

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI, CLUJ-NAPOCA, ROMÂNIA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Studiul funcțiilor circulare și aplicații

Rezumatul tezei de doctorat

Îndrumător:

Prof. dr. Dorin Andrica

Student doctorand:

Adela Lupescu

2020

Cuprins

Introducere	4
1 Elemente de teoria punctului critic	5
1.1 Mulțimea critică și mulțimea de bifurcație	5
1.2 Puncte critice nedegenerate. Funcții Morse	7
1.2.1 Descompunerea în mănere prin utilizarea funcțiilor Morse	8
1.2.2 Inegalitățile lui Morse	9
1.2.3 Grupuri Lie de matrice	11
1.3 Varietăți Grassmann	12
1.3.1 Descriere generală	12
1.3.2 Scufundare Plücker pentru $G(k, V)$ și structura de varietate a grassmanianului	12
1.4 Spațiul lenticular	13
2 Puncte critice pentru funcții circulare	14
2.1 Motivarea noțiunii de φ -categorie	14
2.2 φ -categoria și φ -categoria circulară a unei varietăți	15
2.3 Teorie Morse. Teorie Morse circulară	16
2.4 Calculul φ -categoriei circulare pentru varietăți particulare	18
2.4.1 Rezultate privind φ -categorii de produse și sume directe	18
2.4.2 Proprietatea de submultiplicativitate pentru φ_{S^1} [65]	19
2.5 Caracteristica Morse-Smale circulară	20
2.6 Calculul categoriei Morse-Smale circulare	22
2.6.1 Proprietatea de submultiplicativitate pentru γ_{S^1} [65]	22
2.6.2 Categorii particulare de varietăți Grassmann	23
2.6.3 Categorii particulare de grupuri Lie	24
3 Graful Reeb al unei aplicații	25

3.1	Noțiuni de bază și exemple	25
3.1.1	Exemple	26
3.2	Categoria grafelor Reeb	26
3.3	Proprietăți și reprezentări pentru graful Reeb al unei aplicații	27
3.3.1	Tipuri de componente conexe	28
3.3.2	Tipuri de familii de drumuri	28
3.3.3	Graful Reeb din perspectiva teoriei grafurilor	29
3.3.4	Aplicații. Interpretări [58], [71]	30
3.3.5	Teoreme de realizare ale grafului Reeb prin funcții Morse	31
3.4	Distanțe între grafurile Reeb	32
3.4.1	Distanța interfoliată	33
3.4.2	Distanța distorsie funcțională	34
3.4.3	Distanța 'bottleneck'	35
3.4.4	Distanța de editare	38
3.5	Graful Reeb în topologia computațională	39
3.5.1	Documentație. Descrierea algoritmului	40
3.6	Studiu al algoritmilor existenți pentru graful Reeb al unei funcții reale . . .	41
3.7	Graful Reeb al unei funcții circulare	42
3.7.1	Documentație. Descriere algoritm	45
3.8	Graful Reeb echipat asociat unei funcții Morse simple pe suprafețe orientate cu frontieră	45

Introducere

Teoria Morse își are începutul în cercetările lui M. Morse prin care o funcție diferențiabilă pe o varietate, recuperează topologia acelei varietăți, rezultate aplicate inițial de Morse la studiul geodezicelor, iar mai apoi utilizate de R. Bott în demonstrarea teoremei de periodicitate pentru grupuri de omotopie.

De-a lungul anilor, cercetările au devenit tot mai complexe, datorită aplicațiilor practice apărute odată cu dezvoltarea proceselor informatice avansate și a modelării grafice asistată de calculator.

Teoria Morse a cunoscut o dezvoltare naturală bazată pe recunoașterea sa ca mijloc util de studiere a topologiei unei varietăți. Astfel au fost dezvoltate concepte și au fost obținute rezultate pentru funcții de clasă C^∞ cu valori circulare, domeniu numit teoria Morse circulare.

Graful Reeb, este un obiect matematic cu o enormă aplicabilitate practică. A fost utilizat de matematicianul francez G. Reeb în scopul studiului funcțiilor cu valori reale definite pe un spațiu topologic. Acest domeniu aflat în plină expansiune oferă cercetărilor un mijloc util de vizualizare a suprafețelor sau simplificare topologică prin utilizarea forței de calcul existente. La fel ca teoria Morse, graful Reeb a cunoscut o dezvoltare și în direcția funcțiilor circulare, principali autori fiind E. Batista, J. Cost, I. Meza-Sarmiento, U. Bauer, Y. Wang și mulți alții.

Lucrarea este organizată în trei capitole, o anexă și o bibliografie ce conține 96 referințe.

Primul capitol, "Elemente de teoria punctului critic", are rolul unei introduceri succinte a noțiunilor de bază folosite pe parcursul tezei. Principalele puncte atinse sunt teoreme din topologia diferențială precum teorema de imersie, submersie și difeomorfism local, teorema rangului, lema lui Morse, inegalitățile lui Morse, descompunerea în mânere a unei suprafețe, tipuri de puncte critice, grupuri de omologie și coomologie, dar și grupurile Lie și varietăți Grassman utilizate în elaborarea următoarelor capitole. Principalele referințe folosite sunt D. Andrica [4], G. Cicortaș [33], Y. Matsumoto [69], J. Milnor [72], L. Tu [97].

În prima secțiune se introduc noțiuni fundamentale precum reprezentare locală, punct critic și punct regulat, mulțime critică, mulțime de bifurcație dar și rezultate importante

precum teorema rangului (1.1.2), teorema preimaginei (1.1.4), teorema imersiei locale (1.1.5), a submersiei locale (1.1.6) și a difeomorfismului local (1.1.7).

A doua secțiune oferă o prezentare amănunțită asupra elementelor de bază ale teoriei Morse: punct critic nedegenerat, funcție Morse, index și lema lui Morse (1.2.1). Tot aici au fost introduse trei subsecțiuni. Prima conține teoreme relevante pentru descompunerea în mănere pornind de la o funcție Morse, a doua se concentrează pe ilustrarea inegalităților lui Morse parcurgând și noțiuni precum: varietate diferențiabilă, retracție de deformare, complex de lanțuri și colanțuri, grup de omologie și numărul Betti. Au fost incluse teorema coeficienților universală (1.2.7) și dualitatea Poincaré (1.2.8). Ultima subsecțiune, are ca scop prezentarea definiției de grup Lie, morfism, translație și oferă o listă a grupurilor Lie de matrice utilizate în Capitolul 2 al acestei lucrări, precum și exemple de morfisme Lie importante.

A treia secțiune conține în prima parte, o descriere a noțiunii de grassmannian împreună cu cazurile particulare $G(1, n)$, $G(2, n)$. A doua subsecțiune abordează scufundarea Plücker pentru $G(k, V)$, vectori și valori proprii pentru o transformare liniară, produs tensorial, produs exterior și descompunere totală. Ultima subsecțiune se referă pe scurt la noțiunile necesare legate de spații lenticulare și cazuri particulare de spații lenticulare omeomorfe, folosite în capitolul doi al lucrării.

Al doilea capitol are în prim plan studiul punctelor critice ale unei funcții circulare și este structurat astfel: noțiuni elementare, proprietăți și calcule ale φ -categoriei pentru varietăți particulare. A doua parte a acestui capitol conține noțiuni elementare, proprietăți, teoreme și calcule pentru categoria Morse-Smale circulare. Ambele noțiuni sunt ilustrate atât pentru funcții Morse cu valori reale cât și pentru funcții Morse circulară. Capitolul este împărțit în șase secțiuni alternând elemente clasice cu note originale prezentate în articole de specialitate. Principalele referințe folosite sunt D. Andrica [4], G. Cicortaș [33], P. Church [30], [31], L. Funar [6], C. Pinteș [12], [13], [77], G. Rassias [84], [85], V. Sharko [89], F. Tankens [96] și referințele originale în colaborare cu prof. dr. D Andrica și conf. dr. C. Pinteș [8], [65].

Prima secțiune oferă o motivare a noțiunii de φ -categorie a unei perechi de varietăți (M, N) , proprietatea de invariant pentru $\varphi(M)$ studiată de F. Takens, caracteristica Morse-Smale a varietății M în contextul prezentat de S. Smale dar și aplicarea acestor noțiuni pentru funcții Morse circulare.

A doua secțiune conține proprietăți ale φ -categoriei unei varietăți pentru o funcție reală și circulară. De-asemena se prezintă inegalități referitoare la produse de varietăți și aplicații, iar în final, inegalități care fac conexiunea între aceste noțiuni pentru funcții circulare și funcții reale.

A treia secțiune începe prin a oferi o perspectivă de ansamblu asupra studiului evoluției teoriei Morse, continuând cu prezentarea noțiunilor de formă diferențială, 1-formă, forme închise și exacte, forme Morse împreună cu două exemple relevante pentru aceste noțiuni (Exemplul 2.3.1 și 2.3.2). Ultima parte a secțiunii acoperă concepte referitoare la grupul fundamental al unui spațiu topologic și legătura cu liftarea unei aplicații.

Următoarele trei secțiuni se bazează pe lucrările originale D. Andrica, A. Lupescu, C. Pinteș [8] și A. Lupescu, C. Pinteș [65].

Secțiunea 2.4 prezintă calcule ale φ -categoriei circulare pentru varietăți particulare: categorii de produse și sume directe, proprietatea de submultiplicativitate pentru φ_{S^1} și se încheie cu exemple concrete ale aplicării acestor inegalități pentru cazurile particulare date de grupul special liniar, grupul special ortogonal, grupul spinorial de ordinul n și varietatea Grassmann $G_{k,n}$.

Următoarea secțiune cuprinde elemente generale legate de categoria Morse-Smale reală, caracteristica Morse-Smale circulară a unei varietăți și teoreme care oferă o corespondență a inegalităților prezentate în secțiunea anterioară, aplicată pentru categoria Morse-Smale.

Secțiunea 2.6 se bazează pe calcule originale pentru proprietatea de submultiplicativitate a lui γ_{S^1} , rezultate și exemple originale, fiind urmate de calcule realizate pentru categorii particulare de varietăți Grassmann și pentru grupuri Lie.

Ultimul capitol este centrat pe noțiunea de graf Reeb, concept care a cunoscut o dezvoltare deosebită în ultimii ani, datorită aplicabilității sale într-o gamă largă de domenii precum grafică pe calculator sau geometrie computațională. Ca și referințe bibliografice de bază au fost folosite lucrările U. Bauer [18], [19], E.B. Batista, J.C.F. Costa, I.S. Meza-Sarmiento [17], B. Fabio, C. Landi [41], M. Kaluba, W. Marzantowicz, N. Silva [58], Y. Matsumoto, O. Saeki [70], L.P. Michalak [71] and V.V. Sharko [91].

Această parte a lucrării conține elemente de noutate, precum dezvoltarea unui algoritm de construcție a grafului Reeb pentru funcții reale și exemple de construcție conținute în articolul [63] și construcția unui algoritm pentru funcții circulare inclus în lucrarea noastră [64].

Capitolul este structurat în opt secțiuni și urmărește prezentarea generală a grafului Reeb atât pentru funcții reale cât și pentru funcții circulare, descrierea algoritmilor existenți pe care se bazează apoi elementele originale.

Prima secțiune oferă descrierea generală, proprietăți și exemple relevante pentru graful Reeb al unei funcții reale definită pe sferă, tor și suprafață orientabilă de gen 2. A doua secțiune începe prin a organiza grafurile Reeb într-o categorie unde obiectele sunt grafuri finite împreună cu funcții monotone pe muchii, iar morfismele sunt funcții care conservă aplicațiile între spații.

Idea centrală din Secțiunea 3.3 este conturarea grafului Reeb ca o unealtă ce facilitează reconstrucția unei suprafețe pornind de la graf, acesta conținând informațiile necesare pentru reprezentarea geometrică și recuperarea topologiei suprafeței. Secțiunea mai include ilustrarea grafului Reeb ca arbore și grupează informația în subsecțiuni astfel: tipuri de componente conexe, tipuri de familii de drumuri, graful Reeb din perspectiva teoriei grafurilor, aplicații și teoreme de realizare ale grafului Reeb prin funcții Morse.

Secțiunea 3.4 atestă nevoia de stabilizare a grafului Reeb prin introducerea unor metrici. În acest scop au fost definite următoarele distanțe: interfoliată, distorsie funcțională, "bottleneck" și distanța de editare. Teorema 3.4.2 prezintă stabilitatea distanței "bottleneck", iar Teorema 3.4.3 și Corolarul 3.4.1 arată legătura între primele trei distanțe menționate.

Secțiunile 3.5 și 3.6 se concentrează pe aplicațiile grafului Reeb în topologia computațională. Aici prezentăm un algoritm original de construcție a grafului împreună cu exemple pentru aplicare acestuia, dar și un rezumat al algoritmilor existenți până în acest moment, ilustrând totodată complexitatea lor și aspectele specifice ale fiecăruia. Ultimele două secțiuni se concentrează pe graful Reeb al unei funcții circulare, algoritmul de construcție al acestuia și graful Reeb echipat asociat unei funcții Morse simple pe suprafețe orientate cu frontieră.

Lucrarea mai include și o anexă, conținând prezentarea cadrelor de construcție ale grafului Reeb pentru sferă, tor și suprafață orientabilă de gen 2, o analiză a descompunerii în mâner a suprafeței împreună cu reprezentarea grafică a fiecărui tip de mâner și o schemă a noțiunilor esențiale din fiecare capitol.

Pe această cale doresc să punctez importanța seminarului de cercetare al Colectivului de Geometrie pentru realizarea acestei lucrări. În cadrul întâlnirilor săptămânale am avut posibilitatea să îmi prezint ideile și să adresez întrebările necesare realizării acestei lucrări. Doresc să mulțumesc în primul rând domnului prof. univ. dr. Dorin Andrica pentru sprijinul acordat, disponibilitatea și timpul acordat dar mai ales pentru instruirea și formarea mea ca student doctorand. De-asemena îi adresez mulțumiri domnului conf. dr. Paul Blaga pentru ajutorul, referințele bibliografice recomandate dar mai ales pentru timpul acordat. Adresez sincere mulțumiri și domnilor conf. dr. Cornel Pinteș și lect. dr. Daniel Văcărețu pentru observațiile și sugestiile oferite pe parcursul realizării articolelor care au condus la finalizarea acestei teze.

Cuvinte cheie: Funcție Morse, funcție Morse circulară, φ -categorie, caracteristica Morse-Smale reală, caracteristica Morse-Smale circulară, graf Reeb, funcție Morse-Bott.

1. Elemente de teoria punctului critic

1.1 Mulțimea critică și mulțimea de bifurcație

Teoria Morse, este un capitol important al teoriei punctului critic care oferă o tehnică de recuperare a topologiei varietății prin analizarea punctelor critice corespunzătoare unei funcții netede definite pe varietatea dată. O referință de bază pentru studiul teoriei Morse este cartea lui John Milnor, apărută în anul 1960 [72]. Pentru înțelegerea noțiunilor și descrierea conceptelor de bază am folosit în acest capitol, cartea [69] a lui Y. Matsumoto.

În prima secțiune a acestui capitol se prezintă noțiuni de bază ale topologiei diferențiale precum funcție netedă, reprezentare locală, rangul unei aplicații, punct regulat, punct critic, mulțime regulată, mulțime critică și mulțime de bifurcație, fibrat tangent, imersie, submersie și difeomorfism. De asemenea, sunt prezentate fără demonstrație teorema rangului, a preimaginii, a imersiei locale, a submersiei locale și a difeomorfismului local. Au fost folosite referințele [4], [26], [33], [69], [97].

Definiția 1.1.1 Fie M o varietate netedă m -dimensională fără bord. O funcție $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ este **netedă** dacă pentru orice hartă (U, φ) , funcția $f_\varphi = f \circ \varphi^{-1}$ este netedă pe $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$.

Funcția f_φ se numește **reprezentarea locală** a lui f în harta (U, φ) .

Definiția 1.1.2 Se numește **rangul** aplicației f în punctul p , numărul notat cu $\text{rang}_p(f)$, unde

$$\text{rang}_p(f) = \text{rang}_{\varphi(p)}(f_{\varphi,\psi}) = \text{rang} J(f_{\varphi,\psi})(\varphi(p)) = \dim \text{Im}(Tf)_p.$$

Propoziția 1.1.1 Fie aplicația netedă $f : M \rightarrow N$. Atunci funcția $\text{rang}(f) : M \rightarrow \mathbb{Z}$, $p \mapsto \text{rang}_p(f)$ este superior semicontinuu.

Spunem că aplicația netedă $f : M \rightarrow N$ are **rang constant** în $p_0 \in M$ dacă există o vecinătate deschisă U_{p_0} în jurul lui p_0 , astfel încât $\text{rang}_p(f) = \text{rang}_{p_0}(f)$, pentru orice p din U_{p_0} .

Teorema 1.1.2 (teorema rangului) [4] Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă cu rangul constant $k \leq \min(m, n)$ în $p_0 \in M$. Atunci există o reprezentare locală a lui f în jurul lui p_0 de forma:

$$(z^1, \dots, z^m) \mapsto (z^1, \dots, z^k, 0, \dots, 0)$$

Definiția 1.1.3 Un punct $p \in M$ se numește **punct regular** al lui f dacă $\text{rang}_p(f)$ este maxim posibil, adică are loc relația $\text{rang}_p(f) = \min(m, n)$.

Mulțimea punctelor regulate ale aplicației f se notează cu $R(f)$ și se numește **mulțimea regulară** a lui f . Dacă punctul $p \in M$ nu este regular, el se numește **critic**, iar mulțimea acestor puncte reprezintă **mulțime critică** a lui f , fiind notată prin $C(f)$.

Notăm cu $B(f) = f(C(f))$, **mulțimea de bifurcație** a aplicației f .

Mulțimea de bifurcație are următoarea proprietate, demonstrată de A. Sard în lucrarea [88]:

Teorema 1.1.3 Mulțimea $B(f)$, este de măsură Lebesgue nulă în varietatea N .

Teorema 1.1.4 (teorema preimaginii) [4] Fie $f : M \rightarrow N$ o funcție netedă cu $m \geq n$ și $q \notin B(f)$. Atunci fibra $f^{-1}(q)$ este o subvarietate $(m - n)$ -dimensională a lui M sau mulțimea vidă. În plus pentru orice $p \in f^{-1}(q)$ avem $T_p(f^{-1}(q)) = \text{Ker}(df)_p$.

Definiția 1.1.4 Aplicația $f : M^m \rightarrow N^n$ cu $m \leq n$ se numește **imersie** în $p \in M$ dacă $\text{rang}_p(f) = m$ este maxim posibil, adică avem $\text{rang}_p(f) = m$.

Teorema 1.1.5 (teorema imersiei locale) [4] Fie $f : M^m \rightarrow N^n$, cu $m \leq n$, o imersie netedă în $p_0 \in M$. Atunci f are rang constant în p_0 și există o reprezentare locală în jurul lui p_0 de forma

$$(z^1, \dots, z^m) \mapsto (z^1, \dots, z^m, 0, \dots, 0).$$

Definiția 1.1.5 Aplicația $f : M^m \rightarrow N^n$ cu $m \geq n$ este o **submersie** în $p \in M$ dacă $\text{rang}_p(f)$ este maxim posibil, adică avem $\text{rang}_p(f) = n$.

Teorema 1.1.6 (teorema submersiei locale) [4] Fie $f : M^m \rightarrow N^n$, cu $m \geq n$, o submersie în $p_0 \in M$. Atunci f are rang constant în p_0 și există o reprezentare locală în jurul lui p_0 de forma

$$(z^1, \dots, z^m) \mapsto (z^1, \dots, z^n).$$

Definiția 1.1.6 Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă. Se numește aplicația tangentă a lui f , aplicația $Tf : T(M) \rightarrow T(N)$, unde

$$Tf([x, (U, \varphi), v]) = \left[f(x), d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(v) \right]$$

pentru orice hărți (U, φ) , (V, ψ) în jurului lui x , respectiv $f(x)$.

Teorema 1.1.7 (teorema difeomorfismului local) [4] Fie $f : M \rightarrow N$ o funcție netedă cu proprietatea că pentru $x \in M$ aplicația tangentă $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ este un izomorfism. Atunci există vecinătățile deschise U și V în jurul lui x în M , respectiv $f(x)$ în N , astfel încât $f|_U : U \rightarrow V$ este un difeomorfism.

1.2 Puncte critice nedegenerate. Funcții Morse

Această secțiune se concentrează asupra funcțiilor Morse și introduce următoarele noțiuni: funcție Morse, minim și maxim local, index, deformare, complex celular, lanț, morfism de frontieră, grup de omologie, numere Betti, grup de coomologie și grup Lie. O parte centrală a acestei secțiuni este lema lui Morse și prezentarea succintă a descompunerii în mănere cu ajutorul funcțiilor Morse, inegalitățile lui Morse și grupuri Lie de matrice, utilizate mai apoi în următorul capitol al acestei lucrări. Tot aici au fost prezentate fără demonstrație teorema coeficienților universali, dualitatea Poincaré, dar și exemple pentru calculul punctelor critice și pentru calcularea coomologiei unor varietăți particulare. În cadrul acestei secțiuni au fost utilizate în special referințele: [4], [23], [33], [39], [52], [69], [72] și [95].

Un punct critic x se numește **nedegenerat** pentru funcția reală netedă $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ dacă există o hartă (U, φ) în jurul lui p astfel încât matricea hessiană a reprezentării locale f_φ

$$H(f_\varphi)(\varphi(x)) = \left(\frac{\partial^2 f_\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(x)) \right)_{1 \leq i, j \leq m} \text{ este inversabilă,}$$

deci avem $(\det H(f_\varphi)(\varphi(x))) \neq 0$. În caz contrar punctul critic x se numește **critic degenerat**. Matricea $H(f_\varphi)(\varphi(x))$ este simetrică, deci are valorile proprii reale și nenule.

Definiția 1.2.1 O funcție reală $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, se numește **funcție Morse** dacă are toate punctele critice nedegenerate. În plus funcția Morse se numește **simplă**, dacă fiecare valoare critică provine din exact un punct critic.

Teorema 1.2.1 (Lema lui Morse) [69] Fie $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ o aplicație netedă și $p \in C(f)$ un punct critic nedegenerat. Atunci există o reprezentare locală f_φ a lui f de forma:

$$f_\varphi = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 + f(p).$$

Definiția 1.2.2 Numărul $\lambda \in \{0, 1, \dots, m\}$ se numește **indexul** punctului critic p . Acesta reprezintă numărul de valori proprii negative ale matricei hessiene a lui f_φ .

Numărul λ nu depinde de reprezentarea locală f_φ considerată, deci reprezintă un invariant al punctului critic.

Punctele critice de index 0 sunt puncte de **minim local**, iar cele de index m sunt puncte de **maxim local**.

1.2.1 Descompunerea în mânere prin utilizarea funcțiilor Morse

Pentru prezentarea rezultatelor legate de descompunerea în mânere a unei varietăți diferentiabile au fost utilizate referințele bibliografice: [69] și [72].

Teorema 1.2.2 Fie M o varietate compactă. Dacă $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Morse, atunci f are un număr finit de puncte critice.

Teorema 1.2.3 Fie M o suprafață închisă și f o funcție Morse cu două puncte critice definite pe M . Atunci suprafața e difeomorfă cu sfera unitate S^2 . (Vezi Figura 1.1)

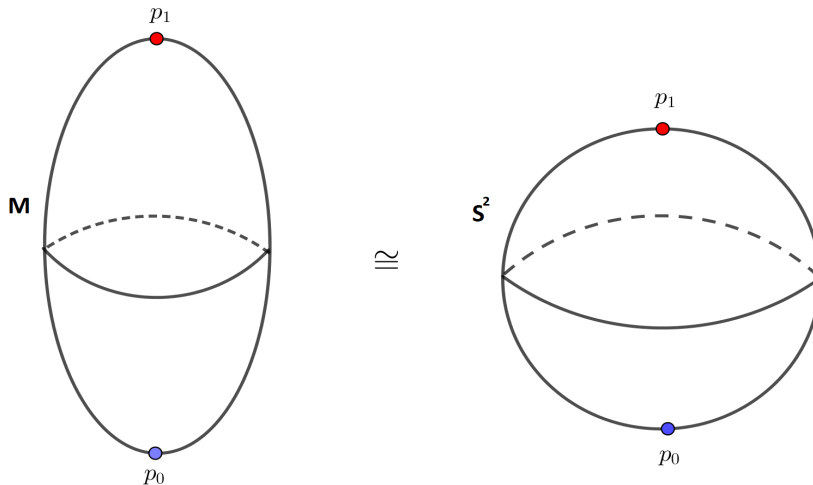


Figura 1.1

Teorema 1.2.4 *Dacă pe suprafața închisă M se poate defini o funcție Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ atunci M se poate descompune într-o reuniune finită de 0,1 și 2-mânere.*

Observație 1.2.1 *Considerăm funcția Morse $f : M \rightarrow [a, b]$ fără valori critice în intervalul $[a, b]$. Atunci subvarietățile M_a și M_b sunt difeomorfe.*

1.2.2 Inegalitățile lui Morse

În vederea prezentării inegalităților lui Morse, vom trece în revistă într-un cadru general unele elemente teoretice ajutătoare, urmărind referințele: [4], [23], [33], [39], [69].

Definiția 1.2.3 [52] *Se numește **complex de lanțuri** pentru X , șirul semiexact de formă:*

$$\cdots \rightarrow C_{i+1}(X) \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i(X) \xrightarrow{\partial_i} \cdots \rightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \rightarrow \{0\}$$

Pentru un număr întreg fixat i se consideră grupurile:

$$Z_i(X) = \{Ker \partial_i\} \text{ și } B_i(X) = \{Im \partial_{i+1}\}$$

Grupul de omologie cu coeficienți întregi de nivel i este, grupul factor definit prin

$$H_i(X) = Z_i(X)/B_i(X).$$

Teorema 1.2.5 [69] *Fiind date două spații topologice X, Y și $f, g : X \rightarrow Y$ aplicații continue astfel încât $f \simeq g$, atunci aceste aplicații induc același morfism la nivelul grupurilor de omologie:*

$$f_* = g_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$$

Dacă X este un complex finit de celule, grupul său de omologie are următoarea structură:

$$H_q(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus T$$

unde $\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ este **partea liberă**, iar T este **partea de torsiune**.

Numărul de copii ale lui \mathbb{Z} , reprezintă rangul grupului $H_q(X)$ și se numește **numărul Betti** de ordinul q al lui X , deci avem $b_q(X) = rang H_q(X), \forall q \in \mathbb{N}$

În acest context se introduce caracteristica Euler-Poincaré a lui X , ca fiind suma alternantă a numerelor Betti, adică:

$$\chi(X) = b_0 - b_1 + b_2 - \cdots$$

Propoziția 1.2.6 [33] *Fiind date următoarele elemente: M^m o varietatea netedă compactă, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție Morse și p, q două valori regulate asociate funcției f , se pot enunța următoarele inegalități:*

- 1) *Forma slabă pentru inegalitățile lui Morse: $b_k \leq \mu_k, k = 0, \dots, m$;*
- 2) *Inegalitățile lui Morse: $b_k - b_{k-1} + \dots \pm b_0 \leq \mu_k - \mu_{k-1} + \dots \pm \mu_0, k = 0, \dots, m$.*

Se consideră $C^i(X)$ mulțimea morfismelor de grupuri $f : C_i(X) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Împreună cu operația de adunare, $C^i(X)$ are o structură de grup, numit **grupul de colanțuri i-dimensionale**.

Aplicația $\delta^i : C^i(X) \rightarrow C^{i+1}(X)$ care asociază fiecărui colanț i-dimensional f , un colanț $(i + 1)$ -dimensional $f \circ \partial_{i+1}$, se numește **morfism de cofrontieră**.

Definiția 1.2.4 [69] *Se numește complex de colanțuri pentru X , șirul format din morfisme frontieră și grupuri de colanțuri având următoarea formă:*

$$\{0\} \rightarrow C^0(X) \xrightarrow{\delta^0} \dots \rightarrow C^1(X) \xrightarrow{\delta^1} \dots \rightarrow C^{i-1}(X) \xrightarrow{\delta^{i-1}} C_i(X) \xrightarrow{\delta^i} C_{i+1}(X) \xrightarrow{\delta^{i+1}} \dots$$

Pentru un număr întreg fixat i , se definesc următoarele grupuri:

$$Z^i(X) = \text{Ker} \delta^i = \{p \in C^i(X) : \delta^i(p) = 0\}$$

*numit **grupul cociclic i-dimensional**,*

$$B^i(X) = \text{Im} \delta^{i+1} = \{p \in C^i(X) : p = \delta^{i+1}(p'), p' \in C^{i+1}(X)\}$$

*numit **grupul cofrontieră i-dimensional***

*Astfel, se introduce **grupul de coomologie de nivel i** , ca fiind grupul factor definit prin:*

$$H^i(X) = Z^i(X)/B^i(X)$$

Se numește **clasă de coomologie**, notată prin $[f]$, un element al grupului $H^i(X)$. Această clasă induce morfismul:

$$[f] : H_i(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

Prin fixare mulțimii

$$\text{Hom}(H_i(X), \mathbb{Z}) = \{f : f : H_i(X) \rightarrow \mathbb{Z}, f \text{ morfism}\}$$

se poate introduce morfismul

$$k : H^i(X) \rightarrow \text{Hom}(H_i(X), \mathbb{Z})$$

Teorema 1.2.7 (Teorema coeficienților universali) [95] *Morfismul k introdus anterior este o aplicație surjectivă. În plus, nucleul său reprezintă partea de torsiune a lui $H^i(X)$.*

Teorema 1.2.8 (Dualitatea Poincaré) [95] *Fiind dată varietatea m -dimensională M , închisă și orientabilă avem următorul izomorfism:*

$$H^i(M) \cong H_{m-i}(M), i = 0, 1, \dots, m.$$

1.2.3 Grupuri Lie de matrice

Grupurile de matrici reprezintă o punte de legătură între algebră și geometrie, oferind exemple palpabile și reprezentări elegante pentru noțiuni geometrice, simplificând astfel înțelegerea lor. În contextul dezvoltării tehnicilor de procesare a imaginilor, simplificarea instrumentelor geometrice de exemplu matricea de rotație și graf Reeb acestea contribuind la o reducere importantă pentru timpul de compilare al algoritmilor.

Definiția 1.2.5 *O varietate netedă înzestrată cu o structură de grup, astfel încât operația de grup $* \cdot * : M \times M \rightarrow M$ și operația de inversare a unui element $*^{-1} : M \rightarrow M$ sunt netede, se numește **grup Lie**.*

Fie $(G_1, *)$, (G_2, \circ) două grupuri și aplicația $f : G_1 \rightarrow G_2$. Aplicația f se numește **morfism de grupuri** dacă:

$$\forall x, y \in G_1: f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Presupunem cunoscute noțiunile de endomorfism, izomorfism și automorfism.

Definiția 1.2.6 [21] *Fiind dat G un grup și $g \in G$ se numește **translația la stânga**, aplicația $l_g : G \rightarrow G$ dată de $l_g(h) = gh$.*

*Analog avem **translația la dreapta** cu $g \in G$, $r_g : G \rightarrow G$, $r_g(h) = hg$.*

Următoarele două secțiuni sunt o prezentare generală pentru conceptele de varietate Grassmann și spațiu lenticular utilizate în capitolul doi pentru calculul φ -categoriei și categoriei Morse-Smale circulare. Sunt date pe scurt definiția varietății Grassmann, produsului tensorial, produsului exterior, a scufundării Plücker și proprietățile pentru spațiul lenticular. În prezentare am urmărit lucrările [24], [51], [61], [68], [82] și [83].

1.3 Varietăți Grassmann

1.3.1 Descriere generală

Noțiunea de grassmannian a apărut pentru prima dată în secolul XIX, introdusă de matematicianul german Julius Plücker în studiul său asupra dreptelor proiective în spațiul \mathbb{P}^3 . Numite coordonate Plücker, acestea apar în mod natural în geometria algebrică și oferă o corespondență bijectivă între spațiul dreptelor din \mathbb{P}^3 și punctele de pe o cuadrică în spațiul proiectiv \mathbb{P}^5 . Denumirea de grassmannian provine de la numele matematicianul german Hermann Grassmann.

Definiția 1.3.1 *Fiind dat un spațiu vectorial V , se numește **grassmannian**, mulțimea tuturor subspațiilor liniare k -dimensionale ale lui V , adică avem:*

$$G(k, V) = \{W \subset V : W \leq V, \dim(W) = k\}.$$

1.3.2 Scufundare Plücker pentru $G(k, V)$ și structura de varietate a grassmanianului

Fie $f \in A_r(V), g \in A_s(V)$ două aplicații alternante. Se numește **produsul exterior** al lui f și g , aplicația alternantă notată $f \wedge g$, unde

$$f \wedge g = \frac{1}{k!p!} A(f \otimes g),$$

și A este operatorul de alternare.

$$(f \wedge g)(v_1, \dots, v_{k+p}) = \frac{1}{k!p!} \sum_{\sigma \in S_{k+p}} (\operatorname{sgn} \sigma) (f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+p)})).$$

Produsul exterior este asociativ, adică avem

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h),$$

pentru orice aplicații alternate f, g, h .

În plus operatorul este anticomutativ, adică

$$f \wedge g = (-1)^{rs} g \wedge f,$$

unde $f \in \Lambda^r V$ și $g \in \Lambda^s V$.

Spunem că un multivector $\omega \in \Lambda^k V$ are o **descompunere totală**, dacă se poate scrie: $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$. În plus $v \in V$ se numește **divizor a lui ω** , dacă există $\varphi \in \Lambda^{k-1} V$ astfel încât $\omega = v \wedge \varphi$.

Se consideră $W \in G(k, V)$ și o bază astfel încât lui W i se asociază multivectorul $\lambda = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$, unde $W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Se numește **scufundare Plücker**, aplicația

$$\psi : G(k, V) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k V), W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \mapsto [\lambda],$$

unde $[\lambda]$ este subspațiul generat de $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$.

Observație 1.3.1 *Aplicația ψ este o scufundare, deoarece pentru $[\omega] = \psi(W)$ avem: $W = \{v \in V : v \wedge \omega \in \Lambda^{k+1} V\}$. Astfel $Im(\psi(G(k, V)))$ reprezintă o proiectivizare pentru spațiul tuturor vectorilor care se descompun total în $\Lambda^k V$.*

Coordonatele $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$ se numesc coordonatele Plücker pentru grassmanianul din $G(k, V)$.

Pentru a pune în evidență structura de varietate diferențiabilă a grassmanianului atașăm fiecărui $[\omega] \in G(k, V)$ o aplicație: $\varphi_\omega : V \rightarrow \Lambda^{k+1} V$ astfel încât $\varphi_\omega(v) = v \wedge \omega$. Prin urmare avem $\omega \in G(k, V)$ dacă și numai dacă $rang(\varphi_\omega) \leq n - k$, iar grassmanianul se realizează ca o intersecție finită de hipersuprafețe proiective, deci are o structură de varietate netedă.

1.4 Spațiul lenticular

În prezentarea acestui paragraf folosim lucrarea [24].

Fie sfera $S^{2n-1} = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \|z\| = 1\}$, rădăcinile de ordinul p ale unității $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ și d_1, \dots, d_n numere întregi relativ prime cu p .

Se numește **spațiu lenticular**, notat prin $L(p, d_1, \dots, d_n)$ este spațiul factor al lui S^{2n-1} obținut prin Z_p -acțiunea liberă definită prin:

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i d_1}{p}} \cdot z_1, \dots, e^{\frac{2\pi i d_n}{p}} \cdot z_n \right).$$

Teorema 1.4.1 [68] *Spațiile lenticulare: $L(p_1; d_1), L(p_2; d_2)$ sunt omotopic echivalente dacă și numai dacă*

$$\pm d_1 d_2 \equiv k^2 \pmod{p}.$$

În plus dacă cele două spații sunt omeomorfe, atunci $p_1 = p_2$.

2. Puncte critice pentru funcții circulare

2.1 Motivarea noțiunii de φ -categorii

Definiția 2.1.1 Fie $\mathcal{F} \subseteq C^\infty(M^m, N^n)$ o familie de aplicații netede. Se numește $\varphi_{\mathcal{F}}$ -categorii perechii (M, N) :

$$\varphi_{\mathcal{F}}(M, N) = \min \{ \mu(f) : f \in \mathcal{F} \},$$

unde $\mu(f)$ este cardinalul lui $C(f)$, mulțimea critică a lui f .

Este evident că $\varphi_{\mathcal{F}}(M, N) = 0$ dacă și numai dacă \mathcal{F} conține imersii, submersii sau difeomorfisme. În plus $0 \leq \varphi_{\mathcal{F}}(M, N) \leq \infty$. În continuare vom prezenta unele proprietăți urmărind referințele bibliografice [4], [30], [31], [32], [84], [85], [89] și [94].

F.Takens a studiat invariantul $\varphi(M)$ care provine din cazul particular $N = \mathbb{R}$ și familia \mathcal{F} dată de algebra funcțiilor netede reale definite pe M , $\mathcal{F}(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$. Calculul acestui invariant a fost studiat în lucrarea [4].

Fie $N = \mathbb{R}$ și $\mathcal{F} = \mathcal{F}_m(M) \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$, mulțimea funcțiilor Morse definite pe M . În acest caz obținem $\varphi_{\mathcal{F}}(M, \mathbb{R}) = \gamma(M)$ care se numește **caracteristica Morse-Smale** a varietății M , un invariant important al lui M . În lucrarea [93] S.Smale a calculat caracteristica Morse-Smale pentru cazul particular al unei varietăți simplu-conexe cu dimensiunea mai mare decât 5. Un calcul general pentru acest invariant nu a fost realizat până în prezent.

Probleme de hidrodinamică întâlnite în cercetările făcute de Novikov au dus la cazul $N = S^1$ și familia funcțiilor Morse circulare definite pe M , $\mathcal{F}_m(M, S^1) \subset C^\infty(M, S^1)$. În acest caz $\varphi_{\mathcal{F}}(M, S^1)$ se notează prin $\gamma_{S^1}(M)$ și se numește **caracteristica Morse-Smale circulară** a varietății M . Prin urmare avem:

$$\gamma_{S^1}(M) = \min \{ \mu(f) : f \in \mathcal{F}_m(M, S^1) \}.$$

2.2 φ -categoria și φ -categoria circulară a unei varietăți

În această secțiune vom considera M o varietate netedă și $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție netedă pe M . Se va păstra notația μ introdusă în Secțiunea 1.2.2 pentru numărul punctelor critice ale funcției f . Sunt introduse noțiunile de φ -categorie a perechii de varietăți (M, N) , φ -categoria circulară a unei varietăți împreună cu proprietăți și teoreme relevante. Rezultatele prezentate aici urmăresc lucrările autorilor Andrica D. [3], [4], Cicortaș G. [33], Pinteș C. [12], [13], [77], Funar L. [5], [6] și Tankens F. [96].

Au loc următoarele proprietăți:

1. φ -categoria este un invariant diferențial, adică dacă varietățile M și N sunt difeomorfe, atunci avem $\varphi(M) = \varphi(N)$.
2. φ -categoria este submultiplicativă, adică are loc inegalitatea

$$\varphi(M \times N) \leq \varphi(M) \cdot \varphi(N).$$

Exemplul 2.2.1 Avem următoarele exemple:

1. Conform articolului [16], pe torul 2-dimensional se poate construi o funcție reală netedă 3 puncte critice: minim, maxim și un punct șa degenerat, deci $\varphi(\mathbb{T}^2) = 3$. Menționăm că este posibilă găsirea unei funcții înălțime care să imerseze torul în \mathbb{R}^3 , dar acest lucru nu este valabil și pentru scufundare. În plus avem $\varphi(\mathbb{T}^n) = n + 1$, unde $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ este torul n -dimensional.

2. Sfera m -dimensională admite o funcție reală cu exact două puncte critice, un minim și un maxim deci avem $\varphi(S^m) = 2$.

Teorema 2.2.1 Dacă M este o varietate m -dimensională compactă atunci are loc inegalitatea:

$$\varphi(M) \leq m + 1.$$

Noțiunea de φ -categorie a fost extinsă în lucrarea [3] trecându-se astfel de la numărul minim posibil de puncte critice ale funcțiilor reale pe varietatea M , la numărul minim de puncte critice pentru funcții $M \rightarrow N$, definindu-se φ -categoria perechii (M, N) .

Definiția 2.2.1 Fie M și N două varietăți diferențiabile și $f : M \rightarrow N$ o funcție netedă. Se definește φ -categoria perechii (M, N) prin

$$\varphi(M, N) = \min \{ \mu(f) : f \in C^\infty(M, N) \}.$$

Teorema 2.2.2 *Fie M o varietate compactă m -dimensională și k un numărul natural astfel încât $2 \leq k \leq m$. Atunci orice aplicație $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ are o infinitate de puncte critice, adică avem $\varphi(M, \mathbb{R}^k) = \infty$.*

Propoziția 2.2.3 *Pentru perechea de sfere (S^m, S^1) , $m \geq 2$, numărul minim posibil de puncte critice pentru funcțiile netede $f : S^m \rightarrow S^1$ este 2.*

Definiția 2.2.2 [10] *Fie M o varietate netedă și $f : M \rightarrow S^1$ o funcție netedă. Se definește φ -categorია circulară a lui M prin relația:*

$$\varphi_{S^1}(M) = \min \{ \mu(f) : f \in C^\infty(M, S^1) \}.$$

Ținând cont de Teorema 2.2.1 și definiția introdusă anterior, avem următoarele inegalități:

$$\varphi_{S^1}(M) \leq \varphi(M) \leq m + 1.$$

Alte rezultate referitoare la φ -categorია unei perechi de suprafețe sunt date în lucrarea [7]. Familii de perechi de varietăți diferentiabile având φ -categorია infintă sunt puse în evidență în lucrările [78] și [79].

Propoziția 2.2.4 [10] *Fie M o varietate netedă conexă care satisface proprietatea $\text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}) = 0$. Atunci are loc proprietatea*

$$\varphi_{S^1}(M) = \varphi(M).$$

În concluzie, această relație are loc atunci când grupul fundamental al lui M este un grup de torsione.

2.3 Teorie Morse. Teorie Morse circulară

Teoria Morse oferă mijloace de explorare a topologiei unei varietăți prin analizarea funcțiilor diferentiabile pe varietatea dată. Astfel se pot extrage informații despre descompunerea în mânăne a varietății sau structurile CW asociate acesteia.

În cele ce urmează vom prezenta noțiuni fundamentale în teoria Morse precum 1-formă diferentiabilă, formă închisă și formă exactă, formă Morse, funcție Morse circulară, aplicație de acoperire și ridicare a unei funcții. Tot aici au fost prezentate exemple pentru forme închise și forme exacte. Secțiunea urmărește referințele bibliografice [42], [43], [69], [72] și [74] dar și [25] care oferă o abordare foarte algebrizată asupra funcțiilor Morse circulare.

Teorema 2.3.1 [44] Fie $\omega = \sum_{i=1}^m f_i dx_i$ o formă diferențială exactă. Forma este închisă dacă și numai dacă este îndeplinită condiția de integrabilitate:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \text{ pentru orice } i, j = 1, \dots, n.$$

Se definește mulțimea **zerourilor 1-formei** ω ca fiind

$$Z(\omega) = \{p \in M : \omega_p = 0\}.$$

Definiția 2.3.1 Fie M o varietate netedă pe care se definește 1-forma închisă ω . ω se numește **formă Morse** dacă în jurul oricărui punct p din M , există o vecinătate U și o funcție Morse $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care are loc $\omega|_U = df$.

Analog cu teoria funcțiilor Morse reale avem următoarele noțiuni:

1. Un zero al formei ω se numește **nedegenerat** dacă este punct critic nedegenerat al oricărei funcții $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, care satisface $\omega|_U = df$.
2. **Indexul** zero-ului nedegenerat $p \in Z(\omega)$ este indexul punctului critic p al funcției netede $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Indexul este un număr natural cuprins între 0 și $\dim(M)$.
3. Notăm cu $\mathbf{S}(\omega)$ mulțimea zero-urilor formei ω , la care se asociază cardinalul său notat prin $\mathbf{m}(\omega)$.

Teoria Morse circulară apare ca un caz particular de teorie Morse reală în cadrul studiului 1-formelor, efectuat de S.Novikov în anul 1980. Importanța acestei ramuri e pusă în evidență de numărul mare de lucrări existente, oferindu-se astfel un caracter dinamic și o aplicabilitate în cercetări asupra fibrărilor de varietăți peste cercul unitate sau funcții zeta dinamice. Printre autorii care au contribuit la dezvoltarea acestui domeniu, menționăm pe S.Novikov, A. Pajitnov, A. Ranicki, M. Farber.

Definiția 2.3.2 Se numește **funcție Morse circulară**, funcția netedă, $f : M \rightarrow S^1$, care are toate punctele critice nedegenerate.

În cadrul studiului teoriei Morse circulare se impun condiții asupra tipului de puncte critice, deci următoarele notații apar în mod natural. Mulțimea $C_k(f)$, $k = 0, \dots, n$, reprezintă mulțimea punctelor critice de index k , iar $\mu_k(f)$ este cardinalul acestei mulțimi.

Astfel $C(f)$ conține mulțimea punctelor critice ale funcției f , iar cardinalul acestei mulțimi este dat de relația:

$$\mu(f) = \mu_0(f) + \cdots + \mu_n(f)$$

Spațiul topologic real \mathbb{R} , împreună cu aplicația de acoperire universală a cercului:

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$$

definește acoperirea cercului unitate S^1 .

Propoziția 2.3.2 *Se consideră X o submulțime compactă și conexă a lui \mathbb{R}^p , o aplicație continuă $f : (X, x_0) \rightarrow (S^1, 1)$ și $t_0 \in \mathbb{R}$. Atunci există o aplicație unică continuă $\tilde{f} : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}, t_0)$ pentru care avem: $f = \exp \circ \tilde{f} = e^{2\pi i \tilde{f}}$.*

Aplicația \tilde{f} din propoziția anterioară se numește **ridicare a aplicației f** .

Următoarele două secțiuni oferă estimări referitoare la numărul minim de puncte critice pentru funcții circulare definite pe produse de varietăți, folosind numărul minim de puncte critice pentru funcții circulare, definite pe fiecare din factori. Anterior au fost realizate calcule asemănătoare pentru funcții reale în lucrarea originală [8], scopul fiind obținerea unor rezultate similare pentru funcții Morse circulare.

Punctul de plecare pentru realizarea acestei analize a fost furnizat de inegalitatea demonstrată de Takens în teza sa [96], prin care se afirmă că:

$$\text{cat}(M) \leq \varphi(M) \leq \dim(M) + 1,$$

unde $\text{cat}(M)$ este categoria *Lusternik-Schnirelmann*, pe scurt *categoria LS*. Reamintim că această categorie a spațiului X reprezintă cel mai mic număr natural n , astfel încât $X = \bigcup_{i=0}^n U_i$, unde U_i sunt mulțimi deschise și contractibile în X .

2.4 Calculul φ -categoriei circulare pentru varietăți particulare

2.4.1 Rezultate privind φ -categoriile de produse și sume directe

Dacă $k, l, m_1, \dots, m_k \geq 2$, sunt numere întregi, atunci au loc următoarele relații:

1. $\varphi_{S^1}(S^{m_1} \times \cdots \times S^{m_k}) = \varphi(S^{m_1} \times \cdots \times S^{m_k}) = k + 1$;
2. $\varphi_{S^1}(\mathbb{R}P^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}P^{m_k}) = \varphi(\mathbb{R}P^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}P^{m_k}) \leq m_1 + m_2 + \cdots + m_k + 1$;
3. $\varphi_{S^1}(L(7, 1) \times S^4) = \varphi(L(7, 1) \times S^4) = \varphi_{S^1}(L(7, 1) \times S^4) = \varphi(L(7, 1) \times S^4) = 5$, unde $L(r, s)$ este spațiul lenticular 3 de tipul (r, s) ;

$$4. \varphi_{S^1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^k \times S^l) = \varphi(\mathbb{R}\mathbb{P}^k \times S^l) \leq k + 2.$$

Demonstrația pentru relațiile:

$$\begin{aligned} \varphi(S^{m_1} \times \cdots \times S^{m_k}) &= k + 1 \\ \varphi(L(7, 1) \times S^4) &= \varphi(L(7, 1) \times S^4) = 5 \end{aligned}$$

a fost făcută de C. Gavrilă [47] (Proposition 4.6, Example 4.7) iar estimarea

$$\varphi(\mathbb{R}\mathbb{P}^k \times S^l) \leq k + 2$$

reiese din [47] (Proposition 4.19). O consecință imediată a Propoziției 2.2.4 este următoarea:

Corolar 2.4.1 *Dacă $M_1, \dots, M_r, n \geq 3$, sunt varietăți conexe cu grup fundamental de torsion, atunci $\varphi_{S^1}(M_1 \# \cdots \# M_r) = \varphi(M_1 \# \cdots \# M_r)$. În particular este adevărată egalitatea $\varphi_{S^1}(r\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = \varphi(r\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$, unde $r\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ reprezintă suma conexă $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \# \cdots \# \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ a r copii de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.*

Următorul rezultat este menționat în monografia [38, p. 221].

Lema 2.4.1 *Dacă M și N sunt varietăți închise, atunci are loc următoarea inegalitate*

$$\varphi(M \# N) \leq \max\{\varphi(M), \varphi(N)\}.$$

În particular, are loc: $\varphi(X \# X) \leq \varphi(X)$ pentru orice varietate închisă X .

2.4.2 Proprietatea de submultiplicativitate pentru φ_{S^1} [65]

Fie M, N două varietăți și $f : M \rightarrow G$ și $g : N \rightarrow G$ două funcții cu valori în grupul Lie (G, \cdot) . Definim operația " \odot " pentru f și g , prin:

$$f \odot g : M \times N \rightarrow G, (f \odot g)(x, y) = f(x)g(y).$$

Propoziția 2.4.2 [45] *Fie M, N varietăți netede cu $\dim(M) = m, \dim(N) = n$ și un grup Lie (G, \cdot) cu dimensiunea $\dim(G) \leq \min(m, n)$. Pentru două aplicații netede $A : M \rightarrow G$ and $B : N \rightarrow G$ avem următoarea incluziune pentru mulțimile critice:*

$$C(A \odot B) \subseteq C(A) \times C(B).$$

Corolar 2.4.2 *Pentru două varietăți M, N următoarea inegalitate are loc:*

$$\varphi_{S^1}(M \times N) \leq \varphi_{S^1}(M)\varphi_{S^1}(N).$$

Mai mult, dacă $\chi(M), \chi(N) \neq 0$, atunci $\varphi_{S^1}(M \times N) \geq 1$.

Exemplul 2.4.1 Fie M o varietate n -dimensională și $SO(n)$ și $Spin(n)$ grupul special ortogonal, respectiv grupul spinorial de ordin n . Dacă $n \geq 2$, atunci următoarele inegalități sunt adevărate:

1. $\varphi_{S^1}(M \times S^n) \leq 2\varphi_{S^1}(M)$;

Dacă $\chi(M) \neq 0$, atunci $\varphi_{S^1}(M \times S^n) \geq 1$;

2. $\varphi_{S^1}(M \times SO(n)) \leq 2^{n-1}\varphi_{S^1}(M)$;

3. $\varphi_{S^1}(M \times Spin(n)) \leq 2^n\varphi_{S^1}(M)$;

4. Dacă $n \geq 3$, $m \geq 3$ și $1 \leq k \leq n - 1$, $1 \leq p \leq m - 1$ atunci

$$\varphi_{S^1}(G_{k,n} \times M) \leq \binom{n+k}{k}\varphi_{S^1}(M),$$

unde $G_{k,n}$ reprezintă varietatea Grassmann a tuturor subspațiilor k -dimensionale ale lui \mathbb{R}^{n+k} .

2.5 Caracteristica Morse-Smale circulară

În această secțiune, se consideră M o varietate diferențiabilă n -dimensională fără bord și $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție Morse pe M . Avem:

$$\mu(f) = \mu_0(f) + \mu_1(f) + \cdots + \mu_n(f)$$

unde $\mu_k(f)$ reprezintă numărul punctelor critice de index k .

Definiția 2.5.1 Notăm cu $\gamma(M)$, numărul minim posibil de puncte critice pentru toate funcțiile Morse. Numărul $\gamma(M)$ se numește **caracteristica Morse-Smale reală** a varietății M adică avem:

$$\gamma(M) = \min \{ \mu(f), f : M \rightarrow \mathbb{R} \},$$

ceea ce corespunde cazului $N = \mathbb{R}$ menționat în Secțiunea 2.1.

Se pune în evidență și numărul:

$$\gamma_i(M) = \min \{ \mu_i(f), f : M \rightarrow \mathbb{R} \}.$$

Considerând elementele introduse mai sus, este evident faptul că pentru orice varietate compactă avem $\gamma_0(M) = \gamma_n(M) = 1$. De-asemenea are loc relația:

$$\gamma(M) \geq \gamma_0(M) + \gamma_1(M) + \cdots + \gamma_n(M).$$

În plus, pentru varietăți netede, necompacte, fără frontieră, caracteristica Morse-Smale este 0.

Urmărind referințele bibliografice [1], [2], [4], [9], [10] și [11] se vor prezenta rezultate ce pun în evidență caracterul de invariante diferențiali ai numerelor $\gamma(M)$ și $\gamma_i(M)$.

Se consideră varietățile diferențiabile M , N , difeomorfismul ψ și aplicațiile netede f și g ca în diagrama comutativă de mai jos:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\psi} & M \\ & \searrow g & \swarrow f \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

Propoziția 2.5.1 1. *Mulțimea punctelor critice ale lui f este egală cu imaginea prin difeomorfismul ψ a mulțimii critice a lui g , adică:*

$$C(f) = \psi(C(g))$$

2. *Indexele Morse ale punctelor critice asociate aplicațiilor f și g prin difeomorfismul ψ sunt egale.*

Următoarea teoremă prezintă caracterul de invariant al numerelor γ și γ_i .

Teorema 2.5.2 *Fie M, N două varietăți diferențiabile difeomorfe. Atunci pentru orice număr natural $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ avem: $\gamma(M) = \gamma(N)$ și $\gamma_i(M) = \gamma_i(N)$.*

În lucrarea [4] se prezintă următorul rezultat utilizat pentru calculul categoriei Morse-Smale.

Teorema 2.5.3 Fie M^m, N^n varietăți diferentiabile și γ, γ_i caracteristicile Morse-Smale reale introduse anterior. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:

1. $\gamma_i(M) = \gamma_{m-i}(M)$, pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, m\}$;
2. $\gamma(M \times N) \leq \gamma(M)\gamma(N)$;
3. $\gamma_i(M \times N) \leq \sum_{j+k=i} \gamma_j(M)\gamma_k(N)$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, m+n\}$.

Analog se definește categoria Morse-Smale circulară corespunzătoare funcțiilor Morse circulare pe varietatea netedă M ca fiind numărul

$$\gamma_{S^1}(M) = \min \{ \mu(f) : f : M \rightarrow S^1 \}.$$

Propoziția 2.5.4 [11] Dacă \widetilde{M} este o k -acoperire a lui M , atunci are loc următoarea inegalitate

$$\gamma_{S^1}(\widetilde{M}) \leq k \cdot \gamma_{S^1}(M).$$

O variantă a inegalităților lui Morse pentru funcții Morse circulare este dată în lucrarea [66]. O estimare a numărului de puncte critice nedegenerate pentru o funcție Morse circulară este obținută în lucrarea [67].

2.6 Calculul categoriei Morse-Smale circulare

2.6.1 Proprietatea de submultiplicativitate pentru γ_{S^1} [65]

În cartea lui Pajitnov [74] avem următoarea descriere pentru o funcție f care se ridică la o funcție Morse cu valori reale F pe \widetilde{M} . Fie M o varietate netedă închisă, $f : M \rightarrow S^1$ o funcție Morse circulară și $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ acoperirea ciclică infinită indusă de funcția f prin acoperirea universală $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, unde $\exp(t) = e^{2\pi it}$. Prin urmare avem:

$$(2.1) \quad f \circ p = \exp \circ F,$$

Propoziția 2.6.1 Fie f, g două funcții Morse circulare care satisfac (2.1). Atunci $f \odot g$ este și ea o funcție Morse, iar a treia diagramă, care descrie ridicarea funcției $f \odot g$ la $F + G$ este comutativă.

$$\begin{array}{ccccc}
 \widetilde{M} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} & & \widetilde{N} & \xrightarrow{G} & \mathbb{R} & & \widetilde{M} \times \widetilde{N} & \xrightarrow{F+G} & \mathbb{R} \\
 \downarrow p & & \downarrow \exp & & \downarrow q & & \downarrow \exp & & \downarrow p \times q & & \downarrow \exp \\
 M & \xrightarrow{f} & S^1 & & N & \xrightarrow{g} & S^1 & & M \times N & \xrightarrow{f \odot g} & S^1
 \end{array}$$

Corolar 2.6.1 *Fie M, N două varietăți de dimensiune m , respectiv n . Atunci are loc:*

$$\gamma_{S^1}(M \times N) \leq \gamma_{S^1}(M)\gamma_{S^1}(N).$$

În plus, dacă $\chi(M), \chi(N) \neq 0$, atunci $\gamma_{S^1}(M \times N) \geq 1$.

Teorema 2.6.2 [10] *Caracteristica Morse-Smale circulară a unei suprafețe închise $\Sigma \neq \mathbb{RP}^2$ este dată de relația $\gamma_{S^1}(\Sigma) = |\chi(\Sigma)|$, unde $\chi(\Sigma)$ este caracteristica Euler-Poincaré a suprafeței Σ .*

Propoziția 2.6.3 [8] *Prin $U(n)$ și $SU(n)$ au fost notate grupul unitar și grupul special unitar. Au loc următoarele rezultate:*

1. $n \leq \varphi(U(n)) \leq \gamma(U(n)) \leq 2^n$;
2. $n - 1 \leq \varphi_{S^1}(SU(n)) = \varphi(SU(n)) \leq \gamma(SU(n)) = \gamma_{S^1}(SU(n)) \leq 2^{n-1}$.

Observație 2.6.1 *Grupul unitar este difeomorf cu $SU(n) \times S^1$. Deci*

$$0 = \varphi_{S^1}(U(n)) < n \leq \varphi(U(n)).$$

Având în vedere noțiunile și calculele prezentate anterior se vor ilustra în continuare relații și inegalități pentru categorii speciale de varietăți și grupuri.

2.6.2 Categorii particulare de varietăți Grassmann

Propoziția 2.6.4 [10] *Fie M o varietate netedă conexă. Dacă M satisface proprietatea de ridicare $\text{Hom}(\pi(M); \mathbb{Z}) = 0$, atunci $\varphi_{S^1}(M) = \varphi(M)$ și $\gamma_{S^1}(M) = \gamma(M)$. În plus $\varphi_{S^1}(M) = \varphi(M)$ and $\gamma_{S^1}(M) = \gamma(M)$, când grupul fundamental al lui M este un grup de torsiune.*

Propoziția 2.6.5 *Dacă $n \geq 2$ este un număr natural, atunci*

1. $\varphi_{S^1}(S^n) = \varphi(S^n) = \gamma_{S^1}(S^n) = \gamma(S^n) = 2$;
2.
$$\begin{aligned} \varphi_{S^1}(\mathbb{RP}^n) &= \varphi(\mathbb{RP}^n) = \gamma_{S^1}(\mathbb{RP}^n) = \gamma(\mathbb{RP}^n) = \text{cat}(\mathbb{RP}^n) = \\ \varphi_{S^1}(\mathbb{CP}^n) &= \varphi(\mathbb{CP}^n) = \gamma_{S^1}(\mathbb{CP}^n) = \gamma(\mathbb{CP}^n) = \text{cat}(\mathbb{CP}^n) = n + 1, \end{aligned}$$

unde $\text{cat}(\mathbb{CP}^n)$ reprezintă categoria Lusternik-Schnirelmann a spațiului proiectiv complex \mathbb{CP}^n .

A se observa că egalitățile $\varphi_{S^1}(\mathbb{R}P^n) = \varphi(\mathbb{R}P^n) = \text{cat}(\mathbb{R}P^n) = n + 1$ sunt demonstrate asemănător în [10] prin folosirea structurii grupului fundamental al spațiului $\mathbb{R}P^n$, împreună cu funcția Morse

$$F_n : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_n([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \frac{x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + nx_n^2 + (n+1)x_{n+1}^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2},$$

ale cărei puncte critice se găsesc în mulțimea $C(F_n) = \{[1, 0, \dots, 0], [0, 1, \dots, 0], \dots, [0, 0, \dots, 1]\}$, și inegalitățile menționate anterior $\varphi(\mathbb{R}P^n) \geq \text{cat}(\mathbb{R}P^n) \geq n + 1$.

Propoziția 2.6.6 *Dacă $n \geq 3$ and $1 \leq k \leq n - 1$, atunci*

$$\varphi_{S^1}(G_{k,n}) = \varphi(G_{k,n}) \leq \gamma(G_{k,n}) = \gamma_{S^1}(G_{k,n}) \leq \binom{n+k}{k},$$

unde $G_{k,n}$ reprezintă varietatea Grassmann a tuturor subspațiilor k -dimensionale ale spațiului \mathbb{R}^{n+k} .

Corolar 2.6.2 *Dacă $n = 1$ sau $k = 1$ sau ($n = 2$ și $k = 2p - 1$ pentru un p arbitrar) sau ($n = 2p - 1$ și $k = 2$), atunci*

$$n \leq \varphi_{S^1}(G_{k,n}) = \varphi(G_{k,n}) \leq \gamma_{S^1}(G_{k,n}) = \gamma(G_{k,n}) \leq \binom{n+k}{k}.$$

2.6.3 Categorii particulare de grupuri Lie

Propoziția 2.6.7 *Dacă $n \geq 3$, atunci următoarele relații sunt adevărate:*

$$\varphi_{S^1}(SO(n)) = \varphi(SO(n)) \leq \gamma(SO(n)) = \gamma_{S^1}(SO(n)) \leq 2^{n-1}.$$

Corolar 2.6.3 $9 \leq \varphi(SO(5)) = \varphi_{S^1}(SO(5)) \leq \gamma_{S^1}(SO(5)) = \gamma(SO(5)) \leq 16$.

Propoziția 2.6.8 *Următoarele inegalități sunt adevărate:*

1. $n \leq \varphi(U(n)) \leq \gamma(U(n)) \leq 2^n$;
2. $n - 1 \leq \varphi_{S^1}(SU(n)) = \varphi(SU(n)) \leq \gamma(SU(n)) = \gamma_{S^1}(SU(n)) \leq 2^{n-1}$.

Observație 2.6.2 *Inegalitatea $\varphi(U(n)) \leq \varphi_{S^1}(U(n))$, poate să fie strică deoarece grupul unitar este difeomorf, dar nu și izomorf cu produsul $SU(n) \times S^1$ [69, p. 103] și Propoziția 2.6.4 nu se pot aplica, deoarece grupul fundamental pentru $U(n)$ este \mathbb{Z} .*

3. Graful Reeb al unei aplicații

Graful Reeb își are originea în studiul evoluției mulțimilor de nivel ale unei funcții cu valori reale, definită pe o varietate diferențiabilă. A fost introdus de matematicianul francez Georges Henri Reeb (12.XI.1920 - 6.XI.1993) în lucrarea [86] ca un obiect matematic folosit la studiul funcțiilor Morse reale. Ulterior a dobândit o utilitate mult mai mare, fiind folosit în domenii ca design geometric asistat de soft-uri matematice, grafică pe calculator, geometrie computațională, termodinamică geometrică.

Împreună cu evoluția tehnologiilor folosite spre exemplu pentru mașinile autonome și semi-autonome, a existat o necesitate de detectare și procesare a imaginilor obținute de la camerele video, fără a mai stoca imaginea. Graful Reeb răspunde unei astfel de cerințe, fiind capabil să stocheze doar ”informațiile de bază”, reducând astfel timpul de procesare al algoritmilor de optimizare, important pentru implementare propriu-zisă.

3.1 Noțiuni de bază și exemple

Definiția 3.1.1 Fie X un spațiu topologic și $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu valori reale. Se definește pe X , relația de echivalență ” \sim ”: $x \sim y$ dacă și numai dacă x și y sunt situate în aceeași componentă conexă prin drumuri a mulțimii de nivel $f^{-1}(a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Notații: Fie M o varietate netedă și $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție netedă cu valori reale. Considerăm:

$M_c = f^{-1}(c)$, mulțimea de nivel c a funcției f și M_c^s o componentă conexă a sa;

$M^{(c,c')} = \{x \in M \mid c < f(x) < c'\}$, tronsonul definit de intervalul (c, c') ;

$M^c = \{x \in M \mid f(x) \leq c\}$, mulțimea de nivel c . Evident are loc relația

$$M = \bigcup_{-\infty < c < \infty} M_c.$$

Definiția 3.1.2 Fie X un spațiu topologic, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu valori reale și ” \sim ” relația de echivalență menționată în definiția 3.1.1. Se numește **graf Reeb** al aplicației f , spațiul X/\sim înzestrat cu topologia cât.

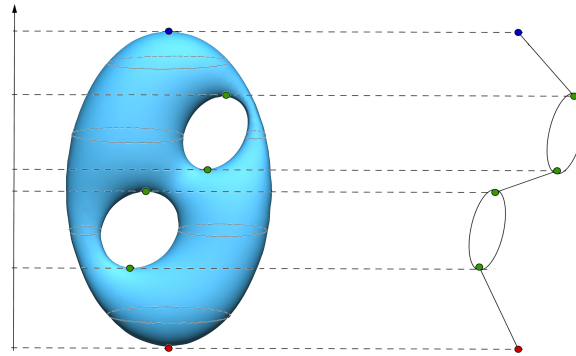
Notație: În materialele bibliografice folosite, graful Reeb al aplicației f a fost notat prin $\mathcal{R}(f)$ sau (\mathbf{X}, \mathbf{f}) . Pe parcursul acestei lucrări se va utiliza notația $\mathcal{R}(f)$.

Fie $\pi : M \rightarrow \mathcal{R}(f)$ proiecția canonică de la varietatea M la graful Reeb al aplicației $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

3.1.1 Exemple

Pe lângă grafurile Reeb definite de funcția înălțime pe sfera S^2 și torul T^2 în lucrare mai dăm și exemplul următor:

3. Graful Reeb al funcției înălțime pe suprafața orientabilă de gen 2:



3.2 Categoria grafelor Reeb

În categoria grafelor Reeb, notată cu **Reeb** [19], avem următoarele elemente:

- obiectele sunt grafuri finite împreună cu funcții reale strict monotone pe muchii;
- morfismele sunt funcții care conservează aplicațiile între spații.

Morfismul descris anterior, numit funcție de conservare, reprezintă o funcție între spațiile $\mathcal{R}(f), \mathcal{R}(g)$, care păstrează aplicațiile $\varphi : X \rightarrow Y$, adică are loc $f = g \circ \varphi$.

Vârfurile grafului Reeb reprezintă clase de puncte critice ale lui f . În plus, f induce aplicația $\tilde{f} : \mathcal{R}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f = \tilde{f} \circ \pi$. În lucrarea [91], funcția \tilde{f} induce o orientare pe muchiile grafului Reeb. Pentru un graf finit orientat se introduc noțiunile de **grad interior**, respectiv **grad exterior** notate prin $deg_{in}(v), deg_{ext}(v)$, reprezentând numărul de muchii care intră, respectiv ies din vârful v . Prin urmare **gradul vârfului v** se definește prin relația:

$$deg(v) = deg_{in}(v) + deg_{ext}(v)$$

Definiția 3.2.1 [91] Spunem că graful Γ are o **orientare bună** dacă este înzestrat cu orientarea dată de funcția continuă $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât g este strict monotonă pe muchii și are extreme doar în vârfuri de grad 1.

3.3 Proprietăți și reprezentări pentru graful Reeb al unei aplicații

În secțiunea următoare, vom prezenta rezultate importante pentru graful Reeb, urmărind articolele [19] și [58]. Modul în care au fost definite componentele conexe și mai apoi tipurile de drumuri, au fost utilizate pentru dezvoltarea algoritmului prezentat în lucrarea [63].

Definiția 3.3.1 Fie c o valoare critică a lui f . Spunem că o componentă conexă M_c^s este **esențială** dacă în interiorul ei se află cel puțin un punct critic, adică

$$M_c^s \cap C(f) \neq \emptyset.$$

Vom nota acest tip de componentă prin M_c^{es} .

Un graf se numește **conex** dacă oricare două vârfuri (noduri) ale sale, sunt conectate printr-un drum. Se numește **arbore**, un graf conex fără cicluri.

Propoziția 3.3.1 Fie M o varietate netedă, compactă și $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție netedă cu puncte critice izolate. Dacă c este valoare critică, considerăm mulțimea:

$$A = M_c^{es} \cap C(f) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

a punctelor critice din componenta esențială asociată lui c . Atunci au loc următoarele proprietăți:

1. Orice componentă conexă prin drumuri asociată unei mulțimi de nivel, este o componentă conexă.
2. pentru oricare a_i, a_j din închiderea mulțimii $(M_c^{es} \setminus A)$, unde $a_i \neq a_j$ și oricare $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ se pot conecta printr-un drum $\gamma : I \rightarrow M_c^{es}$ astfel încât $\gamma(0) = a_i, \gamma(1) = a_j$ unde γ este un omeomorfism.
3. există $K \subset M_c^{es}$ un subspațiu închis omeomorf cu un arbore pentru care A este mulțimea de vârfuri ale arborelui.

Corolar 3.3.1 Pentru orice a_i, a_j din A puncte critice, există un arc (privit ca și compunerea de arce descrisă anterior) care le conectează.

3.3.1 Tipuri de componente conexe

Componenta conexă C din $M^{(c,c')}$ este de tipul:

(I) sau **componentă vârf** dacă conține un punct critic;

(II) în caz contrar;

(IIa) (sau **componentă muchie**) dacă $f(cl(C)) \cap C(f) = \{c, c'\}$.

Relația de mai sus este echivalentă cu:

Componenta de tipul II este de tipul IIa (sau componentă muchie) dacă au loc următoarele relații:

$$M_c^{es} \cap cl(C) \neq \emptyset \text{ și } M_{c'}^{es} \cap cl(C) \neq \emptyset.$$

Propoziția 3.3.2 Pentru o componentă muchie C avem difeomorfismul

$$(M_a \cap C) \times (c, c') \sim M^{(c,c')} \cap C$$

Lema 3.3.3 O componentă C de tipul (II) intersectează o singură componentă a lui M_q , pentru $q \in (c, c')$.

Corolar 3.3.2 $M^{(c,c')}$ privită ca o varietate, are un număr finit de componente conexe.

Propoziția 3.3.4 Există o bijecție între componentele de tipul (IIa) ale varietății M și muchiile grafului $\mathcal{R}(f)$.

Fie " \sim_{es} " relația de echivalență pe M definită prin

$$x \sim_{es} y \in M \text{ dacă și numai dacă } x, y \in M_c^{es}, c \in C(f).$$

Notăm $M_{es} = M/\sim_{es}$ spațiul cât obținut prin această relație de echivalență, prin $\pi_{es} : M \rightarrow M_{es}$ proiecția canonică și $f_{es} : M_{es} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită de $f_{es}([x]) = f(x)$. Prin urmare avem: $f_{es} \circ \pi_{es} = f$.

Lema 3.3.5 Graful Reeb pentru o funcție esențială f_{es} , notat prin $\mathcal{R}_{es}(f)$ coincide cu graful Reeb $\mathcal{R}(f)$ al funcției f .

3.3.2 Tipuri de familii de drumuri

Definiția 3.3.2 1) Fie $c, c' \in V_{cr}(f)$ și γ_1, γ_2 două drumuri cu

$$f(\gamma_1(0)) = f(\gamma_2(0)) = c', f(\gamma_1(1)) = f(\gamma_2(1)) = c.$$

O aplicație $H : I \times I \rightarrow M$ este o **omotopie** relativ la componentele esențiale între γ_1 și γ_2 dacă:

- (i) H este o omotopie între γ_1 și γ_2 ;
- (ii) $H(0, s) \in M_c^{es}$ și $H(1, s) \in M_c^{es}$, pentru orice $s \in I$.

Un drum $\epsilon : I \rightarrow M$ este un **drum-vârf** dacă este inclus într-o componentă esențială a unui nivel critic.

Un drum γ este **contractibil relativ la componenta esențială** dacă există o omotopie relativ la componenta esențială de la γ la un drum-vârf.

2) Pentru o componentă C de tipul IIa a lui $M^{(c,c')}$, spunem că γ este un **drum-muchie** dacă:

- (i) $\gamma(0) \in M_c^{es}$ și $\gamma(1) \in M_c^{es}$;
- (ii) $\gamma((0, 1)) \subset C$

Drumul-muchie este descrescător dacă avem $f(\gamma(t)) < f(\gamma(t'))$, pentru $t > t'$.

Definiția 3.3.3 Pentru o componentă C , de tipul IIa, spunem că $\gamma : I \rightarrow M$ este un **drum-muchie extins** al lui C dacă:

- 1) $\gamma(0) \in M_c^{es}$ și $\gamma(1) \in M_c^{es}$;
- 2) există $t_0, t_1 \in I, t_0 < t_1$ astfel încât:
 - dacă $f(\gamma(t)) = c' \Rightarrow t \leq t_0$;
 - dacă $f(\gamma(t)) = c \Rightarrow t \geq t_1$.

În plus, avem $\gamma(t) \cap M_d^{es} = \emptyset$ pentru $d \neq c, c'$.

Teorema 3.3.6 Există o bijecție între clasele de omotopie relativ la componenta esențială ale drumurilor-muchie extinse și muchiile grafului Reeb $\mathcal{R}(f)$. În plus, fiecare clasă de omotopie descrisă anterior conține un drum descrescător care leagă două puncte critice.

3.3.3 Graful Reeb din perspectiva teoriei grafurilor

Pentru a pune în evidență structura de graf a grafului Reeb folosim următoarele două mulțimi:

V(f) reprezentând mulțimea claselor de omotopie relativ la componenta esențială pentru drumurile vârf;

E(f) mulțimea claselor de omotopie relativ la componenta esențială pentru drumurile muchie extinse.

Astfel se obține graful finit $\Gamma(f) = \{V(f), E(f)\}$.

Teorema 3.3.7 Între graful $\Gamma(f)$ și graful Reeb $\mathcal{R}(f)$ al funcției f există un omeomorfism simplicial.

Propoziția 3.3.8 *Graful $\Gamma(f) \subset M$ este omotopic echivalent cu graful Reeb $\mathcal{R}(f)$. Deci avem relația:*

$$\beta_1(\Gamma) = |E| - |V| + 1.$$

În subsecțiunea de mai jos, urmărim raționamentul din referința [71] pentru a putea prezenta teorema de realizare a grafului Reeb. Vom pune în evidență noțiunea de număr Reeb, maximizarea numărului de bucle ale unui graf Reeb și mărginirea pentru gradul vârfurilor asociate grafului.

3.3.4 Aplicații. Interpretări [58], [71]

Lucrarea [58] publicată în anul 2014 prezintă următoarea situație: Pentru o funcție de clasă C^1 cu valori reale, definită pe o varietate diferențiabilă M , care are punctele critice izolate se pun în evidență următoarele particularizări ale domeniului.

1) Dacă M este sfera unitate n -dimensională S^n cu $n \geq 2$ sau spațiul proiectiv real sau complex n -dimensional $\mathbb{R}P^n$, respectiv $\mathbb{C}P^n$, atunci $\mathcal{R}(f)$ este un arbore.

2) Dacă M este torul n -dimensional T^n atunci graful Reeb este un arbore sau este omotopic echivalent cu un cerc.

3) Dacă M este o suprafață orientabilă Σ_g de gen g , atunci graful Reeb conține cel mult $2g$ bucle.

4) Dacă M este o suprafață neorientabilă M_g de gen g , atunci graful Reeb conține cel mult g bucle.

Lema 3.3.9 *Fie $[p]$ un punct interior unei muchii din grafului Reeb $\mathcal{R}(f)$. Dacă $\mathcal{R}(f) \setminus \{[p]\}$ este conexă prin drumuri atunci și $M \setminus \pi^{-1} \{[p]\}$ este conexă prin drumuri.*

Corolar 3.3.3 *Fie $[p_1], \dots, [p_r]$ puncte interioare muchiilor din grafului Reeb $\mathcal{R}(f)$. Dacă $\mathcal{R}(f) \setminus \{[p_1], \dots, [p_r]\}$ este conexă, atunci și $M \setminus \pi^{-1} \{[p_1], \dots, [p_r]\}$ este conexă.*

Teorema 3.3.10 *Dacă Σ_g este o suprafață orientabilă de gen g , atunci numărul de bucle din $\mathcal{R}(f)$ este mai mic sau egal cu g .*

Fie $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe o varietate diferențiabilă închisă. Dacă f are exact trei puncte critice, atunci $\mathcal{R}(f)$ este un arbore cu două muchii.

Definiția 3.3.4 *Se numește **numărul Reeb** $R(M)$ al unei varietăți, numărul maxim de bucle de-a lungul grafului Reeb după toate funcțiile reale netede pe M care au un număr finit de puncte critice. Are loc relația*

$$R(M) = \max \{ \beta_1(\mathcal{R}(f)) : f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ are număr finit de puncte critice} \}.$$

Lema 3.3.11 [36] Fie $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție Morse simplă pe o suprafață închisă Σ .

Dacă $\Sigma = \Sigma_g$, atunci $\beta_1(\mathcal{R}(f)) = g$.

Dacă $\Sigma = S_g$, atunci $\beta_1(\mathcal{R}(f)) \leq \left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil$, unde $\lceil x \rceil$ este 'podeaua' lui x .

Propoziția 3.3.12 Fie $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție Morse simplă și Σ o suprafață închisă. Punctului critic p i se asociază vârful v al grafului Reeb $\mathcal{R}(f)$. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:

(a) $\text{ind}(p) = 0$ sau 2 dacă și numai dacă $\text{deg}(v) = 1$;

(b) $\text{ind}(p) = 1$ dacă și numai dacă $\text{deg}(v) = \begin{cases} 3, & \text{dacă } \Sigma \text{ este orientabilă} \\ 2 \text{ sau } 3, & \text{dacă } \Sigma \text{ este neorientabilă} \end{cases}$

Următoarele trei rezultate prezente în referința [71] oferă rezultate despre modul în care graful Reeb al unei funcții Morse simple maximizează numărul de bucle ale grafului.

Lema 3.3.13 Fie M o varietate diferențiabilă închisă și $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu număr finit de puncte critice pe M . Atunci există o funcție Morse simplă $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$\beta_1(\mathcal{R}(g)) \geq \beta_1(\mathcal{R}(f))$$

Precizăm că pentru o funcție Morse f , funcția Morse simplă g se poate obține fără a schimba punctele critice ale lui f și indexurile acestora, iar g diferă de f doar în vecinătăți ale punctelor critice.

Corolar 3.3.4 Are loc relația

$$\mathcal{R}(M) = \max \{ \beta_1(\mathcal{R}(f)) : f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ funcție Morse simplă} \}.$$

Corolar 3.3.5 Dacă o suprafață Σ are caracteristica Euler $\chi(\Sigma) = 2 - k$, atunci

$$\mathcal{R}(\Sigma) = \frac{k}{2}.$$

3.3.5 Teoreme de realizare ale grafului Reeb prin funcții Morse

Bazele teoremele de realizare ale grafului Reeb folosind o funcție Morse au fost puse de S.Sharko în lucrarea [91], folosind tehnici de construcție introduse de F. Takens în [96]. În continuare vom urmări raționamentul din lucrarea [71] pentru stabilirea condițiilor în care graful Reeb este izomorf cu graful Γ .

Teorema 3.3.14 Fie Γ un graf finit înzestrat cu o orientare bună. Atunci există o varietate închisă n -dimensională M , ($n \geq 2$) și o funcție Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât graful Reeb $\mathcal{R}(f)$ este izomorf cu Γ .

Considerăm următorul caz particular pentru $n = 2$:

Propoziția 3.3.15 *Fie Γ un graf înzestrat cu orientare bună și $g = \beta_1(\Gamma)$. Atunci există o suprafață închisă Σ și o funcție $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ având un număr finit de puncte critice, astfel încât graful Reeb al lui f este izomorf cu Γ . Suprafața Σ se poate considera ca fiind orientabilă de gen g sau neorientabilă de gen $2g$. Dacă graful Γ este un arbore atunci suprafața este difeomorfă cu S^2 .*

Următoarea teoremă descrie cazul particular Γ_0 , adică graful cu două vârfuri și o muchie. Acesta este singurul graf care nu apare pentru altă suprafață în afara sferei. În plus se prezintă o condiție necesară și suficientă pentru ca graful Reeb să fie izomorf cu graful Γ .

Teorema 3.3.16 *Fie $\Gamma \neq \Gamma_0$ un graf finit cu orientare bună și Σ o suprafață închisă. Atunci există o funcție $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ cu număr finit de puncte critice astfel încât graful său Reeb $\mathcal{R}(f)$ este izomorf cu Γ dacă și numai dacă $\beta_1(\Gamma) \leq \mathcal{R}(\Sigma)$. Dacă $\Gamma = \Gamma_0$ atunci graful se realizează doar pentru $\Sigma = S^2$.*

Teorema 3.3.17 *Fie $\Gamma \neq \Gamma_0$ un graf finit cu orientare bună și Δ_2 numărul de vârfuri de grad 2 ale lui Γ și fie Σ o suprafață închisă de gen g (orientabilă sau neorientabilă). Atunci există o funcție Morse $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât graful său Reeb $\mathcal{R}(f)$ este izomorf cu Γ dacă și numai dacă*

- (i) $g \geq \beta_1(\Gamma) + \Delta_2$, când Σ este orientabilă;
- (ii) $g \geq 2\beta_1(\Gamma) + \Delta_2$, când Σ este neorientabilă.

Propoziția 3.3.18 *Fie Σ o suprafață închisă și Γ un graf orientat fără bucle astfel încât $\beta_1(\Gamma) \leq \mathcal{R}(\Sigma)$. Atunci există o funcție $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ cu număr finit de valori critice astfel încât f este un omeomorfism care păstrează orientarea pe Γ . Dacă Γ are un vârf w pentru care $\deg_{in}(w)$ și $\deg_{out}(w)$ sunt diferite de zero, atunci $\mathcal{R}(f)$ și Γ sunt izomorfe.*

Graful Reeb asociat unei funcții f reprezintă o metodă utilă, mai ales în cazul suprafețelor, când reconstrucția acestora se face pornind de la graful Reeb dat [70]. Astfel, una din cele mai importante calități ale grafului Reeb, este faptul că permite crearea unei structuri care încapsulează informații atât despre formă ca și reprezentare geometrică, cât și ca interpretare topologică.

3.4 Distanțe între grafurile Reeb

Studiul grafului Reeb a cunoscut o puternică dezvoltare, ceea ce a condus la necesitatea explorării conceptului de metrică între obiectele categoriei considerate. Aplicațiile practice

ce folosesc graful Reeb impun analizarea diferențelor între două grafuri existente. De-asemena colectarea practică a datelor, susceptibilă la erori, naște întrebări legate de stabilitatea grafului Reeb. Abordările existente în literatură se bazează pe două tipuri de raționament: dezvoltarea de euristici pentru a îmbunătăți rezistența grafului la perturbări și o abordare teoretică prin dezvoltarea distanțelor și pseudo-distanțelor. Distanțele prezente în literatură sunt distanța interfoliată, distorsie funcțională, 'bottleneck' și distanța de editare. Referințele bibliografice folosite în această secțiune sunt [18], [19], [28] și [41].

3.4.1 Distanța interfoliată

Fie $\mathcal{R}(f)$ graful Reeb al funcției f și considerăm

$$\mathcal{R}(f)_\epsilon := \mathcal{R}(f) \times [-\epsilon, \epsilon].$$

Se definește ϵ -**netezirea** lui $\mathcal{R}(f)$ ca fiind graful Reeb al funcției perturbate

$$f_\epsilon : \mathcal{R}(f)_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto f(x) + t.$$

Prin urmare ϵ -netezirea este dată de spațiul cât $\mathcal{R}(f)_\epsilon / \sim$ și este notată cu $\mathcal{U}_\epsilon(\mathcal{R}(f))$.

Se observă că are loc următoarea relație:

$$\mathcal{U}_\epsilon(\mathcal{U}_\epsilon(\mathcal{R}(f))) = \mathcal{U}_{2\epsilon}(\mathcal{R}(f)).$$

Definiția 3.4.1 Fie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții reale. Se numește ϵ -**interfoliere** a grafurilor $\mathcal{R}(f)$, $\mathcal{R}(g)$, o pereche de aplicații care păstrează aplicațiile

$$\varphi : X \rightarrow \mathcal{U}_\epsilon(\mathcal{R}(f)) \text{ și } \psi : Y \rightarrow \mathcal{U}_\epsilon(\mathcal{R}(g))$$

astfel încât următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(f) & \xrightarrow{i} & \mathcal{U}_\epsilon(\mathcal{R}(f)) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_\epsilon \\ \mathcal{U}_\epsilon(\mathcal{R}(g)) & \xrightarrow{i_\epsilon} & \mathcal{U}_{2\epsilon}(\mathcal{R}(g)) \end{array}$$

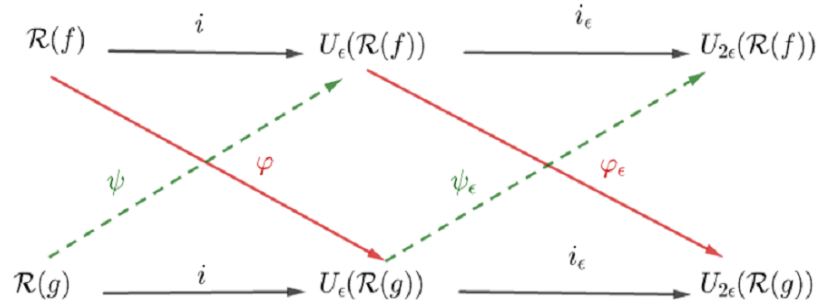
unde avem:

$$i : \mathcal{R}(f) \rightarrow \mathcal{U}_\epsilon(\mathcal{R}(f)), x \mapsto [x, 0]$$

$$\varphi_\epsilon : \mathcal{U}_\epsilon(\mathcal{R}(f)) \rightarrow \mathcal{U}_{2\epsilon}(\mathcal{R}(g)), [x, t] \mapsto [\varphi(x), t]$$

În mod analog se definește și aplicația ψ .

Definiția 3.4.2 Aplicațiile $\varphi : \mathcal{R}(f) \rightarrow \mathcal{U}_\epsilon(\mathcal{R}(g))$, $\psi : \mathcal{R}(g) \rightarrow \mathcal{U}_\epsilon(\mathcal{R}(f))$ se numesc ϵ -**interfoliate**, dacă φ și ψ păstrează aplicații și următoarea diagramă este comutativă:



Definiția 3.4.3 Fiind date două grafuri Reeb $\mathcal{R}(f), \mathcal{R}(g)$, se definește **distanța interfoliată** prin relația

$$(3.1) \quad d_I(\mathcal{R}(f), \mathcal{R}(g)) = \inf \{ \epsilon : \exists \text{ } \epsilon\text{-interfoliere între } \mathcal{R}(f), \mathcal{R}(g) \}$$

3.4.2 Distanța distorsie funcțională

Fie π un drum între x și y în $\mathcal{R}(f) \in \mathbf{Reeb}$. Se numește **înălțimea drumului** π numărul

$$(3.2) \quad h(\pi) = \max_{x \in \pi} f(x) - \min_{x \in \pi} f(x)$$

Cu ajutorul acestui număr definim distanța:

$$(3.3) \quad d_f(x, y) = \min_{\pi: x \rightsquigarrow y} h(\pi)$$

Definiția 3.4.4 Fiind date două grafuri Reeb $\mathcal{R}(f), \mathcal{R}(g)$ și două funcții $\Phi : X \rightarrow Y$ și $\Psi : Y \rightarrow X$, considerăm

$$(3.4) \quad C(\Phi, \Psi) = \{(x, y) \in X \times Y \mid \Phi(x) = y \text{ sau } \Psi(y) = x\}$$

și

$$(3.5) \quad D(\Phi, \Psi) = \sup_{(x,y),(x',y') \in C(\Phi,\Psi)} \frac{1}{2} |d_f(x, x') - d_g(y, y')|.$$

Introducem **distanța distorsie funcțională** prin

$$(3.6) \quad d_{FD} = \inf_{\Phi, \Psi} \max \{D(\Phi, \Psi), \|f - g \circ \Phi\|_\infty, \|g - f \circ \Psi\|_\infty\}.$$

Următoarea teoremă ilustrează relația între cele două metrice prezentate, distanța interfoliată și distanța distorsie funcțională și este importantă în studiul proprietăților de convergență.

Teorema 3.4.1 [19] Fiind date două funcții netede $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$, $g : N^n \rightarrow \mathbb{R}$ și grafurile Reeb asociate lor $\mathcal{R}(f)$, $\mathcal{R}(g)$, au loc următoarele inegalități:

$$d_I(f, g) \leq d_{FD}(f, g) \leq 3d_I(f, g).$$

3.4.3 Distanța 'bottleneck'

Distanța 'bottleneck' reprezintă global o pseudo-metrică, dar local, într-o vecinătate suficient de mică este la fel de eficientă ca orice alt tip de metrică pentru a face diferența între două grafuri Reeb. Pentru a introduce acest tip de distanță este necesară introducerea noțiunilor de funcție de tip Morse, filtrare extinsă, diagramă de persistență extinsă și costul diagramei. În vederea prezentării acestor noțiuni urmărim referința bibliografică [28].

Definiția 3.4.5 Fie X un spațiu topologic și $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Funcția f se numește **funcție de tip Morse** dacă au loc următoarele proprietăți:

a) există o mulțime finită de valori critice $C(f)$, astfel încât pentru orice interval deschis (a_i, a_{i+1}) există un spațiu Y_i compact și conex și un omeomorfism $\mu_i : Y_i \times (a_i, a_{i+1}) \rightarrow X^{(a_i, a_{i+1})}$ astfel încât $f|_{X^{(a_i, a_{i+1})}} = \pi_2 \circ \mu_i^{-1}$, pentru orice i natural;

- b) μ_i se prelungește la o funcție continuă $\bar{\mu}_i : Y_i \times [a_i, a_{i+1}] \rightarrow X^{[a_i, a_{i+1}]}$ cu mențiunea pentru cazurile particulare $i = 0$ și $i = n$: μ_0 se prelungește prin $\bar{\mu}_0 : Y_0 \times (-\infty, a_0] \rightarrow X^{(-\infty, a_0]}$, respectiv μ_n se prelungește prin $\bar{\mu}_n : Y_n \times [a_n, \infty) \rightarrow X^{[a_n, \infty)}$;
- c) fiecare mulțime de nivel $f^{-1}(x)$ are omologia finit generată.

Considerăm funcția f menționată anterior. Familia de mulțimi de subnivel ale lui f , $\{X^{(-\infty, a]}\}_{a \in \mathbb{R}}$ definește o **filtrare**, adică avem $X^{(-\infty, a]} \subseteq X^{(-\infty, b]}$, pentru orice $a \leq b$.

Se introduc mulțimile $\mathbb{R}^{op} = \{\tilde{x} : x \in \mathbb{R}\}$ înzestrată cu ordinea $\tilde{x} \leq \tilde{y} \Leftrightarrow x \geq y$ și $\mathbb{R}_{Ext} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \mathbb{R}^{op}$.

Se definește **filtrare extinsă** a lui f relativ la \mathbb{R}_{Ext} prin:

$F_a = X^{(-\infty, a]}$, pentru $a \in \mathbb{R}$, $F_\infty = X \equiv (X, \emptyset)$ și $F_{\tilde{a}} = (X, X^{[\tilde{a}, \infty)})$, pentru $\tilde{a} \in \mathbb{R}^{op}$. F_a se numește partea ordinară a filtrării, iar $F_{\tilde{a}}$ partea relativă. Aplicând functorul de omologie H_* pe filtrarea menționată anterior, se obține modulul de persistență extinsă. Pentru funcții de tip Morse acest modul se descompune ca sumă directă de module-interval semideschise. Se definește **diagrama de persistență extinsă** reprezentarea fiecărui interval din acest modul ca punct în planul extins, având coordonatele date de capetele intervalului.

Diagrama de persistență extinsă se notează prin $\mathbf{Dg}(f)$ și diferențează părțile filtrării după cum urmează:

- a) punctul $p = (x, y)$ se numește punct **ordinar** dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și p se găsește deasupra diagonalei $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$;
- b) punctul $p = (x, y)$ se numește punct **relativ** dacă $x, y \in \mathbb{R}^{op}$ și p se găsește sub diagonalei Δ ;
- c) punctul $p = (x, y)$ se numește punct **extins** dacă $x \in \mathbb{R}$ și $y \in \mathbb{R}^{op}$ și se poate localiza oriunde în plan, inclusiv pe diagonala Δ . Notăm prin $Ext^+(f)$, punctele extinse care se găsesc pe diagonala Δ , iar prin $Ext^-(f)$ punctele extinse care nu se găsesc pe diagonala Δ .

Diagrama de persistență extinsă se poate scrie ca următoarea reuniune

$$Dg(f) = Ord(f) \cup Rel(f) \cup Ext^+(f) \cup Ext^-(f).$$

Fie D, D' două diagrame de persistență. Spunem că submulțimea $\Gamma \subseteq D \times D'$ reprezintă o **potrivire parțială** dacă pentru orice punct $p \in D$ există cel mult un punct $p' \in D'$ astfel încât $(p, p') \in \Gamma$. În plus Γ identifică doar puncte de același tip și aceeași dimensiune omologică.

Costul lui Γ se definește prin relația: $cost(\Gamma) = \max\{\max \delta_D(p), \max \delta_{D'}(p')\}$, unde $\delta_D(p) = \|p - p'\|_\infty$ dacă p este asociat unui p' din D' și $\delta_D(p) = d_\infty(p, \Delta)$, dacă p nu are corespondent în D' .

Definiția 3.4.6 Se numește **distanța 'bottleneck'** între două diagrame de persistență D și D' , numărul:

$$d_B(D, D') = \inf_{\Gamma} \text{cost}(\Gamma)$$

unde Γ parcurge toate potrivirile parțiale dintre D și D' .

Teorema 3.4.2 (Teorema de stabilitate a distanței 'bottleneck') [35]

Pentru orice funcții de tip Morse $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ avem

$$d_B(Dg(f), Dg(g)) \leq \|f - g\|_{\infty}$$

În mod analog se definește distanța 'bottleneck' între grafele Reeb $\mathcal{R}(f)$ și $\mathcal{R}(g)$ prin relația

$$d_B(\mathcal{R}(f), \mathcal{R}(g)) = d_B(Dg(f), Dg(g)).$$

Teorema 3.4.3 [18] Fie $\mathcal{R}(f), \mathcal{R}(g)$ grafele Reeb corespunzătoare funcțiilor $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele inegalități

1. $d_B(Dg_0(f), Dg_0(g)) \leq d_{FD}(f, g)$;
2. $d_B(ExDg_1(f), ExDg_1(g)) \leq 3d_{FD}(f, g)$.

unde $ExDg_0$ este diagrama de persistență de ordinul 0 și $ExDg_1$ reprezintă prima diagramă de persistență extinsă asociate unei aplicații.

Având în vedere rezultatele din teoremele 3.4.1 și 3.4.3 se poate enunța următorul corolar:

Corolar 3.4.1 În ipotezele teoremelor menționate, avem următoarele inegalități:

1. $d_B(Dg_0(f), Dg_0(g)) \leq 3d_I(f, g)$;
2. $d_B(ExDg_1(f), ExDg_1(g)) \leq 9d_I(f, g)$.

3.4.4 Distanța de editare

Distanța de editare a fost introdusă pentru prima dată în lucrarea [87] și reprezintă o metodă utilă de a măsura diferențele existente între două grafe date. Aplicațiile practice ale acestei distanțe se regăsesc în domenii ca recunoaștere de modele sau recunoașterea scrisului de mână ("pattern recognition"), identificare amprentelor în bazele de date și machine learning. Distanța de editare este o distanță combinatorială dar oferă cea mai bună estimare a diferențelor între două grafe relativ la clasa distanțelor din care face parte.

Pentru prezentarea noțiunilor și rezultatelor referitoare la distanța de editare vom utiliza referințele [41], [46] și [87].

Distanța de editare se introduce pe un graf ale cărei vârfuri sunt etichetate folosind corespunzător $l_f : V(\Gamma_f) \rightarrow \mathbb{R}$, unde l_f este restricția lui f la mulțimea punctelor critice $C(f)$. Un astfel de graf se notează prin $(\mathcal{R}(f), l_f)$ și pentru orice vârf de grad 3 avem cel puțin două vârfuri adiacente v_1 și v_2 care satisfac relația:

$$l_f(v_1) < l_f(v) < l_f(v_2).$$

Definiția 3.4.7 *Spunem că două grafe Reeb etichetate $(\mathcal{R}(f), l_f)$ și $(\mathcal{R}(g), l_g)$ sunt izomorfe dacă există un izomorfism $\varphi : C(f) \rightarrow C(g)$ care păstrează muchiile și etichetarea vârfurilor.*

Conform [41] există patru tipuri de deformări elementare care sunt prezentate împreună cu costul lor după cum urmează:

a) **Deformarea B** (birth) prin care se introduc vârfuri între două vârfuri existente.

$$c(T) = \frac{|l_g(u_1) - l_g(u_2)|}{2}$$

b) **Deformarea D** (death) prin care se elimină vârfuri aflate între două vârfuri existente.

$$c(T) = \frac{|l_f(u_1) - l_f(u_2)|}{2}$$

c) **Deformarea R** (relabeling) prin care se schimbă ordinea între două vârfuri existente.

$$c(T) = \max |l_f(v) - l_g(v)|$$

d) **Deformări K_i** prin care graful se transformă în simetricul său sau se reorganizează structura grafului.

$$c(T) = \max \{|l_f(u_1) - l_g(u_1)|, |l_f(u_2) - l_g(u_2)|\}$$

Propoziția 3.4.4 [41] Fie M o suprafață conexă, închisă, orientabilă de gen g și $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție Morse simplă. Dacă avem graful $(\Gamma, l) = T(\Gamma_f, l_f)$ obținut ca o compunere de deformări elementare, atunci există o funcție Morse $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $(\Gamma_g, l_g) \cong (\Gamma, l)$.

Se numește **deformare** a grafului (Γ_f, l_f) o secvență ordonată $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ formată din transformări elementare care acționează recursiv astfel: T_1 reprezintă o transformare elementară pentru (Γ_f, l_f) , T_2 reprezintă o transformare elementară pentru $T_1(\Gamma_f, l_f)$, \dots , respectiv T_n reprezintă o transformare elementară pentru $T_{n-1}T_{n-2} \dots T_1(\Gamma_f, l_f)$.

Se va nota prin $\mathcal{T}((\Gamma_f, l_f), (\Gamma_g, l_g)) = \{T = (T_1, \dots, T_n : T(\Gamma_f, l_f))\} \cong (\Gamma_g, l_g)$.

Definiția 3.4.8 Se numește **distanță de editare**, pseudo-metrica definită prin:

$$d_E((\Gamma_f, l_f), (\Gamma_g, l_g)) = \inf_{T \in \mathcal{T}((\Gamma_f, l_f), (\Gamma_g, l_g))} c(T).$$

Următorul rezultat ilustrează stabilitatea distanței de editare.

Teorema 3.4.5 [41] Pentru orice funcții Morse simple $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ avem relația

$$d_E((\Gamma_f, l_f), (\Gamma_g, l_g)) \leq \max_{p \in M} |f(p) - g(p)|$$

Luând în considerare toate tipurile de distanțe prezentate anterior pentru f, g funcții Morse cu valori reale pe suprafața M , avem legăturile date de inegalitățile:

i) $d_E((\Gamma_f, l_f), (\Gamma_g, l_g)) \geq d_B(D_f, D_g)$, unde D_f și D_g reprezintă diagramele de persistență ale lui f și g ;

ii) $d_E((\Gamma_f, l_f), (\Gamma_g, l_g)) \geq d_{FR}(\mathcal{R}(f), \mathcal{R}(g))$, unde $\mathcal{R}(f)$ și $\mathcal{R}(g)$ reprezintă graful Reeb ale lui f și g .

3.5 Graful Reeb în topologia computațională

Clasificările componentelor grafului Reeb conduc la o mai bună înțelegere a evoluției curbilor de nivel pe o varietate și implicit a parametrilor necesari realizării unei scheme de reprezentare. Scopul principal al acestei secțiuni este de a prezenta un algoritm de determinare a grafului Reeb pentru o funcție cu valori reale definită pe o suprafață compactă fără bord realizată în spațiul \mathbb{R}^3 . Rezultatele din secțiunea următoare sunt preluate după lucrarea noastră [63], lucrare citată în referința [57].

3.5.1 Documentație. Descrierea algoritmului

Algoritmul propus constă în următorii pași.

1. Identificarea punctelor critice ale funcției reale definite pe suprafață;
2. Aranjarea punctelor critice într-un vector $v[i]$ în ordinea apariției lor pe parcursul parcurgerii suprafeței de la minimul absolut la maximul absolut.
3. Fiecare componentă a vectorului are forma: $v[i] = (P_i; type)$, unde descrierea tipului este dată de:
 - **a** pentru minim, având tipul special a_A pentru minimul absolut;
 - b pentru un punct șa, cu tipurile particulare b_i pentru un punct șa care apare după un minim absolut și b_p pentru un punct șa care apare după un minim (se va nota *categ.sp*). Dacă punctul șa nu apare după nici un tip de minim, atunci tipul său se va obține prin alternarea ordinii, relativ la ultimul punct șa din *categ.sp*.
 - **c** pentru punctul de maxim, având tipul particular c_A pentru maximul absolut;
4. Limbajul pseudo-cod pentru algoritm:

Date de intrare

$X =$ suprafață, $f =$ funcție cu valori reale

Se definește o **funcție booleană** `ver.type(P,Q)` care compară tipul principal pentru două puncte critice;

Exemplu `ver.type(a,a_A)=adevărat`; `ver.type(c,c_A)= adevărat`, `ver.type(b_p, b_i)= adevărat`, `ver.type(a,c)=fals`;

Se definește funcția **point(v[i])** care returnează punctul P_i ;

Primul rezultat: $v[i] = (P_i; type)$, $n = length(v[i])$;

Fie $i =$ număr natural;

Inițializăm $i=1$;


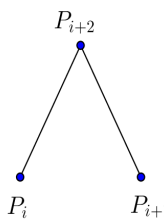
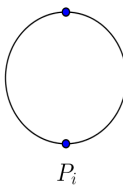
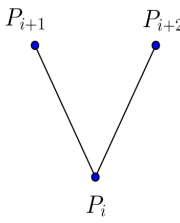
Cât timp $i < n$

dacă `type(v[i])=a`

dacă `ver.type(point(v[i]), point(v[i+1])) este fals`

```

desenăm un element I;
  i=i+1;
altfel desenăm un element II;
  i=i+2;
dacă type(v[i])=bi și type(v[i+1])=bp
  then draw element III;
  i=i+1;
dacă type(v[i])=bpși type(v[i+1])=bi
  atunci desenăm un element I;
  i=i+1;
dacă type(v[i])=b și v[i+1]=c
  dacă ver.type(point(v[i+1]), point(v[i+2])) este fals
  atunci desenăm un element element I;
  i=i+1;
  atunci desenăm un elemnt element IV;
  i=i+2;
    
```

Tipul componentei	I	II	III	IV
Reprezentare				

3.6 Studiu al algoritmilor existenți pentru graful Reeb al unei funcții reale

Rezumatul complexităților algoritmilor existenți, prezentat în secțiune, este preluat după lucrarea noastră [64].

Importanța grafului Reeb a dus la o expansiune a algoritmilor și a cercetărilor în direcția simplificării și sumarizării tehnicilor de calcul. Luând în considerare volumul crescut de date care trebuie procesat, nevoia unei simplificări a crescut proporțional cu complexitatea algoritmilor. Eliminarea dificultății creării unui algoritm eficient este prioritară.

În 2003 H. Carr, J. Snoeyink și U. Axen [27] au propus un algoritm pentru calculul arborilor de contur, folosind tehnica de împărțire și lipire a arborilor. Fiind dat v numărul de vârfuri, e numărul de muchii, n numărul de supernoduri și $f(n)$ inversa funcției Ackerman de creștere lentă, algoritmul are o complexitate de tipul

$$O(v \lg(v) + e + n f(n))$$

O altă metodă utilizată a fost introdusă de T.L. Kunii și Y. Shinagawa în lucrarea [60]. Algoritmul păstrează numărul de triunghiuri care au puncte comune cu mulțimea de nivel reținând în același timp complexitatea în ordinea valorilor funcției. Pentru o varietate 2-dimensională complexitatea este $O(n^2)$ având generalizarea $O(vn)$, unde v reprezintă numărul de vârfuri și n mărimea vârfurilor, muchiilor și a triunghiurilor. Lucrarea [36] oferă o îmbunătățire pentru varietățile 2-dimensionale prin obținerea unei complexități cu ordinul $O(m \ln(v))$. Mai mult, utilizând tehnici complexe de calcul, H. Doraiswamy și V. Natarajan au obținut în lucrarea [40], o complexitate cu ordinul $O(m \lg(m) (\lg(\lg(m)))^3)$.

Lucrarea [76] oferă un algoritm eficient pentru varietăți 3-dimensionale folosind parametrul i_i , numărul de cicluri independente ale grafului, generând astfel un algoritm de complexitate $O(m \lg(m) + i_i m)$.

O abordare nouă și inovativă este dată de J.Cheng în [29] prin eliminarea metodei de parcurgere a arborelui de contur și înlocuirea acesteia cu o surjecție de la varietate la graful Reeb. În final cea mai recentă abordare este dată de M. Hajij și P. Rosen în lucrarea [49] care oferă cel mai bun raport între implementare și memorie utilizată, existent în literatura de specialitate până în prezent.

3.7 Graful Reeb al unei funcții circulare

Definiția 3.7.1 Fie M o varietate netedă n -dimensională și $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funcții netede. Spunem că f și g sunt **topologic echivalente** dacă există un omeomorfismele $h : M \rightarrow M$ și $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât are loc relația:

$$f = k \circ g \circ h^{-1}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 M & \xrightarrow{h^{-1}} & M & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{k} & \mathbb{R} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\
 & & & \xrightarrow{f} & & &
 \end{array}$$

Urmărind lucrarea [17], vom ilustra în continuare notații utile și noțiuni ajutătoare în vederea prezentării teoremei de realizare a grafului Reeb pentru o funcție Morse-Bott circulară simplă pe S^2 .

O subvarietate $N \subset M$ se numește subvarietate **critică nedegenerată** pentru funcția $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dacă orice punct $p \in N$, matricea $(Hf)_p|_N$ este nesingulară. Un punct $p \in M$ se numește **critic** pentru f , dacă rangul aplicației $df(p)$ nu este maxim. O valoare reală b se numește **critică** pentru f dacă $f^{-1}(b)$ conține cel puțin un punct critic al lui f .

O funcție $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **simplă**, dacă există o unică componentă conexă care conține puncte critice la nivelul critic. În plus, o fibră critică se numește **reductibilă**, dacă toate fibrele din vecinătatea sa sunt omeomorfe cu ea.

Definiția 3.7.2 Spunem că o subvarietate netedă $S \subset C(f)$ unde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ este netedă, este subvarietate netedă critică **nedegenerată** dacă:

- i) S este fără bord;
- ii) S este conexă și compactă;
- iii) pentru orice punct $p \in S$, avem $T_p(S) = \ker((Hf)_p)$

Având în vedere cele prezentate mai sus introducem următoarea noțiune, centrală pentru această secțiune:

Definiția 3.7.3 Se numește funcție **Morse-Bott** (pe scurt funcție **MB**), o funcție f pentru care mulțimea critică $C(f)$ conține doar puncte izolate și subvarietăți critice nedegenerate.

Este evident faptul că orice funcție rotundă este o funcție Morse-Bott. Reamintim că o funcție netedă se numește **rotundă** dacă mulțimea sa de puncte critice este formată dintr-o reuniune de cercuri critice nedegenerate.

Propoziția 3.7.1 Mulțimea punctelor critice ale funcției Morse-Bott $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se poate clasifica astfel:

1. cercuri critice, adică puncte care se găsesc într-o subvarietate critică

omemorfă cu S^1 ;

2. puncte critice izolate de extrem (minim sau maxim);
3. puncte șa, adică puncte critice izolate de index 1.

În cele ce urmează vom prezenta noțiuni importante și exemple relevante pentru construcția grafului Reeb Morse-Bott pentru funcții Morse-Bott circulare simple. Având în vedere articolul [17], vom expune problema clasificării funcțiilor Morse-Bott simple de la S^2 la S^1 .

Definiția 3.7.4 Fie M^2 o suprafață orientabilă închisă. Funcția circulară $f : M \rightarrow S^1$ se numește **funcție Morse-Bott circulară** dacă pentru orice punct $x \in M$, există o vecinătate V a lui $f(x)$ și un difeomorfism $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât pentru $U = f^{-1}(V)$, aplicația $\phi \circ (f|_U)$ este o funcție reală Morse-Bott.

Fiind dată o funcție Morse-Bott simplă $f : S^2 \rightarrow S^1$ se desprind următoarele concluzii:

- i) f nu este aplicație regulară;
- ii) subvarietățile critice nedegenerate în număr finit sunt puncte sau sunt omeomorfe cu S^1 .

Astfel mulțimea critică $C(f)$ se împarte în trei mari categorii: cercuri singulare, puncte de extrem sau puncte șa.

Problema clasificării funcțiilor Morse, studiată de Arnold în [14], [15] sau Sharko în [90], [91] (a se vedea și monografia [89]) prin intermediul grafului Reeb se poate extinde, utilizând grafurile Reeb generalizate pentru funcții circulare Morse-Bott simple. Analog definiției 3.1.2 dată pentru funcții cu valori reale, putem pune în evidență structura de graf pentru spațiul cât S^2 / \sim asociat funcției Morse-Bott simplă $f : S^2 \rightarrow S^1$, astfel:

- i) pentru o valoare critică $c \in S^1$, **vârfurile** grafului sunt componentele conexe ale curbilor de nivel de forma $f^{-1}(c)$;
- ii) pentru o valoare regulată $c \in S^1$, **muchiile** grafului sunt componentele conexe asociate curbilor de nivel de forma $f^{-1}(c)$.

O reprezentare similară asociată tipului de componentă conexă din grafurile Reeb pentru funcții reale [63] este expusă în lucrarea [17] având în vedere cele patru tipuri de vârfuri existente.

Definiția 3.7.5 Grafurile definite de spațiul cât S^2 / \sim împreună cu clasificările muchiilor și vârfurilor date mai sus se numește **grafurile Reeb MB** asociat funcției Morse-Bott circulare $f : S^2 \rightarrow S^1$.

Graful Reeb MB al unei funcții simple Morse-Bott $f : S^2 \rightarrow S^1$ este un arbore, deoarece caracteristica Euler-Poincaré a grafului este egală cu 1.

Având în vedere că etichetarea elementelor grafului Reeb este dependentă atât de orientarea aleasă pentru parcurgerea suprafeței cât și de alegerea punctului bază este importantă evidențierea noțiunii de izomorfism între două grafuri Reeb MB. Astfel se numește **izomorfism** între grafurile Reeb asociate funcțiilor $f, g : S^2 \rightarrow S^1$, o aplicație bijectivă între mulțimile vârfurilor celor două grafuri cu condiția ca imaginile a două vârfuri alăturate din graful indus de f să fie adiacente pe graful indus de g .

Schița algoritmului ilustrată mai jos este preluată după lucrarea noastră [64].

3.7.1 Documentație. Descriere algoritm

Pentru o mai bună înțelegere a funcțiilor Morse-Bott circulare și aplicațiile practice ale acestui concept, vom prezenta descrierea unui algoritm de construcție similar cu cel descris în secțiunea 3.5.1. Algoritmul se bazează pe următorii pași:

- 1) identificarea punctelor critice ale funcției circulare definită pe suprafață;
- 2) alegerea orientării de parcurgere a suprafeței;
- 3) aranjarea punctelor critice într-un vector $v[i] = (P_i, type)$;
- 4) identificarea tipului (type) pentru fiecare punct critic:

m = minim; M = maxim cu componenta predefinită de tip I;

s = șa cu componentă predefinită de tip II;

prc = punct regulat cu imagine valoare critică, având componenta corespunzătoare de tip III;

prs = punct regulat cu imagine cerc critic și componenta de tip IV;

Pentru componentele de tip IV, graful Reeb va începe sau se va termina cu simbolul de cerc critic \circ , prin urmare acesta va schimba numerotarea cu următorul punct ce apare prin proiecție radială. Această componentă încorporează de fapt trei puncte de pe graful Reeb, cercul critic și celelalte două pentru marcarea sfârșitului fiecărei ramuri. Cele două puncte duble se vor marca prin $pr s_{aux}$.

3.8 Graful Reeb echipat asociat unei funcții Morse simple pe suprafețe orientate cu frontieră

Studiul punctelor critice ale funcțiilor netede pe varietăți închise și clasificarea acestora reprezintă o temă intens cercetată în topologia diferențială și în alte domenii ale matematicii. În 1934 Morse a găsit o reprezentare canonică a funcțiilor în vecinătatea punctelor critice

nedegenerate sub forma polinoamelor de gradul doi, urmat apoi de alți matematicieni precum Bolsinov și Fomenko [22] care au introdus noțiunea de atom, f -atom și echivalențe de rame prin fibrare. Această secțiune are ca punct central lucrarea [54] dar și referințele [53], [59] și [81].

Fie M, N suprafețe compacte netede și $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, respectiv $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ funcții netede. f și g se numesc **echivalente prin straturi** dacă există un omeomorfism $\lambda : M \rightarrow N$, care duce fiecare componentă conexă din mulțimile de nivel ale lui f în componente conexe din mulțimile de nivel ale lui g , păstrând direcția de creștere a funcțiilor. Prin restricționarea lui f la mulțimea $f^{-1}(c - \epsilon, c + \epsilon)$, unde c este o valoare critică a lui f și $\epsilon > 0$ suficient de mic astfel încât segmentul $[c - \epsilon, c + \epsilon]$ nu mai conține altă valoare critică în afară de c , se obțin clase de echivalență prin straturi numite **atomi** sau **f-atomi**. Dacă în plus λ păstrează orientarea, f și g se numesc **\mathcal{O} -echivalente**, iar clasa de \mathcal{O} -echivalență a perechii $(U, f|_U)$ se numește **\mathcal{O} -atom** pentru suprafața orientată.

Ținând cont de definiția funcțiilor topologic echivalente, introdusă în Secțiunea 3.7.1, spunem că două funcții f și g se numesc **topologic \mathcal{O} -echivalente** dacă omeomorfismul h păstrează orientarea pe suprafața M . Lucrările [55], [80], [81], [90] investighează proprietăți topologice ale grafului Reeb pentru o clasă specială de echivalențe numite m -echivalențe cu o paletă largă de aplicații practice în domenii precum sistemele dinamice.

Definiția 3.8.1 [54] Fie M^2 o suprafață netedă cu frontieră și $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție Morse. f se numește **m -funcție** dacă toate punctele sale critice sunt interioare, restricția f_∂ a funcției f la frontieră, este tot Morse iar fiecare nivel critic a lui f conține exact un punct critic al lui f dar nu conține puncte critice ale lui f_∂ .

Autorii B. Hladysh și A. Prishlyak definesc în lucrarea [54] clasa de funcții $\Omega(M)$ ca fiind funcțiile simple netede $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ pe suprafața cu bord, orientată, netedă, compactă și conexă, ce satisfac următoarele proprietăți:

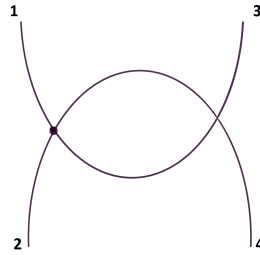
- a) dacă $p_0 \in C(f)$ nu se găsește pe frontiera ∂M , atunci este un punct critic nedegenerat pentru f ;
- b) dacă $p_0 \in C(f)$ se găsește pe frontiera ∂M , atunci este un punct critic nedegenerat atât pentru f cât și pentru restricția $f|_{\partial M}$ a lui f la frontieră;
- c) dacă $p_0 \in C(f|_{\partial M})$ atunci $p_0 \in C(f)$.

Teorema 3.8.1 [54] Pentru o suprafața orientată M^2 , netedă și compactă au loc următoarele afirmații:

- a) pentru o funcție $f \in \Omega(M)$ arbitrară, există $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ o m -funcție, astfel încât f și g sunt topologic echivalente;
- b) pentru $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ o m -funcție arbitrară, există o funcție $f \in \Omega(M)$ astfel încât f și g sunt topologic echivalente.

Componentele liniilor de nivel pentru o funcție $f \in \Omega(M)$ se numesc **straturi**. Aceste straturi se împart în straturi de tip I dacă corespund unei componente omeomorfe cu un segment și de tip II dacă provin din componente omeomorfe cu S^1 . În mod analog muchiile unui graf se clasifică ca fiind de tip I sau II.

Definiția 3.8.2 [54] *Vârfurile de grad 3 și 4 ale unui graf Γ_f incidente după muchii de tip I se numesc vârfuri de tip Y, respectiv tip X. În imaginea de mai jos se observă notația făcută pentru un vârf de tip X.*



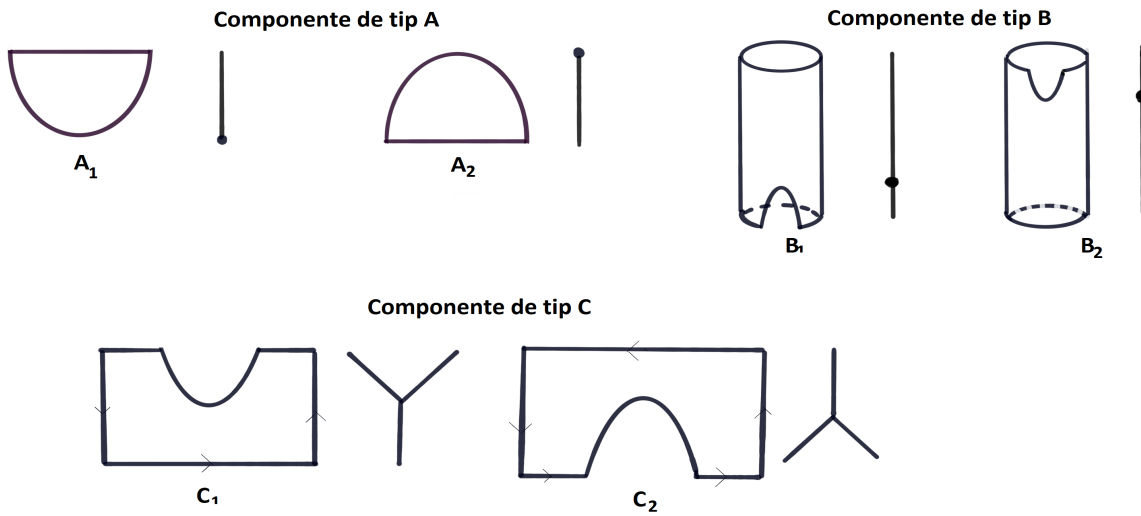
Prin urmare, se numește **graf Reeb echipat** asociat funcției $f \in \Omega(M)$, graful Γ_f înzestrat cu împărțirea pe tipuri a muchiilor, orientare și ordonarea ciclică a vârfurilor de tip Y respectiv X.

Vârfurile v ale grafului γ_f se pot clasifica în funcție gradul lor astfel:

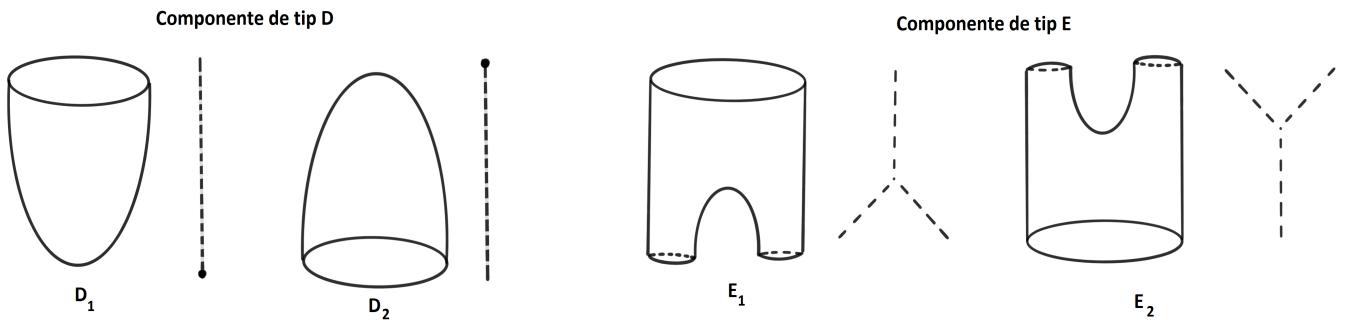
- punct de minim sau maxim dacă $deg(v) = 1$;
- punct șa care aparține frontierei dacă $deg(v) = 2$;
- punct șa (interior sau care aparține frontierei, vârf de tip Y) dacă $deg(v) = 3$;
- punct șa interior (vârf de tip X) dacă $deg(v) = 4$.

Conform articolului [54] există 7 atomi simpli posibili și 13 \mathcal{O} -atomi simpli, iar clasificarea depinde de indexul punctului critic și de apartenența sa la frontiera suprafeței. Vom prezenta în continuare un rezumat al acestor atomi împreună cu graful Reeb echipat corespunzător și felul în care lipirea unei componente influențează invarianții genus (\mathbf{g}), număr de componente conexe ale frontierei ∂ și (\mathbf{c}) numărul de componente conexe ale suprafeței M_t .

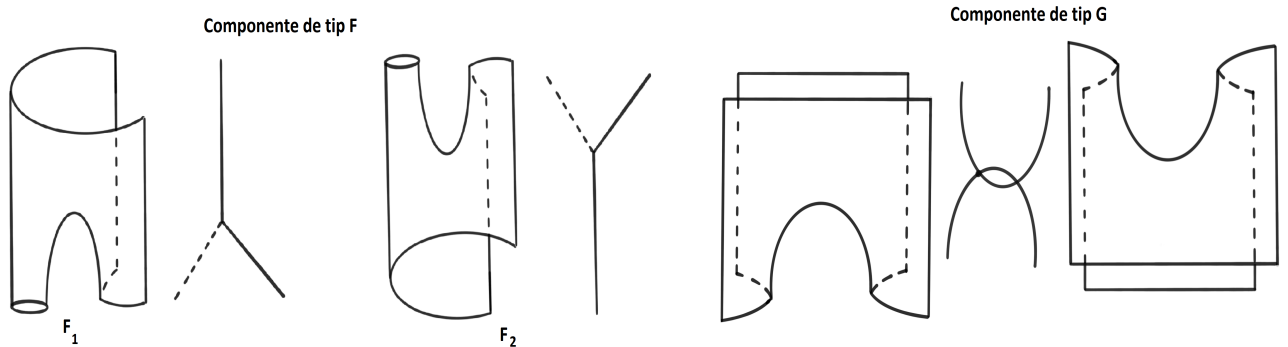
Dacă $p_0 \in \partial M$ avem trei atomi de tip A, B, C cu 6 \mathcal{O} -atomi corespunzători A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 și C_2 cu următoarea reprezentare



Dacă $p_0 \notin \partial M$ și atomii nu intersectează frontiera avem două tipuri de atomi: D, E și 4 \mathcal{O} -atomi D_1, D_2, E_1 și E_2 ilustrați astfel



Dacă $p_0 \notin \partial M$ și atomii intersectează frontiera avem două tipuri de atomi: F, G și 3 \mathcal{O} -atomi F_1, F_2 și $G = G_1 = G_2$ reprezentate astfel



Orientarea atomilor este dată de orientarea planului. În caz contrar se va alege ca fiind în sens trigonometric pentru cercurile sau semicercurile inferioare și invers trigonometric pentru cercurile sau semicercurile superioare.

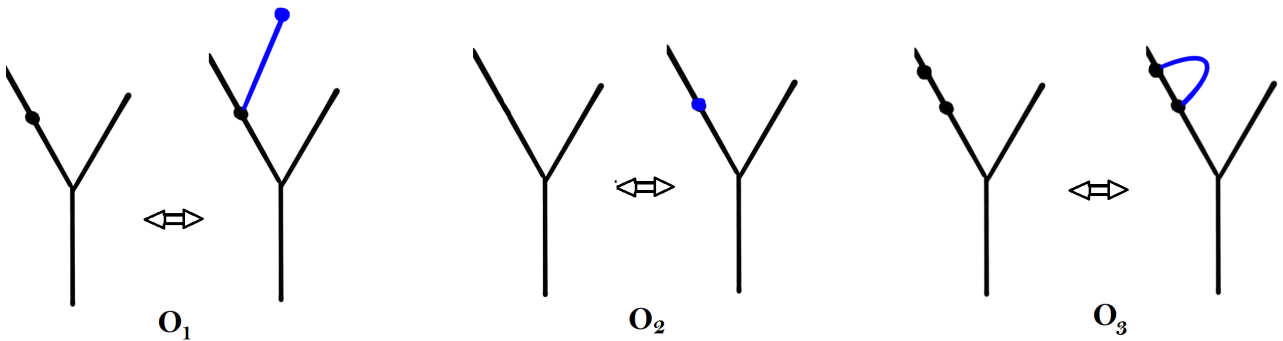
Definiția 3.8.3 Două grafuri Reeb echipate Γ_f și Γ_g asociate funcțiilor f și g se numesc **echivalente** prin izomorfismul $\varphi : \Gamma_f \rightarrow \Gamma_g$ dacă aplicația φ :

- păstrează împărțirea muchiilor;
- păstrează ordinea ciclurilor pe muchii pentru fiecare vârf de tip X și Y ;
- păstrează orientarea muchiilor.

Teorema 3.8.2 [54] Fiind date suprafețele compacte cu frontieră M, N și funcțiile $f \in \Omega(M)$, $g \in \Omega(N)$, spunem că f și g sunt **\mathcal{O} -echivalente** dacă și numai dacă grafele Reeb echipate asociate, Γ_f, Γ_g sunt echivalente. Dacă în plus izomorfismul φ păstrează numerotarea vârfurilor, grafele se numesc **ordonat echivalente**.

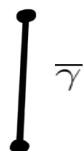
Perechea de numere (i, j) se numește **indexul vârfului** v al unui graf orientat, unde i reprezintă gradul interior și j cel exterior. Autorii lucrării [54] introduc notația $\Gamma_n^{\leq 4}$ pentru grafurile cu n vârfuri și $i + j \leq 4$. Adică grafurile vor avea vârfuri de tipurile $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ și cel puțin câte un vârf din tipurile $(0, 1)$ și $(1, 0)$. Pentru grafurile prezentate mai sus sunt posibile următoarele operații:

- O_1 : operația de adăugare a unui vârf și a vârfului corespunzător acestuia;
- O_2 : împărțirea unei muchii printr-un punct interior care devine un nou vârf;
- O_3 : operația de adăugare a unor noi muchii fără a adăuga noi vârfuri.



Orice operație aplicabilă unui graf $\gamma \in \Gamma_n^{\leq 4}$ este compusă dintr-un șir finit de operații din lista $O_1, O_2, O_2^{-1}, O_1^{-1}$ și O_3^{-1} .

Orice graf $\gamma \in \Gamma_n^{\leq 4}$ se poate obține din grafurile $\bar{\gamma} \in \Gamma_2^{\leq 4}$ (vezi imaginea de mai jos) printr-un număr finit de operații alese din lista prezentată mai sus. Astfel există 57 de m -funcții topologic \mathcal{O} -neechivalente. prezentate pe larg în lucrarea [54].



Bibliografie

- [1] D. Andrica. *Some Remarks Concerning the Morse-Smale Characteristic of a Compact Manifold*. Mathematica, L'Analyse Numerique et la Theorie de l'Aproximation, **21**(1):9–13, 1992.
- [2] D. Andrica. *The Morse-Smale Characteristic of a Simply-Connected Compact Manifold*. Mathematica, L'Analyse Numerique et la Theorie de l'Aproximation, **22**(2):121–124, 1993.
- [3] D. Andrica. *Functions with minimal critical set: new results and open problems*. Mathematical Analysis and Applications, Th.M Rassias, Hadronic Press, pages 1–10, 1999.
- [4] D. Andrica. *Critical point theory and some applications*. Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2005.
- [5] D. Andrica and L. Funar. *On smooth maps with finitely many critical points*. Journal of the London Mathematical Society, II Ser. 69:783–800, 2004.
- [6] D. Andrica and L. Funar. *Addendum: On smooth maps with finitely many critical points*. Journal of the London Mathematical Society, II Ser. 73:231–236, 2006.
- [7] D. Andrica, L. Funar, and E. Kudryavtseva. *The minimal number of critical points of maps between surfaces*. Russian Journal of Mathematical Physics, **16**(3):363–370, 2009.
- [8] D. Andrica, A. Lupescu, and C. Pinteau. *Circular mappings with minimal critical sets*. Studia Universitatis, **59**:523–531, 2014.
- [9] D. Andrica and D. Mangra. *Morse-Smale characteristic in circle-valued Morse Theory*. Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics, ICTAMI, Acta Universitatis Apulensis, **22**:215–200, 2010.

-
- [10] D. Andrica, D. Mangra, and C. Pinte. *Aspects of Global Analysis of Circle-Valued Mappings*. Topics in Mathematical Analysis and Applications, Springer, **94**:79–110, 2014.
- [11] D. Andrica, D. Mangra, and C. Pinte. *The circular Morse-Smale characteristic of closed surfaces*. **57**(105)(3):235–242, 2014.
- [12] D. Andrica and C. Pinte. *Critical points of vector-valued functions*. Proceedings of the 24th conference of geometry and topology, Part II, *Timișoara*, pages 15–24, 1996.
- [13] D. Andrica and C. Pinte. *Some situations when the topological φ -category is infinite*. Proceedings of the 6th international conference. Differential geometry and applications, Masaryk University, pages 239–244, 1996.
- [14] V. Arnold. *Statistics and classification of topologies of periodic functions and trigonometric polynomials*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **12**:15–24, 2006.
- [15] V. Arnold. *Topological classification of Morse functions and generalizations of Hilbert’s 16th problem*. Mathematical Physics Analysis and Geometry, **10**:227–236, 2007.
- [16] T. Banchoff and F. Takens. *Height functions on surfaces with three critical points*. Illinois Journal of Mathematics, **19**:325–335, 1975.
- [17] E. Batista, J. Costa, and I. Meza-Sarmiento. *Topological classification of circle-valued simple Morse-Bott functions*. Journal of Singularities, **17**:388–402, 2018.
- [18] U. Bauer, X. Ge, and Y. Wang. *Measuring distances between Reeb graphs*. arXiv:1307.2839 [cs.CG], 2013.
- [19] U. Bauer, E. Munch, and Y. Wang. *Strong Equivalence of the Interleaving and Functional Distortion Metrics for Reeb Graphs*. 31st International Symposium on Computational Geometry (SoCG), **34**:461–475, 2015.
- [20] I. Bernstein. *On the Lusternik-Schnirelmann category of Grassmannians*. Proc. Camb. Phil. Soc., **79**:129–134, 1976.
- [21] P. Blaga. *Geometrie diferențială. II Varietăți diferențiabile*. Note de curs.

- [22] A. Bolsinov and A. Fomenko. *Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, topology and classification*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2004.
- [23] R. Bott. *Lectures on Morse Theory, old and new*. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, **7**:331–358, 1982.
- [24] G. Bredon. *Topology and Geometry (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2000.
- [25] D. Burghilea. *New Topological Invariants For Real- And Angle-valued Maps: An Alternative To Morse-Novikov Theory*. World Scientific, Singapore, 2017.
- [26] D. Burghilea, T. Hangan, H. Moscovici, and A. Verona. *Introducere în topologia diferențială*. Editura Științifică, București, 1973.
- [27] H. Carr, J. Snoeyink, and U. Axen. *Computing contour trees in all dimensions*. Computational Geometry: Theory and Applications, **24**:75–94, 2003.
- [28] M. Carriere and S. Oudot. Local equivalence and intrinsic metrics between Reeb graphs. *Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, arXiv:1703.02901v1 [cs.CG]*, **77**, 2017.
- [29] J. Cheng. *Lecture 16: Computation of Reeb Graphs*. Ohio State University, <http://web.cse.ohio-state.edu/wang.1016/courses/788/Lecs/lec16-jack.pdf>.
- [30] P. Church. *Factorization of differentiable maps with branch set dimension at most $n-3$* . Trans.Amer.Math.Soc, **115**:370–387, 1965.
- [31] P. Church. *Differentiable maps with small critical set*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **40**:225–231, 1983.
- [32] P. Church and J. Timourian. *Differentiable maps with small critical set or critical image*. Indiana Univ. Math. J., **27**:953–971, 1978.
- [33] G. Cicortaș. *Elemente de teorie Morse și aplicații*. Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008.
- [34] P. Cirilo, J. Filho, and S. Lutz. *Closed and exact differential forms in \mathbb{R}^n* . <https://www.csun.edu/vcmth02i/Forms.pdf>, Sao Paulo, Brazil, 2004.
- [35] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer. *Extending persistence using Poincare and Lefschetz duality*. Found. Comput. Math. , **9**(1):79–103, 2009.

- [36] K. Cole-McLaughlin, H. Edelsbrunner, J. Harer, V. Natarajan, and V. Pascucci. *Loops in Reeb graph of 2-manifolds*. Discrete Comput. Geom., **32**:231–244, 2004.
- [37] I. Coley. *Differential Geometry, Final*. <https://www.math.ucla.edu>, UCLA, Los Angeles, 2014.
- [38] O. Cornea, J. Lupton, J. Oprea, and T. Tanré. *Lusternik-Schnirelmann category*. American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, **103**, 2003.
- [39] M. Dahl. *A brief introduction to Finsler Geometry*. Lecture Notes, url=<http://www.ucl.ac.uk/eucahmf/finsler/finsler.pdf>, 2006.
- [40] H. Doraiswamy and V. Natarajan. *Efficient algorithms for computing Reeb graphs*. Computational Geometry: Theory and applications, **46**:606–616, 2009.
- [41] B. Fabio and C. Landi. *The edit distance for Reeb graph on surfaces*. Discrete Comput. Geom., **55**:423–461, 2016.
- [42] M. Farber. *Exactness of the Novikov inequalities*. Functional Analysis and Its Applications, **19**:40–48, 1985.
- [43] M. Farber. *Topology of Closed One-Forms*, volume **108**. Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, 2003.
- [44] W. G. Faris. *Vector fields and differential forms*. <http://math.arizona.edu>, 2006.
- [45] L. Funar and C. Pinteă. *Manifolds which admit maps with finitely many critical points into spheres of small dimensions*. arXiv:1611.04344, 2016.
- [46] X. Gao, B. Xiao, and D. Tao. *A survey of graph edit distance*. Pattern Anal. Applic., **13**, 2010.
- [47] C. Gavrilă. *Functions with minimal number of critical points*. Ph.D. Thesis, Heidelberg, 2001.
- [48] J. Griffiths, P. and Harris. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley and Sons, Incorporated, New York, 1994.
- [49] M. Hajij and P. Rosen. *An efficient data retrieval parallel Reeb graph algorithm*. arXiv:1810.08310v1, 2018.
- [50] T. Hangan. *Morse function on Grassmann manifolds*. Journal of Differential Geometry 2, **4**:363–367, 1968.

- [51] J. Harris. *Algebraic Geometry: A First Course*. Springer, New York, 1992.
- [52] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [53] B. Hladysh and A. Prishlyak. *Topology of functions with isolate critical points on the boundary of a 2-dimensional manifold*. Symmetry Integrability of Geometrical Methods and Applications, <https://arxiv.org/pdf/1706.05050.pdf>, **13**(50), 2017.
- [54] B. Hladysh and A. Prishlyak. *Simple Morse functions on an oriented surface with boundary*. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, **15**(3):354–368, 2019.
- [55] I. Iurchuk. *Properties of a pseudo-harmonic function on closed domain*. Proceedings Interm. Geom. Center, **7**(4):50–59, 2014.
- [56] I. M. James and W. Singhof. *On the category of fibre bundles, Lie groups, and Frobenius maps*. Higher Homotopy Structures in Topology and Mathematical Physics, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., **227**:177–189, 1999.
- [57] I. Kadyrov, S. Kopysov, and A. Novikov. *Partitioning of Triangulated Multiply Connected Domain into Subdomains without Branching of Inner Boundaries*. Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series, **160**:544–560, 2018.
- [58] M. Kaluba, W. Marzantowicz, and N. Silva. *On representation of the Reeb graph as a sub-complex of manifold*. Topol. Methods Nonlinear Anal., **45**:287–307, 2015.
- [59] A. Kronrod. *On functions of two variables*. Uspehi Matem. Nauk, **5**(1):23–134, 1950.
- [60] T. Kunii and Y. Shinagawa. *Constructing a Reeb graph automatically from the cross section*. IEEE Comp. Graph. App., **11**(5):66–78, 1991.
- [61] S. Lang. *Algebra (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1992.
- [62] H. B. Lawson and M.-L. Michelsohn. *Spin Geometry*. Princeton University Press, 1989.
- [63] A. Lupescu. *Note on an algorithm for computing the Reeb graph*. International Journal of Geometry, **6**:89–94, 2017.
- [64] A. Lupescu. *Remarks on the realization of the Reeb graph*. Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, acceptat (în curs de publicare), 2019.

- [65] A. Lupescu and C. Pinteá. *Note on the minimum number of critical points of real or circular functions*. *Mathematica*, **59**(82):71–75, 2017.
- [66] D. Mangra. *Morse inequalities for circle-valued functions*. *Automation Computers Applied Mathematics*, **19**(1):149–157, 2010.
- [67] D. Mangra. Estimation of the number of critical points of circle-valued mappings. *Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics, ICTAMI*, pages 195–200, 2011.
- [68] W. Massey. *A basic course in algebraic topology*. Springer Verlag, 1991.
- [69] Y. Matsumoto. *An introduction to Morse Theory*, volume **208**. Iwanami Series in Modern Mathematics, 1997.
- [70] Y. Matsumoto and O. Saeki. *Smooth functions on a manifold with given Reeb graph*. *Kyushu J. of Mathematics*, **65**:75–84, 2011.
- [71] L. Michalak. *Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold*. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **52**:749–762, 2018.
- [72] J. Milnor. *Morse Theory*, volume **51**. Princeton University Press, 1963.
- [73] J. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Perseus Books Pub, New York, 1993.
- [74] A. Pajitnov. *Circle-valued Morse Theory*. de Gruyter Studies in Mathematics, Berlin, 2008.
- [75] V. Pascucci, G. Scorzelli, P. Bremer, and A. Mascarenhas. *Robust on-line computation of Reeb graphs: simplicity and speed*. *ACM Trans. Graph*, **36**(3), 2007.
- [76] C. Pinteá. *Differentiable mappings with an infinite number of critical points*. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **128**(11):3435–3444, 2000.
- [77] C. Pinteá. *Some pairs of manifolds with infinite uncountable φ -category*. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **21**:101–113, 2003.
- [78] C. Pinteá. *The size of some critical sets by means of dimension and algebraic φ -category*. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **35**:1–24, 2010.
- [79] A. Polulyakh. *On conjugate pseudo-harmonic functions*. *Proceedings of Institute of Mathematics o NAS of Ukraine 2*, **2**:505–517, 2009.

- [80] A. Prishlyak. *Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface*. Topology Applications, **119**(3):257–267, 2002.
- [81] I. Purdea and I. Pop. *Algebră*. Editura Gil, 2003.
- [82] D. Ranganathan. *A Gentle Introduction to Grassmannians*. <https://pdfs.semanticscholar.org/c7a5/03aa476d317f9020081525b07043afa5135b.pdf>, 2010.
- [83] G. Rassias. *On the Morse-Smale characteristic of a differentiable manifold*. Bulletin of the Australian Mathematical Society, **20**:281–283, 1979.
- [84] G. Rassias. *On the non-degenerated critical points of differentiable functions*. Tamkang Journal of Mathematics, **10**:67–73, 1979.
- [85] G. Reeb. *Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complétement intégrable ou d'une fonction numérique*. C. R. Acad. Sci. Paris 222 , 1946.
- [86] A. Sanfeliu and K. Fu. *A distance measure between attributed relational graphs for pattern recognition*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics., **13**(3):353–363, 1983.
- [87] A. Sard. *The measure of the critical values of differentiable maps*. Bulletin of the American Mathematics Society, **48**(12):883–890, 1942.
- [88] V. Sharko. *Functions on Manifolds. Algebraic and Topological Aspects*, volume **131**. Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 1993.
- [89] V. Sharko. *Smooth and topological equivalence of functions on surfaces*. Ukrain. Math. Journal, **55**(5):832–846, 2003.
- [90] V. Sharko. *About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold*. Methods Funct. Anal. Topology, **12**(4):389–396, 2006.
- [91] W. Singhof. *On the Lusternik-Schnirelmann category of Lie groups*. Mathematische Zeitschrift, **145**:111–116, 1975.
- [92] S. Smale. *On the structure of 5-manifolds*. Annals of Mathematics, **75**(1):38–46, 1962.
- [93] S. Smale. *An infinite dimensional version of Sard's theorem*. American Journal of Mathematics, **87**(4):861–866, 1965.

- [94] E. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1966.
- [95] F. Takens. *The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik-Schnirelmann Category*. **6**:197–244, 1968/69.
- [96] L. Tu. *An introduction to Manifolds*. Springer, New York, 2008.