UNIVERSITATEA "BABEȘ-BOLYAI" CLUJ NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

TRANSFORMĂRI INTEGRALE ALE UNOR CLASE SPECIALE DE FUNCŢII COMPLEXE

Rezumatul tezei de doctorat

Coordonator științific:
Prof. Univ. Dr. **Daniel Breaz**

Doctorand:
Maria Camelia Pode

Cluj - Napoca 2020

Cuvinte cheie

discul unitate, funcție analitică, funcție univalentă, funcție stelată, funcție convexă, funcție aproape convexă, funcție alpha-convexă, fincție p-valentă, operator integral, clasa $\mathcal{B}(\mu, \alpha)$, clasa $\mathcal{S}_{\mu}$, clasa $\mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, clasa $\mathcal{SH}(\beta)$, clasa $\mathcal{S}(p)$, clasa $\mathcal{G}_b$, clasa $\mathcal{N}(\beta)$, clasa $\mathcal{S}^*_{\beta}$, clasa $\mathcal{A}_p$, clasa $\mathcal{S}^*_p(\beta)$, clasa $\mathcal{K}_p(\beta)$, clasa $\mathcal{M}_p(\beta)$, clasa $\mathcal{N}_p(\beta)$, clasa $\mathcal{U}_p(\beta, k)$, criterii de univalență, Lema Generală Schwarz,

Cuprins

Introducere

Analiza complexă datează din secolul al XVIII-lea, fiind un domeniu de interes care a evoluat spectaculos și datorită multiplelor aplicații în diferite ramuri ale științei și tehnicii.

Teoria geometrică a funcțiilor de o variabilă complexă este o ramură aparte a Analizei complexe care corelează raţionamentele riguroase cu modelele geometrice intuitive. Primele lucrări semnificative au fost publicate la începutul secolului al XX – lea de către P. Koebe în 1907, T.H. Gromwell în 1914, I.W. Alexander în 1915, L. Bieberbach în 1916. Conjectura lui Bieberbach, demonstrată de către Louis de Branges în 1984 a dus la apariția unor noi direcții de studiu în teoria geometrică a funcțiilor analitice, una dintre acestea fiind definirea unor noi clase de funcții univalente pentru care conjectura ar putea fi verificată.

Analiza complexă ocupă un loc de cinste și în şcoala românească de matematică. Cercetătorii români au contribuit decisiv la progresul acestei ramuri ştiinţifice prin D. Pompeiu, Gh. Călugăreanu și P.T. Mocanu. Gh. Călugăreanu, părintele şcolii româneşti de Teoria Funcţiilor Univalente, a obţinut pentru prima dată condiţii necesare şi suficiente de univalenţă, iar P.T. Mocanu a introdus clasa funcţiilor α-convexe, a abordat problema injectivităţii neanalitice şi a creat împreună cu S.S. Miller binecunoscuta metodă de studiu a unor clase de funcţii univalente numită „metoda funcţiilor admisibile”, metoda subordonărilor diferenţiale, iar mai recent teoria subordonărilor diferenţiale. Acad. P.T. Mocanu a dus mai departe Școala de Teoria Funcțiilor Univalente la Univ. Babeș-Bolyai, fondată de Gh. Călugăreanu.

Proprietatea de univalență a funcțiilor de o variabilă complexă constituie obiectul cercetării multor matematicieni, prin determinarea unor condiții necesare și suficiente de univalență. Interpretarea geometrică a funcțiilor univalente se face prin transformări conforme. Astfel, se pot analiza parametrii unei anumite transformări conforme, care verifică condițiile suplimentare de univalență.

Condițiile necesare și suficiente de univalență sunt prezentate de obicei sub forma unor inegalități diferențiale, dar proprietatea de univalență poate fi demonstrată și prin alte metode cum ar fi: metoda parametrică a lui Loewner, metoda reprezentărilor integrale, metoda subordonărilor diferențiale (cunoscută și ca metoda funcțiilor admisibile) și metoda superordonărilor diferențiale.

Un rol central în teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă îl joacă studiul operatorilor integrali, definiţi pe anumite spații de funcții analitice. Primul operator integral pe clase de funcții univalente a fost introdus în 1915 de către J.W. Alexander, iar de atunci mai mulți cercetători și-au manifestat interesul pentru acest studiu. Dintre aceștia amintim pe R. Libera, S. Bernardi, S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, R. Singh, N.N. Pascu și mulți alții.

Noutatea rezultatelor prezentate în această lucrare cuprind: introducerea unor operatori integrali ca extensie a unor operatori deja cunoscuți, reprezentați ca și cazuri particulare, precum și investigarea proprietăților geometrice de univalența, convexitatea, stelaritatea, dar și ale altor clase de funcții speciale, pentru operatori integrali noi. Operatorii integrali introduși aici sunt generalizări ale unor operatori integrali consacrați în literatura de specialitate, reprezentați prin constucții de mai multe funcții. Detalierea acestora este prezentată în secțiunea 2.1. Pentru acești operatori integrali noi am obținut condiții de: univalență, stelaritate, convexitate, dar și de partenență la unele clase speciale de funcții analitice. Această teză este structurată pe 5 capitole, o introducere și o bibliografie și se bazează pe 35 de lucrări publicate sau în curs de publicare (scrise în colaborare cu D. Breaz) precum și câteva idei nepublicate încă.

Primul capitol intitulat ”Noțiuni preliminare” este împărțit în patru paragrafe. Sunt prezentate aici definiții fundamentale și rezultate ce constituie baza necesară pentru următoarele capitole. Mai precis, sunt prezentate definiții și proprietăți cu privire la funcții analitice, funcții univalente, funcții cu partea reală pozitivă, funcții stelate, funcții convexe, dar și alte clase speciale de funcții. Ultima secțiune din acest capitol conține criteriile de univalență folosite în demonstrarea rezultatelor principale din capitolele următoare, date de Pascu [89], [90], Pescar [93], [94], Becker [42], Ozaki și Nunokawa [88].

În următoarele patru capitole sunt prezentate rezultate originale care reprezintă contribuția autorului adusă domeniului teoriei geometrice a funcțiilor analitice.

Capitolul 2 conține 8 secțiuni și începe cu prezentarea a patru operatori integrali generali noi, care constituie extensii ale unor operatori integrali cunoscuți și care sunt formați din mai multe funcții. De asemenea este marcată legătura dintre acești operatori și alte rezultate importante din domeniu. Precizăm că toate rezultatele obținute în această lucrare se referă la cei patru operatori integrali introduși aici.

Al doilea paragraf se ocupă de obținerea unor criterii suficiente de univalență adresate operatorilor integrali, atunci când funcțiile sunt analitice. Justificarea acestor rezultate se face pe baza criteriilor de univalență date de Pascu și Pescar și sunt conținute în lucrările [5], [6], [7], [8].

Secțiunea 2.3, cuprinsă în lucrările [9], [10], prezintă noi condiții de univalență pentru operatorii integrali generali, $\mathcal{M}_{\delta,n}$ și $\mathcal{T}_\delta, n$, utilizând o extensie a criteriului de univalență al lui Becker, dat de Pascu în [90], dar și rezultatul dat de Mocanu și Șerb în [76].

În paragraful 2.4 s-a abordat studiul unor proprietăți de conservare a clasei funcțiilor univalente de către operatorii integrali. Instrumentele care au condus la aceste rezultate, incluse în lucrările [23], [24], [25], [26], sunt criteriile de univalență a lui Becker și Pascu, dar și cunoscutele inegalități a lui Nehari.

Paragraful 2.5 verifică univalența operatorilor integrali când funcțiile implicate aparțin clasei $\mathcal{G}_b$, definită de Silverman în [109], pentru operatorii integrali $\mathcal{M}_{\delta,n}$ și $\mathcal{T}_{\delta,n}$, utilizând criteriile de univalență al lui Pascu [90] și Pescar [93]. Aceste conținuturi se găsesc în lucrările [11], [12].

Secțiunea 2.6 are în vedere condiții suficiente de univalență pentru operatorii integrali definiți aici, având funcțiile din clasa $\mathcal{S}(p)$ studiată de Ozaki, Nunokawa, Yang, Liu, Singh și alții. Dovezile acestor rezultate utilizează criteriul de univalență a lui Pescar [93] și sunt tipărite în lucrările [13], [14].

În continuare, paragraful 2.7, tratează univalența operatorilor integrali pentru funcții care fac parte din clasele $\mathcal{B}(\mu)$ definită de Frasin și Darus în [69] și $\mathcal{S}_\mu$ studiată de Ponnusamy și Sing în [105]. Demonstrarea acestor rezultate, din lucrările [15], [16], [17], [18], vine cu ajutorul inegalităților date de Deniz [60] și Frasin [63], precum și datorită criteriilor de univalență Pascu [90] și Pescar [93].

Ultima secțiune a acestui capitol abordează univalența operatorilor integrali pentru funcții care sunt membri ai clasei $\mathcal{B}(\mu, \alpha)$ definită de Frasin și Jahangiri în [70] și reprezintă conținutul lucrărilor [19],[20], [21], [22]. Criteriile de univalență Pascu [90] și Pescar [93], dar și Teorema Mocanu-Șerb [76] conduc la aceste rezultate.

Capitolul 3 tratează problema convexității operatorilor integrali, fiind împărțit în 6 paragrafe. În fiecare paragraf proveniența funcțiilor diferă de la o clasă la alta.

Secțiunea 3.1 are ca punct de plecare funcții aparținând claselor $\mathcal{G}_b$, $\mathcal{B}(\mu, \alpha)$ și $\mathcal{S}^*_\beta$. Conținuturile acestea se află în lucrările [27], [30], [33], [36].

Urmează rândul claselor de funcții stelate în secțiunea 3.2, rezultatele fiind cuprinse în lucrările [27], [30], [33], [36], [29], [32], [35], [39]. În acest caz s-a găsit ordinul de convexitate pentru fiecare operator integral cercetat.

Studiul convexității continuă în paragraful 3.3 cu funcții făcând parte din clasa $\mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, informații cuprinse în lucrările [28], [31], [34], [37], [29], [32], [35], [39].

Paragraful 3.4 ne prezintă abordarea convexității operatorilor integrali din perspectiva funcțiilor de clasă $\mathcal{S}_b^*$. Noutăți care se regăsesc în lucrările [28], [31], [34], [37].

Apoi prezentăm în secțiunea 3.5 ordinele de convexitate ale operatorilor integrali pentru cazul când funcțiile sunt membri ai clasei $\mathcal{SH}(\beta)$, studii incluse în lucrările [29], [32], [35], [39].

Finalul acestui capitol vine cu abordarea convexității operatorilor integrali pentru funcții α - convexe. În lucrările [29], [32], [35], [39] prezentăm aceste informații.

În **capitolul 4**, compus din două paragrafe, ilustrăm câteva condiții de apartenență a operatorilor integrali la clasa de funcții $\mathcal{N}(\beta)$. Prima secțiune de aici folosește funcții analitice, iar cealaltă funcții din clasa $\mathcal{SP}(\alpha, \beta)$. Rezultatele obținute în acest capitol se găsesc în lucrările [28], [31], [34], [37].

Ultimul capitol înglobează șase secțiuni și se referă la studiul funcțiilor p-valente. Aceste studii sunt grupate în patru articole distincte, adresate fiecărui operator integral în parte și urmează a fi trimise spre publicare.

Secțiunea 5.1 identifică condiții de apartenență a operatorilor integrali la clasa funcțiilor convexe p-valente. În acest scop funcțiile implicate sunt cuprinse în clasa funcțiilor stelate p-valente.

Conținutul secțiunii 5.2 este format din condiții de apartenență la clasa $\mathcal{N}_p(\beta)$, în timp ce funcțiile sunt membrii ai claselor $\mathcal{N}_p(\beta)$ și $\mathcal{M}_p(\beta)$.

Urmează încadrarea operatorilor integrali, prin condiții specifice la clasa $\mathcal{K}_p(a, \alpha)$ prezentată în paragraful 5.3. Rolul funcțiilor aici este jucat în clasa $\mathcal{S}_p^*(a, \alpha)$.

Paragraful 5.4 duce funcțiile analitice p-valente ale operatorilor integrali în clasa funcțiilor stelate p-valente prin intermediul unor condiții specifice.

Mai departe, secțiunea 5.5 transpune în anumite condiții funcțiile analitice p-valente în clasa funcțiilor aproape-convexe p-valente.

Rezultatele finale setează funcțiile în clasa funcțiilor analitice p-valente și prezintă condiții pentru care operatorii integrali aparțin clasei funcțiilor uniform p-valente aproape convexe.

Capitolul 1

Rezultate preliminare

1.1 Definiții, notații și rezultate elementare din teoria funcțiilor univalente

Noţiunile şi rezultatele descrise în acest paragraf fac parte din elementele de bază ale literaturii de specialitate: noţiunea de funcţie olomorfă, funcţie univalentă, funcţie analitică, Teorema Mocanu-Șerb, Teorema lui Nehari, precum și Lema Generală Schwarz deseori întâlnită în demonstrarea rezultatelor principale.

Definiția 1.1.1. *O funcţie f se numeşte **olomorfă în punctul** z_0, dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(z_0)$, astfel încât f să fie derivabilă în această vecinătate.*

Definiția 1.1.2. *O funcţie olomorfă şi injectivă pe un domeniu D, din $\mathbb{C}$ se numeşte **univalentă pe** D. Notăm cu $\mathcal{H}_{\mathbb{U}}(D)$ mulţimea funcţiilor univalente pe D.*

Definiția 1.1.3. *Fie $f : D \to \mathbb{C}$, $z \in D$. Spunem că funcţia f este **analitică în punctul** z_0 sau **dezvoltabilă în serie Taylor în** z_0, dacă există un disc $\mathbb{U}\left(z_0, r\right) = \{z \in \mathbb{C} :\mid z - z_0 \mid< r\} \subset D$, astfel încât f să fie suma unei serii Taylor, adică:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n, \quad z \in \mathbb{U}\left(z_0, r\right).$$

*Spunem că funcţia f este **analitică în domeniul** D, dacă este analitică în fiecare punct al lui D.*

Considerăm în continuare următoarele notaţii: $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid< 1\}$ - *discul unitate din planul complex.*

Vom considera de asemenea, pentru $a \in \mathbb{C}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, mulţimea

$$\mathcal{H}[a, n] = \left\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{U}) : f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} ...\right\},$$

$$\mathcal{A}_n = \left\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{U}) : f(z) = a + a_{n+1} z^{n+1} ...\right\}$$

şi

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1.$$

Vom nota cu

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{A} : f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})\},$$

clasa funcţiilor univalente în discul unitate şi normate cu condiţiile

$$f(0) = f^{'}(0) - 1 = 0,$$

deci funcţiile olomorfe şi univalente în $\mathbb{U}$, care au dezvoltare în serie de puteri de forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ..., \quad |z| < 1.$$

Notăm cu

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{H}(\mathbb{U}) : p(0) = 1, \mathrm{Re}p(z) > 0, z \in \mathbb{U}\},$$

clasa funcţiilor de tip Caratheodory.

Următoarea teoremă a fost demonstrată de Mocanu și Șerb.

Teorema 1.1.1. *(Mocanu - Șerb [76]) Fie $M_0 = 1,5936...$ soluția pozitivă a ecuației*

$$(2 - M)\, e^M = 2. \tag{1.1.1}$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ și

$$\left|\frac{f''(z))}{f'(z)}\right| \le M_0,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, atunci

$$\left|\frac{zf'(z))}{f(z)} - 1\right| \le 1, \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Marginea M_0 este fixă.

Teorema 1.1.2. *(Lema Generală Schwarz)[73] Fie funcția f regulată în discul $\mathbb{U}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ cu $|f(z)| < M$, pentru M fixat. Dacă $f(z)$ are un zero cu ordinul de multiplicitate mai mare sau egal decât m pentru $z = 0$, atunci*

$$|f(z)| \le \frac{M}{R^m} z^m.$$

Egalitatea este adevărată numai dacă

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{M}{R^m} z^m,$$

unde θ este constant.

Pe de altă parte, Nehari a dovedit alte rezultate importante.

Teorema 1.1.3. *(Nehari[77]) Dacă funcția g este regulată pe discul unitate $\mathbb{U}$ și $|g(z)| < 1$ în $\mathbb{U}$, atunci pentru orice $\xi \in \mathbb{U}$ următoarele inegalități sunt adevărate*

$$\left|\frac{g(\xi) - g(z)}{1 - \overline{g(z)}g(\xi)}\right| \leq \left|\frac{\xi - z}{1 - \bar{z}\xi}\right| \tag{1.1.2}$$

și

$$\left|g^{'}(z)\right| \leq \frac{1 - |g(z)|^2}{1 - |z|^2},$$

avem egalitate în cazul în care $g(z) = \varepsilon\frac{z+u}{1+\bar{u}z}$, unde $|\varepsilon| = 1$ și $|u| < 1$.

Observația 1.1.4. ([77]) Pentru $z = 0$, înlocuind în relația (1.1.2), oricare ar fi $\xi \in \mathbb{U}$, obținem

$$\left|\frac{g(\xi) - g(0)}{1 - \overline{g(0)}g(\xi)}\right| \leq |\xi|$$

și, prin urmare

$$|g(\xi)| \leq \frac{|\xi| + |g(0)|}{1 + |g(0)|\,|g(\xi)|}.$$

Considerând $g(0) = a$ și $\xi = z$, atunci

$$|g(z)| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |a|\,|z|},$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$.

În următoarele două secțiuni vom aminti rezultate importante privitoare la următoarele clase de funcții: clasa funcțiilor stelate, clasa funcțiilor stelate de ordin α, clasa funcțiilor stelate de ordin complex b și tip λ, clasa funcțiilor convexe, clasa funcțiilor convexe de ordin α, clasa funcțiilor convexe de ordin complex b și tip λ, clasa funcțiilor α-convexe, dar și diferite clase speciale de funcții analitice precum: clasa funcțiilor $\mathcal{B}(\mu)$, clasa funcțiilor $\mathcal{B}(\mu, \alpha)$, clasa funcțiilor $\mathcal{S}_\mu$, clasa funcțiilor $\mathcal{SP}$, clasa funcțiilor $\mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, clasa funcțiilor $\mathcal{SH}(\beta)$, clasa funcțiilor $\mathcal{S}(p)$, clasa funcțiilor $\mathcal{G}_b$, clasele funcțiilor $\mathcal{M}(\beta)$ și $\mathcal{N}(\beta)$, clasele $\mathcal{S}^*_\beta$ și $\mathcal{S}_\beta$, clasa funcțiilor $\mathcal{A}_p$, clasele funcțiilor $\mathcal{S}^*_p(\beta)$ și $\mathcal{S}^*_p(a, \alpha)$, clasele funcțiilor $\mathcal{K}_p(\beta)$ și $\mathcal{K}_p(a, \alpha)$, clasele funcțiilor $\mathcal{M}_p(\beta)$ și $\mathcal{N}_p(\beta)$, clasa funcțiilor $\mathbb{U}_p(\beta, k)$.

1.2 Clasa funcțiilor stelate și clasa funcțiilor convexe

Definiția 1.2.1. *Fie funcția $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$, cu proprietatea că $f(0) = 0$. Spunem ca funcția f este* ***stelată în raport cu originea*** *(sau* ***stelată****) dacă funcția f este univalentă pe $\mathbb{U}$, iar imaginea sa $f(\mathbb{U})$ este un domeniu stelat în raprt cu originea.*

Domeniul $f(\mathbb{U})$ se numește ***domeniu stelat*** *în raport cu originea, dacă pentru orice $z \in \mathbb{U}$, segmentul care unește originea cu $f(z)$ este inclus în $f(\mathbb{U})$.*

Teorema 1.2.1. *([74]) Fie f o funcție olomorfă în $f(\mathbb{U})$ cu $f(0) = 0$. Atunci f este univalentă și $f(\mathbb{U})$ este un domeniu stelat în raport cu originea dacă și numai dacă $f^{'}(0) \neq 0$ și*

$$\mathit{Re}\left(\frac{zf^{'}(z)}{f(z)}\right) > 0,\ z \in \mathbb{U}.$$

Definiția 1.2.2. *Vom nota cu $\mathcal{S}^*$ clasa funcțiilor olomorfe în $\mathbb{U}$, cu $f(0) = 0$, $f^{'}(0) = 1$ și care sunt stelate în raport cu originea în $\mathbb{U}$. Deci*

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{U}), f(0) = f^{'}(0) - 1 = 0, \mathrm{Re}\left(\frac{zf^{'}(z)}{f(z)}\right) > 0, z \in \mathbb{U} \right\}.$$

Definiția 1.2.3. *O funcție $f \in \mathcal{A}$ se numește* ***funcție stelată de ordin*** *α, $0 \leq \alpha < 1$ dacă verifică inegalitatea*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf^{'}(z)}{f(z)}\right) > \alpha,\ z \in \mathbb{U}.$$

Notăm cu $\mathcal{S}^*(\alpha)$ clasa acestor funcții.

Definiția 1.2.4. *O funcție $f \in \mathcal{A}$ spunem că este* ***stelată de ordin complex*** *b, $(b \in \mathbb{C} - \{0\})$* ***și tip*** *$\lambda$, $(0 \leq \lambda < 1)$, dacă și numai dacă*

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{1}{b}\left(\frac{zf^{'}(z)}{f(z)} - 1\right)\right\} > \lambda,\ z \in \mathbb{U}.$$

Notăm cu $\mathcal{S}^*_\lambda(b)$ clasa acestor funcții.

Definiția 1.2.5. *O funcție $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ se numește* ***funcție convexă în*** *$\mathbb{U}$, dacă funcția f este univalentă pe $\mathbb{U}$, iar imaginea sa $f(\mathbb{U})$ este un domeniu convex.*

Teorema 1.2.2. *([74]) O funcție f olomorfă în $\mathbb{U}$ este univalentă și $f(\mathbb{U})$ este un domeniu convex dacă și numai dacă $f^{'}(0) \neq 0$ și*

$$\mathit{Re}\left(1 + \frac{zf^{''}(z)}{f^{'}(z)}\right) > 0,\ z \in \mathbb{U}.$$

Definiția 1.2.6. *Vom nota cu $\mathcal{K}$ sau $\mathcal{S}^c$ clasa funcțiilor olomorfe în $\mathbb{U}$, cu $f(0) = 0$, $f^{'}(0) = 1$ și care sunt convexe în $\mathbb{U}$. Deci*

$$\mathcal{K} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{U}), f(0) = f^{'}(0) - 1 = 0, \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf^{''}(z)}{f^{'}(z)}\right) > 0, z \in \mathbb{U} \right\}.$$

Între clasa funcțiilor convexe, stelate și respectiv univalente avem incluziunea $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$.

Definiția 1.2.7. *O funcție $f \in \mathcal{A}$ se numește* ***funcție convexă de ordin*** *α, $0 \leq \alpha < 1$ dacă verifică inegalitatea*

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf^{''}(z)}{f^{'}(z)}\right) > \alpha,\ z \in \mathbb{U}.$$

Notăm această clasă cu $\mathcal{K}(\alpha)$.

Clasa funcțiilor $\mathcal{K}(\alpha)$ este strâns legată de clasa funcțiilor

$$\mathcal{K}_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{A} : \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| < 1 - \alpha,\ 0 \le \alpha < 1 \right\}.$$

Avem $\mathcal{K}_\alpha \subseteq \mathcal{K}(\alpha)$.

Definiția 1.2.8. *O funcție $f \in \mathcal{A}$ spunem că este* ***convexă de ordin complex*** *b, $(b \in \mathbb{C} - \{0\})$* ***și tip*** *$\lambda$ $(0 \le \lambda < 1)$, dacă și numai dacă*

$$\text{Re}\left\{ 1 + \frac{1}{b}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right\} > \lambda,\ z \in \mathbb{U}.$$

Notăm cu $\mathcal{C}^*_\lambda(b)$ clasa acestor funcții.

Petru T. Mocanu a introdus în [74] **clasa funcțiilor α-convexe** , notate cu $\mathcal{M}_\alpha$, unde α este un număr real.

Teorema 1.2.3. *([74]) Dacă funcția $f \in \mathcal{M}_\alpha$, atunci $f(0) = f^{'}(0) - 1 = 0$ și f verifică inegalitatea*

$$\textit{Re}\left[(1-\alpha)\frac{zf^{'}(z)}{f(z)} + \alpha\left(\frac{zf^{''}(z)}{f^{'}(z)} + 1 \right) \right] > 0,\ z \in \mathbb{U}.$$

1.3 Clase speciale de funcții analitice

Frasin și Jahangiri au studiat în [70] clasa $\mathcal{B}(\mu, \alpha)$ definită astfel:

Definiția 1.3.1. *O funcție $f \in \mathcal{A}$ spunem că este din* ***clasa*** *$\mathcal{B}(\mu, \alpha)$, $0 \le \alpha < 1$, $\mu \ge 0$ dacă și numai dacă*

$$\left| f^{'}(z)\left(\frac{z}{f(z)} \right)^{\mu} - 1 \right| < 1 - \alpha, \quad z \in \mathbb{U}.$$

Condiția din Definiția 1.3.1 implică relația

$$\text{Re}\left(f^{'}(z)\left(\frac{z}{f(z)} \right)^{\mu} \right) > \alpha, \quad z \in \mathbb{U}.$$

Familia $\mathcal{B}(\mu, \alpha)$ este o clasă comprehensivă a funcțiilor analitice deoarece include variate clase de funcții analitice. De exemplu, clasa funcțiilor analitice și univalente $\mathcal{B}(1, \alpha) = \mathcal{S}^*(\alpha)$, $\mathcal{B}(0, \alpha) = \mathcal{R}(\alpha)$ și $\mathcal{B}(2, \alpha) = \mathcal{B}(\alpha)$. În particular, clasa funcțiilor analitice $\mathcal{B}(\alpha)$ a fost definită de Frasin și Darus în [69].

Definiția 1.3.2. *O funcție $f \in \mathcal{A}$ spunem că este un membru al* ***clasei*** *$\mathcal{B}(\mu)$ dacă și numai dacă*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1 \right| < 1 - \mu, \quad 0 \le \mu < 1, \quad z \in \mathbb{U}.$$

Teorema 1.3.1. *(Deniz [60]) Fie funcția* $f(z) \in \mathcal{B}(\mu)$*, atunci*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{(1-\mu)(1+|z|)}{1-|z|}, \quad 0 \leq \mu < 1, \quad z \in \mathbb{U}.$$

Teorema 1.3.2. *(Frasin [63]) Fie funcția* $f(z) \in \mathcal{B}(\mu)$*, atunci*

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < \frac{(1-\mu)(2+|z|)}{1-|z|}, \quad 0 \leq \mu < 1, \quad z \in \mathbb{U}.$$

$\mathcal{S}_\mu$ este o subclasă a funcțiilor analitice care a fost studiată de Ponnusamy și Sing în [105].

Definiția 1.3.3. *O funcție* $f \in \mathcal{A}$ *spunem că este de* ***clasă*** $\mathcal{S}_\mu$ *dacă și numai dacă*

$$\mathcal{S}_\mu = \left\{ f \in \mathcal{A} : \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < \mu\,|z|\,,\ 0 \leq \mu < 1,\ z \in \mathbb{U} \right\}.$$

Definiția 1.3.4. *Vom nota cu* $\mathcal{R}$ ***clasa funcțiilor normalizate a căror derivată este pozitivă*** *în discul unitate, astfel:*

$$\mathcal{R} = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re} f'(z) > 0, z \in \mathbb{U} \right\}.$$

F. Ronning introduce în [108] clasa funcțiilor univalente $\mathcal{SP}$ astfel:

Definiția 1.3.5. *O funcție* $f \in \mathcal{S}$ *spunem că face parte din* ***clasa*** $\mathcal{SP}$ *dacă și numai dacă*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leq \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)},\ z \in \mathbb{U}.$$

În [108] F. Ronning introduce clasa funcțiilor univalente $\mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta \in [0, 1)$.

Definiția 1.3.6. *Vom nota prin* $\mathcal{SP}(\alpha, \beta)$**,** $\alpha > 0$**,** $\beta \in [0, 1)$ ***clasa*** *tuturor funcțiilor* $f \in \mathcal{S}$ *cu proprietatea*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - (\alpha + \beta)\right| \leq \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha - \beta,\ z \in \mathbb{U}.$$

J. Stankiewicz și A. Wisniowska introduc în lucrarea [114], clasa funcțiilor univalente $\mathcal{SH}(\beta)$, $\beta > 0$ astfel:

Definiția 1.3.7. *Vom nota prin* $\mathcal{SH}(\beta)$**,** $\beta > 0$ ***clasa*** *tuturor funcțiilor* $f \in \mathcal{S}$ *cu proprietatea*

$$\mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) + 2\beta\left(\sqrt{2} - 1\right) > \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 2\beta\left(\sqrt{2} - 1\right)\right|,\ z \in \mathbb{U}.$$

În lucrarea [120] este fost definită clasa $\mathcal{S}(p)$.

Definiția 1.3.8. *Pentru $0 < p \leq 2$, prin $\mathcal{S}(p)$ notăm **clasa** funcțiilor $f \in \mathcal{A}$ care satisfac condițiile:*

$$f(z) \neq 0 \quad pentru \quad 0 < |z| < 1$$

și

$$\left| \left(\frac{z}{f(z)} \right)'' \right| \leq p,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$.

Teorema 1.3.3. *(Singh [110]) Dacă funcția $f \in \mathcal{S}(p)$, atunci următoarea ingalitate este adevărată*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{[f(z)]^2} - 1 \right| \leq p\,|z|^2\,, z \in \mathbb{U}.$$

Relația a fost demonstrată de Sigh în lucrarea [110].

În [109] Silverman a definit clasa $\mathcal{G}_b$ astfel:

Definiția 1.3.9. *O funcție $f \in \mathcal{A}$ spunem că este din **clasa** $\mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$ dacă și numai dacă*

$$\left| 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < b \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|, \quad z \in \mathbb{U}.$$

Uralegaddi introduce în [119] și Owa și Srivastava în [87] clasa $\mathcal{N}(\beta)$ astfel:

Definiția 1.3.10. *O funcție $f \in \mathcal{A}$ spunem că este din **clasa** $\mathcal{N}(\beta)$ dacă verifică inegalitatea*

$$\text{Re} \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right) < \beta,\ z \in \mathbb{U},\ \beta > 1.$$

În lucrarea [107] sunt definite clasele de funcții $\mathcal{S}^*_\beta$ și $\mathcal{S}_\beta$ astfel:

Definiția 1.3.11. *O funcție $f \in \mathcal{A}$ spunem că este din **clasa** $\mathcal{S}^*_\beta$ dacă verifică inegalitatea*

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < \beta,\ 0 < \beta \leq 1,\ \ z \in \mathbb{U}.$$

Definiția 1.3.12. *Spunem că o funcție f este din **clasa funcțiilor analitice p-valente** $\mathcal{A}_p$, dacă are forma*

$$f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + ..., p \in \mathbb{N}.$$

Luând $p = 1$ obținem că $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$.

În continuare considerăn clasele introduse și studiate de R. Ali și V. Ravichandran în [2].

Definiția 1.3.13. *O funcție $f \in \mathcal{A}_p$ se numește **p-valentă stelată de ordin** β $(0 \leq \beta < p)$ dacă și numai dacă*

$$\frac{1}{p} Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \beta,\ z \in \mathbb{U}.$$

Notăm cu $\mathcal{S}^*_p(\beta)$ aceste clase de funcții.

Definiția 1.3.14. *O funcție $f \in \mathcal{A}_p$ se numește* ***p-valentă convexă de ordin*** β $(0 \leq \beta < p)$ *dacă și numai dacă*

$$\frac{1}{p}\textit{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta,\ z \in \mathbb{U}.$$

Notăm cu $\mathcal{K}_p(\beta)$ clasele funcțiilor p-valente convexe de ordin β în $\mathbb{U}$.

Menționăm că $\mathcal{S}_p^*(0) = \mathcal{S}_p^*$ și $\mathcal{K}_p(0) = \mathcal{K}_p$ sunt respectiv, clasele de funcții p-valente stelate și p-valente convexe din $\mathbb{U}$. De asemenea, notăm că $\mathcal{S}_1^* = \mathcal{S}^*$ și $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}$ sunt, respectiv clasele obișnuite de funcții stelate și convexe din $\mathbb{U}$.

Pornind de la clasele de funcții stelate și convexe de ordin complex a și de tip α, R. Ali și V. Ravichandran în [2] au definit **clasele** $\mathcal{S}_p^*(a, \alpha)$ **și** $\mathcal{K}_p(a, \alpha)$ după cum urmează:

$$\mathcal{S}_p^*(a, \alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A}_p, \alpha < 1 : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{p}\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right) > \alpha \right\}$$

și

$$\mathcal{K}_p(a, \alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A}_p, \alpha < 1 : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{p}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + 1\right)\right) > \alpha \right\}.$$

În cazul în care $p = 1$ aceste clase au fost studiate de Breaz [50], Frasin [64], etc.

În continuare vom considera clasele $\mathcal{M}_p(\beta)$ și $\mathcal{N}_p(\beta)$.

Definiția 1.3.15. *O funcție $f \in \mathcal{A}_p$ este din* ***clasa*** $\mathcal{M}_p(\beta)$ *dacă*

$$\frac{1}{p}\textit{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \beta,\ z \in \mathbb{U},$$

pentru $\beta > 1$.

Definiția 1.3.16. ***Clasa*** $\mathcal{N}_p(\beta)$ *conține toate funcțiile care satisfac condiția*

$$\frac{1}{p}\textit{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right) < \beta,\ z \in \mathbb{U},$$

pentru $f \in \mathcal{A}_p$ și $\beta > 1$.

Dacă considerăm $p = 1$, obținem clasele $\mathcal{M}(\beta)$ și $\mathcal{N}(\beta)$ care au fost studiate de mai mulți cercetători, de exemplu Breaz [46], Ularu, Breaz și Frasin în [116] și Uralegaddi, Ganigi și Sarangi în [119].

Clasele de funcții $\mathcal{M}_p(a, \alpha)$ și $\mathcal{N}_p(a, \alpha)$ au fost definite în mod analog.

Definiția 1.3.17. *O funcție $f \in \mathcal{A}_p$ este din* ***clasa*** $\mathcal{M}_p(a, \alpha)$ *dacă*

$$\textit{Re}\left(1 + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{p}\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right) < \alpha,$$

pentru $\alpha > 1$.

Definiția 1.3.18. ***Clasa*** *$\mathcal{N}_p(a, \alpha)$ conține toate funcțiile $f \in \mathcal{A}_p$ care satisfac condiția*

$$\mathit{Re}\left(1 + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{p}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) - 1\right)\right) < \alpha$$

pentru $\alpha > 1$.

Definiția 1.3.19. *O funcție $f \in \mathcal{A}_p$ este din* ***clasa*** *$\mathcal{U}_p(\beta, k)$* ***funcțiilor k-uniforme p-valente stelate de ordin*** *β, $-1 \le \beta < p$ din $\mathbb{U}$, dacă condiția*

$$\mathit{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - \beta\right) \ge k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - p\right|, \quad k \ge 0, z \in \mathbb{U},$$

este satisfăcută.

Această clasă a fost introdusă de Goodman în [71].

Definiția 1.3.20. ***Clasa funcțiilor uniform p-valente aproape-convexe de ordin*** *β cu $-1 \le \beta < p$ din $\mathbb{U}$ conține toate funcțiile care satisfac condiția*

$$\mathit{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)} - \beta\right) \ge \left|\frac{zf'(z)}{g(z)} - p\right|, \quad k \ge 0, z \in \mathbb{U},$$

pentru $z \in \mathbb{U}$ și funcția g din clasa funcțiilor p-valente stelate de ordin β.

Pentru a demonstra că funcțiile sunt p-valente stelate și p-valente aproape-convexe în discul unitate amintim următoarele criterii:

Teorema 1.3.4. [*80*] *Dacă $f \in \mathcal{A}_p$ satisface condiția*

$$\mathit{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < p + \frac{1}{4} \quad pentru \quad z \in \mathbb{U},$$

atunci funcția f este p-valentă stelată în $\mathbb{U}$.

Teorema 1.3.5. [*62*] *Dacă $f \in \mathcal{A}_p$ satisface condiția*

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 - p\right| < p + 1 \quad pentru \quad z \in \mathbb{U},$$

atunci funcția f este p-valentă stelată în $\mathbb{U}$.

Teorema 1.3.6. [*106*] *Dacă $f \in \mathcal{A}_p$ satisface condiția*

$$\mathit{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < p + \frac{a+b}{(1+a)(1-b)},$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, unde $a > 0$, $b \ge 0$ și $a + 2b \le 1$, atunci funcția f este p-valentă aproape-convexă în $\mathbb{U}$.

Teorema 1.3.7. [*3*] *Dacă $f \in \mathcal{A}_p$ satisface condiția*

$$\mathit{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < p + \frac{1}{3} \quad pentru \quad z \in \mathbb{U},$$

atunci funcția f este uniform p-valentă aproape-convexă în $\mathbb{U}$.

1.4 Criterii de univalență

Un rol esențial în studiul operatorilor integrali îl au criteriile de univalență, obținându-se cu ajutorul lor rezultate remarcabile în teoria geometrică a funcțiilor univalente.

În continuare vom prezenta câteva criterii de univalență necesare demonstrațiilor din capitolele următoare.

Pascu a demonstrat următoarele două condiții de univalență:

Teorema 1.4.1. *(Pascu [89]) Fie $f \in \mathcal{A}$ și $\gamma \in \mathbb{C}$. Dacă $Re\gamma > 0$ și*

$$\frac{1-|z|^{2Re\gamma}}{Re\gamma}\left|\frac{zf''(z))}{f'(z)}\right| \leq 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral

$$F_\gamma(z) = \left(\gamma\int_0^z t^{\gamma-1}f'(t)dt\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 1.4.2. *(Pascu [90]) Fie $\delta \in \mathbb{C}$ cu $Re\delta > 0$. Dacă $f \in \mathcal{A}$ satisface*

$$\frac{1-|z|^{2Re\delta}}{Re\delta}\left|\frac{zf''(z))}{f'(z)}\right| \leq 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, atunci pentru orice număr complex γ, cu $Re\gamma \geq Re\delta$, operatorul integral

$$F_\gamma(z) = \left(\gamma\int_0^z t^{\gamma-1}f'(t)dt\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Următoarele două teoreme reprezintă alte condiții de univalență care au fost demonstrate de Pescar:

Teorema 1.4.3. *(Pescar [93]) Fie δ un număr complex, $Re\delta > 0$ și c un număr complex, $|c| \leq 1$, $c \neq -1$ și $f(z) = z + a_2z^2 + ...$ o funcție analitică în $\mathbb{U}$. Dacă*

$$\left|c\,|z|^{2\delta} + \left(1-|z|^{2\delta}\right)\frac{zf''(z))}{\delta f'(z)}\right| \leq 1,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, atunci funcția F_δ, definită prin

$$F_\delta(z) = \left(\delta\int_0^z t^{\delta-1}f'(t)dt\right)^{\frac{1}{\delta}},$$

este analitică și univalentă în $\mathbb{U}$.

Lema 1.4.4. (Pescar [93]) Fie γ un număr complex, Re$\gamma > 0$ și c un număr complex, $|c| \leq 1$, $c \neq -1$ și $f \in \mathcal{A}$. Dacă

$$|c|\,|z|^{2\mathrm{Re}\gamma} + \frac{1-|z|^{2\mathrm{Re}\gamma}}{\mathrm{Re}\gamma}\left|\frac{zf''(z))}{f'(z)}\right| \leq 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, atunci pentru orice număr complex γ, cu Re$\gamma \geq$ Reδ, operatorul integral

$$F_\gamma(z) = \left(\gamma \int_0^z t^{\gamma-1} f'(t)\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Următorul criteriu de univalență a fost dat de Becker.

Teorema 1.4.5. $(Becker[42])$ *Dacă funcția f este regulată în discul unitate $\mathbb{U}$, $f(z) = z + a_2z^2 + ...$ și*

$$\left(1-|z|^2\right)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1, \quad pentru\ orice\ z \in \mathbb{U},$$

atunci funcția f este univalentă în $\mathbb{U}$.

Ozaki și Nunokawa au demonstrat urmatoarea condiție de univalență:

Teorema 1.4.6. *(Ozaki-Nunokawa[88]) Fie funcția $f \in \mathcal{A}$, care verifică condiția*

$$\left|\frac{z^2 f'(z))}{[f(z)]^2} - 1\right| < 1, \quad z \in \mathbb{U}, \tag{1.4.1}$$

atunci funcția f este univalentă în $\mathbb{U}$.

Pescar a demonstrat următoarele două condiții de univalență în lucrarea [94]:

Teorema 1.4.7. [94] *Fie funcția $g \in \mathcal{A}$, α un număr real, și c un număr complex, $|c| \leq \frac{1}{\alpha}$, $c \neq -1$. Dacă*

$$\left|\frac{g''(z))}{g'(z)}\right| \leq 1, \quad z \in \mathbb{U},$$

atunci funcția

$$G_\alpha(z) = \left(\alpha \int_0^z \left[t^{\alpha-1} g'(t)\right]^{\alpha-1} dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{1.4.2}$$

este în clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 1.4.8. [94] *Fie funcția g care verifică (1.4.1), M un număr real pozitiv fixat și c un număr complex. Dacă $\alpha \in \left[\frac{2M+1}{2M+2}, \frac{2M+1}{2M}\right]$*

$$|c| \leq 1 - \left|\frac{\alpha-1}{\alpha}\right|(2M+1), \quad c \neq -1, \quad |g(z)| \leq M, \quad z \in \mathbb{U}$$

atunci funcția

$$G_\alpha(z) = \left(\alpha \int_0^z [g(t)]^{\alpha-1} dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{1.4.3}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Capitolul 2

Condiții suficiente de univalență pentru operatori integrali noi

2.1 Operatori integrali noi

Vom prezenta în continuare pe scurt patru operatori generali integrali introduși de Bărbatu și Breaz în lucrările [5]-[8], care sunt operatori integrali de tipul celor definiți de Pfaltzgraff, Kim-Merkes și Oversea, precum și legăturile dintre aceștia și alți operatori integrali cunoscuți în literatura de specialitate.

Considerăm primul operator general integral $\mathcal{M}_{\delta,n}$, definit în [5]:

$$\mathcal{M}_{\delta,n}(z) = \left\{ \delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{f_i(t)}{t} \right)^{\alpha_i - 1} (g_i{}'(t))^{\beta_i} \left(\frac{g_i(t))}{t} \right)^{\gamma_i} \right] dt \right\}^{\frac{1}{\delta}}, \tag{2.1.1}$$

unde f_i, g_i sunt analitice în $\mathbb{U}$ și $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$ sunt numere complexe, pentru orice $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\delta \in \mathbb{C}$, cu Re$\delta > 0$.

Observația 2.1.1. Operatorul integral $\mathcal{M}_{\delta,n}$ dat în (2.1.1) reprezintă o extindere a altor operatori după cum urmează:

i) Pentru $n = 1$, $\delta = 1$, $\alpha_1 - 1 = \alpha_1$ și $\beta_1 = \gamma_1 = 0$ obținem operatorul integral care a fost studiat de Kim-Merkes în [72]

$$\mathcal{F}_\alpha(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t} \right)^\alpha \mathrm{dt}.$$

ii) Luând $n = 1$, $\delta = 1$ și $\alpha_1 - 1 = \gamma_1 = 0$ obținem operatorul integral care a fost introdus de Pfaltzgraff în [104]

$$\mathcal{G}_\alpha(z) = \int_0^z (f'(t))^\alpha \mathrm{dt}.$$

iii) Dacă punem $\alpha_i - 1 = \alpha_i$ și $\beta_i = \gamma_i = 0$, atunci suntem conduși la operatorul integral care a fost definit de D. Breaz și N. Breaz în [47]

$$\mathcal{D}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Acest operator integral este o generalizare a operatorului integral introdus de Pascu și Pescar în [91].

iv) Pentru $\alpha_i - 1 = \gamma_i = 0$ obținem operatorul integral care a fost definit și studiat de D. Breaz, Owa și N. Breaz în [51]

$$\mathcal{I}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n [f_i'(t)]^{\alpha_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Acest operator integral este o generalizare a operatorului integral analizat de Pescar și Owa în [102].

v) Iar pentru $\alpha_i - 1 = 0$ obținem operatorul integral care a fost introdus de Pescar în [97]

$$\mathcal{F}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i} \left(f_i{}'(t)\right)^{\beta_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Acest operator integral este o generalizare a operatorului integral definit de Frasin în [66] și de Oversea în [86].

vi) Pentru $\alpha_i - 1 = \alpha_i$ și $\gamma_i = 0$ obținem operatorul integral care a fost introdus de Ularu în [115]

$$\mathcal{I}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i} \left(g_i{}'(t)\right)^{\beta_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Fie acum al doilea operator general integral $\mathcal{C}_{\delta,n}$, definit în [6]:

$$\mathcal{C}_{\delta,n} = \left\{\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n \left[\left(\frac{f_i(t)}{t} e^{g_i(t)}\right)^{\alpha_i - 1} \left(h_i{}'(t)\right)^{\beta_i} \left(\frac{h_i(t))}{t}\right)^{\gamma_i}\right] dt\right\}^{\frac{1}{\delta}}, \tag{2.1.2}$$

unde f_i, g_i, h_i sunt analitice în $\mathbb{U}$ și $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt numere complexe, pentru orice $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\delta \in \mathbb{C}$, cu Re$\delta > 0$.

Și acest operator integral dat prin relația (2.1.2) constituie extinderea unor operatori integrali, astfel:

Observația 2.1.2. i) Pentru $n = 1$, $\delta = 1$ și $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = 0$ obținem operatorul integral care a fost studiat de Kim-Merkes în [72]

$$\mathcal{F}_\alpha(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^\alpha \mathrm{dt}.$$

ii) Pentru $n = 1$, $\delta = 1$ și $\alpha_1 - 1 = \gamma_1 = 0$ ajungem la operatorul integral care a fost studiat Pfaltzgraff în [104]

$$\mathcal{G}_\alpha(z) = \int_0^z \left(f'(t)\right)^\alpha \mathrm{dt}.$$

iii) Dacă punem $\alpha_i - 1 = \beta_i = 0$ obținem operatorul integral care a fost definit și studiat de D. Breaz și N. Breaz în [47]

$$\mathcal{D}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Acest operator integral reprezintă o generalizare a operatorului integral introdus de Pascu și Pescar în [91].

iv) Pentru $\alpha_i - 1 = \gamma_i = 0$ obținem operatorul integral care a fost definit și studiat de D. Breaz, Owa și N. Breaz în [51]

$$\mathcal{I}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^{n} [f_i'(t)]^{\alpha_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Acesta este o generalizare a operatorului integral introdus de Pescar și Owa în [102].

v) Pentru $\alpha_i - 1 = 0$ obținem operatorul integral care a fost definit și studiat de Pescar în [97]

$$\mathcal{F}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i} \left(f_i{}'(t)\right)^{\beta_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Acest operator este generalizarea operatorului integral introdus de Frasin în [66] și de Oversea în [86].

vi) Iar pentru $n = 1$, $\delta = \beta$, $\alpha_i - 1 = \alpha_i$ și $\beta_i = \gamma_i = 0$ obținem operatorul integral care a fost introdus și studiat de Stanciu în [111]

$$\mathcal{H}_1(z) = \left[\beta \int_0^z t^{\beta-1} \left(\frac{f(t)}{t} e^{g(t)}\right)^{\alpha} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Luăm în continuare cel de-al treilea operator general integral $\mathcal{G}_{\delta,n}$, definit în [7]:

$$\mathcal{G}_{\delta,n} = \left\{\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^{n} \left[\left(f_i{}'(t) e^{g_i(t)}\right)^{\alpha_i - 1} \left(\frac{h_i(t)}{k_i(t)}\right)^{\beta_i} \left(\frac{h_i{}'(t))}{k_i{}'(t)}\right)^{\gamma_i}\right] dt\right\}^{\frac{1}{\delta}}, \tag{2.1.3}$$

unde f_i, g_i, h_i, k_i sunt analitice în $\mathbb{U}$ și $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt numere complexe, pentru orice $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\delta \in \mathbb{C}$, cu $Re\delta > 0$.

Legătura dintre operatorul integral din relația (2.1.3) și alți operatori integrali arată după cum urmează:

Observația 2.1.3. i) Pentru $n = 1$, $\delta = 1$, $\alpha_1 - 1 = \gamma_1 = 0$ și $k_1(z) = z$ obținem operatorul integral care a fost studiat de Kim-Merkes în [72]

$$\mathcal{F}_\alpha(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha} \mathrm{dt}.$$

ii) Dacă $n = 1$, $\delta = 1$, $\alpha_1 - 1 = \alpha_1$, $\beta_1 = \gamma_1 = 0$ și $g_1(z) = 0$, ajungem la operatorul integral care a fost introdus de Pfaltzgraff în [104]

$$\mathcal{G}_\alpha(z) = \int_0^z \left(f'(t)\right)^{\alpha} \mathrm{dt}.$$

iii) Pentru $\alpha_i - 1 = \gamma_i = 0$ și $k_i(z) = z$ obținem operatorul integral care a fost definit și studiat de D. Breaz și N. Breaz în [47]

$$\mathcal{D}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Acest operator integral este o generalizare a operatorului integral introdus de Pascu și Pescar în [91].

iv) Pentru $\alpha_i - 1 = \alpha_i$, $\beta_i = \gamma_i = 0$ și $g_i(z) = 0$ obținem operatorul integral definit și studiat de D. Breaz, Owa și N. Breaz [51]

$$\mathcal{I}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n [f_i'(t)]^{\alpha_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Acest operator integral reprezintă o generalizare a operatorului integral introdus de Pescar și Owa în [102].

v) Dacă luăm $\alpha_i - 1 = 0$, $k_i(z) = z$ și $k_i'(z) = 1$ obținem operatorul integral definit și studiat de Pescar în [97]

$$\mathcal{F}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i} \left({f_i}'(t)\right)^{\beta_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Acest operator integral reprezintă o generalizare a operatorului integral introdus de Frasin în [66] și de Oversea în [86].

vi) Pentru $\alpha_i - 1 = \alpha_i$ și $\beta_i = \gamma_i = 0$, operatorul $\mathcal{G}_{\delta,n}$ definit prin (2.1.3), se reduce la operatorul integral care a fost definit și studiat de A. Oprea și D. Breaz în [83]

$$\mathcal{G}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^n \left[\left({f_i}'(t)e^{g_i(t)}\right)^{\alpha_i}\right] \mathrm{dt}.$$

Acest operator integral este o generalizare a operatorului integral introdus de Ularu și Breaz în [117].

vii) Pentru $\alpha_i - 1 = 0$ obținem operatorul integral definit și studiat de Pescar în [97]

$$\mathcal{I}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(t)}{g_i(t)}\right)^{\gamma_i} \left(\frac{f_i'(t)}{g_i'(t)}\right)^{\delta_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Cel din urmă operator integral general a fost definit în lucrarea [8]:

$$\mathcal{T}_{\delta,n} = \left\{\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n \left[\left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i-1} (g_i'(t))^{\beta_i} \left(\frac{h_i(t)}{k_i(t)}\right)^{\gamma_i} \left(\frac{{h_i}'(t))}{{k_i}'(t)}\right)^{\delta_i}\right] dt\right\}^{\frac{1}{\delta}}, \tag{2.1.4}$$

unde f_i, g_i, h_i, k_i sunt analitice în $\mathbb{U}$ și $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{C}$ pentru orice $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\delta \in \mathbb{C}$, cu $Re\delta > 0$.

Modul în care acest operator integral din (2.1.4) poate fi redus la un alt operator integral cunoscut este prezentat mai jos:

Observația 2.1.4. i) Pentru $n = 1$, $\delta = 1$, $\alpha_1 - 1 = \alpha_1$ și $\beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 0$ obținem operatorul integral care a fost studiat de Kim-Merkes în [72]

$$\mathcal{F}_\alpha(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^\alpha \mathrm{dt}.$$

ii) Dacă $n = 1$, $\delta = 1$ și $\alpha_1 - 1 = \gamma_1 = \delta_1 = 0$ obținem operatorul integral care a fost introdus de Pfaltzgraff în [104]

$$\mathcal{G}_\alpha(z) = \int_0^z (f'(t))^\alpha \mathrm{dt}.$$

iii) Luând $\alpha_i - 1 = \alpha_i$ și $\beta_i = \gamma_i = \delta_i = 0$ obținem operatorul integral care a fost definit și studiat de D. Breaz și N. Breaz în [47]

$$\mathcal{D}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Acest operator integral este o generalizare a operatorului integral introdus de Pascu și Pescar în [91].

iv) Pentru $\alpha_i - 1 = \gamma_i = \delta_i = 0$ obținem operatorul integral care a fost definit și studiat de D. Breaz, Owa și N. Breaz în [51]

$$\mathcal{I}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n [f_i'(t)]^{\alpha_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Acest operator integral reprezintă o generalizare a operatorului integral introdus de Pescar și Owa în [102].

v) Luând $\alpha_i - 1 = \alpha_i$ și $\gamma_i = \delta_i = 0$ obținem operatorul integral care a fost introdus de Ularu în [115]

$$\mathcal{F}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i} ({g_i}'(t))^{\beta_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

vi) Dacă luăm $\alpha_i - 1 = \beta_i = 0$, $k_i(z) = z$ și $k_i'(z) = 1$ obținem operatorul integral definit și studiat de Pescar în [97]

$$\mathcal{F}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i} ({f_i}'(t))^{\beta_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Acest operator integral reprezintă o generalizare a operatorului integral introdus de Frasin în [66] și de Oversea în [86].

vii) Pentru $\alpha_i - 1 = \beta_i = 0$ obținem operatorul integral care a fost definit și studiat de Pescar în [97]

$$\mathcal{I}_n(z) = \left[\delta \int_0^z t^{\delta-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(t)}{g_i(t)}\right)^{\gamma_i} \left(\frac{f_i'(t)}{g_i'(t)}\right)^{\delta_i} \mathrm{dt}\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

viii) Pentru $\delta = 1$, $\alpha_i - 1 = \gamma_i = 0$, $\beta_i = \delta_i$ și $h_i(z) = \frac{z^2}{2}$ obținem operatorul integral introdus de Bucur și Breaz în [53]

$$\mathcal{I}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^n \left[\frac{tg_i'(t)}{k_i'(t)}\right]^{\beta_i} \mathrm{dt}.$$

Acest operator integral reprezintă o generalizare a operatorului integral introdus de Bucur, Andrei și Breaz în [57] și [58].

xi) Pentru $\delta = 1$, $\alpha_i - 1 = \delta_i = 0$, $\beta_i = \gamma_i$ și $h_i(z) = f_i(z)$ obținem operatorul integral care a fost definit și studiat de Nguyen, Oprea și Breaz în [78]

$$\mathcal{H}_{n,\alpha}(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(t)}{h_i(t)} g_i'(t)\right)^{\alpha_i} \mathrm{dt}.$$

2.2 Condiții suficiente de univalență pentru funcții analitice

În acest paragraf vom prezenta condiții suficiente care să asigure univalența operatorilor integrali descriși în secțiunea precedentă când funcțiile implicate sunt analitice.

Teorema 2.2.1. *Fie $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $c = Re\gamma > 0$ și M_i, N_i, P_i numere reale pozitive și $f_i, g_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| \leq M_i, \qquad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - 1\right| \leq N_i, \qquad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq P_i,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^n \left[|\alpha_i - 1| M_i + |\beta_i| P_i + |\gamma_i| N_i\right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci oricare ar fi numărul complex δ cu $Re\delta \geq Re\gamma$, operatorul integral $\mathcal{M}_{\delta,n}$ dat prin (2.1.1) este de clasă $\mathcal{S}$.

Dacă luăm $\delta = 1$ în Teorema 2.2.1, obținem următorul corolar:

Corolar 2.2.1.1. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$, $c = Re\gamma$, M_i, N_i, P_i numere reale pozitive și $f_i, g_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| \leq M_i, \qquad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - 1\right| \leq N_i, \qquad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq P_i,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^n \left[|\alpha_i - 1| M_i + |\beta_i| P_i + |\gamma_i| N_i\right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}_n$, definit prin

$$\mathcal{M}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{f_i(t)}{t} \right)^{\alpha_i - 1} (g_i{}'(t))^{\beta_i} \left(\frac{g_i(t))}{t} \right)^{\gamma_i} \right] dt \tag{2.2.1}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Punând $\delta = 1$ și $\gamma_i = 0$ în Teorema 2.2.1, obținem corolarul:

Corolar 2.2.1.2. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$, $c = Re\gamma$, M_i, P_i numere reale pozitive, iar $f_i, g_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left| \frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1 \right| \leq M_i, \qquad \left| \frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)} \right| \leq P_i,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| \, M_i + |\beta_i| \, P_i \right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{F}_n$, definit prin

$$\mathcal{F}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{f_i(t)}{t} \right)^{\alpha_i - 1} (g_i{}'(t))^{\beta_i} \right] dt \tag{2.2.2}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Observația 2.2.2. Operatorul integral din relația (2.2.2) este un cunoscut rezultat, dovedit în [115].

Dacă luăm $\delta = 1$ și $\beta_i = 0$ în Teorema 2.2.1, obținem corolarul:

Corolar 2.2.2.1. *Fie $\gamma, \alpha_i, \gamma_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$, $c = Re\gamma$, M_i, N_i numere reale pozitive, iar $f_i, g_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left| \frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1 \right| \leq M_i, \qquad \left| \frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - 1 \right| \leq N_i,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| \, M_i + |\gamma_i| \, N_i \right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}_n$, definit prin

$$\mathcal{G}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{f_i(t)}{t} \right)^{\alpha_i - 1} \left(\frac{g_i(t))}{t} \right)^{\gamma_i} \right] dt \tag{2.2.3}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Observația 2.2.3. Operatorul integral din relația (2.2.3) este un alt rezultat cunoscut, introdus în [83].

Dacă punem $\delta = 1$ și $\alpha_i - 1 = 0$ în Teorema 2.2.1, obținem corolarul:

Corolar 2.2.3.1. *Fie $\gamma, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$, $c = Re\gamma$, N_i, P_i numere reale pozitive, iar $g_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - 1\right| \leq N_i, \qquad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq P_i,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\beta_i| P_i + |\gamma_i| N_i\right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{I}_n$, definit prin

$$\mathcal{I}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[(g_i{}'(t))^{\beta_i} \cdot \left(\frac{g_i(t))}{t}\right)^{\gamma_i} \right] dt \tag{2.2.4}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Observația 2.2.4. Operatorul integral dat în relația (2.2.4) a fost studiat în [97].

Dacă luăm $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ în Teorema 2.2.1, obținem următorul corolar:

Corolar 2.2.4.1. *Fie α un număr complex, $Re\alpha > 0$, M, N, P numere reale pozitive și $f, g \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leq M, \qquad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)} - 1\right| \leq N, \qquad \left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right| \leq P,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, și

$$|\alpha - 1| (M + N + P) \leq \frac{(2Re\alpha + 1)^{\frac{2Re\alpha+1}{2Re\alpha}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, definit prin

$$\mathcal{M}(z) = \left\{ \alpha \int_0^z \left[f(t)g'(t)\frac{g(t))}{t} \right]^{\alpha-1} dt \right\}^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{2.2.5}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.2.5. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $c = Re\gamma > 0$ și $f_i, g_i \in \mathcal{S}$, $g_i' \in \mathcal{P}$. Dacă*

$$2\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - 1| + \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| + 2\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \leq \frac{c}{2}, \quad \text{pentru} \quad 0 < c < 1$$

sau

$$2\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - 1| + \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| + 2\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \leq \frac{1}{2}, \quad \text{pentru} \quad c \geq 1$$

atunci pentru orice număr complex δ, $Re\delta \geq c$, operatorul integral $\mathcal{M}_{\delta,n}$ definit prin (2.1.1) este de clasă $\mathcal{S}$.

Dacă luăm $\delta = 1$ în Teorema 2.2.5, obținem următorul corolar:

Corolar 2.2.5.1. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$ și $f_i, g_i \in \mathcal{S}$, $g_i' \in \mathcal{P}$. Dacă*

$$2\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - 1| + \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| + 2\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \leq \frac{Re\gamma}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}_n$ dat prin (2.2.1) aparține clasei $\mathcal{S}$.

Teorema 2.2.6. *Fie $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $c = Re\gamma > 0$, M_i, N_i, P_i, Q_i numere reale pozitive, iar $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| \leq M_i, \quad |g_i(z)| \leq N_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq P_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \leq Q_i, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| \leq 1,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| \left(M_i + N_i\right) + |\beta_i| P_i + |\gamma_i| Q_i\right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci pentru orice număr complex δ cu $Re\delta \geq Re\gamma$, operatorul integral $\mathcal{C}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.2) este de clasă $\mathcal{S}$.

Dacă luăm $\delta = 1$ în Teorema 2.2.6, obținem următorul corolar:

Corolar 2.2.6.1. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$, $c = Re\gamma$, M_i, N_i, P_i, Q_i numere reale pozitive, iar $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| \leq M_i, \quad |g_i(z)| \leq N_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq P_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \leq Q_i, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| \leq 1,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| \left(M_i + N_i\right) + |\beta_i| P_i + |\gamma_i| Q_i\right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}_n$ dat prin

$$\mathcal{C}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{f_i(t)}{t} e^{g_i(t)}\right)^{\alpha_i - 1} \left(h_i{}'(t)\right)^{\beta_i} \left(\frac{h_i(t))}{t}\right)^{\gamma_i}\right] dt, \tag{2.2.6}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Punând $\delta = 1$ și $\gamma_i = 0$ în Teorema 2.2.6, obținem corolarul:

Corolar 2.2.6.2. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$, $c = Re\gamma$, M_i, N_i, P_i numere reale pozitive, iar $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| \leq M_i, \quad |g_i(z)| \leq N_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq P_i, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| \leq 1,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| \left(M_i + N_i\right) + |\beta_i| \, P_i \right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatotul integral $\mathcal{T}_n$, dat prin

$$\mathcal{T}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{f_i(t)}{t} e^{g_i(t)} \right)^{\alpha_i - 1} \left(h_i{}'(t)\right)^{\beta_i} \right] dt, \tag{2.2.7}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Observația 2.2.7. Operatorului integral definit în (2.2.7) dacă îi punem $\beta_i = 0$, obținem un cunoscut rezultat dovedit în [111].

Dacă luăm $\delta = 1$ și $\beta_i = 0$ în Teorema 2.2.6, obținem corolarul:

Corolar 2.2.7.1. *Fie $\gamma, \alpha_i, \gamma_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$, $c = Re\gamma$, M_i, N_i, Q_i numere reale pozitive, iar $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left| \frac{z f_i'(z)}{f_i(z)} - 1 \right| \leq M_i, \quad |g_i(z)| \leq N_i, \quad \left| \frac{z h_i'(z)}{h_i(z)} - 1 \right| \leq Q_i, \quad \left| \frac{z g_i'(z)}{g_i(z)} \right| \leq 1,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| \left(M_i + N_i\right) + |\gamma_i| \, Q_i \right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{R}_n$, dat prin

$$\mathcal{R}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{f_i(t)}{t} e^{g_i(t)} \right)^{\alpha_i - 1} \left(\frac{h_i(t))}{t} \right)^{\gamma_i} \right] dt, \tag{2.2.8}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Observația 2.2.8. Punând $\gamma_i = 0$ în (2.2.8) obținem același operator integral introdus în [111].

Luând $\delta = 1$ și $\alpha_i - 1 = 0$ în Teorema 2.2.6, obținem corolarul:

Corolar 2.2.8.1. *Fie $\gamma, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$, $c = Re\gamma$, P_i, Q_i numere reale pozitive, iar $h_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left| \frac{z h_i''(z)}{h_i'(z)} \right| \leq P_i, \quad \left| \frac{z h_i'(z)}{h_i(z)} - 1 \right| \leq Q_i,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\beta_i| \, P_i + |\gamma_i| \, Q_i \right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{I}_n$, dat prin

$$\mathcal{I}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\left(h_i{}'(t)\right)^{\beta_i} \cdot \left(\frac{h_i(t))}{t} \right)^{\gamma_i} \right] dt, \tag{2.2.9}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Observația 2.2.9. Operatorul integral dat prin relația (2.2.9) este un cunoscut rezultat demonstrat în [97].

Dacă luăm $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ în Teorema 2.2.6, obținem următorul corolar:

Corolar 2.2.9.1. *Fie α un număr complex, Re$\alpha > 0$, M, N, P, Q numere reale pozitive, iar $f, g, h \in \mathcal{A}$.*

Dacă

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leq M, \quad |g(z)| \leq N, \quad \left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| \leq P, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right| \leq Q, \quad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)}\right| \leq 1,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, și

$$|\alpha - 1| (M + N + P + Q) \leq \frac{(2Re\alpha + 1)^{\frac{2Re\alpha+1}{2Re\alpha}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}$ dat prin

$$\mathcal{C}(z) = \left\{\alpha \int_0^z \left[f(t)e^{g(t)}h'(t)\frac{h(t)}{t}\right]^{\alpha-1} dt\right\}^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{2.2.10}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.2.10. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $c =$ Re$\gamma > 0$ și $f_i, h_i \in \mathcal{S}$, $h_i{}' \in \mathcal{P}$, $g_i \in \mathcal{R}$. Dacă*

$$4\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - 1| + \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| + 2\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \leq \frac{c}{2}, \quad pentru \quad 0 < c < 1$$

sau

$$4\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - 1| + \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| + 2\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \leq \frac{1}{2}, \quad pentru \quad c \geq 1$$

atunci pentru orice numar complex δ, Re$\delta \geq c$, operatorul integral $\mathcal{C}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.2) este de clasă $\mathcal{S}$.

Dacă luăm $\delta = 1$ în Teorema 2.2.10, obținem următorul corolar:

Corolar 2.2.10.1. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $0 <$ Re$\gamma \leq 1$ și $f_i, h_i \in \mathcal{S}$, $g_i, h_i{}' \in \mathcal{P}$, $g_i \in \mathcal{R}$. Dacă*

$$4\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - 1| + \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| + 2\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \leq \frac{Re\gamma}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}_n$ dat prin (2.2.6) aparține clasei $\mathcal{S}$.

Teorema 2.2.11. *Fie α un număr complex, Re$\alpha > 0$, M_i, N_i, P_i numere reale pozitive, iar $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\right| \leq M_i, \quad |g_i(z)| \leq N_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq 1 \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \leq P_i, \quad \left|\frac{z^2 g_i'(z)}{[g_i(z)]^2} - 1\right| < 1,,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$ și

$$|c| \leq 1 - \left|\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right| \left(M_i + 2N_i^2 + P_i + 3\right), \qquad c \in \mathbb{C}, \qquad c \neq -1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}_{\alpha,n}$, dat prin

$$\mathcal{C}_{\alpha,n}(z) = \left[\alpha \int_0^z t^{\alpha-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i(t)}{t} e^{g_i(t)} {h_i}'(t) \frac{h_i(t))}{t}\right)^{\alpha-1} dt\right]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (2.2.11)$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.2.12. *Fie $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $c = Re\gamma > 0$, $M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i, S_i$ numere reale pozitive, iar $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \le M_i, \quad |g_i(z)| \le N_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \le P_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| \le Q_i,$$

$$\left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \le R_i, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \le S_i,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^n \left[|\alpha_i - 1| (M_i + N_i) + |\beta_i| (P_i + Q_i) + |\gamma_i| (R_i + S_i)\right] \le \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci pentru orice număr complex δ cu, $Re\delta \ge Re\gamma$, operatorul integral $\mathcal{G}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.3) este de clasă $\mathcal{S}$.

Dacă luăm $\delta = 1$ în Teorema 2.2.12, obținem următorul corolar:

Corolar 2.2.12.1. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \le 1$, $c = Re\gamma$, $M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i, S_i$ numere reale pozitive, iar $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \le M_i, \quad |g_i(z)| \le N_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \le P_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| \le Q_i,$$

$$\left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \le R_i, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \le S_i, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| \le 1,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^n \left[|\alpha_i - 1| (M_i + N_i) + |\beta_i| (P_i + Q_i) + |\gamma_i| (R_i + S_i)\right] \le \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}_n$, dat prin

$$\mathcal{G}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^n \left[\left({f_i}'(t) e^{g_i(t)}\right)^{\alpha_i - 1} \left(\frac{h_i(t)}{k_i(t)}\right)^{\beta_i} \left(\frac{{h_i}'(t))}{{k_i}'(t)}\right)^{\gamma_i}\right] dt, \qquad (2.2.12)$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Punând $\delta = 1$ și $\gamma_i = 0$ în Teorema 2.2.12, obținem corolarul:

Corolar 2.2.12.2. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$, $c = Re\gamma$, M_i, N_i, P_i, Q_i numere reale pozitive, iar $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \leq M_i, \quad |g_i(z)| \leq N_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \leq P_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| \leq Q_i, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| \leq 1,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1|\,(M_i + N_i) + |\beta_i|\,(P_i + Q_i)\right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{V}_n$, dat prin

$$\mathcal{V}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\left({f_i}'(t)e^{g_i(t)}\right)^{\alpha_i - 1} \left(\frac{h_i(t)}{k_i(t)}\right)^{\beta_i}\right] dt, \tag{2.2.13}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Observația 2.2.13. Operatorului integral definit în (2.2.12), dacă îi punem $\beta_i = 0$, obținem cunoscutul rezultat dovedit în [83].

Dacă luăm $\delta = 1$ și $\beta_i = 0$ în Teorema 2.2.12, obținem corolarul:

Corolar 2.2.13.1. *Fie $\gamma, \alpha_i, \gamma_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$, $c = Re\gamma$, M_i, N_i, R_i, S_i numere reale pozitive și $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \leq M_i, \quad |g_i(z)| \leq N_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq R_i, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \leq S_i, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| \leq 1,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1|\,(M_i + N_i) + |\gamma_i|\,(R_i + S_i)\right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{W}_n$, dat prin

$$\mathcal{W}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\left({f_i}'(t)e^{g_i(t)}\right)^{\alpha_i - 1} \left(\frac{{h_i}'(t))}{{k_i}'(t)}\right)^{\gamma_i}\right] dt, \tag{2.2.14}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Observația 2.2.14. Punând $\gamma_i = 0$ în (2.2.13) obținem același operator integral care a fost introdus în [83].

Punând $\delta = 1$ și $\alpha_i - 1 = 0$ în Teorema 2.2.12, obținem corolarul:

Corolar 2.2.14.1. *Fie $\gamma, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \le 1$, $c = Re\gamma$, P_i, Q_i, R_i, S_i numere reale pozitive, iar $h_i, k_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \le P_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| \le Q_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \le R_i, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \le S_i,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\beta_i| \left(P_i + Q_i\right) + |\gamma_i| \left(R_i + S_i\right)\right] \le \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{I}_n$, dat prin

$$\mathcal{I}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{h_i(t)}{k_i(t)}\right)^{\beta_i} \left(\frac{{h_i}'(t))}{{k_i}'(t)}\right)^{\gamma_i}\right] dt\,, \tag{2.2.15}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Observația 2.2.15. Operatorul integral dat prin relația (2.2.14) este un cunoscut rezultat dovedit în [97].

Dacă luăm $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ în Teorema 2.2.12, obținem următorul corolar:

Corolar 2.2.15.1. *Fie α un număr complex, $Re\alpha > 0$, M, N, P, Q, R, S numere reale pozitive, iar $f, g, h, k \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le M, \quad |g(z)| \le N, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right| \le P, \quad \left|\frac{zk'(z)}{k(z)} - 1\right| \le Q,$$

$$\left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| \le R, \quad \left|\frac{zk''(z)}{k'(z)}\right| \le S, \quad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)}\right| \le 1,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$ și

$$|\alpha - 1| \left(M + N + P + Q + R + S\right) \le \frac{(2Re\alpha + 1)^{\frac{2Re\alpha+1}{2Re\alpha}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}$, dat prin

$$\mathcal{G}(z) = \left[\alpha \int_0^z t^{\alpha-1} \left(f'(t)e^{g(t)} \frac{h(t)}{k(t)} \frac{h'(t))}{k'(t)}\right)^{\alpha-1} dt\right]^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{2.2.16}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.2.16. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $c = Re\gamma > 0$ și $h_i, k_i \in \mathcal{S}$, ${f_i}', {h_i}', {k_i}' \in \mathcal{P}$, $g_i \in \mathcal{R}$. Dacă*

$$3\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - 1| + 4\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| + 2\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \le \frac{c}{2}, \quad \textit{pentru} \quad 0 < c < 1$$

sau

$$3\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - 1| + 4\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| + 2\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \le \frac{1}{2}, \quad \textit{pentru} \quad c \ge 1$$

atunci pentru orice număr complex δ, $Re\delta \ge c$, operatorul integral $\mathcal{G}_{\delta,n}$ definit prin (2.1.3) este de clasă $\mathcal{S}$.

Dacă luăm $\delta = 1$ în Teorema 2.2.16, obținem următorul corolar:

Corolar 2.2.16.1. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$ și $h_i, k_i \in \mathcal{S}$, ${f_i}', {h_i}', {k_i}' \in \mathcal{P}$, $g_i \in \mathcal{R}$. Dacă*

$$3\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - 1| + 4\sum_{i=1}^{n}|\beta_i| + 2\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i| \leq \frac{Re\gamma}{2}, \quad pentru \quad 0 < c < 1$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}_n$ definit prin (2.2.11) aparține clasei $\mathcal{S}$.

Teorema 2.2.17. *Fie $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere complexe, $Re\gamma > 0$, M_i, N_i, P_i, numere reale pozitive, iar $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \leq 1, \quad |g_i(z)| \leq M_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \leq N_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| \leq P_i,$$

$$\left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{z^2g_i'(z)}{[g_i(z)]^2} - 1\right| < 1,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$ și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{|\delta|}\left[\left(1 + 2M_i^2\right)\sum_{i-1}^{n}|\alpha_i - 1| + (N_i + P_i + 4)\sum_{i=}^{n}|\beta_i| + 2\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|\right], \ c \in \mathbb{C}, \ c \neq -1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.3) este de clasă $\mathcal{S}$.

Dacă luăm $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ în Teorema 2.2.17, obținem următorul corolar:

Corolar 2.2.17.1. *Fie α un număr complex, $Re\alpha > 0$, M, N, P numere reale pozitive, iar $f, g, h, k \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1, \quad |g(z)| \leq M, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right| \leq N, \quad \left|\frac{zk'(z)}{k(z)} - 1\right| \leq P,$$

$$\left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zk''(z)}{k'(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{z^2g'(z)}{[g(z)]^2} - 1\right| < 1,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$ și

$$|c| \leq 1 - \left|\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right|\left(2M^2 + N + P + 7\right), \qquad c \in \mathbb{C}, \qquad c \neq -1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}_{\alpha,n}$, dat prin

$$\mathcal{G}_{\alpha,n}(z) = \left[\alpha\int_0^z t^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}\left(f_i'(t)e^{g_i(t)}\frac{h_i(t)}{k_i(t)}\frac{h_i'(t))}{k_i'(t)}\right)^{\alpha-1} dt\right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{2.2.17}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.2.18. *Fie $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ numere complexe, $c = Re\gamma > 0$, $M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i, S_i$ numere reale pozitive, iar $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| \leq M_i, \quad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq N_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \leq P_i,$$

$$\left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)}-1\right|\le Q_i,\quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right|\le R_i,\quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right|\le S_i,$$

pentru $z\in\mathbb{U}$, $i=\overline{1,n}$ *și*

$$\sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i-1|\,M_i+|\beta_i|\,N_i+|\gamma_i|\,(P_i+Q_i)+|\delta_i|\,(R_i+S_i)\right]\le\frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci pentru orice număr complex δ *cu Re*$\delta\ge$ *Re*γ, *operatorul integral* $\mathcal{T}_{\delta,n}$, *dat prin (2.1.4) este de clasă* $\mathcal{S}$.

Dacă luăm $\delta=1$ *în Teorema 2.2.18, obținem următorul corolar:*

Corolar 2.2.18.1. *Fie* $\gamma,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i$ *numere complexe,* $0<$ *Re*$\gamma\le 1$, $c=$ *Re*γ, M_i,N_i,P_i,Q_i,R_i,S_i *numere reale pozitive, iar* $f_i,g_i,h_i,k_i\in\mathcal{A}$. *Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}-1\right|\le M_i,\quad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right|\le N_i,\quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}-1\right|\le P_i,$$

$$\left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)}-1\right|\le Q_i,\quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right|\le R_i,\quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right|\le S_i,$$

pentru $z\in\mathbb{U}$, $i=\overline{1,n}$ *și*

$$\sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i-1|\,M_i+|\beta_i|\,N_i+|\gamma_i|\,(P_i+Q_i)+|\delta_i|\,(R_i+S_i)\right]\le\frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}_n$ *dat prin*

$$\mathcal{T}_n(z)=\int_0^z\prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i-1}\left(g_i(t)'\right)^{\beta_i}\left(\frac{h_i(t)}{k_i(t)}\right)^{\gamma_i}\left(\frac{{h_i}'(t))}{{k_i}'(t)}\right)^{\delta_i}\right]dt, \tag{2.2.18}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Punând $\delta=1$ *și* $\delta_i=0$ *în Teorema 2.2.18, obținem corolarul:*

Corolar 2.2.18.2. *Fie* $\gamma,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ *numere complexe,* $0<$ *Re*$\gamma\le 1$, $c=$ *Re*γ, M_i,N_i,P_i,Q_i *numere reale pozitive, iar* $f_i,g_i,h_i,k_i\in\mathcal{A}$. *Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}-1\right|\le M_i,\quad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right|\le N_i,\quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}-1\right|\le P_i,\quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)}-1\right|\le Q_i,$$

pentru $z\in\mathbb{U}$, $i=\overline{1,n}$ *și*

$$\sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i-1|\,M_i+|\beta_i|\,N_i+|\gamma_i|\,(P_i+Q_i)\right]\le\frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{S}_n$, *dat prin*

$$\mathcal{S}_n(z)=\int_0^z\prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i-1}\left(g_i(t)'\right)^{\beta_i}\left(\frac{h_i(t)}{k_i(t)}\right)^{\gamma_i}\right]dt, \tag{2.2.19}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Observația 2.2.19. Operatorului integral definit în (2.2.18) dacă îi punem $\gamma_i = 0$, obținem un cunoscut rezultat demonstrat în [115].

Dacă luăm $\delta = 1$ și $\beta_i = 0$ în Teorema 2.2.18, obținem corolarul:

Corolar 2.2.19.1. *Fie $\gamma, \alpha_i, \gamma_i, \delta_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \le 1$, $c = Re\gamma$, M_i, P_i, Q_i, R_i, S_i numere reale pozitive, iar $f_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| \le M_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \le P_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| \le Q_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \le R_i, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \le S_i,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| M_i + |\gamma_i| (P_i + Q_i) + |\delta_i| (R_i + S_i)\right] \le \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{X}_n$, dat prin

$$\mathcal{X}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i - 1} \left(\frac{h_i(t)}{k_i(t)}\right)^{\gamma_i} \left(\frac{h_i{}'(t))}{k_i{}'(t)}\right)^{\delta_i}\right] dt, \tag{2.2.20}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Observația 2.2.20. În operatorul integral definit prin (2.2.19), dacă luăm $\alpha_i - 1 = 0$, obținem un alt rezultat cunoscut introdus în [97].

Punând $\delta = 1$ și $\alpha_i - 1 = 0$ în Teorema 2.2.18, obținem corolarul:

Corolar 2.2.20.1. *Fie $\gamma, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \le 1$, $c = Re\gamma$, N_i, P_i, Q_i, R_i, S_i numere reale pozitive, iar $g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$.*

Dacă

$$\left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \le N_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \le P_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| \le Q_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \le R_i, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \le S_i,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\beta_i| N_i + |\gamma_i| (P_i + Q_i) + |\delta_i| (R_i + S_i)\right] \le \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{D}_n$, dat prin

$$\mathcal{D}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\left(g_i(t)'\right)^{\beta_i} \left(\frac{h_i(t)}{k_i(t)}\right)^{\gamma_i} \left(\frac{h_i{}'(t))}{k_i{}'(t)}\right)^{\delta_i}\right] dt, \tag{2.2.21}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Observația 2.2.21. Dacă în (2.2.20) luăm $\beta_i = 0$, obținem rezultatul care a fost introdus în [97].

Dacă luăm $\delta = 1$ și $\gamma_i = 0$ în Teorema 2.2.18, obținem corolarul:

Corolar 2.2.21.1. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \delta_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$, $c = Re\gamma$, M_i, N_i, R_i, S_i numere reale pozitive, iar $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| \leq M_i, \quad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq N_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq R_i, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \leq S_i,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| M_i + |\beta_i| N_i + |\delta_i| (R_i + S_i)\right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{Y}_n$, dat prin

$$\mathcal{Y}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\alpha_i - 1} \left(g_i(t)'\right)^{\beta_i} \left(\frac{h_i{}'(t))}{k_i{}'(t)}\right)^{\delta_i}\right] dt, \tag{2.2.22}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Observația 2.2.22. Punând în (2.2.21) $\delta_i = 0$, obținem același rezultat dovedit în [115].

Dacă luăm $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ în Teorema 2.2.18, obținem următorul corolar:

Corolar 2.2.22.1. *Fie α un număr complex, $Re\alpha > 0$, M, N, P, Q, R, S numere reale pozitive, iar $f, g, h, k \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leq M, \quad \left|\frac{zg''(z)}{g(z)'}\right| \leq N, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right| \leq P,$$

$$\left|\frac{zk'(z)}{k(z)} - 1\right| \leq Q, \quad \left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| \leq R, \quad \left|\frac{zk''(z)}{k'(z)}\right| \leq S,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$, și

$$|\alpha - 1| (M + N + P + Q + R + S) \leq \frac{(2Re\alpha + 1)^{\frac{2Re\alpha+1}{2Re\alpha}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, dat prin

$$\mathcal{T}(z) = \left[\alpha \int_0^z t^{\alpha - 1} \left(f(t)g'(t)\frac{h(t)}{k(t)}\frac{h'(t))}{k'(t)}\right)^{\alpha - 1} dt\right]^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{2.2.23}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.2.23. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ numere complexe, $c = Re\gamma > 0$ și $f_i, h_i, k_i \in \mathcal{S}$, $g_i{}', h_i{}', k_i{}' \in \mathcal{P}$. Dacă*

$$2\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - 1| + \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| + 4\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| + 2\sum_{i=1}^{n} |\delta_i| \leq \frac{c}{2}, \quad pentru \quad 0 < c < 1$$

sau

$$2\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - 1| + \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| + 4\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| + 2\sum_{i=1}^{n} |\delta_i| \leq \frac{1}{2}, \quad pentru \quad c \geq 1$$

atunci pentru orice număr complex δ cu $Re\delta \geq c$, operatorul integral $\mathcal{T}_{\delta,n}$ definit prin (2.1.4) este de clasă $\mathcal{S}$.

Dacă luăm $\delta = 1$ în Teorema 2.2.23, obținem următorul corolar:

Corolar 2.2.23.1. *Fie $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ numere complexe, $0 < Re\gamma \leq 1$ și $f_i, h_i, k_i \in \mathcal{S}$, ${g_i}', {h_i}', {k_i}' \in \mathcal{P}$. Dacă*

$$2\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - 1| + \sum_{i=1}^{n}|\beta_i| + 4\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i| + 2\sum_{i=1}^{n}|\delta_i| \leq \frac{Re\gamma}{2}, \quad pentru \;\; 0 < c < 1$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}_n$ definit prin (2.2.63) aparține clasei $\mathcal{S}$.

Teorema 2.2.24. *Fie $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ numere complexe, $Re\gamma > 0$, M_i, N_i, P_i, numere reale pozitive, iar $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| \leq M_i, \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq 1, \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \leq N_i, \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| \leq P_i, \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq 1, \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \leq 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{|\delta|}\left[(2 + M_i)\sum_{i-1}^{n}|\alpha_i - 1| + \sum_{i=1}^{n}|\beta_i| + (N_i + P_i + 4)\sum_{i=}^{n}|\gamma_i| + 2\sum_{i=1}^{n}|\delta_i|\right],$$

unde $c \in \mathbb{C}$, $c \neq -1$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.4) este de clasă $\mathcal{S}$.

Dacă luăm $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ și $n = 1$ în Teorema 2.2.24, obținem următorul corolar:

Corolar 2.2.24.1. *Fie α un număr complex, $Re\alpha > 0$, M, N, P numere reale pozitive, iar $f, g, h, k \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leq M, \left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right| \leq 1, \left|\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right| \leq N, \left|\frac{zk'(z)}{k(z)} - 1\right| \leq P, \left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| \leq 1, \left|\frac{zk''(z)}{k'(z)}\right| \leq 1,$$

pentru $z \in \mathbb{U}$ și

$$|c| \leq 1 - \left|\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right|(M_i + N_i + P_i + 8), \qquad c \in \mathbb{C}, \qquad c \neq -1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, dat prin (2.2.23) este de clasă $\mathcal{S}$.

2.3 Noi condiții de univalență pentru funcții analitice

Acest paragraf extinde condițiile suficiente de univalență pentru operatorii $\mathcal{M}_{\delta,n}$ și $\mathcal{T}_{\delta,n}$ când funcțiile implicate sunt analitice, utilizând Teorema Mocanu-Șerb.

Teorema 2.3.1. *Fie numerele complexe $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $c = Re\gamma > 0$, iar M_0 soluția pozitivă a ecuației (1.1.1), cu $M_0 = 1,5936...$ și $f_i, g_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{f_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \leq M_0, \quad \left|\frac{g_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq M_0,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - 1| + \frac{2M_0}{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}\sum_{i=1}^{n}|\beta_i| + \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i| \leq 1,$$

atunci pentru orice număr complex δ, Re$\delta \geq$ Reγ, operatorul integral $\mathcal{M}_{\delta,n}$, definit prin (2.2.1) aparține clasei $\mathcal{S}$.

Mai întâi luând $\delta = 1$ în Teorema 2.3.1, obținem următorul corolar:

Corolar 2.3.1.1. *Fie numerele complexe $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $0 < Re\gamma \leq 1$, $c =$ Reγ, iar M_0 soluția pozitivă a ecuației (1.1.1), cu $M_0 = 1,5936...$ și $f_i, g_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{f_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \leq M_0, \quad \left|\frac{g_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq M_0,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - 1| + \frac{2M_0}{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}\sum_{i=1}^{n}|\beta_i| + \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i| \leq 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}_n$, definit prin (2.2.1) este de clasă $\mathcal{S}$.

Punând $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1$ în Teorema 2.3.1, obținem următorul corolar:

Corolar 2.3.1.2. *Fie α un număr complex, $a =$ Re$\alpha > 0$, iar M_0 este soluția pozitivă a ecuației (1.1.1), cu $M_0 = 1,5936...$ și $f, g \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq M_0, \quad \left|\frac{g''(z)}{g'(z)}\right| \leq M_0,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și

$$2(\alpha - 1)\left(\frac{1}{a} + \frac{M_0}{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}\right) \leq 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, definit prin (2.2.5) este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.3.2. *Fie numerele complexe $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, $c =$ Re$\gamma > 0$, iar M_0 soluția pozitivă a ecuației (1.1.1), cu $M_0 = 1,5936...$ și $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{f_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \leq M_0, \quad \left|\frac{g_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq M_0, \quad \left|\frac{h_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq M_0, \quad \left|\frac{k_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \leq M_0,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - 1| + \frac{2M_0}{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}\sum_{i=1}^{n}|\beta_i| + \frac{2}{c}\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i| + \frac{4M_0}{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}\sum_{i=1}^{n}|\delta_i| \leq 1,$$

atunci pentru orice număr complex δ, Re$\delta \geq$ Reγ, operatorul integral $\mathcal{T}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.4) este de clasă $\mathcal{S}$.

Luând $\delta = 1$ în Teorema 2.3.2, obținem următorul corolar:

Corolar 2.3.2.1. *Fie numerele complexe $\gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, $0 < Re\gamma \leq 1$, $c = Re\gamma$, iar M_0 soluția pozitivă a ecuației (1.1.1), cu $M_0 = 1,5936...$ și $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{f_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \leq M_0, \quad \left|\frac{g_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq M_0, \quad \left|\frac{h_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq M_0, \quad \left|\frac{k_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \leq M_0,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - 1| + \frac{2M_0}{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}\sum_{i=1}^{n}|\beta_i| + \frac{2}{c}\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i| + \frac{4M_0}{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}\sum_{i=1}^{n}|\delta_i| \leq 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}_n$, definit prin (2.2.18) este de clasă $\mathcal{S}$.

Luând $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1$ în Teorema 2.3.2, obținem următorul corolar:

Corolar 2.3.2.2. *Fie α un număr complex, $a = Re\alpha > 0$, iar M_0 soluția pozitiva a ecuației (1.1.1), cu $M_0 = 1,5936...$ și $f, g, h, k \in \mathcal{A}$. Dacă*

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq M_0, \quad \left|\frac{g''(z)}{g'(z)}\right| \leq M_0, \quad \left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| \leq M_0, \quad \left|\frac{k''(z)}{k'(z)}\right| \leq M_0,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$ și

$$3(\alpha - 1)\left(\frac{1}{a} + \frac{2M_0}{(2a+1)^{\frac{2a+1}{2a}}}\right) \leq 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, definit prin (2.2.20) este de clasă $\mathcal{S}$.

2.4 Condiții de univalență pentru funcții univalente

Paragraful prezent conține condiții suficiente de univalență pentru operatorii integrali prezentați în această lucrare atunci când funcțiile implicate sunt univalente, utilizând Teorema lui Nehari.

Teorema 2.4.1. *Fie $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\gamma > 0$ și funcțiile $f_i, g_i \in \mathcal{S}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z) - f_i(z)}{zf_i(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zg_i'(z) - g_i(z)}{zg_i(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{g_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și sunt satisfăcute inegalitățile

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(|\alpha_i - 1| + |\beta_i| + |\gamma_i|)}{\prod_{i=1}^{n}(|\alpha_i - 1||\beta_i||\gamma_i|)} < 1,$$

$$\prod_{i=1}^{n}(|\alpha_i - 1||\beta_i||\gamma_i|) \leq \frac{1}{\max\limits_{|z|\leq 1}\left[\left(1 - |z|^2\right)|z|\,\frac{|z|+|k|}{1+|k||z|}\right]},$$

unde

$$|k| = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)a_{2i} + 2\beta_i b_{2i} + \gamma_i b_{2i}\right]\right|}{\prod_{i=1}^{n}(|\alpha_i - 1||\beta_i||\gamma_i|)},$$

atunci oricare ar fi numărul complex δ, $Re\delta \geq Re\gamma$, funcția $\mathcal{M}_{\delta,n}$, definită în (2.1.1) este din clasa $\mathcal{S}$.

Fixând $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ în Teorem 2.4.1, obținem imediat corolarul:

Corolar 2.4.1.1. *Fie $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re\alpha > 0$ și funcțiile $f, g \in \mathcal{S}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf'(z) - f(z)}{zf(z)}\right| < 1, \quad \left|\frac{zg'(z) - g(z)}{zg(z)}\right| < 1, \quad \left|\frac{g''(z)}{g'(z)}\right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, iar constanta $|\alpha|$ satisface condiția

$$|\alpha| \leq \frac{1}{\max\limits_{|z|\leq 1}\left[\left(1 - |z|^2\right)|z| \frac{|z|+|a_2+3b_2|}{1+|a_2+3b_2||z|}\right]},$$

atunci funcția $\mathcal{M}$, definită în (2.2.5) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.4.2. *Fie $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\gamma > 0$ și funcțiile $f_i, g_i \in \mathcal{S}$, $i = \overline{1, n}$, iar M_i, N_i numere reale pozitive. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\right| < M_i, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| < N_i, \quad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, și

$$\sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i - 1|(M_i + 1) + |\beta_i| + |\gamma_i|(N_i + 1)\right] \leq \frac{1}{\max\limits_{|z|\leq 1}\left[\frac{1-|z|^{2c}}{c}\frac{|z|+|k|}{1+|k||z|}\right]},$$

unde

$$|k| = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)(a_{2i} + 1) + 2\beta_i b_{2i} + \gamma_i(b_{2i} + 1)\right]\right|}{\sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i - 1|(M_i + 1) + |\beta_i| + |\gamma_i|(N_i + 1)\right]},$$

atunci oricare ar fi numărul complex δ, $Re\delta \geq Re\gamma$, funcția $\mathcal{M}_{\delta,n}$, definită în (2.1.1) este din clasa $\mathcal{S}$.

Următorul corolar este o consecință a Teoremei 2.4.2:

Corolar 2.4.2.1. *Fie $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\delta > 0$ și funcțiile $f_i, g_i \in \mathcal{S}$, $i = \overline{1, n}$, iar M_i, N_i numere reale pozitive. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\right| \leq M_i, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| \leq N_i, \quad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq 1,$$

și

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)(a_{2i} + 1) + 2\beta_i b_{2i} + \gamma_i(b_{2i} + 1)\right]\right| \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)(a_{2i} + 1) + 2\beta_i b_{2i} + \gamma_i(b_{2i} + 1)\right]\right| = \sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i - 1|(M_i + 1) + |\beta_i| + |\gamma_i|(N_i + 1)\right],$$

atunci funcția $\mathcal{M}_{\delta,n}$, definită în (2.1.1) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.4.3. *Fie $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\gamma > 0$ și funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{S}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z) - f_i(z)}{zf_i(z)}\right| \leq 1, \quad \left|g_i'(z)\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zh_i'(z) - h_i(z)}{zh_i(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{h_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și sunt satisfăcute inegalitățile

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(|\alpha_i - 1| + |\beta_i| + |\gamma_i|\right)}{\prod_{i=1}^{n} \left(|\alpha_i - 1| \, |\beta_i| \, |\gamma_i|\right)} < 1,$$

$$\prod_{i=1}^{n} \left(|\alpha_i - 1| \, |\beta_i| \, |\gamma_i|\right) \leq \frac{1}{\max\limits_{|z| \leq 1} \left[2\left(1 - |z|^2\right)|z| \, \frac{|z| + |k|}{1 + |k||z|}\right]},$$

unde

$$|k| = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(a_{2i} + 1) + 2\beta_i c_{2i} + \gamma_i c_{2i}\right]\right|}{2\prod_{i=1}^{n} \left(|\alpha_i - 1| \, |\beta_i| \, |\gamma_i|\right)},$$

atunci oricare ar fi numărul complex δ, Re$\delta \geq$ Reγ, funcția $\mathcal{C}_{\delta,n}$, definită în (2.1.2) este din clasa $\mathcal{S}$.

Fixând $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ în Teorema 2.4.3, obținem imediat corolarul:

Corolar 2.4.3.1. *Fie $\alpha \in \mathbb{C}$, Re$\alpha > 0$ și funcțiile $f, g, h \in \mathcal{S}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf'(z) - f(z)}{zf(z)}\right| < 1, \quad \left|g'(z)\right| < 1, \quad \left|\frac{zh'(z) - h(z)}{zh(z)}\right| < 1, \quad \left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și constanta $|\alpha|$ satisface condiția

$$|\alpha| \leq \frac{1}{\max\limits_{|z| \leq 1} \left[2\left(1 - |z|^2\right)|z| \, \frac{2|z| + |a_2 + 3c_2|}{2 + |a_2 + 3c_2||z|}\right]},$$

atunci funcția $\mathcal{C}$, definită în (2.2.10) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.4.4. *Fie $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c =$ Re$\gamma > 0$ și funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{S}$, iar M_i, N_i, P_i numere reale pozitive. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\right| < M_i, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| < N_i, \quad |g_i(z)| \leq 1, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}\right| < P_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1|(M_i + N_i + 1) + |\beta_i| + |\gamma_i|(P_i + 1)\right] \leq \frac{1}{\max\limits_{|z| \leq 1} \left[\frac{1 - |z|^{2c}}{c} \, \frac{|z| + |k|}{1 + |k||z|}\right]},$$

unde

$$|k| = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(a_{2i} + b_{2i} + 1) + 2\beta_i c_{2i} + \gamma_i (c_{2i} + 1)\right]\right|}{\sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1|(M_i + N_i + 1) + |\beta_i| + |\gamma_i|(P_i + 1)\right]},$$

atunci oricare ar fi numărul complex δ, Re$\delta \geq$ Reγ, funcția $\mathcal{C}_{\delta,n}$, definită în (2.1.2) este din clasa $\mathcal{S}$.

Următorul corolar este o consecință a Teoremei 2.4.4:

Corolar 2.4.4.1. *Fie $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\delta > 0$ și funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{S}$, $i = \overline{1,n}$, iar M_i, N_i, P_i numere reale pozitive. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\right| \leq M_i, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| \leq N_i, \quad |g_i(z)| \leq 1, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}\right| \leq P_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq 1,$$

și

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(a_{2i} + b_{2i} + 1) + 2\beta_i c_{2i} + \gamma_i (c_{2i} + 1)\right]\right| \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(a_{2i} + b_{2i} + 1) + 2\beta_i c_{2i} + \gamma_i (c_{2i} + 1)\right]\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| (M_i + N_i + 1) + |\beta_i| + |\gamma_i| (P_i + 1)\right],$$

atunci funcția $\mathcal{C}_{\delta,n}$, definită în (2.1.2) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.4.5. *Fie $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\gamma > 0$ și funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{S}$. Dacă*

$$\left|\frac{f_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \leq 1, \ \left|g_i'(z)\right| \leq 1, \ \left|\frac{zh_i'(z) - h_i(z)}{zh_i(z)}\right| \leq 1, \ \left|\frac{zk_i'(z) - k_i(z)}{zh_i(z)}\right| \leq 1, \ \left|\frac{h_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq 1, \ \left|\frac{k_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \leq 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și sunt satisfăcute inegalitățile

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (|\alpha_i - 1| + |\beta_i| + |\gamma_i|)}{\prod_{i=1}^{n} (|\alpha_i - 1| |\beta_i| |\gamma_i|)} < 1,$$

$$\prod_{i=1}^{n} (|\alpha_i - 1| |\beta_i| |\gamma_i|) \leq \frac{1}{\max\limits_{|z| \leq 1} \left[2\left(1 - |z|^2\right) |z| \frac{|z| + |k|}{1 + |k||z|}\right]},$$

unde

$$|k| = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(2a_{2i} + 1) + \beta_i (c_{2i} + d_{2i}) + 2\gamma_i (c_{2i} + d_{2i})\right]\right|}{2\prod_{i=1}^{n} (|\alpha_i - 1| |\beta_i| |\gamma_i|)},$$

oricare ar fi δ, $Re\delta \geq Re\gamma$, funcția $\mathcal{G}_{\delta,n}$, definită în (2.1.3) este din clasa $\mathcal{S}$.

Fixând $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ în Teorema 2.4.5, obținem imediat corolarul:

Corolar 2.4.5.1. *Fie $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re\alpha > 0$ și funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{S}$. Dacă*

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < 1, \ \left|g'(z)\right| < 1, \ \left|\frac{zh'(z) - h(z)}{zh(z)}\right| < 1, \ \left|\frac{zk'(z) - k(z)}{zh(z)}\right| < 1, \ \left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| < 1, \ \left|\frac{k''(z)}{k'(z)}\right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și constanta $|\alpha|$ satisface condiția

$$|\alpha| \leq \frac{1}{\max\limits_{|z| \leq 1} \left[2\left(1 - |z|^2\right) |z| \frac{2|z| + |2a_2 + 3c_2 + 3d_2 + 1|}{2 + |2a_2 + 3c_2 + 3d_2 + 1||z|}\right]},$$

atunci funcția $\mathcal{G}$, definită în (2.2.16) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.4.6. *Fie $\delta,\gamma,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\in\mathbb{C}$, $c=Re\gamma>0$ și funcțiile $f_i.g_i,h_i,k_i\in\mathcal{S}$, iar M_i,N_i,P_i numere reale pozitive. Dacă*
$$\left|\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}\right|<1,\quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right|<M_i,\quad |g_i(z)|\le 1,$$
$$\left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}\right|<N_i,\quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)}\right|<P_i,\quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right|\le 1,\quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right|\le 1,$$
pentru orice $z\in\mathbb{U}$, $i=\overline{1,n}$,
$$\sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i-1|\,(M_i+1)+|\beta_i|\,(N_i+P_i+2)+2\,|\gamma_i|\right]\le\frac{1}{\underset{|z|\le 1}{max}\left[\frac{1-|z|^{2c}}{c}\frac{|z|+|k|}{1+|k||z|}\right]},$$
unde
$$|k|=\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i-1)\,(2a_{2i}+b_{2i})+\beta_i\,(c_{2i}+d_{2i}+2)+2\gamma_i\,(c_{2i}+d_{2i})\right]\right|}{\sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i-1|\,(M_i+1)+|\beta_i|\,(N_i+P_i+2)+2\,|\gamma_i|\right]},$$
atunci pentru orice δ, $Re\delta\ge Re\gamma$, funcția $\mathcal{G}_{\delta,n}$, definită prin (2.1.3) este din clasa $\mathcal{S}$.

Următorul corolar este o consecință a Teoremei 2.4.6:

Corolar 2.4.6.1. *Fie $\delta,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\in\mathbb{C}$, $c=Re\delta>0$ și funcțiile $f_i,g_i,h_i,k_i\in\mathcal{S}$, iar M_i,N_i,P_i numere reale pozitive. Dacă*
$$\left|\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}\right|\le 1,\quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right|\le M_i,\quad |g_i(z)|\le 1,$$
$$\left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}\right|\le N_i,\quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)}\right|\le P_i,\quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right|\le 1,\quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right|\le 1,$$
și
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i-1)\,(2a_{2i}+b_{2i})+\beta_i\,(c_{2i}+d_{2i}+2)+2\gamma_i\,(c_{2i}+d_{2i})\right]\right|\le\frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i-1)\,(2a_{2i}+b_{2i})+\beta_i\,(c_{2i}+d_{2i}+2)+2\gamma_i\,(c_{2i}+d_{2i})\right]\right|=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i-1|\,(M_i+1)+|\beta_i|\,(N_i+P_i+2)+2\,|\gamma_i|\right],$$
atunci funcția $\mathcal{G}_{\delta,n}$,definită în (2.1.3) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.4.7. *Fie $\delta,\gamma,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i\in\mathbb{C}$, $c=Re\gamma>0$ și funcțiile $f_i,g_i,h_i,k_i\in\mathcal{S}$. Dacă*
$$\left|\frac{zf_i'(z)-f_i(z)}{zf_i(z)}\right|\le 1,\ \left|\frac{g_i''(z)}{g_i'(z)}\right|\le 1,\ \left|\frac{zh_i'(z)-h_i(z)}{zh_i(z)}\right|\le 1,$$
$$\left|\frac{zk_i'(z)-k_i(z)}{zh_i(z)}\right|\le 1,\ \left|\frac{h_i''(z)}{h_i'(z)}\right|\le 1,\ \left|\frac{k_i''(z)}{k_i'(z)}\right|\le 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și sunt satisfăcute inegalitățile

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(|\alpha_i - 1| + |\beta_i| + |\gamma_i| + |\delta_i|\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(|\alpha_i - 1|\,|\beta_i|\,|\gamma_i|\,|\delta_i|\right)} < 1,$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(|\alpha_i - 1|\,|\beta_i|\,|\gamma_i|\,|\delta_i|\right) \le \frac{1}{\max\limits_{|z|\le 1}\left[2\left(1-|z|^2\right)|z|\,\frac{|z|+|k|}{1+|k||z|}\right]},$$

unde

$$|k| = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)\,a_{2i} + 2\beta_i b_{2i} + \gamma_i\,(c_{2i} + d_{2i}) + 2\delta_i\,(c_{2i} + d_{2i})\right]\right|}{2\prod_{i=1}^{n}\left(|\alpha_i - 1|\,|\beta_i|\,|\gamma_i|\,|\delta_i|\right)},$$

oricare ar fi δ, $Re\delta \ge Re\gamma$, funcția $\mathcal{T}_{\delta,n}$, definită în (2.1.4) este din clasa $\mathcal{S}$.

Punând $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ în Teorema 2.4.7, imediat obținem corolarul:

Corolar 2.4.7.1. *Fie $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re\alpha > 0$ și funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{S}$. Dacă*

$$\left|\frac{zf'(z) - f(z)}{zf(z)}\right| < 1, \quad \left|\frac{g''(z)}{g'(z)}\right| < 1, \quad \left|\frac{zh'(z) - h(z)}{zh(z)}\right| < 1,$$

$$\left|\frac{zk'(z) - k(z)}{zh(z)}\right| < 1, \quad \left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| < 1, \quad \left|\frac{k''(z)}{k'(z)}\right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și constanta $|\alpha|$ satisface condiția

$$|\alpha| \le \frac{1}{\max\limits_{|z|\le 1}\left[2\left(1-|z|^2\right)|z|\,\frac{2|z|+|a_2+2b_2+3c_2+3d_2|}{2+|a_2+2b_2+3c_2+3d_2||z|}\right]},$$

atunci funcția $\mathcal{T}$, definită în (2.2.23) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.4.8. *Fie $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\gamma > 0$ și funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{S}$, iar M_i, N_i, P_i numere reale pozitive. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\right| < M_i, \quad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \le 1, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}\right| < N_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)}\right| < P_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \le 1, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \le 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$,

$$\sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i - 1|\,(M_i + 1) + |\beta_i| + |\gamma_i|\,(N_i + P_i + 2) + 2\,|\delta_i|\right] \le \frac{1}{\max\limits_{|z|\le 1}\left[\frac{1-|z|^{2c}}{c}\,\frac{|z|+|k|}{1+|k||z|}\right]},$$

unde

$$|k| = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)\,(a_{2i} + 1) + 2\beta_i b_{2i} + \gamma_i\,(c_{2i} + d_{2i} + 2) + 2\delta_i\,(c_{2i} + d_{2i})\right]\right|}{\sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i - 1|\,(M_i + 1) + |\beta_i| + |\gamma_i|\,(N_i + P_i + 2) + 2\,|\delta_i|\right]},$$

atunci pentru orice δ, $Re\delta \ge Re\gamma$, funcția $\mathcal{T}_{\delta,n}$, definită prin (2.1.4) este din clasa $\mathcal{S}$.

Următorul corolar este o consecință a Teoremei 2.4.8:

Corolar 2.4.8.1. *Fie $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\delta > 0$ și funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{S}$, iar M_i, N_i, P_i numere reale pozitive. Dacă*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\right| \leq M_i, \quad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}\right| \leq N_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)}\right| \leq P_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \leq 1,$$

și

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)(a_{2i} + 1) + 2\beta_i b_{2i} + \gamma_i (c_{2i} + d_{2i} + 2) + 2\delta_i (c_{2i} + d_{2i})\right]\right| \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)(a_{2i} + 1) + 2\beta_i b_{2i} + \gamma_i (c_{2i} + d_{2i} + 2) + 2\delta_i (c_{2i} + d_{2i})\right]\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i - 1|(M_i + 1) + |\beta_i| + |\gamma_i|(N_i + P_i + 2) + 2|\delta_i|\right],$$

atunci funcția $\mathcal{T}_{\delta,n}$, definită în (2.1.4) este din clasa $\mathcal{S}$.

2.5 Condiții de univalența pentru clasa $\mathcal{G}_b$

În această secțiune prezentăm condiții suficiente de univalență a operatorilor integrali $\mathcal{M}_{\delta,n}$, $\mathcal{T}_{\delta,n}$ pentru situația când funcțiile implicate aparțin clasei funcțiilor $\mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$.

Teorema 2.5.1. *Fie numerele complexe $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $c = Re\gamma > 0$, astfel încât*

$$c \geq \sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i - 1| + (2b_i + 1)|\beta_i| + |\gamma_i|\right].$$

Dacă $g_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$, $f_i \in \mathcal{A}$ și

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - 1\right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.1) este de clasă $\mathcal{S}$.

Punând $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1$ în Teorema 2.5.1, obținem corolarul următor:

Corolar 2.5.1.1. *Fie α un număr complex, $Re\alpha > 0$, astfel încât*

$$Re\alpha \geq |\alpha - 1|(2b + 3).$$

Dacă $g \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$, $f \in \mathcal{A}$ și

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)} - 1\right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, definit prin relația (2.2.5) este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.5.2. *Fie numerele complexe $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, iar $M_i \geq 1$, $N_i \geq 1$ numere reale, pentru orice $i = \overline{1,n}$ și $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $c = Re\gamma$ și*

$$c \geq \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| (2M_i + 1) + (b_i |\beta_i| + |\beta_i| + |\gamma_i|) (2N_i + 1) + b_i |\beta_i| \right].$$

Dacă $g_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$, $f_i \in \mathcal{A}$ satisfac

$$\left| \frac{z^2 f_i'(z)}{[f_i(z)]^2} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{z^2 g_i'(z)}{[g_i(z)]^2} - 1 \right| < 1, \quad |f_i(z)| \leq M_i, \quad |g_i(z)| \leq N_i,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci pentru orice număr complex δ, cu $Re\delta \geq Re\gamma$, operatorul integral $\mathcal{M}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.1) este de clasă $\mathcal{S}$.

Punând $n = 1$, $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1$ și $b_1 = b$ în Teorema 2.5.2, obținem corolarul:

Corolar 2.5.2.1. *Fie α un număr complex, iar $M \geq 1$, $N \geq 1$ numere reale, cu $Re\alpha > 0$ și*

$$Re\alpha \geq |\alpha - 1| (2M + 2bN + 4N + 2b + 3).$$

Dacă $g \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$, $f \in \mathcal{A}$ satisfac

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{[f(z)]^2} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{z^2 g'(z)}{[g(z)]^2} - 1 \right| < 1 \quad |f(z)| \leq M, \quad |g(z)| \leq N,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, dat prin (2.2.5) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.5.3. *Fie numerele complexe $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și $\delta \in \mathbb{C}$ cu*

$$Re\delta \geq \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| + (2b_i + 1) |\beta_i| + |\gamma_i| \right],$$

și fie $c \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| + (2b_i + 1) |\beta_i| + |\gamma_i| \right].$$

Dacă $g_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$, $f_i \in \mathcal{A}$ și

$$\left| \frac{z f_i'(z)}{f_i(z)} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{z g_i'(z)}{g_i(z)} - 1 \right| < 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.1) este de clasă $\mathcal{S}$.

Luând $n = 1$, $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1$ și $b_1 = b$ în Teorema 2.5.3, obținem următorul corolar:

Corolar 2.5.3.1. *Fie* $\alpha \in \mathbb{C}^*$ *cu*

$$Re\alpha \geq |\alpha - 1| (2b+3),$$

și fie $c \in \mathbb{C}$ *astfel încât*

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\alpha} |\alpha - 1| (2b+3).$$

Dacă $g \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$, $f \in \mathcal{A}$ *și*

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{zg'(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{M}$, *dat prin (2.2.5) este din clasa* $\mathcal{S}$.

Teorema 2.5.4. *Fie numerele complexe* $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, *iar* $M_i \geq 1$, $N_i \geq 1$ *numere reale și* $\delta \in \mathbb{C}$ *cu*

$$Re\delta \geq \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| (2M_i + 1) + (b_i |\beta_i| + |\beta_i| + |\gamma_i|) (2N_i + 1) + b_i |\beta_i| \right],$$

și fie $c \in \mathbb{C}$ *astfel încât*

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| (2M_i + 1) + (b_i |\beta_i| + |\beta_i| + |\gamma_i|) (2N_i + 1) + b_i |\beta_i| \right].$$

Dacă $g_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$, $f_i \in \mathcal{A}$ *satisfac*

$$\left| \frac{z^2 f_i'(z)}{[f_i(z)]^2} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{z^2 g_i'(z)}{[g_i(z)]^2} - 1 \right| < 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{M}_{\delta,n}$, *dat prin (2.1.1) este de clasă* $\mathcal{S}$.

Luând $n = 1$, $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1$ *și* $b_1 = b$ *în Teorema 2.5.4, obținem corolarul:*

Corolar 2.5.4.1. *Fie* $\alpha \in \mathbb{C}^*$, *iar* $M \geq 1$, $N \geq 1$ *numere reale cu*

$$Re\alpha \geq |\alpha - 1| (2M + 2bN + 4N + 2b + 3),$$

și fie $c \in \mathbb{C}$, *astfel încât*

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\alpha} |\alpha - 1| (2M + 2bN + 4N + 2b + 3).$$

Dacă $g \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$, $f \in \mathcal{A}$ *satisfac*

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{[f(z)]^2} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{z^2 g'(z)}{[g(z)]^2} - 1 \right| < 1$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{M}$, *dat prin (2.2.5) este de clasă* $\mathcal{S}$.

Teorema 2.5.5. *Fie numerele complexe $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, $c = Re\gamma > 0$, astfel încât*

$$c \geq \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| + (2b_i + 1) |\beta_i| + 2 |\gamma_i| + (4b_i + 2) |\delta_i| \right].$$

Dacă pentru orice $i = \overline{1,n}$, $g_i, h_i, k_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$, $f_i \in \mathcal{A}$ și

$$\left| \frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - 1 \right| < 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.4) este de clasă $\mathcal{S}$.

Luând $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1$ în Teorema 2.5.5, obținem:

Corolar 2.5.5.1. *Fie α un număr complex, $Re\alpha > 0$, astfel încât*

$$Re\alpha \geq 6 |\alpha - 1| (b + 1).$$

Dacă $g, h, k \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$ $f \in \mathcal{A}$ și

$$\left| \frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1 \right| < 1, \left| \frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - 1 \right| < 1, \left| \frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1 \right| < 1, \left| \frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - 1 \right| < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, definit prin (2.2.23) este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.5.6. *Fie numerele complexe $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, iar $M_i \geq 1$, $N_i \geq 1$, $P_i \geq 1$, $Q_i \geq 1$ numere reale, pentru orice $i = \overline{1,n}$ și $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $c = Re\gamma$ și*

$$c \geq \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| (2M_i + 1) + (b_i |\beta_i| + |\beta_i|) (2N_i + 1) \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[(|\gamma_i| + |\delta_i| b_i + |\delta_i|) (2P_i + 2Q_i + 2) + b_i |\beta_i| + 2b_i |\delta_i| \right].$$

Dacă oricare ar fi $i = \overline{1,n}$, $g_i, h_i, k_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$ $f_i \in \mathcal{A}$ satisfac

$$\left| \frac{z^2 f_i'(z)}{[f_i(z)]^2} - 1 \right| < 1, \left| \frac{z^2 g_i'(z)}{[g_i(z)]^2} - 1 \right| < 1, \left| \frac{z^2 h_i'(z)}{[h_i(z)]^2} - 1 \right| < 1, \left| \frac{z^2 k_i'(z)}{[k_i(z)]^2} - 1 \right| < 1,$$

$$|f_i(z)| \leq M_i, \ |g_i(z)| \leq N_i, \ |h_i(z)| \leq P_i, \ |k_i(z)| \leq Q_i,$$

unde $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci pentru orice număr complex δ, cu $Re\delta \geq Re\gamma$, operatorul integral $\mathcal{T}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.4) este de clasă $\mathcal{S}$.

Luând $n = 1$, $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1$, $b_1 = b$ în Teorema 2.5.6, avem corolarul:

Corolar 2.5.6.1. *Fie α un număr complex $Re\alpha > 0$, iar $M \geq 1$, $N \geq 1$, $P \geq 1$, $Q \geq 1$ numere reale, astfel încât*

$$Re\alpha \geq \left[2 |\alpha - 1| (M + N + 2P + 2Q + 3) + 2 |\alpha - 1| b (N + P + Q + 3) \right].$$

Dacă $g, h, k \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$, $f \in \mathcal{A}$ *satisfac*

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{[f(z)]^2} - 1\right| < 1, \left|\frac{z^2 g'(z)}{[g(z)]^2} - 1\right| < 1, \left|\frac{z^2 h'(z)}{[h(z)]^2} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{z^2 k'(z)}{[k(z)]^2} - 1\right| < 1$$

$$|f(z)| \leq M, \quad |g(z)| \leq N, \quad |h(z)| \leq P, \quad |k(z)| \leq Q,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, *atunci opertorul integral* $\mathcal{T}$, *dat prin (2.2.23) este de clasă* $\mathcal{S}$.

Teorema 2.5.7. *Fie numerele complexe* $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, $\delta \in \mathbb{C}$ *cu*

$$Re\delta \geq \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| + (2b_i + 1)|\beta_i| + 2|\gamma_i| + (4b_i + 2)|\delta_i|\right]$$

și fie $c \in \mathbb{C}$ *astfel încât*

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| + (2b_i + 1)|\beta_i| + 2|\gamma_i| + (4b_i + 2)|\delta_i|\right].$$

Dacă pentru orice $i = \overline{1,n}$, $g_i, h_i, k_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$, $f_i \in \mathcal{A}$ *și*

$$\left|\frac{z f_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{z g_i'(z)}{g_i(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{z h_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{z k_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| < 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{T}_{\delta,n}$, *definit prin (2.1.4) este de clasă* $\mathcal{S}$.

Punând $n = 1$, $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1$ *și* $b_1 = b$ *în Teorema 2.5.7, obținem corolarul:*

Corolar 2.5.7.1. *Fie* $\alpha \in \mathbb{C}^*$ *cu*

$$Re\alpha \geq 6|\alpha - 1|(b + 1)$$

și fie $c \in \mathbb{C}$ *astfel încât*

$$|c| \leq 1 - \frac{6}{Re\alpha}|\alpha - 1|(b + 1).$$

Dacă pentru $g, h, k \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$, $f \in \mathcal{A}$ *și*

$$\left|\frac{z f'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1, \left|\frac{z k_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| < 1, \left|\frac{z h'(z)}{h(z)} - 1\right| < 1, \left|\frac{z k'(z)}{k(z)} - 1\right| < 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{T}$, *dat prin (2.2.23) este de clasă* $\mathcal{S}$.

Teorema 2.5.8. *Fie numerele complexe* $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, *iar* $M_i \geq 1$, $N_i \geq 1$, $P_i \geq 1$, $Q_i \geq 1$ *numere reale, pentru orice* $i = \overline{1,n}$ *și* $\delta \in \mathbb{C}$ *cu*

$$Re\delta \geq \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1|(2M_i + 1) + (b_i|\beta_i| + |\beta_i|)(2N_i + 1)\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[(|\gamma_i| + |\delta_i| b_i + |\delta_i|)(2P_i + 2Q_i + 2) + b_i|\beta_i| + 2b_i|\delta_i|\right]$$

și fie $c \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| \left(2M_i + 1\right) + \left(b_i \left|\beta_i\right| + \left|\beta_i\right|\right) \left(2N_i + 1\right) \right] -$$

$$-\frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(|\gamma_i| + |\delta_i| \, b_i + |\delta_i|\right) \left(2P_i + 2Q_i + 2\right) + b_i \left|\beta_i\right| + 2b_i \left|\delta_i\right| \right].$$

Dacă oricare ar fi $i = \overline{1,n}$, $g_i, h_i, k_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$, $f_i \in \mathcal{A}$ satisfac

$$\left| \frac{z^2 f_i'(z)}{\left[f_i(z)\right]^2} - 1 \right| < 1, \left| \frac{z^2 g_i'(z)}{\left[g_i(z)\right]^2} - 1 \right| < 1, \left| \frac{z^2 h_i'(z)}{\left[h_i(z)\right]^2} - 1 \right| < 1, \left| \frac{z^2 k_i'(z)}{\left[k_i(z)\right]^2} - 1 \right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}_{\delta,n}$ dat prin (2.1.4) este de clasă $\mathcal{S}$.

Luând $n = 1$, $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1$ și $b_1 = b$ în Teorema 2.5.8, obținem corolarul:

Corolar 2.5.8.1. *Fie $\alpha \in \mathbb{C}^*$, iar $M \geq 1$, $N \geq 1$, $P \geq 1$, $Q \geq 1$ numere reale, cu*

$$Re\alpha \geq \left[2 \left|\alpha - 1\right| \left(M + N + 2P + 2Q + 3\right) + 2 \left|\alpha - 1\right| b \left(N + P + Q + 3\right)\right]$$

și fie $c \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\alpha} \left[2 \left|\alpha - 1\right| \left(M + N + 2P + 2Q + 3\right) + 2 \left|\alpha - 1\right| b \left(N + P + Q + 3\right)\right].$$

Dacă $g, h, k \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$, $f \in \mathcal{A}$ satisfac

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{\left[f(z)\right]^2} - 1 \right| < 1, \left| \frac{z^2 g'(z)}{\left[g(z)\right]^2} - 1 \right| < 1, \left| \frac{z^2 h'(z)}{\left[h(z)\right]^2} - 1 \right| < 1, \left| \frac{z^2 k'(z)}{\left[k(z)\right]^2} - 1 \right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, dat prin (2.2.23) este de clasă $\mathcal{S}$.

2.6 Condiții de univalența pentru clasa $\mathcal{S}(p)$

Această secțiune cuprinde condiții suficiente de univalență a celor patru operatori integrali în cazul în care funcțiile implicate aparțin clasei funcțiilor $\mathcal{S}_p$, $0 < p \leq 2$.

Teorema 2.6.1. *Fie $f_i, g_i \in \mathcal{A}$, unde f_i, h_i sunt din clasa $\mathcal{S}\left(p_i\right)$, $0 < p_i \leq 2$, iar M_i, N_i sunt numere pozitive și $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, c$ numere complexe, oricare ar fi $i = \overline{1,n}$, astfel încât*

$$Re\delta > \sum_{i=1}^{n} \left\{ |\alpha_i - 1| \left[\left(1 + p_i\right) M_i + 1 \right] + |\beta_i| + |\gamma_i| \left[\left(1 + p_i\right) N_i + 1 \right] \right\}, \quad |c| \leq 1, \ c \neq -1.$$

Dacă

$$|f_i\left(z\right)| < M_i, \quad |g_i\left(z\right)| < N_i, \quad \left| \frac{g_i''(z)}{g_i'(z)} \right| \leq 1,$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left\{ |\alpha_i - 1| \left[\left(1 + p_i\right) M_i + 1 \right] + |\beta_i| + |\gamma_i| \left[\left(1 + p_i\right) N_i + 1 \right] \right\}$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.1) este de clasă $\mathcal{S}$.

Fixând $M_i = N_i = 1$ în Theorem 2.6.1, ajungem imediat la următorul corolar:

Corolar 2.6.1.1. *Fie $f_i, g_i \in \mathcal{S}(p_i)$, $0 < p_i \leq 2$ și $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, c$ numere complexe pentru orice $i = \overline{1,n}$, astfel încât*

$$Re\delta > \sum_{i=1}^{n} \left[(p_i + 2) \left(|\alpha_i - 1| + |\gamma_i| \right) + |\beta_i| \right], \quad |c| \leq 1.$$

Dacă

$$|f_i(z)| < 1, \quad |g_i(z)| < 1, \quad \left| \frac{g_i''(z)}{g_i'(z)} \right| \leq 1,$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left[(p_i + 2) \left(|\alpha_i - 1| + |\gamma_i| \right) + |\beta_i| \right],$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.1) este de clasă $\mathcal{S}$.

Dacă considerăm $n = 1$ și $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1$ în Teorema 2.6.1, obținem corolarul:

Corolar 2.6.1.2. *Fie $f, g \in \mathcal{S}(p)$, $0 < p \leq 2$, iar M, N numere reale pozitive și α, c numere complexe, astfel încât*

$$Re\alpha > |\alpha - 1| \left[(1 + p) M + (1 + p) N + 3 \right], \quad |c| \leq 1.$$

Dacă

$$|f(z)| < M, \quad |g(z)| < N, \quad \left| \frac{g''(z)}{g'(z)} \right| \leq 1,$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\alpha} |\alpha - 1| \left[(1 + p) M + (1 + p) N + 3 \right],$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, definit prin (2.2.5) este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.6.2. *Fie $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}$, unde f_i, g_i, h_i sunt din clasa $\mathcal{S}(p_i)$, $0 < p_i \leq 2$, iar M_i, N_i, P_i sunt numere reale pozitive și $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, c$ numere complexe, oricare ar fi $i = \overline{1,n}$, astfel încât*

$$Re\delta > \sum_{i=1}^{n} \left\{ |\alpha_i - 1| \left[\left(M_i + N_i^2 \right) (1 + p_i) + 1 \right] + |\beta_i| + |\gamma_i| \left[(1 + p_i) P_i + 1 \right] \right\}, \quad |c| \leq 1, \ c \neq -1.$$

Dacă

$$|f_i(z)| < M_i, \quad |g_i(z)| < N_i, \quad \left| \frac{h_i''(z)}{h_i'(z)} \right| \leq 1, \quad |h_i(z)| < P_i$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left\{ |\alpha_i - 1| \left[\left(M_i + N_i^2 \right) (1 + p_i) + 1 \right] + |\beta_i| + |\gamma_i| \left[(1 + p_i) P_i + 1 \right] \right\},$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{C}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.2) este de clasă $\mathcal{S}$.

Setând $M_i = N_i = P_i = 1$ în Teorema 2.6.2, imediat obținem următorul corolar:

Corolar 2.6.2.1. *Fie $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{S}(p_i)$, $0 < p_i \leq 2$ și $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, c$ numere complexe, pentru orice $i = \overline{1, n}$, astfel încât*

$$Re\delta > \sum_{i=1}^{n} \left[(2p_i + 3)|\alpha_i - 1| + |\beta_i| + (p_i + 2)|\gamma_i|\right], \quad |c| \leq 1.$$

Dacă

$$|f_i(z)| \leq 1, \quad |g_i(z)| \leq 1, \quad \left|\frac{h_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq 1, \quad |h_i(z)| \leq 1$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left[(2p_i + 3)|\alpha_i - 1| + |\beta_i| + (p_i + 2)|\gamma_i|\right],$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{C}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.2) este de clasă $\mathcal{S}$.

Punând $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1$ în Teorema 2.6.2, obținem:

Corolar 2.6.2.2. *Fie $f, g, h \in \mathcal{S}(p)$, $0 < p \leq 2$, iar M, N, P numere reale pozitive și α, c numere complexe, astfel încât*

$$Re\alpha > |\alpha - 1| \left[\left(M + N^2 + P\right)(1 + p) + 3\right], \quad |c| \leq 1.$$

Dacă

$$|f(z)| < M, \quad |g(z)| < N, \quad \left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| \leq 1, \quad |h(z)| < P$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\alpha} |\alpha - 1| \left[\left(M + N^2 + P\right)(1 + p) + 3\right],$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{C}$, definit prin (2.2.10) este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.6.3. *Fie $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$, unde g_i, h_i, k_i sunt din clasa $\mathcal{S}(p_i)$, $0 < p_i \leq 2$, iar M_i, N_i, P_i sunt numere reale pozitive și $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, c$ numere complexe, pentru orice $i = \overline{1, n}$, astfel încât*

$$Re\delta > \sum_{i=1}^{n} \left\{|\alpha_i - 1| \left[(1 + p_i) M_i^2 + 1\right] + |\beta_i| \left[(N_i + P_i)(1 + p_i) + 2\right] + 2|\gamma_i|\right\}, \quad |c| \leq 1, \ c \neq -1.$$

Dacă

$$|g_i(z)| < M_i, \quad |h_i(z)| < N_i, \quad |k_i(z)| < P_i, \quad \left|\frac{f_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \leq 1, \left|\frac{h_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq 1, \left|\frac{k_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \leq 1$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left\{|\alpha_i - 1| \left[(1 + p_i) M_i^2 + 1\right] + |\beta_i| \left[(N_i + P_i)(1 + p_i) + 2\right] + 2|\gamma_i|\right\},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{G}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.3) este de clasă $\mathcal{S}$.

Fixând $M_i = N_i = P_i = 1$ în Teorema 2.6.3, imediat ajungem la următorul corolar:

Corolar 2.6.3.1. *Fie $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{S}(p_i)$, $0 < p_i \leq 2$ și $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, c$ numere complexe, pentru orice $i = \overline{1,n}$, astfel încât*

$$Re\delta > \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| (2 + p_i) + 2 |\beta_i| (2 + p_i) + 2 |\gamma_i| \right], \quad |c| \leq 1.$$

Dacă

$$|g_i(z)| < 1, \quad |h_i(z)| < 1, \quad |k_i(z)| < 1, \quad \left| \frac{f_i''(z)}{f_i'(z)} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{h_i''(z)}{h_i'(z)} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{k_i''(z)}{k_i'(z)} \right| \leq 1$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| (2 + p_i) + 2 |\beta_i| (2 + p_i) + 2 |\gamma_i| \right],$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$ și $i = \overline{1,n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{G}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.3) este de clasă $\mathcal{S}$.

Dacă considerăm $n = 1$, $\delta - 1 = \gamma = \alpha$ și $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1$ in Teorema 2.6.3, avem corolarul:

Corolar 2.6.3.2. *Fie $f, g, h, k \in \mathcal{S}(p)$, $0 < p \leq 2$, iar M, N, P sunt numere reale pozitive α, c numere complexe, astfel încât*

$$Re\alpha > |\alpha - 1| \left[(1 + p) \left(M^2 + N + P \right) + 5 \right], \quad |c| \leq 1.$$

Dacă

$$|g(z)| < M, \quad |h(z)| < N, \quad |k(z)| < P, \quad \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq 1, \left| \frac{h''(z)}{h'(z)} \right| \leq 1, \left| \frac{k''(z)}{k'(z)} \right| \leq 1$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\alpha} |\alpha - 1| \left[(1 + p) \left(M^2 + N + P \right) + 5 \right],$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{G}$, definit prin (2.2.16) este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.6.4. *Fie $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$, unde f_i, h_i, k_i, aparțin clasei $\mathcal{S}(p_i)$, $0 < p_i \leq 2$, iar M_i, N_i, P_i sunt numere reale pozitive și $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, c$ numere complexe, pentru orice $i = \overline{1,n}$, astfel încât*

$$Re\delta > \sum_{i=1}^{n} \left\{ |\alpha_i - 1| \left[M_i (1 + p_i) + 1 \right] + |\beta_i| + |\gamma_i| \left[(N_i + P_i)(1 + p_i) + 2 \right] + 2 |\delta_i| \right\},$$

pentru $|c| \leq 1$, $c \neq -1$. Dacă

$$|f_i(z)| < M_i, \quad |h_i(z)| < N_i, \quad |k_i(z)| < P_i, \quad \left| \frac{g_i''(z)}{g_i'(z)} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{h_i''(z)}{h_i'(z)} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{k_i''(z)}{k_i'(z)} \right| \leq 1,$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left\{ |\alpha_i - 1| \left[M_i (1 + p_i) + 1 \right] + |\beta_i| + |\gamma_i| \left[(N_i + P_i)(1 + p_i) + 2 \right] + 2 |\delta_i| \right\},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.4) este de clasă $\mathcal{S}$.

Luând $M_i = N_i = P_i = 1$ în Teorema 2.6.4, imediat ajungem la următorul corolar:

Corolar 2.6.4.1. *Fie $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{S}(p_i)$, $0 < p_i \leq 2$ și $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, c$ numere complexe, pentru orice $i = \overline{1,n}$, astfel încât*

$$Re\delta > \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| (p_i + 2) + |\beta_i| + 2 |\gamma_i| (p_i + 2) + 2 |\delta_i| \right], \quad |c| \leq 1.$$

Dacă

$$|f_i(z)| < 1, \quad |h_i(z)| < 1, \quad |k_i(z)| < 1, \quad \left| \frac{g_i''(z)}{g_i'(z)} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{h_i''(z)}{h_i'(z)} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{k_i''(z)}{k_i'(z)} \right| \leq 1,$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| (p_i + 2) + |\beta_i| + 2 |\gamma_i| (p_i + 2) + 2 |\delta_i| \right],$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.4) este de clasă $\mathcal{S}$.

Dacă considerăm $n = 1$ și $\alpha_1 - 1 = \beta_1 = \gamma_1$ în Teorema 2.6.4, obținem:

Corolar 2.6.4.2. *Fie $f, g, h, k \in \mathcal{S}(p)$, $0 < p \leq 2$, iar M, N, P numere reale pozitive și α, c numere complexe, astfel încât*

$$Re\alpha > \left\{ |\alpha - 1| \left[(M + N + P)(1 + p) + 6 \right] \right\}, \quad |c| \leq 1.$$

Dacă

$$|f(z)| < M, \quad |h(z)| < N, \quad |k(z)| < P, \quad \left| \frac{g''(z)}{g'(z)} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{h''(z)}{h'(z)} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{k''(z)}{k'(z)} \right| \leq 1,$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\alpha} \left\{ |\alpha - 1| \left[(M + N + P)(1 + p) + 6 \right] \right\},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, definit prin (2.2.23) este de clasă $\mathcal{S}$.

2.7 Condiții de univalența pentru clasele $\mathcal{B}(\mu)$ și $\mathcal{S}_\mu$

În acest paragraf sunt descrise condiții suficiente de univalență pentru cei patru operatori integrali a căror funcții aparțin claselor funcțiilor $\mathcal{B}(\mu)$, $0 \leq \mu < 1$ și $\mathcal{S}_\mu$, $0 < \mu \leq 1$.

Teorema 2.7.1. *Fie numerele complexe $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $c = \mathrm{Re}\gamma > 0$, $i = \overline{1,n}$ și funcțiile f_i, g_i din clasa $\mathcal{B}(\mu_i)$, $0 \leq \mu_i < 1$, $i = \overline{1,n}$ care satisfac inegalitatea*

$$\sum_{i=1}^{n} (1 - \mu_i) \left(2 |\alpha_i - 1| + 3 |\beta_i| + 2 |\gamma_i| \right) \leq \begin{cases} c, & daca \quad 0 < c < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & daca \quad \frac{1}{2} < c < \infty, \end{cases}$$

atunci pentru orice numere complexe δ, $Re\delta \geq Re\gamma$, operatorul integral $\mathcal{M}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.1) este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.7.2. *Fie numerele complexe $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și funcțiile analitice f_i, g_i din clasa $\mathcal{S}_{\mu_i}$, $0 < \mu_i \leq 1$, $i = \overline{1,n}$ care satisfac inegalitatea*

$$\left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| < |z|$$

Dacă $\gamma \in \mathbb{C}$, astfel încât $\mathrm{Re}\gamma = c > 0$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i \left|\alpha_i - 1\right| + \left|\beta_i\right| + \mu_i \left|\gamma_i\right|\right) \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci pentru orice număr complex δ, $\mathrm{Re}\delta \leq c$, operatorul integral $\mathcal{M}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.1) este analitic și univalent în $\mathbb{U}$.

Luând $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ în Teorema 2.7.2, obținem corolarul:

Corolar 2.7.2.1. *Fie funcțiile analitice f, g din clasa $\mathcal{S}_\mu$, $0 < \mu \leq 1$ care satisfac inegalitatea*

$$\left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right| < |z|\,.$$

Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$, astfel încât $\mathrm{Re}\alpha = c > 0$ și

$$\left|\alpha - 1\right|(2\mu + 1) \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, dat prin (2.2.5) este analitic și univalent în $\mathbb{U}$.

Teorema 2.7.3. *Fie funcțiile analitice f_i, g_i din clasa $\mathcal{B}(\mu_i)$, $0 \leq \mu_i < 1$, $i = \overline{1,n}$ și numerele complexe $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, astfel încât $\delta \neq 0$. Presupunem că numerele reale $M_i \geq 1$, $N_i \geq 1$, pentru orice $i = \overline{1,n}$, cu $\mathrm{Re}\gamma = c > 0$ și*

$$Re\delta \geq \sum_{i=1}^{n} \left\{\left|\alpha_i - 1\right|\left[(2-\mu_i)\, M_i + 1\right] + \left|\beta_i\right| + \left|\gamma_i\right|\left[(2-\mu_i)\, N_i + 1\right]\right\}.$$

Dacă

$$\left|f_i\left(z\right)\right| \leq M_i, \quad \left|g_i\left(z\right)\right| \leq N_i, \quad \left|\frac{zg_i''\left(z\right)}{g_i'\left(z\right)}\right| \leq 1, \quad z \in \mathbb{U}, \quad i = \overline{1,n}$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left\{\left|\alpha_i - 1\right|\left[(2-\mu_i)\, M_i + 1\right] + \left|\beta_i\right| + \left|\gamma_i\right|\left[(2-\mu_i)\, N_i + 1\right]\right\}, \quad c \in \mathbb{C},\ c \neq 0,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.1) este de clasă $\mathcal{S}$.

Punând $n = 1$ și $\delta = \gamma = \lambda$, în Teorema 2.7.3, imediat obținem următorul corolar:

Corolar 2.7.3.1. *Fie funcțiile analitice f, g din clasa $\mathcal{B}(\mu)$, $0 \le \mu < 1$ și numerele complexe $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$, astfel încât $\lambda \neq 0$. Presupunem că numerele reale $M \ge 1$, $N \ge 1$ și*

$$Re\lambda \ge \{|\alpha - 1| [(2-\mu) M + 1] + |\beta| + |\gamma| [(2-\mu) N + 1]\}.$$

Dacă

$$|f(z)| \le M, \quad |g(z)| \le N, \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| \le 1, \quad z \in \mathbb{U}$$

și

$$|c| \le 1 - \frac{1}{Re\lambda} \{|\alpha - 1| [(2-\mu) M + 1] + |\beta| + |\gamma| [(2-\mu) N + 1]\}, \quad c \in \mathbb{C},\ c \neq 0$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, dat prin

$$\mathcal{M}^*(z) = \int_0^z \left[\left(\frac{f(t)}{t} \right)^{\alpha - 1} (g'(t))^{\beta} \left(\frac{g(t))}{t} \right)^{\gamma} \right] dt \tag{2.7.1}$$

este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.7.4. *Fie numerele complexe $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $c = \mathrm{Re}\gamma > 0$, $i = \overline{1,n}$ și funcțiile f_i, g_i, h_i din clasa $\mathcal{B}(\mu_i)$, $0 \le \mu_i < 1$, iar $g_i(z) \in \mathcal{R}(\mu_i)$, $i = \overline{1,n}$ care satisfac inegalitățile*

$$\sum_{i=1}^{n} (1-\mu_i)(2|\alpha_i - 1| + 3|\beta_i| + 2|\gamma_i|) + 2|\alpha_i - 1| \le \begin{cases} c, & daca \quad 0 < c < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & daca \quad \frac{1}{2} < c < \infty, \end{cases}$$

atunci pentru orice număr complex δ, $Re\delta \ge Re\gamma$, operatorul integral $\mathcal{C}_{\delta,n}$, definit prin (2.1.2) este de clasă $\mathcal{S}$.

Teorema 2.7.5. *Fie numerele complexe $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și funcțiile analitice f_i, g_i, h_i din clasa $\mathcal{S}_{\mu_i}$, $0 < \mu_i \le 1$, $i = \overline{1,n}$ care satisfac inegalitățile*

$$|g_i(z)| \le 1, \quad \left| \frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} \right| < |z|.$$

Dacă $\gamma \in \mathbb{C}$ astfel încât $\mathrm{Re}\gamma = c > 0$ și

$$\sum_{i=1}^{n} [(2\mu_i + 1)|\alpha_i - 1| + |\beta_i| + \mu_i |\gamma_i|] \le \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci pentru orice număr complex δ, $\mathrm{Re}\delta \le c$, operatorul general integral $\mathcal{C}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.2) este analitic și univalent în $\mathbb{U}$.

Luând $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ în Teorema 2.7.5, obținem corolarul:

Corolar 2.7.5.1. *Fie funcțiile analitice f, g, și h din clasa $\mathcal{S}_\mu$, $0 < \mu \le 1$ care satisfac inegalitățile*

$$|g(z)| \le 1, \quad \left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right| < |z|.$$

Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $\mathrm{Re}\alpha = c > 0$ și

$$|\alpha - 1| (3\mu + 2) \le \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}$, definit prin (2.2.10) este analitic și univalent în $\mathbb{U}$.

Teorema 2.7.6. *Fie funcțiile analitice f_i, g_i și h_i din clasa $\mathcal{B}(\mu_i)$, $0 \leq \mu_i < 1$, $i = \overline{1,n}$ și numerele complexe $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, astfel încât $\delta \neq 0$. Presupunem că numerele reale $M_i \geq 1$, $N_i \geq 1$, $P_i \geq 1$ pentru orice $i = \overline{1,n}$, cu* $\mathrm{Re}\gamma = c > 0$ *și*

$$Re\delta \geq \sum_{i=1}^{n} \left\{ |\alpha_i - 1| \left[(2-\mu_i) \left(M_i + N_i^2 \right) + 1 \right] + |\beta_i| + |\gamma_i| \left[(2-\mu_i) P_i + 1 \right] \right\}.$$

Dacă

$$|f_i(z)| \leq M_i, \quad |g_i(z)| \leq N_i, \quad |h_i(z)| \leq P_i, \quad \left| \frac{z h_i''(z)}{h_i'(z)} \right| \leq 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left\{ |\alpha_i - 1| \left[(2-\mu_i) \left(M_i + N_i^2 \right) + 1 \right] + |\beta_i| + |\gamma_i| \left[(2-\mu_i) P_i + 1 \right] \right\},$$

$c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, atunci operatorul general integral $\mathcal{C}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.2) este din clasa $\mathcal{S}$.

Luând $n = 1$ și $\delta = \gamma = \alpha$ în Teorema 2.7.6, obținem corolarul:

Corolar 2.7.6.1. *Fie funcțiile analitice f, g și h din clasa $\mathcal{B}(\mu)$, $0 \leq \mu < 1$, și numerele complexe $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$, cu $\lambda \neq 0$. Presupunem că numerele reale $M \geq 1$, $N \geq 1$, $P \geq 1$ și*

$$Re\lambda \geq \left\{ |\alpha - 1| \left[(2-\mu) \left(M + N^2 \right) + 1 \right] + |\beta| + |\gamma| \left[(2-\mu) P + 1 \right] \right\}$$

Dacă

$$|f(z)| \leq M, \quad |g(z)| \leq N, \quad |g(z)| \leq P, \quad \left| \frac{z h''(z)}{h'(z)} \right| \leq 1, \quad z \in \mathbb{U}$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\lambda} \left\{ |\alpha - 1| \left[(2-\mu) \left(M + N^2 \right) + 1 \right] + |\beta| + |\gamma| \left[(2-\mu) P + 1 \right] \right\}, \quad c \in \mathbb{C},\ c \neq 0,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}^*$, definit prin

$$\mathcal{C}^*(z) = \int_0^z \left[\left(\frac{f(t)}{t} e^{g(t)} \right)^{\alpha-1} (h'(t))^{\beta} \left(\frac{h(t))}{t} \right)^{\gamma} \right] dt, \tag{2.7.2}$$

este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.7.7. *Fie numerele complexe $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $c = \mathrm{Re}\gamma > 0$ și funcțiile f_i, h_i, k_i din clasa $\mathcal{B}(\mu_i)$, $0 \leq \mu_i < 1$, iar $g_i(z) \in \mathcal{R}(\mu_i)$, $i = \overline{1,n}$ care satisfac inegalitatea*

$$\sum_{i=1}^{n} (1-\mu_i) \left(3|\alpha_i - 1| + 4|\beta_i| + 6|\gamma_i| \right) + 2|\alpha_i - 1| \leq \begin{cases} c, & daca \quad 0 < c < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & daca \quad \frac{1}{2} < c < \infty, \end{cases}$$

atunci pentru orice număr complex δ, $Re\delta \geq Re\gamma$, operatorul integral $\mathcal{G}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.3) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.7.8. *Fie numerele complexe $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și funcțiile analitice f_i, g_i, h_i, k_i este din clasa $\mathcal{S}_{\mu_i}$, $0 < \mu_i \leq 1$, $i = \overline{1,n}$ care satisfac inegalitățile*

$$|g_i(z)| \leq 1, \quad \left|\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}\right| < |z|, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| < |z|, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| < |z|.$$

Dacă $\gamma \in \mathbb{C}$, astfel încât $\mathrm{Re}\gamma = c > 0$ și

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(2+\mu_i)|\alpha_i - 1| + 2\mu_i|\beta_i| + 2|\gamma_i|\right] \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci pentru orice număr complex δ, $\mathrm{Re}\delta \leq c$, operatorul general integral $\mathcal{G}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.3) este analitic și univalent în $\mathbb{U}$.

Luând $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ în Teorema 2.7.8, obținem corolarul:

Corolar 2.7.8.1. *Fie funcțiile analitice f, g, h, k din clasa $\mathcal{S}_\mu$, $0 < \mu \leq 1$ care satisfac inegalitățile*

$$|g(z)| \leq 1, \quad \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < |z|, \quad \left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| < |z|, \quad \left|\frac{zk''(z)}{k'(z)}\right| < |z|.$$

Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ cu $\mathrm{Re}\alpha = c > 0$ și

$$|\alpha - 1|(3\mu + 4) \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}$, dat prin (2.2.16) este analitic și univalent în $\mathbb{U}$.

Teorema 2.7.9. *Fie funcțiile analitice f_i, g_i, h_i, k_i din clasa $\mathcal{B}(\mu_i)$, $0 \leq \mu_i < 1$ și numerele complexe $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, astfel încât $\delta \neq 0$. Presupunem că numerele reale $M_i \geq 1$, $N_i \geq 1$, $P_i \geq 1$, pentru orice $i = \overline{1,n}$, cu $\mathrm{Re}\gamma = c > 0$ și*

$$Re\delta \geq \sum_{i=1}^{n}\left\{|\alpha_i - 1|\left[1 + (2-\mu_i)M_i^2\right] + |\beta_i|\left[(2-\mu_i)(N_i + P_i) + 2\right] + 2|\gamma_i|\right\}.$$

Dacă

$$|g_i(z)| \leq M_i, \quad |h_i(z)| \leq N_i, \quad |k_i(z)| \leq P_i,$$

$$\left|\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \leq 1, \quad z \in \mathbb{U}, \quad i = \overline{1,n}$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta}\sum_{i=1}^{n}\left\{|\alpha_i - 1|\left[1 + (2-\mu_i)M_i^2\right] + |\beta_i|\left[(2-\mu_i)(N_i + P_i) + 2\right] + 2|\gamma_i|\right\}, \ c \in \mathbb{C}, \ c \neq 0,$$

atunci operatorul general integral $\mathcal{G}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.3) este din clasa $\mathcal{S}$.

Luând $n = 1$ și $\delta = \gamma = \lambda$ în Teorema 2.7.9, obținem următorul corolar:

Corolar 2.7.9.1. *Fie funcțiile analitice f, g, h, k din clasa $\mathcal{B}(\mu)$, $0 \leq \mu < 1$, și numerele complexe $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$, astfel încât $\lambda \neq 0$. Presupunem că numerele reale $M \geq 1$, $N \geq 1$, $P \geq 1$ și*

$$Re\lambda \geq \left\{ |\alpha - 1| \left[1 + (2-\mu) M^2 \right] + |\beta| \left[(2-\mu)(N+P) + 2 \right] + 2|\gamma| \right\}.$$

Dacă

$$|g(z)| \leq M, \quad |h(z)| \leq N, \quad |k(z)| \leq P,$$
$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{zk''(z)}{k'(z)} \right| \leq 1, \quad z \in \mathbb{U}$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\lambda} \left\{ |\alpha - 1| \left[1 + (2-\mu) M^2 \right] + |\beta| \left[(2-\mu)(N+P) + 2 \right] + 2|\gamma| \right\}, \ c \in \mathbb{C}, \ c \neq 0$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}^*$, dat prin

$$\mathcal{G}^*(z) = \int_0^z \left[\left(f'(t) e^{g(t)} \right)^{\alpha - 1} \left(\frac{h(t)}{k(t)} \right)^{\beta} \left(\frac{h'(t))}{k'(t)} \right)^{\gamma} \right] dt, \tag{2.7.3}$$

este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.7.10. *Fie numerele complexe $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, $c = \mathrm{Re}\gamma > 0$, $i = \overline{1,n}$ și funcțiile f_i, g_i, h_i, k_i din clasa $\mathcal{B}(\mu_i)$, $0 \leq \mu_i < 1$, $i = \overline{1,n}$ care satisfac inegalitatea*

$$\sum_{i=1}^{n} (1-\mu_i)(2|\alpha_i - 1| + 3|\beta_i| + 4|\gamma_i| + 6|\delta_i|) \leq \begin{cases} c, & daca \quad 0 < c < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & daca \quad \frac{1}{2} < c < \infty \end{cases},$$

atunci pentru orice număr complex δ, $Re\delta \geq Re\gamma$, operatorul integral $\mathcal{T}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.4) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.7.11. *Fie numerele complexe $\gamma, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ și funcțiile analitice f_i, g_i, h_i, k_i din clasa $\mathcal{S}_{\mu_i}$, $0 < \mu_i \leq 1$, $i = \overline{1,n}$ care satisfac inegalitățile*

$$\left| \frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)} \right| < |z|, \quad \left| \frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} \right| < |z|, \quad \left| \frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)} \right| < |z|.$$

Dacă $\gamma \in \mathbb{C}$, astfel încât $\mathrm{Re}\gamma = c > 0$ și

$$\sum_{i=1}^{n} (\mu_i |\alpha_i - 1| + |\beta_i| + 2\mu_i |\gamma_i| + 2|\delta_i|) \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci pentru orice număr complex δ, $\mathrm{Re}\delta \leq c$, operatorul general integral $\mathcal{T}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.4) este analitic și univalent în $\mathbb{U}$.

Luând $n = 1$, $\delta = \gamma = \alpha$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i$ în Teorema 2.7.11, obținem:

Corolar 2.7.11.1. *Fie funcțiile analitice f, g, h, k din clasa $\mathcal{S}_\mu$, $0 < \mu \leq 1$ care satisfac inegalitățile*

$$\left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right| < |z|\,, \quad \left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| < |z|\,, \quad \left|\frac{zk''(z)}{k'(z)}\right| < |z|\,.$$

Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$, cu $\mathrm{Re}\alpha = c > 0$ și

$$3\,|\alpha - 1|\,(\mu + 1) \leq \frac{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}{2},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, definit în (2.2.23) este analitic și univalent în $\mathbb{U}$.

Teorema 2.7.12. *Fie funcțiile analitice f_i, g_i, h_i, k_i din clasa $\mathcal{B}(\mu_i)$, $0 \leq \mu_i < 1$, $i = \overline{1,n}$ și numerele complexe $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, astfel încât $\delta \neq 0$. Presupunem că numerele reale $M_i \geq 1$, $N_i \geq 1$, $P_i \geq 1$, pentru orice $i = \overline{1,n}$, cu $\mathrm{Re}\gamma = c > 0$ și*

$$Re\delta \geq \sum_{i=1}^{n} \left\{|\alpha_i - 1|\left[(2-\mu_i)\,M_i + 1\right] + |\beta_i| + |\gamma_i|\left[(2-\mu_i)\,N_i + (2-\mu_i)\,P_i + 2\right] + 2\,|\delta_i|\right\}.$$

Dacă

$$|f_i(z)| \leq M_i, \quad |h_i(z)| \leq N_i, \quad |k_i(z)| \leq P_i, \quad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \leq 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\delta}\sum_{i=1}^{n}\left\{|\alpha_i - 1|\left[(2-\mu_i)\,M_i + 1\right] + |\beta_i|\right\} -$$

$$-\frac{1}{Re\delta}\sum_{i=1}^{n}\left\{|\gamma_i|\left[(2-\mu_i)\,N_i + (2-\mu_i)\,P_i + 2\right] + 2\,|\delta_i|\right\}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}_{\delta,n}$, dat prin (2.1.4) este din clasa $\mathcal{S}$.

Luând $n = 1$ și $\delta = \gamma = \lambda$, în Teorema 2.7.12, imediat obținem corolarul:

Corolar 2.7.12.1. *Fie funcțiile analitice f, g, h, k din clasa $\mathcal{B}(\mu)$, $0 \leq \mu < 1$, și numerele complexe $\lambda, \alpha, \beta, \gamma, , \delta$, cu $\lambda \neq 0$. Presupunem că numerele reale $M \geq 1$, $N \geq 1$, $P \geq 1$ și*

$$Re\lambda \geq \left\{|\alpha - 1|\left[(2-\mu)\,M + 1\right] + |\beta| + |\gamma|\left[(2-\mu)\,N + (2-\mu)\,P + 2\right] + |\delta|\right\}.$$

Dacă

$$|f(z)| \leq M, \quad |h(z)| \leq N, \quad |k(z)| \leq P,$$

$$\left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zk''(z)}{k'(z)}\right| \leq 1, z \in \mathbb{U}$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{1}{Re\lambda}\left\{|\alpha - 1|\left[(2-\mu)\,M + 1\right] + |\beta| + |\gamma|\left[(2-\mu)\,N + (2-\mu)\,P + 2\right] + |\delta|\right\},\ c \in \mathbb{C},\ c \neq 0,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, dat prin

$$\mathcal{T}^*(z) = \int_0^z \left[\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1}\left(g(t)'\right)^{\beta}\left(\frac{h(t)}{k(t)}\right)^{\gamma}\left(\frac{h'(t))}{k'(t)}\right)^{\delta}\right] dt, \tag{2.7.4}$$

este din clasa $\mathcal{S}$.

2.8 Condiții de univalența pentru clasa $\mathcal{B}(\mu,\alpha)$

Paragraful acesta prezintă condiții suficiente de univalență pentru operatorii integrali ai acestei lucrări în situația când funcțiile lor aparțin clasei funcțiilor $\mathcal{B}(\mu,\alpha)$, $0\le\alpha<1$, $\mu\ge 0$.

Teorema 2.8.1. *Punând $\mu_i=\nu_i=M_i=N_i=P_i=1$ și $\eta_i=\lambda_i$ pentru orice $i=\overline{1,n}$ în Teorema 2.8.1, obținem corolarul:*

Corolar 2.8.1.1. *Fie $\delta,\gamma,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\in\mathbb{C}$, $c=Re\gamma>0$ și $0\le\lambda_i<1$, $i=\overline{1,n}$, astfel încât*

$$(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}\sum_{i=1}^{n}(3-\lambda_i)\left(|\alpha_i-1|+|\gamma_i|\right)+2c\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|\le c\,(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}\ .$$

Dacă funcțiile $f_i,g_i\in\mathcal{S}^*(\lambda_i)$ și

$$|f_i(z)|<1,\quad \left|\frac{g_i''(z)}{g_i'(z)}\right|\le 1,\quad |g_i(z)|<1,$$

pentru orice $z\in\mathbb{U}$, $i=\overline{1,n}$, atunci oricare ar fi numărul complex δ, $Re\delta\ge Re\gamma$, funcția $\mathcal{M}_{\delta,n}$, definită în (2.1.1) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.8.2. *Fie $c,\delta,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\in\mathbb{C}$, $Re\delta>0$ și numerele reale $M_i,N_i,P_i\ge 1$, $i=\overline{1,n}$. Presupunem că funcțiile $f_i\in\mathcal{B}(\mu_i,\lambda_i)$, $g_i\in\mathcal{B}(\nu_i,\eta_i)$, $0\le\lambda_i,\eta_i<1$, $\mu_i,\nu_i\ge 0$ satisfac inegalitățile*

$$|f_i(z)|<M_i,\quad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right|<N_i,\quad |g_i(z)|<P_i.$$

Dacă

$$Re\delta\ge\sum_{i=1}^{n}\left\{|\alpha_i-1|\left[1+(2-\lambda_i)M_i^{\mu_i-1}\right]+|\beta_i|N_i+|\gamma_i|\left[1+(2-\eta_i)P_i^{\nu_i-1}\right]\right\}$$

și

$$|c|\le 1-\frac{1}{Re\delta}\sum_{i=1}^{n}\left\{|\alpha_i-1|\left[1+(2-\lambda_i)M_i^{\mu_i-1}\right]+|\beta_i|N_i+|\gamma_i|\left[1+(2-\eta_i)P_i^{\nu_i-1}\right]\right\},$$

pentru orice $z\in\mathbb{U}$, $i=\overline{1,n}$, atunci funcția $\mathcal{M}_{\delta,n}$, definită în (2.1.1) este din clasa $\mathcal{S}$.

Punând $\mu_i=\nu_i=M_i=N_i=P_i=1$ și $\eta_i=\lambda_i$ oricare ar fi $i=\overline{1,n}$ în Teorema 2.8.3, obținem corolarul:

Corolar 2.8.2.1. *Fie $c,\delta,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\in\mathbb{C}$ cu $Re\delta>0$. Presupunem că funcțiile $f_i,g_i\in\mathcal{S}^*(\lambda_i)$, $0\le\lambda_i<1$ satisfac inegalitățile*

$$|f_i(z)|<1,\quad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right|<1,\quad |g_i(z)|<1.$$

Dacă

$$Re\delta\ge\sum_{i=1}^{n}\left[(3-\lambda_i)\left(|\alpha_i-1|+|\gamma_i|\right)+|\beta_i|\right]$$

și

$$|c|\le 1-\frac{1}{Re\delta}\sum_{i=1}^{n}\left[(3-\lambda_i)\left(|\alpha_i-1|+|\gamma_i|\right)+|\beta_i|\right],$$

pentru orice $z\in\mathbb{U}$, $i=\overline{1,n}$, atunci funcția $\mathcal{M}_{\delta,n}$, definită în (2.1.1) este din clasa $\mathcal{S}$.

Dacă considerăm $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta$ în Teorema 2.8.3, obținem

Corolar 2.8.2.2. *Fie $c, \delta \in \mathbb{C}$ cu Re$\delta > 0$ și numerele reale $M, N, P \geq 1$. Presupunem că funcțiile $f \in \mathcal{B}(\mu, \lambda)$, $g \in \mathcal{B}(\nu, \eta)$, $0 \leq \lambda, \eta < 1$, $\mu, \nu \geq 0$ astfel încât*

$$|f(z)| < M, \quad \left| \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right| < N, \quad |g(z)| < P.$$

Dacă

$$\mathit{Re}\delta \geq |\delta| \left[(2-\lambda) M^{\mu-1} + (2-\eta) P^{\nu-1} + N + 2 \right]$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{|\delta|}{\mathit{Re}\delta} \left[(2-\lambda) M^{\mu-1} + (2-\eta) P^{\nu-1} + N + 2 \right],$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, dat prin (2.2.5) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.8.3. *Fie $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c = $ Re$\delta > 0$, M_0 este soluția pozitivă a ecuației (1.1.1.), $M_0 = 1,5936...$ și funcțiile $f_i \in \mathcal{B}(\mu_i, \lambda_i)$, $g_i \in \mathcal{B}(\nu_i, \eta_i)$, $0 \leq \lambda_i, \eta_i < 1$, $\mu_i, \nu_i \geq 0$ pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$. Presupunem de asemenea că au loc inegalitățile*

$$|f_i(z)| < M_i, \quad \left| \frac{g_i''(z)}{g_i'(z)} \right| < M_0,$$

unde M_i sunt numere reale pozitive. Dacă

$$\frac{1}{c} \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| (2-\lambda_i) M_i^{\mu_i - 1} + |\beta_i| \right] + \frac{2}{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}} \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| M_0 \leq 1,$$

atunci funcția $\mathcal{M}_{\delta,n}$, definită în (2.1.1) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.8.4. *Fie $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c = $ Re$\gamma > 0$ și numerele reale $M_i, N_i, P_i, Q_i \geq 1$, $i = \overline{1,n}$, astfel încât*

$$(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}} \sum_{i=1}^{n} \left\{ |\alpha_i - 1| \left[1 + (2-\lambda_i) M_i^{\mu_i - 1} \right] + |\gamma_i| \left[1 + (2-\rho_i) Q_i^{\theta_i - 1} \right] \right\} +$$

$$+ 2c \sum_{i=1}^{n} \left[|\alpha_i - 1| (2-\eta_i) N_i^{\nu_i} + |\beta_i| P_i \right] \leq c (2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}.$$

Dacă funcțiile $f_i \in \mathcal{B}(\mu_i, \lambda_i)$, $g_i \in \mathcal{B}(\nu_i, \eta_i)$, $h_i \in \mathcal{B}(\theta_i, \rho_i)$, $0 \leq \lambda_i, \eta_i, \rho_i < 1$, $\mu_i, \nu_i, \theta_i \geq 0$ satisfac inegalitățile

$$|f_i(z)| < M_i, \quad |g_i(z)| < N_i, \quad \left| \frac{h_i''(z)}{h_i'(z)} \right| \leq P_i, \quad |h_i(z)| < Q_i,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci pentru orice număr complex δ, Re$\delta \geq$ Reγ, funcția $\mathcal{C}_{\delta,n}$, definită în (2.1.2) este din clasa $\mathcal{S}$.

Luând $\mu_i = \nu_i = \theta_i = M_i = N_i = P_i = Q_i = 1$ și $\rho_i = \eta_i = \lambda_i$ pentru orice $i = \overline{1,n}$ în Teorema 2.8.5, obținem corolarul:

Corolar 2.8.4.1. *Fie $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\gamma > 0$ și $0 \le \lambda_i < 1$, $i = \overline{1,n}$, astfel încât*

$$(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}} \sum_{i=1}^{n} (3-\lambda_i)(|\alpha_i - 1| + |\gamma_i|) + 2c \sum_{i=1}^{n} [|\alpha_i - 1|(2-\lambda_i) + |\beta_i|] \le c(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}.$$

Dacă funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{S}^*(\lambda_i)$ și

$$|f_i(z)| < 1, \quad |g_i(z)| < 1, \quad \left|\frac{h_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \le 1, \quad |h_i(z)| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci oricare ar fi numărul complex δ, $Re\delta \ge Re\gamma$, funcția $\mathcal{C}_{\delta,n}$, definită în (2.1.2) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.8.5. *Fie $c, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $Re\delta > 0$ și numerele reale $M_i, N_i, P_i, Q_i \ge 1$, $i = \overline{1,n}$. Presupunem că funcțiile $f_i \in \mathcal{B}(\mu_i, \lambda_i)$, $g_i \in \mathcal{B}(\nu_i, \eta_i)$, $h_i \in \mathcal{B}(\theta_i, \nu_i)$, $0 \le \lambda_i, \eta_i, \rho_i < 1$, $\mu_i, \nu_i, \theta_i \ge 0$ satisfac inegalitățile*

$$|f_i(z)| < M_i, \quad \left|zg_i'(z)\right| < N_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| < P_i, \quad |h_i(z)| < Q_i,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$. Dacă

$$Re\delta \ge \sum_{i=1}^{n} \left\{|\alpha_i - 1|\left[1 + (2-\lambda_i) M_i^{\mu_i - 1} + N_i\right] + |\beta_i| P_i + |\gamma_i|\left[1 + (2-\rho_i) Q_i^{\theta_i - 1}\right]\right\}$$

și

$$|c| \le 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} \left\{|\alpha_i - 1|\left[1 + (2-\lambda_i) M_i^{\mu_i - 1} + N_i\right] + |\beta_i| P_i + |\gamma_i|\left[1 + (2-\rho_i) Q_i^{\theta_i - 1}\right]\right\},$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci funcția $\mathcal{C}_{\delta,n}$, definită în (2.1.2) este din clasa $\mathcal{S}$.

Luând $\mu_i = \nu_i = \theta_i = M_i = N_i = P_i = Q_i = 1$ și $\rho_i = \eta_i = \lambda_i$ pentru orice $i = \overline{1,n}$ în Teorema 2.8.6, obținem corolarul:

Corolar 2.8.5.1. *Fie $c, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$ cu $Re\delta > 0$. Presupunem că funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{S}^*(\lambda_i)$, $0 \le \lambda_i < 1$ satisfac inegalitățile*

$$|f_i(z)| < 1, \quad \left|zg_i'(z)\right| < 1, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| < 1, \quad |h_i(z)| < 1, .$$

Dacă

$$Re\delta \ge \sum_{i=1}^{n} [(4-\lambda_i)|\alpha_i - 1| + |\beta_i| + |\gamma_i|(3-\lambda_i)]$$

și

$$|c| \le 1 - \frac{1}{Re\delta} \sum_{i=1}^{n} [(4-\lambda_i)|\alpha_i - 1| + |\beta_i| + |\gamma_i|(3-\lambda_i)],$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci funcția $\mathcal{C}_{\delta,n}$, definită în (2.1.2) este din clasa $\mathcal{S}$.

Dacă considerăm $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta$ în Teorema 2.8.6, obținem

Corolar 2.8.5.2. *Fie $c, \delta \in \mathbb{C}$ cu Re$\delta > 0$ și numerele reale $M, N, P, Q \geq 1$. Presupunem că funcțiile $f \in \mathcal{B}(\mu, \lambda)$, $g \in \mathcal{B}(\nu, \eta)$, $h \in \mathcal{B}(\theta, \rho)$, $0 \leq \lambda, \eta, \rho < 1$, $\mu, \nu, \theta \geq 0$ astfel încât*

$$|f(z)| < M, \quad \left|zg^{'}(z)\right| < N, \quad \left|\frac{zh^{''}(z)}{h^{'}(z)}\right| < P, \quad |h(z)| < Q.$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$. Dacă

$$\textit{Re}\delta \geq |\delta| \left[(2-\lambda) M^{\mu-1} + (2-\rho) Q^{\theta-1} + N + P + 2\right]$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{|\delta|}{\textit{Re}\delta} \left[(2-\lambda) M^{\mu-1} + (2-\rho) Q^{\theta-1} + N + P + 2\right],$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}$, definit în (2.2.10) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.8.6. *Fie $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c =$ Re$\delta > 0$, M_0 este soluția pozitivă a ecuației (1.1.1), $M_0 = 1,5936...$ și funcțiile $f_i \in \mathcal{B}(\mu_i, \lambda_i)$, $g_i \in \mathcal{B}(\nu_i, \eta_i)$, $h_i \in \mathcal{A}$, $0 \leq \lambda_i, \eta_i < 1$, $\mu_i, \nu_i \geq 0$ pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$. Presupunem de asemenea că au loc inegalitățile*

$$|f_i(z)| < M_i, \quad |g_i(z)| < N_i, \quad \left|\frac{h_i^{''}(z)}{h_i^{'}(z)}\right| < M_0,$$

unde M_i, N_i sunt numere reale pozitive. Dacă

$$\frac{1}{c} \sum_{i=1}^{n} \left\{|\alpha_i - 1| \left[1 + (2-\lambda_i) M_i^{\mu_i - 1}\right] + |\gamma_i|\right\} +$$

$$+ \frac{2}{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}} \sum_{i=1}^{n} \left[|\beta_i| M_0 + |\gamma_i| |\alpha_i - 1| (2-\eta_i) N_i^{\nu_i}\right] \leq 1,$$

atunci funcția $\mathcal{C}_{\delta,n}$, definită în (2.1.2) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.8.7. *Fie $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c =$ Re$\gamma > 0$ și numerele reale M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i, $S_i \geq 1$, $i = \overline{1, n}$, astfel încât*

$$(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}} \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| \left[(2-\eta_i) P_i^{\nu_i - 1} + (2-\rho_i) Q_i^{\theta_i - 1} + 2\right] +$$

$$+ 2c \sum_{i=1}^{n} \left\{|\alpha_i - 1| \left[M_i + (2-\lambda_i) N_i^{\mu_i}\right] + |\gamma_i| (R_i + S_i)\right\} \leq c(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}.$$

Dacă funcțiile $f_i \in \mathcal{A}$, $g_i \in \mathcal{B}(\mu_i, \lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{B}(\nu_i, \eta_i)$, $k_i \in \mathcal{B}(\theta_i, \rho_i)$, $0 \leq \lambda_i, \eta_i, \rho_i < 1$, $\mu_i, \nu_i, \theta_i \geq 0$ satisfac inegalitățile

$$\left|\frac{f_i^{''}(z)}{f_i^{'}(z)}\right| \leq M_i, \quad |g_i(z)| < N_i, \quad |h_i(z)| < P_i, \quad |k_i(z)| < Q_i, \quad \left|\frac{h_i^{''}(z)}{h_i^{'}(z)}\right| \leq R_i, \quad \left|\frac{k_i^{''}(z)}{k_i^{'}(z)}\right| \leq S_i,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, atunci pentru orice număr complex δ, Re$\delta \geq$ Reγ, funcția $\mathcal{G}_{\delta,n}$, definită în (2.1.3) este din clasa $\mathcal{S}$.

Luând $\mu_i = \nu_i = \theta_i = M_i = N_i = P_i = Q_i = R_i = S_i = 1$ și $\rho_i = \eta_i = \lambda_i$ pentru orice $i = \overline{1,n}$ în Teorema 2.8.8, obținem corolarul:

Corolar 2.8.7.1. *Fie $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\gamma > 0$ și $0 \le \lambda_i < 1$, $i = \overline{1,n}$, astfel încât*

$$(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}} \sum_{i=1}^{n} 2\left|\beta_i\right|(3-\lambda_i) + 2c\sum_{i=1}^{n}\left[\left|\alpha_i - 1\right|(3-\lambda_i) + 2\left|\gamma_i\right|\right] \le c\,(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}.$$

Dacă funcțiile $f_i \in \mathcal{A}$, g_i,h_i, $k_i \in \mathcal{S}^*(\lambda_i)$ și

$$\left|\frac{f_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \le 1, \quad \left|g_i(z)\right| < 1, \quad \left|h_i(z)\right| < 1, \quad \left|k_i(z)\right| < 1, \quad \left|\frac{h_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \le 1, \quad \left|\frac{k_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \le 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci oricare ar fi numărul complex δ, $Re\delta \ge Re\gamma$, funcția $\mathcal{G}_{\delta,n}$, definită în (2.1.3) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.8.8. *Fie $c, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $Re\delta > 0$ și numerele reale $M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i, S_i \ge 1$, $i = \overline{1,n}$. Presupunem că funcțiile $f_i \in \mathcal{A}$, $h_i \in \mathcal{B}(\mu_i, \lambda_i)$, $k_i \in \mathcal{B}(\nu_i, \eta_i)$, $g_i \in \mathcal{B}(\theta_i, \rho_i)$, $0 \le \lambda_i, \eta_i, \rho_i < 1$, $\mu_i, \nu_i, \theta_i \ge 0$ satisfac inegalitățile*

$$\left|\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}\right| < M_i, \quad \left|zg_i'(z)\right| < N_i, \quad \left|h_i(z)\right| < P_i, \quad \left|k_i(z)\right| < Q_i, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| < R_i, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| < S_i,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$. Dacă

$$Re\delta \ge \sum_{i=1}^{n}\left\{\left|\alpha_i - 1\right|(M_i + N_i) + \left|\beta_i\right|\left[(2-\lambda_i)P_i^{\mu_i - 1} + (2-\eta_i)Q_i^{\nu_i - 1} + 2\right] + \left|\gamma_i\right|(R_i + S_i)\right\}$$

și

$$\left|c\right| \le 1 - \frac{1}{Re\delta}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left|\alpha_i - 1\right|(M_i + N_i) + \left|\beta_i\right|\left[(2-\lambda_i)P_i^{\mu_i - 1}\right]\right\} +$$
$$-\frac{1}{Re\delta}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left|\beta_i\right|\left[(2-\eta_i)Q_i^{\nu_i - 1} + 2\right] + \left|\gamma_i\right|(R_i + S_i)\right\},$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci funcția $\mathcal{G}_{\delta,n}$, dfinită în (2.1.3) este din clasa $\mathcal{S}$.

Luând $\mu_i = \nu_i = \theta_i = M_i = N_i = P_i = Q_i = R_i = S_i = 1$ și $\rho_i = \eta_i = \lambda_i$ pentru orice $i = \overline{1,n}$ în Teorema 2.8.9, obținem corolarul:

Corolar 2.8.8.1. *Fie $c, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$ cu $Re\delta > 0$. Presupunem că funcțiile $g_i, h_i, k_i \in \mathcal{S}^*(\lambda_i)$, $0 \le \lambda_i < 1$ și $f_i \in \mathcal{A}$ satisfac inegalitățile*

$$\left|\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}\right| < 1, \quad \left|zg_i'(z)\right| < 1, \quad \left|h_i(z)\right| < 1, \quad \left|k_i(z)\right| < 1, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| < 1, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| < 1.$$

Dacă

$$Re\delta \ge 2\sum_{i=1}^{n}\left[\left|\alpha_i - 1\right| + \left|\beta_i\right|(3-\lambda_i) + \left|\gamma_i\right|\right]$$

și

$$\left|c\right| \le 1 - \frac{2}{Re\delta}\sum_{i=1}^{n}\left[\left|\alpha_i - 1\right| + \left|\beta_i\right|(3-\lambda_i) + \left|\gamma_i\right|\right],$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci funcția $\mathcal{G}_{\delta,n}$, definită în (2.1.3) este din clasa $\mathcal{S}$.

Dacă considerăm $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta$ în Teorema 2.8.9, obținem

Corolar 2.8.8.2. *Fie $c, \delta \in \mathbb{C}$ cu $Re\delta > 0$ și numerele reale $M, N, P, Q, R, S \geq 1$. Presupunem că funcțiile $f \in \mathcal{A}$, $h \in \mathcal{B}(\mu, \lambda)$, $k \in \mathcal{B}(\nu, \eta)$, $g \in \mathcal{B}(\theta, \rho)$, $0 \leq \lambda, \eta, \rho < 1$, $\mu, \nu, \theta \geq 0$ astfel încât*

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < M, \quad \left|zg'(z)\right| < N, \quad |h(z)| < P, \quad |k(z)| < Q, \quad \left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| < R, \quad \left|\frac{zk''(z)}{k'(z)}\right| < S,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$. Dacă

$$Re\delta \geq |\delta| \left[M + N + (2-\lambda) P^{\mu-1} + (2-\eta) Q^{\nu-1} + R + S + 2\right]$$

și

$$|c| \leq 1 - \frac{|\delta|}{Re\delta} \left[M + N + (2-\lambda) P^{\mu-1} + (2-\eta) Q^{\nu-1} + R + S + 2\right],$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}$, dat prin (2.2.16) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.8.9. *Fie $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\delta > 0$, M_0 este soluția pozitivă a ecuație (1.1.1), $M_0 = 1,5936...$ și funcțiile $f_i \in \mathcal{A}$, $g_i \in \mathcal{B}(\mu_i, \lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{B}(\nu_i, \eta_i)$, $k_i \in \mathcal{B}(\theta_i, \rho_i)$, $0 \leq \lambda_i, \eta_i, \rho_i < 1$, $\mu_i, \nu_i, \theta_i \geq 0$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$. Presupunem de asemenea că au loc inegalitățile*

$$\left|\frac{f_i''(z)}{f_i'(z)}\right| < M_0, \quad |g_i(z)| < M_i, \quad \left|\frac{h_i''(z)}{h_i'(z)}\right| < M_0, \quad \left|\frac{k_i''(z)}{k_i'(z)}\right| < M_0,$$

unde M_i sunt numere reale pozitive. Dacă

$$\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| + \frac{2}{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}} \sum_{i=1}^{n} \left\{|\alpha_i - 1| \left[M_0 + (2-\lambda_i) M_i^{\mu_i}\right] + 2M_0 |\gamma_i|\right\} \leq 1,$$

atunci funcția $\mathcal{G}_{\delta,n}$, definită în (2.1.3) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.8.10. *Fie $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\gamma > 0$ și numerele reale M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i, $S_i \geq 1$, $i = \overline{1,n}$, astfel încât*

$$(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}} \sum_{i=1}^{n} \left\{|\alpha_i - 1| \left[1 + (2-\lambda_i) M_i^{\mu_i - 1}\right] + |\gamma_i| \left[2 + (2-\eta_i) P_i^{\nu_i - 1}\right]\right\} +$$

$$+ (2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}} \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| (2-\rho_i) Q_i^{\theta_i - 1} + 2c \sum_{i=1}^{n} \left[|\beta_i| N_i + |\delta_i| (R_i + S_i)\right] \leq c (2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}.$$

Dacă funcțiile $f_i \in \mathcal{B}(\mu_i, \lambda_i)$, $g_i \in \mathcal{A}$, $h_i \in \mathcal{B}(\nu_i, \eta_i)$, $k_i \in \mathcal{B}(\theta_i, \rho_i)$, $0 \leq \lambda_i, \eta_i, \rho_i < 1$, $\mu_i, \nu_i, \theta_i \geq 0$ satisfac inegalitățile

$$|f_i(z)| < M_i, \ \left|\frac{g_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \leq N_i, \ |h_i(z)| < P_i, \ |k_i(z)| < Q_i, \ \left|\frac{h_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \leq R_i, \ \left|\frac{k_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \leq S_i,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci pentru orice număr complex δ, $Re\delta \geq Re\gamma$, funcția $\mathcal{T}_{\delta,n}$, definită în (2.1.4) este din clasa $\mathcal{S}$.

Luând $\mu_i = \nu_i = \theta_i = M_i = N_i = P_i = Q_i = R_i = S_i = 1$ și $\rho_i = \eta_i = \lambda_i$ pentru orice $i = \overline{1,n}$ în Teorema 2.8.11, obținem corolarul:

Corolar 2.8.10.1. *Fie $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\gamma > 0$ și $0 \le \lambda_i < 1$, $i = \overline{1,n}$, astfel încât*

$$(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}} \sum_{i=1}^{n} (3-\lambda_i)\left(|\alpha_i - 1| + 2|\gamma_i|\right) + 2c\sum_{i=1}^{n}\left(|\beta_i| + 2|\delta_i|\right) \le c\,(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}.$$

Dacă funcțiile $g_i \in \mathcal{A}$, f_i, h_i, $k_i \in \mathcal{S}^*(\lambda_i)$, $0 \le \lambda_i < 1$ și

$$|f_i(z)| < 1, \quad \left|\frac{g_i''(z)}{g_i'(z)}\right| \le 1, \quad |h_i(z)| < 1, \quad |k_i(z)| < 1, \quad \left|\frac{h_i''(z)}{h_i'(z)}\right| \le 1, \quad \left|\frac{k_i''(z)}{k_i'(z)}\right| \le 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci oricare ar fi numărul complex δ, $Re\delta \ge Re\gamma$, funcția $\mathcal{T}_{\delta,n}$, definită în (2.1.4) este din clasa $\mathcal{S}$.

Teorema 2.8.11. *Fie $c, \delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{C}$, $Re\delta > 0$ și numerele reale $M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i, S_i \ge 1$, $i = \overline{1,n}$. Presupunem că funcțiile $f_i \in \mathcal{B}(\mu_i, \lambda_i)$, $g_i \in \mathcal{A}$, $h_i \in \mathcal{B}(\nu_i, \eta_i)$, $k_i \in \mathcal{B}(\theta_i, \rho_i)$, $0 \le \lambda_i, \eta_i, \rho_i < 1$, $\mu_i, \nu_i, \theta_i \ge 0$ satisfac inegalitățile*

$$|f_i(z)| < M_i, \ \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}\right| < N_i, \ |h_i(z)| < P_i, \ |k_i(z)| < Q_i, \ \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}\right| < R_i, \ \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}\right| < S_i,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$. Dacă

$$Re\delta \ge \sum_{i=1}^{n}\left\{|\alpha_i - 1|\left[(2-\lambda_i)M_i^{\mu_i - 1} + 1\right] + |\beta_i| N_i\right\} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left\{|\gamma_i|\left[(2-\eta_i)P_i^{\nu_i-1} + (2-\rho_i)Q_i^{\theta_i - 1} + 2\right] + |\delta_i|(R_i + S_i)\right\}$$

și

$$|c| \le 1 - \frac{1}{Re\delta}\sum_{i=1}^{n}\left\{|\alpha_i - 1|\left[(2-\lambda_i)M_i^{\mu_i-1} + 1\right] + |\beta_i| N_i\right\} -$$

$$-\frac{1}{Re\delta}\sum_{i=1}^{n}\left\{|\gamma_i|\left[(2-\eta_i)P_i^{\nu_i-1} + (2-\rho_i)Q_i^{\theta_i-1} + 2\right] + |\delta_i|(R_i+S_i)\right\},$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, atunci funcția $\mathcal{T}_{\delta,n}$, definită în (2.1.4) este din clasa $\mathcal{S}$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta$ în Teorema 2.8.12, obținem corolarul:

Corolar 2.8.11.1. *Fie $c, \delta \in \mathbb{C}$ cu $Re\delta > 0$ și numerele reale $M, N, P, Q, R, S \ge 1$. Presupunem că funcțiile $f \in \mathcal{B}(\mu, \lambda)$, $g \in \mathcal{A}$, $h \in \mathcal{B}(\nu, \eta)$, $k \in \mathcal{B}(\theta, \rho)$, $0 \le \lambda, \eta, \rho < 1$, $\mu, \nu, \theta \ge 0$ astfel încât*

$$|f(z)| < M, \ \left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right| < N, \ |h(z)| < P, \ |k(z)| < Q, \ \left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| < R, \ \left|\frac{zk''(z)}{k'(z)}\right| < S,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$. Dacă

$$Re\delta \ge |\delta|\left[(2-\lambda)M^{\mu-1} + (2-\eta)P^{\nu-1} + (2-\rho)Q^{\theta-1} + N + R + S + 3\right]$$

și

$$|c| \le 1 - \frac{|\delta|}{Re\delta}\left[(2-\lambda)M^{\mu-1} + (2-\eta)P^{\nu-1} + (2-\rho)Q^{\theta-1} + N + R + S + 3\right],$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, dat prin (2.2.23) este analitic și univalent în $\mathbb{U}$.

Teorema 2.8.12. *Fie* $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{C}$, $c = Re\delta > 0$, M_0 *este soluția pozitivă a ecuației (1.1.1),* $M_0 = 1,5936...$ *și funcțiile* $f_i \in \mathcal{B}(\mu_i, \lambda_i)$, $g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$, $0 \leq \lambda_i < 1$, $\mu_i \geq 0$, *pentru orice* $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$. *Presupunem de asemenea că au loc inegalitățile*

$$|f_i(z)| < M_i, \quad \left|\frac{g_i''(z)}{g_i'(z)}\right| < M_0, \quad \left|\frac{h_i''(z)}{h_i'(z)}\right| < M_0, \quad \left|\frac{k_i''(z)}{k_i'(z)}\right| < M_0,$$

unde M_i *sunt numere reale pozitive. Dacă*

$$\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n}\left[|\alpha_i - 1|(2-\lambda_i) M_i^{\mu_i - 1} + 2|\gamma_i|\right] + \frac{2}{(2c+1)^{\frac{2c+1}{2c}}}\sum_{i=1}^{n}\left[|\beta_i| M_0 + 2|\delta_i| M_0\right] \leq 1,$$

atunci funcția $\mathcal{T}_{\delta,n}$, *definită în (2.1.4) este din clasa* $\mathcal{S}$.

Capitolul 3

Condiții suficiente de convexitate pentru operatori integrali noi

În acest capitol fixăm $\delta = 1$ pentru operatorii integrali definiți în relațiile (2.1.1)-(2.1.4) și obținem următorii operatori integrali:

$$\mathcal{M}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^n \left[\left(\frac{f_i(t)}{t} \right)^{\alpha_i - 1} ({g_i}'(t))^{\beta_i} \left(\frac{g_i(t))}{t} \right)^{\gamma_i} \right] dt. \tag{3.0.1}$$

$$\mathcal{C}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^n \left[\left(\frac{f_i(t)}{t} e^{g_i(t)} \right)^{\alpha_i - 1} ({h_i}'(t))^{\beta_i} \left(\frac{h_i(t))}{t} \right)^{\gamma_i} \right] dt. \tag{3.0.2}$$

$\mathcal{G}_n$*, definit prin*

$$\mathcal{G}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^n \left[\left({f_i}'(t) e^{g_i(t)} \right)^{\alpha_i - 1} \left(\frac{h_i(t)}{k_i(t)} \right)^{\beta_i} \left(\frac{{h_i}'(t))}{{k_i}'(t)} \right)^{\gamma_i} \right] dt, \tag{3.0.3}$$

$$\mathcal{T}_n(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^n \left[\left(\frac{f_i(t)}{t} \right)^{\alpha_i - 1} (g_i'(t))^{\beta_i} \left(\frac{h_i(t)}{k_i(t)} \right)^{\gamma_i} \left(\frac{{h_i}'(t))}{{k_i}'(t)} \right)^{\delta_i} \right] dt. \tag{3.0.4}$$

3.1 Condiții de convexitate pentru clasa $\mathcal{G}_b$

Acest paragraf cuprinde studiul convexității operatorilor integrali de mai sus, cât timp funcțiile lor aparțin claselor $\mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$ și $\mathcal{B}(\mu, \alpha)$, $\mu \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1$.

Teorema 3.1.1. *Fie funcțiile analitice f_i, g_i, unde $g_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$. Pentru numerele reale $M_i, N_i \geq 1$, care verifică inegalitățile*

$$\left| \frac{z f_i'(z)}{f_i(z)} \right| \leq M_i, \quad \left| \frac{z g_i'(z)}{g_i(z)} \right| \leq N_i,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, există numerele reale strict pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\lambda = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(M_i + 1) + \beta_i (b_i N_i + 2b_i + N_i + 1) + \gamma_i (N_i + 1) \right] > 0.$$

În aceste condiții, operatorul integral general $\mathcal{M}_n$, definit în (3.0.1) este din clasa $\mathcal{K}(\lambda)$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.1.1, obținem corolarul:

Corolar 3.1.1.1. *Fie funcțiile $f, g \in \mathcal{A}$, unde $g \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$. Pentru numerele reale $M, N \geq 1$, care verifică*

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq M, \quad \left| \frac{zg'(z)}{g(z)} \right| \leq N,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, există un număr real pozitiv α astfel încât

$$\lambda = 1 - \alpha (M + 2N + bN + 2b + 3) > 0.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{M}$, dat prin (2.2.5) este din clasa $\mathcal{K}(\lambda)$.

Teorema 3.1.2. *Fie funcțiile $f_i, g_i \in \mathcal{A}$, unde $g_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$. Dacă au loc inegalitățile*

$$\left| \frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - 1 \right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, și există numerele reale pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ cu $\alpha_i \geq 1$ astfel încât

$$\lambda = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1) + \beta_i (2b_i + 1) + \gamma_i \right] > 0,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}_n$, definit în (3.0.1) este din clasa $\mathcal{K}(\lambda)$.

Punând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.1.2, avem corolarul:

Corolar 3.1.2.1. *Fie funcțiile $f, g \in \mathcal{A}$, unde $g \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$. Dacă*

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1, \quad \left| \frac{zg'(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și există numărul real strict pozitiv α astfel încât

$$\lambda = 1 - \alpha (2b + 3) > 0.$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, definit în (2.2.5) este din clasa $\mathcal{K}(\lambda)$.

Teorema 3.1.3. *Fie funcțiile analitice f_i, g_i, h_i, unde $g_i \in \mathcal{B}(\mu_i, \lambda_i)$, $\mu_i \geq 1$, $0 \leq \lambda_i < 1$ și $h_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$. Pentru numerele reale $M_i, N_i, P_i \geq 1$, care verifică inegalitățile*

$$\left| \frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} \right| \leq M_i, \quad |g_i(z)| < N_i, \quad \left| \frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} \right| \leq P_i,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, există numerele reale strict pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)\left(M_i + (2 - \lambda_i) N_i^{\mu_i} + 1\right) + \beta_i (b_i (P_i + 2) + P_i + 1) + \gamma_i (P_i + 1) \right] > 0.$$

În aceste condiții, operatorul integral general $\mathcal{C}_n$, definit în (3.0.2) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.1.3, obținem corolarul:

Corolar 3.1.3.1. *Fie funcțiile $f, g, h \in \mathcal{A}$, unde $g \in \mathcal{B}(\mu, \lambda)$, $\mu \geq 1$, $0 \leq \lambda < 1$ și $h \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$. Pentru numerele reale $M, N, P \geq 1$, care verifică*

$$\left|\frac{zf^{'}(z)}{f(z)}\right| \leq M, \quad |f(z)| < N, \quad \left|\frac{zh^{'}(z)}{h(z)}\right| \leq P,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, există un număr real pozitiv α astfel încât

$$\rho = 1 - \alpha\left(M + (2-\lambda)N^{\mu} + b(P+2) + 2P + 3\right) > 0.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{C}$, definit în (2.2.10) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Pentru $\mu_i = 0$ în Teorema 3.1.3, avem corolarul:

Corolar 3.1.3.2. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}$, unde $g_i \in \mathcal{R}_{\lambda_i}$, $0 \leq \lambda_i < 1$ și $h_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$. Pentru numerele reale $M_i, N_i, P_i \geq 1$, care verifică*

$$\left|\frac{zf_i^{'}(z)}{f_i(z)}\right| \leq M_i, \quad |f_i(z)| < N_i, \quad \left|\frac{zh_i^{'}(z)}{h_i(z)}\right| \leq P_i,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, există $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere reale stict pozitive și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)\left(3 + M_i - \lambda_i\right) + \beta_i\left(b_i\left(P_i + 2\right) + P_i + 1\right) + \gamma_i\left(P_i + 1\right)\right] > 0.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{C}_n$, dat prin (3.0.2) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Pentru $\mu_i = 1$ în Teorema 3.1.3, avem corolarul:

Corolar 3.1.3.3. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}$, unde $g_i \in \mathcal{S}^*_{\lambda_i}$, $0 \leq \lambda_i < 1$ și $h_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$. Pentru numerele reale $M_i, N_i, P_i \geq 1$, care verifică*

$$\left|\frac{zf_i^{'}(z)}{f_i(z)}\right| \leq M_i, \quad |f_i(z)| < N_i, \quad \left|\frac{zh_i^{'}(z)}{h_i(z)}\right| \leq P_i,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, există $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere reale strict pozitive și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)\left(M_i + (2-\lambda_i)N_i + 1\right) + \beta_i\left(b_i\left(N_i + 2\right) + P_i + 1\right) + \gamma_i\left(P_i + 1\right)\right] > 0.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{C}_n$, dat prin (3.0.2) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Teorema 3.1.4. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}$, unde $h_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$. Dacă au loc inegalitățile*

$$\left|\frac{zf_i^{'}(z)}{f_i(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{zg_i^{'}(z)}{g_i(z)} - 1\right| < 1, \quad |g_i(z)| \leq N_i, \quad \left|\frac{zh_i^{'}(z)}{h_i(z)} - 1\right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, și există numerele reale strict pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)\left(1 + 2N_i\right) + \beta_i\left(2b_i + 1\right) + \gamma_i\right] > 0,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}_n$, definit în (3.0.2) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Punând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.1.4, avem corolarul:

Corolar 3.1.4.1. *Fie funcțiile $f, g, h \in \mathcal{A}$, unde $h \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$. Dacă*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)} - 1\right| < 1, \quad |g(z)| \leq N, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$ și există numărul real strict pozitiv α astfel încât

$$\rho = 1 - \alpha\,(2N + 2b + 3) > 0.$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}$, definit în (2.2.10) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Teorema 3.1.5. *Fie funcțiile analitice f_i, g_i, h_i, k_i, unde $g_i \in \mathcal{B}(\mu_i, \lambda_i)$, $\mu_i \geq 1$, $0 \leq \lambda_i < 1$ și $f_i \in \mathcal{G}_{b_{1i}}$, $h_i \in \mathcal{G}_{b_{2i}}$, $k_i \in \mathcal{G}_{b_{3i}}$, $0 < b_{1i}, b_{2i}, b_{3i} \leq 1$. Pentru numerele reale $M_i, N_i, P_i, Q_i \geq 1$, care verifică inegalitățile*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\right| \leq M_i, \quad |g_i(z)| < N_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}\right| \leq P_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)}\right| \leq Q_i,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, există numerele reale strict pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - 1)\left(b_{1i}M_i + 2b_{1i} + 2M_i + (2 - \lambda_i)\,N_i^{\mu_i} + 1\right) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\beta_i\left(P_i + Q_i + 2\right) + \gamma_i\left(b_{2i}P_i + 2b_{2i} + P_i + b_{3i}Q_i + 2b_{3i} + Q_i + 2\right)\right] > 0.$$

În aceste condiții, operatorul integral general $\mathcal{G}_n$, definit în (3.0.3) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.1.5, obținem corolarul:

Corolar 3.1.5.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$, unde $g \in \mathcal{B}(\mu, \lambda)$, $\mu \geq 1$, $0 \leq \lambda < 1$ și $f \in \mathcal{G}_{b_1}$, $h \in \mathcal{G}_{b_2}$, $k \in \mathcal{G}_{b_3}$ $0 < b_1, b_2, b_3 \leq 1$. Pentru numerele reale $M, N, P, Q \geq 1$, care verifică*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq M, \quad |f(z)| < N, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)}\right| \leq P, \quad \left|\frac{zk'(z)}{k(z)}\right| \leq Q,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, există un număr real strict pozitiv α astfel încât

$$\rho = 1 - \alpha\left(b_1M + b_2P + b_1Q + 2b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 2M + 2P + 2Q + 6 + 2N^{\mu} - \lambda N^{\mu}\right) > 0.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{G}$, definit în (2.2.16) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Pentru $\mu_i = 0$ în Teorema 3.1.5, avem corolarul:

Corolar 3.1.5.2. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$, unde $g_i \in \mathcal{R}_{\lambda_i}$, $0 \leq \lambda_i < 1$ și $f_i \in \mathcal{G}_{b_{1i}}$, $h_i \in \mathcal{G}_{b_{2i}}$, $k_i \in \mathcal{G}_{b_{3i}}$, $0 < b_{1i}, b_{2i}, b_{3i} \leq 1$. Pentru numerele reale $M_i, N_i, P_i, Q_i \geq 1$, care verifică*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\right| \leq M_i, \quad |g_i(z)| < N_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}\right| \leq P_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)}\right| \leq Q_i,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, există $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere reale strict pozitive și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - 1)\left(b_{1i} M_i + 2b_{1i} + 2M_i + 4 - \lambda_i\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\beta_i \left(P_i + Q_i + 2\right) + \gamma_i \left(b_{2i} P_i + 2b_{2i} + P_i + b_{3i} Q_i + 2b_{3i} + Q_i + 2\right)\right] > 0.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{G}$, definit în (2.2.16) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Pentru $\mu_i = 1$ în Teorema 3.1.5, avem corolarul:

Corolar 3.1.5.3. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$, unde $g_i \in \mathcal{S}^*_{\lambda_i}$, $0 \le \lambda_i < 1$ și $f_i \in \mathcal{G}_{b_{1i}}$, $h_i \in \mathcal{G}_{b_{2i}}$, $k_i \in \mathcal{G}_{b_{3i}}$, $0 < b_{1i}, b_{2i}, b_{3i} \le 1$. pentru numerele reale $M_i, N_i, P_i, Q_i \ge 1$, care verifică*

$$\left|\frac{z f_i'(z)}{f_i(z)}\right| \le M_i, \quad |g_i(z)| < N_i, \quad \left|\frac{z h_i'(z)}{h_i(z)}\right| \le P_i, \quad \left|\frac{z k_i'(z)}{k_i(z)}\right| \le Q_i,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, există $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numerele reale strict pozitive și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - 1)\left(b_{1i} M_i + 2b_{1i} + 2M_i + (2 - \lambda_i) N_i + 2\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\beta_i \left(P_i + Q_i + 2\right) + \gamma_i \left(b_{2i} P_i + 2b_{2i} + P_i + b_{3i} Q_i + 2b_{3i} + Q_i + 2\right)\right] > 0.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{G}$, definit în (2.2.16) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Teorema 3.1.6. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$, unde $f_i, h_i, k_i \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \le 1$. Dacă au loc inegalitățile*

$$\left|\frac{z f_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{z g_i'(z)}{g_i(z)} - 1\right| < 1, \ |g_i(z)| \le N_i, \ \left|\frac{z h_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| < 1, \ \left|\frac{z k_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, și există numerele reale strict pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(2b_i + 2N_i + 1) + 2\beta_i + 2\gamma_i (2b_i + 1)\right] > 0,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}_n$, definit în (3.0.3) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Punând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.1.6, avem corolarul:

Corolar 3.1.6.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$, unde $f, h_i, k_i \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \le 1$. Dacă*

$$\left|\frac{z f'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{z g'(z)}{g(z)} - 1\right| < 1, \quad |g(z)| \le N,$$

$$\left|\frac{z f'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1, \ \left|\frac{z g'(z)}{g(z)} - 1\right| < 1, \quad |g(z)| \le N, \ \left|\frac{z h'(z)}{h(z)} - 1\right| < 1, \ \left|\frac{z k'(z)}{k(z)} - 1\right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, există numărul real strict pozitiv α astfel încât

$$\rho = 1 - \alpha (2N + 6b + 5) > 0,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}$, dat prin (2.2.16) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Teorema 3.1.7. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$, unde $g_i \in \mathcal{G}_{b_{1i}}$, $h_i \in \mathcal{G}_{b_{2i}}$, $k_i \in \mathcal{G}_{b_{3i}}$, $0 < b_{1i}, b_{2i}, b_{3i} \leq 1$. Pentru numerele reale $M_i, N_i, P_i, Q_i \geq 1$, care verifică inegalitățile*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\right| \leq M_i, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| \leq N_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}\right| \leq P_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)}\right| \leq Q_i,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, există numerele reale strict pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\lambda = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(M_i + 1) + \beta_i (b_{1i}N_i + 2b_{1i} + N_i + 1)\right] -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\gamma_i (P_i + Q_i + 2) + \delta_i (b_{2i}P_i + 2b_{2i} + b_{3i}Q_i + 2b_{3i} + P_i + Q_i + 2)\right] > 0.$$

În aceste condiții, operatorul integral general $\mathcal{T}_n$, definit prin (3.0.4) este din clasa $\mathcal{K}(\lambda)$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 3.1.7, obținem corolarul:

Corolar 3.1.7.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$, unde $g \in \mathcal{G}_{b_1}$, $h \in \mathcal{G}_{b_2}$, $k \in \mathcal{G}_{b_3}$, $0 < b_1, b_2, b_3 \leq 1$. Pentru numerele reale $M, N, P, Q \geq 1$, care verifică*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq M, \quad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)}\right| \leq N, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)}\right| \leq P, \quad \left|\frac{zk'(z)}{k(z)}\right| \leq Q,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, există numărul real strict pozitiv α astfel încât

$$\lambda = 1 - \alpha (M + b_1N + 2b_1 + N + 2P + 2Q + b_2P + 2b_2 + b_3Q + 2b_3 + 6) > 0.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{T}$, definit în (2.2.23) este din clasa $\mathcal{K}(\lambda)$.

Teorema 3.1.8. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i, \in \mathcal{A}$, unde $g_i, h_i, k_i, \in \mathcal{G}_{b_i}$, $0 < b_i \leq 1$. Dacă au loc inegalitățile*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$ și există numerele reale strict pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\lambda = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1) + \beta_i (2b_i + 1) + 2\gamma_i + 2\delta_i (2b_i + 1)\right] > 0,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}_n$, definit în (3.0.4) este din clasa $\mathcal{K}(\lambda)$.

Punând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 3.1.8, avem corolarul:

Corolar 3.1.8.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$, unde $g, h, k \in \mathcal{G}_b$, $0 < b \leq 1$. dacă*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right| < 1, \quad \left|\frac{zk'(z)}{k(z)} - 1\right| < 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, există numărul real strict pozitiv α astfel încât

$$\lambda = 1 - 6\alpha (b_i + 1) > 0,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, definit în (2.2.23) este din clasa $\mathcal{K}(\lambda)$.

3.2 Condiții de convexitate pentru funcții stelate

În această secțiune prezentăm condiții suficiente care să asigure convexitatea celor patru operatori integrali dar și ordinul lor de convexitate, considerând funcțiile din clasa funcțiilor stelate $\mathcal{S}^*(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$.

Teorema 3.2.1. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{S}^*(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$ și $g_i \in \mathcal{S}^*(\nu_i)$, $0 \leq \mu_i, \lambda_i, \nu_i < 1$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt numere reale strict pozitive și $\alpha_i > 1$ astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)\,\mu_i + \beta_i\,(1 - \lambda_i) + \gamma_i \nu_i\right] < 1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{M}_n$, definit în (3.0.1) este convex și are ordinul de convexitate

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)\,\mu_i + \beta_i\,(1 - \lambda_i) + \gamma_i \nu_i\right],$$

pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.2.1, obținem corolarul:

Corolar 3.2.1.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{S}^*(\mu)$, $g \in \mathcal{K}(\lambda)$ și $g \in \mathcal{S}^*(\nu)$, $0 \leq \mu, \lambda, \nu < 1$. Dacă avem numărul real strict pozitiv α astfel încât*

$$\alpha\,(\mu + \nu - \lambda + 1) < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, definit în (2.2.5) este convex de ordin

$$1 + \alpha\,(\lambda - \mu - \nu - 1).$$

Teorema 3.2.2. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{S}^*(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$ și $g_i \in \mathcal{S}^*(\lambda_i)$, $0 \leq \mu_i, \lambda_i < 1$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt numere reale strict pozitive și $\alpha_i > 1$ astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)\,(\mu_i - 1) + \beta_i\,(\lambda_i - 1) + \gamma_i\,(\lambda_i - 1)\right] < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}_n$, dat prin (3.0.1) este convex de ordin

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)\,(\mu_i - 1) + \beta_i\,(\lambda_i - 1) + \gamma_i\,(\lambda_i - 1)\right],$$

pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Setând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.2.2, obtinem corolarul:

Corolar 3.2.2.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{S}^*(\mu)$, $g \in \mathcal{K}(\lambda)$ și $g \in \mathcal{S}^*(\lambda)$, $0 \leq \mu, \lambda < 1$. Dacă α este un număr real strict pozitiv astfel încât*

$$\alpha\,(\mu + 2\lambda - 3) < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, dat prin (2.2.5) este convex de ordin

$$1 - \alpha\,(\mu + 2\lambda - 3).$$

Teorema 3.2.3. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{S}^*(\alpha_i - 1)$, $zg_i' \in \mathcal{S}^*(\beta_i)$ și $g_i \in \mathcal{S}^*(\gamma_i)$, $i = \overline{1,n}$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt numere reale cu $\alpha_i \geq 1$, $\beta_i, \gamma_i \geq 0$ pentru orice $i = \overline{1,n}$ astfel încât*

$$0 < \sum_{i=1}^{n} [(\alpha_i - 1) + \beta_i + \gamma_i] < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}_n$, definit în (3.0.1) este convex având ordinul

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 - \alpha_i - \beta_i - \gamma_i + 1 \right] + 1.$$

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.2.3, obținem următorul corolar:

Corolar 3.2.3.1. *Fie funcțiile $f, zg', g \in \mathcal{S}^*(\alpha)$. Dacă α este un număr real pozitiv astfel încât*

$$0 < 3\alpha < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, definit în (2.2.5) este convex de ordin

$$3\alpha^2 - 3\alpha + 1.$$

Teorema 3.2.4. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{S}^*(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{S}^*(\nu_i)$, $h_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$ și $h_i \in \mathcal{S}^*(\eta_i)$, $0 \leq \mu_i, \lambda_i, \nu_i, \eta_i < 1$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt numere reale strict pozitive, $\alpha_i > 1$ și $|g_i(z)| \leq 1$ astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n} [(\alpha_i - 1)(\mu_i + \nu_i) + \beta_i (1 - \lambda_i) + \gamma_i \eta_i] < 1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{C}_n$, definit în (3.0.2) este convex și are ordinul

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} [(\alpha_i - 1)(\mu_i + \nu_i) + \beta_i (1 - \lambda_i) + \gamma_i \eta_i],$$

pentru orice $i = \overline{1,n}$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.2.4, obținem corolarul:

Corolar 3.2.4.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{S}^*(\mu)$, $g \in \mathcal{S}^*(\nu)$, $h \in \mathcal{K}(\lambda)$ și $h \in \mathcal{S}^*(\eta)$, $0 \leq \mu, \lambda, \nu, \eta < 1$. Dacă α este un număr real strict pozitiv și $|g(z)| \leq 1$ astfel încât*

$$\alpha (\mu + \nu + \eta - \lambda + 1) < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}$, definit în (2.2.10) este convex de ordin

$$1 + \alpha (\lambda - \mu - \nu - \eta - 1).$$

Teorema 3.2.5. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{S}^*(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{S}^*(\nu_i)$, $h_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$ și $h_i \in \mathcal{S}^*(\lambda_i)$, $0 \leq \mu_i, \lambda_i, \nu_i < 1$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt numere reale strict pozitive, $\alpha_i > 1$ și $|g_i(z)| \leq 1$ astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n} [(\alpha_i - 1)(\mu_i + \nu_i - 1) + \beta_i (\lambda_i - 1) + \gamma_i (\lambda_i - 1)] < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}_n$, dat prin (3.0.2) este convex de ordin

$$1-\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\alpha_i-1\right)\left(\mu_i+\nu_i-1\right)+\beta_i\left(\lambda_i-1\right)+\gamma_i\left(\lambda_i-1\right)\right],$$

pentru orice $i=\overline{1,n}$.

Setând $n=1$ și $\alpha_i-1=\beta_i=\gamma_i=\alpha$ în Teorema 3.2.5, obținem corolarul:

Corolar 3.2.5.1. *Fie funcțiile $f\in\mathcal{S}^*(\mu)$, $g\in\mathcal{S}^*(\nu)$, $h\in\mathcal{K}(\lambda)$ și $h\in\mathcal{S}^*(\lambda)$, $0\leq\mu,\lambda,\nu<1$. Dacă α este un număr real strict pozitiv și $|g(z)|\leq 1$ astfel încât*

$$\alpha\left(\mu+\nu+2\lambda-3\right)<1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}$, dat prin (2.2.10) este convex de ordin

$$1-\alpha\left(\mu+\nu+2\lambda-3\right).$$

Teorema 3.2.6. *Fie funcțiile $f_i,g_i\in\mathcal{S}^*\left(\alpha_i-1\right)$, $zh_i'\in\mathcal{S}^*\left(\beta_i\right)$, și $h_i\in\mathcal{S}^*\left(\gamma_i\right)$, $i=\overline{1,n}$. Dacă $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ sunt numere reale cu $\alpha_i\geq 1$, $\beta_i,\gamma_i\geq 0$ pentru orice $i=\overline{1,n}$ și Re $\left(g_i(z)\right)\geq 1$ astfel încât*

$$0<\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\alpha_i-1\right)+\beta_i+\gamma_i\right]<1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}_n$, definit în (3.0.2) este convex având ordinul

$$\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(\alpha_i-1\right)^2+\beta_i^2+\gamma_i^2-\alpha_i-\beta_i-\gamma_i+1\right]+1.$$

Luând $n=1$ și $\alpha_i-1=\beta_i=\gamma_i=\alpha$ în Teorema 3.2.6, obținem următorul corolar:

Corolar 3.2.6.1. *Fie funcțiile $f,g,h\in\mathcal{S}^*\left(\alpha\right)$ și $zh_i'\in\mathcal{S}^*\left(\alpha\right)$. Dacă α este un număr real pozitiv și Re $\left(g(z)\right)\geq 1$ astfel încât*

$$0<3\alpha<1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}$, dat prin (2.2.10) este convex de ordin

$$4\alpha^2-3\alpha+1.$$

Teorema 3.2.7. *Fie funcțiile $f_i\in\mathcal{K}(\mu_i)$, $g_i\in\mathcal{S}^*(\nu_i)$, $h_i\in\mathcal{K}(\lambda_i)$, $h_i\in\mathcal{S}^*(\eta_i)$, $k_i\in\mathcal{K}(\omega_i)$ și $k_i\in\mathcal{S}^*(\xi_i)$, $0\leq\mu_i,\nu_i,\eta_i,\lambda_i,\omega_i,\xi_i<1$. Dacă $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ sunt numere reale strict pozitive, $\alpha_i>1$ și $|g_i(z)|\leq 1$ astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\alpha_i-1\right)\left(\nu_i-\mu_i+1\right)+\beta_i\left(\eta_i+\xi_i\right)+\gamma_i\left(2-\lambda_i-\omega_i\right)\right]<1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{G}_n$, definit în (3.0.3) este convex și are ordinul

$$\rho=1-\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\alpha_i-1\right)\left(\nu_i-\mu_i+1\right)+\beta_i\left(\eta_i+\xi_i\right)+\gamma_i\left(2-\lambda_i-\omega_i\right)\right],$$

pentru orice $i=\overline{1,n}$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teeorema 3.2.7, obținem corolarul:

Corolar 3.2.7.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{K}(\mu)$, $g \in \mathcal{S}^*(\nu)$, $h \in \mathcal{K}(\lambda)$, $h \in \mathcal{S}^*(\eta)$, $k \in \mathcal{K}(\omega)$, $k \in \mathcal{S}^*(\xi)$, $0 \leq \mu, \nu, \eta, \lambda, \omega, \xi < 1$. Dacă α este un număr real strict pozitiv și $|g(z)| \leq 1$ astfel încât*

$$\alpha \left(\nu + \eta + \xi - \mu - \lambda - \omega + 3 \right) < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}$, definit în (2.2.16) este convex de ordin

$$1 - \alpha \left(\nu + \eta + \xi - \mu - \lambda - \omega + 3 \right).$$

Teorema 3.2.8. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{K}(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{S}^*(\nu_i)$, $h_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{S}^*(\lambda_i)$, $k_i \in \mathcal{K}(\omega_i)$ și $k_i \in \mathcal{S}^*(\omega_i)$, $0 \leq \mu_i, \nu_i, \lambda_i, \omega_i < 1$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt numere reale strict pozitive, cu $\alpha_i > 1$ și $|g_i(z)| \leq 1$ astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\alpha_i - 1 \right) \left(\mu_i + \nu_i - 1 \right) + \left(\beta_i + \gamma_i \right) \left(\lambda_i - \omega_i \right) \right] < 1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{G}_n$, dat prin (3.0.3) este convex de ordin

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\alpha_i - 1 \right) \left(\mu_i + \nu_i - 1 \right) + \left(\beta_i + \gamma_i \right) \left(\lambda_i - \omega_i \right) \right],$$

pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Setând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.2.8, obținem corolarul:

Corolar 3.2.8.1. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{K}(\mu)$, $g \in \mathcal{S}^*(\nu)$, $h \in \mathcal{K}(\lambda)$, $h \in \mathcal{S}^*(\lambda)$, $k \in \mathcal{K}(\omega)$ și $k \in \mathcal{S}^*(\omega)$, $0 \leq \mu, \nu, \lambda, \omega < 1$. Dacă α este un număr real strict pozitiv și $|g(z)| \leq 1$ astfel încât*

$$\alpha \left(\mu + \nu + 2\lambda - 2\omega - 1 \right) < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}$, definit în (2.2.16) este convex având ordinul

$$1 - \alpha \left(\mu + \nu + 2\lambda - 2\omega - 1 \right).$$

Teorema 3.2.9. *Fie funcțiile $zf_i, g_i \in \mathcal{S}^* \left(\alpha_i - 1 \right)$, $zh_i' \in \mathcal{S}^* \left(\gamma_i \right)$, $h_i \in \mathcal{S}^* \left(\beta_i \right)$, $zk_i' \in \mathcal{S}^* \left(\gamma_i \right)$ și $k_i \in \mathcal{S}^* \left(\beta_i \right)$, $i = \overline{1, n}$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt numere reale cu $\alpha_i \geq 1$, $\beta_i, \gamma_i \geq 0$ pentru orice $i = \overline{1, n}$ și Re $\left(g_i(z) \right) \geq 1$ astfel încât*

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\alpha_i - 1 \right) + \beta_i + \gamma_i \right] < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}_n$, definit în (3.0.3) este convex având ordinul

$$\sum_{i=1}^{n} \left[2 \left(\alpha_i - 1 \right)^2 - \left(\alpha_i - 1 \right) \right] + 1.$$

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.2.9, obținem următorul corolar:

Corolar 3.2.9.1. *Fie funcțiile $g, h, k \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ și $zf_i', zh_i', zk_i' \in \mathcal{S}^*(\alpha)$. Dacă α este un număr real pozitiv și Re $(g(z)) \geq 1$ astfel încât*

$$0 < 3\alpha < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}$, dat prin (2.2.16) este convex de ordin

$$2\alpha^2 - \alpha + 1.$$

Teorema 3.2.10. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{S}^*(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{S}^*(\nu_i)$, $k_i \in \mathcal{S}^*(\theta_i)$, $h_i \in \mathcal{K}(\eta_i)$ și $k_i \in \mathcal{K}(\sigma_i)$, $0 \leq \mu_i, \nu_i, \theta_i < 1$, $0 \leq \lambda_i, \eta_i, \sigma_i < 1$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ sunt numere reale strict pozitive și $\alpha_i > 1$ astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)\, \mu_i + \beta_i\, (1 - \lambda_i) + \gamma_i\, (\nu_i + \theta_i) + \delta_i\, (2 - \eta_i - \sigma_i)\right] < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}_n$, definit în (3.0.4) este convex de ordin

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)\, \mu_i + \beta_i\, (1 - \lambda_i) + \gamma_i\, (\nu_i + \theta_i) + \delta_i\, (2 - \eta_i - \sigma_i)\right],$$

pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 3.2.10, obținem corolarul:

Corolar 3.2.10.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{S}^*(\mu)$, $g \in \mathcal{K}(\lambda)$, $h \in \mathcal{S}^*(\nu)$, $k \in \mathcal{S}^*(\theta)$, $h \in \mathcal{K}(\eta)$ și $k \in \mathcal{K}(\sigma)$, $0 \leq \mu, \nu, \theta < 1$, $0 \leq \lambda, \eta, \sigma < 1$. Dacă α este un număr real strict pozitiv, astfel încât*

$$\alpha\, (\mu + \nu + \theta - \lambda - \eta - \sigma + 3) < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, definit în (2.2.23) este convex de ordin

$$1 + \alpha\, (\lambda + \eta + \sigma - \mu - \nu - \theta - 3)\, .$$

Teorema 3.2.11. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{S}^*(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{S}^*(\nu_i)$, $k_i \in \mathcal{S}^*(\theta_i)$, $h_i \in \mathcal{K}(\nu_i)$ și $k_i \in \mathcal{K}(\theta_i)$, $0 \leq \mu_i, \lambda_i, \nu_i, \theta_i < 1$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, , \delta_i$ sunt numere reale strict pozitive și $\alpha_i > 1$, astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)\, (\mu_i - 1) + \beta_i\, (\lambda_i - 1) + (\gamma_i + \delta_i)\, (\nu_i - \theta_i)\right] < 1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{T}_n$, dat prin (3.0.4) este convex de ordin

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)\, (\mu_i - 1) + \beta_i\, (\lambda_i - 1) + (\gamma_i + \delta_i)\, (\nu_i - \theta_i)\right],$$

pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 3.2.11, obținem următorul corolar:

Corolar 3.2.11.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{S}^*(\mu)$, $g \in \mathcal{K}(\lambda)$, $h \in \mathcal{S}^*(\nu)$, $k \in \mathcal{S}^*(\theta)$, $h \in \mathcal{K}(\nu)$ și $k \in \mathcal{K}(\theta)$, $0 \leq \mu, \lambda, \nu, \theta < 1$. Dacă α este un număr real strict pozitiv, astfel încât*

$$\alpha\left(\mu + \lambda + 2\nu - 2\theta - 2\right) < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, dat prin (2.2.23) este convex de ordin

$$1 - \alpha\left(\mu + \lambda + 2\nu - 2\theta - 2\right).$$

Teorema 3.2.12. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{S}^*\left(\alpha_i - 1\right)$, $zg_i' \in \mathcal{S}^*\left(\beta_i\right)$, $h_i \in \mathcal{S}^*\left(\gamma_i\right)$, $zh_i' \in \mathcal{S}^*\left(\delta_i\right)$, $k_i \in \mathcal{S}^*\left(\gamma_i\right)$, $zk_i' \in \mathcal{S}^*\left(\delta_i\right)$ $i = \overline{1,n}$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ sunt numere reale cu $\alpha_i \geq 1$, $\beta_i, \gamma_i, \delta_i \geq 0$ pentru orice $i = \overline{1,n}$ astfel încât*

$$0 < \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\alpha_i - 1\right) + \beta_i + \gamma_i + \delta_i\right] < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}_n$, definit în (3.0.4) este convex având ordinul

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\alpha_i - 1\right)^2 + \beta_i^2 - \alpha_i - \beta_i + 1\right] + 1.$$

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 3.2.12, obținem următorul corolar:

Corolar 3.2.12.1. *Fie funcțiile $f, h, k \in \mathcal{S}^*\left(\alpha\right)$ și $zg', zh', zk_i' \in \mathcal{S}^*\left(\alpha\right)$. Dacă α este un număr real pozitiv, astfel încât*

$$0 < 4\alpha < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, dat prin (2.2.23) este convex de ordin

$$2\alpha^2 - 2\alpha + 1.$$

3.3 Condiții de convexitate pentru clasa $\mathcal{SP}(\alpha, \beta)$

Secțiunea aceasta conține condiții suficiente de convexitate pentru operatorii integrali noi având funcțiile din clasa $\mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $0 \leq \beta < 1$.

Teorema 3.3.1. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, $g_i \in \mathcal{SP}(\delta, \eta)$, și $g_i \in \mathcal{K}\left(\lambda_i\right)$, $\alpha, \delta > 0$, $0 \leq \beta, \eta, \lambda_i < 1$ pentru orice $i = \overline{1,n}$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt numere reale strict pozitive și $\alpha_i > 1$ astfel încât*

$$\rho = 1 + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\alpha_i - 1\right)\left(\beta - \alpha - 1\right) + \beta_i\left(\lambda_i - 1\right) + \gamma_i\left(\eta - \delta - 1\right)\right] > 0,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}_n$, dat prin (3.0.1) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.3.2, avem următorul corolar:

Corolar 3.3.1.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{SP}(\alpha,\beta)$, $g \in \mathcal{SP}(\delta,\eta)$, și $g \in \mathcal{K}(\lambda)$, $\alpha,\delta > 0$, $0 \leq \beta,\eta,\lambda < 1$. Dacă există numărul real strict pozitiv α astfel încât*

$$\rho = 1 + \alpha\left(\beta + \eta - \alpha - \delta + \lambda - 3\right) > 0.$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, definit în (2.2.5) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Teorema 3.3.2. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{SP}\left(\alpha_i - 1\right)$, $zg_i' \in \mathcal{SP}\left(\beta_i\right)$ și $g_i \in \mathcal{SP}\left(\gamma_i\right)$, $i = \overline{1,n}$. Dacă $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ sunt numere reale cu $\alpha_i > 1$, $\beta_i,\gamma_i > 0$ pentru orice $i = \overline{1,n}$ astfel încât*

$$1 < \sum_{i=1}^{n}\left[\alpha_i + \beta_i + \gamma_i\right] < 2,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}_n$, dat prin (3.0.1) este convex de ordin

$$2 - \sum_{1=1}^{n}\left(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i\right).$$

Punând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.3.2, obținem corolarul:

Corolar 3.3.2.1. *Fie funcțiile $f,g \in \mathcal{SP}\left(\alpha\right)$ și $zg' \in \mathcal{SP}\left(\alpha\right)$. Dacă α este un numar real strict pozitiv astfel încât*

$$0 < 3\alpha < 1$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, definit în (2.2.5) este o funcție convexa de ordin

$$1 - 3\alpha.$$

Teorema 3.3.3. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{SP}(\alpha,\beta)$, $g_i \in \mathcal{SP}(\gamma,\delta)$, $h_i \in \mathcal{K}\left(\lambda_i\right)$ și $h_i \in \mathcal{SP}(\nu,\eta)$, $\alpha,\gamma,\nu > 0$, $0 \leq \beta,\delta,\eta,\lambda_i < 1$ pentru orice $i = \overline{1,n}$. Dacă $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ sunt numere reale strict pozitive și $\alpha_i > 1$, iar Re $\left(g_i(z)\right) \geq 1$ astfel încât*

$$\rho = 1 + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\alpha_i - 1\right)\left(\beta + \delta - \alpha - \gamma - 1\right) + \beta_i\left(\lambda_i - 1\right) + \gamma_i\left(\eta - \nu - 1\right)\right] > 0,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}_n$, dat prin (3.0.2) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.3.3, avem următorul corolar:

Corolar 3.3.3.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{SP}(\alpha,\beta)$, $g \in \mathcal{SP}(\gamma,\delta)$, $h \in \mathcal{K}(\lambda)$ și $h \in \mathcal{SP}(\nu,\eta)$, $\alpha,\gamma,\nu > 0$, $0 \leq \beta,\delta,\eta,\lambda < 1$. Dacă există numărul real strict pozitiv α și Re $\left(g(z)\right) \geq 1$ astfel încât*

$$\rho = 1 + \alpha\left(\beta + \delta + \eta - \alpha - \gamma - \nu + \lambda - 3\right) > 0.$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}$, definit în (2.2.10) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Teorema 3.3.4. *Fie funcțiile $f_i, g_i \in \mathcal{SP}\left(\alpha_i - 1\right)$, $zh_i' \in \mathcal{SP}\left(\beta_i\right)$ și $h_i \in \mathcal{SP}\left(\gamma_i\right)$, $i = \overline{1,n}$. Dacă $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ sunt numere reale cu $\alpha_i > 1$, $\beta_i,\gamma_i > 0$ pentru orice $i = \overline{1,n}$ și Re $\left(g_i(z)\right) \geq 1$ astfel încât*

$$0 < \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\alpha_i - 1\right) + \beta_i + \gamma_i\right] < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}_n$, definit în (3.0.2) este convex de ordin

$$1 - \sum_{1=1}^{n}\left(\beta_i + \gamma_i\right).$$

Punând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.3.4, obținem corolarul:

Corolar 3.3.4.1. *Fie funcțiile $f, g, h \in \mathcal{SP}(\alpha)$ și $zh' \in \mathcal{SP}(\alpha)$. Dacă α este un număr real strict pozitiv și Re $(g(z)) \geq 1$ astfel încât*

$$0 < 3\alpha < 1$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}$, dat prin (2.2.10) este o funcție convexă de ordin

$$1 - 2\alpha.$$

Teorema 3.3.5. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{N}(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{SP}(\gamma, \delta)$, $h_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{SP}(\nu, \eta)$, $k_i \in \mathcal{K}(\sigma_i)$, $k_i \in \mathcal{SP}(\theta, \xi)$, $\gamma, \nu, \theta > 0$, $0 \leq \mu_i, \delta, \eta, \xi, \lambda_i, \sigma_i < 1$ pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt numere reale strict pozitive și $\alpha_i > 1$, iar Re $(g_i(z)) \geq 1$ astfel încât*

$$\rho = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(\mu_i + \delta - \gamma - 1) + \beta_i (\eta + \theta - \nu - \xi) + \gamma_i (\lambda_i - \sigma_i) \right] > 0,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}_n$, dat prin (3.0.3) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.3.5, avem următorul corolar:

Corolar 3.3.5.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{K}(\mu)$, $g \in \mathcal{SP}(\gamma, \delta)$, $h \in \mathcal{K}(\lambda)$, $h \in \mathcal{SP}(\nu, \eta)$, $k \in \mathcal{K}(\sigma)$, $k \in \mathcal{SP}(\theta, \xi)$, $\gamma, \nu, \theta > 0$, $0 \leq \mu, \delta, \eta, \xi, \lambda, \sigma < 1$. Dacă există numărul real strict pozitiv α și Re $(g(z)) \geq 1$ astfel încât*

$$\rho = 1 + \alpha (\mu + \delta + \eta + \theta + \lambda - \gamma - \nu - \xi - \sigma - 1) > 0.$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}$, definit în (2.2.16) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Teorema 3.3.6. *Fie funcțiile $zf_i, g_i \in \mathcal{SP}(\alpha_i - 1)$, $h_i, k_i \in \mathcal{SP}(\beta_i)$ și $zh_i', zk_i' \in \mathcal{SP}(\gamma_i)$, $i = \overline{1, n}$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt numere reale cu $\alpha_i > 1$, $\beta_i, \gamma_i > 0$ pentru orice $i = \overline{1, n}$ și Re $(g_i(z)) \geq 1$ astfel încât*

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - 1 \right] < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}_n$, definit în (3.0.3) este convex de ordin 1.

Punând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.3.6, obținem corolarul:

Corolar 3.3.6.1. *Fie funcțiile $g, h, k \in \mathcal{SP}(\alpha)$ și $zf', zh', zk' \in \mathcal{SP}(\alpha)$. Dacă α este un număr real strict pozitiv și Re $(g(z)) \geq 1$ astfel încât*

$$0 < 3\alpha < 1$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}$, definit in (2.2.16) este o funcție convexă de ordin 1.

Teorema 3.3.7. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, $g_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{SP}(\sigma, \eta)$, $k_i \in \mathcal{SP}(\theta, \xi)$, , $h_i \in \mathcal{K}(\mu_i)$, , $k_i \in \mathcal{K}(\nu_i)$, $\alpha, \sigma, \theta > 0$, $0 \leq \beta, \eta, \xi, \lambda_i, \mu_i, \nu_i < 1$ pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ sunt numere reale strict pozitive și $\alpha_i > 1$ astfel încât*

$$\rho = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(\beta - \alpha - 1) + \beta_i (\lambda_i - 1) + \gamma_i (\theta - \xi - \sigma + \eta) + \delta_i (\mu_i - \nu_i) \right] > 0$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{T}_n$, definit în (3.0.4) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 3.3.7, avem următorul corolar:

Corolar 3.3.7.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, $g \in \mathcal{K}(\lambda)$, $h \in \mathcal{SP}(\sigma, \eta)$, $k \in \mathcal{SP}(\theta, \xi)$, , $h \in \mathcal{K}(\mu)$, , $k \in \mathcal{K}(\nu)$, $\alpha, \sigma, \theta > 0$, $0 \leq \beta, \eta, \xi, \lambda, \mu, \nu < 1$ .Dacă există numărul real strict pozitiv α astfel încât*

$$\rho = 1 + \alpha\left(\beta + \lambda + \theta + \eta + \mu - \alpha - \xi - \sigma - \nu - 2\right) > 0$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, definit în (2.2.23) este din clasa $\mathcal{K}(\rho)$.

Teorema 3.3.8. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{SP}\left(\alpha_i - 1\right)$, $zg_i' \in \mathcal{SP}\left(\beta_i\right)$, $h_i, k_i \in \mathcal{SP}\left(\gamma_i\right)$ și $zh_i', zk_i' \in \mathcal{SP}\left(\delta_i\right)$, $i = \overline{1, n}$. Dacă $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ sunt numere reale cu $\alpha_i > 1$, $\beta_i, \gamma_i, \delta_i > 0$ pentru orice $i = \overline{1, n}$ astfel încât*

$$1 < \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i\right] < 2,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}_n$, definit în (3.0.4) este convex de ordin

$$2 - \sum_{1=1}^{n} \left(\alpha_i + \beta_i\right).$$

Punând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 3.3.8, obținem corolarul:

Corolar 3.3.8.1. *Fie funcțiile $f, h, k \in \mathcal{SP}\left(\alpha\right)$ și $zg', zh', zk' \in \mathcal{SP}\left(\alpha\right)$. Dacă α este o funcție convexă de ordinul*

$$0 < 4\alpha < 1$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, definit în (2.2.23) este o funcție convexă de ordinul

$$1 - 2\alpha.$$

3.4 Condiții de convexitate pentru clasa $\mathcal{S}_\beta^*$

În acest paragraf sunt descrise condiții suficiente de apartenență la clasa de funcții convexe $\mathcal{C}_\mu(b)$, pentru operatorii integrali noi având funcțiile din clasa $\mathcal{S}_\beta^*(b)$, $0 \leq \beta < 1$, unde $b \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Teorema 3.4.1. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{S}_{\delta_i}^*(b)$, $g_i \in \mathcal{C}_{\lambda_i}(b)$ și $g_i \in \mathcal{S}_{\lambda_i}^*(b)$, $0 \leq \lambda_i, \delta_i < 1$, unde $b \in \mathbb{C} - \{0\}$. De asemenea, fie $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere reale strict pozitive și $\alpha_i > 1$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă*

$$0 \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\alpha_i - 1\right)\left(1 - \delta_i\right) + \left(\beta_i + \gamma_i\right)\left(1 - \lambda_i\right)\right] < 1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{M}_n$, definit în (3.0.1) este din clasa $\mathcal{C}_\mu(b)$, cu

$$\mu = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\alpha_i - 1\right)\left(1 - \delta_i\right) + \left(\beta_i + \gamma_i\right)\left(1 - \lambda_i\right)\right],$$

pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Punând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.4.1, obținem corolarul:

Corolar 3.4.1.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{S}^*_\delta(b)$, $g \in \mathcal{C}_\lambda(b)$ și $g \in \mathcal{S}^*_\lambda(b)$, $0 \leq \lambda, \delta < 1$, unde $b \in \mathbb{C} - \{0\}$. De asemenea, fie α un număr real strict pozitiv. Dacă*

$$0 \leq 1 + \alpha \left(3 - \delta - 2\lambda\right) < 1$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, dat prin (2.2.5) este din clasa $\mathcal{C}_\mu(b)$, cu

$$\mu = 1 + \alpha \left(3 - \delta - 2\lambda\right).$$

Teorema 3.4.2. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{S}^*_{\delta_i}(b)$, $g_i \in \mathcal{S}^*_{\eta_i}(b)$, $h_i \in \mathcal{C}_{\lambda_i}(b)$ și $h_i \in \mathcal{S}^*_{\lambda_i}(b)$, $0 \leq \lambda_i, \delta_i, \eta_i < 1$, unde $b \in \mathbb{C} - \{0\}$. De asemenea, fie $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere reale strict pozitive, cu $\alpha_i > 1$ pentru orice $i = \overline{1,n}$. Dacă $\left|\frac{g_i(z)}{b}\right| \leq 1$ și*

$$0 \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\alpha_i - 1\right)\left(3 - \delta_i - \eta_i\right) + \left(\beta_i + \gamma_i\right)\left(1 - \lambda_i\right)\right] < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}_n$, definit prin (3.0.2) este din clasa $\mathcal{C}_\mu(b)$, cu

$$\mu = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\alpha_i - 1\right)\left(3 - \delta_i - \eta_i\right) + \left(\beta_i + \gamma_i\right)\left(1 - \lambda_i\right)\right],$$

pentru orice $i = \overline{1,n}$.

Punând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.4.2, obținem corolarul:

Corolar 3.4.2.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{S}^*_\delta(b)$, $g \in \mathcal{S}^*_\eta(b)$, $h \in \mathcal{C}_\lambda(b)$ și $h \in \mathcal{S}^*_\lambda(b)$, $0 \leq \lambda, \delta, \eta < 1$, unde $b \in \mathbb{C} - \{0\}$. De asemenea, fie α un număr real strict pozitiv. Dacă $\left|\frac{g(z)}{b}\right| \leq 1$ și*

$$0 \leq 1 + \alpha \left(5 - \delta - \eta - 2\lambda\right) < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}$, definit în (2.2.10) este din clasa $\mathcal{C}_\mu(b)$, cu

$$\mu = 1 + \alpha \left(5 - \delta - \eta - 2\lambda\right).$$

Teorema 3.4.3. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{C}_{\mu_i}(b)$, $g_i \in \mathcal{S}^*_{\eta_i}(b)$, $h_i \in \mathcal{C}_{\lambda_i}(b)$, $h_i \in \mathcal{S}^*_{\lambda_i}(b)$, $k_i \in \mathcal{C}_{\sigma_i}(b)$ și $k_i \in \mathcal{S}^*_{\sigma_i}(b)$, $0 \leq \mu_i, \eta_i, \lambda_i, \sigma_i < 1$, unde $b \in \mathbb{C} - \{0\}$. De asemenea, fie $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere reale strict pozitive, cu $\alpha_i > 1$ pentru orice $i = \overline{1,n}$. Dacă $\left|\frac{g_i(z)}{b}\right| \leq 1$ și*

$$0 \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\alpha_i - 1\right)\left(3 - \mu_i - \eta_i\right) + \left(\beta_i + \gamma_i\right)\left(2 - \lambda_i - \sigma_i\right)\right] < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}_n$, definit prin (3.0.3) este din clasa $\mathcal{C}_\rho(b)$, cu

$$\rho = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\alpha_i - 1\right)\left(3 - \mu_i - \eta_i\right) + \left(\beta_i + \gamma_i\right)\left(2 - \lambda_i - \sigma_i\right)\right],$$

pentru orice $i = \overline{1,n}$.

Punând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.4.3, obținem corolarul:

Corolar 3.4.3.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{C}_\mu(b)$, $g \in \mathcal{S}^*_\eta(b)$, $h \in \mathcal{C}_\lambda(b)$, $h \in \mathcal{S}^*_\lambda(b)$, $k \in \mathcal{C}_\sigma(b)$ și $k \in \mathcal{S}^*_\sigma(b)$, $0 \leq \mu, \eta, \lambda, \sigma < 1$, unde $b \in \mathbb{C} - \{0\}$. De asemenea, fie α un număr real strict pozitiv. Dacă $\left|\frac{g(z)}{b}\right| \leq 1$ și*

$$0 \leq 1 + \alpha\left(5 - \mu - \eta - 2\lambda - 2\sigma\right) < 1$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}$, definit în (2.2.16) este din clasa $\mathcal{C}_\rho(b)$, cu

$$\rho = 1 + \alpha\left(5 - \mu - \eta - 2\lambda - 2\sigma\right).$$

Teorema 3.4.4. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{S}^*_{\eta_i}(b)$, $g_i \in \mathcal{C}_{\lambda_i}(b)$, $h_i \in \mathcal{S}^*_{\rho_i}(b)$, $h_i \in \mathcal{C}_{\rho_i}(b)$, $k_i \in \mathcal{S}^*_{\nu_i}(b)$, $k_i \in \mathcal{C}_{\nu_i}(b)$, $0 \leq \eta_i, \lambda_i, \rho_i, \nu_i < 1$ și $b \in \mathbb{C} - \{0\}$. De asemenea, fie $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ numere reale strict pozitive, cu $\alpha_i > 1$ pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă*

$$0 \leq 1 + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\alpha_i - 1\right)\left(1 - \eta_i\right) + \beta_i\left(1 - \lambda_i\right) + \left(\gamma_i + \delta_i\right)\left(2 - \rho_i - \nu_i\right)\right] < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}_n$, definit în (3.0.4) este din clasa $\mathcal{C}_\mu(b)$, cu

$$\mu = 1 + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\alpha_i - 1\right)\left(1 - \eta_i\right) + \beta_i\left(1 - \lambda_i\right) + \left(\gamma_i + \delta_i\right)\left(2 - \rho_i - \nu_i\right)\right],$$

pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Punând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 3.4.4, obținem corolarul:

Corolar 3.4.4.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{S}^*_\eta(b)$, $g \in \mathcal{C}_\lambda(b)$, $h \in \mathcal{S}^*_\rho(b)$, $h \in \mathcal{C}_\rho(b)$, $k \in \mathcal{S}^*_\nu(b)$, $k \in \mathcal{C}_\nu(b)$, $0 \leq \eta, \lambda, \rho, \nu < 1$ și $b \in \mathbb{C} - \{0\}$. De asemenea, fie α un număr real strict pozitiv. Dacă*

$$0 \leq 1 + \alpha\left(6 - \eta - \lambda - 2\rho - 2\nu\right) < 1$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, definit în (2.2.23) este din clasa $\mathcal{C}_\mu(b)$, cu

$$\mu = 1 + \alpha\left(6 - \eta - \lambda - 2\rho - 2\nu\right).$$

3.5 Condiții de convexitate pentru clasa $\mathcal{SH}(\beta)$

Această secțiune conține condiții suficiente de convexitate pentru operatorii integrali noi având funcțiile din clasa $\mathcal{SH}(\beta)$, $\beta > 0$.

Teorema 3.5.1. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{SH}(\delta_i)$, $g_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$ și $g_i \in \mathcal{SH}(\eta_i)$, $0 < \lambda_i < 1$ și $\delta_i, \eta_i > 0$. De asemenea, fie $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere reale cu $\alpha_i \geq 1$, $\beta_i, \gamma_i \geq 0$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă*

$$0 < \sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\alpha_i - 1\right)\left(2\delta_i + 1\right) + \beta_i\left(\lambda_i - 1\right) - \gamma_i\left(2\eta_i + 1\right)\right] + \sum_{i=1}^{n}\sqrt{2}\left(\delta_i\alpha_i + \gamma_i\eta_i - \delta_i\right) + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{M}_n$, definit prin (3.0.1) este convex de ordin

$$\sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\alpha_i - 1\right)\left(2\delta_i + 1\right) + \beta_i\left(\lambda_i - 1\right) - \gamma_i\left(2\eta_i + 1\right)\right] + \sum_{i=1}^{n}\sqrt{2}\left(\delta_i\alpha_i + \gamma_i\eta_i - \delta_i\right) + 1.$$

Fixând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.5.1, avem corolarul următor:

Corolar 3.5.1.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{SH}(\delta)$, $g \in \mathcal{K}(\lambda)$ și $g \in \mathcal{SH}(\eta)$, $0 < \lambda < 1$ și $\delta, \eta > 0$. De asemenea, fie α un număr real pozitiv. Dacă*

$$0 \leq \alpha \left[\lambda - 2\delta - 2\eta - 3 + \sqrt{2}\,(\delta + \eta)\right] + 1 < 1$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, definit în (2.2.5) este convex de ordin

$$\alpha \left[\lambda - 2\delta - 2\eta - 3 + \sqrt{2}\,(\delta + \eta)\right] + 1.$$

Teorema 3.5.2. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{SH}(\delta_i, \nu_i)$, $g_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$ și $g_i \in \mathcal{SH}(\eta_i, \theta_i)$, $0 < \lambda_i \leq 1$, $0 < \nu_i, \theta_i < 1$ și $\delta_i, \eta_i > 0$. De asemenea, fie $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere reale cu $\alpha_i \geq 1$, $\beta_i, \gamma_i \geq 0$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă*

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(\alpha_i - 1\right)\left(\delta_i - \nu_i + 1\right) + \beta_i\left(\lambda_i - 1\right) - \gamma_i\left(\eta_i - \theta_i + 1\right)\right] + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}_n$, dat prin (3.0.1) este convex având ordinul

$$\sum_{i=1}^{n} \left[-\left(\alpha_i - 1\right)\left(\delta_i - \nu_i + 1\right) + \beta_i\left(\lambda_i - 1\right) - \gamma_i\left(\eta_i - \theta_i + 1\right)\right] + 1.$$

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.5.2, urmează corolarul:

Corolar 3.5.2.1. *Fie $f \in \mathcal{SH}(\delta, \nu)$, $g \in \mathcal{K}(\lambda)$ și $g \in \mathcal{SH}(\eta, \theta)$, $0 < \lambda \leq 1$, $0 < \nu, \theta < 1$ și $\delta, \eta > 0$. De asemenea, fie α un număr real pozitiv. Dacă*

$$0 < \alpha\left(\nu + \lambda + \theta - \delta - \eta - 3\right) + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$, definit în (2.2.5) este convex având ordinul

$$\alpha\left(\nu + \lambda + \theta - \delta - \eta - 3\right) + 1.$$

Teorema 3.5.3. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{SH}(\delta_i)$, $g_i \in \mathcal{SH}(\nu_i)$, $h_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$ și $h_i \in \mathcal{SH}(\eta_i)$, $0 < \lambda_i < 1$ și $\delta_i, \nu_i, \eta_i > 0$. De asemenea, fie $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere reale cu $\alpha_i \geq 1$, $\beta_i, \gamma_i \geq 0$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă $Re\left(g_i(z)\right) \geq 1$ și*

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(\alpha_i - 1\right)\left(2\delta_i + 2\nu_i + 1\right) + \beta_i\left(\lambda_i - 1\right) - \gamma_i\left(2\eta_i + 1\right)\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2}\left(\left(\alpha_i - 1\right)\left(\delta_i + \nu_i\right) + \gamma_i\eta_i\right) + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{C}_n$, definit în (3.0.2) este convex de ordin

$$\sum_{i=1}^{n} \left[-\left(\alpha_i - 1\right)\left(2\delta_i + 2\nu_i + 1\right) + \beta_i\left(\lambda_i - 1\right) - \gamma_i\left(2\eta_i + 1\right)\right] + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2}\left(\left(\alpha_i - 1\right)\left(\delta_i + \nu_i\right) + \gamma_i\eta_i\right) + 1.$$

Fixând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.5.3, avem corolarul următor:

Corolar 3.5.3.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{SH}(\delta)$, $g \in \mathcal{SH}(\nu)$, $h \in \mathcal{K}(\lambda)$ și $h \in \mathcal{SH}(\eta)$, $0 < \lambda < 1$ și $\delta, \nu, \eta > 0$. De asemenea, fie α un număr real pozitiv. Dacă Re $(g(z)) \geq 1$ și*

$$0 \leq \alpha \left[\lambda - 2\delta - 2\nu - 2\eta - 3 + \sqrt{2}\,(\delta + \nu + \eta)\right] + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}$, definit prin (2.2.10) este convex de ordin

$$\alpha \left[\lambda - 2\delta - 2\nu - 2\eta - 3 + \sqrt{2}\,(\delta + \nu + \eta)\right] + 1.$$

Teorema 3.5.4. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{SH}(\delta_i, \sigma_i)$, $g_i \in \mathcal{SH}(\nu_i, \mu_i)$, $h_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$ și $h_i \in \mathcal{SH}(\eta_i, \theta_i)$, $0 < \lambda_i \leq 1$, $0 < \sigma_i, \mu_i, \theta_i < 1$ și $\delta_i, \nu_i, \eta_i > 0$. De asemenea, fie $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere reale cu $\alpha_i \geq 1$, $\beta_i, \gamma_i \geq 0$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă Re $(g_i(z)) \geq 1$ și*

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(\alpha_i - 1\right)\left(\delta_i + \nu_i - \sigma_i - \mu_i + 1\right) + \beta_i\left(\lambda_i - 1\right) - \gamma_i\left(\eta_i - \theta_i + 1\right)\right] + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}_n$, dat prin (3.0.2) este convex de ordin

$$\sum_{i=1}^{n} \left[-\left(\alpha_i - 1\right)\left(\delta_i + \nu_i - \sigma_i - \mu_i + 1\right) + \beta_i\left(\lambda_i - 1\right) - \gamma_i\left(\eta_i - \theta_i + 1\right)\right] + 1.$$

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.5.4, urmează corolarul:

Corolar 3.5.4.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{SH}(\delta, \sigma)$, $g \in \mathcal{SH}(\nu, \mu)$, $h \in \mathcal{K}(\lambda)$ și $h \in \mathcal{SH}(\eta, \theta)$, $0 < \lambda \leq 1$, $0 < \sigma, \mu, \theta < 1$ și $\delta, \nu, \eta > 0$. De asemenea, fie α un număr real pozitiv. Dacă Re $(g(z)) \geq 1$ și*

$$0 < \alpha\left(\sigma + \mu + \lambda + \theta - \delta - \nu - \eta - 3\right) + 1 < 1$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}$, dat prin (2.2.10) este convex de ordin

$$\alpha\left(\sigma + \mu + \lambda + \theta - \delta - \nu - \eta - 3\right) + 1.$$

Teorema 3.5.5. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{K}(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{SH}(\nu_i)$, $h_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{SH}(\eta_i)$, $k_i \in \mathcal{K}(\sigma_i)$ și $k_i \in \mathcal{SH}(\theta_i)$, $0 < \mu_i, \lambda_i, \sigma_i < 1$ și $\nu_i, \eta_i, \theta_i > 0$. De asemenea, fie $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere reale cu $\alpha_i \geq 1$, $\beta_i, \gamma_i \geq 0$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă Re $(g_i(z)) \geq 1$ și*

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\alpha_i - 1\right)\left(\mu_i - 2\nu_i - 1\right) + \beta_i\left(-2\eta_i + 2\theta_i\right) + \gamma_i\left(\lambda_i - \sigma_i\right)\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2}\left[\left(\alpha_i - 1\right)\nu_i + \beta_i\left(\eta_i - \theta_i\right)\right] + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{G}_n$, definit în (3.0.3) este convex de ordin

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\alpha_i - 1\right)\left(\mu_i - 2\nu_i - 1\right) + \beta_i\left(-2\eta_i + 2\theta_i\right) + \gamma_i\left(\lambda_i - \sigma_i\right)\right] + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2}\left[\left(\alpha_i - 1\right)\nu_i + \beta_i\left(\eta_i - \theta_i\right)\right] + 1.$$

Fixând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.4.5, avem următorul corolar:

Corolar 3.5.5.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{K}(\mu)$, $g \in \mathcal{SH}(\nu)$, $h \in \mathcal{K}(\lambda)$, $h \in \mathcal{SH}(\eta)$, $k \in \mathcal{K}(\sigma)$ și $k \in \mathcal{SH}(\theta)$, $0 < \mu, \lambda, \sigma < 1$ și $\nu, \eta, \theta > 0$. De asemenea, fie α un număr real pozitiv. Dacă Re $(g(z)) \geq 1$ și*

$$0 \leq \alpha \left[2\theta + \lambda - 2\nu - 2\eta - \sigma - 1 + \sqrt{2}\,(\nu + \eta - \theta)\right] + 1 < 1$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}$, definit prin (2.2.16) este convex de ordin

$$\alpha \left[2\theta + \lambda - 2\nu - 2\eta - \sigma - 1 + \sqrt{2}\,(\nu + \eta - \theta)\right] + 1.$$

Teorema 3.5.6. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{K}(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{SH}(\nu_i, \delta_i)$, $h_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{SH}(\nu_i, \omega_i)$, $k_i \in \mathcal{K}(\sigma_i)$ și $k_i \in \mathcal{SH}(\theta_i, \xi_i)$, $0 < \mu_i, \lambda_i, \sigma_i \leq 1$, $0 < \delta_i, \omega_i, \xi_i < 1$ și $\nu_i, \eta_i, \theta_i > 0$. De asemenea, fie $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere reale cu $\alpha_i \geq 1$, $\beta_i, \gamma_i \geq 0$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă Re $(g_i(z)) \geq 1$ și*

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(\mu_i + \delta_i - \nu_i - 1) + \beta_i(\omega_i + \theta_i - \eta_i - \xi_i) + \gamma_i(\lambda_i - \sigma_i)\right] + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{G}_n$, definit în (3.0.3) este convex de ordin

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(\mu_i + \delta_i - \nu_i - 1) + \beta_i(\omega_i + \theta_i - \eta_i - \xi_i) + \gamma_i(\lambda_i - \sigma_i)\right] + 1.$$

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 3.5.6, urmează corolarul:

Corolar 3.5.6.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{K}(\mu)$, $g \in \mathcal{SH}(\nu, \delta)$, $h \in \mathcal{K}(\lambda)$, $h \in \mathcal{SH}(\nu, \omega)$, $k \in \mathcal{K}(\sigma)$ și $k \in \mathcal{SH}(\theta, \xi)$, $0 < \mu, \lambda, \sigma \leq 1$, $0 < \delta, \omega, \xi < 1$ și $\nu, \eta, \theta > 0$. De asemenea, fie α un număr real pozitiv. Dacă Re $(g(z)) \geq 1$ și*

$$0 < \alpha(\delta + \mu + \omega + \theta + \lambda - \nu - \eta - \sigma - 1) + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}$, dat prin (2.2.16) este convex de ordin

$$\alpha(\delta + \mu + \omega + \theta + \lambda - \nu - \eta - \sigma - 1) + 1.$$

Teorema 3.5.7. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{SH}(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{SH}(\nu_i)$, $k_i \in \mathcal{SH}(\theta_i)$, $h_i \in \mathcal{K}(\eta_i)$, $k_i \in \mathcal{K}(\rho_i)$, $0 < \lambda_i, \eta_i, \rho_i < 1$, $\mu_i, \nu_i, \theta_i > 0$. De asemenea, fie $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ numere reale cu $\alpha_i \geq 1$, $\beta_i, \gamma_i, \delta_i \geq 0$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă*

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \left[-(\alpha_i - 1)(2\mu_i + 1) + \beta_i(\lambda_i - 1) - 2\gamma_i(\nu_i - \theta_i) + \delta_i(\eta_i - \rho_i)\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2}\left((\alpha_i - 1)\mu_i + \gamma_i(\nu_i - \theta_i)\right) + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{T}_n$, definit în (3.0.4) este convex de ordin

$$\sum_{i=1}^{n} \left[-(\alpha_i - 1)(2\mu_i + 1) + \beta_i(\lambda_i - 1) - 2\gamma_i(\nu_i - \theta_i) + \delta_i(\eta_i - \rho_i)\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2}\left[(\alpha_i - 1)\mu_i + \gamma_i(\nu_i - \theta_i)\right] + 1.$$

Fixând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 3.5.7, avem următorul corolar:

Corolar 3.5.7.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{SH}(\mu)$, $g \in \mathcal{K}(\lambda)$, $h \in \mathcal{SH}(\nu)$, $k \in \mathcal{SH}(\theta)$, $h \in \mathcal{K}(\eta)$, $k \in \mathcal{K}(\rho)$. De asemenea, fie α un număr real pozitiv. Dacă*

$$0 < \alpha\left[\lambda + 2\theta + \eta - 2\mu - 2\nu - \rho - 2 + \sqrt{2}\,(\mu + \nu - \theta)\right] + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, definit în (2.2.23) este convex de ordin

$$\alpha\left[\lambda + 2\theta + \eta - 2\mu - 2\nu - \rho - 2 + \sqrt{2}\,(\mu + \nu - \theta)\right] + 1.$$

Teorema 3.5.8. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{SH}(\mu_i, \varepsilon_i)$, $g_i \in \mathcal{K}(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{SH}(\nu_i, \xi_i)$, $k_i \in \mathcal{SH}(\theta_i, \sigma_i)$, $h_i \in \mathcal{K}(\eta_i)$, $k_i \in \mathcal{K}(\rho_i)$, $0 \le \lambda_i, \varepsilon_i, \xi_i, \sigma_i < 1$ și $\mu_i, \nu_i, \theta_i > 0$. De asemenea, fie $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ numere reale cu $\alpha_i \ge 1$, $\beta_i, \gamma_i, \delta_i \ge 0$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă*

$$0 < \sum_{i=1}^{n}\left[-(\alpha_i - 1)(\mu_i - \varepsilon_i + 1) + \beta_i(\lambda_i - 1) + \gamma_i(\xi_i + \theta_i - \sigma_i - \nu_i) + \delta_i(\eta_i - \rho_i)\right] + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{T}_n$, definit în (3.0.4) este convex de ordin

$$\sum_{i=1}^{n}\left[-(\alpha_i - 1)(\mu_i - \varepsilon_i + 1) + \beta_i(\lambda_i - 1) + \gamma_i(\xi_i + \theta_i - \sigma_i - \nu_i) + \delta_i(\eta_i - \rho_i)\right].$$

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 3.5.8, urmează corolarul:

Corolar 3.5.8.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{SH}(\mu, \varepsilon)$, $g \in \mathcal{K}(\lambda)$, $h \in \mathcal{SH}(\nu, \xi)$, $k \in \mathcal{SH}(\theta, \sigma)$, $h \in \mathcal{K}(\eta)$, $k \in \mathcal{K}(\rho)$, $0 \le \lambda, \varepsilon, \xi, \sigma < 1$ și $\mu, \nu, \theta > 0$. De asemenea, fie α un număr real pozitiv. Dacă*

$$0 < \alpha(\varepsilon + \xi + \lambda + \theta + \eta - \mu - \sigma - \nu - \rho - 2) + 1 < 1$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$, dat prin (2.2.23) este convex de ordin

$$\alpha(\varepsilon + \xi + \lambda + \theta + \eta - \mu - \sigma - \nu - \rho - 2) + 1.$$

3.6 Condiții de convexitate pentru funcții α-convexe

În acest paragraf sunt descrise condiții suficiente de convexitate pentru operatorii integrali studiați, când funcțiile implicate aparțin clasei funcțiilor α-convexe $\mathcal{M}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.6.1. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{S}^*(\alpha_i - 1)$ și $g_i \in \mathcal{M}_{\gamma_i}$, cu $1 \le \alpha_i < 2$ și $\beta_i = 1 - \gamma_i$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă*

$$0 < \sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)^2 - \alpha_i\right] + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{M}_n$, definit în (3.0.1) este convex.

Teorema 3.6.2. *Fie funcțiile* $f_i, g_i \in \mathcal{S}^*(\alpha_i - 1)$ *și* $h_i \in \mathcal{M}_{\gamma_i}$, *cu* $1 \leq \alpha_i < 2$ *și* $\beta_i = 1 - \gamma_i$, *pentru orice* $i = \overline{1, n}$. *Dacă Re* $(g_i(z)) \geq 1$ *și*

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \left[2(\alpha_i - 1)^2 - \alpha_i\right] + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}_n$, *definit în (3.0.2) este convex.*

Teorema 3.6.3. *Fie funcțiile* $zf_i', g_i \in \mathcal{S}^*(\alpha_i - 1)$ *și* $h_i, k_i \in \mathcal{M}_{\beta_i}$, *cu* $1 \leq \alpha_i < 2$ *și* $\beta_i = 1 - \gamma_i$, *pentru orice* $i = \overline{1, n}$. *Dacă Re* $(g_i(z)) \geq 1$ *și*

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \left[2(\alpha_i - 1)^2 - (\alpha_i - 1)\right] + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}_n$, *definit în (3.0.3) este convex.*

Teorema 3.6.4. *Fie funcțiile* $f_i \in \mathcal{S}^*(\alpha_i - 1)$, $zg_i' \in \mathcal{S}^*(\beta_i)$ *și* $h_i, k_i \in \mathcal{M}_{\gamma_i}$, *cu* $1 \leq \alpha_i < 2$, $\beta_i, \gamma_i, \delta_i \geq 0$ *și* $\gamma_i = 1 - \delta_i$, *pentru orice* $i = \overline{1, n}$. *Dacă*

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)^2 + \beta_i^2 - \alpha_i - \beta_i + 1\right] + 1 < 1,$$

atunci operatorul integral general $\mathcal{T}_n$, *definit în (3.0.4) este convex.*

Capitolul 4

Condiții de apartenență la clasa $\mathcal{N}(\beta)$

4.1 Condiții pentru funcții analitice

În acest paragraf sunt descrise condiții suficiente de apartenență la clasa $\mathcal{N}(\beta)$, $\beta > 1$, pentru operatorii integrali noi având funcțiile analitice.

Teorema 4.1.1. *Fie funcțiile $f_i, g_i \in \mathcal{A}$, $g_i \in \mathcal{N}(\lambda_i)$. Pentru orice $\lambda_i > 1$ și f_i, g_i verificând condițiile*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - 1\right| \leq 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, există numerele reale strict pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1) + \beta_i\left(\lambda_i - 1\right) + \gamma_i\right] + 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral general $\mathcal{M}_n$, definit în (3.0.1) este din clasa $\mathcal{N}(\mu)$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 4.1.1, obținem corolarul:

Corolar 4.1.1.1. *Fie funcțiile $f, g \in \mathcal{A}$ și $g \in \mathcal{N}(\lambda)$. Pentru orice $\lambda > 1$ și f, g verificând condițiile*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)} - 1\right| \leq 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, există numărul real strict pozitiv α astfel încât

$$\mu = \alpha\left(\lambda + 1\right) + 1.$$

În aceste condiții operatorul integral $\mathcal{M}$, dat prin (2.2.5) este din clasa $\mathcal{N}(\mu)$.

Teorema 4.1.2. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}$, $h_i \in \mathcal{N}(\lambda_i)$. Pentru orice $\lambda_i > 1$ șif_i, g_i, h_i verificând condițiile*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \leq 1, \quad |g_i(z)| \leq 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, există numerele reale strict pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \left[3\left(\alpha_i - 1\right) + \beta_i \left(\lambda_i - 1\right) + \gamma_i\right] + 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{C}_n$, definit în (3.0.2) este din clasa $\mathcal{N}(\rho)$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 4.1.2,obținem corolarul:

Corolar 4.1.2.1. *Fie funcțiile $f, g, h \in \mathcal{A}$ și $h \in \mathcal{N}(\lambda)$. Pentru orice $\lambda > 1$ și f, g, h verificând condițiile*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right| \leq 1, \quad |g(z)| \leq 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, există numărul real stict pozitiv α astfel încât

$$\rho = \alpha\left(\lambda + 3\right) + 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{C}$, dat prin (2.2.10) este din clasa $\mathcal{N}(\rho)$.

Teorema 4.1.3. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$, $f_i \in \mathcal{N}(\mu_i)$, $h_i \in \mathcal{N}(\lambda_i)$ și $k_i \in \mathcal{N}(\sigma_i)$. Pentru orice $\mu_i, \lambda_i, \sigma_i > 1$ și g_i, h_i, k_i verificând condițiile*

$$\left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| \leq 1, \quad |g_i(z)| \leq 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, există numerele reale strict pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\alpha_i - 1\right)\left(\mu_i + 1\right) + 2\beta_i + \gamma_i\left(\lambda_i - \sigma_i\right)\right] + 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{G}_n$, definit în (3.0.3) este din clasa $\mathcal{N}(\rho)$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 4.1.3, obținem corolarul:

Corolar 4.1.3.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$ și $f \in \mathcal{N}(\mu)$, $h \in \mathcal{N}(\lambda)$, $k \in \mathcal{N}(\sigma)$. Pentru orice $\mu, \lambda, \sigma > 1$ și g, h, k verificând condițiile*

$$\left|\frac{zg'(z)}{g(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zk'(z)}{k(z)} - 1\right| \leq 1, \quad |g(z)| \leq 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, există numărul real strict pozitiv α astfel încât

$$\rho = \alpha\left(\mu + \lambda - \sigma + 3\right) + 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{G}$, dat prin (2.2.16) este de clasă $\mathcal{N}(\rho)$.

Teorema 4.1.4. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}$, $g_i \in \mathcal{N}(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{N}(\rho_i)$, $k_i \in \mathcal{N}(\nu_i)$, $i = \overline{1,n}$. Pentru orice $\lambda_i, \rho_i, \nu_i > 1$ și f_i, h_i, k_i verificând condițiile*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - 1\right| \leq 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, există numerele reale strict pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1) + \beta_i (\lambda_i - 1) + 2\gamma_i + \delta_i (\rho_i - \nu_i)\right] + 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral general $\mathcal{T}_n$, definit în (3.0.4) este din clasa $\mathcal{N}(\mu)$.

Luând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 4.1.4, obținem corolarul:

Corolar 4.1.4.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$ și $g \in \mathcal{N}(\lambda)$, $h \in \mathcal{N}(\rho)$, $k \in \mathcal{N}(\nu)$. Pentru orice $\lambda, \rho, \nu > 1$ și f, h, k verificând condițiile*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right| \leq 1, \quad \left|\frac{zk'(z)}{k(z)} - 1\right| \leq 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, există numărul real strict pozitiv α astfel încât

$$\mu = \alpha (\lambda + \rho - \nu + 2) + 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{T}$, dat prin (2.2.23) este din clasa $\mathcal{N}(\mu)$.

4.2 Condiții pentru funcții din clasa $\mathcal{SP}(\alpha, \beta)$

Această secțiune conține condiții suficiente de apartenență la clasa $\mathcal{N}(\beta)$, $\beta > 1$, pentru operatorii integrali noi având funcțiile din clasa funcțiilor $\mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $0 \leq \beta < 1$.

Teorema 4.2.1. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, $g_i \in \mathcal{SP}(\delta, \eta)$, și $g_i \in \mathcal{N}(\lambda_i)$, $\alpha, \delta, \lambda_i > 0$, $0 \leq \beta, \eta < 1$. Pentru orice numere reale $M_i, N_i \geq 1$, care verifică*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\right| \leq M_i, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| \leq N_i,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1,n}$, există numerele reale strict pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și $\alpha_i >$ astfel încît

$$\rho = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(M_i + 2\alpha - 1) + \beta_i (\lambda_i - 1) + \gamma_i (N_i + 2\delta - 1)\right] > 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{M}_n$, definit în (3.0.1) este din clasa $\mathcal{N}(\rho)$.

Punând $n = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 4.2.1, avem corolarul:

Corolar 4.2.1.1. *Fie funcțiile* $f \in \mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, $g \in \mathcal{SP}(\delta, \eta)$, *și* $g \in \mathcal{N}(\lambda)$, $\alpha, \delta, \lambda > 0$, $0 \leq \beta, \eta < 1$. *Pentru orice numere reale* $M, N \geq 1$, *care verifică*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq M, \quad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)}\right| \leq N,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, *există numărul real strict pozitiv* α *astfel încât*

$$\rho = 1 + \alpha\left(M + N + 2\alpha + 2\delta + \lambda - 3\right) > 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{M}$, *(2.2.5) este din clasa* $\mathcal{N}(\rho)$.

Teorema 4.2.2. *Fie funcțiile* $f_i \in \mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, $g_i \in \mathcal{SP}(\gamma, \delta)$, $h_i \in \mathcal{N}(\lambda_i)$ *și* $h_i \in \mathcal{SP}(\nu, \eta)$, $\alpha, \gamma, \nu, \lambda_i > 0$, $0 \leq \beta, \delta, \eta < 1$. *Pentru numerele reale* $M_i, N_i, P_i \geq 1$, *care verifică*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\right| \leq M_i, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| \leq N_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}\right| \leq P_i, \quad |g_i(z)| \leq 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, *există numerele reale strict pozitive* $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ *și* $\alpha_i > 1$ *astfel încât*

$$\rho = 1 + \sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)\left(M_i + N_i + 2\alpha + 2\gamma - 1\right) + \beta_i\left(\lambda_i - 1\right) + \gamma_i\left(P_i + 2\nu - 1\right)\right] > 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{C}_n$, *definit în (3.0.2) este din clasa* $\mathcal{N}(\rho)$.

Punând $n = 1$ *și* $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ *în Teorema 4.2.2, avem corolarul:*

Corolar 4.2.2.1. *Fie funcțiile* $f \in \mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, $g \in \mathcal{SP}(\gamma, \delta)$, $h \in \mathcal{N}(\lambda)$ *și* $h \in \mathcal{SP}(\nu, \eta)$, $\alpha, \gamma, \nu, \lambda > 0$, $0 \leq \beta, \delta, \eta < 1$. *Pentru orice numere reale* $M, N, P \geq 1$, *care verifică*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq M, \quad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)}\right| \leq N, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)}\right| \leq P, \quad |g(z)| \leq 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, *există numărul real strict pozitiv* α *astfel încât*

$$\rho = 1 + \alpha\left(M + N + P + 2\alpha + 2\gamma + 2\nu + \lambda - 3\right) > 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{C}$, *dat prin (2.2.10) este din clasa* $\mathcal{N}(\rho)$.

Teorema 4.2.3. *Fie funcțiile* $f_i \in \mathcal{N}(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{SP}(\gamma, \delta)$, $h_i \in \mathcal{N}(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{SP}(\nu, \eta)$, $k_i \in \mathcal{SP}(\theta, \xi)$ *și* $k_i \in \mathcal{N}(\sigma_i)$, $\mu_i, \gamma, \nu, \theta, \lambda_i, \sigma_i > 0$, $0 \leq \delta, \eta, \xi < 1$. *Pentru numerele reale* $M_i, N_i, P_i \geq 1$, *care verifică*

$$\left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)}\right| \leq M_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}\right| \leq N_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)}\right| \leq P_i, \quad |g_i(z)| \leq 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, *există numerele reale strict pozitive* $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ *și* $\alpha_i > 1$ *astfel încât*

$$\rho = 1 + \sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i - 1)\left(\mu_i + M_i + 2\gamma - 1\right) + \beta_i\left(N_i + P_i + 2\nu + 4\theta - 2\xi - 1\right) + \gamma_i\left(\lambda_i - \sigma_i\right)\right] > 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral general $\mathcal{G}_n$, *definit în (3.0.3) este din clasa* $\mathcal{N}(\rho)$.

Luând $n=1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorem 4.2.3, avem corolarul:

Corolar 4.2.3.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{N}(\mu)$, $g \in \mathcal{SP}(\gamma, \delta)$, $h \in \mathcal{SP}(\mu, \eta)$, $h \in \mathcal{N}(\lambda)$, $k \in \mathcal{SP}(\theta, \xi)$ și $k \in \mathcal{N}(\sigma)$, $\mu, \gamma, \nu, \theta, \lambda, \sigma > 0$, $0 \le \delta, \eta, \xi < 1$. Pentru orice numere reale $M, N, P \ge 1$, care verifică*

$$\left|\frac{zg'(z)}{g(z)}\right| \le M, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)}\right| \le N, \quad \left|\frac{zk'(z)}{k(z)}\right| \le P, \quad |g(z)| \le 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, există α un număr real strict pozitiv astfel încât

$$\rho = 1 + \alpha\left(\mu + M + N + P + 2\gamma + 2\nu + 4\theta - 2\xi + \lambda - \sigma - 1\right) > 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{G}$, definit în (2.2.16) este din clasa $\mathcal{N}(\rho)$.

Teorema 4.2.4. *Fie funcțiile $f_i \in \mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, $g_i \in \mathcal{N}(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{SP}(\sigma, \eta)$, $k_i \in \mathcal{SP}(\theta, \xi)$, $h_i \in \mathcal{N}(\mu_i)$ și $k_i \in \mathcal{N}(\nu_i)$ $\alpha, \sigma, \theta, \lambda_i, \mu_i, \nu_i > 0$, $0 \le \beta, \eta, \xi < 1$. Pentru numerele reale $M_i, N_i, P_i \ge 1$, care verifică*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}\right| \le M_i, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)}\right| \le N_i, \quad \left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)}\right| \le P_i,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $i = \overline{1, n}$, există numerele reale strict pozitive $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ și $\alpha_i > 1$ astfel încât

$$\rho = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(M_i + 2\alpha - 1) + \beta_i(\lambda_i - 1) + \gamma_i(N_i + P_i + 2\sigma + 4\theta - 2\xi) + \delta_i(\mu_i - \nu_i)\right] > 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral general $\mathcal{T}_n$, definit în (3.0.4) este din clasa $\mathcal{N}(\rho)$.

Luând $n=1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 4.2.4, avem corolarul:

Corolar 4.2.4.1. *Fie funcțiile $f \in \mathcal{SP}(\alpha, \beta)$, $g \in \mathcal{N}(\lambda)$, $h \in \mathcal{SP}(\sigma, \eta)$, $k \in \mathcal{SP}(\theta, \xi)$, $h \in \mathcal{N}(\mu)$ și $k \in \mathcal{N}(\nu)$ $\alpha, \sigma, \theta, \lambda, \mu, \nu > 0$, $0 \le \beta, \eta, \xi < 1$. Pentru orice numere reale $M, N, P \ge 1$, care verifică*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \le M, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)}\right| \le N, \quad \left|\frac{zk'(z)}{k(z)}\right| \le P,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, există α un număr real strict pozitiv astfel încât

$$\rho = 1 + \alpha\left(M + N + P + 2\alpha + 2\sigma + 4\theta + \lambda + \mu - \nu - 2\xi - 2\right) > 1.$$

În aceste condiții, operatorul integral $\mathcal{T}$, definit în (2.2.23) este din clasa $\mathcal{N}(\rho)$.

Capitolul 5

Condiții pentru funcții p-valente

5.1 Condiții de apartenență la clasa funcțiilor p-valente convexe

În această secțiune prezentăm condiții suficiente de apartenență la clasa funcțiilor p-valente convexe $\mathcal{K}_p(\beta)$, $0 \leq \beta \leq p$, pentru operatorii integrali noi având funcțiile din clasa funcțiilor stelate p-valente $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$, $\alpha < 1$.

Fie acum operatorul integral

$$\mathcal{M}_{p,n}(z) = \int_0^z pt^{p-1} \prod_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{f_i(t)}{t^p} \right)^{\alpha_i - 1} \left(\frac{g_i{}'(t)}{pt^{p-1}} \right)^{\beta_i} \left(\frac{g_i(t))}{t^p} \right)^{\gamma_i} \right] dt, \tag{5.1.1}$$

unde f_i, g_i sunt funcții analitice p-valente în $\mathbb{U}$ și $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sunt numere complexe.

Pentru $p = 1$ acest operator integral devine $\mathcal{M}_n$, definit în (3.0.1).

Teorema 5.1.1. *Fie funcțiile $f_i, g_i \in \mathcal{A}_p$, $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ și $\mu_i, \lambda_i, \eta_i < 1$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă $f_i \in \mathcal{S}_p^*(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{K}_p(\lambda_i)$ și $g_i \in \mathcal{S}_p^*(\eta_i)$, atunci $\mathcal{M}_{p,n} \in \mathcal{K}_p(\rho)$, unde*

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(1 - \mu_i) + \beta_i (1 - \lambda_i) + \gamma_i (1 - \eta_i) \right].$$

Luând $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 5.1.1, obținem corolarul:

Corolar 5.1.1.1. *Fie funcțiile $f, g \in \mathcal{A}$, $\alpha > 0$ și $\mu, \lambda, \eta < 1$. Dacă $f \in \mathcal{S}^*(\mu)$, $g \in \mathcal{K}(\lambda)$ și $g \in \mathcal{S}^*(\eta)$, atunci operatorul integral $\mathcal{M} \in \mathcal{K}(\rho)$*

$$\mathcal{M}(z) = \int_0^z \left[\frac{f(t)}{t} g'(t) \frac{g(t))}{t} \right]^{\alpha} dt, \tag{5.1.2}$$

unde

$$\rho = 1 - \alpha (3 - \mu - \lambda - \eta).$$

Considerăm operatorul integral:

$$\mathcal{C}_{p,n}(z)=\int_0^z pt^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{f_i(t)}{t^{p(p-1)}}e^{g_i(t)}\right)^{\alpha_i-1}\left(\frac{h_i{}'(t)}{pt^{p-1}}\right)^{\beta_i}\left(\frac{h_i(t))}{t^p}\right)^{\gamma_i}\right]dt, \tag{5.1.3}$$

unde f_i, g_i, h_i *sunt funcții analitice p-valente în* $\mathbb{U}$ *și* $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ *sunt numere complexe.*

Pentru $p=1$ *acest operator integral devine* $\mathcal{C}_n$*, definit în (3.0.2).*

Teorema 5.1.2. *Fie funcțiile* $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}_p$ *și* $\alpha_i-1, \beta_i, \gamma_i > 0$. *Dacă* $f_i \in \mathcal{S}_p^*(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{S}_p^*(\nu_i)$, $h_i \in \mathcal{K}_p(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{S}_p^*(\eta_i)$ *cu* $\mu_i, \nu_i, \lambda_i, \eta_i < 1$ *și Re* $(g_i(z)) \geq 1$, *pentru orice* $i=\overline{1,n}$, *atunci* $\mathcal{C}_{p,n} \in \mathcal{K}_p(\rho)$, *unde*

$$\rho = 1-\sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i-1)(3-\mu_i-\nu_i)+\beta_i(1-\lambda_i)+\gamma_i(1-\eta_i)\right].$$

Luând $n=p=1$ *și* $\alpha_i-1=\beta_i=\gamma_i=\alpha$ *în Teorema 5.1.2, obținem corolarul:*

Corolar 5.1.2.1. *Fie funcțiile* $f, g, h \in \mathcal{A}$, $\alpha > 0$. *Dacă* $f \in \mathcal{S}^*(\mu)$, $g \in \mathcal{S}^*(\nu)$, $h \in \mathcal{K}(\lambda)$, $h \in \mathcal{S}^*(\eta)$ *cu* $\mu, \nu, \lambda, \eta < 1$ *și Re* $(g(z)) \geq 1$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{C} \in \mathcal{K}(\rho)$, *unde*

$$\mathcal{C}(z)=\int_0^z\left[\frac{f(t)}{t}e^{g(t)}h'(t)\frac{h(t))}{t}\right]^{\alpha}dt, \tag{5.1.4}$$

și

$$\rho = 1-\alpha(5-\mu-\nu-\lambda-\eta).$$

Considerăm operatorul integral:

$$\mathcal{G}_{p,n}(z)=\int_0^z\prod_{i=1}^{n}\left[pt^{p-1}\left(\frac{f_i{}'(t)}{pt^{p-1}}\frac{e^{g_i(t)}}{t^{p-1}}\right)^{\alpha_i-1}\left(\frac{h_i(t)}{k_i(t)}\right)^{\beta_i}\left(\frac{h_i{}'(t))}{k_i{}'(t)}\right)^{\gamma_i}\right]dt, \tag{5.1.5}$$

unde f_i, g_i, h_i, k_i *sunt funcții analitice p-valente în* $\mathbb{U}$ *și* $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ *numere complexe.*

Pentru $p=1$ *obținem operatorul integral* $\mathcal{G}_n$*, definit în (3.0.3).*

Teorema 5.1.3. *Fie funcțiile* $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$, $\alpha_i-1, \beta_i, \gamma_i > 0$. *Dacă* $f_i \in \mathcal{K}_p(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{S}_p^*(\nu_i)$, $h_i \in \mathcal{K}_p(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{S}_p^*(\eta_i)$, $k_i \in \mathcal{K}_p(\sigma_i)$, $k_i \in \mathcal{S}_p^*(\theta_i)$ *cu* $\mu_i, \nu_i, \lambda_i, \eta_i, \sigma_i, \theta_i < 1$ *și Re* $(g_i(z)) \geq 1$, *pentru orice* $i=\overline{1,n}$, *atunci* $\mathcal{G}_{p,n} \in \mathcal{K}_p(\rho)$, *unde*

$$\rho = 1-\sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i-1)(3-\mu_i-\nu_i)+\beta_i(\theta_i-\eta_i)+\gamma_i(\sigma_i-\lambda_i)\right].$$

Luând $n=p=1$ *și* $\alpha_i-1=\beta_i=\gamma_i=\alpha$ *în Teorema 5.1.3, obținem corolarul:*

Corolar 5.1.3.1. *Fie funcțiile* $f, g, h, k \in \mathcal{A}$, $\alpha > 0$. *Dacă* $f \in \mathcal{K}(\mu)$, $g \in \mathcal{S}^*(\nu)$, $h \in \mathcal{K}(\lambda)$, $h \in \mathcal{S}^*(\eta)$, $k \in \mathcal{K}(\sigma)$, $k \in \mathcal{S}^*(\theta)$ *cu* $\mu, \nu, \lambda, \eta, \sigma, \theta < 1$ *și Re* $(g(z)) \geq 1$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{G} \in \mathcal{K}_p(\rho)$, *unde*

$$\mathcal{G}(z)=\int_0^z\left[f'(t)e^{g(t)}\frac{h(t)}{k(t)}\frac{h'(t)}{k'(t)}\right]^{\alpha}dt, \tag{5.1.6}$$

și

$$\rho = 1-\alpha(3+\theta+\sigma-\mu-\nu-\lambda-\eta).$$

Fie operatorul integral:

$$\mathcal{T}_{p,n}(z)=\int_0^z\prod_{i=1}^n\left[pt^{p-1}\left(\frac{f_i(t)}{t^p}\right)^{\alpha_i-1}\left(\frac{g_i{}'(t)}{pt^{p-1}}\right)^{\beta_i}\left(\frac{h_i(t)}{k_i(t)}\right)^{\gamma_i}\left(\frac{h_i{}'(t))}{k_i{}'(t)}\right)^{\delta_i}\right]dt, \tag{5.1.7}$$

unde** f_i, g_i, h_i, k_i **sunt funcții analitice p-valente în** $\mathbb{U}$ **și** $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ **numere complexe.

Dacă luăm $p=1$ obținem operatorul integral $\mathcal{T}_n$, definit în (3.0.4)

Teorema 5.1.4. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$, $\alpha_i-1, \beta_i, \gamma_i, \delta_i > 0$. Dacă $f_i \in \mathcal{S}_p^*(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{K}_p(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{K}_p(\omega_i)$, $h_i \in \mathcal{S}_p^*(\eta_i)$, $k_i \in \mathcal{K}_p(\sigma_i)$, $k_i \in \mathcal{S}_p^*(\theta_i)$ cu $\mu_i, \lambda_i, \omega_i, \eta_i, \sigma_i, \theta_i < 1$, pentru orice $i=\overline{1,n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}_{p,n} \in \mathcal{K}_p(\rho)$, unde*

$$\rho=1-\sum_{i=1}^n\left[(\alpha_i-1)(1-\mu_i)+\beta_i(1-\lambda_i)+\gamma_i(\theta_i-\eta_i)+\delta_i(\sigma_i-\omega_i)\right].$$

Luând $n=p=1$ și $\alpha_i-1=\beta_i=\gamma_i=\delta_i=\alpha$ în Teorema 5.1.4, obținem corolarul:

Corolar 5.1.4.1. *Fie funcțiile $f,g,h,k \in \mathcal{A}$, $\alpha>0$. Dacă $f \in \mathcal{S}^*(\mu)$, $g \in \mathcal{K}(\lambda)$, $h \in \mathcal{K}(\omega)$, $h \in \mathcal{S}^*(\eta)$, $k \in \mathcal{K}(\sigma)$, $k \in \mathcal{S}^*(\theta)$, cu $\mu, \lambda, \eta, \omega, \sigma, \theta < 1$, atunci operatorul integral $\mathcal{T} \in \mathcal{K}_p(\rho)$, unde*

$$\mathcal{T}(z)=\int_0^z\left[\frac{f(t)}{t}g'(t)\frac{h(t)}{k(t)}\frac{h'(t)}{k'(t)}\right]^\alpha dt, \tag{5.1.8}$$

și

$$\rho=1-\alpha(2+\theta+\sigma-\mu-\lambda-\eta-\omega).$$

5.2 Condiții de apartenență la clasa $\mathcal{N}_p(\beta)$

În acest paragraf descriem condiții suficiente de apartenență la clasa funcțiilor p-valente $\mathcal{N}_p(\beta)$, pentru operatorii integrali noi având funcțiile din clasele funcțiilor p-valente $\mathcal{N}_p(\beta)$ și $\mathcal{M}_p(\beta)$, $\beta>1$.

Teorema 5.2.1. *Fie funcțiile $f_i, g_i \in \mathcal{A}_p$, $\alpha_i-1, \beta_i, \gamma_i > 0$ și $\mu_i, \lambda_i, \eta_i > 1$, pentru orice $i=\overline{1,n}$. Dacă $f_i \in \mathcal{M}_p(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{N}_p(\lambda_i)$ și $g_i \in \mathcal{M}_p(\eta_i)$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}_{p,n} \in \mathcal{N}_p(\rho)$, unde*

$$\rho=1-\sum_{i=1}^n\left[(\alpha_i-1)(\mu_i-1)+\beta_i(\lambda_i-1)+\gamma_i(\eta_i-1)\right].$$

Teorema 5.2.2. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}_p$, $\alpha_i-1, \beta_i, \gamma_i > 0$. Dacă $f_i \in \mathcal{M}_p(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{M}_p(\nu_i)$, $h_i \in \mathcal{N}_p(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{M}_p(\eta_i)$ cu $\mu_i, \nu_i, \lambda_i, \eta_i > 1$ și Re $(g_i(z)) \leq 1$, pentru orice $i=\overline{1,n}$, atunci operatorul integral $\mathcal{C}_{p,n} \in \mathcal{N}_p(\rho)$, unde*

$$\rho=1-\sum_{i=1}^n\left[(\alpha_i-1)(\mu_i+\nu_i-1)+\beta_i(\lambda_i-1)+\gamma_i(\eta_i-1)\right].$$

Teorema 5.2.3. *Fie funcțiile* $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$, $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$. *Dacă* $f_i \in \mathcal{N}_p(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{M}_p(\nu_i)$, $h_i \in \mathcal{N}_p(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{M}_p(\eta_i)$, $k_i \in \mathcal{N}_p(\sigma_i)$, $k_i \in \mathcal{M}_p(\theta_i)$ *cu* $\mu_i, \nu_i, \lambda_i, \eta_i, \sigma_i, \theta_i > 1$ *și Re* $(g_i(z)) \leq 1$, *pentru orice* $i = \overline{1, n}$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{G}_{p,n} \in \mathcal{N}_p(\rho)$, *unde*

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1) (\mu_i + \nu_i - 1) + \beta_i (\eta_i - \theta_i) + \gamma_i (\lambda_i - \sigma_i) \right].$$

Teorema 5.2.4. *Fie funcțiile* $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$, $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i, , \delta_i > 0$. *Dacă* $f_i \in \mathcal{M}_p(\mu_i)$, $g_i \in \mathcal{N}_p(\lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{N}_p(\omega_i)$, $h_i \in \mathcal{M}_p(\eta_i)$, $k_i \in \mathcal{N}_p(\sigma_i)$, $k_i \in \mathcal{M}_p(\theta_i)$ *cu* $\mu_i, \lambda_i, \eta_i, \omega_i, \sigma_i, \theta_i > 1$, *pentru orice* $i = \overline{1, n}$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{T}_{p,n} \in \mathcal{N}_p(\rho)$, *unde*

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1) (\mu_i - 1) + \beta_i (\lambda_i - 1) + \gamma_i (\eta_i - \theta_i) + \delta_i (\omega_i - \sigma_i) \right].$$

5.3 Condiții de apartenență la clasa $\mathcal{K}_p(a, \alpha)$

În această secțiune prezentăm condiții suficiente de apartenență la clasa funcțiilor p-valente convexe $\mathcal{K}_p(a, \alpha)$, *pentru operatorii integrali noi având funcțiile din clasa funcțiilor stelate p-valente* $\mathcal{S}_p^*(a, \alpha)$, $a \in \mathbb{C}$, $\alpha < 1$.

Teorema 5.3.1. *Fie funcțiile* $f_i, g_i \in \mathcal{A}_p$, $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ *și* $\mu_i, \lambda_i, \eta_i < 1$, *pentru orice* $i = \overline{1, n}$. *Dacă* $f_i \in \mathcal{S}_p^*(a, \mu_i)$, $g_i \in \mathcal{K}_p(a, \lambda_i)$ *și* $g_i \in \mathcal{S}_p^*(a, \eta_i)$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{M}_{p,n} \in \mathcal{K}_p(a, \rho)$, *unde*

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1) \mu_i + \beta_i \lambda_i + \gamma_i \eta_i \right].$$

Fixând $n = p = 1$ *și* $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ *în Teorema 5.3.1, avem corolarul:*

Corolar 5.3.1.1. *Fie funcțiile* $f, g \in \mathcal{A}$, $\alpha > 0$ *și* $\mu, \lambda, \eta < 1$. *Dacă* $f \in \mathcal{S}^*(a, \mu)$, $g \in \mathcal{K}(a, \lambda)$ *și* $g \in \mathcal{S}^*(a, \eta)$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{M} \in \mathcal{K}(a, \rho)$, *unde* $\mathcal{M}$ *dat prin (5.1.2) și*

$$\rho = 1 - \alpha (\mu + \lambda + \eta).$$

Teorema 5.3.2. *Fie funcțiile* $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}_p$, $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$. *Dacă* $f_i \in \mathcal{S}_p^*(a, \mu_i)$, $g_i \in \mathcal{S}_p^*(a, \nu_i)$, $h_i \in \mathcal{K}_p(a, \lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{S}_p^*(a, \eta_i)$ *cu* $\mu_i, \nu_i, \lambda_i, \eta_i < 1$ *și Re* $(g_i(z)) \geq 1$, *pentru orice* $i = \overline{1, n}$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{C}_{p,n} \in \mathcal{K}_p(a, \rho)$, *unde*

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1) (\mu_i + \nu_i + 1) + \beta_i \lambda_i + \gamma_i \eta_i \right].$$

Fixând $n = p = 1$ *și* $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ *în Teorema 5.3.2, avem corolarul:*

Corolar 5.3.2.1. *Fie funcțiile* $f, g, h \in \mathcal{A}$, $\alpha > 0$. *Dacă* $f \in \mathcal{S}^*(a, \mu)$, $g \in \mathcal{S}^*(a, \nu)$, $h \in \mathcal{K}(a, \lambda)$, $h \in \mathcal{S}^*(a, \eta)$ *unde* $\mu, \nu, \lambda, \eta < 1$ *și Re* $(g)(z)) \geq 1$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{C} \in \mathcal{K}_p(a, \rho)$, *unde* $\mathcal{C}$ *definit în (5.1.4) și*

$$\rho = 1 - \alpha (\mu + \nu + \lambda + \eta + 1).$$

Teorema 5.3.3. *Fie funcțiile* $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$, $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$. *Dacă* $f_i \in \mathcal{K}_p(a, \mu_i)$, $g_i \in \mathcal{S}_p^*(a, \nu_i)$, $h_i \in \mathcal{K}_p(a, \lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{S}_p^*(a, \eta_i)$, $k_i \in \mathcal{K}_p(a, \sigma_i)$, $k_i \in \mathcal{S}_p^*(a, \theta_i)$ *cu* $\mu_i, \nu_i, \lambda_i, \eta_i, \sigma_i, \theta_i < 1$ *și Re* $(g_i(z)) \geq 1$, *pentru orice* $i = \overline{1, n}$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{G}_{p,n} \in \mathcal{K}_p(a, \rho)$, *unde*

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1)(\mu_i + \nu_i + 1) + \beta_i (\eta_i - \theta_i) + \gamma_i (\lambda_i - \sigma_i) \right].$$

Punând $n = p = 1$ *și* $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ *în Teorema 5.3.3, avem corolarul:*

Corolar 5.3.3.1. *Fie funcțiile* $f, g, h, k \in \mathcal{A}$, $\alpha > 0$. *Dacă* $f \in \mathcal{K}(a, \mu)$, $g \in \mathcal{S}^*(a, \nu)$, $h \in \mathcal{K}(a, \lambda)$, $h \in \mathcal{S}^*(a, \eta)$, $k \in \mathcal{K}(a, \sigma)$, $k \in \mathcal{S}^*(a, \theta)$ *cu* $\mu, \nu, \lambda, \eta, \sigma, \theta < 1$ *și Re* $(g(z)) \geq 1$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{G} \in \mathcal{K}_p(a, \rho)$, *unde* $\mathcal{G}$ *definit în (5.1.6) și*

$$\rho = 1 - \alpha (\mu + \nu + \eta + \lambda - \theta - \sigma + 1).$$

Teorema 5.3.4. *Fie funcțiile* $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$, $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i, \delta_i > 0$. *Dacă* $f_i \in \mathcal{S}_p^*(a, \mu_i)$, $g_i \in \mathcal{K}_p(a, \lambda_i)$, $h_i \in \mathcal{K}_p(a, \omega_i)$, $h_i \in \mathcal{S}_p^*(a, \eta_i)$, $k_i \in \mathcal{K}_p(a, \sigma_i)$, $k_i \in \mathcal{S}_p^*(a, \theta_i)$ *cu* $\mu_i, \lambda_i, \omega_i, \eta_i, \sigma_i, \theta_i < 1$, *pentru orice* $i = \overline{1, n}$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{T}_{p,n} \in \mathcal{K}_p(a, \rho)$, *unde*

$$\rho = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - 1) \mu_i + \beta_i \lambda_i + \gamma_i (\eta_i - \theta_i) + \delta_i (\omega_i - \sigma_i) \right].$$

Punând $n = p = 1$ *și* $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ *în Teorema 5.3.4, avem corolarul:*

Corolar 5.3.4.1. *Fie funcțiile* $f, g, h, k \in \mathcal{A}$, $\alpha > 0$. *Dacă* $f \in \mathcal{S}^*(a, \mu)$, $g \in \mathcal{K}(a, \lambda)$, $h \in \mathcal{K}(a, \omega)$, $h \in \mathcal{S}^*(a, \eta)$, $k \in \mathcal{K}(a, \sigma)$, $k \in \mathcal{S}^*(a, \theta)$, *cu* $\mu, \lambda, \omega, \eta, \sigma, \theta < 1$, *atunci operatorul integral* $\mathcal{T} \in \mathcal{K}_p(a, \rho)$, *unde*

$$\rho = 1 - \alpha (\mu + \lambda + \omega + \eta - \theta - \sigma).$$

5.4 Condiții de apartenență la clasa funcțiilor p-valente stelate

În această secțiune prezentăm condiții suficiente de apartenență la clasa funcțiilor p-valente stelate $\mathcal{S}_p^*(\beta)$, $0 \leq \beta \leq p$, *pentru operatorii integrali noi având funcțiile din clasa funcțiilor analitice p-valente* $\mathcal{A}_p$.

Teorema 5.4.1. *Fie funcțiile* $f_i, g_i \in \mathcal{A}_p$ *și* $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ *numere reale pozitive, pentru orice* $i = \overline{1, n}$. *Dacă* f_i, g_i *satisfac inegalitățile*

$$Re \frac{z f_i'(z)}{f_i(z)} < p + \frac{1}{2 \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - 1)}, \quad Re \frac{z g_i'(z)}{g_i(z)} < p + \frac{1}{2 \sum_{i=1}^{n} \gamma_i}, \quad Re \left(\frac{z g_i''(z)}{g_i'(z)} + 1 \right) < p - \frac{3}{4 \sum_{i=1}^{n} \beta_i},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}_{p,n}$ *este p-valent stelat în* $\mathbb{U}$.

Punând $n = p = 1$ *și* $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ *în Theorem 5.4.1, obținem corolarul:*

Corolar 5.4.1.1. *Fie funcțiile $f, g \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. dacă f, g satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} < 1 + \frac{1}{2\alpha}, \quad Re\frac{zg'(z)}{g(z)} < 1 + \frac{1}{2\alpha}, \quad Re\left(\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{3}{4\alpha},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{M}$ definit în (5.1.2) este stelat în discul unitate.

Teorema 5.4.2. *Fie funcțiile $f_i, g_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă f_i, g_i satisfac inegalitățile*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - p\right| < \frac{p}{2\sum_{i=1}^n(\alpha_i - 1)}, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - p\right| < \frac{p}{2\sum_{i=1}^n \gamma_i}, \quad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)} - p + 1\right| < \frac{1}{\sum_{i=1}^n \beta_i},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}_{p,n}$ este p-valent stelat în $\mathbb{U}$.

Punând $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 5.4.2, urmează corolarul:

Corolar 5.4.2.1. *Fie funcțiile $f, g \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ numere reale pozitive. Dacă f, g satisfac inegalitățile*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{1}{2\alpha}, \quad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)} - 1\right| < \frac{1}{2\alpha}, \quad \left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right| < \frac{1}{\alpha},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}$ dat prin (5.1.2) este stelat în $\mathbb{U}$.

Teorema 5.4.3. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă f_i, g_i, h_i satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} < p + \frac{1}{3\sum_{i=1}^n(\alpha_i - 1)}, \quad Re\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} < p + \frac{1}{3\sum_{i=1}^n(\alpha_i - 1)},$$

$$Re\left(\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{3}{4\sum_{i=1}^n \beta_i}, \quad Re\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} < p + \frac{1}{3\sum_{i=1}^n \gamma_i}, \quad |g_i(z)| \leq 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}_{p,n}$ este p-valent stelat în $\mathbb{U}$.

Dacă în Teorema 5.4.3 considerăm $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$, atunci obținem corolarul:

Corolar 5.4.3.1. *Fie funcțiile $f, g, h \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g, h satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} < 1 + \frac{1}{3\alpha}, \quad Re\frac{zg'(z)}{g(z)} < 1 + \frac{1}{3\alpha},$$

$$Re\left(\frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{3}{4\alpha}, \quad Re\frac{zh'(z)}{h(z)} < 1 + \frac{1}{3\alpha}, \quad |g(z)| \leq 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{C}$ definit în (5.1.4) este stelat în discul unitate.

Teorema 5.4.4. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă f_i, g_i, h_i satisfac inegalitățile*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - p\right| < \frac{p}{4\sum_{i=1}^n(\alpha_i - 1)}, \quad \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - p\right| < \frac{p}{4\sum_{i=1}^n(\alpha_i - 1)},$$

$$\left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - p\right| < \frac{p}{4\sum_{i=1}^n \gamma_i}, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} - p + 1\right| < \frac{1}{\sum_{i=1}^n \beta_i}, \quad |g_i(z)| \leq \frac{1}{4p\sum_{i=1}^n(\alpha_i - 1)},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{C}_{p,n}$ este p-valent stelat în $\mathbb{U}$.

Punând $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 5.4.4, avem corolarul:

Corolar 5.4.4.1. *Fie funcțiile $f, g, h \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g, h satisfac inegalitățile*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{1}{4\alpha}, \quad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)} - 1\right| < \frac{1}{4\alpha},$$

$$\left|\frac{z'h(z)}{h(z)} - 1\right| < \frac{1}{4\alpha}, \quad \left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| < \frac{1}{\alpha}, \quad |g(z)| \leq \frac{1}{4\alpha},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{C}$ dat prin (5.1.4) este stelat în $\mathbb{U}$.

Teorema 5.4.5. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă f_i, g_i, h_i, k_i satisfac inegalitățile*

$$Re\left(\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{3}{4\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)}, \; Re\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} < p + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)}, \; Re\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} < p + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i},$$

$$Re\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} < p + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}, \quad Re\left(\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{3}{4\sum_{i=1}^{n}\gamma_i},$$

$$Re\left(\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{3}{4\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}, \quad |g_i(z)| \leq 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}_{p,n}$ este p-valent stelat în $\mathbb{U}$.

Dacă în Teorema 5.4.5 considerăm $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ atunci obținem corolarul:

Corolar 5.4.5.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g, h, k satisfac inegalitățile*

$$Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{3}{4\alpha}, \quad Re\frac{zg'(z)}{g(z)} < 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad Re\frac{zh'(z)}{h(z)} < 1 + \frac{1}{\alpha},$$

$$Re\frac{zk'(z)}{k(z)} < 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad Re\left(\frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{3}{4\alpha}, \quad Re\left(\frac{zk''(z)}{k'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{3}{4\alpha}, \quad |g(z)| \leq 1,$$

atunci operatorul integral $\mathcal{G}$ dat prin (5.1.6) este stelat în discul unitate.

Teorema 5.4.6. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă f_i, g_i, h_i, k_i satisfac inegalitățile*

$$\left|\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)} - p + 1\right| < \frac{1}{3\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)}, \; \left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - p\right| < \frac{p}{4\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)}, \; \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - p\right| < \frac{p}{4\sum_{i=1}^{n}\beta_i},$$

$$\left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - p\right| < \frac{p}{4\sum_{i=1}^{n}\beta_i}, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} - p + 1\right| < \frac{1}{3\sum_{i=1}^{n}\gamma_i},$$

$$\left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} - p + 1\right| < \frac{1}{3\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}, \quad |g_i(z)| \leq \frac{1}{4p\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{G}_{p,n}$ este p-valent stelat în $\mathbb{U}$.

Punând $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 5.4.6, avem corolarul:

Corolar 5.4.6.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g, h, k satisfac inegalitățile*

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < \frac{1}{3\alpha}, \quad \left|\frac{zg'(z)}{g(z)} - 1\right| < \frac{1}{4\alpha}, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right| < \frac{1}{4\alpha},$$
$$\left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| < \frac{1}{3\alpha}, \quad \left|\frac{zk''(z)}{k'(z)}\right| < \frac{1}{3\alpha}, \quad |g(z)| \leq \frac{1}{4\alpha},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{G}$ dat prin (5.1.6) este stelat în $\mathbb{U}$.

Teorema 5.4.7. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i, \delta_i > 0$ numere reale pozitive $i = \overline{1, n}$. Dacă f_i, g_i, h_i, k_i satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} < p + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)}, \quad Re\left(\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{3}{4\sum_{i=1}^{n}\beta_i},$$
$$Re\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} < p + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}, \quad Re\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} < p + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i},$$
$$Re\left(\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{3}{4\sum_{i=1}^{n}\delta_i}, \quad Re\left(\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{3}{4\sum_{i=1}^{n}\delta_i},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}_{p,n}$ este p-valent stelat în $\mathbb{U}$.

Dacă considerăm în Teorema 5.4.7 $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$, atunci obținem corolarul:

Corolar 5.4.7.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g, h, k satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} < 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad Re\left(\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{3}{4\alpha}, \quad Re\frac{zh'(z)}{h(z)} < 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad Re\frac{zk'(z)}{k(z)} < 1 + \frac{1}{\alpha},$$
$$Re\left(\frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{3}{4\alpha}, \quad Re\left(\frac{zk''(z)}{k'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{3}{4\alpha},$$

atunci operatorul integral $\mathcal{T}$ dat prin (5.1.8) este stelat în discul unitate.

Teorema 5.4.8. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i, \delta_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă f_i, g_i, h_i, k_i satisfac inegalitățile*

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} - p\right| < \frac{p}{3\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)}, \quad \left|\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)} - p + 1\right| < \frac{1}{3\sum_{i=1}^{n}\beta_i}, \quad \left|\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} - p\right| < \frac{p}{3\sum_{i=1}^{n}\gamma_i},$$
$$\left|\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} - p\right| < \frac{p}{3\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}, \quad \left|\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} - p + 1\right| < \frac{1}{3\sum_{i=1}^{n}\delta_i}, \quad \left|\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)} - p + 1\right| < \frac{1}{3\sum_{i=1}^{n}\delta_i},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}_{p,n}$ este p-valent stelat în $\mathbb{U}$.

Punând $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 5.4.8, avem corolarul:

Corolar 5.4.8.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g, h, k satisfac inegalitățile*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{1}{3\alpha}, \quad \left|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right| < \frac{1}{3\alpha}, \quad \left|\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right| < \frac{1}{3\alpha},$$

$$\left|\frac{zk'(z)}{k(z)} - 1\right| < \frac{1}{3\alpha}, \quad \left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| < \frac{1}{3\alpha}, \quad \left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right| < \frac{1}{3\alpha},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}$ dat prin (5.1.8) este stelat în $\mathbb{U}$.

5.5 Condiții de apartenență la clasa funcțiilor p-valente aproape-convexe

În această secțiune prezentăm condiții suficiente de apartenență la clasa funcțiilor p-valente aproape-convexe, pentru operatorii integrali noi având funcțiile din clasa funcțiilor analitice p-valente.

Teorema 5.5.1. *Fie funcțiile $f_i, g_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă f_i, g_i satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} < p + \frac{a}{2(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)}, \quad Re\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} < p + \frac{a}{2(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}\gamma_i},$$

$$Re\left(\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)} + 1\right) < p + \frac{b}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}\beta_i},$$

pentru orice $a > 0$, $b \geq 0$, $a + 2b \leq 1$ și $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}_{p,n}$ este p-valent aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Luând $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 5.5.1, obținem corolarul:

Corolar 5.5.1.1. *Fie funcțiile $f, g \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} < 1 + \frac{a}{2(1+a)(1-b)\alpha}, \quad Re\frac{zg'(z)}{g(z)} < 1 + \frac{a}{2(1+a)(1-b)\alpha},$$

$$Re\left(\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1\right) < 1 + \frac{b}{(1+a)(1-b)\alpha},$$

pentru orice $a > 0$, $b \geq 0$, $a + 2b \leq 1$ și $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}$ dat prin (5.1.2) este aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Teorema 5.5.2. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă f_i, g_i, h_i satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} < p + \frac{a}{3(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)}, \quad Re\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} < p + \frac{a}{3(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)},$$

$$Re\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} < p + \frac{a}{3(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}, \quad Re\left(\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} + 1\right) < p + \frac{b}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}\beta_i},$$

$$|g_i(z)| \le 1,$$

pentru orice $a > 0$, $b \ge 0$, $a + 2b \le 1$ și $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{C}_{p,n}$ este p-valent aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Luând $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 5.5.2, avem corolarul:

Corolar 5.5.2.1. *Fie funcțiile $f, g, h \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g, h satisfac ingalitățile*

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} < 1 + \frac{a}{3(1+a)(1-b)\alpha}, \quad Re\frac{zg'(z)}{g(z)} < 1 + \frac{a}{3(1+a)(1-b)\alpha},$$

$$Re\frac{zh'(z)}{h(z)} < 1 + \frac{a}{3(1+a)(1-b)\alpha}, \quad Re\left(\frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1\right) < 1 + \frac{b}{(1+a)(1-b)\alpha}, \quad |g(z)| \le 1,$$

pentru orice $a > 0$, $b \ge 0$, $a + 2b \le 1$ și $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{C}$ dat prin (5.1.4) este aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Teorema 5.5.3. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă f_i, g_i, h_i, k_i satisfac inegalitățile*

$$Re\left(\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)} + 1\right) < p + \frac{b}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)}, \; Re\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} < p + \frac{a}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)},$$

$$Re\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} < p + \frac{a}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}\beta_i}, \; Re\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} < p + \frac{a}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}\beta_i}, \; |g_i(z)| \le 1,$$

$$Re\left(\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} + 1\right) < p + \frac{b}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}, \quad Re\left(\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)} + 1\right) < p + \frac{b}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}\gamma_i},$$

oricare ar fi $a > 0$, $b \ge 0$, $a + 2b \le 1$ și $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{G}_{p,n}$ este p-valent aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Luând $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 5.5.3, urmează corolarul:

Corolar 5.5.3.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g, h, k satisfac inegalitățile*

$$Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right) < 1 + \frac{b}{(1+a)(1-b)\alpha}, \quad Re\frac{zg'(z)}{g(z)} < 1 + \frac{a}{(1+a)(1-b)\alpha},$$

$$Re\frac{zh'(z)}{h(z)} < 1 + \frac{a}{(1+a)(1-b)\alpha}, \quad Re\frac{zk'(z)}{k(z)} < 1 + \frac{a}{(1+a)(1-b)\alpha},$$

$$Re\left(\frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1\right) < 1 + \frac{b}{(1+a)(1-b)\alpha}, \quad Re\left(\frac{zk''(z)}{k'(z)} + 1\right) < 1 + \frac{b}{(1+a)(1-b)\alpha}, \quad |g(z)| \le 1,$$

pentru orice $a > 0$, $b \ge 0$, $a + 2b \le 1$ și $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{G}$ dat prin (5.1.6) este aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Teorema 5.5.4. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i, \delta_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1,n}$. Dacă f_i, g_i, h_i, k_i satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}+1 < p+\frac{a}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-1)}, \quad Re\left(\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}+1\right) < p+\frac{b}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}\beta_i},$$

$$Re\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} < p+\frac{a}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}, \quad Re\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} < p+\frac{a}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}\gamma_i},$$

$$Re\left(\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)}+1\right) < p+\frac{b}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}\delta_i}, \quad Re\left(\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)}+1\right) < p+\frac{b}{(1+a)(1-b)\sum_{i=1}^{n}\delta_i},$$

oricare ar fi $a > 0$, $b \geq 0$, $a + 2b \leq 1$ și $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}_{p,n}$ este p-valent aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Fixând $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 5.5.4, urmează corolarul:

Corolar 5.5.4.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g, h, k satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} < 1+\frac{a}{(1+a)(1-b)\alpha}, \quad Re\left(\frac{zg''(z)}{g'(z)}+1\right) < 1+\frac{b}{(1+a)(1-b)\alpha},$$

$$Re\frac{zh'(z)}{h(z)} < 1+\frac{a}{(1+a)(1-b)\alpha}, \quad Re\frac{zk'(z)}{k(z)} < 1+\frac{a}{(1+a)(1-b)\alpha},$$

$$Re\left(\frac{zh''(z)}{h'(z)}+1\right) < 1+\frac{b}{(1+a)(1-b)\alpha}, \quad Re\left(\frac{zk''(z)}{k'(z)}+1\right) < 1+\frac{b}{(1+a)(1-b)\alpha},$$

pentru orice $a > 0$, $b \geq 0$, $a + 2b \leq 1$ și $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}$ dat prin (5.1.8) este aproape-convex în $\mathbb{U}$.

5.6 Condiții de apartenență la clasa funcțiilor uniform p-valente aproape-convexe

Acest paragraf conține condiții suficiente de apartenență la clasa funcțiilor uniform p-valente aproape-convexe, pentru operatorii integrali noi având funcțiile din clasa funcțiilor analitice p-valente.

Teorema 5.6.1. *Fie funcțiile $f_i, g_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1,n}$. Dacă f_i, g_i satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} < p+\frac{1}{2\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-1)}, \quad Re\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} < p+\frac{1}{2\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}, \quad Re\left(\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)}+1\right) < p-\frac{2}{3\sum_{i=1}^{n}\beta_i},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}_{p,n}$ este uniform p-valent aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Punând $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 5.6.1, avem corolarul:

Corolar 5.6.1.1. *Fie funcțiile $f, g \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} < 1 + \frac{1}{2\alpha}, \quad Re\frac{zg'(z)}{g(z)} < 1 + \frac{1}{2\alpha}, \quad Re\left(\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{2}{3\alpha},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{M}$ definit în (5.1.2) este uniform aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Teorema 5.6.2. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă f_i, g_i, h_i satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} < p + \frac{1}{3\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)}, \quad Re\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} < p + \frac{1}{3\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)},$$

$$Re\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} < p + \frac{1}{3\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}, \quad Re\left(\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{2}{3\sum_{i=1}^{n}\beta_i}, \quad |g_i(z)| \leq 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{C}_{p,n}$ este uniform p-valent aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Fixând $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Theorem 5.6.2, obținem corolarul:

Corolar 5.6.2.1. *Fie funcțiile $f, g, h \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g, h satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} < 1 + \frac{1}{3\alpha}, \quad Re\frac{zg'(z)}{g(z)} < 1 + \frac{1}{3\alpha},$$

$$Re\frac{zh'(z)}{h(z)} < 1 + \frac{1}{3\alpha}, \quad Re\left(\frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{2}{3\alpha}, \quad |g(z)| \leq 1,$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{C}$ dat prin (5.1.4) este uniform aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Teorema 5.6.3. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă f_i, g_i, h_i, k_i satisfac inegalitățile*

$$Re\left(\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{2}{3\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)}, \quad Re\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} < p + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)},$$

$$Re\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} < p + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}, \quad Re\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} < p + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}, \quad |g_i(z)| \leq 1,$$

$$Re\left(\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{2}{3\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}, \quad Re\left(\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{2}{3\sum_{i=1}^{n}\gamma_i},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{G}_{p,n}$ este uniform p-valent aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Punând $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \alpha$ în Teorema 5.6.3, obținem corolarul:

Corolar 5.6.3.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g, h, k satisfac inegalitățile*

$$Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{2}{3\alpha}, \quad Re\frac{zg'(z)}{g(z)} < 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad Re\frac{zh'(z)}{h(z)} < 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad Re\frac{zk'(z)}{k(z)} < 1 + \frac{1}{\alpha},$$

$$Re\left(\frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{2}{3\alpha}, \quad Re\left(\frac{zk''(z)}{k'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{2}{3\alpha}, \quad |g(z)| \leq 1,$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{G}$ definit în (5.1.6) este uniform aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Teorema 5.6.4. *Fie funcțiile $f_i, g_i, h_i, k_i \in \mathcal{A}_p$ și $\alpha_i - 1, \beta_i, \gamma_i, \delta_i > 0$ numere reale pozitive, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Dacă f_i, g_i, h_i, k_i satisfac inegalitățile*

$$Re\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)} < p + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)}, \quad Re\left(\frac{zg_i''(z)}{g_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{2}{3\sum_{i=1}^{n}\beta_i}, \quad Re\frac{zh_i'(z)}{h_i(z)} < p + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i},$$

$$Re\frac{zk_i'(z)}{k_i(z)} < p + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}, \quad Re\left(\frac{zh_i''(z)}{h_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{2}{3\sum_{i=1}^{n}\delta_i}, \quad Re\left(\frac{zk_i''(z)}{k_i'(z)} + 1\right) < p - \frac{2}{3\sum_{i=1}^{n}\delta_i},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}_{p,n}$ este uniform p-valent aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Luând $n = p = 1$ și $\alpha_i - 1 = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = \alpha$ în Teorema 5.6.4, obținem corolarul:

Corolar 5.6.4.1. *Fie funcțiile $f, g, h, k \in \mathcal{A}$ și $\alpha > 0$ un număr real pozitiv. Dacă f, g, h, k satisfac*

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} < 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad Re\left(\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{1}{3\alpha}, \quad Re\frac{zh'(z)}{h(z)} < 1 + \frac{1}{\alpha},$$

$$Re\frac{zk'(z)}{k(z)} < 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad Re\left(\frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{2}{3\alpha}, \quad Re\left(\frac{zk''(z)}{k'(z)} + 1\right) < 1 - \frac{2}{3\alpha},$$

pentru orice $z \in \mathbb{U}$, atunci operatorul integral $\mathcal{T}$ dat prin (5.1.8) este uniform aproape-convex în $\mathbb{U}$.

Bibliografie

[1] *L. V. Ahlfors, Sufficient conditions for quasiconformal extension. Ann. of Math. Stud.,79 (1974), 23-29.*

[2] *R.M.. Ali, V. Ravichandran, Integral operators on Ma-Minda type starlike and convex functions. Mathematical and Computer Modelling, 53(2011), 581-586.*

[3] *H.A.. Al-Kharsani, S. S. Al-Hajiry, A note of certain inequalities for p-valent functions . J. Inequal. Pure Appl. Math., 9(3)(2008), Art. 90.*

[4] *C.L. Aldea, V. Pescar, Univalence Criteria for a general integral operator. Transilvania University of Brasov, 10(2017), no. 1, 19-30.*

[5] *C. Bărbatu, D. Breaz, The univalence conditions for a general integral operator. Acta Universitatis Apulensis Math, 51(2019), 75-87.*

[6] *C. Bărbatu, D. Breaz, Univalence Criteria for a General Integral Operator. General Math., Sibiu, 27(2019), no.2, 43-57.*

[7] *C. Bărbatu, D. Breaz, Univalence Criteria for a General Integral Operator. Advancements in Complex Analysis - From Theory to Practice, submitted .*

[8] *C. Bărbatu, D. Breaz, Classes of an univalent integral operator. Studia Univ."Babes-Bolyai", Cluj-Napoca, Mathematica, submitted.*

[9] *C. Bărbatu, D. Breaz, New Univalence Criteria for an Integral Operator with Mocanu's and Şerb's Lemma. Carpathian J., 36(2020), no.3, 375-381.*

[10] *C. Bărbatu, D. Breaz, New Univalence Criteria for an Integral Operator with Mocanu's and Şerb's Lemma. Acta Universitatis Apulensis, Alba Iulia, 59(2019), 101-109.*

[11] *C. Bărbatu, D. Breaz, Univalence Criteria for a General Integral Operator. Filomat, to appear*

[12] *C. Bărbatu, D. Breaz, Some criteria for univalence. Miskolc Mathematical Notes, preprint*

[13] *C. Bărbatu, D. Breaz, Univalence Criteria for some General Integral Operators. An. St. Univ. Ovidius Constanta, to appear*

[14] *C. Bărbatu, D. Breaz, Some Univalence Criteria. Applied Mathematics Letters, submitted*

[15] *C. Bărbatu, D. Breaz, The univalence conditions of a general integral operator. Analele Universitatii Oradea, to appear*

[16] C. Bărbatu, D. Breaz, An extension of the univalence criteria for a general integral operator. Applied Math. and Comp., submitted

[17] C. Bărbatu, D. Breaz, An extension of the univalent conditions for a family of general integral operator. Annals of Functional Analysis, submitted

[18] C. Bărbatu, D. Breaz, New univalence criteria for a family of general integral operator. Sahand Communications in Math. Analysis, submitted

[19] C. Bărbatu, D. Breaz, Sufficient conditions for the univalence of a General Integral Operator. Applied Math. and Comp., submitted

[20] C. Bărbatu, D. Breaz, Univalence conditions for a general integral operator. Journal of Mathematical Analysis and App., submitted

[21] C. Bărbatu, D. Breaz, Some univalence conditions related to a general integral operator. General Math., Sibiu, to appear

[22] C. Bărbatu, D. Breaz, Some univalence conditions of a certain general integral operator. Journal of Pure and Applied Math., submitted

[23] C. Bărbatu, D. Breaz, Certain properties of a General Integral Operator. Advences in Intelligent Systems and Computing, submitted

[24] C. Bărbatu, D. Breaz, New properties of a general integral operator. Acta Mathematica Scientia, submitted

[25] C. Bărbatu, D. Breaz, New criteria for univalence of a general integral operator. Acta Universitatis Apulensis Math, submitted

[26] C. Bărbatu, D. Breaz, Some new univalence conditions for a general integral operator. Filomat., to appear

[27] C. Bărbatu, D. Breaz, Some convexity criteria for a general integral operator. Bulletin of the Korean Mathematical Society, submitted

[28] C. Bărbatu, D. Breaz, An extension of the convexity properties for a family of integral operator. Ars Math. Contemporanea, submitted

[29] C. Bărbatu, D. Breaz, Order convexity for a family of integral operator. Communications in App. Math. and Computational Sci., to appear

[30] C. Bărbatu, D. Breaz, Convexity of a general integral operator involving analytic functions. Malaysian J. Math Sci., submitted

[31] C. Bărbatu, D. Breaz, Some convexity properties for a family of integral operator. Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics, to appear

[32] C. Bărbatu, D. Breaz, Order of convexity for a general integral operator. Journal of Computational and Applied Math., submitted

[33] C. Bărbatu, D. Breaz, Convexity properties for a general integral operator. Annals of Mathematics, submitted

[34] *C. Bărbatu, D. Breaz, New convexity properties for a family of integral operator. Math. Models and Methods in Applied Sci., submitted*

[35] *C. Bărbatu, D. Breaz, The order of convexity for a family of integral operator. ESAIM - Math. Modeling and Numerical Analysis, submitted*

[36] *C. Bărbatu, D. Breaz, Convexity criteria for a general integral operator. Journal of the Australian Mathematical Society, submitted*

[37] *C. Bărbatu, D. Breaz, An extension of the convexity criteria for a family of integral operator. Turk J Math., submitted*

[38] *C. Bărbatu, D. Breaz, Convex-ordering of a general integral operator. Journal of the London Math. Soc., submitted*

[39] *C. Bărbatu, D. Breaz, Some conditions and properties for a p-valent integral operator, preprint*

[40] *C. Bărbatu, D. Breaz, Conditions and properties for an integral operator of p-valent functions, preprint*

[41] *C. Bărbatu, D. Breaz, Some properties of certain subclasses of p-valent functions by using a generalized integral operator, preprint*

[42] *J. Becker, Lëownersche Differentialgleichung und quasikonform fortsezbare schlichte Funktionen. J. Reine Angew. Math., 255(1972), pg. 23-43.*

[43] *J. Becker, Lëownersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriterien. Math. Ann., 202 (1973), 321-335.*

[44] *D. Blezu, On univalence criteria. General Mathematics, Cluj-Napoca, Mathematica, 14(2006), pg. 77-84.*

[45] *D. Blezu, R.N. Pascu, Univalence criteria for integral operators. Glasnik Math. 36, 56(2001), no. 3, pg. 241-245.*

[46] *D. Breaz, Certain integral operators on the classes $\mathcal{M}(\beta_i)$ and $\mathcal{N}(\beta_i)$. J. Inequal. Pure Appl. Math., Vol 2008, Art. ID 719354.*

[47] *D. Breaz, N. Breaz, Two Integral Operators. Studia Univ."Babes-Bolyai", Cluj-Napoca, Mathematica, 47(2002), no. 3, pg. 13-21.*

[48] *D. Breaz, N. Breaz, Univalence conditions for certain integral operators. Studia Univ."Babes-Bolyai", Cluj-Napoca, Mathematica, 2(2002), pg. 9-17.*

[49] *D. Breaz, N. Breaz, H. M. Srivastava, An extension of the univalent condition for a family of integral operators. Appl. Math. Lett., 22(2009), no. 3, 41-44.*

[50] *D. Breaz, H. Guney, On integral operator on the classes $\mathcal{S}^*_\alpha(b)$ and $\mathcal{C}_\alpha(b)$. J. Inequal. Pure Appl. Math., 2(1), 2008, 97-100.*

[51] *D. Breaz, S. Owa, N. Breaz, A new integral univalent operator. Acta Universitatis Apulensis, 16(2008), 11-16.*

[52] R Bucur, D Breaz, *Univalence conditions for a new general integral operator. Int. Elect. J. of Pure and Applied Math., 9(3), 2015, 215-223.*

[53] R Bucur, D Breaz, *Properties of a general integral operator. Advances in Mathematics: Scientific Journal, 5(1), 2016, 57–64.*

[54] R. Bucur, D. Breaz, *Univalence conditions for a new general integral operator. Int. Elect. J. of Pure and Applied Math.,9 (3) (2015), 215-223.*

[55] R. Bucur, L. Andrei, D. Breaz, *Univalence criterion, starlikeness and convexity for a new integral operator. Proceedings of the ICTAMI, Alba Iulia, (2015), 17-26.*

[56] R Bucur, L Andrei, D Breaz, *Geometric Properties of a New Integral Operators. Abstract and Applied Analysis, Article Id 430197, 2015, 6 pg.*

[57] R Bucur, L Andrei, D Breaz, *Some Results of a New Integral Operator. Journal of Computational Analysis and Applications, 21(6) 2016, 1017-1023.*

[58] R Bucur, L Andrei, D Breaz, *Properties of a New Integral Operator. Analele Universitatii Ovidius, Constanta, 24(2) 2016, 127-136.*

[59] S. Bulut, *Univalence preserving integral operators defined by generalized Al-Oboudi differential operators. Analele Ştiinţfice ale Universitaţii "Ovidius" Constanţa , (1) 17 (2009), 37-50.*

[60] E. Deniz, H. Orhan, *An extension of the univalence criterion for a family of integral operators. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A 64, 2(2010), pg. 29-35.*

[61] E. Deniz, H. Orhan and H.M. Srivastava, *Some sufficient conditions for univalence of certain families of integral operators involving generalized Bessel functions. Taiwanese J. of Math., vol.15, no.2(2011), 883-917.*

[62] J. Dziok, *Applications of the Jack lemma. Acta Math. Hungar, 105(1-2), 2004, 94-102.*

[63] B. A. Frasin, *A note on certain analytic and univalent functions. Southeast Asian J. Math. , 28(2004), 829-836.*

[64] B. A. Frasin, *Family of analytic functions of complex order. Acta Math. Acad.Paedagog. Nyhazi. (N.S.), 22(2006), 179-191.*

[65] B. A. Frasin, *Univalence criteria for general integral integral operator. Mathematical Communications, 16(2011), 115-124.*

[66] B. A. Frasin, *Order of convexity and univalence of general integral operator. J. Franklin Inst., 348(2011), 1013-1019.*

[67] B. A. Frasin, *Sufficient conditions for the univalence of an integral operator. Asia Pacific Journal of Mathematics, vol.5, no.1(2018) 85-91.*

[68] B.A. Frasin, T. Al-Hawary, F. Yousef, *On the univalence of general integral operator. Acta Universitatis Apulensis, Alba Iulia, 53(2018), pg. 9-17.*

[69] B. A. Frasin, M. Darus, *On certain analytic univalent functions. Internat. J. Math. and Math. Sci., 25 (5) (2001), pg. 305-310.*

[70] *B. A. Frasin, J. Jahangiri A new and comprehensive class of analytic functions. Analele Univ. Oradea, Fasc. Math. , XV(2008), 59-62.*

[71] *A. W. Goodman, On uniformly starlike functions. J. Math. Anal. Appl., 55(1991), 364-370.*

[72] *I. J. Kim, E. P. Merkes, On an integral of powers of a spirallike function. Kyungpook Math. J., 12(1972), no. 2, 249-253.*

[73] *O. Mayer, The Functions Theory of the One Variable Complex . Acad. Ed., Bucuresti, Romania, 1981, 101-117.*

[74] *T. P. Mocanu, Une propriéte de convexité generalisée dans la théorie de la représentations conforme. Mathematica (Cluj), 11(34), (1969), 127-133.*

[75] *P. T. Mocanu, T. Bulboaca, G. S. Salagean, Teoria geometrica a functiilor univalente. Casa Cartii de Stiinta, Cluj Napoca (1999), 77-81.*

[76] *P. T. Mocanu, I. Şerb, A sharp simple criterion for a subclass of starlike functions. Complex variables, 32(1997), 161-168.*

[77] *Z. Nehari, Conformal Mapping. Mc Graw-Hill Book Comp., New York, 1975 (Dover Publ. Inc., 1975).*

[78] *V T Nguyen, A Oprea, D Breaz, Convexity properties for a new integral operator. Acta Universitatis Apulensis, 51, 2017, 75-87.*

[79] *V. T. Nguyen, A. Oprea, D. Breaz, Convexity properties for a new integral operator. Acta Universitatis Apulensis, Alba Iulia, 57(2018), 133-145.*

[80] *M. Nunokawa, On the multivalent functions. Indian J. Pure Appl. Math., 20(1989), 577-582.*

[81] *M. Nunokawa, N. Uyanik, S. Owa, H. Saitoh, H. M. Srivastava, New condition for univalence of certain analytic functions. J. Indian Math. Soc., (New Ser.), 79(2012), 121-125.*

[82] *A. Oprea, D. Breaz, Univalence conditions for two general integral operators. Advences in Pure Math., 4(2014), 487-493.*

[83] *A. Oprea, D. Breaz, Univalence conditions for a general operator. Analele Ştiinţfice ale Universitaţii "Ovidius" Constanţa , (1) 23 (2015), 213-224.*

[84] *A. Oprea, D. Breaz, Some properties for a general integral operator. Carpathian J. Math., 32(2016), No.1, 113-121.*

[85] *A. Oprea, D. Breaz, H. M. Srivastava Univalence conditions for a new family of integral operators. Filomat, (30)5(2016), 1243-1251.*

[86] *H. Oversea, Integral operators of Bazilvic type. Bull. Math. Bucuresti, 37(1993), 115-125.*

[87] *S. Owa, H. M. Srivastava, Some generalized convolution properties associated with certain subclasses of analytic functions. J. Inequal Pure Appl. Math., 3(3), (2002), 1-13.*

[88] *S. Ozaki, M. Nunokawa, The Schwarzian derivative and univalent functions. Proceedings of the American Mathematical Society, Mathematics, 33(1972), 392-394.*

[89] N. N. Pascu, An a univalence criterion II. Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj Napoca 1985, 153-154.

[90] N. N. Pascu, An improvement of Becker's univalence criterion. Proc. of the Commemorative Session Simion Stoilow, Braşov, Preprint, (1987), 43-48.

[91] N. N. Pascu, V. Pescar, On the integral operators Kim-Merkes and Pfaltzgraff. Mathematica, UBB, Cluj-Napoca, 32(55),2 (1990), 185-192.

[92] V. Pescar, Univalence criteria of certain integral operators. Acta Ciencia Indica, Mathematics, 29(2003), no. 1, 135-138.

[93] V. Pescar, A new generalization of Ahlfors's and Becker's criterion of univalence. Bull. Malaysian Math. Soc., (2) 19 (1996), no. 2, 53-54.

[94] V. Pescar, On the univalence of some integral operators. General Mathematics, Cluj-Napoca, Mathematica, 14(2006),no. 2, 77-84.

[95] V. Pescar, Univalence conditions for certain integral operators. Journal of Inequalities in Pure and Applied Math., (7) 147 (2006), 169-177.

[96] V. Pescar, New generalization of Ahlfors's, Becker's and Pascu's univalence criterion. Act Univ. Apulensis, no. 34 (2013), 173-178.

[97] V. Pescar, New univalence criteria for some integral operators. Studia Univ."Babes-Bolyai", Cluj-Napoca, Mathematica, 59(2014), no. 2, 185-192.

[98] V. Pescar, C. L. Aldea, The order of convexity for an integral operator. Carpathian J. Math., 32(2016), 123-129.

[99] V. Pescar, D. Breaz, On an integral operator. Analele Ştiinţfice ale Universitaţii "Ovidius" Constanţa , (3) 22 (2014), 169-177.

[100] V. Pescar, N. Breaz, Mocanu and Şerb type univalence criteria for some general integral operators. Acta Universitatis Apulensis, 44(2015), 1-8.

[101] V. Pescar, D. Breaz, N. Breaz, Certain sufficient conditions for univalence. General Mathematics , vol. 17, 4(2009), 07-109.

[102] V. Pescar, S. Owa, Univalence of certain integral operators. Int. J. Math. Math. Sci., 23(2000), 697-701.

[103] V. Pescar, L Stanciu Some univalence criteria for a family of integral operators. Creative Math. Inform., 24 (2015), no 2, 213-219.

[104] J. Pfaltzgraff, Univalence of the integral of $(f'(z))^{\lambda}$. Bull. London Math. Soc., 7(1975), no. 3, 254-256.

[105] S. Ponnusamy, V. Singh, Criteria for univalent, starlike and convex functions. Bull. Belg. Math. Soc , 9(2002), 511-531.

[106] R. K. Raina, I. B. Bapna, Inequalities defining certain subclasses of analytic functions involving fractional calculus operators. J. Inequal. Pure Appl. Math., 5(2), 2004, Art. 28.

[107] V. Ravichandran, Criteria for univalence of certain integral operators. Act Univ. Apulensis, 17 (2009), 141-149.

[108] F. Ronning, Integral representations of bounded starlike functions. Ann. Polon. Math., LX, 3(1995), 289-297.

[109] H. Silverman, Convex and starlike criteria. Int. J. Math., Sci 22 (1999), 75-79.

[110] V. Singh, On a class of univalent functions. Int. J. Math., Sci 23 (2000), 855-857.

[111] L. Stanciu, The Univalence conditions of some integral operators . Abstract and Applied Analysis, ID 924645, 2012, 9 pages.

[112] L. F. Stanciu, The univalence conditions of some integral operators. Hindawi Publishing Corporation, (2012).

[113] L. F. Stanciu, D. Breaz, H. M. Srivastava, Some criteria for univalence of a certain integral operator. Novi Sad J. Math. 43(2013),no.2, 51-57.

[114] J. Stankiewicz, A. Wisniowska Starlike functions associated with some hiperbola. Folia Scientiarum Universitatis Tehnicae Resoviesis 147, Mathematica, 19(1996), 117-126.

[115] N. Ularu, Convexity properties for an integral operator . Acta Universitatis Apulensis Math., 27(2011), 115-120.

[116] N. Ularu, D. Breaz, B. A. Frasin, Two integral operators on the class $\mathcal{N}(\beta)$. Computer and Mathematics with Applications, 62,(2011), 2551-2554.

[117] N. Ularu, D. Breaz, Univalence criterion and convexity for an integral operators . Applied Mathematics Letters, 25(2012), 658-661.

[118] N. Ularu, L. Stanciu, Proprieties for an integral operator of p-valent functions. Vestnic SPbGU, Rassian, 1(59),2014, 392-398.

[119] A. Uralegaddi, M.D. Ganigi, S.M. Sarangi Univalent functions with positive coefficients. Tamkang J. Math. , Vol. 25, no 3, (1994), 225-230.

[120] D. Yang, J. Liu, On a class of univalent functions. Int. J. Math., Sci 22 (3) (1999), 605-610.