UNIVERSITATEA “BABEȘ BOLYAI” CLUJ-NAPOCA

Facultatea de Matematică și Informatică

FORMULE RODRIGUES ȘI APLICAȚII

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător științific:
Prof. Univ. Dr. ANDRICA DORIN

Absolvent:
CHENDER OANA-LILIANA
(căs. BROAINA)

CLUJ-NAPOCA

2020

Cuprins

Cuvinte cheie: funcții de matrice, aplicația exponențială, grup Lie, algebră Lie, grupul general liniar real $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, grupul special euclidian $\mathbf{SE}(n)$, grupul special ortogonal $\mathbf{SO}(n)$, formula lui Schwerdtfeger, transformata Cayley, formula Rodrigues.

Introducere

Geometria este un domeniu în care grupurile au fost folosite sistematic, iar studiul grupurilor Lie a fost fondat în 1884 de matematicianul norvegian Sophus Lie. Principalele exemple de grupuri Lie fiind grupurile generale liniare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ și $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$.

Grupurile Lie sunt utilizate în mai multe domenii ale matematicii și fizicii moderne. Au aplicații în inginerie unde sunt utilizate ca spațiu de configurare a sistemului mecanic, dar și în fizică unde sunt folosite ca grupuri de simetrie asociate cu legile de conservare. Multe dintre aceste aplicații se bazează în mod esențial pe utilizarea aplicațiilor exponențiale.

În teoria Lie aplicația exponențială este un instrument esențial, deoarece aceasta realizează legătura între un element din algebra Lie și elementul corespunzător din grupul Lie. Deși existența unei aplicații exponențiale este garantată pentru orice grup Lie, găsirea unei formule pentru aceasta reprezintă o problemă dificilă. Totuși, pentru unele grupuri Lie de dimensiune mică există formule explicite pentru aplicația exponențială, cea mai remarcabilă fiind formula lui Rodrigues pentru exponențiala grupului de rotație $\mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$.

Aplicând teorema Hamilton-Cayley, aplicația exponențială devine un polinom de X, astfel problema determinării unei formule pentru aplicația exponențială, cunoscută sub numele de problema Rodrigues, dată de formula (3.3), se reduce la problema determinării coeficienților $a_0(X), \ldots, a_{n-1}(X)$, numiți coeficienți Rodrigues.

Scopul acestei lucrări este de a generaliza problema și de a prezenta noi metode de a determina coeficienții Rodrigues. Astfel, teza aduce contribuții originale legate de problema Rodrigues pentru funcții de matrice, prezentând noi metode de calcul a coeficienților Rodrigues, care au la bază urma matricei, polinomul de interpolare al lui Hermite, respectiv transformata Cayley.

O metodă nouă de a determina coeficienții Rodrigues este metoda urmei prezentată în Teorema 3.1. Ideea acesteia constă în a reduce formula exponențialei la un sistem liniar, care să aibă necunoscutele chiar coeficienții Rodrigues. Metoda polinomului de interpolare al lui Hermite se bazează pe faptul că problema determinării coeficienților Rodrigues când cunoaștem valorile proprii ale matricii X este echivalentă cu determinarea formei algebrice a polinomului Hermite. Formulele de tip Rodrigues pentru transformata Cayley pentru grupurile $\mathbf{SO}(n)$ și $\mathbf{SE}(n)$ au un capitol dedicat, calculele pentru acestea fiind prezentate doar în dimensiune mică.

Lucrarea *Formule Rodrigues și aplicații* dezvoltă ideile prezentate anterior. Ea este structurată în patru capitole după cum urmează:

Primul capitol, intitulat *Funcţii de matrice* este format din şase secţiuni în care sunt prezentate noţiunile şi rezultatele fundamentale necesare în dezvoltarea capitolelor următoare. Conceptul de funcţie de matrice joacă un rol important în multe domenii ale matematicii având numeroase aplicaţii în ştiinţă şi inginerie, în special în teoria controlului şi teoria ecuaţiilor diferenţiale în care $\exp(tA)$ are un rol important. În prima secţiune, *Definiţii pentru* $f(A)$ este prezentată forma canonică Jordan (subsecţiunea 1.1.1) şi definiţia unei funcţii de matrice folosind forma canonică Jordan (Definiţia 1.3). Aceasta este ilustrată printr-un exemplu. Secţiunea a doua este dedicată funcţiilor polinomiale de matrice, unde este evidenţiat rolul polinomului caracteristic şi a polinomului minimal în rezolvarea diferitelor probleme de teoria matricelor. După ce sunt introduse noţiunile de polinom anulator şi polinom minimal sunt prezentate câteva proprietăţi ale acestora, apoi este introdusă noţiunea de funcţie definită pe spectrul unei matrici. Funcţiile de matrice sunt definite şi folosind interpolarea Hermite (Definiţia 1.6), iar exemplele prezentate au rolul de a aduce clarificări. Definiţia funcţiilor de matrice folosind formula intergrală a lui Cauchy este prezentată în Secţiunea 1.3, iar definiţia unei funcţii de matrice ca serie de puteri este ilustrată în Secţiunea 1.4 şi aceste definiţii fiind însoţite de exemple. Secţiunea 1.5, intitulată *Echivalenţa definiţiilor pentru funcţia de matrice* are rolul de a crea o legătură între aceste definiţii, Teorema 1.6 prezentând echivalenţa definiţiilor pentru funcţia de matrice. În ultima secţiune este prezentată formula lui Schwerdtfeger (1.17) şi o extindere a acesteia, precum şi implementarea în MATHEMATICA a calculului covariantelor Frobenius şi a formulei astfel obţinute. Dintre referinţe utilizate la realizarea acestui capitol menţionăm O.L. Chender (Broaina) [13], G.H. Golub, C.F. Van Loan [22], N.J. Higham [24], R.A. Horn, Ch.R. Johnson [28], [29], [30], P. Lancaster, M. Tismenetsky [35], R.F. Rinehart [58].

Capitolul 2, *Grupurile Lie de matrice. Aplicaţia exponenţială* este structurat în cinci secţiuni în care sunt prezentate rezultate referitoare la grupurile Lie de matrice, aplicaţia exponenţială şi problema surjectivităţii acesteia. În prima secţiune, intitulată *Aplicaţia exponenţială* sunt evidenţiate rezultate cunoscute referitoare la aplicaţia exponenţială pentru matrice pătratice cu elemente reale sau complexe precum şi demonstraţiile acestora(Lema 2.1, Lema 2.2, Lema 2.3, Lema 2.4, Lema 2.5). Secţiunea 2.2 este dedicată grupului general liniar real $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. Sunt prezentate, de asemenea, grupul special liniar $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$, grupul ortogonal $\mathbf{O}(n)$, grupul special ortogonal $\mathbf{SO}(n)$ şi algebrele lor Lie, evidenţiindu-se câteva proprietăţi ale aplicaţiei exponenţiale. În Secţiunea 2.3 este definit grupul special euclidian $\mathbf{SE}(n)$ al aplicaţiilor afine induse de transformările ortogonale, numite şi mişcări rigide, şi algebra Lie corespunzătoare. Grupurile $\mathbf{SE}(2)$ şi $\mathbf{SE}(3)$ joacă un rol fundamental în robotică, dinamică şi în procesul de interpolare a mişcării. În Secţiunea 2.4 sunt prezentate grupul liniar complex $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ şi subgrupul său $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$, grupul unitar $\mathbf{U}(n)$ şi subgrupul său $\mathbf{SU}(n)$ (Definiţia 2.2). Toate acestea sunt grupuri Lie, există algebrele Lie corespunzătoare şi aplicaţia exponenţială este bine definită pe acestea. Ultima secţiune este dedicată problemei surjectivităţii aplicaţiei exponenţiale, care este studiată pentru grupurile prezentate în secțiunile anterioare. Teorema 2.1, Teorema 2.2 și Teorema 2.3 ilustrează problema determinării imaginii aplicației exponențiale pentru grupurile Lie. Grupurile $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}), n \geq 2$ și $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R}), n \geq 2$ nu sunt exponențiale. În Teoremele 2.4, 2.6, 2.7 sunt prezentate și demonstrate rezultatele referitoare la surjectivitatea aplicației exponențiale. Dintre referințele utilizate în elaborarea acestui capitol menționăm D. Andrica și L. Mare [5], D. Andrica, R.-A. Rohan [6], H.L. Lai [34], L. Mare [38], S. Mondal [42], M. Moskowitz, M. Wüstner [43], M. Nishikawa [44], [45], [46], [47], [48], [49], S. Rădulescu, D. Andrica [57], M. Wüstner [65], [66], [67].

Capitolul 3 este intitulat sugestiv *Formule Rodrigues pentru funcții de matrice. Metode de determinare a coeficienților Rodrigues.* Acest capitol este structurat în șase secțiuni. În prima secțiune este introdusă problema Rodrigues pentru funcții de matrice și sunt prezentați coeficienții Rodrigues, precum și o proprietate importantă a acestora: invarianța lor în raport cu operația de conjugare a matricelor. În Secțiunea a doua, *Metoda urmei în determinarea coeficienților Rodrigues* este prezentată o nouă metodă de a determina coeficienții Rodrigues, rezultat care are la bază lucrarea D. Andrica, R.-A. Rohan [7]. În Teorema 3.1 prezentăm, în cazul în care valorile proprii ale matricii sunt două câte două distincte, o metodă directă de a determina coeficienții Rodrigues generali pentru o funcție de matrice reducând problema Rodrigues la sistemul (3.7). Apoi, Teorema 3.2 ne dă formulele explicite în termeni de polinoame simetrice fundamentale ale valorilor proprii ale matricii. Aceste formule ne permit să considerăm și cazurile degenerate (situațiile în care valorile proprii au multiplicități) și să obținem formule frumoase pentru coeficienți. Secțiunea 3.3 ilustrează cazurile particulare $n = 2, 3, 4$ pentru care calculele sunt prezentate efectiv, iar formulele sunt prezentate în forma restrânsă. În secțiunea 3.4 sunt prezentate posibilele cazuri degenerate. Secțiunile 3.5 și 3.6 sunt dedicate metodei polinomului de interpolare al lui Hermite și cazului special al aplicației exponențiale pentru grupul special ortogonal. Grupul special ortogonal $\mathbf{SO}(n)$ are aplicații importante în mecanică, matricele din acest grup fiind numite și matrice de rotație. După prezentarea cazurilor clasice $n = 2, 3$, s-a calculat formula Rodrigues în cazurile $n = 4$ și $n = 5$, lunându-se în considerare toate situațiile posibile în fiecare caz. În realizarea calculelor a fost utilizat programul MATHEMATICA. Referința principală utilizată în acest capitol este lucrarea D. Andrica, O.L. Chender (Broaina) [4]. Alte referințe sunt D. Andrica, I.N. Casu [2], D. Andrica, R.-A. Rohan [7], T. Bröcker, T. tom Dieck [12], C. Chevalley [14], O. Furdui [17], J. Gallier, D. Xu [19], S. Kida, E. Trimandalawati, S. Ogawa [31], M.-J. Kim, M.-S. Kim, A. Shin [32], [33], B. Jütler [36], [37], J.E. Marsden și T.S. Raţiu [41], F.C. Park, B. Ravani [51], [52], L.I. Piscoran [53], V. Pop, O. Furdui [55], E.J. Putzer [56], R.-A. Rohan [59], F. Warner [62], R. Vein, P. Dale [63], M. Wüstner [64].

În capitol 4, *Transformata Cayley și formule de tip Rodrigues* prezentăm în prima secțiune transformata Cayley a grupului $\mathbf{SO}(n)$ și arătăm că această aplicație este bine definită. Teorema 4.1 ne spune că aplicația Cayley este bijectivă și este prezentată și inversa ei. În Secțiunea 4.2 definim, prin analogie, un tip de transformată Cayley pentru grupul special euclidian $\mathbf{SE}(n)$ și prezentăm legătura dintre cele două transformate Cayley. Secțiunea 4.3 este dedicată generalizării acestei noțiuni și sunt prezentate câteva proprietăți ale acesteia. Formule de tip Rodrigues pentru transformata Cayley sunt determinate în Secțiunea 4.4. Pentru grupul $\mathbf{SO}(n)$ sunt calculate aceste formule pentru cazurile particulare $n = 2, 3, 4$, iar în cazul grupului $\mathbf{SE}(n)$ sunt tratate cazurile $n = 2$ și $n = 3$. Prezentarea urmărește lucrarea noastră [3]. Dintre referințele utilizate în elaborarea acestui capitol menționăm R.-A. Rohan [60].

Lucrarea de față nu epuizează subiectul. Ea aduce un aport în domeniu și deschide noi orizonturi spre cunoaștere.

În elaborarea acestei lucrări m-am bucurat de sprjinul și colaborarea acordate de specialiști cu calități excepționale atât profesionale, cât și umane, cărora doresc să le mulțumesc.

Doresc să-i mulțumesc conducătorului de doctorat, domnului Prof. Univ. Dr. Andrica Dorin pentru răbdarea cu care m-a îndrumat și m-a sprijinit pe parcursul anilor de studii doctorale și să-mi exprim recunoștința și respectul pentru recomandările și indicațiile de care am avut parte în scopul elaborarării acestei lucrări.

Sincere mulțumiri comisiei de îndrumare formată din Conf. Univ. Dr. Blaga Paul, Conf. Univ. Dr. Pintea Cornel și Lect. Univ. Dr. Văcărețu Daniel.

Mulțumiri speciale membrilor din comisia de susținere publică a tezei pentru sugestiile de îmbunătățire.

În final, doresc să mulțumesc familiei mele pentru sprijinul acordat, pentru încredere și pentru că a acceptat toate sacrificiile impuse de implicarea mea în activitățile legate de pregătirea și elaborarea acestei lucrări.

Capitolul 1

Funcții de matrice

Conceptul de funcție de matrice joacă un rol important în multe domenii ale matematicii având numeroase aplicații în știință și inginerie, în special în teoria controlului și teoria ecuațiilor diferențiale în care $\exp(tA)$ are un rol important. Un exemplu este dat de *rezonanța magnetică nucleară* descrisă prin ecuațiile lui Solomon

$$dM/dt = -RM, M(0) = I,$$

unde $M(t)$ este matricea intensităților și R este matricea relaxării simetrice.

Fiind dată o funcție scalară $f : D \to \mathbb{R}$ definim matricea $f(A) \in M_n(\mathbb{C})$, înlocuind formal x cu A. De exemplu, pentru $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x \neq 1$, avem $f(A) = (A+I)(A-I)^{-1}$ dacă $1 \notin \sigma(A)$, unde cu $\sigma(A)$ este notată mulțimea valorilor proprii ale lui A, adică *spectrul* lui A.

În mod analog funcțiile scalare definite de o serie de puteri generează funcții de matrice. Dacă

$$f(x) = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

atunci

$$f(A) = \log(1+A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \frac{A^4}{4} + \dots.$$

Se poate arăta că această serie converge dacă și numai dacă $\rho(A) < 1$, unde $\rho(A)$ este raza spectrală a matricei A.

Numeroase serii de puteri au raza de convergență infinită. De exemplu avem

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

și aceasta generează funcția de matrice

$$\cos A = I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \dots$$

Din nou se poate arăta că aceasta are sens pentru orice matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Această abordare directă de a defini o funcție de matrice este suficientă pentru o gamă largă de funcții, dar nu furnizează o definiție generală. De asemenea, nu oferă neapărat un mod corect de a evalua numeric matricea $f(A)$. În acest capitol vom considera definiții alternative pentru noțiunea de funcții de matrice.

În cele șase secțiuni sunt prezentate noțiunile și rezultatele fundamentale necesare în dezvoltarea capitolelor următoare. În prima secțiune este prezentată forma canonică Jordan (subsecțiunea 1.1.1) și definiția unei funcții de matrice folosind forma canonică Jordan (Definiția 1.3). Secțiunea a doua este dedicată funcțiilor polinomiale de matrice, unde este evidențiat rolul polinomului caracteristic și a polinomului minimal în rezolvarea diferitelor probleme de teoria matricelor și sunt definite funcțiile de matrice folosind interpolarea Hermite (Definiția 1.6). Definiția funcțiilor de matrice folosind formula intergrală a lui Cauchy este prezentată în Secțiunea 1.3, iar definiția unei funcții de matrice ca serie de puteri este ilustrată în Secțiunea 1.4. Toate aceste definiții sunt însoțite de exemple. Secțiunea 1.5 are rolul de a crea o legătură între aceste definiții, Teorema 1.6 prezentând echivalența definițiilor pentru funcția de matrice. În ultima secțiune este prezentată formula lui Schwerdtfeger (1.17) și o extindere a acesteia, precum și implementarea în MATHEMATICA a calculului covariantelor Frobenius și a formulei astfel obținute. Dintre referințe utilizate la realizarea acestui capitol menționăm O.L. Chender (Broaina) [13], G.H. Golub, C.F. Van Loan [22], N.J. Higham [24], R.A. Horn, Ch.R. Johnson [28], [29], [30], P. Lancaster, M. Tismenetsky [35], R.F. Rinehart [58].

1.1 Definiții pentru $f(A)$

O funcție de matrice poate fi definită în diferite moduri, următoarele trei fiind cele mai utile pentru dezvoltările din această lucrare.

1.1.1 Forma canonică Jordan

Multe probleme care implică o matrice A pot fi ușor rezolvate dacă matricea este diagonalizabilă. Dar nu orice matrice pătratică este diagonalizabilă peste $\mathbb{C}$ sau peste $\mathbb{R}$. Totuși, folosind transformările de similaritate orice matrice pătratică poate fi adusă la o matrice care este "aproape diagonală", într-un anumit sens. Această matrice aproape diagonală este cunoscută ca *forma canonică Jordan* și este importantă atât din punct de vedere teoretic, cât și pentru aplicațiile practice.

Definiția 1.1. *Matricea*

$$J_k(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) \tag{1.1}$$

este numită bloc Jordan de dimensiune n_k cu valoarea proprie λ_k. Scalarul λ_k apare de n_k ori pe diagonala principală și $+1$ apare de $(n_k - 1)$ ori pe superdiagonală. Toate celelalte elemente sunt 0.

Definiția 1.2. *Un vector x diferit de zero este numit* ***vector propriu generalizat*** *de rang k al lui A asociat cu valoarea proprie λ dacă avem*

$$(A - \lambda I_n)^k x = O_n \text{ și } (A - \lambda I_n)^{k-1} x \neq O_n.$$

1.1.2 Definiția unei funcții de matrice folosind forma canonică Jordan

Definiția 1.3. *Fie f definită pe o vecinătate a spectrului lui $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dacă A are forma canonică Jordan J, atunci*

$$f(A) = Xf(J)X^{-1} = X\mathrm{diag}(f(J_k(\lambda_k)))X^{-1} \tag{1.2}$$

unde

$$f(J_k) = f(J_k(\lambda_k)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \dots & \frac{f^{(n_k-1)}(\lambda_k)}{(n_k-1)!} \\ & f(\lambda_k) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_k) \\ & & & f(\lambda_k) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Membrul drept al relației (1.2) este independent de alegerea lui X și J.

1.2 Funcții polinomiale de matrice

Două polinoame importante sunt asociate cu o matrice pătratică: polinomul caracteristic și polinomul minimal. Aceste polinoame joacă un rol deosebit în rezolvarea diferitelor probleme de teoria matricelor.

Definiția 1.4. *Un polinom ψ este numit* ***polinom anulator*** *al matricei pătratice $A \in M_n(\mathbb{C})$ dacă*

$$\psi(A) = O_n. \tag{1.4}$$

Un polinom anulator ψ_A care este monic și de grad minim este numit ***polinomul minimal*** *al lui A.*

Polinomul minimal este unic. Din teorema Hamilton-Cayley, polinomul caracteristic p_A este un polinom anulator al lui A, dar acesta nu este în general polinomul minimal al lui A.

Au loc următoarele proprietăți simple pe care le prezentăm fără demonstrație.

Lema 1.1. *Orice polinom anulator al unei matrice este divizibil cu polinomul minimal.*

Lema 1.2. *Polinomul minimal al blocului Jordan de ordin m cu valoarea proprie λ este $(t-\lambda)^m$.*

Lema 1.3. *Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ și $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ valorile proprii distincte ale lui A. Atunci polinomul minimal al lui A este*

$$\psi(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{n_i} \tag{1.5}$$

unde n_i este dimensiunea celui mai mare bloc Jordan în care apare λ_i.

Teorema 1.1. *[28, p. 86, Theorem 2.4.2] Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice pătratică și $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ polinomul ei caracteristic. Atunci $p_A(A) = O_n$.*

Orice polinom p cu coeficienți complecși,

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{m-1} t^{m-1} + a_m t^m, a_m \neq 0 \tag{1.6}$$

determină un polinom de matrice prin simpla înlocuire a lui t cu A în (1.6)

$$p(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \ldots + a_0 I_n \tag{1.7}$$

Mai general, pentru o funcție f definită pe un disc deschis care conține spectrul lui A, putem defini funcția de matrice $f(A)$ prin următoarea teoremă.

Teorema 1.2. *[22, p. 565, Theorem 11.2.3] Dacă f este definită prin*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$

pe un disc deschis ce conține $\sigma(A)$, atunci

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i.$$

Definiția 1.5. *Valorile $f^{(j)}(\lambda_i), i = 1, \ldots, s, j = 0, \ldots, n_i - 1$ sunt numite valorile funcției f și a derivatelor sale pe spectrul lui A. Dacă aceste valori există spunem că f este **definită pe spectrul lui** A.*

Observăm că polinomul minimal ψ_A ia valoarea zero pe spectrul lui A.

Teorema 1.3. *[24, p. 5, Theorem 1.3] Pentru polinoamele p și q și $A \in M_n(\mathbb{C})$ avem $p(A) = q(A)$ dacă și numai dacă p și q iau aceleași valori pe spectrul lui A.*

1.2.1 Funcții de matrice definite folosind interpolarea Hermite

Definiția 1.6. *Fie f definită pe spectrul lui $A \in M_n(\mathbb{C})$. Atunci $f(A) = r(A)$, unde r este polinomul de interpolare Hermite care satisface condițiile de interpolare*

$$r^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_j), i = 1, \ldots, s, j = 0, \ldots, n_i - 1,$$

unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sunt valorile proprii distincte ale lui A cu multiplicitățile $n_1, \ldots n_s$.

Observăm că polinomul r depinde de A datorită valorilor funcției f pe spectrul lui A.

Vom menționa acum două proprietăți importante ale funcțiilor de matrice discutate în [35, p. 310, Theorem 1, Theorem 2].

Lema 1.4. *[35, p. 310, Theorem 2] Dacă $A, B, X \in M_n(\mathbb{C})$, unde $B = XAX^{-1}$ și f este definită pe spectrul lui A, atunci*

$$f(B) = Xf(A)X^{-1}. \tag{1.8}$$

Lema 1.5. *[35, p. 310, Theorem 1] Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ este o matrice în blocuri pe diagonală*

$$A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$$

unde $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sunt matrice pătratice, atunci

$$f(A) = \operatorname{diag}(f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_s)). \tag{1.9}$$

1.3 Funcții de matrice definite folosind formula integrală a lui Cauchy

Formula integrală a lui Cauchy este un rezultat elegant din analiza complexă care afirmă că în anumite condiții, valoarea unei funcții poate fi determinată cu ajutorul unei integrale. Fiind dată o funcție $f(z)$ putem determina valoarea $f(a)$ prin

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a} dz, \tag{1.10}$$

unde Γ este o curbă simplă închisă în jurul lui a și f este analitică pe și în interiorul lui Γ. Această formulă se extinde pentru cazul matricelor.

Definiția 1.7. *Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domeniu și $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funcție analitică. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalizabilă astfel încât toate valorile proprii ale lui A se află în Ω. Definim $f(A) \in M_n(\mathbb{R})$ prin*

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(zI_n - A)^{-1} dz, \tag{1.11}$$

unde $(zI_n - A)^{-1}$ este rezolventa lui A în z și $\Gamma \subset \Omega$ este o curbă simplă închisă în jurul spectrului $\sigma(A)$, orientată în sens invers trigonometric.

Calculul integralelor în $f(A)$ este greu de evaluat în special pentru $n \geq 3$.

Teorema 1.4. *[30, p. 427, Theorem 6.2.28] Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice diagonalizabilă și f o funcție analitică pe un domeniu care conține valorile proprii ale lui A. Atunci*

$$f(A) = Xf(\Lambda)X^{-1},$$

unde $A = X\Lambda X^{-1}$, cu $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ și f este definită de formula integrală a lui Cauchy.

În conluzie teorema de mai sus spune că $f(A)$ este similară cu matricea $f(\Lambda)$.

1.4 Funcții de matrice definite ca serii de puteri

Următorul rezultat ne perimte să definim $f(A)$ dacă f are o dezvoltare în serie de puteri.

Teorema 1.5. *[22, p. 565, Theorem 11.2.3] Dacă funcția f este dată de*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

pe un disc deschis care conține valorile proprii ale lui A, atunci

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k.$$

1.5 Echivalența definițiilor pentru funcția de matrice

Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ și f este o funcție analitică pe un domeniu care conține spectrul lui A, am văzut că sunt trei moduri de a defini matricea $f(A)$.

R.F. Rinehart [58] a arătat că cele trei definiții sunt echivalente.

Teorema 1.6. *Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Fie f o funcție analitică definită pe un domeniu care conține spectrul lui A. Notăm cu*

1. *$f_J(A)$ matricea $f(A)$ obținută folosind definiția cu forma canonică Jordan;*
2. *$f_H(A)$ matricea $f(A)$ obținută folosind definiția cu polinomul de interpolare al lui Hermite;*
3. *$f_C(A)$ matricea $f(A)$ obținută folosind definiția cu formula integrală a lui Cauchy.*

Atunci

$$f_J(A) = f_H(A) = f_C(A). \tag{1.12}$$

Pentru a demonstra această teoremă avem nevoie de câteva rezultate preliminare. Mai întâi vom considera valoarea lui f pe o matrice diagonală.

Lema 1.6. *[30, p. 385] Fie $A \in M_n(\mathbb{C}) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ și f o funcție analitică definită pe un domeniu care conține spectrul lui A. Atunci*

$$f_C(A) = f_H(A) = f_J(A) = \mathrm{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)). \tag{1.13}$$

Apoi se arătă că cele trei definiții interacționează cu similaritățile în același mod.

Lema 1.7. *[30, p. 412, Theorem 6.2.9(c)] Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ și f o funcție analitică definită pe un domeniu care conține spectrul lui A. Atunci au loc relațiile*

$$f_J(XAX^{-1}) = Xf_J(A)X^{-1} \tag{1.14}$$

$$f_H(XAX^{-1}) = Xf_H(A)X^{-1} \tag{1.15}$$

$$f_C(XAX^{-1}) = Xf_C(A)X^{-1} \tag{1.16}$$

pentru orice matrice nesingulară $X \in M_n(\mathbb{C})$.

Putem generaliza ideea pentru a evalua funcțiile de matrice folosind relația $f(XAX^{-1}) = Xf(A)X^{-1}$. Se demonstrează apoi că $f_J(A) = f_H(A) = f_C(A)$ când A este diagonalizabilă [30, p. 407].

Lema 1.8. *[30, p. 408] Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ și $\epsilon > 0$. Atunci există o matrice $A_\epsilon \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât*

$$\|A_\epsilon - A\| \leq \epsilon,$$

unde A_ϵ are valorile proprii distincte și prin urmare este diagonalizabilă.

Se stabilesc proprietățile de continuitate ale lui f_H și f_C, pentu a arăta că $f_H(A) = f_C(A)$ în cazul nediagonalizabil.

Lema 1.9. *[30, p. 396, Theorem 6.1.28] [30, p. 427, Theorem 6.2.28] Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ și f o funcție analitică definită pe un domeniu care conține spectrul lui A. Atunci funcțiile de matrice f_H și f_C sunt continue în A.*

1.6 Formula lui Schwerdtfeger și o extindere a ei

În ultimii ani, a existat un număr considerabil de cercetări în ceea ce privește funcțiile de matrice. Un motiv este dat de faptul că utilizarea acestora oferă soluții explicite pentru sistemele liniare de ecuații diferențiale. De exemplu, soluția ecuației $y' = Ay$ cu $y(0) = x$ este dată de $y(t) = \exp(tA)$, unde $\exp(tA)$ este exponențiala matricei tA definită în

Secțiunea 1.4. Analog, am dori să găsim o formulă explicită pentru $\cos(tA), \sin(tA)$, și în general pentru $f(tA)$. Schwerdtfeger a arătat că pentru orice funcție olomorfă f și pentru orice matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ are loc formula (1.17), unde μ reprezintă numărul de valori proprii distincte λ_j ale lui A, r_j este multiplicitatea lui λ_j și A_j sunt covariantele Frobenius ale lui A. Aici Γ_j este o curbă netedă simplă închisă în jurul numărului complex λ_j. În această secțiune vom folosi formula (1.17) pentru a obține formula 1.19 și pentru a studia câteva funcții de matrice.

Urmărim rezultatele și prezentarea din lucrarea noastră [13].

Funcția f definită pe mulțimea numerelor reale pozitive $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, astfel încât f este integrabilă pe $[0, T]$ pentru orice $T > 0$, și există constantele $\alpha \in \mathbb{R}$ și $M > 0$ astfel încât

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \text{ pentru orice } t \geq 0$$

se numește **mărginită superior**.

În 1961, Schwerdtfeger (vezi [29]) a arătat că pentru orice funcție f olomorfă și pentru orice matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ are loc relația

$$f(A) = \sum_{j=1}^{\mu} A_j \sum_{k=0}^{r_j - 1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda_j)(A - \lambda_j I_n)^k, \tag{1.17}$$

unde μ reprezintă numărul de valori proprii distincte λ_j ale lui A, r_j este multiplicitatea lui λ_j și

$$A_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} (sI_n - A)^{-1} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \mathfrak{L}[e^{tA}](s) ds \tag{1.18}$$

sunt covariantele Frobenius ale lui A. Aici Γ_j este o curbă netedă simplă închisă numai în jurul lui λ_j și $\mathfrak{L}$ notează transformata Laplace.

Pentru a calcula covariantele Frobenius se folosește inversa generalizată Penrose a unei matrice.

Teorema 1.7. *(Inversa generalizată Penrose) Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$, atunci există o matrice unică $X \in M_n(\mathbb{C})$ care satisface următoarele relații:*

(i) $AXA = A$;

(ii) $XAX = X$;

(iii) $(AX)^* = AX$;

(iv) $(XA)^* = XA$,

unde B^* este conjugata transpusei lui B.

Matricea X este numită **inversa generalizată** a lui A, și este notată cu $A^\dagger$.

Teorema 1.8. *(Penrose) Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ și $\lambda_j \in \sigma(A)$, atunci*

$$A_j = (F_{\lambda_j} E_{\lambda_j})^\dagger,$$

unde $E_{\lambda_j} = (I_n - (A - \lambda_j I_n)^{r_j})^\dagger (A - \lambda_j I_n)^{r_j}$ și $F_{\lambda_j} = (I_n - (A - \lambda_j I_n)^{r_j})((A - \lambda_j I_n)^{r_j})^\dagger$.

Prezentăm acum extinderea formulei lui Schwerdtfeger preluată după lucrarea noastră [13].

Teorema 1.9. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă, unde D este o mulțime deschisă și conexă. Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $\sigma(A) \subset D$ și $t \in \mathbb{R}^*$, atunci*

$$f(tA) = \sum_{j=1}^{\mu} A_j \sum_{k=0}^{r_j-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t\lambda_j) t^k (A - \lambda_j I_n)^k, \tag{1.19}$$

unde cu μ am notat numărul de valori proprii distincte λ_j ale lui A, r_j este multiplicitatea lui λ_j, și

$$A_j := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} (sI_n - A)^{-1} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \mathfrak{L}[e^{tA}](s) ds \tag{1.20}$$

sunt covariantele Frobenius ale lui A. Aici Γ_j este o curbă netedă simplă închisă numai în jurul lui λ_j.

Demonstrație. Aplicând formula (1.17) pentru matricea tA avem

$$f(tA) = \sum_{j=1}^{n} (tA)_j \sum_{k=0}^{r_j-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t\lambda_j)(tA - t\lambda_j I_n)^k = \sum_{j=1}^{\mu} A_j \sum_{k=0}^{r_j-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t\lambda_j) t^k (A - \lambda_j I_n)^k,$$

unde am folosit proprietatea $\sigma(tA) = t\sigma(A)$ și Teorema 1.8. □

1.6.1 Implementarea în MATHEMATICA

În primul cod este prezentată implementarea în MATHEMATICA a covariantelor Frobenius pentru o matrice dată A definite prin formula (1.18) pentru o valoare proprie $\lambda_j \in \sigma(A)$ dată.

Al doilea cod ne arată implemantarea în MATHEMATICA a formulei (1.19).

Observăm că linia 21 din cod poate fi modificată pentru a utiliza diferite funcții olomorfe.

Capitolul 2

Grupurile Lie de matrice. Aplicația exponențială

Acest capitol este structurat în cinci secțiuni în care sunt prezentate rezultate referitoare la grupurile Lie de matrice, aplicația exponențială și problema surjectivității acesteia. În prima secțiune sunt evidențiate rezultate cunoscute referitoare la aplicația exponențială pentru matrice pătratice cu elemente reale sau complexe (Lema 2.1, Lema 2.2, Lema 2.3, Lema 2.4, Lema 2.5). Secțiunea 2.2 este dedicată grupului general liniar real $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. Sunt prezentate, de asemenea, grupul special liniar $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$, grupul ortogonal $\mathbf{O}(n)$, grupul special ortogonal $\mathbf{SO}(n)$ și algebrele lor Lie, evidențiindu-se câteva proprietăți ale aplicației exponențiale. În Secțiunea 2.3 este definit grupul special euclidian $\mathbf{SE}(n)$ al aplicațiilor afine induse de transformările ortogonale, numite și mișcări rigide, și algebra Lie corespunzătoare. În Secțiunea 2.4 sunt prezentate grupul liniar complex $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ și subgrupul său $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$, grupul unitar $\mathbf{U}(n)$ și subgrupul său $\mathbf{SU}(n)$ (Definiția 2.2). Ultima secțiune este dedicată problemei surjectivității aplicației exponențiale, care este studiată pentru grupurile prezentate în secțiunile anterioare. Teorema 2.1, Teorema 2.2 și Teorema 2.3 ilustrează problema determinării imaginii aplicației exponențiale pentru grupurile Lie, iar în Teoremele 2.4, 2.6, 2.7 sunt prezentate și demonstrate rezultatele referitoare la surjectivitatea aplicației exponențiale. Dintre referințele utilizate în elaborarea acestui capitol menționăm D. Andrica și L. Mare [5], D. Andrica, R.-A. Rohan [6], H.L. Lai [34], L. Mare [38], S. Mondal [42], M. Moskowitz, M. Wüstner [43], M. Nishikawa [44], [45], [46], [47], [48], [49], S. Rădulescu, D. Andrica [57], M. Wüstner [65], [66], [67].

2.1 Aplicația exponențială

Fiind dată o matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ unde $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$, definim exponențiala lui A, notată cu e^A, sau $\exp A$, ca fiind matricea definită prin seria formală

$$e^A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^p,$$

considerând $A^0 = I_n$. Următoarea lemă arată că seria din definiția de mai sus este absolut convergentă.

Lema 2.1. *Pentru $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ unde $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$, definim numărul $\mu = \max\left\{\left|a_{ij}^{(p)}\right| : 1 \leq i, j \leq n\right\}$, unde $A^p = \left(a_{ij}^{(p)}\right)$. Atunci au loc inegalitățile $\left|a_{ij}^{(p)}\right| \leq (n\mu)^p$ pentru orice $1 \leq i, j \leq n$. Ca o consecință, pentru orice indici i, j, cu $1 \leq i, j \leq n$, seria $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(p)}}{p!}$ este absolut convergentă și prin urmare exponențiala matricei A este bine-definită.*

Cu o demonstrație asemănătoare celei din Lema 2.1 obținem următorul rezultat: Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$, seria $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} A^p$, unde $t \in \mathbb{R}$, converge uniform pe orice interval compact. Mai mult, funcția $t \mapsto e^{tA}$ este diferențiabilă și are loc relația

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}.$$

O proprietate fundamentală a aplicației exponențiale arată că dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei A, atunci valorile proprii ale exponențialei e^A sunt $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$. Pentru a demonstra această proprietate avem nevoie de următoarele două rezultate ajutătoare.

Lema 2.2. *Fie $A, U \in M_n(K)$ unde $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$. Presupunem că matricea U este inversabilă. Atunci are loc relația*

$$e^{UAU^{-1}} = U e^A U^{-1}.$$

Lema 2.3. *Fiind dată o matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, există o matrice inversabilă P și o matrice superior triunghiulară T astfel încât*

$$A = PT^{-1}P.$$

Observația 2.1. Dacă E este un spațiu hermitian, demonstrația Lemei 2.3 poate fi ușor adaptată pentru a dovedi că există o bază ortonormată $\{u_1, \ldots, u_n\}$ față de care matricea aplicației f este superior triunghiulară. Cu alte cuvinte, există o matrice *unitară* U și o matrice superior triunghiulară T astfel încât $A = UTU^{-1}$, rezultat cunoscut sub numele de *Lema lui Schur*. Utilizând acest rezultat putem ajunge imediat la faptul că dacă A este o matrice hermitiană, atunci există o matrice unitară U și o matrice diagonală D cu elemente reale astfel încât $A = UDU^*$.

Lema 2.4. *Fie matricea pătratică $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale acesteia, atunci $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ sunt valorile proprii ale matricei e^A. Mai mult, dacă u*

este un vector propriu al matricei A corespunzător lui λ_i, atunci u este vector propriu al matricei e^A pentru valoarea proprie e^{λ_i}. Ca și o consecință imediată arătăm că are loc relația

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)},$$

unde $\mathrm{tr}(A)$ este urma matricei A, adică suma $a_{11} + \cdots + a_{nn}$ a elementelor de pe diagonala principală, deci suma valorilor proprii ale lui A. Rezultă astfel că matricea e^A este întotdeauna inversabilă.

Lema 2.5. *Pentru orice matrice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ care comută, adică are loc relația $AB = BA$, avem*

$$e^{A+B} = e^A e^B. \tag{2.1}$$

Folosind Lema 2.4 și faptul că matricele A și $-A$ comută, avem $e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^{0_n} = I_n$, ceea ce arată că inversa matricei e^A este e^{-A}, adică avem relația

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}. \tag{2.2}$$

Observația 2.2. 1. Putem demonstra formula (2.2) observând că pentru orice $t \in \mathbb{R}$, avem

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}e^{-tA}) = Ae^{tA}e^{-tA} + e^{tA}(-Ae^{-tA}) = (A - A)e^{tA}e^{-tA} = O_n,$$

deci funcția $g(t) = e^{tA}e^{-tA}$ este constantă pe $\mathbb{R}$, adică avem $g(t) = g(0) = I_n$. Considerăm $t = 1$ în relația $e^{tA}e^{-tA} = I_n$ și obținem formula (2.2).

2. O demonstrație alternativă pentru Lema 2.5 se obține astfel. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$, avem

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{t(A+B)}e^{-tA}e^{-tB} &= (A+B)e^{t(A+B)}e^{-tA}e^{-tB} - e^{t(A+B)}Ae^{-tA}e^{-tB} \\ &- e^{t(A+B)}e^{-tA}Be^{-tB} = (A+B-(A+B))e^{t(A+B)}e^{-tA}e^{-tB} = O_n,\end{aligned}$$

deoarece rezultă imediat că dacă A și B comută, atunci matricele $A, e^{t(A+B)}$ și B, e^{-tA} și $B, e^{t(A+B)}$ comută.
Rezultă că funcția $h(t) = e^{t(A+B)}e^{-tA}e^{-tB}$ este constantă pe $\mathbb{R}$, deci $h(t) = h(0) = I_n$. Prin urmare, $e^{-tA}e^{-tB} = (e^{t(A+B)})^{-1} = e^{-t(A+B)}$ și pentru $t = -1$ obținem formula dorită.

3. În cazul în care matricele A și B nu comută, are loc formula lui Baker-Cambell-Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\frac{1}{12}[B,[B,A]]+\dots},$$

unde $[X, Y] = XY - YX$ este comutatorul matricelor X și Y.

2.2 Grupul general liniar real $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$

Mulțimea matricelor pătratice, inversabile, de ordin n, cu elemente reale, formează în raport cu operația de înmulțire un grup notat $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. Submulțimea formată din acele matrice din grupul $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ care au valoarea determinantului egală cu $+1$ este un subgrup al lui $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, notat $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$. Este ușor de verificat că mulțimea matricelor pătratice ortogonale, de ordin n, este un subgrup al lui $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, notat $\mathbf{O}(n)$. Submulțimea grupului $\mathbf{O}(n)$ formată din acele matrice care au valoarea determinantului egală cu $+1$ este un subgrup al lui $\mathbf{O}(n)$, notat $\mathbf{SO}(n)$. Matricele din grupul $\mathbf{SO}(n)$ se mai numesc și *matrice de rotație*. Se arată că mulțimea matricelor pătratice, de ordin n, cu elemente reale și care au urma nulă formează un spațiu vectorial împreună cu operațiile clasice de adunare și înmulțire cu scalari. La fel se poate arăta imediat că mulțimea matricelor antisimetrice formează un spațiu vectorial.

Grupul $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ se numește *grupul general liniar real* și subgrupul său $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ se numește *grupul special liniar*. Grupul $\mathbf{O}(n)$ al matricelor ortogonale se numește *grupul ortogonal* și subgrupul său $\mathbf{SO}(n)$ se numește *grupul special ortogonal* (sau *grupul rotațiilor*). Spațiul vectorial al matricelor pătratice, de dimensiune n, cu elemente reale și cu urma nulă este notat $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ și spațiul vectorial al matricelor antisimetrice, pătratice, de dimensiune n este notat $\mathfrak{so}(n)$.

Notațiile $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ și $\mathfrak{so}(n)$ necesită câteva explicații suplimentare. Grupurile $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathbf{O}(n)$ și $\mathbf{SO}(n)$ sunt și grupuri topologice, ceea ce înseamnă că sunt spații topologice (văzute ca și subspații ale lui $\mathbb{R}^{n^2}$), iar înmulțirea și inversa sunt operații continue (de fapt chiar netede). Aceste grupuri sunt *grupuri Lie*. Spațiile vectoriale reale $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ și $\mathfrak{so}(n)$ sunt *algebre Lie*. Structura de algebră Lie este dată de *paranteza Lie*, care în acest caz este comutatorul uzual al matricelor definit prin $[A, B] = AB - BA$.

De fapt, algebra Lie a unui grup Lie este spațiul tangent la elementul unitate al grupului privit ca varietate diferențiabilă, adică spațiul tuturor vectorilor tangenți la elementul unitate (în acest caz matricea unitate I_n). Într-un anume sens, algebra Lie este o liniarizare a grupului Lie.

În general, fie G un grup Lie cu algebra sa Lie $\mathfrak{g}$. Este cunoscut faptul că aplicația exponențială $\exp : \mathfrak{g} \to G$ este definită prin $\exp(X) = \gamma_X(1)$, unde $X \in \mathfrak{g}$ și γ_X este subgrupul cu un parametru al lui G corespunzător lui X. Reamintim următoarele proprietăți ale aplicației exponențiale:

1) $\gamma x(t) = \exp(tX)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și orice $X \in \mathfrak{g}$;

2) $\exp(sX)\exp(tX) = \exp(s+t)X$, pentru orice $s, t \in \mathbb{R}$ și orice $X \in \mathfrak{g}$;

3) $\exp(-tX) = (\exp tX)^{-1}$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și orice $X \in \mathfrak{g}$;

4) $\exp : \mathfrak{g} \to G$ este o aplicație netedă care este un difeomorfism local în $0 \in \mathfrak{g}$ și $\exp(0) = e$, unde e este elementul neutru al grupului G;

5) imaginea $\exp(\mathfrak{g})$ a aplicației exponențiale generează componenta conexă G_e a unității $e \in G$;

6) dacă $f : G_1 \to G_2$ este un morfism de grupuri Lie și $f_* : L(\mathfrak{g}_1) \to L(\mathfrak{g}_2)$ este morfismul de algebre Lie indus de f, atunci următoarea diagramă este comutativă

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}_1 \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\exp_1"'] & \mathfrak{g}_2 \arrow[d, "\exp_2"] \\
G_1 \arrow[r, "f"'] & G_2
\end{tikzcd}$$

adică avem relația $f \circ \exp_1 = \exp_2 \circ f_*$.

Aplicația exponențială permite o parametrizare a elementelor grupului Lie cu obiectele mai simple ale algebrei Lie. Aplicația exponențială pe diverse grupuri Lie are multiple aplicații în mecanică [1], prelucrarea imaginilor [18] și în descrierea altor procese din lumea reală [19], [20].

Algebra Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ a grupului $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ constă în mulțimea matricelor pătratice de ordinul n, cu elemente reale. Este ușor de arătat că aplicația $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ este definită de formula $\exp(A) = e^A$. Aceasta este corect definită deoarece am văzut că avem $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)} \neq 0$. Mai mult, din proprietatea 6) de mai sus, rezultă că aplicațiile exponențiale $\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$, $\exp : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ și $\exp : \mathfrak{o}(n) \to \mathbf{O}(n)$ sunt restricțiile lui $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.

Aplicația $\exp : \mathfrak{o}(n) \to \mathbf{O}(n)$ este corect definită deoarece din proprietatea $\exp\ {}^tA = {}^t\exp A$, rezultă imediat că avem

$${}^t(\exp A) \exp A = (\exp\ {}^tA) \exp A = \exp({}^tA + A) = \exp O_n = I_n,$$

adică $\exp A$ este o matrice de rotație dacă A este o matrice antisimetrică.

În plus, pentru aplicația $\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ avem $\det \exp A = e^{\mathrm{tr}(A)} = 1$, deoarece elementele de pe diagonala principală ale lui A sunt toate nule, deci $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Pentru aplicația exponențială $\exp : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$, evident avem $\det \exp A = e^{\mathrm{tr}(A)} = 1$, deoarece din nou $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Referințele utilizate în prezentarea grupurilor de matrice sunt A. Baker [10], M.L. Curtis [15], F.R. Gantmacher [21].

2.3 Grupul special euclidian SE(n)

În această secțiune prezentăm grupul $\mathbf{SE}(n)$ al aplicațiilor afine induse de transformările ortogonale, numite și mișcări rigide, și algebra Lie corespunzătoare. Grupurile $\mathbf{SE}(2)$ și $\mathbf{SE}(3)$ joacă un rol fundamental în robotică, dinamică și în procesul de interpolare a mișcării.

Mai întâi reamintim metoda uzuală de reprezentare a aplicațiilor afine ale spațiului $\mathbb{R}^n$ în termeni dați de matrice pătratice de dimensiune $n + 1$.

Definiția 2.1. *Mulțimea aplicațiilor afine ρ ale spațiului $\mathbb{R}^n$, definite prin $\rho(X) = RX + U$, unde R este o matrice de rotație, adică $R \in \mathbf{SO}(n)$ și U este un vector din $\mathbb{R}^n$, formează* *un grup în raport cu operația de compunere, numit* ***grupul izometriilor afine directe*** *(sau mișcări rigide) sau* ***grupul special Euclidian****. Acesta se notează cu* $\mathbf{SE}(n)$.

Fiecare mișcare rigidă poate fi reprezentată de o matrice pătratică de dimensiune $n+1$ descompusă în blocuri de forma

$$\begin{pmatrix} R & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

adică avem

$$\begin{pmatrix} \rho(X) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix},$$

dacă și numai dacă $\rho(X) = RX + U$.

Spațiul vectorial al matricelor pătratice de ordinul $n+1$, cu valori reale, descompuse în blocuri de forma

$$A = \begin{pmatrix} \Omega & U \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde Ω este o matrice antisimetrică și U este un vector din spațiul $\mathbb{R}^n$ se notează cu $\mathfrak{se}(n)$.

Grupul $\mathbf{SE}(n)$ este un grup Lie, iar algebra sa Lie corespunzătoare este $\mathfrak{se}(n)$.

Vom arăta că aplicația exponențială $\exp : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$ este corect definită. Mai întâi demonstrăm următoarea lemă.

Lema 2.6. *Fiind dată o matrice pătratică de ordinul $n+1$, definită în blocuri de forma*

$$A = \begin{pmatrix} \Omega & U \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde Ω este o matrice antisimetrică și U este un vector din spațiul $\mathbb{R}^n$, are loc relația

$$A^k = \begin{pmatrix} \Omega^k & \Omega^{k-1}U \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

unde $\Omega^0 = I_n$.

Ca o consecință avem

$$\exp A = \begin{pmatrix} \exp \Omega & VU \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

unde

$$V = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \Omega^k = \int_0^1 \exp t\Omega dt \tag{2.5}$$

2.4 Grupurile $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathbf{U}(n)$ și $\mathbf{SU}(n)$

Mulțimea matricelor pătratice, de ordinul n, cu elemente complexe și inversabile formează un grup în raport cu multiplicarea, notat cu $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. Submulțimea acestuia formată din acele matrice a căror determinant are valoarea $+1$ este un subgrup al lui $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, notat cu $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$. Este ușor de verificat că submulțimea matricelor unitare, adică a celor care verifică relația $A\,{}^t\bar{A} = I_n$, unde $\bar{A}$ este conjugata matricei A, formează un subgrup notat cu $\mathbf{U}(n)$. Submulțimea grupului $\mathbf{U}(n)$ care conține matricele cu valoarea determinantului egală cu $+1$ este un subgrup al lui $\mathbf{U}(n)$, notat cu $\mathbf{SU}(n)$. Putem verifica faptul că mulțimea matricelor pătratice, de ordinul n, cu elemente complexe și care au urma nulă formează un spațiu vectorial real împreună cu operația de adunare și multiplicarea cu scalari reali. Similar, avem aceeași proprietate pentru matricele hermitiene simetrice și pentru matricele hermitiene simetrice cu urma nulă.

Definiția 2.2. *Grupul* $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ *se numește* ***grupul general liniar complex*** *și subgrupul său* $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ *se numește* ***grupul special liniar complex****. Grupul matricelor unitare* $\mathbf{U}(n)$ *se numește* ***grupul unitar*** *și subgrupul său* $\mathbf{SU}(n)$ *se numește* ***grupul special unitar****.*

Spațiul vectorial real al matricelor pătratice, de dimensiune n, cu elemente complexe care au urma nulă se notează cu $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, spațiul matricelor hermitiene antisimetrice se notează cu $\mathfrak{u}(n)$ și spațiul vectorial real definit de intersecția $\mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ se notează cu $\mathfrak{su}(n)$.

Observația 2.3. 1. La fel ca și în cazul real, grupurile $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{U}(n)$ și $\mathbf{SU}(n)$ sunt grupuri topologice (văzute ca și subspații ale lui $\mathbb{R}^{2n^2}$), de fapt varietăți reale netede. Ele posedă o structură de grup *Lie*. Spațiile vectoriale reale $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{u}(n)$ și $\mathfrak{su}(n)$ sunt algebrele Lie asociate grupurilor $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{U}(n)$ și $\mathbf{SU}(n)$. Structura de algebră Lie este dată de paranteza Lie, care este definită prin comutatorul uzual al matricelor

$$[A, B] = AB - BA.$$

2. Este de asemenea posibil să definim grupuri Lie complexe, ceea ce înseamnă că sunt grupuri topologice și varietăți complexe netede. Se demonstrează că grupurile $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ și $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ sunt varietăți complexe în timp ce grupurile $\mathbf{U}(n)$ și $\mathbf{SU}(n)$ nu au această proprietate.

Proprietățile aplicației exponențiale joacă un rol important în studiul grupurilor Lie complexe. Ca și în cazul real, aplicațiile exponențiale pentru aceste grupuri, sunt restricțiile aplicației standard $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, discutată în Secțiunea 2.1, unde $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$.

Deoarece avem $\det(\exp A) = e^{\operatorname{tr} A}$, rezultă că aplicația $\exp : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \to \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ este corect definită.

Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$, notăm pentru simplitate $A^* = {}^t\bar{A}$. Să arătăm acum că aplicația $\exp : \mathfrak{u}(n) \to \mathbf{U}(n)$ este corect definită. Din relația $(\exp A)^* = \exp A^*$, dacă $A \in \mathfrak{u}(n)$, avem

$$(\exp A)^* = \exp A^* = \exp(-A),$$

deci obținem

$$(\exp A)^*(\exp A) = \exp(-A)\exp A = \exp(-A + A) = I_n,$$

adică $\exp A \in \mathbf{U}(n)$.

Este evident faptul că aplicația $\exp : \mathfrak{su}(n) \to \mathbf{SU}(n)$ este bine definită.

2.5 Problema surjectivității aplicației exponențiale

Din proprietatea 5) din Secțiunea 2.2 a aplicației exponențiale a unui grup Lie rezultă că următoarele două probleme sunt de o importanță deosebită.

Problema 1. *Să se găsească condițiile pentru grupul Lie G astfel încât aplicația exponențială este surjectivă.*

Problema 2. *În cazul în care nu este surjectivă, să se determine imaginea $E(G) = \exp(\mathfrak{g})$.*

J. Dixmier a pus prima oară problema determinării imaginii aplicației exponențiale pentru grupurile Lie rezolubile care sunt simplu conexe. Numai în câteva situații speciale avem $G = E(G)$, iar grupurile cu această proprietate se numesc grupuri Lie *exponențiale*. O monografie dedicată grupurilor Lie exponețiale este [64]. Grupurile Lie compacte și conexe sunt exponențiale [12]. Aceeași proprietate o au și multe din grupurile Lie de rang 1 care au centrul liber și sunt simplu conexe [11], [25]. Problema este foarte complicată în cazul grupurilor semisimple de rang ≥ 2 și în cazul grupurilor mixte.

Aceste probleme prezintă un interes special fiind studiate de mai mulți autori, dintre care menționăm N.J. Higham [23], K.H. Hofmann, A. Mukhergea [26], K.H. Hofmann, W.A.F. Rupert [27], M. Wüstner [65], [66].

În această secțiune vom discuta aceste probleme pentru grupurile de matrice trecute în revistă în secțiunile precedente.

2.5.1 Grupul $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}), n \geq 2$, nu este exponențial

Pentru $X \in M_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ rezultă că $\mathrm{tr}X \in \mathbb{R}$ și deci $\det(\exp(X)) > 0$. Prin urmare, $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{GL}^+(n, \mathbb{R})$, unde $\mathbf{GL}^+(n, \mathbb{R})$ este subgrupul lui $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ definit de matricele nesingulare cu determinantul strict pozitiv. Prin urmare, avem incluziunea $\exp(M_n(\mathbb{R})) \subseteq \mathbf{GL}^+(n, \mathbb{R})$. Acest fapt este normal dacă ținem cont de proprietatea 4) a aplicației exponențiale în general, menționată în Secțiunea 2.2. Deci $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ nu este exponențial.

Pentru $n = 1$ avem identificările $\exp(M_1(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$ și $\mathbf{GL}^+(1, \mathbb{R}) = (0, +\infty)$, deci în acest caz $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ este surjectivă.

Determinarea mulțimii $E(\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}))$ este interesantă dacă $n \geq 2$.

Rezultatul care rezolvă complet această problemă a fost obținut inițial de M. Nishikawa în [44], pornind de la lucrarea [50], și redemonstrat independent de D. Andrica și L. Mare [5].

Teorema 2.1. *Se consideră matricea $A \in \mathbf{GL}^+(n, \mathbb{R}), n \geq 2$. Atunci $A \in E(\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}))$ dacă și numai dacă blocurile corespunzătoare valorilor proprii negative din descompunerea sa Jordan apar cu multiplicitate pară.*

De exemplu, pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

avem $A \in \mathbf{GL}^+(2, \mathbb{R})$, dar $A \notin E(\mathbf{GL}(2, \mathbb{R}))$.

O altă caracterizare pentru mulțimea $E(\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}))$ este conținută în următorul rezultat (a se vedea lucrările [39] și [40]).

Teorema 2.2. *Avem $A \in E(\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}))$ dacă și numai dacă ecuația $X^2 = A$ are soluții în $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.*

2.5.2 Grupul $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R}), n \geq 2$, nu este exponențial

Grupul $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ este conex, dar nu este compact. Vom arăta că aplicația exponențială $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ nu este surjectivă. Dacă

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}),$$

atunci se observă că

$$X^2 = (a^2 + bc) I_2 = -\det(X) I_2.$$

Când $a^2 + bc = 0$ avem $X^p = O_2$ pentru orice $p \geq 2$, deci

$$\exp X = I_2 + X.$$

Dacă $a^2 + bc < 0$, fie $\omega > 0$ astfel încât $\omega^2 = -(a^2 + bc)$. Atunci

$$\exp X = (\cos \omega) I_2 + \frac{\sin \omega}{\omega} X.$$

Dacă $a^2 + bc > 0$, fie $\omega = \sqrt{a^2 + bc}$. Atunci

$$\exp X = (\operatorname{ch} \omega) I_2 + \frac{\operatorname{sh} \omega}{\omega} X.$$

Această funcție de matrice nu este surjectivă. Într-adevăr, avem $\operatorname{tr}(\exp X) = 2 \cos \omega$ dacă $a^2 + bc < 0$, $\operatorname{tr}(\exp X) = 2 \operatorname{ch} \omega$ dacă $a^2 + bc > 0$ și $\operatorname{tr}(\exp X) = 2$ dacă $a^2 + bc = 0$.

Prin urmare, pentru orice matrice cu urma nulă are loc relația

$$\operatorname{tr}(\exp X) \geq -2,$$

deci orice matrice A cu determinantul egal cu 1 și a cărui urmă are valoarea mai mică decât -2 nu este exponențiala unei matrice X cu urma nulă.

Un rezultat de forma celui din Teorema 2.2 are loc și pentru grupul $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ (a se vedea [39]).

Teorema 2.3. *Avem $A \in E(\mathbf{SL}(n, \mathbb{R}))$ dacă și numai dacă ecuația $X^2 = A$ are soluții în $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$.*

2.5.3 Grupul $\mathbf{SO}(n)$ este exponențial

Această proprietate rezultă din faptul că $SO(n)$ este compact și conex (a se vedea [12], [59]). Prezentăm în continuare o demonstrație elementară.

Teorema 2.4. *Grupul special ortogonal $\mathbf{SO}(n)$ este exponențial.*

Pentru orice matrice pătratică antisimetrică, de ordinul 3, cu elemente reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

considerăm numărul $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ și matricea

$$B = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

Are loc următorul rezultat cunoscut sub numele de *formula lui Rodrigues*(1840).

Teorema 2.5. *Cu notațiile de mai sus, aplicația exponențială $\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathbf{SO}(3)$ este dată de*

$$\exp A = (\cos\theta) I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} A + \frac{(1 - \cos\theta)}{\theta^2} B.$$

Echivalent, putem scrie formula sub forma

$$\exp A = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} A + \frac{(1 - \cos\theta)}{\theta^2} A^2,$$

dacă $\theta \neq 0$.

Surjectivitatea exponențialei pe grupul $\mathbf{SO(n)}$ este o proprietate importantă care implică existența unei funcții inverse locale, notată ln, $\ln : \mathbf{SO}(n) \to \mathfrak{so}(n)$ care are aplicații interesante. În lucrarea lui J.Gallier, D.Xu [19] este menționat că funcțiile exp și ln pentru grupul $\mathbf{SO(n)}$ pot fi folosite în interpolarea mișcării (vezi M.-J. Kim, M.-S. Shin [32], [33] și F.C. Park, B. Ravani [51],[52]). Interpolarea mișcării și mișcările raționale au fost studiate și de B. Jüttler [36], [37]. De asemenea, surjectivitatea aplicației exponențiale a grupului $\mathbf{SO(n)}$ ne dă posibilitatea să descriem rotațiile spațiului Euclidean $\mathbb{R}^n$ (vezi R.-

A. Rohan [59]). Conexiunea cu geometria diferențială necomutativă este dată de lucrarea lui L.I. Piscoran [53].

2.5.4 Grupul $\mathbf{SE}(n), n \geq 2$, este exponențial

Teorema 2.6. *Aplicația exponențială* $\exp : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$ *este surjectivă.*

În cazul $n = 3$, fiind dată o matrice antisimetrică

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

fie $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Este ușor să arătăm că dacă $\theta = 0$, atunci

$$\exp A = \begin{pmatrix} I_3 & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dacă $\theta \neq 0$, folosind faptul că $\Omega^3 = -\theta^2\Omega$, obținem

$$\exp \Omega = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta}\Omega + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\Omega^2$$

și

$$V = I_3 + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\Omega + \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}\Omega^2.$$

2.5.5 Grupurile $\mathbf{U}(n)$ și $\mathbf{SU}(n)$ sunt exponențiale

Teorema 2.7. *Aplicațiile exponențiale*

$$\exp : \mathfrak{u}(n) \to \mathbf{U}(n) \text{ și } \exp : \mathfrak{su}(n) \to \mathbf{SU}(n)$$

sunt surjective.

Următorul rezultat arată că orice matrice hermitiană pozitiv definită A este de forma $\exp B$, unde B este o matrice hermitiană determinată în mod unic.

Teorema 2.8. *Pentru orice matrice hermitiană B, matricea* $\exp B$ *este o matrice hermitiană pozitiv definită. Pentru orice matrice hermitiană pozitiv definită A, există o matrice hermitiană unic determinată de B astfel încât are loc relația $A = \exp B$.*

Capitolul 3

Formule Rodrigues pentru funcții de matrice. Metode de determinare a coeficienților Rodrigues

Acest capitol este structurat în șase secțiuni. În prima secțiune este introdusă problema Rodrigues pentru funcții de matrice și sunt prezentați coeficienții Rodrigues. În Teorema 3.1 prezentăm, în cazul în care valorile proprii ale matricii sunt două câte două distincte, o metodă directă de a determina coeficienții Rodrigues generali reducând problema Rodrigues la sistemul (3.7). Apoi, Teorema 3.2 ne dă formulele explicite în termeni de polinoame simetrice fundamentale ale valorilor proprii ale matricii. Aceste formule ne permit să considerăm și cazurile degenerate (situațiile în care valorile proprii au multiplicități) și să obținem formule frumoase pentru coeficienți. Secțiunea 3.3 ilustrează cazurile particulare $n = 2, 3, 4$ pentru care calculele sunt prezentate efectiv, iar formulele sunt prezentate în forma restrânsă. În secțiunea 3.4 sunt prezentate posibilele cazuri degenerate. Secțiunile 3.5 și 3.6 sunt dedicate metodei polinomului de interpolare al lui Hermite și cazului special al aplicației exponențiale pentru grupul $\mathbf{SO}(n)$. Sunt prezentate cazurile clasice $n = 2, 3$, dar și cazurile $n = 4$ și $n = 5$. În realizarea calculelor a fost utilizat programul MATHEMATICA. Referința principală utilizată în acest capitol este lucrarea D. Andrica, O.L. Chender (Broaina) [4]. Alte referințe sunt D. Andrica, I.N. Casu [2], D. Andrica, R.-A. Rohan [7], T. Bröcker, T. tom Dieck [12], C. Chevalley [14], O. Furdui [17], J. Gallier, D. Xu [19], S. Kida, E. Trimandalawati, S. Ogawa [31], M.-J. Kim, M.-S. Kim, A. Shin [32], [33], B. Jütler [36], [37], J.E. Marsden și T.S. Raţiu [41], F.C. Park, B. Ravani [51], [52], L.I. Piscoran [53], V. Pop, O. Furdui [55], E.J. Putzer [56], R.-A. Rohan [59], F. Warner [62], R. Vein, P. Dale [63], M. Wüstner [64].

3.1 Problema Rodrigues pentru funcții de matrice

Am văzut că aplicația exponențială $\exp : gl(n, \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ este definită prin (vezi C. Chevalley [14], J.E. Marsden și T.S. Raţiu [41], sau F. Warner [62])

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k. \tag{3.1}$$

Aplicând bine-cunoscuta teoremă Hamilton-Cayley, rezultă că fiecare putere X^k, $k \geq n$, este o combinație liniară de X^0, X^1,..., X^{n-1}, deci putem scrie

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(X) X^k, \tag{3.2}$$

unde coeficienții reali $a_0(X), \ldots, a_{n-1}(X)$ sunt unic definiți și depind de matricea X. Din această formulă rezultă că $\exp(X)$ este un polinom de X cu coeficienții funcții de X. Problema de a găsi o formulă potrivită pentru $\exp(X)$ se reduce la problema determinării coeficienților $a_0(X), \ldots, a_{n-1}(X)$. Vom numi această problemă generală *problema Rodrigues*, iar numerele $a_0(X), \ldots, a_{n-1}(X)$ *coeficienții Rodrigues* ai aplicației exponențiale în raport cu matricea $X \in M_n(\mathbb{R})$.

Originea acestei probleme este formula clasică a lui Rodriques obținută în 1840 pentru grupul special ortogonal $\mathbf{SO(3)}$:

$$\exp(X) = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} X + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} X^2,$$

unde $\sqrt{2}\theta = \|X\|$ și am notat cu $\|X\|$ norma Frobenius a matricii X (a se vedea Teorema 2.5). Sunt numeroase argumente care evidențiază importanța acestei formule și vom menționa aici doar următoarele două: studiul rotațiilor corpurilor rigide în $\mathbb{R}^3$ și parametrizarea rotațiilor în $\mathbb{R}^3$.

Ideea generală de a construi funcții de matrice generalizând aplicația exponențială este să considerăm o funcție analitică $f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_m z^m + \cdots$, astfel încât seriile induse $\tilde{f}(X) = \alpha_0 I_n + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_m X^m + \cdots$ sunt convergente într-o submulțime deschisă a lui $M_n(\mathbb{R})$. Apoi, utilizând bine-cunoscuta teoremă Hamilton-Cayley-Frobenius putem scrie o formă redusă a matricei $\tilde{f}(X)$:

$$\tilde{f}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(f)}(X) X^k. \tag{3.3}$$

Relația anterioară o numim *formula Rodrigues* corespunzătoare lui $\tilde{f}$. Numerele $a_0^{(f)}(X), \ldots, a_{n-1}^{(f)}(X)$ sunt *coeficienții Rodrigues* ai aplicației $\tilde{f}$ a matricei $X \in M_n(\mathbb{R})$. Evident, coeficienții reali $a_0^{(f)}(X), \ldots, a_{n-1}^{(f)}(X)$ sunt unic definiți, ei depind de matricea X, iar $\tilde{f}(X)$ este un polinom în X.

O proprietate importantă a coeficienților Rodrigues este invarianța lor în raport cu operația de conjugare a matricelor și avem

Propoziția 3.1. *Pentru orice matrice inversabilă U au loc următoarele relații*

$$a_k^{(f)}(UXU^{-1}) = a_k^{(f)}(X), k = 0, \ldots, n-1. \tag{3.4}$$

3.2 Metoda urmei în determinarea coeficienților Rodrigues

În această secțiune vom prezenta o metodă nouă de a determina coeficienții Rodrigues generali $a_0^{(f)}(X), \ldots, a_{n-1}^{(f)}(X)$ dați de relația (3.3). Urmărind lucrarea [7], ideea de lucru constă în a reduce relația (3.3) la un sistem liniar cu necunoscutele $a_0^{(f)}(X), \ldots, a_{n-1}^{(f)}(X)$. Aplicații concrete în obținerea formulei Rodrigues pentru grupul Lorentz au fost date în lucrarea [8].

În acest sens vom înmulți succesiv ambii membrii ai relației (3.3) cu matricea X^j, $j = 0, \ldots, n-1$ și obținem relațiile

$$X^j \tilde{f}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(f)} X^{k+j},\ j = 0, \ldots, n-1, \tag{3.5}$$

unde pentru simplitate am notat $a_k^{(f)} = a_k^{(f)}(X)$, $k = 0, \ldots, n-1$. Aplicând urma matricei în ambii membrii ai relației (3.5) obținem sistemul liniar

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{tr}(X^{k+j}) a_k^{(f)} = \operatorname{tr}(X^j \tilde{f}(X)),\ \ j = 0, \ldots, n-1, \tag{3.6}$$

unde coeficienții sunt funcții de matricea X. Presupunem că $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei X. Atunci, este cunoscut faptul că matricea X^{k+j} are valorile proprii $\lambda_1^{k+j}, \ldots, \lambda_n^{k+j}$ și matricea $X^j \tilde{f}(X)$ are valorile proprii $\lambda_1^j f(\lambda_1), \ldots, \lambda_n^j f(\lambda_n)$ (a se vedea [29]).

Prin urmare, funcția $f_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_j(z) = z^j f(z)$ este analitică, deci valorile proprii ale matricii $f_j(X)$ sunt $f_j(\lambda_1), \ldots, f_j(\lambda_n)$ și avem $f_j(\lambda_s) = \lambda_s^j f(\lambda_s)$, $s = 1, \ldots, n$.

Astfel, sistemul (3.6) este echivalent cu sistemul

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{k+j} \right) a_k^{(f)} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^j f(\lambda_s), j = 0, \ldots, n-1. \tag{3.7}$$

Din sistemul (3.7) obținem rezultatul următor referitor la soluția problemei Rodrigues generale pentru funcția f (a se vedea [4]).

Teorema 3.1. *1) Coeficienții Rodrigues din formula (3.3) sunt soluții ale sistemului (3.7).*

2) Dacă valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricii X sunt două câte două distincte, atunci coeficienții Rodrigues $a_0^{(f)}(X), \ldots, a_{n-1}^{(f)}(X)$ sunt perfect determinați de sistemul (3.7) și *sunt dați de formulele*

$$a_k^{(f)}(X) = \frac{V_{n,k}^{(f)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{V_n\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)}, k = 0, \ldots, n-1, \tag{3.8}$$

unde $V_n\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$ *este determinantul Vandermonde de ordin* n *și* $V_{n,k}^{(f)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *este determinantul de ordin* n *obținut din* $V_n\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$ *înlocuind linia* $k+1$ *cu* $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$.

3) Dacă valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *ale matricei* X *sunt două câte două distincte, atunci coeficienții Rodrigues* $a_0^{(f)}(X), \ldots, a_{n-1}^{(f)}(X)$ *sunt combinații liniare de* $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$ *având coeficienții funcții raționale de* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *adică avem:*

$$a_k^{(f)}(X) = b_k^{(1)}(X) f(\lambda_1) + \ldots + b_k^{(n)}(X) f(\lambda_n), k = 0, \ldots, n-1, \tag{3.9}$$

unde $b_k^{(1)}, \ldots, b_k^{(n)} \in \mathbb{Q}\left[\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right]$.

Dezvoltând determinantul $V_{n,k}^{(f)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ din 3.1 2) după linia $k+1$ rezultă:

$$a_k^{(f)}(X) = \frac{1}{V_n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j+1} LV_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_j}, \ldots, \lambda_n) f(\lambda_j), \tag{3.10}$$

unde $LV_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_j}, \ldots, \lambda_n) f(\lambda_j)$ este determinantul Vandermonde $(k+1)$-lacunar în variabilele $\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_j}, \ldots, \lambda_n$, adică determinantul obținut din $V_n\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$ eliminând linia $k+1$ și coloana j. Aplicând bine-cunoscuta formulă (vezi referința [63])

$$LV_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_j}, \ldots, \lambda_n) = s_{n-k-1}(\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_j}, \ldots, \lambda_n) V_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_j}, \ldots, \lambda_n),$$

unde s_l este polinomul simetric de ordin l în $n-1$ variabile $\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_j}, \ldots, \lambda_n$, unde λ_j lipsește, obținem următorul rezultat care rezolvă complet problema generală în cazul în care valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricii X sunt două câte două distincte.

Teorema 3.2. *Pentru orice* $k = 0, \ldots, n-1$,*au loc următoarele relații*

$$a_k^{(f)}(X) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j+1} \frac{V_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_j}, \ldots, \lambda_n) s_{n-k-1}(\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_j}, \ldots, \lambda_n)}{V_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} f(\lambda_j), \tag{3.11}$$

unde am notat cu s_l *polinomul simetric de ordin* l *și notația* $\widehat{\lambda_j}$ *înseamnă că în determinantul Vandermonde* V_{n-1} *nu apare variabila* λ_j.

3.3 Cazurile particulare $n = 2, 3, 4$

Evident, când $X = O_n$, avem $\tilde{f}(X) = \alpha_0 I_n$ și în acest caz $a_0^{(f)}(X) = \alpha_0, a_1^{(f)}(X) = \cdots = a_{n-1}^{(f)}(X) = 0$.

În această secțiune presupunem că valorile proprii $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ale matricii X sunt două câte două distincte. Urmărim prezentarea din lucrarea [4].

3.3.1 Cazul $n = 2$

Formula Rodrigues generală

$$\tilde{f}(X) = (\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} f(\lambda_1) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} f(\lambda_2)) I_2 + (-\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} f(\lambda_1) + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} f(\lambda_2)) X. \quad (3.12)$$

Această formulă apare în [55, Theorem 4.7, page 194] și în lucrarea [17].

3.3.2 Cazul $n = 3$

Formula Rodrigues generală corespunzătoare

$$\tilde{f}(X) = (\frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} f(\lambda_1) - \frac{\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} f(\lambda_2) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} f(\lambda_3)) I_3 +$$

$$(-\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} f(\lambda_1) + \frac{\lambda_3 + \lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} f(\lambda_2) - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} f(\lambda_3)) X +$$

$$(\frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} f(\lambda_1) - \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} f(\lambda_2) + \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} f(\lambda_3)) X^2.$$

3.3.3 Cazul $n = 4$

$$a_0^{(f)}(X) = \frac{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} f(\lambda_1) - \frac{\lambda_1\lambda_3\lambda_4}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} f(\lambda_2) +$$

$$\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_4}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} f(\lambda_3) - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} f(\lambda_4),$$

$$a_1^{(f)}(X) = -\frac{\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} f(\lambda_1) + \frac{\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} f(\lambda_2) -$$

$$\frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_4}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} f(\lambda_3) + \frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} f(\lambda_4),$$

$$a_2^{(f)}(X) = \frac{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} f(\lambda_1) - \frac{\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} f(\lambda_2) +$$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} f(\lambda_3) - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} f(\lambda_4),$$

$$a_3^{(f)}(X) = -\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)} f(\lambda_1) + \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)} f(\lambda_2) -$$

$$\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)} f(\lambda_3) + \frac{1}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)} f(\lambda_4),$$

și formula Rodrigues generală corespunzătoare, dar nu o vom scrie explicit aici din motive de spațiu.

3.4 Cazurile degenerate $n = 2, 3, 4$

În această secțiune vom arăta cum obținem coeficienții Rodrigues generali când valorile proprii $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ale matricii X nu sunt distincte, în cazurile $n = 2, 3, 4$. Urmărim prezentarea din lucrarea noastră [4].

3.4.1 Cazul $n = 2$

Presupunem că $\lambda_1 = \lambda_2$. Atunci coeficienții Rodrigues generali corespunzători pot fi obținuți din formulele din subsecțiunea 3.3.1 unde facem $\lambda_2 \to \lambda_1$. Folosind formula derivatei unui determinat funcțional obținem

$$a_0^{(f)}(X) = \begin{vmatrix} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) \\ \lambda_1 & 1 \end{vmatrix} = f(\lambda_1) - \lambda_1 f'(\lambda_1)$$

$$a_1^{(f)}(X) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) \end{vmatrix} = f'(\lambda_1).$$

Această formulă apare în [55, Theorem 4.8, page 194] și în lucrarea [17].

3.4.2 Cazul $n = 3$

În acest caz avem de studiat următoarele două posibilități, dacă nu considerăm permutările valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Cazul $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

Coeficienții Rodrigues generali corespunzători pot fi obținuți din formulele din subsecțiunea 3.3.2 pentru $\lambda_2 \to \lambda_1$. Folosind din nou formula derivatei unui determinat funcțional obținem

$$a_0^{(f)}(X) = \frac{\lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_3-\lambda_1)^2} f(\lambda_1) - \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_3-\lambda_1} f'(\lambda_1) + \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_3-\lambda_1)^2} f(\lambda_3)$$

$$a_1^{(f)}(X) = \frac{2\lambda_1}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}f(\lambda_1) + \frac{\lambda_3^2}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}f'(\lambda_1) + \frac{2\lambda_1}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}f(\lambda_3)$$

$$a_2^{(f)}(X) = -\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}f(\lambda_1) - \frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}f'(\lambda_1) + \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}f(\lambda_3).$$

Cazul $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

Utilizăm formulele din Cazul 3.4.2 pentru $\lambda_3 \to \lambda_1$ și obținem

$$a_0^{(f)}(X) = f(\lambda_1) - \lambda_1 f'(\lambda_1) + \frac{1}{2}\lambda_1^2 f''(\lambda_1), a_1^{(f)}(X) = f'(\lambda_1) - \lambda_1 f''(\lambda_1), a_2^{(f)}(X) = \frac{1}{2}f''(\lambda_1)$$

și formula Rodrigues corespunzătoare.

3.4.3 Cazul $n = 4$

În acest caz avem de studiat următoarele patru posibilități, fără a considera permutările valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Cazul $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$

Coeficienții Rodrigues generali pot fi obținuți din formulele din subsecțiunea 3.3.3 pentru $\lambda_2 \to \lambda_1$ și utilizând formula derivatei unui determinant funcțional. Rezultă succesiv

$$a_0^{(f)}(X) = \frac{\lambda_3\lambda_4(3\lambda_1^2 + \lambda_3\lambda_4 - 2\lambda_1(\lambda_3+\lambda_4))}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_4-\lambda_1)^2}f(\lambda_1) - \frac{\lambda_1\lambda_3\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}f'(\lambda_1)$$
$$+\frac{\lambda_1^2\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_4-\lambda_3)}f(\lambda_3) - \frac{\lambda_1^2\lambda_3}{(\lambda_4-\lambda_1)^2(\lambda_4-\lambda_3)}f(\lambda_4),$$

$$a_1^{(f)}(X) = \frac{-\lambda_1(3\lambda_1(\lambda_3+\lambda_4) - 2(\lambda_3^2+\lambda_3\lambda_4+\lambda_4^2))}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_4-\lambda_1)^2}f(\lambda_1) + \frac{\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1(\lambda_3+\lambda_4)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}f'(\lambda_1)$$
$$-\frac{\lambda_1(\lambda_1+2\lambda_4)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_4-\lambda_3)}f(\lambda_3) + \frac{\lambda_1(\lambda_1+2\lambda_3)}{(\lambda_4-\lambda_1)^2(\lambda_4-\lambda_3)}f(\lambda_4),$$

$$a_2^{(f)}(X) = \frac{3\lambda_1^2 - \lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_4 - \lambda_4^2}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_4-\lambda_1)^2}f(\lambda_1) - \frac{(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}f'(\lambda_1)$$
$$+\frac{2\lambda_1+\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_4-\lambda_3)}f(\lambda_3) - \frac{2\lambda_1+\lambda_3}{(\lambda_4-\lambda_1)^2(\lambda_4-\lambda_3)}f(\lambda_4),$$

$$a_3^{(f)}(X) = \frac{-2\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_4-\lambda_1)^2}f(\lambda_1) + \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}f'(\lambda_1)$$

$$-\frac{1}{(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)^2}f(\lambda_3)+\frac{1}{(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_1)^2}f(\lambda_4).$$

Cazul $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_4$

Utilizăm formulele din cazul 3.4.3 pentru $\lambda_3 \to \lambda_1$ și obținem

$$a_0^{(f)}(X) = \frac{\lambda_1^3+(\lambda_4-\lambda_1)^3}{(\lambda_4-\lambda_1)^3}f(\lambda_1)+\frac{\lambda_1\lambda_4(2\lambda_1-\lambda_4)}{(\lambda_4-\lambda_1)^2}f'(\lambda_1)+\frac{\lambda_1^2\lambda_4}{2(\lambda_4-\lambda_1)}f''(\lambda_1)-\frac{\lambda_1^3}{(\lambda_4-\lambda_1)^3}f(\lambda_4),$$

$$a_1^{(f)}(X) = \frac{-3\lambda_1^2}{(\lambda_4-\lambda_1)^3}f(\lambda_1)+\frac{-2\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_4+\lambda_4^2}{(\lambda_4-\lambda_1)^2}f'(\lambda_1)-\frac{\lambda_1(\lambda_1+2\lambda_4)}{2(\lambda_4-\lambda_1)}f''(\lambda_1)+\frac{3\lambda_1^2}{(\lambda_4-\lambda_1)^3}f(\lambda_4),$$

$$a_2^{(f)}(X) = \frac{3\lambda_1}{(\lambda_4-\lambda_1)^3}f(\lambda_1)+\frac{3\lambda_1}{(\lambda_4-\lambda_1)^2}f'(\lambda_1)+\frac{2\lambda_1+\lambda_4}{2(\lambda_4-\lambda_1)}f''(\lambda_1)-\frac{3\lambda_1}{(\lambda_4-\lambda_1)^3}f(\lambda_4),$$

$$a_3^{(f)}(X) == \frac{-1}{(\lambda_4-\lambda_1)^3}f(\lambda_1)-\frac{1}{(\lambda_4-\lambda_1)^2}f'(\lambda_1)-\frac{1}{2(\lambda_4-\lambda_1)}f''(\lambda_1)+\frac{1}{(\lambda_4-\lambda_1)^3}f(\lambda_4).$$

Cazul $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$

Utilizăm formulele obținute în cazul anterior pentru $\lambda_4 \to \lambda_1$ și obținem

$$a_0^{(f)}(X) = 2f(\lambda_1)-2\lambda_1 f'(\lambda_1)+\lambda_1^2 f''(\lambda_1)-\frac{\lambda_1^3}{3}f'''(\lambda_1),$$

$$a_1^{(f)}(X) = 2f'(\lambda_1)-2\lambda_1 f''(\lambda_1)+\lambda_1^2 f'''(\lambda_1),$$

$$a_2^{(f)}(X) = f''(\lambda_1)-\lambda_1 f'''(\lambda_1),$$

$$a_3^{(f)}(X) = \frac{1}{3}f'''(\lambda_1).$$

Cazul $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4$ **și** $\lambda_2 \neq \lambda_4$

Coeficienții Rodrigues generali pot fi obținuți din formulele din cazul 3.4.3 pentru $\lambda_4 \to \lambda_3$. Obținem

$$a_0^{(f)}(X) = \frac{\lambda_3^2(-3\lambda_1+\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^3}f(\lambda_1)-\frac{\lambda_1\lambda_3^2}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}f'(\lambda_1)-\frac{\lambda_1^2(\lambda_1-3\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^3}f(\lambda_3)-\frac{\lambda_1^2\lambda_3}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}f'(\lambda_3),$$

$$a_1^{(f)}(X) == \frac{6\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_3-\lambda_1)^3}f(\lambda_1)+\frac{\lambda_3(2\lambda_1+\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}f'(\lambda_1)-\frac{6\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_3-\lambda_1)^3}f(\lambda_3)+\frac{\lambda_1(\lambda_1+2\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}f'(\lambda_3),$$

$$a_2^{(f)}(X) = \frac{-3(\lambda_1+\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^3}f(\lambda_1) - \frac{\lambda_1+2\lambda_3}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}f'(\lambda_1) + \frac{3(\lambda_1+\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)^3}f(\lambda_3) - \frac{2\lambda_1+\lambda_3}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}f'(\lambda_3),$$

$$a_3^{(f)}(X) = \frac{2}{(\lambda_3-\lambda_1)^3}f(\lambda_1) + \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}f'(\lambda_1) - \frac{2}{(\lambda_3-\lambda_1)^3}f(\lambda_3) + \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}f'(\lambda_3).$$

3.5 Metoda polinomului de interpolare al lui Hermite

Presupunem că funcția f este definită pe spectrul matricei $X \in M_n(\mathbb{C})$. Ținând seama de Teorema 1.6 avem $\tilde{f}(X) = r(X)$, unde r este polinomul de interpolare Hermite care satisface condițiile

$$r^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), i = 1, \ldots, s, j = 0, \ldots, n_i - 1$$

unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sunt valorile proprii distincte ale lui X cu multiplicitățile $n_1, \ldots, n_s$ și $n_1 + \cdots + n_s = n$.

În acest caz coeficienții Rodrigues $a_0^{(f)}(X), \ldots, a_n^{(f)}(X)$ ai aplicației $\tilde{f}$ pentru matricea X sunt coeficienții polinomului Hermite definit de condițiile de interpolare de mai sus. Acesta este definit de

$$r(t) = \sum_{i=1}^{s} \left[\left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{1}{j!} \Phi_i^{(j)}(\lambda_i)(t-\lambda_i)^j \right) \prod_{j\neq i} (t-\lambda_j)^{n_j} \right] \tag{3.13}$$

unde $\Phi_i(t) = f(t)/\prod_{j\neq i}(t-\lambda_j)^{n_j}$.

Dacă valorile proprii ale matricei X sunt două câte două distincte, atunci polinomul Hermite r se reduce la polinomul de interpolare al lui Lagrange cu condițiile $r(\lambda_i) = f(\lambda_i), i = 1, \ldots, n$,

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) l_i(t), \tag{3.14}$$

unde l_i sunt polinoamele Lagrange fundamentale definite prin

$$l_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}, i = 1, \ldots, n. \tag{3.15}$$

3.5.1 Complexitatea problemei Rodrigues

Determinarea formei algebrice a polinomului Hermite dat de (3.13) este o problemă echivalentă cu problema determinării coeficienților Rodrigues ai aplicației $\tilde{f}$ când cunoaștem valorile proprii ale matricei X. Cum determinarea efectivă a spectrului matricei X implică rezolvarea unei ecuații algebrice de grad n, putem spune că problema Rodrigues are complexitate mai mare decât problema determinării explicite a coeficienților polinomului Hermite în context general. Aceasta este o problemă complicată în cazul în care n și multiplicitățile $n_1, \ldots, n_s$ sunt mari (a se vedea [31]).

Pe de altă parte, covariantele Frobenius X_j sunt polinoame în X, deci avem $X_j = p_j(X), j = 1, \ldots, \mu$. Dezvoltând $(X - \lambda_j I_n)^k$ în formula Schwerdtfeger (1.17) obținem

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(f)}(X) X^k = \sum_{j=1}^{\mu} p_j(X) \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda_j) \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C_k^s \lambda_j^s X^{k-s}.$$

Identificând coeficientul lui X^k în această relație, obținem coeficienții Rodrigues $a_k^{(f)}(X)$, pentru $k = 0, \ldots, n-1$. Această abordare oferă o altă imagine asupra complexității problemei Rodrigues prin reducerea acesteia la determinarea polinoamelor $p_j, j = 1, \ldots, \mu$.

În cazul în care valorile proprii ale matricei X sunt două câte două distincte, formulele (3.8) și (3.11) dau forma explicită pentru coeficienții polinomului Lagrange care satisface condițiile de interpolare de mai sus.

Ilustrăm în continuare această metodă pentru cazul degenerat prezentat pentru $n = 4$ în subsecțiunea 3.4.3 corespunzător situației $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$. Condițiile de interpolare sunt $r(\lambda_1) = f(\lambda_1), r'(\lambda_1) = f'(\lambda_1), r(\lambda_3) = f(\lambda_3), r(\lambda_4) = f(\lambda_4)$.

Polinomul de interpolare al lui Hermite este

$$\begin{aligned} r(t) = &\left\{ \frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} + \left[\left(\frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)^2(\lambda_4 - \lambda_1)} + \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)^2} \right) f(\lambda_1) + \right.\right. \\ &\left.\left. \frac{f'(\lambda_1)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} \right] (t - \lambda_1) \right\} (t - \lambda_3)(t - \lambda_4) - \frac{f(\lambda_3)}{(\lambda_3 - \lambda_1)^2(\lambda_4 - \lambda_1)} (t - \lambda_1)^2 (t - \lambda_4) \\ &+ \frac{f(\lambda_4)}{(\lambda_4 - \lambda_1)^2(\lambda_4 - \lambda_3)} (t - \lambda_1)^2 (t - \lambda_3). \end{aligned}$$

Prin calculul coeficienților polinomului r regăsim formulele corespunzătoare acestui caz din subsecțiunea 3.4.3.

3.5.2 Rezolvarea problemei Rodrigues pentru valori proprii cu multiplicitate dublă

În această subsecțiune considerăm că funcția f este definită pe spectrul matricei $X \in M_{2s}(\mathbb{C})$ și că valorile proprii distincte $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ale lui X au multiplicitate dublă, adică avem $n_1 = \cdots = n_s = 2$. În acest caz polinomul de interpolare r al lui Hermite satisface condițiile

$$r(\lambda_i) = f(\lambda_i), r'(\lambda_i) = f'(\lambda_i), i = 1, \ldots, s$$

iar formula (3.13) devine

$$r(t) = \sum_{i=1}^{s} \left[f(\lambda_i)\left(1 - 2l_i'(\lambda_i)(t-\lambda_i)\right) + f'(\lambda_i)(t-\lambda_i)\right] l_i^2(t), \tag{3.16}$$

unde l_i sunt polinoamele Lagrange fundamentale definite în (3.15).

Observăm că formula (3.16) se poate scrie sub forma

$$r(t) = \sum_{i=1}^{s} (A_i t + B_i) r_i(t), \tag{3.17}$$

unde

$$A_i = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} (\lambda_i - \lambda_j)^2} \left[f'(\lambda_i) - 2f(\lambda_i) l_i'(\lambda_i)\right],$$

$$B_i = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} (\lambda_i - \lambda_j)^2} \left[f(\lambda_i)\left(1 + 2\lambda_i l_i'(\lambda_i)\right) - \lambda_i f'(\lambda_i)\right]$$

și r_i este polinomul $\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} (t-\lambda_j)^2, i = 1, \ldots, s.$

Pe de altă parte avem $l_i(\lambda_i) = 1$ și

$$\frac{l_i'(t)}{l_i(t)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} \frac{1}{t-\lambda_j}, i = 1, \ldots, s,$$

deci obținem

$$l_i'(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}, i = 1, \ldots, s. \tag{3.18}$$

Pentru a obține forma algebrică a polinomului r_i observăm că putem scrie

$$r_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} (t-\lambda_j)^2 = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} (t-\lambda_j)(t-\lambda_j) = t^{2s-2} - \sigma_{i,1} t^{2s-1} + \sigma_{i,2} t^{2s-2} - \cdots + \sigma_{i,2s-2}, \tag{3.19}$$

unde $\sigma_{i,k}(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) = s_k(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_i}, \widehat{\lambda_i}, \ldots, \lambda_s, \lambda_s)$ este polinomul simetric de ordin k în $2s-2$ variabile $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_i}, \widehat{\lambda_i}, \ldots, \lambda_s, \lambda_s$, dintre care lipsește λ_i, pentru orice $k =$

$1, \ldots, 2s-2$.

Combinând formulele (3.17) și (3.19) obținem

$$
\begin{aligned}
r(t) &= \sum_{i=1}^{s}(A_i t + B_i)(t^{2s-2} - \sigma_{i,1}t^{2s-1} + \sigma_{i,2}t^{2s-2} - \cdots + \sigma_{i,2s-2}) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{s} A_i\right) t^{2s-1} + \sum_{i=1}^{s}(-A_i\sigma_{i,1} + B_i)t^{2s-2} + \cdots \\
&+ \sum_{i=1}^{s}(A_i\sigma_{i,2} - B_i\sigma_{i,1})t^{2s-3} + \cdots + \sum_{i=1}^{s}(A_i\sigma_{i,2s-2} - B_i\sigma_{i,2s-3})t + \\
&+ \sum_{i=1}^{s} B_i\sigma_{i,2s-2}.
\end{aligned}
$$

Obținem astfel următorul rezultat care rezolvă complet problema generală a lui Rodrigues în cazul în care valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sunt distincte și au multiplicitate dublă.

Teorema 3.3. *Pentru orice $k = 0, 1, \ldots, n-1$, avem*

$$
\begin{aligned}
a_k^{(f)}(X) = (-1)^{k+1}\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}(\lambda_i-\lambda_j)^2}&\left\{\left[f'(\lambda_i) - 2f(\lambda_i)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}\right]\sigma_{i,2s-k-1}\right.\\
&\left.-\left[f(\lambda_i)\left(1+2\lambda_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}\right)-\lambda_i f'(\lambda_i)\right]\sigma_{i,2s-k-2}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Corolarul 3.1. *Dacă valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ale matricei $X \in M_n(\mathbb{C}), n = 2s$, sunt distincte două câte două și au multiplicitate dublă, atunci coeficienții Rodrigues $a_0^{(f)}(X), \ldots, a_{n-1}^{(f)}(X)$ sunt combinații liniare de $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_s), f'(\lambda_1), \ldots, f'(\lambda_s)$ având coeficienții funcții raționale de $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, adică avem*

$$
a_k^{(f)}(X) = b_k^{(1)}(X)f(\lambda_1) + \cdots + b_k^{(s)}(X)f(\lambda_s) + c_k^{(1)}(X)f'(\lambda_1) + \cdots + c_k^{(s)}f'(\lambda_s),
$$

unde $b_k^{(1)}, \ldots, b_k^{(s)}, c_k^{(1)}, \ldots, c_k^{(s)} \in \mathbb{Q}[\lambda_1, \ldots, \lambda_s], k = 0, \ldots, n-1$.

În continuare ilustrăm formulele (3.19) pentru a determina coeficientul $a_0^{(f)}(X)$ în cazul $n = 4$ prezentat în subsecțiunea 3.4.3 în situația $\lambda_1 = \lambda_3, \lambda_2 = \lambda_4$ și $\lambda_1 \neq \lambda_2$. În această situație avem

$$
\sigma_{1,1}(\lambda_1,\lambda_2) = \sigma_1(\widehat{\lambda_1},\widehat{\lambda_1},\lambda_2,\lambda_2) = 2\lambda_2, \sigma_{1,2}(\lambda_1,\lambda_2) = \sigma_2(\widehat{\lambda_1},\widehat{\lambda_1},\lambda_2,\lambda_2) = \lambda_2^2,
$$

$$
\sigma_{2,1}(\lambda_1,\lambda_2) = \sigma_1(\lambda_1,\lambda_1,\widehat{\lambda_2},\widehat{\lambda_2}) = 2\lambda_1, \sigma_{2,2}(\lambda_1,\lambda_2) = \sigma_2(\lambda_1,\lambda_1,\widehat{\lambda_2},\widehat{\lambda_2}) = \lambda_1^2.
$$

Aplicând formula (3.20) regăsim coeficientul $a_0^{(f)}(X)$ sub forma

$$\begin{aligned} a_0^{(f)}(X) = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\Bigg[& f(\lambda_1)\left(\lambda_2^2+\frac{2\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda_1-\lambda_2}\right)-\lambda_1\lambda_2^2 f'(\lambda_1)+ \\ & + f(\lambda_2)\left(\lambda_1^2+\frac{2\lambda_1^2\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\right)-\lambda_1^2\lambda_2 f'(\lambda_2)\Bigg] = \\ = & \frac{\lambda_2^2(-3\lambda_1+\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}f(\lambda_1)-\frac{\lambda_1\lambda_2^2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}f'(\lambda_1)+ \\ + & \frac{-\lambda_1^2(\lambda_1-3\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}f(\lambda_2)-\frac{\lambda_1^2\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}f'(\lambda_2). \end{aligned}$$

3.5.3 Formula determinant pentru coeficienții Rodrigues în cazul valorilor proprii cu multiplicitate dublă

Formulele (3.20) pot fi scrise într-o formă compactă și uniformă prin utilizarea unor determinanți aleși convenabil. Punctul de pornire este formula (3.8) aplicată pentru funcția f definită pe spectrul matricei $X \in M_{2s}(\mathbb{C})$ despre care presupunem că este analitică. Considerăm valorile proprii distincte $\lambda_1, \lambda_1', \lambda_2, \lambda_2', \ldots, \lambda_s, \lambda_s'$ ale matricei X și facem succesiv $\lambda_1' \to \lambda_1, \lambda_2' \to \lambda_2, \ldots, \lambda_s' \to \lambda_s$. Folosind formula derivatei unui determinant funcțional și regula lui l'Hospital obținem următorul rezultat.

Teorema 3.4. *Dacă valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ale matricei X sunt distincte două câte două, atunci coeficienții Rodrigues $a_0^{(f)}(X), \ldots, a_{n-1}^{(f)}(X)$ sunt dați de*

$$a_k^{(f)}(X) = \frac{1}{\prod\limits_{1\le i<j\le s}(\lambda_j-\lambda_i)^2}\det U_{n,k}^{(f,f')}(\lambda_1,\ldots,\lambda_s) \qquad (3.21)$$

unde $U_{n,k}^{(f,f')}(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)$ este matricea $n\times n$ definită în blocuri $n\times 2$

$$U_{n,k}^{(f,f')}(\lambda_1,\ldots,\lambda_s) = \left(\left[U_k^{(f,f')}(\lambda_1)\right]\ldots\left[U_k^{(f,f')}(\lambda_s)\right]\right)$$

iar blocul $U_k^{(f,f')}$ este dat de

$$U_k^{(f,f')}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_j & 1 \\ \vdots & \vdots \\ f(\lambda_j) & f'(\lambda_j) \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_j^{n-1} & (n-1)\lambda_j^{n-2} \end{pmatrix}, j = 1,\ldots,s. \qquad (3.22)$$

Elementele $f(\lambda_j), f'(\lambda_j)$ se găsesc pe linia $k+1$, iar elementele situate pe a doua coloană se obțin prin derivare în raport cu λ_j a elementelor corespunzătoare de pe prima coloană.

Pentru a ilustra formula (3.21), considerăm $n = 6$, funcția analitică f este definită pe spectrul matricei $X \in M_6(\mathbb{C})$ cu valorile proprii distincte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ fiecare cu multiplicitate dublă. Blocurile (3.22) definite de matricele 6×2 care dau coeficientul Rodrigues $a_1^{(f)}(X)$ din formula (3.21) sunt

$$U_1^{(f,f')}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 \\ \lambda_1^4 & 4\lambda_1^3 \\ \lambda_1^5 & 5\lambda_1^4 \end{pmatrix}, U_1^{(f,f')}(\lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(\lambda_2) & f'(\lambda_2) \\ \lambda_2^2 & 2\lambda_2 \\ \lambda_2^3 & 3\lambda_2^2 \\ \lambda_2^4 & 4\lambda_2^3 \\ \lambda_2^5 & 5\lambda_2^4 \end{pmatrix}, U_1^{(f,f')}(\lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(\lambda_3) & f'(\lambda_3) \\ \lambda_3^2 & 2\lambda_3 \\ \lambda_3^3 & 3\lambda_3^2 \\ \lambda_3^4 & 4\lambda_3^3 \\ \lambda_3^5 & 5\lambda_3^4 \end{pmatrix}$$

Din formula (3.21) obținem

$$a_1^{(f)}(X) = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2(\lambda_3 - \lambda_2)^2} \det\left(\left[U_1^{(f,f')}(\lambda_1)\right] \left[U_1^{(f,f')}(\lambda_2)\right] \left[U_1^{(f,f')}(\lambda_3)\right]\right).$$

3.6 Aplicația exponențială a grupului special ortogoal SO(n)

Am văzut în Secțiunea 2.2 că mulțimea matricelor reale ortogonale de forma $n \times n$ formează un grup Lie în raport cu înmulțirea, notat cu $\mathbf{O}(n)$. Submulțimea lui $\mathbf{O}(n)$ formată din toate maticele care au determinatul egal cu $+1$ formează un subgrup notat cu $\mathbf{SO}(n)$ și numit *grupul special ortogonal* al spațiului Euclidean $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{SO}(n)$ este un grup important folosit în mecanică (vezi faimoasa carte a lui V.I.Arnold [9]) și în multe alte domenii ale matematicii. Reamintim că, din motive geometrice, matricele din $\mathbf{SO}(n)$ sunt numite și *matrice de rotație*.

Algebra Lie $\mathfrak{so}(n)$ a lui $\mathbf{SO(n)}$ este formată din toate matricele antisimetrice din $M_n(\mathbb{R})$, iar paranteza Lie este comutatorul standard al matricelor definit prin $[A, B] = AB - BA$. Aplicația exponențială $\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ este dată de restricția $\exp|_{\mathfrak{so}(n)}$ a aplicației exponențiale $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ (a se vedea Secțiunea 1.1).

În cele ce urmează vom aplica rezultatele obținute în Secțiunile $3.2 - 3.4$ pentru a obține formulele Rodrigues pentru aplicația exponențială a grupului special ortogonal $\mathbf{SO(n)}$. Matricele din algebra Lie $\mathfrak{so}(n)$ au două proprietăți esențiale care simplifică calculul coeficienților Rodrigues:

- dacă n este impar, atunci ele sunt singulare, adică au o valoare proprie egală cu 0 (posibil cu o multiplicitate);
- valorile proprii diferite de zero sunt pur imaginare și bineînțeles conjugate două câte două.

Unele cazuri particulare au fost studiate în lucrările [54] și [61].

3.6.1 Cazurile clasice $n = 2, 3$

Când $n = 2$, o matrice antisimetrică $X \neq O_2$ poate fi scrisă ca

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*,$$

având valorile proprii $\lambda_1 = ai$, $\lambda_2 = -ai$.

Din formulele din subsecțiunea 3.3.1 obținem imediat

$$a_0 = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1} - \lambda_1 e^{\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{2}\left(e^{ai} + e^{-ai}\right) = \cos a,$$

$$a_1 = \frac{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{e^{ai} - e^{-ai}}{2ai} = \frac{\sin a}{a},$$

și atunci formula Rodrigues corespunzătoare este

$$\exp(X) = (\cos a) I_2 + \frac{\sin a}{a} X.$$

Când $n = 3$, o matrice antisimetrică X este de forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

având polinomul caracteristic

$$p_X(t) = t^3 + (a^2 + b^2 + c^2)t = t^3 + \theta^2 t,$$

unde $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Valorile proprii ale lui X sunt $\lambda_1 = \theta i$, $\lambda_2 = -\theta i$, $\lambda_3 = 0$. Este evident că $X = O_3$ dacă și numai dacă $\theta = 0$, deci este suficient să considerăm numai situația $\theta \neq 0$. Deoarece $\theta \neq 0$, folosind formulele obținute în subsecțiunea 3.3.1, rezultă

$$a_0 = 1, \ a_1 = \frac{\sin\theta}{\theta}, \ a_2 = \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2},$$

obținând bine-cunoscuta formulă clasică a lui Rodrigues

$$\exp(X) = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} X + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} X^2.$$

discutată și la finalul Secțiunii 2.3.

3.6.2 Cazul $n = 4$

Forma generală a unei matrice $X \in so(4)$ este

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix},$$

și polinomul caracteristic corespunzător este dat de

$$p_X(t) = t^4 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)t^2 + (af - be + cd)^2.$$

Fie $\lambda_{1,2} = \pm\alpha i$, $\lambda_{3,4} = \pm\beta i$ valorile proprii ale matricei X, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Este evident că numerele reale α și β pot fi determinate efectiv în funcție de a, b, c, d, e, f rezolvând ecuația $p_X(t) = 0$.

Considerăm următoarele trei cazuri

Cazul 1. Dacă $|\alpha| \neq |\beta|$, α, $\beta \in \mathbb{R}^*$, atunci utilizând formulele din subsecțiunea 3.3.3, după calcule simple obținem coeficienții Rodrigues

$$a_0 = \frac{\beta^2 \cos\alpha - \alpha^2 \cos\beta}{\beta^2 - \alpha^2}, a_1 = \frac{\beta^3 \sin\alpha - \alpha^3 \sin\beta}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)},$$

$$a_2 = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\beta^2 - \alpha^2}, a_3 = \frac{\beta \sin\alpha - \alpha \sin\beta}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)}.$$

În acest caz rezultă formula Rodrigues corespunzătoare în forma

$$\begin{aligned} \exp(X) = {} & \frac{\beta^2 \cos\alpha - \alpha^2 \cos\beta}{\beta^2 - \alpha^2} I_4 + \frac{\beta^3 \sin\alpha - \alpha^3 \sin\beta}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)} X \\ & + \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\beta^2 - \alpha^2} X^2 + \frac{\beta \sin\alpha - \alpha \sin\beta}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)} X^3. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Această formulă a fost obținută de D. Andrica și R.-A. Rohan [7] folosind metoda lui Putzer (a se vedea [56]).

Cazul 2. Dacă $\alpha \neq 0$ și $\beta = 0$, atunci vom utiliza formulele din subsecțiunea 3.4.3 pentru $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 = \lambda_4$ și obținem

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha^2}, a_3 = \frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3}. \tag{3.24}$$

Așadar, în acest caz formula Rodrigues corespunzătoare este

$$\exp(X) = I_4 + X + \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha^2} X^2 + \frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^3} X^3. \tag{3.25}$$

Cazul 3. Dacă $\alpha = \beta \neq 0$, atunci vom utiliza formulele din subsecțiunea 3.4.3 pentru

$\lambda_1 = \lambda_3, \lambda_2 = \lambda_4, \lambda_1 \neq \lambda_2$ și după calcule simple obținem

$$a_0 = \frac{\alpha \sin\alpha + 2\cos\alpha}{2}, a_1 = \frac{3\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha}, a_2 = \frac{\sin\alpha}{2\alpha}, a_3 = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha^3}, \quad (3.26)$$

deci formula Rodrigues este

$$\exp(X) = \frac{\alpha\sin\alpha + 2\cos\alpha}{2} I_4 + \frac{3\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha} X \quad + \frac{\sin\alpha}{2\alpha} X^2 + \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha^3} X^3. \quad (3.27)$$

Menționăm că în lucrarea [7] formulele (3.25), (3.26), (3.27) au fost obținute folosind metoda lui Putzer (vezi [56]).

3.6.3 Cazul $n = 5$

Abordarea acestui caz nu s-a făcut în lucrarea [4] și o prezentăm în detaliu în această subsecțiune.

Forma generală a unei matrice $X \in so(5)$ este

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & j \\ -c & -f & -h & 0 & k \\ -d & -g & -j & -k & 0 \end{pmatrix},$$

cu polinomul caracteristic dat de

$$\begin{aligned} p_X(t) = \det(tI_5 - X) = t^5 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + j^2 + k^2)t^3 + \\ (c^2e^2 + d^2e^2 - 2bcef + b^2f^2 + d^2f^2 - 2bdeg - 2cdfg + b^2g^2 + c^2g^2 + 2aceh \\ - 2abfh + a^2h^2 + d^2h^2 + g^2h^2 + 2adej - 2abgj - 2cdhj - 2fghj + a^2j^2 + c^2j^2 \\ + f^2j^2 + 2adfk - 2acgk + 2bdhk + 2eghk - 2bcjk - 2efjk + a^2k^2 + b^2k^2 + e^2k^2)t \end{aligned}$$

Fie $\lambda_{1,2} = \pm\alpha i$, $\lambda_{3,4} = \pm\beta i, \lambda_5 = 0$ valorile proprii ale matricei X, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Prin rezolvarea ecuației $p_X(t) = 0$, obținem α și β ca funcții de $a, b, c, d, e, f, g, h, j, k$.

Pentru determinarea coeficienților Rodrigues considerăm următoarele trei cazuri.

Cazul 1. Dacă $|\alpha| \neq |\beta|$, α, $\beta \in \mathbb{R}^*$, atunci utilizând formula (3.8) avem

$$V_5(\alpha i, -\alpha i, \beta i, -\beta i, 0) = -4\alpha^3\beta^3(\beta^2 - \alpha^2)^2$$

și obținem

$$a_0(X) = \frac{V_{5,0}(\alpha i, -\alpha i, \beta i, -\beta i, 0)}{V_5(\alpha i, -\alpha i, \beta i, -\beta i, 0)} = \frac{4\alpha^3\beta^3(\beta^2 - \alpha^2)^2}{4\alpha^3\beta^3(\beta^2 - \alpha^2)^2} = 1$$

$$a_1(X) = \frac{V_{5,1}(\alpha i, -\alpha i, \beta i, -\beta i, 0)}{V_5(\alpha i, -\alpha i, \beta i, -\beta i, 0)} = \frac{\beta^3 \sin\alpha - \alpha^3 \sin\beta}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)}$$

$$a_2(X) = \frac{V_{5,2}(\alpha i, -\alpha i, \beta i, -\beta i, 0)}{V_5(\alpha i, -\alpha i, \beta i, -\beta i, 0)} = \frac{\beta^4 \cos\alpha - \alpha^4 \cos\beta + \alpha^4 - \beta^4}{\alpha^2\beta^2(\beta^2 - \alpha^2)}$$

$$a_3(X) = \frac{V_{5,3}(\alpha i, -\alpha i, \beta i, -\beta i, 0)}{V_5(\alpha i, -\alpha i, \beta i, -\beta i, 0)} = \frac{\beta \sin\alpha - \alpha \sin\beta}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)}$$

$$a_4(X) = \frac{V_{5,4}(\alpha i, -\alpha i, \beta i, -\beta i, 0)}{V_5(\alpha i, -\alpha i, \beta i, -\beta i, 0)} = \frac{\beta^2 \cos\alpha - \alpha^2 \cos\beta + \alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2\beta^2(\beta^2 - \alpha^2)}.$$

Formula Rodrigues corespunzătoare acestui caz este

$$\begin{aligned}\exp(X) = I_5 &+ \frac{\beta^3 \sin\alpha - \alpha^3 \sin\beta}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)} X + \frac{\beta^4 \cos\alpha - \alpha^4 \cos\beta + \alpha^4 - \beta^4}{\alpha^2\beta^2(\beta^2 - \alpha^2)} X^2 \\ &+ \frac{\beta \sin\alpha - \alpha \sin\beta}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)} X^3 + \frac{\beta^2 \cos\alpha - \alpha^2 \cos\beta + \alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2\beta^2(\beta^2 - \alpha^2)} X^4.\end{aligned}$$

Cazul 2. Dacă $\alpha = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, avem valorile propii ale matricei X date de $\lambda_1 = \lambda_3 = \alpha i, \lambda_2 = \lambda_4 = -\alpha i, \lambda_5 = 0$. Prin urmare, avem multiplicitate dublă pentru $\alpha i, \alpha i, -\alpha i, -\alpha i$ și simplă pentru 0.

Considerăm numerele reale ϵ, ϵ' astfel încât $\alpha i, \alpha i + \epsilon, -\alpha i, -\alpha i + \epsilon', 0$ sunt distincte. În această situație avem

$$V_5(\alpha i, \alpha i + \epsilon, -\alpha i, -\alpha i + \epsilon', 0) = -2\alpha^3 i\epsilon(2\alpha i + \epsilon)(\alpha i + \epsilon)\epsilon'(2\alpha i + \epsilon - \epsilon')(\alpha i - \epsilon')(2\alpha i - \epsilon')$$

Aplicăm Teorema 3.1. 1) și obținem

$$\begin{aligned}a_k^{(f)}(X_{\epsilon,\epsilon'}) &= \frac{V_{5,k}^{(f)}(\alpha i, \alpha i + \epsilon, -\alpha i, -\alpha i + \epsilon', 0)}{V_5(\alpha i, \alpha i + \epsilon, -\alpha i, -\alpha i + \epsilon', 0)} \\ &= -\frac{V_{5,k}^{(f)}(\alpha i, \alpha i + \epsilon, -\alpha i, -\alpha i + \epsilon', 0)}{2\alpha^3 i(2\alpha i + \epsilon)(\alpha i + \epsilon)\epsilon'(2\alpha i + \epsilon - \epsilon')(\alpha i - \epsilon')(2\alpha i - \epsilon')\epsilon'}, \ k = 0, 1, 2, 3, 4\end{aligned}$$

unde $f(z) = e^z$ și $X_{\epsilon,\epsilon'}$ este matricea cu valorile proprii distincte $\alpha i, \alpha i + \epsilon, -\alpha i, -\alpha i + \epsilon', 0$. Pentru $\epsilon \to 0$, rezultă

$$a_k^{(f)}(X_{0,\epsilon'}) = \frac{\det\left(\left[U_k^{(f,f')}(\alpha i)\right]\left[U_k^{(f)}(-\alpha i)\right]\left[U_k^{(f)}(-\alpha i + \epsilon')\right]\left[U_k^{(f)}(0)\right]\right)}{4\alpha^5 i(2\alpha i - \epsilon')(\alpha i - \epsilon')(2\alpha i - \epsilon')}, \tag{3.28}$$

unde $U_k^{(f,f')}(z)$ este blocul 5×2 dat de

$$U_k^{(f,f')}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ e^z & e^z \\ \vdots & \vdots \\ z^4 & 4z^3 \end{pmatrix}$$

obținut prin procesul descris în formula (3.22), iar $U_k^{(f)}(z)$ este blocul 5×1 definit prin

$$U_k^{(f)}(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ e^z \\ \vdots \\ z^4 \end{pmatrix}.$$

Pentru $\epsilon' \to 0$, obținem

$$a_k^{(f)}(X_{0,0}) = \frac{1}{16\alpha^8} \det\left(\left[U_k^{(f,f')}(\alpha i)\right] \left[U_k^{(f,f')}(-\alpha i)\right] \left[U_k^{(f)}(0)\right]\right), \tag{3.29}$$

unde $X_{0,0} = X$ și $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Scriind explicit formulele (3.29) găsim

$$a_0(X) = 1,\ a_1(X) = \frac{3\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha},\ a_2(X) = -\frac{\alpha\sin\alpha + 4\cos\alpha}{2\alpha^2},$$

$$a_3(X) = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha^3},\ a_4(X) = -\frac{\alpha\sin\alpha + 2\cos\alpha}{2\alpha^4},$$

unde determinanții au fost calculați cu programul MATHEMATICA.

Formula Rodrigues corespunzătoare acestui caz este

$$\exp(X) = I_5 + \frac{3\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha}X - \frac{\alpha\sin\alpha + 4\cos\alpha}{2\alpha^2}X^2 + \\ + \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha^3}X^3 - \frac{\alpha\sin\alpha + 2\cos\alpha}{2\alpha^4}X^4.$$

Cazul 3. Dacă $\beta = 0$ și $\alpha \in \mathbb{R}^*$, avem valorile proprii ale matricei X date de $\lambda_1 = \alpha i, \lambda_2 = -\alpha i, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$.

Considerăm numerele reale distincte și nenule ϵ, ϵ'. Atunci $\alpha i, -\alpha i, 0, \epsilon, \epsilon'$ sunt distincte și avem

$$V_5(\alpha i, -\alpha i, 0, \epsilon, \epsilon') = -2\alpha^3 i(\epsilon^2 + \alpha^2)(\epsilon'^2 + \alpha^2)\epsilon\epsilon'(\epsilon' - \epsilon).$$

Aplicând Teorema 3.1. 1), rezultă

$$
\begin{aligned}
a_k^{(f)}(X_{\epsilon,\epsilon'}) &= \frac{V_{5,k}^{(f)}(\alpha i, -\alpha i, 0, \epsilon, \epsilon')}{V_5(\alpha i, -\alpha i, 0, \epsilon, \epsilon')} \\
&= -\frac{V_{5,k}^{(f)}(\alpha i, -\alpha i, 0, \epsilon, \epsilon')}{-2\alpha^3 i(\epsilon^2+\alpha^2)(\epsilon'^2+\alpha^2)\epsilon\epsilon'(\epsilon'-\epsilon)},\ k = 0,1,2,3,4,
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

unde $f(z) = e^z$ și $X_{\epsilon,\epsilon'}$ este matricea cu valorile proprii distincte $\alpha i, -\alpha i, 0, \epsilon, \epsilon'$. Pentru $\epsilon \to 0$, obținem

$$
a_k^{(f)}(X_{0,\epsilon'}) = -\frac{\det\left(\left[U_k^{(f)}(\alpha i)\right]\left[U_k^{(f)}(-\alpha i)\right]\left[U_k^{(f,f')}(0)\right]\left[U_k^{(f)}(\epsilon')\right]\right)}{2\alpha^5 i(\epsilon'^2+\alpha^2)(\epsilon')^2}, \tag{3.31}
$$

unde $U_k^{(f)}(z)$ și $U_k^{(f,f')}(z)$ sunt blocurile 5×1, respectiv 5×2 definite în Cazul 2. Pentru $\epsilon' \to 0$, din formula (3.31) rezultă

$$
a_k^{(f)}(X_{0,0}) = -\frac{\det\left(\left[U_k^{(f)}(\alpha i)\right]\left[U_k^{(f)}(-\alpha i)\right]\left[U_k^{(f,f',f'')}(0)\right]\right)}{4\alpha^7 i}, \tag{3.32}
$$

unde $U_k^{(f,f',f'')}(z)$ este blocul 5×3 dat de,

$$
U_k^{(f,f',f'')}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^z & e^z & e^z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z^4 & 4z^3 & 12z^2 \end{pmatrix}
$$

în care coloana a 2-a este derivata primei coloane, iar coloana a 3-a este derivata secundă a primei coloane. Evident, avem $X_{0,0} = X$, deci formulele (3.32) dau coeficienții Rodrigues în acest caz.

Scriind explicit formulele (3.32) găsim

$$
a_0(X) = 1,\ a_1(X) = 0,\ a_2(X) = 0,
$$

$$
a_3(X) = -\frac{\sin\alpha}{\alpha^3},\ a_4(X) = \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^4}.
$$

Formula Rodrigues corespunzătoare acestui caz este

$$
\exp(X) = I_5 - \frac{\sin\alpha}{\alpha^3}X^3 + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^4}X^4.
$$

Capitolul 4

Transformata Cayley și formule de tip Rodrigues

În acest capitol prezentăm în prima secțiune transformata Cayley a grupului $\mathbf{SO}(n)$. În Secțiunea 4.2 definim, prin analogie, un tip de transformată Cayley pentru grupul special euclidian $\mathbf{SE}(n)$ și prezentăm legătura dintre cele două transformate Cayley. Secțiunea 4.3 este dedicată generalizării acestei noțiuni. Formule de tip Rodrigues pentru transformata Cayley sunt determinate în Secțiunea 4.4. Pentru grupul $\mathbf{SO}(n)$ sunt calculate aceste formule pentru cazurile particulare $n = 2, 3, 4$, iar în cazul grupului $\mathbf{SE}(n)$ sunt tratate cazurile $n = 2$ și $n = 3$. Dintre referințele utilizate în elaborarea acestui capitol menționăm R.-A. Rohan [60]. Prezentarea urmărește lucrarea noastră [3].

4.1 Transformata Cayley clasică a grupului $\mathbf{SO}(n)$

Așa cum am precizat deja în secțiunea anterioară, matricele din grupul $\mathbf{SO}(n)$ descriu rotațiile ca mișcări în spațiul $\mathbb{R}^n$. Dacă matricea A aparține algebrei Lie $\mathfrak{so}(n)$ a grupului Lie $\mathbf{SO}(n)$, atunci matricea $I_n - A$ este inversabilă.

Prin urmare, valorile proprii $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ale matricei A sunt 0 sau pur imaginare, deci valorile proprii ale matricii $I_n - A$ sunt $1 - \lambda_1, ..., 1 - \lambda_n$. Ele sunt evident diferite de 0, prin urmare avem $\det(I_n - A) = (1 - \lambda_1)...(1 - \lambda_n) \neq 0$, deci $I_n - A$ este inversabilă.

Aplicația $\mathrm{Cay} : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$, definită prin

$$\mathrm{Cay(A) = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}}$$

este numită *transformata Cayley* a grupului $\mathbf{SO}(n)$.

Notăm cu $\sum$ submulțimea lui $\mathbf{SO}(n)$ formată din matricele care au valoarea proprie -1. Evident avem $R \in \sum$ dacă și numai dacă matricea $I_n + R$ este singulară.

Teorema 4.1. *Aplicația* $\mathrm{Cay} : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n) \setminus \Sigma$ *este bijectivă și inversa ei este* Cay^{-1} : $\mathbf{SO}(n) \setminus \sum \to \mathfrak{so}(n)$, *unde* $\mathrm{Cay}^{-1}(R) = (R + I_n)^{-1}(R - I_n)$.

4.2 Transformata Cayley a grupului euclidian $\mathbf{SE}(n)$

În această secțiune vom defini transformata Cayley pentru grupul special euclidian $\mathbf{SE}(n)$. Prin analogie cu grupul special ortogonal $\mathbf{SO}(n)$, definim aplicația Cay_{n+1} : $\mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$, unde

$$\mathrm{Cay}_{n+1}(S) = (I_{n+1} + S)(I_{n+1} - S)^{-1}$$

vom numi această aplicație *transformata Cayley* a grupului $\mathbf{SE}(n)$.

Legătura dintre transformarea $\mathrm{Cay} : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ și $\mathrm{Cay}_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$ este dată de formula

$$\mathrm{Cay}_{n+1}(S) = \begin{pmatrix} \mathrm{Cay}(A) & (R + I_n)u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3 Transformata Cayley generalizată

Spunem că matricea $A \in M(n, \mathbb{K})$ este *ortogonală* dacă $AA^* = \mathrm{id}$, unde $A^* = \bar{A}^t$ este conjugata transpusei, iar $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sau $\mathbb{H}$, unde $\mathbb{H}$ este algebra cuaternionilor. Astfel o matrice poate fi identificată cu o $\mathbb{K}-$ aplicație liniară $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ care invariază produsul $\langle v, w \rangle = v^* w$. Notăm cu $\mathbf{O}(n, \mathbb{K})$ grupul Lie al matricelor ortogonale. Depinzând de $\mathbb{K}$ acest grup corespunde grupului ortogonal $\mathbf{O}(n)$, grupului unitar $\mathbf{U}(n)$ sau grupului simplectic $\mathbf{Sp}(n)$, după cum $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, respectiv $\mathbb{H}$.

Fie $A \in \mathbf{O}(n, \mathbb{K})$ o matrice ortogonală, unde $\mathbb{K}$ este $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sau $\mathbb{H}$.

Definiția 4.1. *Notăm cu $\Omega(A) \subset M(n, \mathbb{K})$ mulțimea deschisă a matricelor X cu proprietatea că $A + X$ este inversabilă. Aplicația Cayley centrată în A este funcția*

$$c_A : \Omega(A) \to \Omega(A^*)$$

dată de

$$c_A(X) = (I - A^* X)(A + X)^{-1}.$$

Aplicația Cayley clasică corespunde cu $A = I_n$. Așa cum vom vedea în propoziția următoare, aplicația c_A este bine definită și este inversabilă cu $c_A^{-1} = c_{A^*}$.

Propoziția 4.1. *Pentru $X \in \Omega(A)$ au loc următoarele proprietăți:*

1. $c_A(X) = (A + X)^{-1}(I - XA^*)$;

2. *inversa matricii* $A^* + c_A(X)$ *este* $\frac{1}{2}(A + X)$;

3. $c_A(X) \in \Omega(A^*)$;

4. c_A *este un difeomorfism cu* $c_A^{-1} = c_{A^*}$.

Vom avea nevoie de asemenea de următoarea proprietate interesantă, care este ușor de demonstrat.

Propoziția 4.2. *Pentru $X \in \Omega(A)$ au loc proprietățile:*

1. $X^* \in \Omega(A^*)$ *și* $c_{A^*}(X^*) = c_A(X)^*$;

2. *pentru orice matrice* $U \in \boldsymbol{O}(n, \mathbb{K})$ *avem* $UXU^* \in \Omega(UAU^*)$ *și*

$$c_{UAU^*}(UXU^*) = Uc_A(X)U^*;$$

3. *dacă matricea X este inversabilă, atunci* $X^{-1} \in \Omega(A^*)$ *deoarece*

$$(A^* + X^{-1})^{-1} = A(A + X)^{-1}X.$$

Mai mult, avem $c_{A^*}(X^{-1}) = -Ac_A(X)A$.

4.4 Formule de tip Rodrigues pentru transformata Cayley

4.4.1 Calcule pentru grupul SO(n) în dimensiune mică

Formulele obținute în această subsecțiune sunt preluate din lucrarea noastră [3]. Evident transformata Cayley este obținută din funcția analitică

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \cdots, |z| < 1,$$

așadar putem aplica rezultatele din Secțiunile 3.2-3.4. Deoarece inversa matricii $I_n - A$ poate fi scrisă în forma

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + ...$$

pentru o vecinătate suficient de mică a lui O_n, din teorema Hamilton-Cayley rezultă că transformata Cayley a lui A poate fi scrisă în forma polinomială

$$\mathrm{Cay}(A) = b_0(A)I_n + b_1(A)A + ... + b_{n-1}(A)A^{n-1} \tag{4.1}$$

unde coeficienții $b_0, ..., b_{n-1}$ sunt unic determinați și depind de matricea A. Vom numi aceste numere, ca și în cazul general, **coeficienții Rodrigues** ai lui A în raport cu transformata Cayley.

Cazurile $n = 2, 3$

Vom prezenta cazurile particulare $n = 2$ și $n = 3$. Am văzut că, în general, pentru $A = O_n$, avem $\mathrm{Cay}(A) = I_n$, deci $b_0(O_n) = 1, b_1(O_n) = ... = b_{n-1}(O_n) = 0$.

În cazul $n = 2$, considerăm matricea antisimetrică $A \neq O_2$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*,$$

cu valorile proprii $\lambda_1 = ai, \lambda_2 = -ai$. Din formulele din Subsecțiunea 3.3.1 obținem:

$$b_0 = \frac{1-a^2}{1+a^2} \quad \text{și} \quad b_1 = \frac{1}{1+a^2},$$

deci, formula de tip Rodrigues pentru transformata Cayley este

$$\mathrm{Cay}(A) = \frac{1-a^2}{1+a^2} I_2 + \frac{2}{1+a^2} A. \tag{4.2}$$

Pentru $n = 3$ orice matrice reală antisimetrică X este de forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

cu polinomul caracteristic $p_A(t) = t^3 + \theta^2 t$, unde $\theta = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Valorile proprii ale matricii A sunt $\lambda_1 = \theta i, \lambda_2 = -\theta i, \lambda_3 = 0$. Avem $A = O_3$ dacă și numai dacă $\theta = 0$, deci este suficient să considerăm numai situația în care $\theta \neq 0$. Utilizând formulele din Subsecțiunea 3.3.2, avem

$$b_0 = 1, b_1 = \frac{2}{1+\theta^2}, b_2 = \frac{2}{1+\theta^2}.$$

și formula de tip Rodrigues pentru transformata Cayley a grupului $\mathbf{SO}(3)$ este

$$\mathrm{Cay}(A) = I_3 + \frac{2}{1+\theta^2} A + \frac{2}{1+\theta^2} A^2. \tag{4.3}$$

Formula (4.3) ne dă posibilitatea să găsim o altă formă pentru inversa transformatei Cayley. Prin urmare, fie $R \in \mathbf{SO}(3)$ astfel încât

$$R = I_3 + \frac{2}{1+\theta^2} A + \frac{2}{1+\theta^2} A^2,$$

unde A este o matrice antisimetrică. Aplicând operația de transpunere în ambii membrii ai relației de mai sus și luând în considerare faptul că ${}^tA = -A$, obținem

$$R -{}^t R = \frac{4}{1+\theta^2} A. \tag{4.4}$$

Pe de altă parte, avem

$$\mathrm{tr}(R) = 3 - \frac{4\theta^2}{1+\theta^2} = -1 + \frac{4}{1+\theta^2},$$

și înlocuind în relația (4.4) rezultă formula

$$\text{Cay}^{-1}(R) = \frac{1}{1+\text{tr}(R)}(R -^t R). \tag{4.5}$$

Formula (4.5) are sens pentru rotațiile $R \in \mathbf{SO}(3)$ pentru care $1 + \text{tr}(R) \neq 0$. Dacă R este o rotație de unghi α, atunci avem $\text{tr}(R) = 1 + 2\cos\alpha$, deci aplicația Cay^{-1} nu este definită pentru rotațiile de unghi $\alpha = \pm\pi$. Deoarece aplicația Cay este bijectivă în domeniul în care este definită, rezultă că matricele antisimetrice din $\mathfrak{so}(3)$ pot fi folosite drept coordonate pentru rotații. Considerăm izomorfismul "$\widehat{\ }$" de algebre Lie dintre $(\mathbb{R}^3, \times)$ și $(\mathfrak{so}(3), [\cdot,\cdot])$, unde am notat cu " $\times$ " produsul vectorial, definit prin $v \in \mathbb{R}^3 \to \widehat{v} \in \mathfrak{so}(3)$, unde v este considerat ca o coloană

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

și $\widehat{v}$ este definită prin

$$\widehat{v} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

Compunând aplicațiile

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\widehat{}} \mathfrak{so}(3) \xrightarrow{Cay} \mathbf{SO}(3)$$

obținem o parametrizare vectorială a rotațiilor din $\mathbf{SO}(3)$. Aceasta este deosebit de utilă în rezolvarea unor probleme de mecanică.

Cazul $n = 4$

Ca în Subsecțiunea 3.6.2, pentru o matrice antisimetrică $A \in so(4)$, fie $\lambda_{1,2} = \pm\alpha i$, $\lambda_{3,4} = \pm\beta i$, valorile proprii ale lui A, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considerăm următoarele trei situații.

1. Dacă $|\alpha| \neq |\beta|$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, atunci folosind formulele din Subsecțiunea 3.3.3, obținem

$$b_0 = \frac{1+\alpha^2+\beta^2-\alpha^2\beta^2}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}, b_1 = \frac{2(1+\alpha^2+\beta^2)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}$$

$$b_2 = \frac{2}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}, b_3 = \frac{2}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)},$$

și formula Rodrigues corespunzătoare

$$\text{Cay}(A) = \frac{1+\alpha^2+\beta^2-\alpha^2\beta^2}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} I_4 + \frac{2(1+\alpha^2+\beta^2)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} A +$$
$$\frac{2}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} A^2 + \frac{2}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} A^3.$$

2. Dacă $\alpha \neq 0$ și $\beta = 0$, atunci vom folosi formulele din Subsecțiunea 3.4.3 când $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 = \lambda_4$ și obținem

$$b_0 = 1,\, b_1 = 2,\, b_2 = \frac{2}{1+\alpha^2},\, b_3 = \frac{2}{1+\alpha^2}.$$

Formula Rodrigues în acest caz este

$$\mathrm{Cay}(A) = I_4 + 2A + \frac{2}{(1+\alpha^2)}A^2 + \frac{2}{(1+\alpha^2)}A^3.$$

3. Dacă $\alpha = \beta \neq 0$, atunci vom folosi formulele din Subsecțiunea 3.4.3 pentru $\lambda_1 = \lambda_3, \lambda_2 = \lambda_4, \lambda_1 \neq \lambda_2$ și după calcule simple obținem

$$b_0 = \frac{1+2\alpha^2-\alpha^4}{(1+\alpha^2)^2},\, b_1 = \frac{2(2\alpha^2+1)}{(1+\alpha^2)^2},\, b_2 = \frac{2}{(1+\alpha^2)^2},\, b_3 = \frac{2}{(1+\alpha^2)^2},$$

și formula Rodrigues corespunzătoare

$$\mathrm{Cay}(A) = \frac{1+2\alpha^2-\alpha^4}{(1+\alpha^2)^2}I_4 + \frac{2(2\alpha^2+1)}{(1+\alpha^2)^2}A + \frac{2}{(1+\alpha^2)^2}A^2 + \frac{2}{(1+\alpha^2)^2}A^3.$$

4.4.2 Calcule pentru grupul $\mathbf{SE}(n)$ în dimensiune mică

Ca și pentru transformarea clasică $\mathrm{Cay} : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$, putem obține formulele Rodrigues efective și pentru transformarea $\mathrm{Cay}_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$, pentru valori mici ale lui n. Folosind observația din secțiunea 5.1 din lucrarea R.-A. Rohan [60], obținem aceasta pentru o matrice $S \in \mathfrak{se}(n)$ definită în blocuri ca mai sus. Polinomul său caracteristic p_S satisface relația $p_S(t) = tp_A(t)$. Formula Rodrigues pentru transformarea $\mathrm{Cay}_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n)$ are forma

$$\mathrm{Cay}_{n+1}(S) = c_0 I_{n+1} + c_1 S + \ldots + c_n S^n,$$

unde coeficienții $c_0, c_1, \ldots, c_n$ depind de matricea A.

Pentru $n = 2$, considerăm matricea antisimetrică $A \neq O_2$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*.$$

Folosind observația de mai sus, rezultă că matricea $S \in \mathfrak{se}(2)$ are valorile proprii $\lambda_1 = ai, \lambda_2 = -ai, \lambda_3 = 0$, și formula Rodrigues corespunzătoare are forma

$$\mathrm{Cay}_3(S) = c_0 I_3 + c_1 S + c_2 S^2.$$

Am obținut un rezultat analog cu cel din Teorema 3.1, care se reduce la sistemul

$$\begin{cases} S_0 c_0 + S_1 c_1 + S_2 c_2 = 1 + \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1} + \frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2} \\ S_1 c_0 + S_2 c_1 + S_3 c_2 = 1 + \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1} + \frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2} \\ S_2 c_0 + S_3 c_1 + S_4 c_2 = \lambda_1^2 \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1} + \lambda_2^2 \frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2} \end{cases}$$

care are soluția

$$c_0 = 1, c_1 = \frac{1}{1+a^2}, c_2 = \frac{1}{1+a^2}$$

Deci formula Rodrigues pentru transformarea Cay_3 este

$$\mathrm{Cay}_3 = I_3 + \frac{1}{1+a^2}S + \frac{1}{1+a^2}S^2. \tag{4.6}$$

Pentru $n = 3$, considerăm matricea antisimetrică de forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

cu polinomul caracteristic $p_A(t) = t^3 + \theta^2 t$, unde $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Matricea $S \in \mathfrak{se}(3)$ are polinomul caracteristic $p_S(t) = tp_A(t) = t^4 + \theta^2 t^2$, cu valorile proprii $\lambda_1 = \theta i, \lambda_2 = -\theta i, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$. Formula Rodrigues are forma

$$\mathrm{Cay}_4(S) = c_0 I_4 + c_1 S + c_2 S^2 + c_c S^3.$$

După un calcul similar, obținem formula

$$\mathrm{Cay}_4(S) = I_3 + 2S + \frac{2}{1+\theta^2}S^2 + \frac{2}{1+\theta^2}S^3. \tag{4.7}$$

Ca și pentru transformata Cayley a grupului $\mathbf{SO}(n)$, notăm cu Σ_{n+1} mulțimea matricelor din $\mathbf{SE}(n)$ care au pe -1 ca valoare proprie. Evident, avem $M \in \mathbf{SE}(n)$ dacă și numai dacă matricea $I_{n+1} + M$ este singulară. O demonstrație similară cu cea a Teoremei 3.1 ne conduce la

Teorema 4.2. *Aplicația* $\mathrm{Cay}_{n+1} : \mathfrak{se}(n) \to \mathbf{SE}(n) \setminus \Sigma_{n+1}$ *este bijectivă și inversa ei este dată de*

$$\mathrm{Cay}_{n+1}(M) = \begin{pmatrix} \mathrm{Cay}^{-1} M & (R + I_n)^{-1}\boldsymbol{t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unde matricea M *este defintă în blocuri de*

$$S = \begin{pmatrix} R & \boldsymbol{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bibliografie

[1] R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Addison Wesley, 2nd Edition, 1978.

[2] D. Andrica, I.N. Casu, *Grupuri Lie, aplicația exponențială și mecanica geometrică*, Presa Universitară Clujeană, 2008.

[3] D. Andrica, O.L. Chender (Broaina), *Rodrigues formula for the Cayley transform of groups* $SO(n)$ *and* $SE(n)$, Studia Univ. Babeş-Bolyai-Mathematica, Vol 60(2015), No. 1, 31-38.

[4] D. Andrica, O.L. Chender (Broaina), *A New Way to Compute the Rodrigues Coefficients of Functions of the Lie Groups of Matrices*, in "Essays in Mathematics and its Applications" in the Honor of Vladimir Arnold, Springer, 2016, 1-24.

[5] D. Andrica, L. Mare, *The image of the exponential mapping on the linear group* $GL(n,\mathbb{R})$, Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, 1989.

[6] D. Andrica, R.-A. Rohan, *The image of the exponential map and some applications*, Proc. 8th Joint Conference on Mathematics and Computer Science MaCS, Komarno, Slovakia, July 14-17, 2010, 3-14.

[7] D. Andrica, R.-A. Rohan, *Computing the Rodrigues coefficients of the exponential map of the Lie groups of matrices*, Balkan Journal of Geometry and Applications, Vol.18, 2013, No.2, 1-10.

[8] D. Andrica, R.-A. Rohan, *A new way to derive the Rodrigues formula for the Lorentz group*, Carpathian Journal of Mathematics, 30, 2014, No.1, 23-29.

[9] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics 60, Second Edition, Springer-Verlag, 1998.

[10] A. Baker, *Matrix Groups. An Introduction to Lie Group Theory*, SUMS, Springer, 2002.

[11] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics. Lie Groupsand Lie Algebra*, Chapters 1-3, Springer, 1989.

[12] T. Bröcker, T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Springer-Verlag, GTM, vol. 98, New York, 1985.

[13] O.L. Chender (Broaina), *Schwerdtfeger formula for matrix functions*, The 16th International Conference on Applied Mathematics and Computer Science, July 3 rd to 6 th, 2019, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar, Vol. 16, 2018, în curs de publicare.

[14] C. Chevalley, *Theory of Lie groups I*, Princeton Mathematical Series, No.8, Princeton University Press, 1946.

[15] M.L. Curtis, *Matrix groups*, Universitext, Springer Verlag, 2nd Edition, 1984.

[16] D. Djokovic, *On the exponential map in classical Lie groups*, Journal of Algebra, **64**:76-88, 1980.

[17] O. Furdui, *Computing exponential and trigonometric functions of matrices in* $M_2(\mathbb{C})$, Gazeta Matematică, Seria A, Anul XXXVI, Nr. 1-2/2018, 1-13.

[18] J.H. Gallier, *Geometric Methods and Application, for Computer Science and Engineering*, TAM, Vol. 38, Springer, 2011.

[19] J. Gallier, D. Xu, *Computing exponentials of skew-symmetric matrices and logarithms of orthogonal matrices*, International Journal of Robotics and Automation, Vol. 17, No. 4, 2002, 2-11.

[20] J. Gallier, *A Concrete Introduction to Classical Lie Groups Via the Exponential Map*, University of Pennsylvannia, 2002.

[21] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol. 1, AMS, Chelsea, 1977.

[22] G.H. Golub, C.F. Van Loan *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 1996.

[23] N.J. Higham, *The scaling and squaring method of the matrix exponential revised*, SIAM Journal on Matrix Analisis and Applications, **26**:1179-1193, 2005.

[24] N.J. Higham, *Functions of Matrices Theory and Computation*, SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics , Philadelphia, PA. USA, 2008.

[25] K.H. Hofmann, *A memo on the exponential function and regular points*, Arch. Math. 59, 1992, 24-37.

[26] K.H. Hofmann, A. Mukhergea, *On the density of the image of the exponential function*, Math. Ann. 234, 1978, 263-273.

[27] K.H. Hofmann, W.A.F. Rupert, *Lie groups and subsemigroups with surjective exponential function*, Memoirs of the Amer. Math. Soc 618, 1997.

[28] R.A. Horn, Ch.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.

[29] R.A. Horn, Ch.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1990.

[30] R.A. Horn, Ch.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991.

[31] S. Kida, E. Trimandalawati, S. Ogawa, *Matrix Expression of Hermite Interpolation Polynomials*, Computer Math. Applic., Vol. **33** (1997), No. 11, 11-13.

[32] M.-J. Kim, M.-S. Kim, A. Shin, *A general construction scheme for unit quaternion curves with simple high order derivatives*, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM, 1995, 369-376.

[33] M.-J. Kim, M.-S. Kim, A. Shin, *A compact differential formulafor the first derivative of a unit quaternion curve*, Journal of Visualization and Computer Animation, **7**, 1996, 43-57.

[34] H.L. Lai, *Surjectivity of exponential mapping on semisimple Lie groups*, J. Math. Soc. Japan, **29**, 1977, 303-3325.

[35] P. Lancaster, M. Tismenetsky *The Theory of Matrices*, Second Edition With Application, Academis Press, 1984.

[36] B. Jütler, *Visualization of moving objects using dual quaternion curves*, Computers and Graphics, **18**(3)(1994), 315-326.

[37] B. Jütler, *An osculating motion with second order contact for spacial Euclidean motions*, Mechanics and Machine Theory, **32**(7)(1997), 843-853.

[38] L. Mare, *The image of exponential map on a few classes of Lie groups*, Babeş-Bolyai University, Faculty of Mathematics, Seminar on Geometry, Preprint No. 2, 1991, 71-78.

[39] L. Mare, *A topological property of the exponential*, Proc. Symposium in Geometry on the occasion of the 190th aniversary of Janos Bolyaiand of the 60th aniversary of Marian Țarină, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca and Târgu Mureș, August 31-September 1, 1992, Preprint No. 2, 1993, (P. Enghiș and D. Andrica, Eds.), 127-132.

[40] L. Mare, *Asupra unei note din Gazeta Matematică* , Lucrările Seminarului "Didactica Matematicii", vol. 5 (1989), 165-172.

[41] J.E. Marsden, T.S. Raţiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, TAM, vol. 17, Springer-Verlag, 1994.

[42] S. Mondal, *Surjectivity of Maps Induced on Matrices by Polynomials and Entire Functions*, The Mathematical Association of America, 124, March 2017, 260-264.

[43] M. Moskowitz, M. Wüstner, *Exponentiality of certain real solvable Lie groups*, Cand. Math. Bull., 41, 1998, 386-373.

[44] M. Nishikawa, *Exponential image in the real general linear group*, Bull. Fukuoka Univ. Ed. III, 26, 1976, 35-44.

[45] M. Nishikawa, *Exponential image in the real special linear group*, Bull. Fukuoka Univ. Ed. III, 28, 1978, 1-6.

[46] M. Nishikawa, *Exponential image in the Lorentz group* $O(2,1)$, Bull. Fukuoka Univ. Ed. III, 29, 1979, 9-19.

[47] M. Nishikawa, *Exponential image in the group* $O(n,1)$*, for* $n = 3, 4$, Bull. Fukuoka Univ. Ed. III, 31, 1981, 1-11(1982).

[48] M. Nishikawa, *On the exponential map of the group* $O(p,q)_0$, Mem. Fac. Sco. Kyushu Univ. Ser. A, 37, 1983, No. 1, 63-69.

[49] M. Nishikawa, *Exponential image in the group* $O(3,3)$, Bull. Fukuoka Univ. Ed. III, 34, 1984, 13-18(1985).

[50] T. Nôno, *On the singularity of general linear groups*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 20, 1956/1957, 115-123.

[51] F.C. Park, B. Ravani, *Bézier curves on Riemmanian manifolds and Lie groups with kinematic applications*, Mechanism, Synthesis and Analysis, **70**(1994), 15-21.

[52] F.C. Park, B. Ravani, *Smooth invariant interpolation of rotations*, ACM Transactions of Graphics, **16**(1997), 277-295.

[53] L.I. Piscoran, *Noncommutative differential direct Lie derivative and the algebra of special Euclidean group* $SE(2)$, Creative Math.and Inf., **17**(2008),No.3, 493-498.

[54] T.A. Politi, *A formula for the exponential of a real skewsymmetric matrix of order 4*, BIT, 2001, Vol. 41, No. 4, 842-845.

[55] V. Pop, O. Furdui, *Squares Matrices of Order 2. Theory, Applications and Problems*, Springer, 2017.

[56] E.J. Putzer, *Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients*, Amer. Math. Monthly, 73, 1966, 2-7.

[57] S. Rădulescu, D. Andrica, *Some remarks on the equation* $f(X) = A$ *in* $M_n(\mathbb{C})$ *and applications*, Itinerant seminar on functional equations, approximation and convexity , Cluj-Napoca, 1988, 281-285.

[58] R.F. Rinehart, *The equivalence of Definitions of a Matrix Function*, American Mathematical Monthly, Vol. 62, 1955, 395-414.

[59] R.-A. Rohan, *The exponential map and the Euclidean isometries*, Acta Universitatis Apulensis, **31**(2012), 199-204.

[60] R.-A. Rohan, *Some remarks on the exponential map on the group $SO(n)$ and $SE(n)$*, In Proc. of the XIV Int. Conference Geometry, Integrability and Quantization, 8-13 June, Varna, Bulgaria, 2012, I.M. Mladenov and A. Yoshioka, Eds., Sofia, 2013, 160-175.

[61] F. Silva Leite, P. Crouch, *Closed forms for the exponential mapping on matrix Lie groups based on Putzer's method*, Journal of Mathematical Physics, Vol. 40, No. 7, 1999, 3561-3568.

[62] F. Warner, *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*, GTM, No. 94, Springer-Verlag, 1983.

[63] R. Vein, P. Dale, *Determinants and Their Applications in Mathematical Physics*, Springer, 1999.

[64] M. Wüstner, *Lie groups with surjective exponential function*, Shaker Verlag, Berichte aus der Mathematik, Aachen 2001.

[65] M. Wüstner, *On the exponential function of real splittable and real semisimple Lie groups*, Beitr. Alg. Geometrie 39, 1998, 37-46.

[66] M. Wüstner, *On the surjectivity of the exponential function of solvable Lie groups*, Math. Nachr. 192, 1998, 255-266.

[67] M. Wüstner, *Product decomposition of solvable Lie groups*, Man. Math.91, 1996, 179-194.