



# Sincronizare în sisteme de oscilatori Kuramoto cuplați local

Rezumat

TEZĂ DE DOCTORAT

ELABORAT DE

DÉNES KÁROLY

PENTRU OBȚINEREA TITLULUI DE

DOCTOR ÎN FIZICĂ

CONDUCĂTOR DE DOCTORAT: PROF. DR. NÉDA ZOLTÁN

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI

CLUJ-NAPOCA, ROMÂNIA

NOIEMBRIE 2020



## ABSTRACT

Teza prezintă rezultate originale pentru dinamica de sincronizare observabile în sisteme de oscilatori Kuramoto cuplați local într-o topologie uni-dimensională. Deși tematica considerată are deja o istorie în literatura de specialitate, problema a fost revizitată din perspective diferite. Teza studiază stările de tip „phase-difference blocking” (blocare a diferențelor de fază), unde oscilatorile realizează oscilații cu aceeași frecvență, ajungând astfel la o diferență de fază constantă între oscilatori învecinate. În cazul sistemelor de oscilatori omogene s-a determinat analitic toate tipurile de stări blocate în fază. Dinamica acestor sisteme a fost studiată pentru a prezice din stările inițiale dezordonate stările finale. Posibilitatea de a prezice starea finală a condus la două metode relativ simple de utilizat. Performanța metodelor a fost comparate în cazul sistemelor omogene și heterogene. În următorul pas sistemele studiate au fost generalizate prin introducerea întârzierii în interacțiune între oscilatori. Prin această modificare dimensionalitatea problemei a fost crescut puternic. Scopul acestei modificări a fost de determina efectul întârzierii asupra stabilității locale și asupra bazinelor de atracție a stărilor blocate în fază. S-a stabilit că aceste proprietăți ale stărilor sunt dependente de parametrii relevanți a problemei, rezultând într-un scenariu foarte diferit față de sisteme fără întârziere. Deoarece sisteme întârziate sunt echivalente cu sisteme de dimensionalitate infinită, s-a studiat și cazul stărilor de tip cicluri de limită și/sau stări chimera.

**CUVINTE CHEIE:** autoorganizare, sincronizare spontană, oscilatori cuplați, blocare în fază, modelul Kuramoto, prezicerea stărilor finale, bazine de atracție, interacțiune întârziată în timp.

# Cuprinsul tezei de doctorat

1	INTRODUCTION	I
2	LOCALLY COUPLED KURAMOTO OSCILLATORS WITHOUT TIME DELAY IN THE INTERACTIONS	7
2.1	Emergent patterns . . . . .	7
2.1.1	Stationary states . . . . .	8
	The phase shift . . . . .	9
	Case (a) states . . . . .	11
	Case (b) states . . . . .	12
	Case (c) states . . . . .	13
2.1.2	Stability analysis of phase-locked states . . . . .	14
2.2	Dynamics and final state prediction . . . . .	23
2.2.1	Basins of attraction . . . . .	24
2.2.2	Phase space and time evolution . . . . .	25
2.2.3	The generalized order parameter . . . . .	26
2.2.4	Final state prediction . . . . .	30
2.2.5	Heterogeneous systems . . . . .	35
3	RINGS OF KURAMOTO OSCILLATORS WITH TIME-DELAYED COUPLING	39
3.1	Symmetric phase locked states . . . . .	39
3.1.1	Derivation of phase locked states . . . . .	40
3.1.2	Stability of frequencies . . . . .	41
3.2	Basins of attractions and bifurcations . . . . .	45
3.3	Non-fixpoint type patterns . . . . .	51
4	CONCLUSIONS & OUTLOOK	57
	PUBLICATIONS RELATED TO THE THESIS	61
	BIBLIOGRAPHY	63

# Cuprinsul rezumatului

1	INTRODUCERE	1
2	OSCILATORI KURAMOTO CUPLAȚI LOCAL FĂRĂ ÎNTÂRZIERE	3
2.1	Structuri emergente . . . . .	3
2.2	Dinamica sistemului și posibilitatea unor predicții . . . . .	6
3	OSCILATORI KURAMOTO CUPLAȚI LOCAL CU ÎNTÂRZIERE ÎN INTERACȚIUNI	10
3.1	Stări simetrice blocate în fază . . . . .	10
3.2	Bazine de atracție și bifurcații . . . . .	12
3.3	Structuri dinamice tranziente . . . . .	15
4	CONCLUZII	18
	ARTICOLE PUBLIFICATE	20
	BIBLIOGRAFIE SELECTATĂ	21

# 1

## Introducere

Sincronizarea spontană<sup>1</sup> este un fenomen fascinant, prezent în diferite domenii ale științelor de la biologie<sup>2,3</sup> până la inginerie<sup>4,5</sup>. Prima atestare documentabilă a fenomenului a fost făcută de fizicianul olandez Christiaan Huygens în sec. al XVII-lea când a observat sincronizarea ceasurilor cu pendul suspendate de pe aceeași suport, fenomen denumit de el “simpatia ciudată” a ceasurilor<sup>6</sup>. După aproape trei secole, în 1958 Norbert Wiener a studiat un fenomen similar în undele cerebrale umane în domeniul frecvențelor mici, numit și ritmul alfa<sup>7</sup>. Ipoteza lui Wiener a fost că creierul are încorporat oscilatori biologice cu frecvențe naturale diferite care sunt cuplați și interacția lor produce activitatea puternică în ritmurile alfa. O descriție mai elaborată a sincronizării oscilatorilor biologice a fost realizată de biologul Arthur Winfree în 1967<sup>8</sup>. El a introdus pentru prima dată aproximația de fază a oscilatorilor. În modelul său, Winfree a utilizat oscilatori clasici cu frecvențe naturale diferite cuplați global. Rezultatele lui au arătat că procesul de sincronizare a oscilatorilor se aseamănă cu tranzițiile de fază bine cunoscute în termodinamică. Astfel, inspirat de munca lui Winfree, în 1975 fizicianul japonez Yoshiki Kuramoto, împreună cu studentul lui I. Nishikawa, a elaborat un model de sincronizare, rezolvabil analitic care a produs rezultatele similare<sup>9</sup>. În modelul lui, Kuramoto a folosit oscilatori heterogeni, iar printr-o metodă self-consistentă a arătat că există o intensitate de cuplaj critic deasupra căruia stări sincronizate parțial încep să apară. În ciuda faptului că problema părea rezolvată, rezultatele lui Kuramoto au lăsat mai multe întrebări nerăspunse<sup>10,11</sup>.

Modelul Kuramoto a declanșat foarte multe studii în domeniul fizicii statistice și dinamicii nelineare. A devenit instrumentul fundamental în studiul și modelarea comportamentelor complexe. Împreună cu dezvoltarea calculatoarelor, experimentele computaționale în acest domeniu au devenit mai complexe și realiste. Modularitatea oscilatorilor permite implementarea unor topologii de interacțiune arbitrare<sup>12,13</sup>. Progresul recent în știința rețelelor<sup>14,15</sup> a inspirat multe studii pe modelul Kuramoto implementate pe diferite rețele complexe<sup>16-20</sup>. De-a lungul timpului diferite variante a modelului au apărut folosind diferite modalități de cuplare<sup>21</sup>, frustrații în interacțiune<sup>22</sup>, zgomot<sup>23</sup> sau câmpuri externe<sup>24</sup>. În 2002 Kuramoto și Battogtokh au descoperit o stare inedită într-un sistem de oscilatori cuplate nonlocal, unde domenii ordonate și dezordonate puteau coexista<sup>25</sup>. Aceste stări au fost numite mai târziu stări chimera<sup>26</sup>. De atunci studiul stărilor chimera a devenit ramură activă a dinamicii nelineare, demonstrând încă o dată

versatilitatea celebrului model. Studii experimentale au descoperit noi forme de stări chimera<sup>27-31</sup>. Sincronizarea la distanță, o formă nouă de sincronizare, a fost tot confirmat în sisteme alcătuite de oscilatori Kuramoto<sup>32,33</sup>. Toate acestea indică faptul că „cariera” de aproape cincizeci de ani a modelului este încă departe de sfârșit.

În teza elaborată sunt cuprinse rezultatele noastre obținute pe sisteme de oscilatori Kuramoto cuplați local. Prima parte a tezei conține rezultatele pe sisteme inelare publicate în revistele *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*<sup>34</sup> și *Romanian Reports in Physics*<sup>35</sup>. Aceste studii sunt concentrate pe tematica oscilatorilor omogene și a stărilor blocate în fază. Toate stările de acest tip sunt determinate, iar stabilitatea lor a fost studiată printr-o metodă proprie. Posibilitățile de a prezice starea finală au fost investigate și două metode de predicție au fost introduse. S-a arătat că metodele prezentate pot fi adaptate și pentru sisteme heterogene. Partea a doua prezintă rezultatele obținute pe sisteme cu interacțiuni întârziate. A fost studiat efectul întâzierii asupra stabilității stărilor și asupra bazinelor de atracții a acestor stări. Observațiile noastre pe sisteme unidimensionale de oscilatori Kuramoto cuplați local cu interacțiuni întârziate au fost publicate în revista *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*<sup>36</sup>.



# 2

## Oscilatori Kuramoto cuplați local fără întârziere

### 2.1 STRUCTURI EMERGENTE

Sistemele studiate sunt alcătuite din  $N$  ecuații diferențiale ordinare, cuplate printr-o funcție armonică care reprezintă interacțiunea între oscilatori<sup>37-39</sup>:

$$\dot{\theta}_i = \omega_0 + K[\sin(\theta_{i-1} - \theta_i) + \sin(\theta_{i+1} - \theta_i)], \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.1)$$

$N$  reprezintă numărul oscilatorilor, iar  $\theta_i$  este faza oscilatorului cu indice  $i$ . Frecvența proprie  $\omega_0$  este aceeași pentru fiecare oscilator și  $K$  este constanta de interacțiune cu vecinii. Pentru a obține o structură 1D inelară, condițiile de margine sunt periodice:  $\theta_0 = \theta_N$  și  $\theta_{N+1} = \theta_1$ . Sistemul devine una omogenă dacă ecuațiile sunt transformate într-un cadru de referință rotațional:

$$u_i(t) = \theta_i(t) - \omega_0 t. \quad (2.2)$$

Folosind variabila  $u_i(t)$  se obține sistemul:

$$\dot{u}_i = K[\sin(u_{i-1} - u_i) + \sin(u_{i+1} - u_i)] = F(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}). \quad (2.3)$$

Se observă că, un astfel de sistem de ecuații diferențiale poate fi obținută ca un gradient a unui câmp scalar, adică un potențial:  $\dot{u}_i = -\partial V / \partial u_i$ <sup>40</sup>. În sisteme gradiente stările staționare pot fi numai puncte fixe, iar cicluri limite sau atractori haotice nu sunt permise<sup>41</sup>. De asemenea punctele fixe corespund punctelor staționare a potențialului care pot fi: puncte de minim, maxim sau punct șa.

Punctele fixe pot fi găsite prin rezolvarea ecuației de forma  $\dot{u}_i = 0$ . Pentru trei oscilator consecutivi ( $u_{i-1}$ ,  $u_i$  și  $u_{i+1}$ , numit și triplet), această condiție este îndeplinită în unul dintre cele două cazuri de mai jos:

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = 2k_i\pi, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad (2.4)$$

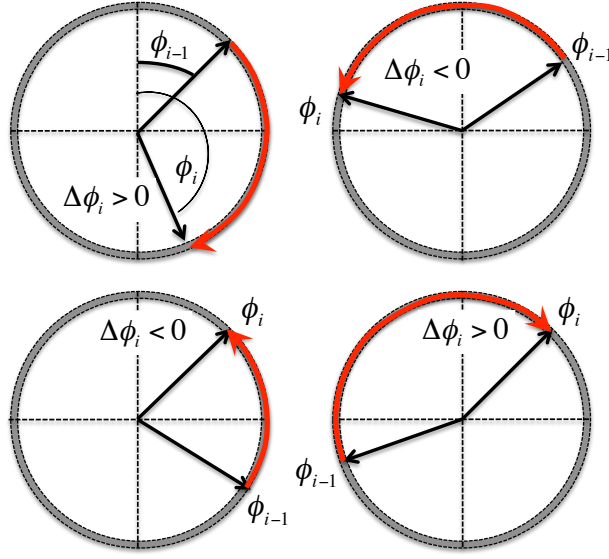


Figure 2.1: Vizualizarea variabilei  $\Delta\phi_i$ , numit diferență de fază, introdus în ecuația (2.7).

$$u_{i+1} - u_{i-1} = (2q_i + 1)\pi, \quad q_i \in \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

Deoarece într-un sistem sunt  $N$  astfel de tripleți, pentru fiecare, unul dintre condiții (2.4) sau (2.5) trebuie îndeplinită. Există astfel mai multe posibilități de a ajunge la  $\dot{u}_i = 0$  pentru fiecare  $i$ . Pentru a clasifica aceste posibilități, se introduce trei clase de puncte fixe:

- (a) condiția (2.4) este îndeplinită pentru fiecare  $i$ ,
- (b) condiția (2.5) este îndeplinită pentru fiecare  $i$ ,
- (c) pentru unele  $i$  condiția (2.4), iar pentru restul ecuația (2.5) este îndeplinită

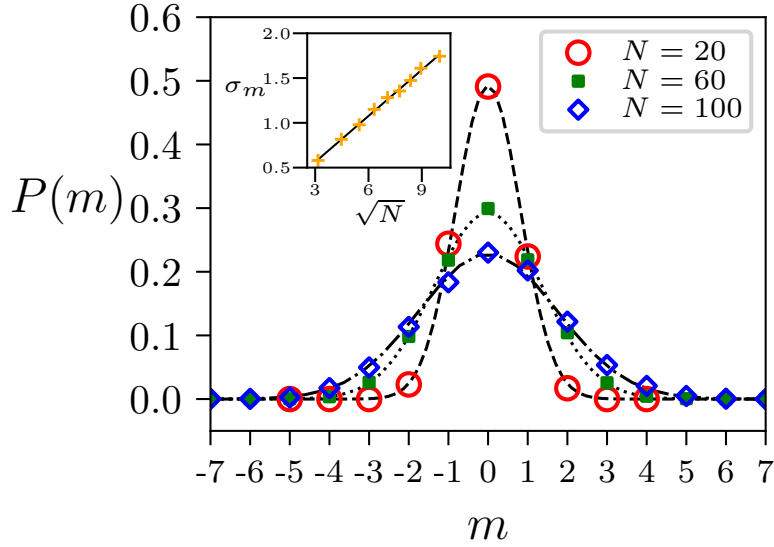
Clasele (a) și (b) conțin tripleți simetrici, iar în cazul clasei (c) tripletele sunt de obicei dezechilibrate sugerând o rupere spontană a simetriei.

Variabile  $u_i$  se transformă, pentru a obține faze între 0 și  $2\pi$ :

$$\phi_i = u_i \bmod 2\pi. \quad (2.6)$$

Cu ajutorul acestei  $\phi_i$  se introduce *diferența de fază*, notată  $\Delta\phi_i$ , pentru a caracteriza poziția relativă a oscilatorilor învecinate. Diferența de fază este echivalent cu o distanță cu două sensuri pe perimetrul unui cerc cu rază de unitate, având valori între  $-\pi$  și  $\pi$ . Se calculează cu ajutorul funcției de *parte întreagă* (*floor function* în engleză):

$$\Delta\phi_i = (\phi_i - \phi_{i-1}) - 2\pi \left\lfloor \frac{\phi_i - \phi_{i-1} + \pi}{2\pi} \right\rfloor. \quad (2.7)$$



**Figure 2.2:** Distribuția probabilității de apariție a stărilor dinamice staționare simetrice pentru diferite mărimi de sisteme. Distribuțiile pot fi aproximați cu distribuția Gauss. Probabilitățile  $P(m)$  sunt proporționale cu mărimea bazinelor de atracție ale atractorilor, caracterizat de  $m$ . Figura din interiorul graficului prezintă deviația standard al distribuțiilor în funcție de rădăcina pătrată a lui  $N$ . Fiecare distribuție este obținut folosind 5000 stări inițiale aleatoare.  $K = 1.5$ ,  $\omega_0 = 2$ .

O vizualizare mai simplă a diferenței de fază se vede pe Figura 2.1. Cum se vede,  $\Delta\phi_i$  este calea cea mai scurtă pe perimetrul cercului între vârfurile vectorilor care reprezintă oscilatorii. Valoarea lui este pozitivă în sens orar și negativă în sens trigonometric. Pentru a evita ambiguitatea la valorile  $-\pi$  și  $\pi$ , diferența de fază este definită pe intervalul  $[-\pi, \pi)$ .

Din cauză că limitele sistemului sunt periodice suma totală a diferențelor de fază este întotdeauna un multiplu de  $2\pi$ :

$$\sum_{i=1}^N \Delta\phi_i(t) = \sum_{i=1}^N (\phi_i(t) - \phi_{i-1}(t)) - 2\pi \sum_{i=1}^N \left\lfloor \frac{\phi_i(t) - \phi_{i-1}(t) + \pi}{2\pi} \right\rfloor = 2m(t)\pi. \quad (2.8)$$

Parametrul întreg  $m$  se numește *winding number*. Deoarece  $\Delta\phi_i$  are valori mărginite, numărul aceasta este mărginit pe mulțimea numerelor întregi:

$$\left\lceil -\frac{N}{2} \right\rceil \leq m(t) < \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \quad (2.9)$$

unde  $\lceil x \rceil$  (*ceiling function*) este  $-N/2$ , dacă  $N$  este un număr par și  $-(N-1)/2$ , dacă  $N$  este impar, în timp ce  $\lfloor x \rfloor$  (*floor function*) se evaluează la  $N/2$  dacă  $N$  este par și  $(N-1)/2$ , dacă  $N$  este impar.

Reformulând ecuația (2.4) folosind  $\Delta\phi$ , se obține condiția pentru stările de clasa (a):

$$\Delta\phi_{i+1} = \Delta\phi_i. \quad (2.10)$$

În această clasă diferența de fază este aceeași între toți oscilatori învecinați, deci indicii se pot omite:  $\Delta\phi_i = \Delta\phi$ . Cu ajutorul numărului „de răsucire”  $m$ , se poate determina toate valorile posibile a diferenței de fază:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta_N}{N} = 2\frac{m}{N}\pi. \quad (2.11)$$

Dependența de timp nu este indicat, deoarece aceste stări sunt staționare. În consecință, stările de clasa (a) pot fi caracterizate de un singur parametru numărul de răsucire  $m$ . Ținând cont de faptul că diferențe de fază sunt aceeași, sincronizarea clasică în fază se încadrează în această clasă având  $m = 0$ . Sincronizarea în antifază, unde  $\Delta\phi = -\pi$ , corespunde cazului  $m = -N/2$ .

Rezultatele obținute pe stabilitatea locală arată că punctele fixe stabile aparțin clasei (a), având numere de răsucire specificate:

$$-\frac{N}{4} < m < \frac{N}{4}, \quad (2.12)$$

sau diferență de fază:

$$-\frac{\pi}{2} < \Delta\phi < \frac{\pi}{2}. \quad (2.13)$$

În toate celelalte cazuri stările din clasa (a) sunt instabile. Stări din clasele (b) și (c) nu sunt stabile după cum s-a arătat în teza și în consecință nu vom discuta mai mult despre aceste puncte fixe

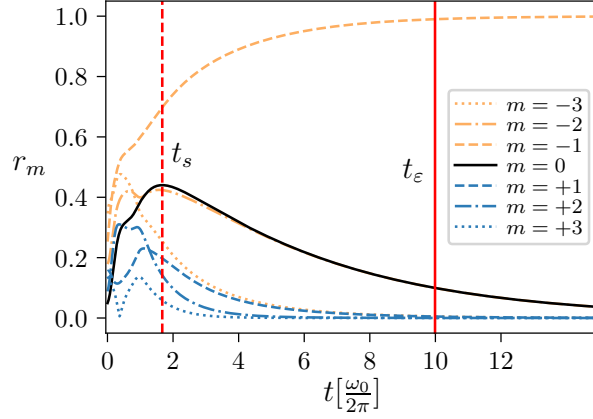
## 2.2 DINAMICA SISTEMULUI ȘI POSIBILITATEA UNOR PREDICȚII

Primul pas în studiul dinamicii este de a examina bazinele de atracție a stărilor stabile. Bazinul de atracție este mulțimea punctelor din spațiul fazelor din care sistemul va evolua spre aceeași atractor. Integrarea numerică a ecuației (2.1) poate fi folosit pentru a determina dimensiunea relativă a bazinelor, rezolvând ecuațiile pornind de la stări inițiale aleatoare. Probabilitatea fiecărui punct fix va fi proporțională cu dimensiunea bazinului de atracție. Rezultatele unui astfel de experiment computațional este vizibilă pe Figura 2.2. Distribuția probabilităților de apariție a stărilor indică o distribuție normală centrată la sincronizarea clasică în fază, adică starea cu  $m = 0$ . Deviația standard este proporțională cu rădăcina pătrată al numărului de oscilatori<sup>40,42</sup>.

Pentru a studia procesul sincronizării s-a generalizat parametrul complex de ordine introdus de Kuramoto<sup>9</sup>. Noul parametru de ordine depinde și de numărul de răsucire  $m$ , astfel fiecare stare are un parametru proprie<sup>34</sup>: te

$$r_m(t)e^{i\psi_m(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i[\theta_j(t) - (j-1)\frac{2m\pi}{N}]}. \quad (2.14)$$

Fiecare parametru va avea valori absolute între 0 și 1. Poate fi demonstrat că dacă sistemul se apropie de o stare cu numărul de răsucire  $m^*$ , parametrul lui de ordine  $r_{m^*}$  va crește până 1, iar celelalte parametrii de ordine  $r_{m \neq m^*}$  vor scădea spre 0.



**Figure 2.3:** Dinamica parametrilor de ordine generalizate  $r_m$ . Numărul oscilatorilor este  $N = 30$ , însă paramterii de ordine cu  $|m| \geq 4$  nu sunt afișate pentru a menține transparența. Liniile verticale indică momentele de predicție ale celor două metode. Momentul  $t_s$  este asociat cu derivatele parametrilor de ordine, iar  $t_\varepsilon$  arată momentul de trecere peste valoarea limită definită în ecuația (2.15).

Dinamica parametrilor de ordine sugerează o metodă simplă de a prezice starea finală pornind de la stări inițiale dezordonate. Această metodă presupune o toleranță  $\varepsilon > 0$  și dacă unul dintre valorii  $r_m$  se apropie de 1 sub această toleranță, starea respectivă va fi selectată. Pentru o toleranță  $\varepsilon > 0$  destul de mică presupunem următoarele:

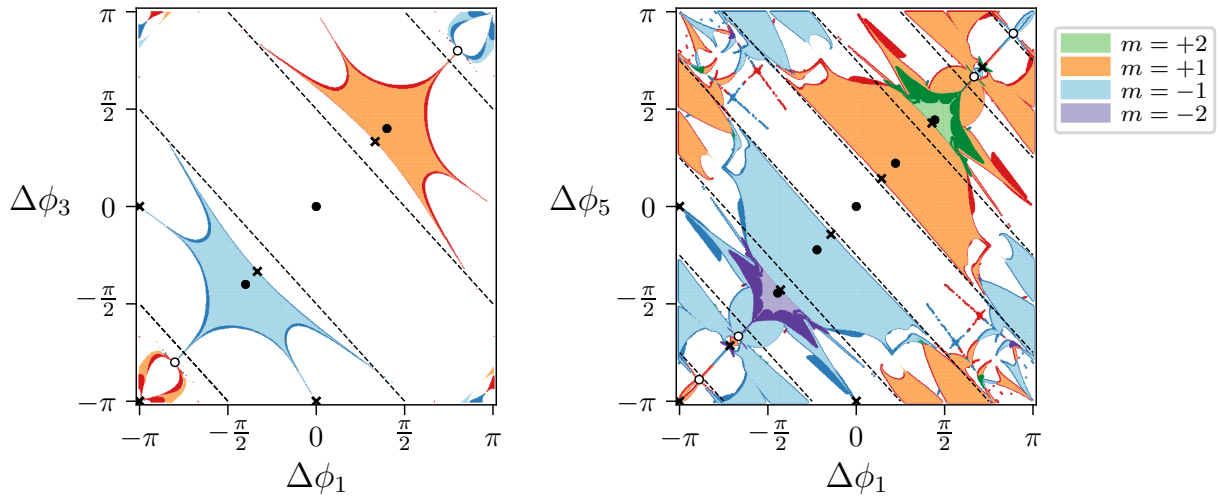
$$\text{if } r_{m^*}(t) > 1 - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r_{m^*}(t) = 1. \quad (2.15)$$

Parametrul  $1 - \varepsilon$  este numit și valoarea limită.

Evoluția în timp ale parametrilor de ordine este prezentată pe Figura 2.3. Cu linie continuă verticală este ilustrată momentul de selecție  $t_\varepsilon$  când unul dintre parametre trece peste valoarea limită de 0.99. Limita respectivă este destul de înaltă pentru a considera o predicție corectă. Pe de altă parte o limită prea înaltă rezultă în pierdere de timp computațional, cum se vede și prin poziția avansată a liniei de  $t_\varepsilon$ . Deoarece ultima etapă a dinamicii este o relaxare exponențială, unde numai un parametru crește lent, iar altele decresc, ar fi ideal de a identifica momentul mai rapid. Teoretic am putea identifica un moment astfel că după acest moment numai parametrul stării selctate  $m^*$  va crește, adică:

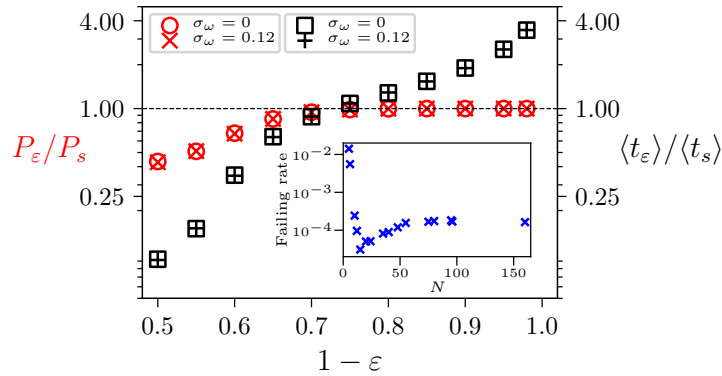
$$\begin{aligned} \dot{r}_{m^*}(t \geq t_s) &> 0 \\ \dot{r}_{j \neq m^*}(t \geq t_s) &< 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Acest moment  $t_s$  este marcat cu linie întreruptă verticală pe Figura 2.3. Folosind argumentele anterioare se propune o nouă metodă de predicție, anume: starea  $m^*$  este selectată dacă numai parametrul de ordine  $r_{m^*}$  crește. Rezultatele acestei metode sunt însă influențate de punctele șa de clasa (c) care conduc la predicții eronate în anumite cazuri. Punctele șa sunt atractive din anumite direcții, iar sistemul apropiindu-se un acest fel de punct va suferi încetinirea exponențială rezultând într-o stare metastabilă.



**Figure 2.4:** Secțiunea transversală a bazinelor de atracție pentru diferite mărimi de sisteme:  $N = 5$  (stânga) and  $N = 9$  (dreapta). Puncte negre marchează stările stabile, iar cercurile indică stările instabile de clasa (a). Crucele reprezintă punctele șa de clasa (c). Spațiile albe corespund bazinului sincronizării în fază ( $m = 0$ ), iar ariile colorate aparține stărilor cu  $m \neq 0$ . Culoarele deschise reprezintă bazinele obținute cu o limită înaltă ( $1 - \varepsilon = 0.999$ ), iar culoarele închise indică teritorii unde metoda bazată pe derivata parametrului de ordine produce predicții greșite.

Pentru a vizualiza aceste anomalii, s-a comparat fiabilitatea a celor două metode, proiectând diferențe pe o secțiune transversală al spațiului de fază  $\Delta\phi$ . Figura 2.4 prezintă rezultatele unor astfel de experimente pentru diferite  $N$ . Secțiunea transversală a fost construită folosind constrângerea din ecuația (2.8)



**Figure 2.5:** Compararea celor două metode de predicție. Indicatoarele roșii prezintă raportul de precizie a celor două metode, iar indicatoarele negre semnalizează raportul timpului medie de predicție celor două metode. Simulări au fost efectuate și în cazul oscilatorilor cu frecvențe diferite, având o distribuție de frecvență cu deviația  $\sigma_\omega$  diferit de zero. Figura interioară arată rata de eșec al metodei cu derivatele parametrului de ordine în funcție de numărul oscilatorilor.  $N = 18$ ,  $K = 50$ . Intensitatea de cuplaj critic în cazul oscilatorilor heterogene a fost  $K_c = 42$ .

care limitează spațiul  $\Delta\phi$ . Conform acestuia, spațiul diferențelor de fază este alcătuit din hiperplane înclinate și paralele  $N - 1$  dimensionale încorporate într-un hipercub  $N$ -dimensional. Pentru a vizualiza și stările staționare s-a considerat o secțiune paralelă cu diagonala hipercubului (Figura 2.4).

În Figura 2.4 spațiile colorate cu culori deschise sunt bazinele construite cu toleranța foarte mică ( $\varepsilon = 0.001$ ), astfel pot fi considerate corecte, iar culorile închise marchează punctele unde metoda cu derivatele parametrilor produce predicții diferite față de control. Cum era de așteptat erorile apar în apropierea punctelor șa, nodurile instabile și limitele bazinelor de atracție.

Aparent, problema de a selecta metoda potrivită se reduce la un compromis între eficiență de timp și precizie (Fig. 2.5). Prima metodă poate produce rezultate 100% corecte cu o toleranță potrivită, însă timpul necesar pentru predicție va deveni foarte lung. Pe de altă parte, metoda cealaltă nu necesită atât de mult timp, însă din cauza punctelor șa această metodă va produce și predicții greșite. Cum se vede pe figura interioară (Fig. 2.5) rata de eșec este aproape neglijabil, dar nu devine zero.

# 3

## Oscilatori Kuramoto cuplați local cu întârziere în interacțiuni

### 3.1 STĂRI SIMETRICE BLOCATE ÎN FAZĂ

Ecuțiile studiate în acest capitol sunt generalizări ale ecuației (2.1) introducând o întârziere de  $\tau > 0$  în interacțiune:

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_0 + K[\sin(\theta_{i-1}(t - \tau) - \theta_i(t)) + \sin(\theta_{i+1}(t - \tau) - \theta_i(t))], \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.1)$$

Notățiile sunt similare cu cazul sistemelor fără întârziere, iar limitele sunt periodice pentru a menține o topologie inelară. Cu introducerea întârzierii a crescut numărul parametrilor libere a sistemului, însă prin rescalarea timpului cu  $\tau$  se obține un sistem adimensional cu trei parametri împreună cu  $N$ , numărul oscilatorilor:

$$\frac{d\theta_i(u)}{du} = \omega + \kappa[\sin(\theta_{i-1}(u - 1) - \theta_i(u)) + \sin(\theta_{i+1}(u - 1) - \theta_i(u))]. \quad (3.2)$$

Frecvența naturală adimensională va fi  $\omega = \omega_0\tau$ , iar intensitatea de cuplarea adimensională este  $\kappa = K\tau$ . Timpul de întârziere devine unitate în această reprezentare.

Stările blocate în fază pot fi scrise astfel:

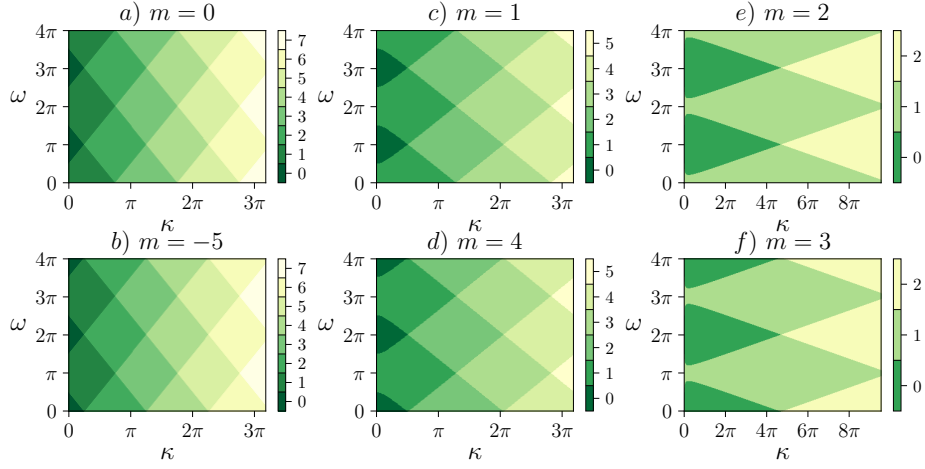
$$\theta_i(u) = \Omega u + \phi_i. \quad (3.3)$$

Frecvența finală adimensională este notată cu  $\Omega$ .

Stările de clasa (a) necesită diferențe de faze  $\phi_i - \phi_{i-1} = \Delta\phi$  constante. Substituind această soluție în ecuația (3.2) va rezulta ecuația pentru frecvența finală:

$$\Omega = \omega - 2\kappa \cos(\Delta\phi) \sin(\Omega). \quad (3.4)$$





**Figure 3.1:** Numărul frecvențelor  $\Omega$  stabile în funcție de  $\omega$  și  $\kappa$  (conform codului de culori atașate). Numărul zero a frecvențelor stabile înseamnă că starea respectivă este instabilă pentru parametrii dați. Numere de răsucire  $m$  indică structuri cu  $\Delta\phi = 2m\pi/N$ . Frecvențele au fost obținute prin rezolvarea ecuației (3.4), iar stabilitatea a fost determinat cu ajutorul ecuației (3.6). Numărul oscilatorilor din sistem este  $N = 10$ .

Ecuția de mai sus este transcendentă, însă valoarea frecvenței finale este importantă, deoarece în acest caz valoarea diferenței de fază nu determină singur caracteristicile unei stări finale, pentru că sunt mai multe soluții,  $\Omega$  pentru un anumit  $\Delta\phi$ . Condiția (2.8) în relație cu suma diferențelor de fază se poate aplica și pentru sisteme întârziate, deoarece această este o consecință a topologiei și nu a dinamicii.

Pentru a determina stabilitatea stărilor, soluțiile sunt perturbate și evoluția acestor perturbații este studiată. Perturbarea este realizat în felul următor:

$$\theta_i(u) = \Omega u + \varphi_i + \epsilon \eta_i(u), \quad (3.5)$$

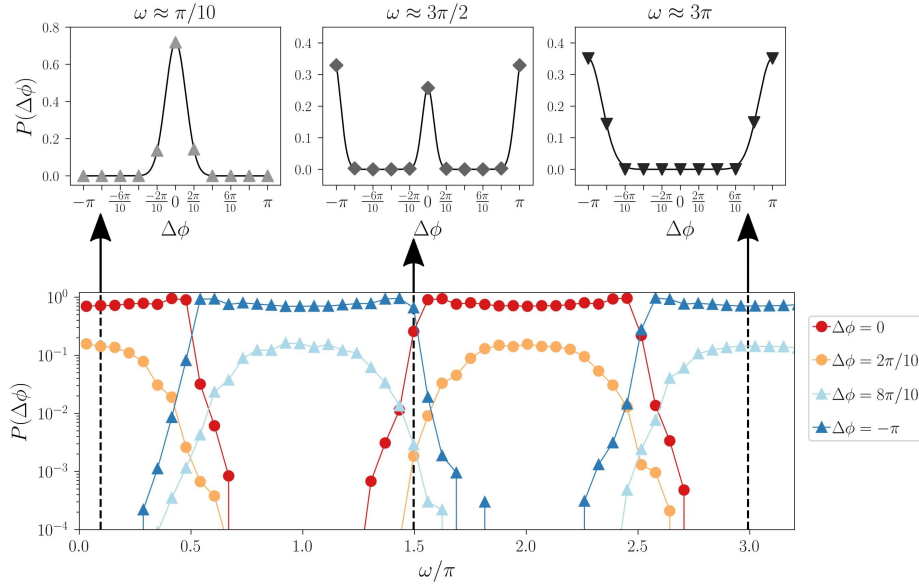
unde  $\epsilon \ll 1$ . Soluțiile perturbate sunt substituite în ecuațiile Eq. (3.2).

În acord cu studiul lui Earl și Strogatz<sup>43</sup> se poate arăta că stările sincronizate în fază ( $\Delta\phi = 0$ ,  $m = 0$ ) sunt stabile când  $\cos(\Omega) > 0$ , în timp ce sincronizarea în antifază este stabilă în cazul în care  $\cos(\Omega) < 0$ . Pentru celelalte stări perturbația va duce la un sistem de ecuații diferențiale lineare și întârziate care a fost rezolvat cu metoda lui Asl și Ulsoy folosind funcția matricială Lambert  $W$ <sup>44</sup>. În concluzie o stare caracterizată de  $\Omega$  și  $\Delta\phi$  este stabil dacă partea reală a următoarei cantități este negativ pentru toate valorile  $j$ :

$$\lambda_j = W_0 \left( 2(\kappa_c \cos \frac{2\pi j}{N} + i\kappa_s \sin \frac{2\pi j}{N}) e^{2\kappa_c} \right) - 2\kappa_c, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad (3.6)$$

unde  $\kappa_c = \cos(\Delta\phi) \cos(\Omega)$ ,  $\kappa_s = \sin(\Delta\phi) \sin(\Omega)$  și  $W_0$  este valoarea principală a funcției Lambert.

Calculând valorile  $\lambda$  din ecuația de mai sus se poate construi o hartă a stabilității în spațiul parametrilor  $\omega$  și  $\kappa$ . O astfel de vizualizare se vede pe Figura 3.1 pentru diferite stări  $m$  din clasa (a).



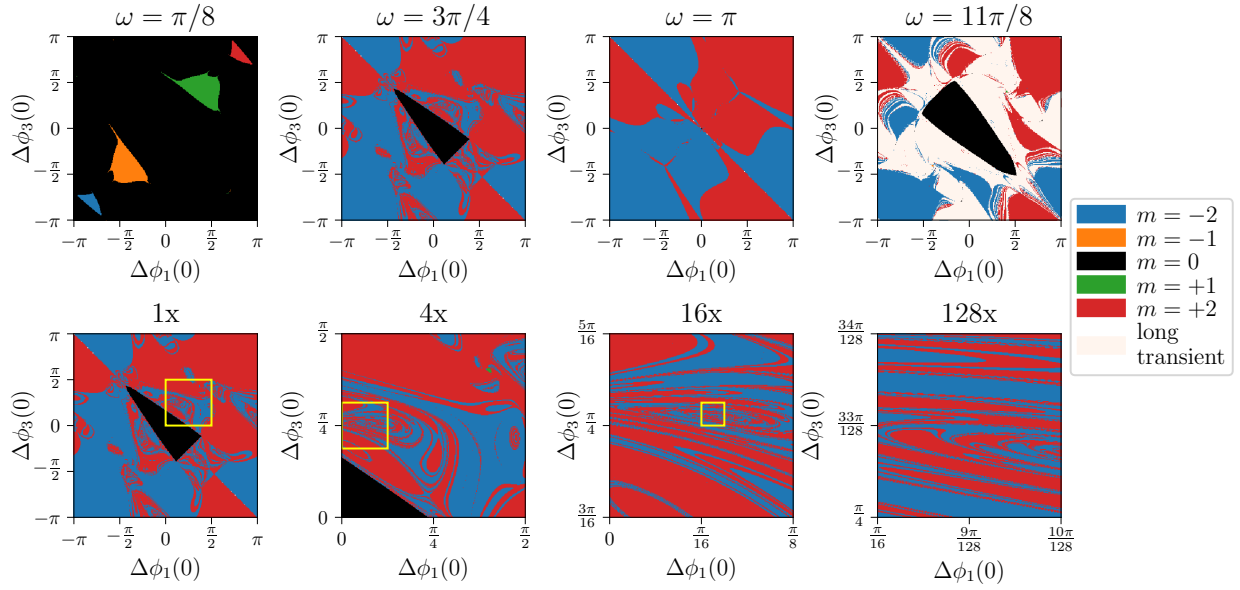
**Figure 3.2:** *Sus:* Probabilitatea detectării diferitelor stări blocate în fază pentru anumite valori  $\omega$ . *Jos:* Probabilitatea stărilor de clasă (a) în funcție de frecvență naturală,  $\omega$ . Din cauză că distribuțiile sunt simetrice numai jumătatea funcțiilor de distribuție sunt prezentate.  $N = 10$ ,  $\kappa = 2$ . Pentru fiecare  $\omega$  o mulțime de  $10^5$  stări inițiale au fost generate.

### 3.2 BAZINE DE ATRACȚIE ȘI BIFURCAȚII

Similar cu sistemele fără în fază fără întârziere se determină dimensiunea bazinelor de atracție. Inițializarea sistemelor cu întârziere este mai dificilă deoarece în locul fazelor  $\theta_i(0)$  este nevoie de o funcție inițială de tip  $\theta_i(u)$ ,  $u \in [-1, 0)$  pentru fiecare oscilator. În teza s-a folosit inițializarea cea mai naturală, unde oscilatori nu sunt cuplați pe perioada  $u \in [-1, 0)$  și după momentul  $u(0)$  se aplică interacția ca și în ecuația (3.2). Această metodă este echivalentă cu o interacțiune care se propagă cu o viteză finită. Fazele  $\theta_i(-1)$  sunt generate dintr-o distribuție uniformă pe intervalul  $[0, 2\pi)$ . Pentru detectarea stării finale s-a folosit parametrii de ordine definiți în ecuația (2.14) cu o toleranță suficient de mică. Câteva exemple de distribuții a mărimii bazinelor de atracție sunt vizibile pe panoul de sus al Figurii 3.2. Se vede că parametrii modelului au efecte serioase pe mărimea bazinelor. Diferența cea mai evidentă față de Figura 2.2 este că sincronizarea în antifază poate fi starea cea mai probabilă în timp ce sincronizarea în fază nici nu poate fi detectat pentru anumite valori de  $\omega$ .

Rezultatul unei analize mai adânci asupra bazinelor este prezentat în panoul de jos a Figurii 3.2. Așa cum se observă probabilitățile, adică dimensiunea bazinelor se schimbă periodic cu  $\omega$  acoperind patru ordini de mărime. Starea cea mai probabilă se schimbă periodic fiind ori  $m = 0$  sau  $m = -N/2$ . Este important de a nota că fluctuațiile nu sunt cauzate de stabilitatea stărilor, deoarece în acest domeniu pentru fiecare  $m$  exista cel puțin o frecvență  $\Omega$  stabilă.

Figura 3.2 arată o imagine globală a bazinelor de atracție, însă nu conține nicio informație despre structura acestor bazine. Folosind metoda similară cu cea utilizată în cazul Figurii 3.2 se poate împărți spațiul stărilor inițiale în bazinele de atracție. Astfel de secțiuni transversale reprezentative sunt prezentate

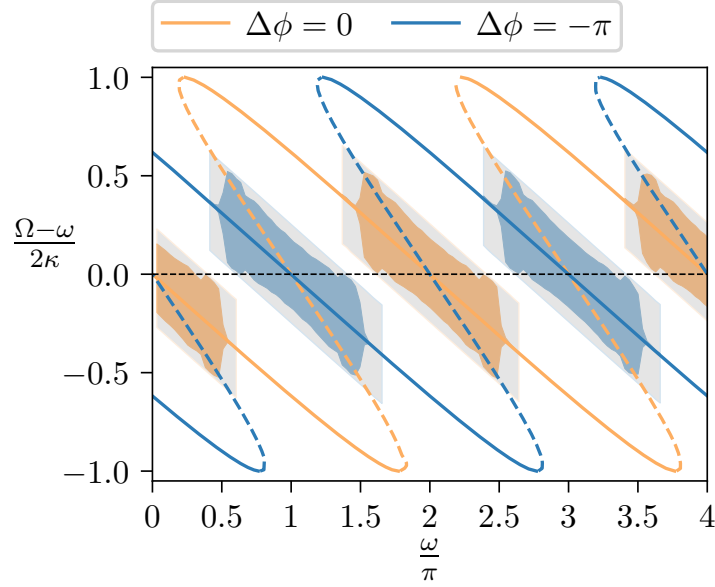


**Figure 3.3:** Proiecția bidimensională a secțiunii transversale a bazinelor de atracție în spațiul fazelor inițiale  $\Delta\phi_i(0)$  pentru un sistem de  $N = 5$  oscilatori. Intensitatea de cuplaj este  $\kappa = 2$ , iar frecvența naturală se variază după cum este indicat deasupra figurilor. *Sus:* Bazinele de atracție au structura compactă cu limite simple pentru frecvențe  $\omega = \pi/8$  și  $\omega = \pi$ . Stările dominante se schimbă cu variația lui  $\omega$ . Structuri fractalice sunt vizibile în cazul frecvențelor  $\omega = 3\pi/4$  și  $\omega = 11\pi/8$ . Stări tranziente de perioade lungi ( $u \sim 10^5 - 10^6$ ) sunt posibile fără a se observa o convergență către una din stările din clasa (a). Fiecare secțiune transversală a fost realizat pe o grilă de  $320 \times 320$  stări inițiale. *Jos:* O mărire consecutivă a bazinelor de atracție pentru  $\omega = 3\pi/4$ . Pătratele galbene indică părțile mărite pe figura din dreapta lui. Mărirea relativă la cea cu originalul (1x) sunt indicate deasupra fiecărei figuri.

în Figura 3.3 în cazul sistemelor cu  $N = 5$  oscilatori, cu frecvențe naturale diferite. După cum se vede granițele bazinelor pot fi simple sau pot avea trăsături asemănătoare cu fractali. Pentru a evidenția auto-similaritatea acestor domenii, figura conține și mărirea secțiunilor transversale, demonstrând că acest fenomen persistă peste cel puțin trei ordini de mărime. Un alt rezultat interesant este apariția stărilor tranziente de perioadă lungă ( $u \sim 10^5 - 10^6$  cel puțin) care nu este asemănătoare cu nici una dintre stările din clasa (a). În aceste perioade lungi niciun parametru de ordine nu trece peste limita impusă la detectarea stărilor sincronizate.

Până acum stările cu diferite frecvență  $\Omega$  aparținând aceași structuri  $m$  au fost neglijate, deoarece simulările s-au concentrat doar pe diferențe de fază. Pentru a înțelege multistabilitatea sistemului în spațiul  $\Omega$ , s-a construit o diagramă de bifurcație a stărilor sincronizate în fază și antifază (vezi Figura 3.4). Pentru parametrii considerați ( $\kappa = 2$ ,  $\omega \in [0, 4\pi]$ ), ambele stări au cel puțin o frecvență stabilă. Pentru diferențele de fază date frecvența este aceeași dacă parametrii nu se schimbă. Sistemul preferă frecvențe care au valori mai apropiate de frecvența naturală. Pentru a explica această preferință, au fost introduse două parametrii. Primul,  $\delta$  este proporțional cu diferența  $\Omega - \omega$ :

$$\delta = \cos(\Delta\phi) \sin(\Omega), \quad (3.7)$$



**Figure 3.4:** Diagrama de bifurcație ale diferitelor frecvențe finale  $\Omega$  pentru stările cu  $m = 0$  și  $m = -N/2$  în funcție de frecvența naturală  $\omega$ . Frecvențele stabile sunt marcate de linii continue, iar frecvențele instabile sunt indicate cu curbe întrerupte. Linia neagră întreruptă indică cazul  $\Omega = \omega$ . Grosimea regiunilor colorate corespunde probabilității de observare a frecvenței respective. Grosimea totală împreună cu zonele gri indică probabilitatea 1, iar grosimea 0 indică că frecvența nu a fost observată.  $N = 10$ ,  $\kappa = 2$ .

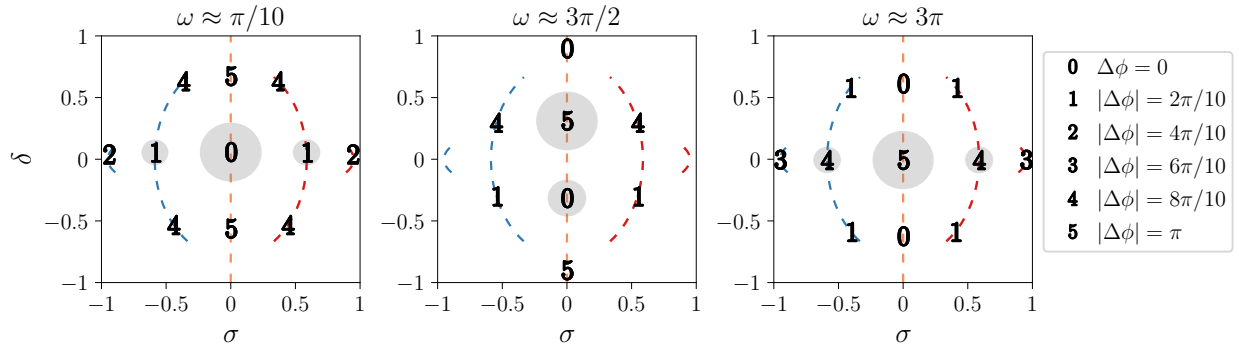
iar  $\sigma$  referă la simetria stării:

$$\sigma = \sin(\Delta\phi) \cos(\Omega). \quad (3.8)$$

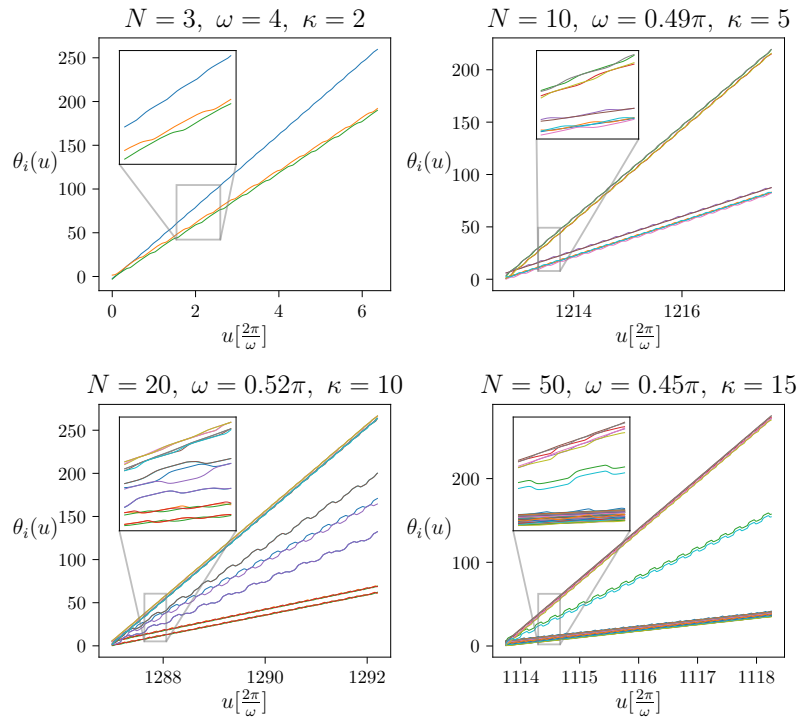
În acest context simetria se referă la egalitatea termenilor sinus din ecuația (3.2) în stări staționare, anume  $\sigma = \sin(-\Delta\phi_{i,i-1} - \Omega) - \sin(\Delta\phi_{i+1,i} - \Omega)$ . Parametrul de simetrie este 0 (simetrie totală) pentru sincronizarea în fază și antifază, în timp ce  $|\sigma| > 0$  pentru celelalte stări. Figura 3.5 indică relația între  $\sigma$  și  $\delta$ , arătând că relația dintre ei determină schimbarea dimensiunii bazinelor de atracție. Concluziile pot fi formulate ca o serie de reguli euristice simple care explic procesul de selecție a stărilor staționare:

- Starea selectată tinde să fie cât mai simetric posibil, fapt care explică de ce vârful distribuțiilor de probabilități sunt întotdeauna la 0 sau  $-\pi$ .
- Dacă sunt mai multe frecvențe pentru o stare cu aceeași  $|\sigma|$ , cel pentru care  $|\delta|$  minimal va fi preferat (vezi de exemplu linia  $\sigma = 0$ ).
- Stări având același  $|\sigma|$  și  $|\delta|$  au probabilități egale.

Aceste observații sugerează faptul că cu ajutorul lui  $\delta$  și  $\sigma$  se pot estima dimensiunile relative a bazinelor de atracție pentru un set de stări inițiale aleatoare.



**Figure 3.5:** Frecvențe  $\Omega$  stabile pentru diferite stări în planul  $\delta - \sigma$  calculate pentru trei valori de  $\omega$ . Cifrele corespund valorii absolute a parametrului de răsucire  $m$ . Linii întrerupte indică valorile  $\delta$  și  $\sigma$  pentru toate stările  $\{\Delta\phi, \Omega\}$  posibile. Ariile cercurilor este proporțională cu dimensiunea bazinelor stărilor  $\{\Delta\phi, \Omega\}$ .  $N = 10$ ,  $\kappa = 2$ .



**Figure 3.6:** Evoluția fazelor  $\theta_i(u)$  pentru diferite numări de oscilatori, demonstrând o nouă categorie de organizare a oscilatorilor. Folosind simetria translațională, fazele au fost rescalate între 0 și  $2\pi$ .

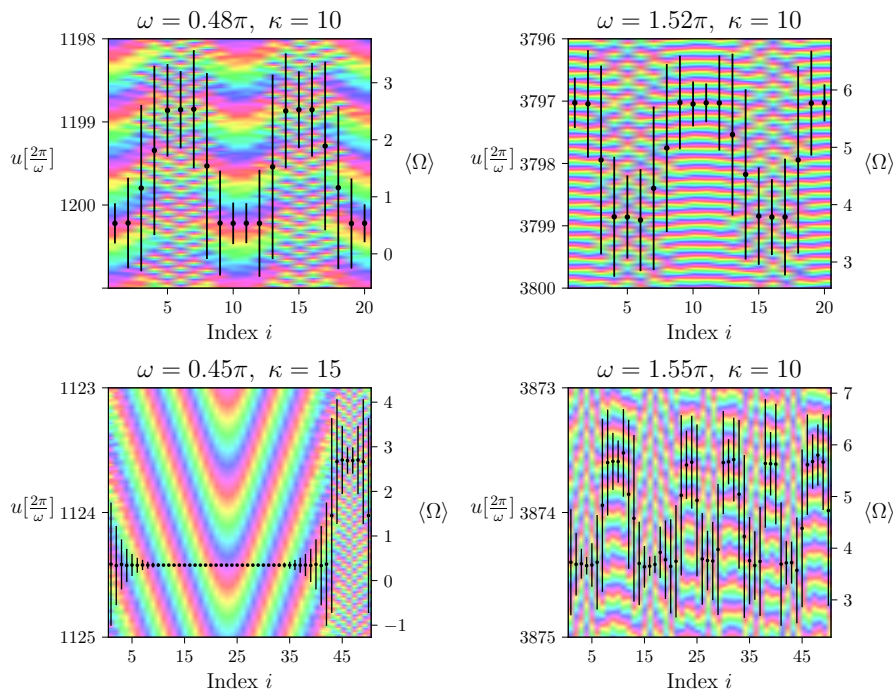
### 3.3 STRUCTURI DINAMICE TRANZIENTE

Sisteme de oscilatori cuplați local cu interacțiuni neîntârziate sunt gradiente. În sisteme gradiente stările staționare pot fi de trei feluri: noduri stabile sau instabile și puncte șa. În cazul sistemului (3.2) situația

este mai complicată, deoarece aceste ecuații nu pot fi obținute ca gradientul unui potențial. Chiar dacă subiectul principal al tezei este formarea stărilor blocate în fază, posibilitatea altor atractori nu poate fi exclusă. În următoarele sintetizăm pe scurt observațiile făcute prin simulări computaționale asupra unor stări mai complexe în inele de oscilatori Kuramoto întârziate. Având în vedere subiectul diferit al tezei oferim aici doar o prezentare descriptivă, cu scopul de a ilustra numai aceste structuri interesante fără multe explicații.

Parametrul de ordine generalizat, introdus în (2.14), a fost proiectat pentru a indica convergența spre stările staționare de clasa (a), nefiind potrivit pentru găsirea unor atractori. Totuși, lipsa convergenței, poate fi un indiciu că auto-organizarea sistemului ia o altă formă. Factorul cheie aici este durata intervalului de timp sub care niciun parametru de ordine nu indică convergența, care va fi folosit pentru a semnaliza apariția acestor structuri complexe emergente. Astfel, un interval suficient de lung ( $u \sim 10^5 - 10^6$ ) ar putea sugera un alt tip de auto-organizare.

Figura 3.6 prezintă patru serii temporare obținute pentru sisteme de diferite mărimi. În acest caz frecvențele nu sunt constante în timp, ei oscilează periodic în jurul unei frecvențe medii bine definite, care cauzează creșterea fazelor. Aceste frecvențe medii pot fi aceași pentru mai mulți oscilatori, astfel oscilatorii grupându-se pe baza frecvenței. Prezența acestui fenomen în sisteme mici cât și în sisteme cu mai multe oscilatori, sugerează că cauza nu poate fi creșterea numărului de oscilator, ci doar interacțiunea întârziată.



**Figure 3.7:** Reprezentarea spațiu-timp a dinamicii în cazul sistemelor cu  $N = 20$  (sus) și  $N = 50$  (jos) oscilatori. Se vede gruparea oscilatorilor cu aceeași frecvență medie. Faza este marcată de culorile curcubeului. Frecvența medie este reprezentată de puncte negre, iar deviația standard în timp al frecvenței este marcat cu bare de erori.

Pentru a obține o imagine mai detaliată este important analiza structurii locale ale acestor stări emergente. Reprezentările de tip spațiu timp unde starea oscilatorilor este marcat cu ajutorul culorilor servesc acest scop. O astfel de reprezentare este vizibilă pe Figura 3.7. Coexistența regiunilor cu diferite structuri de organizare sugerează stările chimera, însă seriile de timp arată periodicitate, care este mai degrabă o trăsătură a ciclurilor limită.

# 4

## Concluzii

Teza elaborată a studiat stările blocate în fază pentru sisteme de oscilatori Kuramoto cuplați local. Fenomenul blocare de fază, unde oscilatorii au frecvență constantă, este bine cunoscut în multe probleme fizice. Scopul acestei lucrări a fost de a investiga problema din perspective noi și anume predicția stărilor finale și influența parametrilor modelului asupra bazinelor de atracție.

În prima parte a tezei s-a prezentat rezultatele obținute pe sisteme simple de oscilatori Kuramoto omogene cuplați într-o topologie inelară. Inspirat de studii recente s-a dezvoltat un nou cadru teoretic și s-a reprodus rezultatele deja cunoscute pe aceste sisteme. Noutatea științifică a acestei părți este legat de predictibilitatea stărilor finale din stări inițiale aleatoare. Cu acest scop a fost introdus un parametru de ordine generalizat. Rezultatele arată că precizarea stărilor finale momentan practic nu este posibilă folosind numai starea inițială, deoarece pentru o predicție corectă și dinamica tranzientă trebuie studiată. Pentru precizarea stării finale s-au folosit două metode diferite, ambele folosind parametrul de ordine generalizat. Aceste metode au fost comparate din punctul de vedere al preciziei și eficienței de timp, indicând un compromis între aceste două calități. Efectul punctelor șa asupra dinamicii a fost discutată, dezvăluind că greșele de predicție sunt cauzate de către aceste stări staționare instabile. Partea a doua a tezei se ocupă cu efectul întârzierii în interacțiune asupra dinamicii și a stărilor staționare în inele 1D de oscilatori Kuramoto. Studiul stabilității a dovedit că fiecare stare staționară poate fi stabilă sau instabilă, în funcție de valorile parametrilor, în contrast cu sisteme considerate în prima parte a lucrării, unde stabilitatea este determinată de structura stării. Bazinele de atracție ale stărilor stabile au fost studiate tot din punctul de vedere al parametrilor modelului. Rezultatele arată că mărimea bazinelor de atracție poate varia chiar patru ordine de mărime, ceea ce înseamnă că unele stări stabile nu pot fi detectate. Se pare că frecvența aleasă are un rol important în relația dintre parametrii modelului și bazinele de atracție. În afară de stări blocate în fază și orbite închise pot să apare în sisteme întârziate, care pot fi interpretate ca cicluri limite sau stări chimera.

Modelul Kuramoto a devenit un model prototip în studiul sincronizării spontane. Dealungul timpului a fost folosit în diverse probleme interdisciplinare și a ajuns un instrument fundamental în domeniul sistemelor complexe. Literatura modelului este enormă și implică subiecte mai largi decât problema sin-



cronizării în sisteme de oscilatori cuplate global, o problemă simplă pentru care Kuramoto și Nishikawa a introdus modelul. În cazul unui model atât de fundamental este foarte dificil de a descoperi noi rezultate, însă uneori pentru aprofundarea cunoștințelor problemele deja cunoscute trebuie reconsiderate critic. Această teză a încercat să contribuie în această direcție analizând probleme deja cunoscute din perspective noi.

# Articole publicate direct legate de teza

## ARTICOLE ISI

- KÁROLY DÉNES, Bulcsú Sándor, and Zoltán Néda. Pattern selection in a ring of Kuramoto oscillators, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 78:104868, 2019. IF=4.115
- KÁROLY DÉNES, Bulcsú Sándor, and Zoltán Néda. On the predictability of the final state in a ring of Kuramoto rotators, *Romanian Reports in Physics*, 78:108, 2019. IF=1.84
- KÁROLY DÉNES, Bulcsú Sándor, and Zoltán Néda. Synchronization patterns in rigs of time-delayed Kuramoto oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 93:105505, 2021. IF=4.115

## CONFERINȚE

1. KÁROLY DÉNES, Bulcsú Sándor, and Zoltán Néda (6-10 June 2016). *Collective behavior patterns in a ring of Kuramoto-type rotators with time-delay*. [Prezentare orală]. XXXVI. Dynamics Days Europe, Corfu, Greece.
2. KÁROLY DÉNES, Bulcsú Sándor, and Zoltán Néda (10-14 July 2017). *Kuramoto oscillators in a ring-like topology*. [Prezentare poster]. SigmaPhi2017, International Conference on Statistical Physics, Corfu, Greece.
3. KÁROLY DÉNES, Bulcsú Sándor, and Zoltán Néda (19-23 March 2018). *Pattern selection in a ring of Kuramoto rotators*. [Prezentare poster]. Analysis and Modeling of Complex Oscillatory Systems, Barcelona, Spain.
4. KÁROLY DÉNES, Bulcsú Sándor, and Zoltán Néda (1-4 May 2018). *Collective modes of identical Kuramoto rotators in a ring-like topology*. [Prezentare poster]. MECO43: 43rd Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics, Kraków, Poland.
5. KÁROLY DÉNES, Bulcsú Sándor, and Zoltán Néda (14-17 June 2018). *Collective modes of identical Kuramoto rotators in a ring-like topology*. [Prezentare orală]. 12th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Cluj-Napoca, Romania.
6. KÁROLY DÉNES, Bulcsú Sándor, and Zoltán Néda (2-6 September 2019). *Bifurcations in systems of Kuramoto oscillators with delayed coupling*. [Prezentare poster]. XXXIX. Dynamics Days Europe, Rostock, Germany.
7. KÁROLY DÉNES, Bulcsú Sándor, and Zoltán Néda (14-16 September 2020). *Stabilizing phase-locked patterns in systems of Kuramoto oscillators with delayed coupling*. [Prezentare poster]. MECO45: 45th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics - online, Cluj-Napoca, Romania

# Bibliografie selectată

- [1] Steven Strogatz. *Sync: The emerging science of spontaneous order*. Penguin UK, 2004.
- [2] Charles S Peskin. Mathematical aspects of heart physiology. *Courant Inst. Math*, 1975.
- [3] D Attenborough. BBC Trials of Life Talking to Strangers, 1990.
- [4] Kurt Wiesenfeld, Pere Colet, and Steven H Strogatz. Synchronization transitions in a disordered Josephson series array. *Physical review letters*, 76(3):404, 1996.
- [5] Pat Dallard, AJ Fitzpatrick, A Flint, S Le Bourva, A Low, RM Ridsdill Smith, and M Willford. The London Millennium footbridge. *Structural Engineer*, 79(22):17–21, 2001.
- [6] C Huygens. Letter to de sluse. letter no. 1333 of february 24, 1665. *Oeuvres Complète de Christiaan Huygens. Correspondence*, 5:1664–1665, 1665.
- [7] Steven H Strogatz. Norbert Wiener’s brain waves. In *Frontiers in mathematical biology*, pages 122–138. Springer, 1994.
- [8] Arthur T. Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, 16(1):15 – 42, 1967.
- [9] Yoshiki Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In Huzihiro Araki, editor, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, volume 39 of *Lecture Notes in Physics*, pages 420–422. Springer Berlin Heidelberg, 1975.
- [10] Steven H Strogatz and Renato E Mirollo. Stability of incoherence in a population of coupled oscillators. *Journal of Statistical Physics*, 63(3-4):613–635, 1991.
- [11] Steven H Strogatz, Renato E Mirollo, and Paul C Matthews. Coupled nonlinear oscillators below the synchronization threshold: relaxation by generalized Landau damping. *Physical Review Letters*, 68(18):2730, 1992.
- [12] Hidetsugu Sakaguchi, Shigeru Shinomoto, and Yoshiki Kuramoto. Local and global self-entrainments in oscillator lattices. *Progress of Theoretical Physics*, 77(5):1005–1010, 1987.
- [13] Hidetsugu Sakaguchi, Shigeru Shinomoto, and Yoshiki Kuramoto. Mutual entrainment in oscillator lattices with nonvariational type interaction. *Progress of Theoretical Physics*, 79(5):1069–1079, 1988.
- [14] Duncan J Watts and Steven H Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684):440, 1998.
- [15] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [16] Hyunsuk Hong, Moo-Young Choi, and Beom Jun Kim. Synchronization on small-world networks. *Physical Review E*, 65(2):026139, 2002.
- [17] Hyunsuk Hong, Hyunggyu Park, and Lei-Han Tang. Finite-size scaling of synchronized oscillation on complex networks. *Physical Review E*, 76(6):066104, 2007.
- [18] Carsten Grabow, Steven M Hill, Stefan Grosskinsky, and Marc Timme. Do small worlds synchronize fastest? *EPL (Europhysics Letters)*, 90(4):48002, 2010.
- [19] S Yoon, M Sorbaro Sindaci, AV Goltsev, and JFF Mendes. Critical behavior of the relaxation rate, the susceptibility, and a pair correlation function in the Kuramoto model on scale-free networks. *Physical Review E*, 91(3):032814, 2015.

- [20] Fumito Mori. Necessary condition for frequency synchronization in network structures. *Physical review letters*, 104(10):108701, 2010.
- [21] Hiroaki Daido. Quasientrainment and slow relaxation in a population of oscillators with random and frustrated interactions. *Physical review letters*, 68(7):1073, 1992.
- [22] Hidetsugu Sakaguchi and Yoshiki Kuramoto. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entrainment. *Progress of Theoretical Physics*, 76(3):576–581, 1986.
- [23] Seunghwan Kim, Seon Hee Park, and Chang Su Ryu. Nonequilibrium phenomena in globally coupled active rotators with multiplicative and additive noises. *ETRI journal*, 18(3):147–160, 1996.
- [24] Shigeru Shinomoto and Yoshiki Kuramoto. Phase transitions in active rotator systems. *Progress of Theoretical Physics*, 75(5):1105–1110, 1986.
- [25] Yoshiki Kuramoto and Dorjsuren Battogtokh. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *arXiv preprint cond-mat/0210694*, 2002.
- [26] Daniel M Abrams and Steven H Strogatz. Chimera states for coupled oscillators. *Physical review letters*, 93(17):174102, 2004.
- [27] Aaron M Hagerstrom, Thomas E Murphy, Rajarshi Roy, Philipp Hövel, Iryna Omelchenko, and Eckehard Schöll. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices. *Nature Physics*, 8(9):658–661, 2012.
- [28] Erik Andreas Martens, Shashi Thutupalli, Antoine Fourrière, and Oskar Hallatschek. Chimera states in mechanical oscillator networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(26):10563–10567, 2013.
- [29] Tomasz Kapitaniak, Patrycja Kuzma, Jerzy Wojewoda, Krzysztof Czołczynski, and Yuri Maistrenko. Imperfect chimera states for coupled pendula. *Scientific reports*, 4:6379, 2014.
- [30] Lucia Valentina Gambuzza, Arturo Buscarino, Sergio Chessa, Luigi Fortuna, Riccardo Meucci, and Mattia Frasca. Experimental investigation of chimera states with quiescent and synchronous domains in coupled electronic oscillators. *Phys. Rev. E*, 90:032905, Sep 2014.
- [31] Jerzy Wojewoda, Krzysztof Czołczynski, Yuri Maistrenko, and Tomasz Kapitaniak. The smallest chimera state for coupled pendula. *Scientific reports*, 6(1):1–5, 2016.
- [32] Vincenzo Nicosia, Miguel Valencia, Mario Chavez, Albert Díaz-Guilera, and Vito Latora. Remote synchronization reveals network symmetries and functional modules. *Physical review letters*, 110(17):174102, 2013.
- [33] Y. Qin, Y. Kawano, and M. Cao. Stability of remote synchronization in star networks of kuramoto oscillators. In *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5209–5214, 2018.
- [34] Károly Dénes, Bulcsú Sándor, and Zoltán Néda. Pattern selection in a ring of Kuramoto oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 78:104868, 2019.
- [35] Károly Dénes, Bulcsú Sándor, and Zoltán Néda. On the predictability of the final state in a ring of Kuramoto rotators. *Romanian Reports in Physics*, 71:108, 2019.
- [36] Károly Dénes, Bulcsú Sándor, and Zoltán Néda. Synchronization patterns in rings of time-delayed Kuramoto oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 93:105505, 2021.
- [37] J. Ochab and P. F. Gora. Synchronisation of coupled oscillators in a local one-dimensional Kuramoto model. In Lawniczak, AT and Makowiec, D and Di Stefano, BN, editor, *Summer Solstice 2009, International Conference on Discrete Models of Complex Systems*, volume 3 of *Acta Physica Polonica B Proceedings Supplement*, pages 453–462, 2010.
- [38] T. K. Roy and A. Lahiri. Synchronized oscillations on a Kuramoto ring and their entrainment under periodic driving. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45(6):888 – 898, 2012.

- [39] Xia Huang, Meng Zhan, Fan Li, and Zhigang Zheng. Single-clustering synchronization in a ring of Kuramoto oscillators. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47:125101, 03 2014.
- [40] Daniel A. Wiley, Steven H. Strogatz, and Michelle Girvan. The size of the sync basin. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 16(1):015103, 2006.
- [41] Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, Boston, 2012.
- [42] Paulo FC Tilles, Fernando F Ferreira, and Hilda A Cerdeira. Multistable behavior above synchronization in a locally coupled Kuramoto model. *Physical Review E*, 83(6):066206, 2011.
- [43] Matthew G. Earl and Steven H. Strogatz. Synchronization in oscillator networks with delayed coupling: A stability criterion. *Phys. Rev. E*, 67:036204, Mar 2003.
- [44] Farshid Maghami Asl and A Galip Ulsoy. Analysis of a system of linear delay differential equations. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, 125(2):215–223, 2003.