. Geometrie **39** (1998), $37-46$.

[78] Wüstner, M., *On the surjectivity of the exponential function of solvable Lie groups*, Math. Nachr. **192** (1998), 255 − 266.

[79] Wüstner, M., *Product decomposition of solvable Lie groups*, Man. Math. **91** (1996), 179 − 194.