Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică și Informatică
Departamentul de Matematică

ECHIVALENȚE ÎNTRE TRIPLETE DE MODULE ÎN TEORIA REPREZENTĂRILOR GRUPURILOR FINITE

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător științific:
Prof. Dr. Andrei Marcus

Student:
Virgilius-Aurelian Minuță

2021

Cuprins

Cuvinte cheie

- algebre grupale
- algebre și module graduate
- blocuri
- echivalențe derivate
- echivalențe Morita
- grupuri finite
- produse în coroană (produse wreath)
- produse încrucișate
- teorie Clifford
- triplete de caractere

Introducere

Teoria reprezentărilor grupurilor finite este un instrument important necesar pentru a examina structura unui grup, astfel unul dintre scopurile principale ale teorie reprezentărilor grupurilor finite este clasificarea tuturor grupurilor finite. În acest sens, unul dintre rezultate importante obținute în acest secol a fost clasificarea cu succes a tuturor grupurilor finite simple. Pentru a clasifica toate grupurile finite, unele din cele mai vechi conjecturi propun să creeze o legătură între teoria reprezentării a unui grup finit cu cea a subgrupurilor sale locale. Una din principalele strategii folosite pentru abordarea acestor așa numite conjecturi locale-globale, constă în a le reduce la o condiție mai puternică despre grupuri simple, numită în literatură drept condiție inductivă. Astfel de teoreme de reducere pot fi obținute folosind tehnici ale teoriei Clifford, și în particular, folosind limbajul tripletelor de caractere și a relațiilor dintre ele.

În rezultatele recente ale lui Britta Späth, rezumate în [37] și [38], despre condiții inductive pentru conjectura McKay și conjectura Alperin asupra ponderilor (Alperin weight conjecture, AWC), teoremele de reducere obținute utilizează anumite relații între două triplete de caractere, care impun ca cele două triplete să aibă aceeași "teorie Clifford". Mai exact, Britta Späth consideră trei relații între triplete de caractere: relația de ordine-inițială (first-order [38, Definiția 2.1]), relația de ordine-centrală (central-order [38, Definiția 2.7]) și relația de ordine-relativă-la-blocuri/ordine-blockwise (blockwise-order [38, Definiția 4.2]).

În această teză am creat o versiune categorială pentru triplete de caractere, pe care le numim triplete de module și totodată introducem trei relații între triplete de module corespunzătoare celor anterior amintite dintre tripletele de caractere. Mai mult, am demonstrat că aceste relații sunt consecințe ale unor echivalențe graduate Morita, Rickard și respectiv, derivate, cu câteva condiții suplimentare. Aceste rezultate au fost motivate de convingerea, exprimată în mod special în lucrările lui Michel Broué (vezi, spre exemplu, [5] și [6]), că anumite corespondențe între caractere cu proprietăți "bune" sunt de fapt consecințe ale unor echivalențe categoriale, cum ar fi echivalențe Morita sau echivalențe Rickard între blocurile unor algebre grupale. Pentru a explica legătura dintre aceste două perspective, vom începe prin a introduce contextul nostru.

Fie G un grup finit, și $(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$ un sistem p-modular, unde $\mathcal{O}$ este un inel complet de valoare discretă, $\mathcal{K}$ este corpul de fracții a lui $\mathcal{O}$ și $k = \mathcal{O}/J(\mathcal{O})$ este corpul rezidual de caracteristică p. Presupunem că corpul k este algebric închis și că corpul $\mathcal{K}$ conține toate rădăcinile de ordin $|G|$ ale unități. Fie N un subgrup normal al lui G. Notăm $\bar{G} := G/N$. Fie G' un subgrup al lui G astfel încât $G = NG'$, și fie $N' = G' \cap N$. Considerăm blocurile $\bar{G}$-invariante, b și b' ale lui $\mathcal{O}N$ și $\mathcal{O}N'$ și $\mathcal{O}$-algebrele tare $\bar{G}$-graduate $A = b\mathcal{O}G$ și $A' = b'\mathcal{O}G'$, împreună cu 1-componentele lor $B = b\mathcal{O}N$ și $B' = b'\mathcal{O}N'$.

În Capitolul 1, pornim cu "Teorema Fluturelui", care în versiunea lui B. Späth din [38, Teorema 2.16], oferă o metodă pentru obținerea anumitor relații între triplete de caractere. Motivați de aceasta, precum am publicat în articolul [28], considerăm echivalențe Morita graduate între extensii de blocuri și obținem Teorema 1.5.2, care permite construcția unei echivalențe Morita graduate dintr-una dată folosind asumpții similare celor din [38]. În orice caz, presupunerea noastră că toate elementele lui M comută cu cele din centrul lui N, unde M este un (B, B')-bimodul ce induce o echivalență Morita între B și B', ne oferă o motivație pentru o dezvoltare ulterioară a acestei versiuni categoriale a "Teoremei Fluturelui", care va fi introdusă în Capitolul 2. Mai mult, una din condițiile din definiția lui B. Späth ([37, Definiția 3.1], [38, Definiția 2.7]) ale relației de ordine-centrală $\leq_c$ dintre două triplete de caractere impune atât că $C_G(N) \leq G'$, dar și că cele două caractere proiective asociate celor două triplete de caractere să ia aceleași valori scalare pe elementele lui $C_G(N)$. Se observă că în această situație, algebra grupală $\mathcal{C} = \mathcal{O}C_G(N)$ este o subalgebră $\bar{G}$-graduată a ambelor algebre A și A', dar și că ea are o $\bar{G}$-acțiune evidentă compatibilă cu $\bar{G}$-graduarea. Prin urmare, dat fiind faptul că cunoaștem deja că echivalențele induse de bimodule $\bar{G}$-graduate conservă mulți invarianți teoretici Clifford (vezi [25, §5] și [26]), versiunea noastră categorială a "Teoremei Fluturelui" dar și relația $\leq_c$ dintre triplete de caractere ne conduc la a considera (A, A')-bimodule $\bar{G}$-graduate $\tilde{M}$ cu proprietatea că $m_{\bar{g}}c = {}^{\bar{g}}c m_{\bar{g}}$ oricare ar fi $\bar{g} \in \bar{G}$, $c \in \mathcal{C}$ și $m_{\bar{g}} \in \tilde{M}_{\bar{g}}$. Am dovedit că echivalențele induse de astfel de bimodule implică relația $\leq_c$ între tripletele de caractere corespunzătoare. Acest tip de bimodule, pe care le numim (A, A')-bimodule G-graduate peste o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată $\mathcal{C}$, le vom introduce în Capitolul 2. Tot aici, vom și prezenta principalele lor proprietăți. Acest tip nou de structuri a fost publicat de către noi pentru prima dată în articolul [29]. Rezultatul principal al acestui capitol constă în Teorema 2.1.13, unde demonstrăm că categoria acestor bimodule, A-Gr/$\mathcal{C}$-A', este echivalentă categoriei $\Delta^{\mathcal{C}}$-modulelor, unde $\Delta^{\mathcal{C}} = \bigoplus_{\bar{g}\in\bar{G}} A_{\bar{g}} \otimes_{\mathcal{C}} A'^{\mathrm{op}}_{\bar{g}}$. De fapt, avem trei functori izomorfi natural care dau această echivalență (vezi Propoziția 2.1.14). De asemenea, am demonstrat adițional în Propoziția 2.1.15 că acești functori sunt compatibili cu produse tensoriale, dar și cu "a lua morfisme". În următoarele părți ale acestui capitol, am dezvoltat o teorie Morita graduată peste $\mathcal{C}$, așa cum am și publicat în articolul [32]; am demonstrat că echivalențele Morita G-graduate peste $\mathcal{C}$ pot fi induse de anumite echivalențe Morita echivariante dintre B și B', după care am demonstrat în Teorema 2.4.3 versiunea noastră categorială finală a "Teoremei Fluturelui", generalizând astfel rezultatul inițial din Capitolul 1. În Secțiunea 2.5 am prezentat o aplicație a acestei teorii, în care arătăm cum se pot obține echivalențe Morita $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$ din echivalențe Morita induse de modulul Scott, $\mathrm{Sc}(N \times N', \Delta Q)$, a lui Koshitani și Lassueur ([19], [20]).

Folosind acest context categorial dezvoltat, în Capitolul 3, precum am publicat în articolul [29], introducem noțiunea de triplet de module (A, B, V), unde V este un $\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}}$ B-modul simplu $\bar{G}$-invariant, împreună și cu relațiile ge și $\geq_c$ dintre două triplete de module (A, B, V) și (A', B', V'). Un rezultat principal este dat de Teorema 3.2.4, unde am demonstrat că dacă tripletele de module (A, B, V) și (A', B', V') corespund via o echivalență Rickard $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C} = \mathcal{O}C_G(N)$, atunci $(A, B, V) \geq_c (A', B', V')$, care, la rândul ei implică, relația $(G, N, \theta) \geq_c (G', N', \theta')$ dintre tripletele de caractere asociate. În continuare, în Definiția 3.3.1 introducem și o versiune între triplete de module a relației de ordine-blockwise $\geq_b$ (vezi [38, Definiția 4.2]), și am demonstrat în Propoziția 3.3.6 că aceasta este o consecință a unei echivalențe derivate graduată specială, compatibilă într-un anumit sens cu morfismul Brauer. Aceste adiții "blockwise" pentru teoria noastră a tripletelor de module a fost publicată de noi în articolul [30].

În final, în Capitolul 4, dat fiind faptul că cercetările lui B. Späth au arătat că un nou triplet de caractere poate fi construit din unul dat, folosind construcții de produse în coroană (produse wreath) de triplete de caractere ([38, Teorema 2.21]), am demonstrat că echivalențele noastre sunt compatibile într-un anume sens cu produse tensoriale, dar și cu produse wreath, precum am și publicat în articolele [33, 30].

Cumulativ, această teză se bazează pe rezultatele noastre publicate în [28, 29, 32, 33, 30]. Adițional, menționez că anumite părți ale acestei teze au fost prezentate în cadrul mai multor conferințe naționale, dar și internaționale.

Principalele surse pentru notațiile și rezultatele utilizate direct sunt date de [23, 25].

Capitolul 1

Algebre $\bar{G}$-graduate de endomorfisme și echivalențe Morita

În acest capitol, vom prezenta notațiile noastre standard, iar în următoarele secțiuni vom obține o versiune în termeni de echivalențe Morita graduate a “Teoremei Fluturelui” dintre triplete de caractere. Aceasta va oferi o metodă de construcție a unei echivalențe între extensii de blocuri, pornind de la o altă echivalență dată. Rezultatele din acest capitol au fost publicate în articolul [28].

1.1 Preliminarii

În general, notațiile și asumpțiile noastre sunt standard și urmăresc [25].

Toatele inele din această teză sunt asociative cu unitate $1 \neq 0$, iar toate modulele sunt unitale și finit generate.

Fie A un inel. Vom nota cu A-Mod categoria tuturor A-modulelor stângi. De obicei vom scrie acțiunile în partea stângă, astfel printr-un modul vom înțelege de obicei un modul stâng (aceasta dacă nu este specificat explicit că modulul este drept). Notația ${}_AM$ (respectiv ${}_AM_{A'}$) va fi folosită pentru a evidenția că M este un A-modul stâng (respectiv un (A, A')-bimodul).

Contextul tezei este dat de un grup finit G și un sistem p-modular $(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$, unde $\mathcal{O}$ este un inel complet de valoare discretă, $\mathcal{K}$ este corpul de fracții al lui $\mathcal{O}$ (de caracteristică 0) și $k = \mathcal{O}/J(\mathcal{O})$ este corpul rezidual de caracteristică p al lui $\mathcal{O}$. Vom presupune că corpul k este algebric închis și că corpul $\mathcal{K}$ conține toate rădăcinile unității de ordin $|G|$.

Fie N un subgrup normal al lui G. Notăm prin $\bar{G}$ grupul factor G/N.

Fie $A = \bigoplus_{\bar{g}\in\bar{G}} A_{\bar{g}}$ o $\mathcal{O}$-algebră $\bar{G}$-graduată. Pentru un subgrup $\bar{H}$ al lui $\bar{G}$, vom nota prin $A_{\bar{H}} := \bigoplus_{\bar{g}\in\bar{H}} A_{\bar{g}}$ trunchierea lui A de la $\bar{G}$ la $\bar{H}$. Notăm cu A-Gr categoria tuturor A-modulelor $\bar{G}$-graduate stângi. Pentru $M = \bigoplus_{\bar{g}\in\bar{G}} M_{\bar{g}} \in A$-Gr și $\bar{g} \in \bar{G}$, $\bar{g}$-suspensia lui M este definită ca fiind A-modulul $\bar{G}$-graduat $M(\bar{g}) = \oplus_{\bar{h}\in\bar{G}} M(\bar{g})_{\bar{h}}$, unde $M(g)_{\bar{h}} = M_{\bar{g}\bar{h}}$. Pentru orice $\bar{g} \in \bar{G}$, $T^A_{\bar{g}} : A\text{-Gr} \to A\text{-Gr}$ va reprezenta (ca și în [11]) functorul de $\bar{g}$-suspensie, i.e. $T^A_{\bar{g}}(M) = M(\bar{g})$ oricare ar fi $\bar{g} \in \bar{G}$. Stabilizatorul lui M în G este, prin definiție [25, §2.2.1], subgrupul

$$\bar{G}_M = \left\{\bar{g} \in \bar{G} \mid M \simeq M(\bar{g}) \text{ ca } A\text{-module } \bar{G}\text{-graduate stângi}\right\}.$$

Dacă $\bar{G}_M = \bar{G}$ sau echivalent dacă M este izomorf în A-Gr cu fiecare din $\bar{g}$-suspensiile sale, atunci spunem că M este $\bar{G}$-invariant.

Fie $M, N \in A$-Gr. Vom nota prin $\mathrm{Hom}_A(M, N)$, grupul aditiv al tuturor omomorfismelor A-lineare de la M la N. Deoarece $\bar{G}$ este finit, E. C. Dade a demonstrat în [9, Corolarul 3.10] că $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ este $\bar{G}$-graduat. Mai exact, dacă $\bar{g} \in \bar{G}$, componenta de grad $\bar{g}$ (de acum înainte numită $\bar{g}$-componentă) este (precum în [25, §1.2]):

$$\mathrm{Hom}_A(M, N)_{\bar{g}} := \left\{f \in \mathrm{Hom}_A(M, N) \mid f(M_{\bar{x}}) \subseteq N_{\bar{x}\bar{g}},\ \text{for all } \bar{x} \in \bar{G}\right\}.$$

Notăm cu id_X funcția identitate definită pe mulțimea X.

Pentru simplitate, în acest capitol, vom considera în principal doar produse încrucișate, dar și pentru că generalizarea la cazul algebrelor tare graduate este ușoară. Reamintim că, dacă A este un produs încrucișat, putem alege un element inversabil omogen $u_{\bar{g}}$ în componenta $A_{\bar{g}}$, pentru orice $\bar{g} \in \bar{G}$.

Exemplul nostru principal de produs încrucișat $\bar{G}$-graduat este obținut astfel: Considerăm algebra grupală $\mathcal{O}G$ ca fiind $\bar{G}$-graduată cu 1-componenta $\mathcal{O}N$. Fie $b \in Z(\mathcal{O}N)$ un block $\bar{G}$-invariant. Fie $A := b\mathcal{O}G$ și $B := b\mathcal{O}N$. Atunci extensia de blocuri A este un produs încrucișat $\bar{G}$-graduat, cu 1-componenta B. Acest exemplu va constitui premiza cadrului nostru principal de lucru (Secțiunea 1.4) dar și motivul pentru care vom utiliza în principal "$\bar{G}$-graduări", deși aceasta nu este întotdeauna esențial: în multe situații, graduările pot fi considerate ca fiind date direct de G.

1.2 Echivalențe Morita graduate

În această secțiune, vom aminti din [25] principalele idei despre echivalențele Morita graduate și vom preciza o variantă graduată a celei de-a doua teoreme Morita [12, Teorema 12.12].

Fie $A = \bigoplus_{\bar{g}\in\bar{G}} A_{\bar{g}}$ și $A' = \bigoplus_{\bar{g}\in\bar{G}} A'_{\bar{g}}$ două algebre tare $\bar{G}$-graduate, cu 1-componente B și respectiv B'.

Clar $A \otimes_{\mathcal{O}} A'^{\mathrm{op}}$ este o algebră $\bar{G} \times \bar{G}$-graduată. Fie

$$\delta(\bar{G}) := \{(\bar{g}, \bar{g}) \mid \bar{g} \in \bar{G}\}$$

subgrupul diagonal al lui $\bar{G} \times \bar{G}$ și fie $\Delta^{\mathcal{O}}$ subalgebra diagonală a lui $A \otimes_{\mathcal{O}} A'^{\mathrm{op}}$

$$\Delta^{\mathcal{O}} := \Delta(A \otimes_{\mathcal{O}} A'^{\mathrm{op}}) := (A \otimes_{\mathcal{O}} A'^{\mathrm{op}})_{\delta(\bar{G})} = \bigoplus_{\bar{g}\in\bar{G}} A_{\bar{g}} \otimes A'_{\bar{g}^{-1}}.$$

Atunci $\Delta^{\mathcal{O}}$ este o algebră $\bar{G}$-graduată, cu 1-componentă $\Delta_1^{\mathcal{O}} = B \otimes_{\mathcal{O}} B'^{\mathrm{op}}$.

Fie M un (B, B')-bimodul, sau, echivalent, M este un $B \otimes_{\mathcal{O}} B'^{\mathrm{op}}$-modul, prin urmare un Δ_1-modul. Fie $M^* := \mathrm{Hom}_B(M, B)$, B-dualul lui M. De remarcat este faptul că dacă B este o algebră simetrică, atunci avem izomorfismul

$$M^* := \mathrm{Hom}_B(M, B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O}),$$

unde $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O})$, este $\mathcal{O}$-dualul lui M.

Definiția 1.2.1. Spunem că (A, A')-bimodulul $\bar{G}$-graduat $\tilde{M}$ induce o echivalență Morita $\bar{G}$-graduată între A și A', dacă $\tilde{M} \otimes_{A'} \tilde{M}^* \simeq A$ ca (A, A)-bimodule $\bar{G}$-graduate și $\tilde{M}^* \otimes_A \tilde{M} \simeq A'$ ca (A', A')-bimodule $\bar{G}$-graduate, unde A-dualul $\tilde{M}^* = \mathrm{Hom}_A(\tilde{M}, A)$ lui $\tilde{M}$ este un (A', A)-bimodul $\bar{G}$-graduat.

Conform [25, Teorema 5.1.2], următoarele afirmații sunt echivalente:

(1) între B și B' avem o echivalență Morita dată de $\Delta_1^{\mathcal{O}}$-modulul M:

$$B \underset{{}_{B'}M^*_B \otimes_B -}{\overset{{}_B M_{B'} \otimes_{B'} -}{\rightleftarrows}} B';$$

și M se extinde la un $\Delta^{\mathcal{O}}$-modul;

(2) $\tilde{M} := A \otimes_B M$ este un (A, A')-bimodul $\bar{G}$-graduat și $\tilde{M}^* := A' \otimes_{B'} M^*$ este un (A', A)-bimodul $\bar{G}$-graduat, care induc o echivalență Morita $\bar{G}$-graduată între A și A', dată de functorii:

$$A \underset{{}_{A'}\tilde{M}^*_A \otimes_A -}{\overset{{}_A\tilde{M}_{A'} \otimes_{A'} -}{\rightleftarrows}} A'.$$

În această situație, conform [25, Lema 1.6.3] avem următoarele sunt echivalențe de categorii izomorfe natural:

$$A \otimes_B - \simeq - \otimes_{B'} A' \simeq ((A \otimes_{\mathcal{O}} A'^{op}) \otimes_{\Delta^{\mathcal{O}}} -),$$

prin urmare avem următoarele izomorfisme naturale de bimodule $\bar{G}$-graduate

$$\tilde{M} := A \otimes_B M \simeq M \otimes_{B'} A' \simeq ((A \otimes_{\mathcal{O}} A'^{op}) \otimes_{\Delta^{\mathcal{O}}} M),$$

Presupunem că B și B' sunt Morita echivalente. Atunci, conform celei de-a doua teoreme Morita [12, Teorema 12.12], putem alege izomorfismele de bimodule

$$\varphi : M^* \otimes_B M \to B', \qquad \psi : M \otimes_{B'} M^* \to B,$$

astfel încât

$$\psi(m \otimes m^*)n = m\varphi(m^* \otimes n), \quad \forall m, n \in M, \ m^* \in M^*$$

și

$$\varphi(m^* \otimes m)n^* = m^*\psi(m \otimes n^*), \quad \forall m^*, n^* \in M^*, \ m \in M.$$

Datorită surjectivității acestor funcții, putem alege mulțimile finite I și J; și elementele m_j^*, $n_i^* \in M^*$ și m_j, $n_i \in M$, pentru orice $i \in I$, $j \in J$ astfel încât:

$$\varphi(\sum_{j\in J} m_j^* \otimes_B m_j) = 1_{B'}, \qquad \psi(\sum_{i\in I} n_i \otimes_B n_i^*) = 1_B.$$

Presupunem că $\tilde{M}$ și $\tilde{M}^*$ induc o echivalență Morita $\bar{G}$-graduată între A și A'. Ca și mai sus, conform [12, Teoremei 12.12], putem alege izomorfismele

$$\tilde{\varphi} : \tilde{M}^* \otimes_A \tilde{M} \to A', \qquad \tilde{\psi} : \tilde{M} \otimes_{A'} \tilde{M}^* \to A$$

de bimodule $\bar{G}$-graduate astfel încât

$$\tilde{\psi}(\tilde{m} \otimes \tilde{m}^*)\tilde{n} = \tilde{m}\tilde{\varphi}(\tilde{m}^* \otimes \tilde{n}), \quad \forall \tilde{m}, \tilde{n} \in \tilde{M}, \ \tilde{m}^* \in \tilde{M}^*$$

și

$$\tilde{\varphi}(\tilde{m}^* \otimes \tilde{m})\tilde{n}^* = \tilde{m}^*\tilde{\psi}(\tilde{m} \otimes \tilde{n}^*), \quad \forall \tilde{m}^*, \tilde{n}^* \in \tilde{M}^*, \ \tilde{m} \in \tilde{M}.$$

De fapt, $\tilde{\varphi}_1$ și $\tilde{\psi}_1$ sunt aceleași cu φ și ψ de mai sus și sunt izomorfisme $\Delta^{\mathcal{O}}$-lineare. Mai mult, avem că $1_A = 1_B \in B$ și $1_{A'} = 1_{B'} \in B'$. Prin urmare, putem alege aceleași mulțimi finite I și J; și aceleași elemente m_j^*, $n_i^* \in M^*$ și m_j, $n_i \in M$, $\forall i \in I, j \in J$ astfel încât:

$$\tilde{\varphi}(\sum_{j\in J} m_j^* \otimes_B m_j) = 1_{B'}, \qquad \tilde{\psi}(\sum_{i\in I} n_i \otimes_B n_i^*) = 1_B.$$

1.3 Centralizatori și algebre graduate de endomorfisme

Această secțiune se bazează pe rezultatele noastre publicate în articolul [28, §3]. Aici, vom demonstra că există un morfism natural, compatibil cu echivalențe Morita, de la centralizatorul $C_A(B)$ al lui B în A la algebra de endomorfisme a unui A-modul $\bar{G}$-graduat indus dintr-un B-modul.

Vom presupune că A și A' sunt produse încrucișate $\bar{G}$-graduate, dar rezultatele din această secțiune pot fi generalizate la situația algebrelor tare graduate. Fie $U \in B$-mod și $U' \in B'$-mod astfel încât $U' = M^* \otimes_B U$. Notăm

$$E(U) := \mathrm{End}(A \otimes_B U)^{\mathrm{op}}, \qquad E(U') := \mathrm{End}(A' \otimes_{B'} U')^{\mathrm{op}},$$

algebrele de endomorfisme $\bar{G}$-graduate ale modulelor induse din U și U'.

Vom demonstra că există un morfism natural de algebre $\bar{G}$-graduate între centralizatorul lui B în A și $E(U)$, compatibile cu echivalențe Morita $\bar{G}$-graduate.

Lema 1.3.1. *Funcția*

$$\theta : C_A(B) \to E(U), \qquad \theta(c)(a \otimes u) = ac \otimes u,$$

unde $c \in C_A(B)$, $a \in A$ *și* $u \in U$ *este un morfism de algebre* $\bar{G}$*-graduate.*

Conform [25, Lema 1.6.3], avem că

$$A \otimes_B M \simeq M \otimes_{B'} A',$$

dar vom avea nevoie să scriem explicit izomorfismul dintre cele două. Vom alege elementele inversabile $u_{\bar{g}} \in U(A) \cap A_{\bar{g}}$ și $u'_{\bar{g}} \in U(A) \cap A'_{\bar{g}}$ de grad $\bar{g} \in \bar{G}$. Știm că un element arbitrar $a'_{\bar{g}} \in A'_{\bar{g}}$ poate fi scris în mod unic sub forma $a'_{\bar{g}} = u'_{\bar{g}} b'$, unde $b' \in B'$. Izomorfismul de bimodule $\bar{G}$-graduate dorit este:

$$\varepsilon : M \otimes_{B'} A' \to A \otimes_B M \qquad m \otimes_{B'} a'_{\bar{g}} \mapsto u_{\bar{g}} \otimes_B u_{\bar{g}}^{-1} m a'_{\bar{g}}$$

pentru orice $m \in M$. De asemenea vom avea nevoie explicit de izomorfismul de bimodule $\bar{G}$-graduate

$$\beta : A' \otimes_{B'} M^* \to M^* \otimes_B A \qquad a'_{\bar{g}} \otimes_{B'} m^* \mapsto a'_{\bar{g}} m^* u_{\bar{g}}^{-1} \otimes_B u_{\bar{g}}$$

pentru orice $m^* \in M^*$. Atunci, vom considera izomorfismul de A'-module $\bar{G}$-graduate

$$\beta \otimes_B \mathrm{id}_U : A' \otimes_{B'} M^* \otimes_B U \to M^* \otimes_B A \otimes_B U.$$

Propoziția 1.3.2. *Dacă* $\tilde{M}$ *și* $\tilde{M}^*$ *induc o echivalență Morita* $\bar{G}$*-graduată între* A *și* A'*, atunci diagrama*

$$\begin{tikzcd} E(U) \arrow[r, "\varphi_1", "\sim"'] & E(U') \\ C_A(B) \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "\varphi_2", "\sim"'] & C_{A'}(B') \arrow[u, "\theta'"'] \end{tikzcd}$$

este comutativă, unde morfismele date sunt definite astfel:

$$\begin{aligned}\theta(c)(a\otimes u) &= ac\otimes u,\\ \theta'(c')(a'\otimes u') &= a'c'\otimes u'\\ \varphi_1(f) &= (\beta\otimes_B \mathrm{id}_U)^{-1}\circ(\mathrm{id}_{\tilde{M}^*}\otimes f)\circ(\beta\otimes_B \mathrm{id}_U),\\ \varphi_2(c) &= \tilde{\varphi}(\sum_{j\in J} m_j^* c\otimes_B m_j).\end{aligned}$$

pentru orice $a\in A$, $a'\in A'$, $c\in C_A(B)$, $c'\in C_{A'}(B')$, $u\in U$, $u'\in U'$ *și* $f\in E(U)$.

1.4 Cadrul de lucru inițial

Reamintim că G este un grup finit și că N este un subgrup normal al lui G. Adițional, fie G' un subgrup al lui G și N' un subgrup normal al lui G'. Presupunem că $N' = G'\cap N$ și $G = G'N$, astfel, conform cu a doua teoremă de izomorfism avem că

$$\bar{G} := G/N \simeq G'/(G'\cap N) = G'/N'.$$

Vom reprezenta această construcție prin următoarea diagramă:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ N \arrow[dr, dash] & G' \arrow[d, dash] \\ & N'. \end{tikzcd}$$

Considerăm pe $\mathcal{O}G$ și $\mathcal{O}G'$ drept algebre $\bar{G}$-graduate cu 1-componente $\mathcal{O}N$ și respectiv $\mathcal{O}N'$. Știm că $\bar{G}$ acționează pe $Z(\mathcal{O}N)$ și $Z(\mathcal{O}N')$.

Fie $b\in Z(\mathcal{O}N)$ și $b'\in Z(\mathcal{O}N')$ două blocuri idempotente. Notăm

$$A := b\mathcal{O}G,\qquad A' := b'\mathcal{O}G',\qquad B := b\mathcal{O}N,\qquad B' := b'\mathcal{O}N',$$

prin urmare A și A' sunt produse încrucișate $\bar{G}$-graduate, cu 1-componente B și respectiv B'.

Presupunem că b și b' sunt $\bar{G}$-invarianți. Această presupunere, nu restrânge generalitatea, dată fiind reducerea Fong-Reynolds.

1.5 Teorema fluturelui pentru echivalențe Morita graduate

În această ultimă secțiune a acestui capitol, publicată în articolul [28, §4], vom demonstra că o echivalență Morita între 1-componentele a două extensii de blocuri induce o echivalență graduată între anumite algebre de centralizatori. Aceasta reprezintă unul din ingredientele principale necesare pentru demonstrarea rezultatului principal din aceasta secțiune, Teorema 1.5.2.

Adițional, cadrului de lucru din Secțiunea 1.4, vom presupune că $C_G(N) \subseteq G'$, și notăm $\bar{C}_G(N) := NC_G(N)/N$. Considerăm următoarele algebre:

$$\begin{tikzcd}
A := b\mathcal{O}G \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & A' := b'\mathcal{O}G' \arrow[d, dash] \\
C := b\mathcal{O}NC_G(N) \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & C' := b'\mathcal{O}N'C_G(N) \arrow[d, dash] \\
B := b\mathcal{O}N \arrow[rr, dash] & & B' := b'\mathcal{O}N'.
\end{tikzcd}$$

Dacă M induce o echivalență Morita între B și B', o primă întrebare care apare este ce se întâmplă fără ipoteza adițională cum că M se extinde la un $\Delta^{\mathcal{O}}$-modul. Un răspuns este dat de următoarea propoziție.

Propoziția 1.5.1. *Presupunem că:*

(1) $C_G(N) \subseteq G'$.

(2) M *induce o echivalență Morita între* B *și* B'.

(3) $zm = mz$ *pentru orice* $m \in M$ *și* $z \in Z(N)$.

Atunci, există o echivalență Morita $\bar{C}_G(N)$*-graduată între* C *și* C'

$$\begin{tikzcd}
A := b\mathcal{O}G \arrow[d, dash] & & A' := b'\mathcal{O}G' \arrow[d, dash] \\
C := b\mathcal{O}NC_G(N) \arrow[rr, dash, "{}_C\hat{M}_{C'}", "\sim"'] \arrow[d, dash] & & C' := b'\mathcal{O}N'C_G(N) \arrow[d, dash] \\
B := b\mathcal{O}N \arrow[rr, dash, "{}_BM_{B'}", "\sim"'] & & B' := b'\mathcal{O}N',
\end{tikzcd}$$

indusă de (C, C')*-bimodulul* $\bar{C}_G(N)$*-graduat*

$$\hat{M} := C \otimes_B M \simeq M \otimes_{B'} C' \simeq (C \otimes C'^{op}) \otimes_{\Delta(C \otimes C'^{op})} M.$$

Rezultatul nostru principal, al acestui capitol, publicat în [28, Teorema 4.2], este o versiune pentru echivalențe Morita a așa-numitei "teoreme a fluturelui" [38, Teorema 2.16].

Teorema 1.5.2 (Teorema fluturelui pentru echivalențe Morita graduate)**.** *Fie* $\hat{G}$ *un alt subgrup, având ca și subgrup normal pe* N *astfel încât blocul* b *să fie și* $\hat{G}$*-invariant. Presupunem că:*

(1) $C_G(N) \subseteq G'$*;*

(2) $\tilde{M}$ *induce o echivalență Morita* $\bar{G}$*-graduată între* A *și* A'*;*

(3) $zm = mz$ *pentru orice* $m \in M$ *și* $z \in Z(N)$*;*

(4) *funcțiile de conjugare* $\varepsilon : G \to Aut(N)$ *și* $\hat{\varepsilon} : \hat{G} \to \mathrm{Aut}(N)$ *verifică* $\varepsilon(G) = \hat{\varepsilon}(\hat{G})$.

Fie $\hat{G}' = \hat{\varepsilon}^{-1}(\varepsilon(G'))$*. Atunci există o echivalență Morita* $\hat{G}/N$*-graduată între* $\hat{A} := b\mathcal{O}\hat{G}$ *și* $\hat{A}' := b'\mathcal{O}\hat{G}'$.

Capitolul 2

Echivalențe peste o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată

Acest capitol este bazat pe rezultatele noastre publicate în articolele [29] și [32]. În acesta, introducem echivalențe Morita și Rickard peste o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată între extensii de blocuri. Acestea sunt necesare deoarece o consecință a acestora vor fi relațiile de ordine-inițială și respectiv de ordine-centrală dintre două triplete de caractere corespunzătoare ale lui B. Späth (după cum vom vedea în Capitolul 3).

2.1 Bimodule $\bar{G}$-graduate peste o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată

Noțiunile și rezultatele introduse în această secțiune au fost publicate de către noi pentru prima dată în articolul [29, §2].

2.1.1. Fie $A = \bigoplus_{\bar{g}\in\bar{G}} A_{\bar{g}}$ o $\mathcal{O}$-algebră $\bar{G}$-graduată cu 1-componenta $B := A_1$. Pentru simplitate, vom presupune că A este un produs încrucișat (generalizarea nu este dificilă, vezi spre exemplu [25, §1.4.B.]). Aceasta ne permite să alegem elementele inversabile omogene $u_{\bar{g}}$ din componenta $A_{\bar{g}}$, pentru orice $\bar{g} \in \bar{G}$. Fie A' tot un produs încrucișat cu 1-componentă B'. Alegem și elementele inversabile omogene $u'_{\bar{g}} \in A'_{\bar{g}}$, pentru orice $\bar{g} \in \bar{G}$.

Definiția 2.1.2. O $\mathcal{O}$-algebră $\mathcal{C}$ este o *$\mathcal{O}$-algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată* dacă

(1) $\mathcal{C}$ este $\bar{G}$-graduată, și scriem $\mathcal{C} = \bigoplus_{\bar{g}\in\bar{G}} \mathcal{C}_{\bar{g}}$;

(2) $\bar{G}$ acționează pe $\mathcal{C}$ (întotdeauna la stânga în această teză);

(3) pentru orice $\bar{g}, \bar{h} \in \bar{G}$ și pentru orice $c \in \mathcal{C}_{\bar{h}}$ avem ${}^{\bar{g}}c \in \mathcal{C}_{\bar{g}\bar{h}}$.

Notăm 1-componenta lui $\mathcal{C}$ cu $\mathcal{Z} := \mathcal{C}_1$, care este o algebră $\bar{G}$-acționată.

Exemplul 2.1.3. Conform teoremei lui Miyashita [25, pg.22], știm că centralizatorul $C_A(B)$ al lui B în A este o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată, unde pentru orice $\bar{h} \in \bar{G}$,

$$C_A(B)_{\bar{h}} = \{a \in A_{\bar{h}} \mid ab = ba, \forall b \in B\},$$

și acțiunea este dată de ${}^{\bar{g}}c = u_{\bar{g}} c u_{\bar{g}^{-1}}$, pentru orice $c \in C_A(B)_{\bar{h}}$ și $\bar{g}, \bar{h} \in \bar{G}$. Se remarcă faptul că această definiție nu depinde de alegerea elementelor $u_{\bar{g}}$ și că $C_A(B)_1 = Z(B)$ (centrul lui B). Acest exemplu vine din rezultatele lui Dade [8] despre teoria Clifford a blocurilor.

Exemplul 2.1.4. Dacă notăm $\bar{C}_G(N) := NC_G(N)/N$, atunci $\mathcal{O}C_G(N)$ este o algebră tare $\bar{C}_G(N)$-graduată $\bar{G}$-acționată și prin urmare o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată.

Definiția 2.1.5. Fie $\mathcal{C}$ o $\mathcal{O}$-algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată. Spunem că A este o *$\mathcal{O}$-algebră $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C}$* dacă există un morfism $\bar{G}$-graduat $\bar{G}$-acționat

$$\zeta : \mathcal{C} \to C_A(B),$$

i.e. pentru orice $\bar{h} \in \bar{G}$ și $c \in \mathcal{C}_{\bar{h}}$, avem $\zeta(c) \in C_A(B)_{\bar{h}}$, și pentru orice $\bar{g} \in \bar{G}$, $\zeta({}^{\bar{g}}c) = {}^{\bar{g}}\zeta(c)$.

Exemplul 2.1.6. În cadrul de lucru inițial din Secțiunea 1.4, dat fiind Exemplul 2.1.4, avem că $A := b\mathcal{O}G$ este o algebră $\bar{G}$-graduată peste algebra $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată $\mathcal{C} := \mathcal{O}C_G(N)$, cu morfismul structural $\zeta : \mathcal{C} \to C_A(B)$ dat de incluziune.

Mai mult, dacă presupunem adițional că $C_G(N) \subseteq G'$ (precum vom avea nevoie în Secțiunea 1.5), atunci $A' := b'\mathcal{O}G'$ este tot o algebră $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C} := \mathcal{O}C_G(N)$, cu morfism structural $\zeta' : \mathcal{C} \to C_{A'}(B')$ dat din nou de incluziune.

Un alt exemplu important de o $\mathcal{O}$-algebră $\bar{G}$-graduată peste o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată, este dat de următoarea lemă (publicată de autor în [32, Lema 1]):

Lema 2.1.7. *Fie P un A-modul $\bar{G}$-graduat. Presupunem că P este $\bar{G}$-invariant. Fie $A' = \mathrm{End}_A(P)^{op}$ algebra endomorfismelor A-lineare ale lui P. Atunci A' este o $\mathcal{O}$-algebră $\bar{G}$-graduată peste $C_A(B)$.*

Definiția 2.1.8. Fie A și A' două produse încrucișate $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$, cu morfisme structurale ζ și respectiv ζ'.

a) Spunem că $\tilde{M}$ este un (A, A')-*bimodul $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$* dacă:

(1) $\tilde{M}$ este un (A, A')-bimodul;

(2) $\tilde{M}$ sunt o descompunere $\tilde{M} = \bigoplus_{\bar{g}\in\bar{G}} \tilde{M}_{\bar{g}}$ astfel încât $A_{\bar{g}}\tilde{M}_{\bar{x}}A'_{\bar{h}} \subseteq \tilde{M}_{\bar{g}\bar{x}\bar{h}}$, pentru orice $\bar{g}, \bar{x}, \bar{h} \in \bar{G}$;

(3) $\tilde{m}_{\bar{g}} \cdot c = {}^{\bar{g}}c \cdot \tilde{m}_{\bar{g}}$, pentru orice $c \in \mathcal{C}, \tilde{m}_{\bar{g}} \in \tilde{M}_{\bar{g}}, \bar{g} \in \bar{G}$, unde $c \cdot \tilde{m} = \zeta(c) \cdot \tilde{m}$ și $\tilde{m} \cdot c = \tilde{m} \cdot \zeta'(c)$, pentru orice $c \in \mathcal{C}, \tilde{m} \in \tilde{M}$.

b) (A, A')-bimodulele $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$ formează o categorie, pe care o vom nota cu $A\text{-}\mathrm{Gr}/\mathcal{C}\text{-}A'$, unde morfismele dintre (A, A')-bimodule $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$ sunt chiar morfismele dintre (A, A')-bimodule $\bar{G}$-graduate.

Remarca 2.1.9. Condiția (3) din Definiția 2.1.8 poate fi înlocuită cu

(3') $m \cdot c = c \cdot m$, pentru orice $c \in \mathcal{C}$, $m \in \tilde{M}_1$.

Un exemplu de bimodul $\bar{G}$-graduat peste o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată este dat de următoarea propoziție (publicată de autor în [32, Propoziția 1]):

Propoziția 2.1.10. *Fie $\mathcal{C}$ o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată și A o $\mathcal{O}$-algebră tare $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C}$. Fie P un A-modul $\bar{G}$-graduat $\bar{G}$-invariant. Fie $A' = \mathrm{End}_A(P)^{op}$. Atunci următoarele afirmații au loc:*

(1) *A' este o $\mathcal{O}$-algebră $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C}$;*

(2) *P este un (A, A')-bimodul $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$.*

2.1.11. Privim pe A'^{op} ca o algebră $\bar{G}$-graduată cu componente $(A'^{\mathrm{op}})_{\bar{g}} = A'^{\mathrm{op}}_{\bar{g}} = A'_{\bar{g}^{-1}}$, $\forall \bar{g} \in \bar{G}$. Notăm cu "$*$" operația de înmulțire din A'^{op}. Considerăm partea diagonală a lui $A \otimes_{\mathcal{C}} A'^{\mathrm{op}}$, care este bine definită:

$$\Delta^{\mathcal{C}} := \Delta(A \otimes_{\mathcal{C}} A'^{\mathrm{op}}) := \bigoplus_{\bar{g}\in\bar{G}} A_{\bar{g}} \otimes_{\mathcal{C}} A'_{\bar{g}^{-1}}.$$

Lema 2.1.12. (1) *$\Delta^{\mathcal{C}}$ este o $\mathcal{O}$-algebră.*

(2) *$A \otimes_{\mathcal{C}} A'^{\mathrm{op}}$ este un $\Delta^{\mathcal{C}}$-modul drept și un (A, A')-bimodul $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$.*

Teorema 2.1.13. [29, Teorema 2.9] *Categoria $\Delta^{\mathcal{C}}$-modulelor și categoria (A, A')-bimodulelor $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$ sunt echivalente:*

$$\Delta^{\mathcal{C}}\text{-Mod} \underset{(-)_1}{\overset{(A\otimes_{\mathcal{C}}A'^{\mathrm{op}})\otimes_{\Delta^{\mathcal{C}}}-}{\rightleftarrows}} A\text{-Gr}/\mathcal{C}\text{-}A'$$

Propoziția 2.1.14. *Functorii*

$$\left(A \otimes_{\mathcal{C}} A'^{\mathrm{op}}\right) \otimes_{\Delta^{\mathcal{C}}} -,\ A \otimes_{B} -,\ - \otimes_{B'} A' : \Delta^{\mathcal{C}}\text{-Mod} \to A\text{-Gr}/\mathcal{C}\text{-}A'$$

sunt echivalențe de categorii izomorfe natural, iar inversa lor este data de functorul care "ia 1-componenta" $(-)_1$.

Propoziția 2.1.15. *Dat fiind un $\Delta^{\mathcal{C}}$-modul M, notăm $\tilde{M} = (A \otimes_{\mathcal{C}} A'^{\mathrm{op}}) \otimes_{\Delta^{\mathcal{C}}} M \simeq A \otimes_B M \simeq M \otimes_{B'} A'$. Fie A'' un al treilea produs încrucișat $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$.*

(1) *Fie M un $\Delta(A \otimes_{\mathcal{C}} A'^{\mathrm{op}})$-modul și M' un $\Delta(A' \otimes_{\mathcal{C}} A''^{\mathrm{op}})$-modul. Atunci $M \otimes_{B'} M'$ este un $\Delta(A \otimes_{\mathcal{C}} A''^{\mathrm{op}})$-modul cu operația de înmulțire definită astfel*

$$(a_{\bar{g}} \otimes_{\mathcal{C}} a''^{\mathrm{op}}_{\bar{g}})(m \otimes_{B'} m') := (a_{\bar{g}} \otimes_{\mathcal{C}} (u'^{-1}_{\bar{g}})^{\mathrm{op}})m \otimes_{B'} (u'_{\bar{g}} \otimes_{\mathcal{C}} a''^{\mathrm{op}}_{\bar{g}})m',$$

pentru orice $\bar{g} \in \bar{G}$ și pentru orice $a_{\bar{g}} \in A_{\bar{g}}$, $a''^{\mathrm{op}}_{\bar{g}} \in A''^{\mathrm{op}}_{\bar{g}}$, $m \in M$, $m' \in M'$. Mai mult, avem izomorfismul

$$\widetilde{M \otimes_{B'} M'} \simeq \tilde{M} \otimes_{A'} \tilde{M}'$$

de (A, A'')-bimodule $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$.

(2) *Fie M un $\Delta(A' \otimes_{\mathcal{C}} A^{\mathrm{op}})$-modul și M' un $\Delta(A' \otimes_{\mathcal{C}} A''^{\mathrm{op}})$-modul. Atunci $\mathrm{Hom}_{B'}(M, M')$ este un $\Delta(A \otimes_{\mathcal{C}} A''^{\mathrm{op}})$-modul cu următoarea operație:*

$$((a_{\bar{g}} \otimes_{\mathcal{C}} a''^{\mathrm{op}}_{\bar{g}})f)(m) := (u'_{\bar{g}} \otimes_{\mathcal{C}} a''^{\mathrm{op}}_{\bar{g}})f((u'^{-1}_{\bar{g}} \otimes_{\mathcal{C}} a^{\mathrm{op}}_{\bar{g}^{-1}})m),$$

pentru orice $\bar{g} \in \bar{G}$, $a_{\bar{g}} \in A_{\bar{g}}$, $a''^{\mathrm{op}}_{\bar{g}} \in A''^{\mathrm{op}}_{\bar{g}}$, $m \in M$, $f \in \mathrm{Hom}_{B'}(M, M')$. Mai mult, avem izomorfismul

$$\widetilde{\mathrm{Hom}_{B'}(M, M')} \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(\tilde{M}, \tilde{M}')$$

de (A, A'')-bimodule $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$.

2.2 Teorie Morita graduată peste $\mathcal{C}$

În această secțiune, precum am publicat în articolul [32], vom dezvolta o teorie Morita graduată peste o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată $\mathcal{C}$. Vom urmări, pentru acest demers, abordarea teoriei Morita a lui C. Faith din 1973 [12]. De remarcat aici este că o teorie Morita graduată a fost deja dezvoltată, începând cu anul 1980 atunci când R. Gordon și E. L. Green au caracterizat echivalențele graduate pentru situația $G = \mathbb{Z}$, în [14]. În continuare, în 1988 s-a observat că de fapt aceasta funcționa pentru grupuri arbitrare G de către C. Menini și C. Năstăsescu, în [31]. Noi, vom utiliza rezultatele din literatură sub forma dată de A. del Río în 1991 în [11] și totodată vom utiliza și teoria Morita graduată dezvoltată de P. Boisen în 1994 în [4].

În ceea ce urmează, vom construi noțiunea de context Morita $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$ și vom oferi un exemplu standard. În Secțiunea 2.2.2 vom introduce noțiunile de functor graduat peste $\mathcal{C}$ și de echivalență graduată Morita peste $\mathcal{C}$ iar în final vom preciza două teoreme de tip Morita utilizând noțiunile introduse: Vom demonstra că dacă avem un bimodul G-graduat peste o algebră G-graduată G-acționată putem obține o echivalență Morita G-graduată peste algebra G-graduată G-acționată dată. Mai mult, vom demonstra că dacă avem dată o echivalență Morita G-graduată peste o algebră G-graduată G-acționată, putem obține un bimodul G-graduat peste algebra G-graduată G-acționată dată, care induce echivalența Morita G-graduată dată.

2.2.1 Contexte Morita graduate peste $\mathcal{C}$

Pornim prin a introduce noțiunea de context Morita $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$, urmând abordarea din [12, §12].

Definiția 2.2.1. Fie următorul context Morita:

$$(A, A', \tilde{M}, \tilde{M}', f, g).$$

Spunem că este un context Morita $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$ dacă:

(1) A și A' sunt $\mathcal{O}$-algebre tare $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$;

(2) ${}_A\tilde{M}_{A'}$ și ${}_{A'}\tilde{M}'_A$ sunt bimodule $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$;

(3) $f : \tilde{M} \otimes_{A'} \tilde{M}' \to A$ și $g : \tilde{M}' \otimes_A \tilde{M} \to A'$ sunt morfisme de bimodule $\bar{G}$-graduate astfel încât dacă $f(\tilde{m} \otimes \tilde{m}') = \tilde{m}\tilde{m}'$ și $g(\tilde{m}' \otimes \tilde{m}) = \tilde{m}'\tilde{m}$, avem următoarele legi de asociativitate:

$$(\tilde{m}\tilde{m}')\tilde{n} = \tilde{m}(\tilde{m}'\tilde{n}) \quad \text{and} \quad (\tilde{m}'\tilde{m})\tilde{n}' = \tilde{m}'(\tilde{m}\tilde{n}'),$$

pentru orice $\tilde{m}, \tilde{n} \in \tilde{M}$, $\tilde{m}', \tilde{n}' \in \tilde{M}'$.

Dacă f și g sunt izomorfisme, atunci $(A, A', \tilde{M}, \tilde{M}', f, g)$ este numit context Morita $\bar{G}$-graduat surjectiv peste $\mathcal{C}$.

Ca și exemplu de context Morita $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$, avem următoarea propoziție motivată de [12, Propoziția 12.6].

Propoziția 2.2.2. *Fie A o $\mathcal{O}$-algebră tare $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C}$, P un A-modul $\bar{G}$-graduat $\bar{G}$-invariant, $A' = \mathrm{End}_A(P)^{op}$ și $P^* := \mathrm{Hom}_A(P, A)$ este A-dualul lui P. Atunci*

$$(A, A', P, P^*, (\cdot,\cdot), [\cdot,\cdot])$$

este un context Morita $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$, unde $(\cdot,\cdot)$ este un (A, A)-omomorfism $\bar{G}$-graduat, numit morfismul de evaluare, definit astfel:

$$\begin{aligned}&(\cdot,\cdot) : P \otimes_{A'} P^* \to A,\\ &x \otimes \varphi \mapsto \varphi(x), \ \textit{pentru orice } \varphi \in P^*, x \in P,\end{aligned}$$

și unde $[\cdot,\cdot]$ este un (A', A')-omomorfism $\bar{G}$-graduat definit astfel:

$$\begin{aligned}&[\cdot,\cdot] : P^* \otimes_A P \to A',\\ &\varphi \otimes x \mapsto [\varphi, x], \ \textit{pentru orice } \varphi \in P^*, x \in P,\end{aligned}$$

unde pentru orice $\varphi \in P^*$ și $x \in P$, $[\varphi, x]$ este un element al lui A' astfel încât

$$y[\varphi, x] = \varphi(y) \cdot x, \ \textit{pentru orice } y \in P.$$

Dacă $(A, A', \tilde{M}, \tilde{M}', f, g)$ este un context Morita $\bar{G}$-graduat surjectiv peste $\mathcal{C}$, atunci dată fiind Propoziția 12.7 din [12], avem că A' este izomorf cu $\mathrm{End}_A(\tilde{M})^{\mathrm{op}}$ și avem un izomorfism de bimodule între $\tilde{M}'$ și $\tilde{M}^* = \mathrm{Hom}_A(\tilde{M}, A)$. Prin urmare, în această situație, exemplul dat de Propoziția 2.2.2 este unic, până la un izomorfism.

Dat fiind Corolarul 12.8 din [12], exemplul dat de Propoziția 2.2.2 este un context Morita surjectiv $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$ dacă și numai dacă ${}_AP$ este un progenerator.

2.2.2 Teoreme Morita graduate peste $\mathcal{C}$

Fie A și A' două $\mathcal{O}$-algebre tare $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$ (cu 1-componente $B := A_1$ și $B' := A'_1$), fiecare înzestrat cu un morfism structural de algebre $\bar{G}$-graduate $\bar{G}$-acționate $\zeta : \mathcal{C} \to C_A(B)$ și respectiv $\zeta' : \mathcal{C} \to C_{A'}(B')$. Conform [11] avem următoarele definiții:

Definiția 2.2.3. (1) Spunem că functorul $\tilde{\mathcal{F}} : A\text{-Gr} \to A'\text{-Gr}$ este $\bar{G}$-graduat dacă pentru orice $g \in \bar{G}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ comută cu functorul de g-suspensie, i.e. $\tilde{\mathcal{F}} \circ T_g^A$ este izomorf natural cu $T_g^{A'} \circ \tilde{\mathcal{F}}$;

(2) Spunem că A și A' sunt echivalente Morita $\bar{G}$-graduat dacă există o echivalență $\bar{G}$-graduată: $\tilde{\mathcal{F}} : A\text{-Gr} \to A'\text{-Gr}$.

Presupunem că A și A' sunt echivalente Morita $\bar{G}$-graduat. Prin urmare, putem considera functorii $\bar{G}$-graduați:

$$\begin{tikzcd} A\text{-Gr} \arrow[r, shift left, "\tilde{\mathcal{F}}"] & A'\text{-Gr} \arrow[l, shift left, "\tilde{\mathcal{G}}"] \end{tikzcd}$$

care induc o echivalență Morita $\bar{G}$-graduată între A și A'. Conform rezultatului lui Gordon și Green [11, Corolar 10], aceasta este echivalentă cu existența unei echivalențe Morita între A și A' dată de următorii functori:

$$\begin{tikzcd} A\text{-Mod} \arrow[r, shift left, "\mathcal{F}"] & A'\text{-Mod}; \arrow[l, shift left, "\mathcal{G}"] \end{tikzcd}$$

astfel încât următoarea diagramă să fie comutativă:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{A}\text{-Gr} \arrow[r, shift left, "\tilde{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\mathsf{u}"'] & \mathsf{A}'\text{-Gr} \arrow[l, shift left, "\tilde{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "\mathsf{u}'"] \\ \mathsf{A}\text{-Mod} \arrow[r, shift left, "\mathcal{F}"] & \mathsf{A}'\text{-Mod} \arrow[l, shift left, "\mathcal{G}"] \end{tikzcd}$$

în sensul că:

$$\mathsf{U}' \circ \tilde{\mathsf{F}} = \mathsf{F} \circ \mathsf{U}, \qquad \mathsf{U} \circ \tilde{\mathsf{G}} = \mathsf{G} \circ \mathsf{U}',$$

unde U este functorul care "uită" graduarea de la A-Gr la A-Mod și U' este functorul care "uită" graduarea de la A'-Gr la A'-Mod.

Lema 2.2.4. *Dacă $\tilde{\mathsf{P}}$ este un A-modul $\bar{\mathsf{G}}$-graduat, atunci $\tilde{\mathsf{P}}$ și $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathsf{P}})$ au același stabilizator în $\bar{\mathsf{G}}$.*

Fie $\tilde{\mathsf{P}}$ și $\tilde{\mathsf{Q}}$ două A-module $\bar{\mathsf{G}}$-graduate. Avem următorul morfism:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(\tilde{\mathsf{P}}, \tilde{\mathsf{Q}}) \xrightarrow{\quad\tilde{\mathcal{F}}\quad} \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}'}(\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathsf{P}}), \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathsf{Q}})). \tag{$*$}$$

Urmărind demonstrația Lemei 2.1.7 și a Propoziției 2.1.10, avem un morfism $\bar{\mathsf{G}}$-graduat de la $\mathcal{C}$ la $\mathrm{End}_{\mathsf{A}}(\tilde{\mathsf{P}})^{\mathrm{op}}$ (compunerea dintre morfismul structural $\zeta : \mathcal{C} \to \mathsf{C}_{\mathsf{A}}(\mathsf{B})$ și morfismul $\theta : \mathsf{C}_{\mathsf{A}}(\mathsf{B}) \to \mathrm{End}_{\mathsf{A}}(\tilde{\mathsf{P}})^{\mathrm{op}}$ din Lema 1.3.1) și că $\tilde{\mathsf{P}}$ este un $(\mathsf{A}, \mathrm{End}_{\mathsf{A}}(\tilde{\mathsf{P}})^{\mathrm{op}})$-bimodul $\bar{\mathsf{G}}$-graduat. Atunci, folosind restricția scalarilor obținem că $\tilde{\mathsf{P}}$ este un $\mathcal{C}$-modul drept. Analog $\tilde{\mathsf{Q}}$, $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathsf{P}})$ și $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathsf{Q}})$ sunt de asemenea $\mathcal{C}$-module drepte, astfel $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(\tilde{\mathsf{P}}, \tilde{\mathsf{Q}})$ și $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathsf{P}}), \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathsf{Q}}))$ sunt $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$-bimodule $\bar{\mathsf{G}}$-graduate. Aceasta ne permite să introducem următoarea definiție:

Definiția 2.2.5. (1) Spunem că functorul $\tilde{\mathcal{F}}$ este peste $\mathcal{C}$ dacă morfismul $\tilde{\mathcal{F}}$ (vezi ($*$)) este un morfism de $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$-bimodule $\bar{\mathsf{G}}$-graduate;

(2) Spunem că A și A' sunt echivalente Morita $\bar{\mathsf{G}}$-graduat peste $\mathcal{C}$ dacă există o echivalență $\bar{\mathsf{G}}$-graduată peste $\mathcal{C}$: $\tilde{\mathcal{F}} : \mathsf{A}\text{-Gr} \to \mathsf{A}'\text{-Gr}$.

Teorema 2.2.6 (Morita I graduată peste $\mathcal{C}$ - [32, Teorema 1])**.**
Fie $(\mathsf{A}, \mathsf{A}', \tilde{\mathsf{M}}, \tilde{\mathsf{M}}', \mathsf{f}, \mathsf{g})$ un context Morita surjectiv $\bar{\mathsf{G}}$-graduat peste $\mathcal{C}$. Atunci functori

$$\tilde{\mathsf{M}}' \otimes_{\mathsf{A}} - : \mathsf{A}\text{-Gr} \to \mathsf{A}'\text{-Gr}$$
$$\tilde{\mathsf{M}} \otimes_{\mathsf{A}'} - : \mathsf{A}'\text{-Gr} \to \mathsf{A}\text{-Gr}$$

sunt echivalențe inverse $\bar{\mathsf{G}}$-graduate peste $\mathcal{C}$.

Conform Propoziției 2.2.2 și observațiilor făcute în Secțiunea 2.2.1, următorul corolar este evident.

Corolarul 2.2.7. *Fie P un A-modul $\bar{\mathsf{G}}$-graduat $\bar{\mathsf{G}}$-invariant și $\mathsf{A}' = \mathrm{End}_{\mathsf{A}}(\mathsf{P})^{\mathrm{op}}$. Dacă ${}_{\mathsf{A}}\mathsf{P}$ este un progenerator, atunci $\mathsf{P} \otimes_{\mathsf{A}'} -$ este o echivalență Morita $\bar{\mathsf{G}}$-graduată peste $\mathcal{C}$ între A'-Gr și A-Gr, cu inversa $\mathsf{P}^* \otimes_{\mathsf{A}} -$.*

Teorema 2.2.8 (Morita II graduată peste $\mathcal{C}$ - [32, Teorema 2])**.**
Presupunem că A și A' sunt echivalente Morita $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$ și fie

$$A\text{-Gr} \underset{\tilde{\mathcal{G}}}{\overset{\tilde{\mathcal{F}}}{\rightleftarrows}} A'\text{-Gr}$$

echivalențe inverse $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$. Atunci această echivalență este dată de următoarele bimodule $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$: $P = \tilde{\mathcal{F}}(A)$ și $Q = \tilde{\mathcal{G}}(A')$. Mai exact, P este un (A', A)-bimodul $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$, Q este un (A, A')-bimodul $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$ și următoarele echivalențe naturale de functori au loc:

$$\tilde{\mathcal{F}} \simeq P \otimes_A - \quad \text{și} \quad \tilde{\mathcal{G}} \simeq Q \otimes_{A'} -.$$

Date fiind acum cele două teoreme Morita (Teoremele 2.2.6 și 2.2.8) și Propoziția 2.1.15 putem da următoarea definiție echivalentă a unei echivalențe Morita graduată peste $\mathcal{C}$.

Definiția 2.2.9. Fie $\tilde{M}$ un (A, A')-bimodul $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$. Clar, A-dualul $\tilde{M}^* = \mathrm{Hom}_A(\tilde{M}, A)$ al lui $\tilde{M}$ este un (A', A)-bimodul $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$. Spunem că $\tilde{M}$ induce o *echivalență Morita graduată peste* $\mathcal{C}$ între A și A', dacă $\tilde{M} \otimes_{A'} \tilde{M}^* \simeq A$ ca și (A, A)-bimodule $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$ și $\tilde{M}^* \otimes_A \tilde{M} \simeq A'$ ca și (A', A')-bimodule $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$.

2.2.3 Echivalențe Morita graduate peste $\mathcal{C}$

Continuăm cu notațiile secțiunii anterioare. În această secțiune, precum am publicat în [29, §3], extindem [25, Teorema 5.1.2] la situația echivalențelor Morita $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$, pentru a putea da o legătură între ele și echivalențele Morita (Teorema 2.2.10). Mai mult, continuând munca din Secțiunea 1.3, Propoziția 2.2.13 oferă unul din motivele pentru conceptul nostru de relație de ordine-centrală între triplete de module (vezi Definiția 3.2.3).

Teorema 2.2.10. [29, Teorema 3.3] *Presupunem că (B, B')-bimodulul M și B-dualul său $M^* = \mathrm{Hom}_B(M, B)$ induc o echivalență Morita între B și B':*

$$B\text{-Mod} \underset{M \otimes_{B'} -}{\overset{M^* \otimes_B -}{\rightleftarrows}} B'\text{-Mod}$$

Dacă M se extinde la un $\Delta^{\mathcal{C}}$-module, atunci avem următoarele:

(1) M^* *devine un $\Delta(A' \otimes_{\mathcal{C}} A^{\mathrm{op}})$-modul;*

(2) $\tilde{M} := (A \otimes_{\mathcal{C}} A'^{\mathrm{op}}) \otimes_{\Delta^{\mathcal{C}}} M$ *este un (A, A')-bimodul $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$, $\tilde{M}^* \simeq (A' \otimes_{\mathcal{C}} A^{\mathrm{op}}) \otimes_{\Delta(A' \otimes_{\mathcal{C}} A^{\mathrm{op}})} M^*$ ca și (A', A)-bimodule $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$, și ele induc o echivalență Morita $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C}$ între A și A'.*

Remarca 2.2.11. Echivalența Morita $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C}$ poate fi trunchiată [25, Corolar 5.1.4.]. În situația noastră, dacă $\tilde{M}$ este un (A, A')-bimodul $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$ și $\tilde{M}^*$ este A-dualul său, care induc o echivalență Morita $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C}$ între A și A', iar $\bar{H}$ este un subgrup al lui $\bar{G}$, atunci $\tilde{M}_{\bar{H}} := \bigoplus_{\bar{h} \in \bar{H}} \tilde{M}_{\bar{h}}$ și $\tilde{M}^*_{\bar{H}}$ induc o echivalență Morita $\bar{H}$-graduată peste $\mathcal{C}_{\bar{H}}$ între $A_{\bar{H}}$ și $A'_{\bar{H}}$.

2.2.12. Dacă U este un B-modul, notăm cu

$$E(U) := \mathrm{End}_A(A \otimes_B U)^{\mathrm{op}}$$

algebra $\bar{G}$-graduată de endomorfisme ale A-modulului indus din U.

Propoziția 2.2.13. *Presupunem că $\tilde{M}$ induce o echivalență Morita $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C}$ între A și A'. Fie U un B-modul și $U' = M^* \otimes_B U$, B'-modulul corespunzător lui U prin echivalența dată. Atunci următoarea diagramă este comutativă:*

$$\begin{tikzcd}
E(U) \arrow[r, "\sim"] & E(U') \\
C_A(B) \arrow[u] \arrow[r, "\sim"] & C_{A'}(B') \arrow[u] \\
\mathcal{C} \arrow[u] \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] & \mathcal{C}. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

2.3 Cadrul de lucru principal

2.3.1. Reamintim cadrul nostru de lucru inițial prezentat în Secțiunea 1.4: Fie G' un subgrup al lui G și N' un subgrup normal al lui G'. Presupunem că $N' = G' \cap N$ și $G = G'N$, prin urmare

$$\bar{G} := G/N \simeq G'/(G' \cap N) = G'/N'.$$

Fie $b \in Z(\mathcal{O}N)$ și $b' \in Z(\mathcal{O}N')$ două blocuri $\bar{G}$-invariante. Notăm

$$A := b\mathcal{O}G, \qquad A' := b'\mathcal{O}G', \qquad B := b\mathcal{O}N, \qquad B' := b'\mathcal{O}N',$$

astfel A și A' sunt produse încrucișate $\bar{G}$-graduate, cu 1-componente B și respectiv B'.

2.3.2. În plus, vom presupune că A și A' sunt algebre $\bar{G}$-graduate peste o $\mathcal{O}$-algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată $\mathcal{C}$, înzestrate cu morfisme structurale $\zeta : \mathcal{C} \to C_A(B)$ și $\zeta' : \mathcal{C} \to C_{A'}(B')$, ca și în Definiția 2.1.5.

Spre exemplu, pornind de la Exemplul 2.1.6 care ne spune că dacă în plus presupunem că $C_G(N) \subseteq G'$, atunci putem lua $\mathcal{C} := \mathcal{O}C_G(N)$, care este o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată, și avem că A și A' sunt algebre $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C} := \mathcal{O}C_G(N)$ înzestrate cu morfisme structurale $\zeta : \mathcal{C} \to C_A(B)$ și $\zeta' : \mathcal{C} \to C_{A'}(B')$ date de incluziune.

2.4 Teorema fluturelui pentru echivalențe Morita $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$

2.4.1. Așa cum am publicat în [29, §3], vom introduce o versiune pentru echivalențe Morita peste $\mathcal{C}$ a așa numitei "teoreme a fluturelui" [38, Teorema 2.16], bazată pe Teorema 1.5.2. Pornim prin adaptarea Propoziției 1.5.1, și prin urmare, vom lucra în contextul cadrului de lucru principal (Secțiunea 2.3). În plus, vom presupune că $C_G(N) \subseteq G'$, și notăm $\bar{C}_G(N) := NC_G(N)/N$ și $\mathcal{C} := \mathcal{O}C_G(N)$. Considerăm algebrele:

$$\begin{tikzcd}
A := b\mathcal{O}G \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & A' := b'\mathcal{O}G' \arrow[d, dash] \\
C := b\mathcal{O}NC_G(N) \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & C' := b'\mathcal{O}N'C_G(N) \arrow[d, dash] \\
B := b\mathcal{O}N \arrow[rr, dash] & & B' := b'\mathcal{O}N'.
\end{tikzcd}$$

Propoziția 2.4.2. *Fie $\mathcal{C} = \mathcal{O}C_G(N)$, și presupunem că:*

(1) $C_G(N) \subseteq G'$;

(2) M *induce o echivalență Morita între* B *și* B';

(3) $zm = mz$, *pentru orice* $m \in M$ *și* $z \in Z(N)$.

Atunci există o echivalență Morita $\bar{C}_G(N)$-graduată între C și C' peste $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
A := b\mathcal{O}G \arrow[d, dash] & & A' := b'\mathcal{O}G' \arrow[d, dash] \\
C := b\mathcal{O}NC_G(N) \arrow[rr, dash, "{}_C\hat{M}_{C'}", "\sim"'] \arrow[d, dash] & & C' := b'\mathcal{O}N'C_G(N) \arrow[d, dash] \\
B := b\mathcal{O}N \arrow[rr, dash, "{}_BM_{B'}", "\sim"'] & & B' := b'\mathcal{O}N',
\end{tikzcd}$$

indusă de (C, C')-bimodulul $\bar{C}_G(N)$-graduat peste $\mathcal{C}$:

$$\hat{M} := C \otimes_B M \simeq M \otimes_{B'} C' \simeq (C \otimes_{\mathcal{C}} C'^{\mathrm{op}}) \otimes_{\Delta(C \otimes_{\mathcal{C}} C'^{\mathrm{op}})} M.$$

Teorema 2.4.3 (Teorema fluturelui pentru echivalențe Morita graduate peste $\mathcal{C}$ - [29]). *Fie $\hat{G}$ un alt grup care are ca și subgrup normal pe N, astfel încât blocul b să fie și $\hat{G}$-invariant. Fie $\mathcal{C} = \mathcal{O}C_G(N)$. Presupunem că:*

(1) $C_G(N) \subseteq G'$,

(2) $\tilde{M}$ *induce o echivalență Morita $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C}$ între A și A';*

(3) *funcțiile de conjugare $\varepsilon : G \to \mathrm{Aut}(N)$ și $\hat{\varepsilon} : \hat{G} \to \mathrm{Aut}(N)$ verifică $\varepsilon(G) = \hat{\varepsilon}(\hat{G})$.*

Notăm $\hat{G}' = \hat{\varepsilon}^{-1}(\varepsilon(G'))$. Atunci există o echivalență Morita $\hat{G}/N$-graduată peste $\hat{\mathcal{C}} := \mathcal{O}C_{\hat{G}}(N)$ între $\hat{A} := b\mathcal{O}\hat{G}$ și $\hat{A}' := b'\mathcal{O}\hat{G}'$.

2.4.4. Condiția (1) din Propoziția 2.4.2 poate fi înlocuită cu ipoteza că (B,B)-bimodulul M este $\bar{G}$-invariant, i.e. $A_{\bar{g}}\otimes_B M\otimes_{B'} A'_{\bar{g}^{-1}}\simeq M$ ca și (B,B')-bimodule, pentru orice $\bar{g}\in\bar{G}$, pentru a obține o afirmație mai puternică.

Fie $\bar{G}[b]=G[b]/N$ stabilizatorul lui B ca un (B,B)-bimodul, adică $\bar{G}[b]$ este subgrupul maximal $\bar{H}$ al lui $\bar{G}$ astfel încât $C_A(B)_{\bar{H}}$ să fie un produs încrucișat (vezi [8, 2.9]). Atunci $\bar{G}[b]$ este un subgrup normal al lui $\bar{G}$, și în particular, avem că $C_G(N)\subseteq G[b]$.

Corolarul 2.4.5. *Presupunem că (B,B)-bimodulul M este $\bar{G}$-invariant. În plus, presupunem că $zm=mz$, pentru orice $m\in M$ și $z\in Z(N)$. Atunci $\bar{G}[b]=\bar{G}[b']$ (prin urmare $C_G(N)\subseteq G'$), și există o echivalență Morita $\bar{G}[b]$-graduată peste $\mathcal{C}:=\mathcal{O}C_G(N)$ între $A_{\bar{G}[b]}$ și $A'_{\bar{G}[b]}$.*

Remarca 2.4.6. Altfel, fără condiția (1) a Propoziției 2.4.2, presupunem că $\tilde{M}$ induce o echivalență Morita $\bar{G}$-graduată între A și A' (deci în particular, M este $\bar{G}$-invariant). Atunci, conform [25, Teorema 5.1.8], $C_A(B)\simeq C_{A'}(B')$ și $\bar{G}[b]=\bar{G}[b']$. Dacă, în plus, $zm=mz$, pentru orice $m\in M$ și $z\in Z(N)$, atunci, conform Corolarului 2.4.5, $\tilde{M}$ este un (A,A')-bimodul $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}:=\mathcal{O}C_G(N)$ (de fapt, chiar și peste $C_A(B)_{\bar{G}[b]}$).

2.5 Module Scott

Koshitani și Lassueur au construit în articolele [19, 20] echivalențe Morita induse de anumite module Scott. În această secțiune, vom demonstra că construcțiile lor pot fi extinse pentru a obține echivalențe Morita graduate peste $\mathcal{C}=\mathcal{O}C_G(N)$. Rezultatele din această secțiune au fost publicate în articolul [29, §4].

2.5.1. Fie Q un p-subgrup Sylow al lui N, fie $\delta(Q)=\{(q,q)\in Q\times Q\mid q\in Q\}$ subgrupul diagonal al lui $Q\times Q$, fie $G'=N_G(Q)$ și $N'=G'\cap N$. În acest context, avem că $C_G(N)\subseteq G'$. Fie $\mathcal{C}=\mathcal{O}C_G(N)$ și $Z=Z(N)$. Notăm

$$K=\{(g,g')\mid \bar{g}=\bar{g}'\text{ in }\bar{G}=G/N\simeq G'/N'\}.$$

Fie $b\in Z(\mathcal{O}N)$ și $b'\in Z(\mathcal{O}N')$ două blocuri principale. Notăm

$$A:=b\mathcal{O}G,\qquad A':=b'\mathcal{O}G',\qquad B:=b\mathcal{O}N,\qquad B':=b'\mathcal{O}N'.$$

Reamintim că pentru un subgrup $H\leq G$, $\mathcal{O}G$-modulul (Alperin)-Scott relativ la H (notat cu $\mathrm{Sc}(G,H)$) este unicul sumand direct indecompozabil al modulului indus $\mathrm{Ind}_H^G\mathcal{O}_H=\mathcal{O}G\otimes_{\mathcal{O}H}\mathcal{O}_H$, care conține pe $\mathcal{O}G$ în soclu. Aici $\mathcal{O}_H$ reprezintă $\mathcal{O}H$-modulul trivial.

La fel ca și în articolele [19, 20], vom considera modulul Scott $\mathrm{Sc}(N\times N',\delta(Q))$, iar pentru proprietățile generale ale modulelor Scott ca și referință generală considerăm [34, §4.8].

Propoziția 2.5.2. *Cu notațiile de mai sus, presupunem că p nu divide ordinul lui $\bar{G}$. Fie $M=\mathrm{Sc}(N\times N',\delta(Q))$. Atunci*

$$M\simeq \mathrm{Res}^K_{N\times N'}\mathrm{Sc}(K,\delta(Q)).$$

În particular, M poate fi privit ca un $\Delta(A\otimes A'^{\mathrm{op}})$-modul. Mai mult, M poate fi ales astfel încât $\tilde{M}:=A\otimes_B M$ este un (A,A')-bimodul $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}=\mathcal{O}C_G(N)$ între A și A'.

2.6 Echivalențe Rickard peste $\mathcal{C}$

Utilizând observațiile din [25, §5.2.1], putem extinde rezultatele din Secțiunea 2.2.3 la situația echivalențelor Rickard. Păstrăm notațiile și ipotezele din Secțiunea 2.3.1, și notăm cu $\mathcal{H}^b$ categoria omotopică mărginită. Printr-o echivalență Rickard înțelegem o echivalență între categoriile de omotopii mărginite $\mathcal{H}^b(A)$ și $\mathcal{H}^b(A')$ induse de un complex tilting cu endomorfisme scindabile, precum a fost prezentat de Rickard în [21, §9.2.2]. În această situație este esențial ca A și A' să fie algebre simetrice. Această secțiune a fost publicată în [29, §5].

2.6.1. Fie $\tilde{M}$ un complex mărginit de (A, A')-bimodule $\bar{G}$-graduate, cu 1-componentă M, care este un complex mărginit de $\Delta(A \otimes_{\mathcal{O}} A'^{\mathrm{op}})$-module. Reamintim că $\tilde{M}$ și dualul său $\tilde{M}^*$ induc o echivalență Rickard $\bar{G}$-graduată între A și A', dacă există izomorfismele

$$\tilde{\varphi} : \tilde{M}^* \otimes_A \tilde{M} \to A' \qquad \text{și} \qquad \tilde{\psi} : \tilde{M} \otimes_{A'} \tilde{M}^* \to A,$$

în categoria corespunzătoare de omotopie mărginită de bimodule $\bar{G}$-graduate.

Spunem că această echivalență este peste $\mathcal{C}$ dacă $\tilde{M}$ este un complex de (A, A')-bimodule $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$.

2.6.2. Este ușor de văzut că Remarca 2.2.11, Propoziția 2.2.13 și Propoziția 2.4.2 încă au loc dacă înlocuim "echivalențe Morita" cu "echivalențe Rickard" (și "module" cu "complexe mărginite de module"). Mai mult, conform [25, Teorema 5.2.5], în Teorema 2.2.10 trebuie să presupunem adițional că p nu divide ordinul lui $\bar{G}$. Corolarul 2.4.5 și Remarca 2.4.6 pot fi de asemenea adaptate la această situație.

În consecință, avem următoarea variantă a teoremei fluturelui (Teorema 2.4.3), în termeni de echivalențe Rickard.

Teorema 2.6.3. *Fie $\hat{G}$ un alt grup pentru care N este subgrup normal, astfel încât blocul b este și $\hat{G}$-invariant. Fie $\mathcal{C} = \mathcal{O}C_G(N)$. Presupunem că:*

(1) $C_G(N) \subseteq G'$,

(2) $\tilde{M}$ *induce o echivalență Rickard $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C}$ între A și A';*

(3) *funcțiile de conjugare $\varepsilon : G \to \mathrm{Aut}(N)$ și $\hat{\varepsilon} : \hat{G} \to \mathrm{Aut}(N)$ verifică $\varepsilon(G) = \hat{\varepsilon}(\hat{G})$;*

(4) p *nu divide ordinul lui $\bar{G}$.*

Notăm $\hat{G}' = \hat{\varepsilon}^{-1}(\varepsilon(G'))$. Atunci există o echivalență Rickard $\hat{G}/N$-graduată peste $\hat{\mathcal{C}} := \mathcal{O}C_{\hat{G}}(N)$ între $\hat{A} := b\mathcal{O}\hat{G}$ și $\hat{A}' := b'\mathcal{O}\hat{G}'$.

Capitolul 3

Triplete de caractere și triplete de module

În acest capitol, vom introduce conceptul de triplet de module și vom demonstra că relațiile $\geq$ și $\geq_c$ date în [38, Definiția 2.1.] și [38, Definiția 2.7.] sunt consecințe ale echivalențelor Rickard peste $\mathcal{C}$ între triplete de module. Mai mult, în Definiția 3.3.1 vom introduce o versiune în termeni de triplete de module a relației $\geq_b$ (vezi [38, Definiția 4.2]), și vom demonstra în Propoziția 3.3.6 că inclusiv aceasta este o consecință a unui anumit tip de echivalențe derivate, anume unul care este compatibil într-un anumit sens cu morfismul Brauer. De remarcat este faptul că abordarea noastră a tripletelor de caractere este diferită de cea a lui Turull [39]. Noțiunile și rezultatele din acest capitol au fost publicate în articolele [29] și [30].

3.1 Triplete de module

3.1.1. Fie $\mathcal{K}$ un corp, G un grup finit, și N un subgrup normal al lui G.

Notăm cu $\mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(G)$ mulțimea tuturor caracterelor ireductibile cu valori în $\mathcal{K}$ ale lui G.

Clar grupul G acționează pe $\mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}N$: pentru $\theta \in \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}N$ și $g \in G$ avem:

$$\begin{aligned} &{}^{g}\theta : N \to \mathcal{K} \\ &{}^{g}\theta(n) = \theta\left(gng^{-1}\right), \forall n \in N. \end{aligned}$$

Spunem că θ este G-*invariant* dacă ${}^{g}\theta = \theta$ oricare ar fi $g \in G$.

Reamintim definiția unui triplet de caractere ([18, pg.186], [38, Definiția 1.6]):

Definiția 3.1.2. Fie G un grup finit, N un subgrup normal al lui G și $\theta \in \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}N$. Spunem că (G, N, θ) este *un triplet de caractere* dacă θ este G-invariant.

Știm că $\theta \in \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}N$ este un caracter asociat unui $\mathcal{K}N$-modul simplu V și că θ determină clasa de izomorfism a lui$V$.

3.1.3. Fie $\mathcal{K}$ un corp și V un $\mathcal{K}N$-modul. Similar, pentru orice $g \in G$ putem considera g-*conjugatul* lui V:

$${}^{g}V = \mathcal{K}Ng \otimes_{\mathcal{K}N} V.$$

Definiția 3.1.4. Spunem că un $\mathcal{K}N$-modul V este G-*invariant* (sau G-*stabil*) dacă V este izomorf cu ${}^{g}V$ ca și $\mathcal{K}N$-module, pentru orice $g \in G$.

Remarca 3.1.5. Dacă $g \in N$, atunci V este izomorf cu ${}^{g}V$ ca și $\mathcal{K}N$-module.

Prin urmare, N acționează trivial pe clasele de izomorfism de $\mathcal{K}N$-module. Mai mult, știm că pentru orice $g \in G$ și $n \in N$:

$${}^{gn}V \simeq {}^{g}({}^{n}V) \simeq {}^{g}V,$$

deci de fapt $G/N := \bar{G}$ acționează pe clasele de izomorfism de $\mathcal{K}N$-module.

3.1.6. Continuăm cu notațiile și asumpțiile cadrului principal de lucru (Secțiunea 2.3). În plus, fie V un $\mathcal{K}\mathsf{B}$-modul simplu G-invariant, și fie V' un $\mathcal{K}\mathsf{B}'$-modul simplu G-invariant, unde

$$\mathcal{K}\mathsf{B} = \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} \mathsf{B} = (1 \otimes \mathsf{b})\mathcal{K}\mathsf{N} \qquad \text{și} \qquad \mathcal{K}\mathsf{B}' = \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} \mathsf{B}' = (1 \otimes \mathsf{b}')\mathcal{K}\mathsf{N}'.$$

Fie $\theta \in \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(\mathsf{B})$ un caracter ireductibil G-invariant asociat lui V, și fie $\theta \in \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(\mathsf{B}')$ un caracter ireductibil G'-invariant asociat lui V'. Atunci, $(\mathsf{G}, \mathsf{N}, \theta)$ și $(\mathsf{G}', \mathsf{N}', \theta')$ sunt triplete de caractere.

Putem acum să definim noțiunea de triplet de module, noțiune asociată conceptului de triplet de caractere.

Definiția 3.1.7. Spunem că $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{V})$ este un *triplet de module*, și considerăm algebra lui de endomorfisme

$$\mathsf{E}(\mathsf{V}) := \mathrm{End}_{\mathcal{K}\mathsf{A}} (\mathcal{K}\mathsf{A} \otimes_{\mathcal{K}\mathsf{B}} \mathsf{V})^{\mathrm{op}}.$$

Deoarece am presupus că corpul $\mathcal{K}$ conține toate rădăcinile de ordin $|\mathsf{G}|$ ale unității (vezi Secțiunea 1.1), $\mathsf{E}(\mathsf{V})$ este o algebră grupală răsucită de forma $\mathcal{K}_\alpha\bar{\mathsf{G}}$, unde $\alpha \in \mathsf{Z}^2(\bar{\mathsf{G}}, \mathcal{K}^\times)$. Știm că clasa $[\alpha] \in \mathsf{H}^2(\bar{\mathsf{G}}, \mathcal{K}^\times)$ depinde doar de clasa de izomorfism a lui V, astfel, de fapt, $[\alpha]$ este determinat de θ.

3.2 Relațiile de ordine-inițială și de ordine-centrală

Continuăm cu notațiile și asumpțiile secțiunii anterioare. Următoarele noțiuni și rezultate au fost publicate în [29, §6].

Propoziția 3.2.1. *Fie* $\Delta(\mathsf{V}) := \Delta(\mathcal{K}\mathsf{G} \otimes \mathsf{E}(\mathsf{V})^{\mathrm{op}})$. *Atunci* $\Delta(\mathsf{V})$ *este izomorf cu* $\mathcal{K}_{\mathrm{Inf}_{\bar{\mathsf{G}}}^{\mathsf{G}}\alpha}\mathsf{G}$ *ca și algebre* $\bar{\mathsf{G}}$*-graduate. În particular, structura de* $\mathcal{K}\mathsf{N}$*-modul a lui* V *se extinde la o structură de* $\mathcal{K}_{\mathrm{Inf}_{\bar{\mathsf{G}}}^{\mathsf{G}}\alpha}\mathsf{G}$*-modul.*

Remarca 3.2.2. Structura de $\Delta(\mathsf{V})$-modul a lui V dă naștere la $\mathcal{K}$-reprezentările proiective ale lui G asociate lui θ. Două reprezentări proiective P și P' sunt asemenea dacă și numai dacă $\mathsf{E}(\mathsf{V}) = \mathcal{K}_\alpha\bar{\mathsf{G}}$ și $\mathsf{E}(\mathsf{V}') = \mathcal{K}_{\alpha'}\bar{\mathsf{G}}$ sunt izomorfe ca și algebre $\bar{\mathsf{G}}$-graduate, și dacă și numai dacă $[\alpha] = [\alpha']$ în $\mathsf{H}^2(\bar{\mathsf{G}}, \mathcal{K}^\times)$. Aceasta are loc dacă și numai dacă $\Delta(\mathsf{V})$-modulul V este izomorf cu $\Delta(\mathsf{V}')$-modulul V', via izomorfismul dat de $\Delta(\mathsf{V}) \simeq \Delta(\mathsf{V}')$ ca și algebre $\bar{\mathsf{G}}$-graduate.

Acum, putem formula o versiune în termeni de triplete de module a relațiilor de ordine-inițială și de ordine-centrală dintre triplete de caractere.

Definiția 3.2.3. Fie $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{V})$ și $(\mathsf{A}', \mathsf{B}', \mathsf{V}')$ două triplete de module.

a) Scriem $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{V}) \geq (\mathsf{A}', \mathsf{B}', \mathsf{V}')$ dacă

(1) $\mathsf{G} = \mathsf{N}\mathsf{G}'$ și $\mathsf{N}' = \mathsf{N} \cap \mathsf{G}'$;

(2) există un izomorfism de algebre $\bar{\mathsf{G}}$-graduate

$$\mathsf{E}(\mathsf{V}) = \mathrm{End}_{\mathcal{K}\mathsf{A}}(\mathcal{K}\mathsf{A} \otimes_{\mathcal{K}\mathsf{B}} \mathsf{V})^{\mathrm{op}} \to \mathsf{E}(\mathsf{V}') = \mathrm{End}_{\mathcal{K}\mathsf{A}'}(\mathcal{K}\mathsf{A}' \otimes_{\mathcal{K}\mathsf{B}'} \mathsf{V}')^{\mathrm{op}}.$$

b) Scriem $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{V}) \geq_c (\mathsf{A}', \mathsf{B}', \mathsf{V}')$ dacă

(1) $G = G'N$, $N' = N \cap G'$

(2) $C_G(N) \subseteq G'$

(3) există un izomorfism de algebre $\bar{G}$-graduate

$$E(V) = \mathrm{End}_{\mathcal{K}A}(\mathcal{K}A \otimes_{\mathcal{K}B} V)^{\mathrm{op}} \to E(V') = \mathrm{End}_{\mathcal{K}A'}(\mathcal{K}A' \otimes_{\mathcal{K}B'} V')^{\mathrm{op}}$$

astfel încât diagrama

$$\begin{tikzcd} E(V) \arrow[r, "\sim"] & E(V') \\ \mathcal{K}\mathcal{C} \arrow[u] \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_{\mathcal{K}\mathcal{C}}"] & \mathcal{K}\mathcal{C}, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{K}$-algebre $\bar{G}$-graduate este comutativă, unde $\mathcal{K}\mathcal{C} = \mathcal{K}C_G(N)$ este privit ca o $\mathcal{K}$-algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată, cu 1-componenta $\mathcal{K}Z(N)$.

Acum, vom prezenta legătura dintre relațiile $\geq_c$ dintre triplete de caractere, relațiile $\geq_c$ dintre triplete de module dar și dintre echivalențele Rickard peste $\mathcal{C}$. Reamintim că pe motiv ce $\mathcal{K}B$ este o algebră semisimplă, obiectele indecompozabile din $\mathcal{D}^b(\mathcal{K}B)$ sunt $\mathcal{K}B$-modulele simple privite ca și complexe concentrate într-un grad $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.2.4. [29, Teorema 6.7] *Presupunem că $C_G(N) \subseteq G'$, și că complexul $\tilde{M}$ induce o echivalență Rickard $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C} := \mathcal{O}C_G(N)$ între A și A'.*

Fie V un $\mathcal{K}B$-modul simplu G-invariant de caracter θ, și fie V' un $\mathcal{K}B'$-modul simplu G'-invariant corespunzător lui V via corespondența dată, de caracter θ'. Atunci $(A, B, V) \geq_c (A', B', V')$ și $(G, N, \theta) \geq_c (G', N', \theta')$.

3.3 Relațiile de ordine-blockwise

Späth a mai utilizat în [36], [37] și [38] relația de ordine-blockwise ($\geq_b$) între triplete de caractere. Această relație este o rafinare a relației de ordine-centrală ($\geq_c$) care ia în considerare o inducție de blocuri, vezi [38, Definiția 4.2].

Pe o idee similară, după cum am publicat în articolul [30, §5], vom introduce relația de ordine-blockwise, $\geq_b$, între triplete de module ca și o rafinare a relației de ordine-centrală, $\geq_c$, folosind corespondența Harris-Knörr (vezi Definiția 3.3.1). De remarcat este faptul că definiția noastră nu implică în totalitate pe [38, Definiția 4.2], deoarece acolo este utilizată inducția de blocuri într-un sens mai general. Mai mult, în Definiția 3.3.5 introducem noțiunea de echivalențe derivate compatibile cu morfismul Brauer. Aceasta este o condiție mai slabă decât cea a echivalențelor splendide sau de bază, și este motivată de rezultatele din [27], care creează o legătură între echivalențele Morita de bază și rezultatul principal al lui Dade [8]. Vom demonstra în Propoziția 3.3.6 că relația $\geq_b$ dintre triplete de module este o consecință a unei anumite echivalențe derivată graduată compatibilă cu morfismul Brauer.

Reamintim că printr-o echivalență derivată înțelegem o echivalență între categoriile derivate mărginite $\mathcal{D}^b(A)$ și $\mathcal{D}^b(A')$ induse de un complex tilting bilateral precum și în [21, §6.2].

Continuăm cu notațiile și asumpțiile secțiunii anterioare, și adițional vom presupune că $C_G(N) \subseteq G'$. Reamintim că această presupunere, conform Secțiuni 2.3.2, ne indică faptul că A și A' sunt algebre $\bar{G}$-graduate peste algebra $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată $\mathcal{C} := \mathcal{O}C_G(N)$, cu morfismele structurale $\zeta : \mathcal{C} \to C_A(B)$ și $\zeta' : \mathcal{C} \to C_{A'}(B')$ (vezi Definiția 2.1.5) date de incluziune.

Vom folosi morfismul Brauer și echivalențe de bază între blocuri, introduse de L. Puig în [35]. Atunci [38, Remarca 4.3 (c)] ne conduce la următoarea formulare.

Definiția 3.3.1. Presupunem că blocul b are ca și defect pe Q, $G' = N_G(Q)$, $N' = N_N(Q)$, și b' este corespondentul Brauer a lui b. Fie (A, B, V) și (A', B', V') două triplete de module. Scriem că

$$(A, B, V) \geq_b (A', B', V')$$

dacă următoarele condiții sunt satisfăcute:

(1) $(A, B, V) \geq_c (A', B', V')$;

(2) Pentru orice subgrup $N \leq J \leq G$, dacă $\mathcal{O}J$-modulul simplu W care acoperă pe V corespunde (via condiția (1)) $\mathcal{O}J'$-modulului simplu W' care acoperă pe V' (unde $J' = G' \cap J$), atunci blocul β al lui $\mathcal{O}J$ căruia îi aparține W este corespondentul Harris-Knörr al blocului β' al lui $\mathcal{O}J'$ căruia îi aparține W'.

3.3.2. Reamintim că corespondența Harris-Knörr [17] este o bijecție între blocurile lui A cu defect D (unde $Q \leq D$) și blocurile lui A' cu defect D. Această bijecție este indusă de morfismul Brauer

$$\mathrm{Br}_Q : A^Q \to A(Q).$$

3.3.3. Notăm

$$\bar{C} = \bar{C}_A(B) = C_A(B)/J_{\mathrm{gr}}(C_A(B)).$$

Știm din [8, 2.9] că $\bar{C}$ este un produs încrucișat $\bar{G}[b]$-graduat, unde

$$\bar{G}[b] = \{\bar{g} \in \bar{G} \mid A_{\bar{g}} \simeq B \text{ ca și } (B, B)\text{-bimodule}\} = \{\bar{g} \in \bar{G} \mid A_{\bar{g}} A_{\bar{g}^{-1}} = B\}.$$

De asemenea, notăm $\bar{C}' = \bar{C}_{A'}(B') = C_{A'}(B')/J_{\mathrm{gr}}(C_{A'}(B'))$.

Rezultatul principal al lui Dade [8] spune că morfismul Brauer Br_Q induce un izomorfism $\bar{C} \simeq \bar{C}'$ de algebre $\bar{G}[b]$-graduate $\bar{G}$-acționate. Mai mult, conform [27, Teorema 3.7], acest izomorfism induce aceeași corespondență Harris-Knörr între blocurile lui A și blocurile lui A'.

3.3.4. Reamintim din [25, Corolarul 5.2.6] că o echivalență derivată $\bar{G}$-graduată între A și A' induce încă un izomorfism $\bar{C} \simeq \bar{C}'$ de algebre $\bar{G}[b]$-graduate $\bar{G}$-acționate.

Definiția 3.3.5. Spunem că o echivalență derivată $\bar{G}$-graduată între A și A' este *compatibilă cu morfismul Brauer* dacă izomorfismul indus $\bar{C} \simeq \bar{C}'$ de $\bar{G}$-algebre $\bar{G}[b]$-graduate din 3.3.4 coincide cu izomorfismul indus de morfismul Brauer Br_Q din 3.3.3.

Propoziția 3.3.6. *Presupunem că complexul* $\tilde{X}$ *induce o echivalență derivată* $\bar{G}$*-graduată între* A *și* A' *compatibilă cu morfismul Brauer* Br_Q*, astfel încât* $\mathcal{K}B$*-modulul simplu* V *corespunde* $\mathcal{K}B'$*-modulului simplu* V'*. Atunci* $(A, B, V) \geq_b (A', B', V')$.

Remarca 3.3.7. Conform [27, Corolarul 4.4], o echivalență de bază Morita $\bar{G}$-graduată între A și A' este compatibilă cu morfismul Brauer Br_Q în sensul definiției de mai sus.

Capitolul 4

Produse tensoriale și produse wreath

Acest capitol se bazează pe rezultate noastre ce au fost publicate în articolele [30] și [33]. În acesta, obținem echivalențe pentru produse tensoriale (Propoziția 4.1.3) și pentru produse wreath (Teorema 4.3.3 și Teorema 4.4.4). Astfel de construcții sunt motivate iarăși de teoremele de reducere, care necesită compatibilitatea dintre relațiile dintre triplete de caractere și produse wreath: pentru a obține teoreme de reducere, rezultate recente ale lui Britta Späth, rezumate în [36], [37] și [38], arată cum un nou triplet de caractere poate fi obținut via o construcție de produs wreath de triplete de caractere ([36, Teorema 5.2] și [38, Teorema 2.21]). În Teorema 3.2.4, am demonstrat că există o legătură între triplete de caractere și echivalențe graduate peste o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată, astfel în acest capitol vom demonstra că o construcție wreath similară poate fi construită pentru echivalențele graduate corespunzătoare. O altă motivație vine din faptul că este deja cunoscut că echivalențele Morita pot fi extinse la produse wreath [25, Teorema 5.1.21].

În Secțiunea 4.1, demonstrăm că construcțiile algebrice introduse în Secțiunea 2.1 sunt compatibile cu produse tensoriale, iar propoziția principală a acestei secțiuni, Propoziția 4.1.3, arată că produsele tensoriale ale unor algebre echivalente Morita graduat peste algebre graduate și acționate de un grup rămân echivalente Morita graduat peste o algebră graduată și acționată de un grup. În Secțiunea 4.2, demonstrăm că algebrele anterior amintite sunt compatibile cu produse wreath.

În Secțiunea 4.3, unul din rezultatele noastre principale, Teorema 4.3.3, arată că produsul wreath dintre un bimodul G-graduat peste $\mathcal{C}$ și S_n (grupul simetric de ordin n) este de asemenea un bimodul graduat peste $\mathcal{C}^{\otimes n}$. În plus, dacă acest bimodul induce o echivalență Morita G-graduată peste $\mathcal{C}$, atunci produsul său wreath cu S_n va induce o echivalență Morita graduată peste $\mathcal{C}^{\otimes n}$.

În Secțiunea 4.4, construim echivalențe graduate derivate și Rickard pentru produse wreath. Pentru a realiza aceasta, extindem construcția produsului wreath de la algebre graduate și bimodule peste $\mathcal{C}$ la complexe de bimodule G-graduate peste $\mathcal{C}$. Rezultatul principal din această secțiune, Teorema 4.4.4, spune că produsul wreath product dintre un complex de bimodule G-graduate peste $\mathcal{C}$ și grupul simetric de ordin n, S_n, este un complex de bimodule $G \wr S_n$-graduate peste $\mathcal{C}^{\otimes n}$. Mai mult, dacă complexul dat induce o echivalență G-graduată derivată (respectiv Rickard) peste $\mathcal{C}$, atunci produsul său wreath product cu S_n (respectiv cu un p'-subgrup al lui S_n) va induce o echivalență graduată derivată (respectiv Rickard) peste $\mathcal{C}^{\otimes n}$. Algebrele noastre graduate sunt aici extensii de blocuri, dar este clar faptul că majoritatea afirmațiilor rămân adevărate pentru inclusiv cazul mai general al algebrelor graduate. Teorema 4.4.4 îmbunătățește [25, Teorema 5.2.12] în mai multe moduri. Așa cum deja a observat deja Zimmermann [40], o anumită “condiție-p'” asupra ordinului grupului de graduare, care apare în [25, Teorema 5.2.12], nu este necesară în cazul echivalențelor derivate, dar este necesară în cazul echivalențelor Rickard. În final, în Secțiunea 4.5, în Propoziția 4.5.1 demonstrăm că relația $\geq_c$ este compatibilă cu produse wreath de echivalențe derivate G-graduate peste $\mathcal{C}$. Mai mult, Teorema 4.5.2 și Corolarul 4.5.3 sunt rezultatele principale ale acestui capitol, care prezintă compatibilitatea dintre relația $\geq_b$ dintre triplete de module și produsele wreath de echivalențe derivate.

4.1 Produse tensoriale

4.1.1. Prin tot acest capitol n va reprezenta un număr natural nenul arbitrar. Considerăm grupurile finite G_i, subgrupurile normale ale lui G_i, N_i, și facem notațiile $\bar{G}_i = G_i/N_i$, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Notăm cu

$$\bar{\mathbf{G}} := \prod_{i=1}^{n} \bar{G}_i.$$

Lema 4.1.2. *Fie A_i o algebră $\bar{G}_i$-graduată și $\mathcal{C}_i$ o algebră $\bar{G}_i$-graduată $\bar{G}_i$-acționată, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Au loc următoarele afirmații:*

(1) Produsul tensorial $\mathbf{A} := A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ este o algebră $\bar{\mathbf{G}}$-graduată;

(2) Dacă A_i sunt produse încrucișate $\bar{G}_i$-graduate, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, atunci $\mathbf{A}$ este un produs încrucișat $\bar{\mathbf{G}}$-graduat;

(3) Produsul tensorial $\boldsymbol{\mathcal{C}} := \mathcal{C}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{C}_n$ este o algebră $\bar{\mathbf{G}}$-graduată $\bar{\mathbf{G}}$-acționată;

(4) Dacă A_i sunt algebre $\bar{G}_i$-graduate peste $\mathcal{C}_i$, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, atunci $\mathbf{A}$ este o algebră $\bar{\mathbf{G}}$-graduată peste $\boldsymbol{\mathcal{C}}$.

Propoziția 4.1.3. *Dacă $\mathcal{C}_i$ sunt algebre $\bar{G}_i$-graduate $\bar{G}_i$-acționate, dacă A_i și A'_i sunt produse încrucișate $\bar{G}_i$-graduate peste $\mathcal{C}_i$, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, dacă A_i și A'_i sunt echivalente Morita $\bar{G}_i$-graduat peste $\mathcal{C}_i$, și dacă $\tilde{M}_i$ este un (A_i, A'_i)-bimodul $\bar{G}_i$-graduat peste $\mathcal{C}_i$, care induce echivalența dată, pentru orice i, atunci:*

(1) $\tilde{\mathbf{M}} := \tilde{M}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{M}_n$ este un $(\mathbf{A}, \mathbf{A}')$-bimodul $\bar{\mathbf{G}}$-graduat peste $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, unde $\mathbf{A} := A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$, $\mathbf{A}' := A'_1 \otimes \ldots \otimes A'_n$ și $\boldsymbol{\mathcal{C}} := \mathcal{C}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{C}_n$;

(2) $\tilde{\mathbf{M}}$ induce o echivalență Morita $\bar{\mathbf{G}}$-graduată peste $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ între $\mathbf{A}$ și $\mathbf{A}'$.

4.2 Produse wreath pentru algebre

4.2.1. Notăm $\bar{G}^n := \bar{G} \times \ldots \times \bar{G}$ (de n ori).

Reamintim definiția unui produs wreath ([38, Definiția 2.19] și [25, §5.1.C]):

Definiția 4.2.2. Produsul wreath $\bar{G} \wr S_n$ este produsul semidirect $\bar{G}^n \rtimes S_n$, unde grupul simetric de ordin n, S_n, acționează pe $\bar{G}^n$ (la stânga) prin permutarea componentelor:

$${}^{\sigma}(g_1, \ldots, g_n) := (g_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, g_{\sigma^{-1}(n)}),$$

pentru orice $g_1, \ldots, g_n \in \bar{G}$ și $\sigma \in S_n$. Mai exact, elementele lui $\bar{G} \wr S_n$ sunt de forma $((g_1, \ldots, g_n), \sigma)$, și înmulțirea este definită astfel:

$$((g_1, \ldots, g_n), \sigma)((h_1, \ldots, h_n), \tau) := ((g_1, \ldots, g_n) \cdot {}^{\sigma}(h_1, \ldots, h_n), \sigma\tau),$$

pentru orice $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n \in \bar{G}$ și $\sigma, \tau \in S_n$.

Definiția 4.2.3. Fie A o $\mathcal{O}$-algebră. Notăm cu $A^{\otimes n} := A \otimes \ldots \otimes A$ (de n ori). Produsul wreath $A \wr S_n$ este algebra strâmbă

$$A \wr S_n := A^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}S_n$$

dintre $A^{\otimes n}$ și S_n, cu operația de înmulțire definită astfel

$$\begin{aligned}&((a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \otimes \sigma)((b_1 \otimes \ldots \otimes b_n) \otimes \tau)\\ &\quad := ((a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \cdot {}^{\sigma}(b_1 \otimes \ldots \otimes b_n)) \otimes (\sigma\tau),\end{aligned}$$

unde

$${}^{\sigma}(b_1 \otimes \ldots \otimes b_n) := b_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes b_{\sigma^{-1}(n)},$$

pentru orice $(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \otimes \sigma$, $(b_1 \otimes \ldots \otimes b_n) \otimes \tau \in A \wr S_n$.

De remarcat este faptul că dacă A este o algebră simetrică, $A \wr S_n$ este tot simetrică (vezi [25, Lema 5.1.8]).

Lema 4.2.4. *Fie A o algebră $\bar{G}$-graduată și $\mathcal{C}$ o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată. Următoarele afirmații sunt adevărate:*

(1) $A \wr S_n$ *este o algebră* $\bar{G} \wr S_n$*-graduată, cu* $((g_1, \ldots, g_n), \sigma)$*-componenta*

$$(A \wr S_n)_{((g_1,\ldots,g_n),\sigma)} := ((A_{g_1} \otimes \ldots \otimes A_{g_n}) \otimes \mathcal{O}\sigma),$$

pentru orice $((g_1, \ldots, g_n), \sigma) \in \bar{G} \wr S_n$*;*

(2) Dacă A *este un produs încrucișat* $\bar{G}$*-graduat, atunci* $A \wr S_n$ *este un produs încrucișat* $\bar{G} \wr S_n$*-graduat;*

(3) $\mathcal{C}^{\otimes n}$ *este o algebră* $\bar{G} \wr S_n$*-acționată* $\bar{G}^n$*-graduată, unde*

$${}^{((g_1,\ldots,g_n),\sigma)}(c_1 \otimes \ldots \otimes c_n) := {}^{g_1}c_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes {}^{g_n}c_{\sigma^{-1}(n)}.$$

(4) Dacă A *este o algebră* $\bar{G}$*-graduată peste* $\mathcal{C}$*, atunci* $A \wr S_n$ *este o algebră* $\bar{G} \wr S_n$*-graduată peste* $\mathcal{C}^{\otimes n}$*, cu morfismul structural* $\bar{G} \wr S_n$*-graduat* $\bar{G} \wr S_n$*-acționat*

$$\zeta_{wr} : \mathcal{C}^{\otimes n} \to C_{A \wr S_n}(B^{\otimes n})$$

dat de compunerea

$$\zeta^{\otimes n} : \mathcal{C}^{\otimes n} \to C_A(B)^{\otimes n} \subseteq C_{A \wr S_n}(B^{\otimes n}).$$

4.3 Echivalențe Morita pentru produse wreath

Amintim definiția unui produs wreath dintre un modul și S_n.

Definiția 4.3.1. Fie A și A' două algebre. Presupunem că $\tilde{M}$ este un (A, A')-bimodul. Acțiunea lui S_n pe $\tilde{M}^{\otimes n}$ este definită astfel

$${}^{\sigma}(\tilde{m}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{m}_n) := \tilde{m}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes \tilde{m}_{\sigma^{-1}(n)},$$

pentru orice $\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_n \in \tilde{M}$ și $\sigma \in S_n$. Ca un $\mathcal{O}$-modul, produsul wreath $\tilde{M} \wr S_n$ este

$$\tilde{M} \wr S_n := \tilde{M}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}S_n,$$

unde înmulțirea cu scalari este

$$\begin{aligned}((a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \otimes \sigma)\,((\tilde{m}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{m}_n) \otimes \tau)\,((a'_1 \otimes \ldots \otimes a'_n) \otimes \pi)\\ = (a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \cdot {}^{\sigma}(\tilde{m}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{m}_n) \cdot {}^{\sigma\tau}(a'_1 \otimes \ldots \otimes a'_n) \otimes \sigma\tau\pi,\end{aligned}$$

pentru orice $(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \otimes \sigma \in A \wr S_n$, $(\tilde{m}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{m}_n) \otimes \tau \in \tilde{M} \wr S_n$ și $(a'_1 \otimes \ldots \otimes a'_n) \otimes \pi \in A' \wr S_n$.

4.3.2. Fie $\mathcal{C}$ o algebră $\bar{G}$-graduată $\bar{G}$-acționată și A și A' două produse încrucișate $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$, cu 1-componentele B și respectiv B'.

Dacă $\tilde{M}$ este un (A, A')-bimodul care induce o echivalență Morita între A și A', conform rezultatelor din [25, §5.1.C], știm deja că $\tilde{M} \wr S_n$ induce o echivalență Morita între $A \wr S_n$ și $A' \wr S_n$. Întrebarea care apare este dacă acest rezultat poate fi extins la a obține echivalențe Morita graduate peste $\mathcal{C}$. Un răspuns la această întrebare este dat de Teorema 4.3.3, care extinde [25, Teorema 5.1.21] la cazul echivalențelor Morita graduate peste $\mathcal{C}$, rezultat ce l-am publicat în [33, Teorema 5.3].

Teorema 4.3.3. *Fie $\tilde{M}$ un (A, A')-bimodul $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$. Atunci, următoarele afirmații au loc:*

(1) $\tilde{M} \wr S_n$ este un $(A \wr S_n, A' \wr S_n)$-bimodul $\bar{G} \wr S_n$-graduat peste $\mathcal{C}^{\otimes n}$, cu $((g_1, \ldots, g_n), \sigma)$-componenta
$$(\tilde{M} \wr S_n)_{((g_1,\ldots,g_n),\sigma)} = (\tilde{M}_{g_1} \otimes \ldots \otimes \tilde{M}_{g_n}) \otimes \mathcal{O}\sigma;$$

(2) $(A \wr S_n) \otimes_{B^{\otimes n}} M^{\otimes n} \simeq M^{\otimes n} \otimes_{B'^{\otimes n}} (A' \wr S_n) \simeq \tilde{M} \wr S_n$ ca și $(A \wr S_n, A' \wr S_n)$-bimodule $\bar{G} \wr S_n$-graduate peste $\mathcal{C}^{\otimes n}$, unde M este 1-componenta lui $\tilde{M}$;

(3) Dacă $\tilde{M}$ induce o echivalență Morita $\bar{G}$-graduată peste $\mathcal{C}$ între A și A', atunci $\tilde{M} \wr S_n$ induce o echivalență Morita $\bar{G} \wr S_n$-graduată peste $\mathcal{C}^{\otimes n}$ între $A \wr S_n$ și $A' \wr S_n$.

4.4 Echivalențe derivate pentru produse wreath

4.4.1. Fie A și A' două produse încrucișate $\bar{G}$-graduate, atunci $A \otimes A'$ este un produs încrucișat $\bar{G} \times \bar{G}$-graduat cu 1-componenta $B \otimes B'$. De acum înainte vom presupune că A și A' sunt libere și finit generate ca $\mathcal{O}$-module.

4.4.2. Dacă $\tilde{X}$ este un complex de (A, A')-bimodule $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$ care induce o echivalență derivată sau Rickard $\bar{G}$-graduată între A și A', vrem să extindem rezultatele din [25, §5.1.C], pentru a obține o echivalență derivată sau Rickard $\bar{G} \wr S_n$-graduată peste $\mathcal{C}^{\otimes n}$ între $A \wr S_n$ și $A' \wr S_n$. În situația echivalențelor Rickard, va fi necesară o condiție suplimentară.

4.4.3. Reamintim (vezi, spre exemplu [3, §4.1]) că S_n acționează pe $\tilde{X}^{\otimes n} := \tilde{X} \otimes \ldots \otimes \tilde{X}$ (de n ori). Conform [25, Lema 5.2.11], această acțiune poate fi definită astfel: Dacă $C_2 = \{\pm 1\}$, se observă că S_n acționează pe grupul abelian al funcțiilor de la C_2^n la C_2,

$\mathrm{Fun}(C_2^n, C_2)$; pentru orice $i \in \mathbb{Z}$ considerăm $\hat{\imath} = (-1)^i$. Atunci există un 1-cociclu $\epsilon \in Z^1(S_n, \mathrm{Fun}(C_2^n, C_2))$ astfel încât

$$^{\sigma}(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_n}) = \epsilon_\sigma(\hat{\imath}_1, \ldots, \hat{\imath}_n) x_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{\sigma^{-1}(n)}},$$

unde x_{i_j} aparține celui de-al j-lea factor a lui $\tilde{X}^{\otimes n}$, și are gradul $i_j \in \mathbb{Z}$. În cazul nostru, $\tilde{X}^{\otimes n}$ este un complex de $(A^{\otimes n}, A'^{\otimes n})$-bimodule $\bar{G}^n$-graduate peste $\mathcal{C}^{\otimes n}$, și chiar un complex de $(A \otimes A'^{\mathrm{op}}) \wr S_n$-module $\bar{G}^n$-graduate. Putem astfel considera produsul wreath

$$\tilde{X} \wr S_n = \tilde{X}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}S_n.$$

Teorema 4.4.4. [30, Teorema 3.7] *Fie $\tilde{X}$ un complex de (A, A')-bimodule $\bar{G}$-graduate peste $\mathcal{C}$, cu 1-componenta X. Atunci, au loc următoarele afirmații:*

(1) *$\tilde{X} \wr S_n$ este un complex de $(A \wr S_n, A' \wr S_n)$-bimodule $\bar{G} \wr S_n$-graduate peste $\mathcal{C}^{\otimes n}$, izomorf cu $(A \wr S_n) \otimes_{B^{\otimes n}} X^{\otimes n}$ și cu $X^{\otimes n} \otimes_{B'^{\otimes n}} (A' \wr S_n)$.*

(2) *Dacă $\tilde{X}$ induce o echivalență derivată $\bar{G}$-graduată între A și A', atunci $\tilde{X} \wr S_n$ induce o echivalență $\bar{G} \wr S_n$-graduată peste $\mathcal{C}^{\otimes n}$ între $A \wr S_n$ și $A' \wr S_n$.*

(3) *Dacă $\tilde{X}$ induce o echivalență Rickard $\bar{G}$-graduată între A și A', și dacă Σ este un p'-subgrup al lui S_n, atunci $\tilde{X} \wr \Sigma$ induce o echivalență Rickard $\bar{G} \wr \Sigma$-graduată peste $\mathcal{C}^{\otimes n}$ între $A \wr \Sigma$ și $A' \wr \Sigma$.*

4.5 Relații între triplete de module induse de produse wreath

În această ultimă secțiune lucrăm din nou în contextul cadrului de lucru principal 2.3.1. Următorul rezultat este motivat de [38, Teorema 2.21].

Propoziția 4.5.1. *Fie tripletele de module (A, B, V) și (A', B', V'). Dacă A și A' sunt echivalente derivat $\bar{G}$-graduat peste $\mathcal{C}$ astfel încât V corespunde lui V', atunci*

$$(A \wr S_n, B^{\otimes n}, V^{\otimes n}) \geq_c (A' \wr S_n, B'^{\otimes n}, V'^{\otimes n}).$$

Acum, vom realiza o construcție similară de produse wreath și pentru relația de ordine-blockwise $\geq_b$. Pentru a face aceasta, ne bazăm pe rezultatele lui Harris [15, 16], care extind rezultatele lui Külshammer [22], și ale lui Alghamdi și Khammash [1].

Teorema 4.5.2. [30, Teorema 5.8] *Dacă complexul $\tilde{X}$ induce o echivalență derivată $\bar{G}$-graduată între A și A' compatibilă cu morfismul Brauer Br_Q, atunci echivalența derivată $\bar{G} \wr S_n$-graduată dintre $A \wr S_n$ și $A' \wr S_n$ indusă de $\tilde{X} \wr S_n$ este compatibilă cu morfismul Brauer Br_{Q^n}.*

Din Propoziția 4.5.1 și Teorema 4.5.2 deducem:

Corolarul 4.5.3. *Dacă complexul $\tilde{X}$ induce o echivalență derivată $\bar{G}$-graduată între A și A' compatibilă cu morfismul Brauer Br_Q, și $\mathcal{K}B$-modulul simplu V corespunde $\mathcal{K}B'$-modulului simplu V', atunci*

$$(A \wr S_n, B^{\otimes n}, V^{\otimes n}) \geq_b (A' \wr S_n, B'^{\otimes n}, V'^{\otimes n}).$$

Remarca 4.5.4. Suntem interesați de relația $\geq_b$ atunci când este indusă de echivalențe derivate. Însă, nu este deloc dificil să arătăm direct că, cu metodele prezentate aici, similar cu [36, Teorema 5.2], dacă $(A, B, V) \geq_b (A', B', V')$, atunci $(A \wr S_n, B^{\otimes n}, V^{\otimes n}) \geq_b (A' \wr S_n, B'^{\otimes n}, V'^{\otimes n})$

Bibliografie

[1] A. M. Alghamdi, A. A. Khammash, *Defect groups of tensor modules*, J. Pure Appl. Algebra **167** (2002), 165–173, DOI:10.1016/S0022-4049(01)00036-6;

[2] F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Grad. Texts in Math. Vol. 13, 2nd Ed., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1992), DOI:10.1007/978-1-4612-4418-9;

[3] D. J. Benson, *Representations and cohomology*, Vol. II, Cambridge Stud. Adv. Math. Vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge (1991), DOI:10.1017/CBO9780511623622;

[4] P. Boisen, *Graded Morita Theory*, J. Algebra **164** (1994), 1–25, DOI:10.1006/jabr.1994.1051;

[5] M. Broué, *Isométries de caractères et équivalences de Morita ou dérivées*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **71** (1990), 45–63, DOI:10.1007/BF02699877;

[6] M. Broué, *Equivalences of blocks of group algebras*, În: Finite dimensional algebras and related topics (Ottawa, 1992), NATO ASI Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences) Vol. 424, Springer, Dordrecht (1994), 1–26, DOI:10.1007/978-94-017-1556-0_1;

[7] M. Broué, S. Kim, *Familles de caractères des algèbres de Hecke cyclotomiques*, Adv. Math. **172** (2002), 53–136, DOI:10.1006/aima.2002.2078;

[8] E. C. Dade, *Block extensions*, Illinois J. Math. **17** (1973), 198–272, DOI:10.1215/ijm/1256051756;

[9] E. C. Dade, *Group-Graded Rings and Modules*, Math. Z. **174** (1980), 241–262, DOI:10.1007/BF01161413;

[10] E. C. Dade, *Extending Group Modules in a Relatively Prime Case*, Math. Z. **186** (1984), 81–98, DOI:10.1007/BF01215493;

[11] A. del Río, *Graded rings and equivalences of categories*, Comm. Algebra, **19** (1991), 997-1012, DOI:10.1080/00927879108824184;

[12] C. Faith, *Algebra: Rings, Modules and Categories I*, Grundlehren Math. Wiss. Vol. 190, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1973), DOI:10.1007/978-3-642-80634-6;

[13] D. D. Gliția, *Group graded bimodules over a commutative* G*-ring*, Mathematica **55 (78)** (2013), 178–185, Zbl:1313.16084;

[14] R. Gordon, E. L. Green, *Graded Artin Algebras*, J. Algebra **76** (1982), 111-137, DOI:10.1016/0021-8693(82)90240-X;

[15] M. E. Harris, *Some Remarks on the Tensor Product of Algebras and Applications I*, J. Pure Appl. Algebra **197** (2005), 1–9, DOI:10.1016/j.jpaa.2004.08.031;

[16] M. E. Harris, *Some Remarks on the Tensor Product of Algebras and Applications II*, Algebra Colloq. **14** (2007), 143–154, DOI:10.1142/S1005386707000144;

[17] M. E. Harris, R. Knörr, *Brauer correspondence for covering blocks of finite groups*, Comm. Algebra **13** (1985), 1213–1218, DOI:10.1080/00927878508823213;

[18] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Pure and Applied Mathematics: A series of Monographs and Textbooks Vol. 69, Academic Press, New York (1976), Zbl:0337.20005;

[19] S. Koshitani, C. Lassueur, *Splendid Morita equivalences for principal 2-blocks with dihedral defect groups*, Math. Z. **294** (2020), 639–666, DOI:10.1007/s00209-019-02301-0;

[20] S. Koshitani, C. Lassueur, *Splendid Morita equivalences for principal blocks with generalised quaternion defect groups*, J. Algebra **558** (2020), 523–533, DOI:10.1016/j.jalgebra.2019.03.038;

[21] S. König, A. Zimmermann, *Derived equivalences for group rings*, Lecture Notes in Math. Vol. 1685, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1998), DOI:10.1007/BFb0096366;

[22] B. Külshammer, *Some indecomposable modules and their vertices*, J. Pure Appl. Algebra **86** (1993), 65–73, DOI:10.1016/0022-4049(93)90153-K;

[23] M. Linckelmann, *The block theory of finite group algebras*, Vol. I-II, London Math. Soc. Stud. Texts Vol. 91-92, Cambridge University Press, Cambridge (2018), DOI:10.1017/9781108349321 and DOI:10.1017/9781108349307;

[24] A. Marcus, *On Equivalences between Blocks of Group Algebras: Reduction to the Simple Components*, J. Algebra **184** (1996), 372–396, DOI:10.1006/jabr.1996.0265;

[25] A. Marcus, *Representation theory of group graded algebras*, Nova Science Publ. Inc., Commack, NY (1999), Zbl:1014.16043;

[26] A. Marcus, *Derived invariance of Clifford classes*, J. Group Theory **12** (2009), 83–94, DOI:10.1515/JGT.2008.062;

[27] A. Marcus, *Group graded basic Morita equivalences and the Harris–Knörr correspondence*, J. Group Theory **23** (2020), 697–708, DOI:10.1515/jgth-2019-0132;

[28] A. Marcus, V. A. Minuță, *Group graded endomorphism algebras and Morita equivalences*, Mathematica **62 (85)** (2020), 73–80, DOI:10.24193/mathcluj.2020.1.08, arXiv:1911.04590;

[29] A. Marcus, V. A. Minuță, *Character triples and equivalences over a group graded* G*-algebra*, J. Algebra **565** (2021), 98–127, DOI:10.1016/j.jalgebra.2020.07.029, arXiv:1912.05666;

[30] A. Marcus, V. A. Minuță, *Blockwise relations between triples, and derived equivalences for wreath products*, Comm. Algebra (2021), 1–11, DOI:10.1080/00927872.2021.1885678, arXiv:2008.11549;

[31] C. Menini, C. Năstăsescu, *When is R-gr Equivalent to the Category of Modules?*, J. Pure Appl. Algebra **51** (1988), 277-291, DOI:10.1016/0022-4049(88)90067-9;

[32] V. A. Minuță, *Graded Morita theory over a* G*-graded* G*-acted algebra*, Acta Univ. Sapientiae Math. **12** (2020), 164–178, DOI:10.2478/ausm-2020-0011, arXiv:2001.09120;

[33] V. A. Minuță, *Group graded Morita equivalences for wreath products*, acceptat spre publicare în Stud. Univ. Babeș-Bolyai Math., 1–11, arXiv:2007.07526;

[34] H. Nagao, Y. Tsushima, *Representations of Finite Groups*, Academic Press, New York (1989), DOI:10.1016/C2013-0-11223-8;

[35] L. C. Puig, *On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences between Brauer Blocks*, Progr. Math. Vol. 178, Birkhäuser, Basel (1999), DOI:10.1007/978-3-0348-8693-2;

[36] B. Späth, *A reduction theorem for Dade's projective conjecture*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **19** (2017), 1071–1126, DOI:10.4171/JEMS%2F688;

[37] B. Späth, *Inductive Conditions for Counting Conjectures via Character Triples*, În: Representation theory–current trends and perspectives, EMS Ser. Congr. Rep., Zürich (2017), 665–680, DOI:10.4171/171-1/23;

[38] B. Späth, *Reduction theorems for some global-local conjectures*, În: Local Representation Theory and Simple Groups, EMS Ser. Lect. Math., Zürich (2018), 23–61, DOI:10.4171/185-1/2;

[39] A. Turull, *Endoisomorphisms and character triple isomorphisms*, J. Algebra **474** (2017), 466–504, DOI:10.1016/j.jalgebra.2016.10.048;

[40] A. Zimmermann, *Self-tilting complexes yield unstable modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 2707–2724, DOI:10.1090/S0002-9947-02-02996-3.