Universitatea ,,Babeş Bolyai” Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică-Informatică
Cluj-Napoca, România

Andrada Cîmpean

Identităţi în inele

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific
Prof. Dr. Simion Sorin Breaz

Cluj-Napoca
-2020-

Cuprins

Introducere

În această lucrare vom studia descompuneri ale elementelor unor inele ca sume ale căror termeni satisfac diverse identităţi. În particular ne interesează sume cu termenii elemente idempotente, nilpotente sau periodice. Descompunerile de acest tip au fost considerate iniţial în teoria operatorilor. De exemplu în lucrările [27], [43] şi [46] sunt studiate descompuneri ale unor clase de operatori în sume de elemente idempotente. Studiul unor astfel de descompuneri în contextul general al inelelor cu unitate a început în 1977, cu lucrarea [39], unde W. K. Nicholson introduce proprietăţile clean pentru elemente în inele şi pentru inele. Clasa inelelor clean este conţinută în clasa inelelor exchange. Mai mult, un inel abelian este clean dacă şi numai dacă el este exchange, [39]. Un element este clean dacă este suma dintre un idempotent şi un inversabil în acel inel, iar un inel este clean dacă toate elementele sale sunt clean.

A existat un real interes în studiul proprietăţilor care reprezintă variante ale proprietăţii clean. De exemplu au fost studiate inelele w-clean, o generalizare a inelelor clean, introduse şi investigate în [4], în 2006, un inel fiind w-clean dacă fiecare element al său este suma sau diferenţa dintre un inversabil şi un idempotent. Apoi în 2013 Diesl introduce şi studiază în [24] elementele nil-clean şi inelele nil-clean, un caz particular de inele clean ([24, Proposition 3.4]), inversabilul din definiţia elementului clean fiind înlocuit cu un element nilpotent. Nu în ultimul rând au fost studiate generalizări ale inelelor nil-clean, inelele w-nil-clean comutative, de către Danchev şi McGovern, în [22] şi inelele w-nil-clean, de către Breaz, Danchev şi Zhou în [11]. Aceste inele se obţin înlocuind suma dintre un nilpotent şi un idempotent, cu suma sau diferenţa dintre un nilpotent şi un idempotent.

Scopul principal al acestei teze este de a studia proprietăţi asociate unor descompuneri ale elementelor din inele în sume de elemente satisfăcând diverse identităţi. În particular vom studia şi inele ce au toate elementele cu proprietăţi de tipul celor descrise anterior.

Capitolul 1 este structurat în trei secţiuni. Fiecare dintre acestea are rolul de a pregăti materialul necesar în cele trei capitole următoare. În prima secţiune sunt prezentate proprietăţi ale descompunerilor clean şi nil-clean. În continuare sunt prezentate rezultate legate de descompuneri care folosesc tripotenţi, [54], [55]. În a treia secţiune, ,,Descompuneri matriciale", vom preciza rezultate despre descompuneri de matrici în funcţie de matrici idempotente sau matrici nilpotente, fiind premergătoare rezultatelor din Capitolul 4, ,,Matrici companion m-nil-clean".

În următoarele trei capitole vom prezenta rezultatele originale pe care le-am obţinut pe parcursul elaborării acestei teze. Ele sunt extrase din lucrările [21], [10], respectiv [20].

În Capitolul 2, intitulat ,,Indicele w-nil-clean şi inele uw-nil-clean, bazat pe [21], introducem indicele w-nil-clean. Acesta numără descompunerile w-nil-clean. Vom prezenta proprietăţi de bază ale sale. O propoziţie fundamentală e cea care afirmă că indicele w-nil-clean al unui inel este 1 dacă şi numai dacă R este abelian (Propoziţia 2.1 sau [21, Proposition 2.11]). Ca un corolar al acestei propoziţii, obţinem echivalenţa stabilită anterior de Breaz, Danchev şi Zhou în lucrarea [11], a proprietăţii unui inel de a fi uw-nil-clean cu proprietatea aceluiaşi inel de afi w-nil-clean abelian. Totodată, din caracterizarea inelelor de indice w-nil-clean 1 (respectiv 2) şi caracterizarea inelelor de indice nil-clean egal cu 1, (respectiv 2) obţinută de Basnet şi Bhattacharyya în [5], se obţine: un inel are indicele w-nil-clean egal cu 1 (respectiv 2) dacă şi numai dacă el are indicele nil-clean egal cu 1 (respectiv 2). În secţiunea a doua a acestui capitol vom calcula indicele w-nil-clean pentru diverse inele de matrici.

Capitolul 3, intitulat ,,Inele w-tripotente", are ca scop studiul inelelor R cu proprietatea că pentru orice element $x \in R$, cel puţin unul din elementele x sau $1 + x$ este tripotent. Inelele w-tripotente sunt o generalizare a inelelor tripotente. În prima parte a capitolului sunt studiate aceste inele în cazul general si sunt considerate legături între clasa acestora şi clasele de inele considerate în [54]. Capitolul se incheie cu un studiu al inelelor comutative w-tripotente. În particular, în Teorema 3.2 vom da o teoremă de structură pentru aceste inele: un inel comutativ este w-tripotent dacă şi numai dacă se scufundă într-un produs de trei inele- unul nul sau inel tripotent de caracteristică 3, un inel nul sau inel w-tripotent, cu singurele elemente idempotente 0 şi 1, iar 3 e inversabil şi un inel nul sau produsul unor inele Booleene. Inelele w-tripotente, cu 3 inversabil, având singurele elemente idempotente 0 şi 1 sunt caracterizate în Corolarul 3.1.24.

Capitolul 4, bazat pe [20], prezintă caracterizarea matricilor companion peste corpuri comutative de caracteristică pozitivă, care sunt m-nil-clean, adică se descompun ca suma dintre m matrici idempotente şi o matrice nilpotentă. Acesta este rezultatul principal, Teorema 4.2.6. Pentru demonstrarea acesteia va fi nevoie de o analiză atentă a unor clase de matrici similare cu matrici companion care au forma $\mathrm{diag}(1, \ldots, 0, \ldots, 0) + C'$, unde C' este o matrice companion convenabilă.

*

Doresc să le mulţumesc domnului profesor Simion Breaz pentru răspunsurile prompte, discuţiile constructive, sprijinul continuu şi părinţilor mei pentru suport.

*

Cuvinte cheie: inele w-nil-clean, inele uw-nil-clean, inele abeliene, element tripotent, inel Boolean, matrice companion, idempotent, nilpotent, m-nil-clean

Capitolul 1

Descompuneri în inele

În acest capitol vom menţiona noţiuni şi rezultate cunoscute în literatura de specialitate, pe care le considerăm utile în studiile abordate în următoarele capitole. În prima secţiune, ,,Proprietăţile clean şi nil-clean", vom prezenta rezultate ce au legătură cu capitolul 2, ,,Indicele w-nil-clean şi inele uw-nil-clean". Mai precis vom da definiţii şi proprietăţi pentru elemente în inele şi inele clean, w-clean, nil-clean, w-nil-clean şi uw-nil-clean Totodată vom preciza legătura inelelor uw-nil-clean cu inelele w-nil-clean abeliene, proprietăţi ale indicelui clean şi proprietăţi ale indicelui nil-clean.

A doua secţiune, ,,Descompuneri legate de tripotenţi", are ca subiect principal prezentarea de rezultate din literatura de specialitate relative la inele ale căror elemente admit descompuneri care folosesc elemente tripotente şi sunt în legătură cu capitolul 3, ,,Inele w-tripotente". Mai precis, vom da teoreme de structură pentru inele în care fiecare element este suma sau diferenţa a doi idempotenţi care comută şi inele în care fiecare element este suma dintre un nilpotent şi doi tripotenţi care comută.

În secţiunea 3, ,,Descompuneri matriciale" vom prezenta rezultate despre descompuneri de matrici în funcţie de matrici idempotente sau matrici nilpotente şi sunt premergătoare rezultatelor din capitolul 4, ,,Matrici companion m-nil-clean".

1.1 Proprietăţile clean şi nil-clean

În această lucrare toate inelele sunt asociative şi cu unitate. Fie R un inel. Un element w al lui R se numeşte *nilpotent* dacă există un număr natural nenul n astfel încât $w^n = 0$. Un element e al lui R este *idempotent* dacă $e^2 = e$. Un element a al lui R este *tripotent* dacă $a^3 = a$. Vom nota cu $\mathrm{Nil}(R)$ mulţimea elementelor nilpotente ale lui R, cu $\mathrm{Id}(R)$ mulţimea elementelor idempotente ale lui R şi cu $U(R)$ mulţimea elementelor inversabile ale lui R.

Definiţia. 1.1.1. Fie R un inel şi $a \in R$. Spunem că a este *clean* dacă există u, element inversabil al lui R şi e, element idempotent al lui R, astfel încât $a = u + e$.

Un inel este clean dacă fiecare element al său este clean.

Inelele clean au apărut în contextul modulelor cu proprietatea exchange finită, aceasta fiind legată de nişte descompuneri ca sume directe de module.

Definiţia. 1.1.3. Spunem că R este un *inel exchange* dacă ${}_RR$ are proprietatea exchange finită.

Proprietatea exchange este simetrică, adică R este exchange dacă şi numai dacă R_R are proprietatea exchange finită.

Vom întâlni de mai multe ori inelele abeliene. Să dăm definiţia lor:

Definiţia. 1.1.4. Se numeşte *inel abelian* un inel cu proprietatea că toţi idempotenţii săi sunt centrali.

Următoarea teoremă de legătură este între inelele clean şi cele exchange.

Teorema. 1.1.5.*[40, Theorem 1.1] Orice inel clean este inel exchange; reciproca este adevărată dacă inelul este abelian.*

Urmează să precizăm definiţia inelelor w-clean, ce sunt o generalizare a inelelor clean şi care sunt studiate în [4].

Definiţia. 1.1.21. Fie R un inel şi $a \in R$. Atunci a este *w-clean* dacă există u, element inversabil al lui R şi e, element idempotent al lui R, astfel încât $a = u + e$ sau $a = u - e$.

Un inel este w-clean dacă fiecare elment al său este w-clean.

Iată o proprietate în legătură cu inelele w-clean.

Lema. 1.1.23. *[4, Theorem 1.7] Fie $\{R_\alpha\}$ o familie de inele. Atunci produsul direct $R = \prod R_\alpha$ este w-clean dacă şi numai dacă fiecare R_α este w-clean şi cel mult un R_α nu este clean.*

Diesl a introdus în [24] noţiunea de inel nil-clean şi a investigat acest tip de inele.

Definiţia. 1.1.24. Fie R un inel şi $a \in R$. Atunci a este *nil-clean* dacă există b, element nilpotent al lui R şi e, element idempotent al lui R, astfel încât $a = b + e$.

Un inel este nil-clean dacă fiecare element al său este nil-clean.

Urmează să precizăm proprietăţi pentru inelele nil-clean.

Lema. 1.1.25. *[24, Proposition 3.4] Orice inel nil-clean este inel clean.*

Propoziţia. 1.1.27. *[24, Proposition 3.13] Orice produs direct finit al unor inele nil-clean este nil-clean.*

Definiţia. 1.1.28. Un ideal al unui inel este *nil* dacă fiecare element al său este nilpotent.

Propoziţia. 1.1.29. *[24, Proposition 3.15] Fie R un inel şi I un ideal nil al său. Atunci R este nil-clean dacă şi numai dacă R/I este nil-clean.*

Aşa cum Ahn si Anderson generalizează în [4] noţiunea de inel clean şi obţin noţiunea de inel w-clean, aşa generalizează şi Danchev cu McGovern, în [22], iar apoi Breaz, Danchev şi Zhou, în [11], noţiunea de inel nil-clean şi obţin noţiunea de inel w-nil-clean; cu menţiunea că în prima lucrare sunt investigate inelele w-nil-clean comutative, iar în a doua inelele w-nil-clean generale.

Definiţia. 1.1.39. Fie R un inel şi $a \in R$. Atunci a este *w-nil-clean* dacă există b, element nilpotent al lui R şi e, element idempotent al lui R, astfel încât $a = b + e$ sau $a = b - e$.

Un inel este w-nil-clean dacă fiecare element al său este w-nil-clean.

Proprietatea de mai jos a inelelor w-nil-clean este asemănătoare cu situaţia când un produs direct finit de inele este w-clean.

Propoziţia. 1.1.46[11, Proposition 3] *Fie $R = \prod_{i \in I} R_i$ un produs direct de inele, cu $|I| \geq 2$. Presupunem că I este finită. Atunci R este w-nil-clean dacă şi numai dacă există $k \in I$ astfel încât R_k este w-nil-clean şi R_j e nil-clean, oricare ar fi $j \neq k$.*

Scopul următor este de a enunţa o teoremă de structură a inelelor w-nil-clean.

Teorema. 1.1.48.[11, Theorem 5] *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru un inel R :*

1. *R este un inel w-nil-clean.*
2. *Există R_1, un inel nil-clean şi R_2, un inel nul sau un inel w-nil-clean indecompozabil, cu $3 \in J(R_2)$, astfel încât $R \cong R_1 \times R_2$.*

În continuare prezentăm o proprietate ale inelelor w-nil-clean.

Corolarul. 1.1.50.[11, Corollary 7] *Orice inel w-nil-clean este clean.*

Definiţia. 1.1.52. Fie R un inel şi $a \in R$. Dacă există şi este unic idempotentul $e \in R$ astfel încât $a - e$ sau $a + e$ este nilpotent în R, atunci a este uw-nil-clean. Un inel este uw-nil-clean dacă fiecare element al său este uw-nil-clean.

Teorema care urmează stabileşte faptul că proprietatea unui inel de a fi w-nil-clean abelian este echivalentă cu proprietatea aceluiaşi inel de a fi uw-nil-clean, fiind totodată şi o teoremă de structură.

Teorema. 1.1.53.[11, Theorem 12] *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru un inel R :*

1. *R este w-nil-clean abelian.*

2. *Există R_1 inel abelian, cu $J(R_1)$ nil, $R_1/J(R_1)$ Boolean şi R_2 un inel nul sau cu proprietatea $R_2/J(R_2) \cong \mathbb{F}_3$, cu $J(R_2)$ nil, astfel încât $R \cong R_1 \times R_2$,*

3. *R este abelian, $J(R)$ este nil şi $R/J(R)$ este izomorf cu un inel Boolean, cu $\mathbb{F}_3$, sau cu un produs direct a două astfel de inele.*

4. *R este uw-nil-clean.*

Corolarul. 1.1.54.*[11, Corollary 15] Un inel R este u-nil-clean dacă şi numai dacă R este uw-nil-clean şi $2 \in J(R)$.*

1.1.1 Indicele clean

Tot legat de problematica clean, în [37] s-a introdus indicele clean asociat unui inel.

Notaţia. 1.1.55. *Fie R un inel şi $a \in R$. Notăm $\mathcal{E}(a) = \{e \in R \mid e^2 = e,\ a - e \in U(R)\}$.*

Definiţia. 1.1.56. *Indicele clean* al inelului R, notat $c(R)$, se defineşte ca fiind $c(R) = \sup\{|\mathcal{E}(a)| :\ a \in R\}$.

Teorema următoare caracterizează inelele cu indicele clean unu.

Teorema. 1.1.59.*[37, Theorem 5] Fie R un inel. Atunci $c(R) = 1$ dacă şi numai dacă R este abelian şi oricare ar fi $e \in Id(R)$, u şi v din $U(R)$, $e \neq 0$, are loc $e \neq u + v$.*

Scopul ce urmează este de a caracteriza inelele cu indicele clean egal cu doi.

Definiţia. 1.1.63 Un inel se numeşte *elemental* dacă singurele elemente idempotente ale sale sunt 0 şi 1 şi există $u, v \in U(R)$ astfel încât $1_R = u + v$.

Teorema. 1.1.64*[37, Theorem 12] $c(R) = 2$ dacă şi numai dacă are loc una din următoarele afirmaţii.*

1. R este un inel elemental.

2. $R = A \times B$, cu A inel elemental şi $c(B) = 1$.

3. Există inelele A şi B, cu $c(A) = c(B) = 1$ şi bimodulul ${}_AM_B$, cu $|M| = 2$, astfel încât $R = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1.1.2 Indicele nil-clean

Preluând idei de la indicele clean, în [5] se introduce indicele nil-clean.

Notaţia. 1.1.66. *Având inelul R şi $a \in R$, notăm* $\eta(a) = \{e \in R \mid e^2 = e$ *şi* $a - e \in \mathrm{Nil}(R)\}$.

Definiţia. 1.1.67. Se defineşte *indicele nil-clean al inelului* R ca fiind $nc(R) = \sup\{|\eta(a)| : a \in R\}$.

Iată legătura dintre indicele clean si indicele nil-clean ale aceluiaşi inel.

Lema. 1.1.70.*[5, Lemma 2.8] Fie R un inel cu unitate. Atunci $c(R) \geq nc(R)$.*

În continuare vom caracteriza inelele de indice nil-clean egal cu unu.

Teorema. 1.1.71.*[5, Theorem 3.2] $nc(R) = 1$ dacă şi numai dacă R este inel abelian.*

Urmează caracterizarea inelelor de indice nil-clean egal cu doi.

Teorema. 1.1.72.*[5, Theorem 4.1] $nc(R) = 2$ dacă şi numai dacă există inelele A şi B, cu $nc(A) = nc(B) = 1$ şi bimodulul ${}_AM_B$, cu $|M| = 2$, astfel încât $R = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$.*

1.2 Descompuneri legate de tripotenţi

În rezultatul următor, echivalenţa primelor trei afirmaţii apare în [30], iar afirmaţia (4) este adaugată în [54].

Teorema. 1.2.5. *[30, Theorem 1] şi [54, Proposition 2.2] Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru inelul R :*

1. *Fiecare element al lui R este suma a doi idempotenţi care comută.*

2. *R este inel comutativ şi fiecare element este suma a doi idempotenţi.*

3. *$x^3 = x$ pentru orice $x \in R$.*

4. *Orice element este diferenţa a doi idempotenţi care comută.*

În continuare prezentăm o caracterizare pentru inelele în care fiecare element este suma sau diferenţa a doi idempotenţi care comută.

Teorema. 1.2.10. *[54, Theorem 4.4] Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru inelul R :*

1. *Fiecare element este suma sau diferenţa a doi idempotenţi care comută.*

2. *R este de următoarele tipuri:*

   (a) *$R/J(R)$ este Boolean cu $J(R) = 0$ sau $J(R) = \{0, 2\}$.*

   (b) *R este produs subdirect al unor copii ale lui $\mathbb{F}_3$.*

   (c) *Există inelul R_1, cu $R_1/J(R_1)$ Boolean şi cu $J(R_1) = 0$ sau $J(R_1) = \{0, 2\}$ şi inelul R_2, un produs subdirect al unor copii ale lui $\mathbb{F}_3$, astfel încât $R \cong R_1 \times R_2$.*

În plus 1. *cu condiţia suplimentară* $2 \in J(R)$ *este echivalentă cu* 2.(*a*)

Rezultatul următor caracterizează inelele în care fiecare element este suma dintre un nilpotent şi doi tripotenţi, cu proprietatea că oricare două din aceste elemente comută.

Teorema. 1.2.12.*[55, Theorem 2.11] Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru inelul R :*

1. *Fiecare element este suma dintre un nilpotent şi doi tripotenţi, cu proprietatea că oricare două din aceste elemente comută.*

2. *Există inelul A, inel nul sau cu proprietatea $A/J(A)$ este Boolean, cu $J(A)$ nil, inelul B, inel nul sau cu proprietatea $B/J(B)$ este un produs subdirect de copii ale lui $\mathbb{F}_3$, cu $J(B)$ nil şi inelul C, inel nul sau cu proprietatea $C/J(C)$ este un produs subdirect de copii ale lui $\mathbb{F}_5$, cu $J(C)$ nil, astfel încât $R \cong A \times B \times C$.*

3. *$J(R)$ este nil şi $x^5 = x$ pentru orice $x \in R/J(R)$.*

4. *$a^5 - a$ este nilpotent pentru orice $a \in R$.*

1.3 Descompuneri ale matricilor

În studiul unor diverse inele care satisfac generalizări ale proprietăţilor clean introduse de Nicholson, a devenit folositoare şi direcţia de cercetare care are ca scop scrierea matricilor în funcţie de matrici speciale care satisfac identităţi particulare.

Ne vom referi mai întâi la descompuneri matriciale în funcţie de idempotenţi.

Teorema. 1.3.1.*[49, Theorem 1.1] Fie $\mathbb{F}$ un corp comutativ şi $n \geq 1$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *Orice matrice din $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ este suma a trei idempotenţi.*

2. *Orice matrice inversabilă din $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ este suma a trei idempotenţi.*

3. *$\mathbb{F} \cong \mathbb{F}_2$ sau $\mathbb{F} \cong \mathbb{F}_3$.*

În [28] se răspunde la întrebarea ,,când o matrice peste un corp de caracteristică 0 este suma unor idempotenţi?” Urmează două rezultate din această referinţă bibliografică.

Teorema. 1.3.8.*[28, Theorem 1] Fie* $\mathbb{F}$ *corp comutativ de caracteristică* 0 *şi* $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. *Atunci* M *este suma unor idempotenţi dacă şi numai dacă* $\mathrm{tr}(M) = k \cdot 1_{\mathbb{F}}$, $k \in \mathbb{Z}$ *şi* $k \geq \mathrm{rang}(M)$.

Ne vom referi acum la descompuneri matriciale ca sume de matrici nilpotente.

Avem nevoie de o definiţie pentru următorul rezultat din [8].

Definiţia. 1.3.19. Fie k un întreg pozitiv. Un element al unui inel este (k-)nilgood dacă este suma unor (k) nilpotenţi.

Teorema. 1.3.20.*[8, Theorem 2] Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru matricea* A *peste un inel comutativ.*

1. A *este* 3*-nilgood.*

2. A *este nilgood.*

3. *Urma lui* A *este nilpotentă.*

Ne vom referi acum la descompuneri matriciale clean şi nil-clean. Se ştie din [25] că inelele matriciale peste inele clean sunt clean. Diesel a întrebat în [24] dacă un rezultat similar cu acesta este valabil şi pentru inele nil-clean. Mai precis, sunt inelele de matrici $M_n(\mathbb{F}_2)$ nil-clean? Răspunsul este dat în teorema care urmează.

Teorema. 1.3.24.*[9, Theorem 3] Fie* K *un corp comutativ. Următoarele afirmaţii sun echivalente*

1. $K \simeq \mathbb{F}_2$.

2. *Pentru orice întreg pozitiv* n, *inelul matricial* $\mathbb{M}_n(K)$ *este nil-clean.*

3. *Există un întreg pozitiv* n, *astfel încât inelul matricial* $\mathbb{M}_n(K)$ *este nil-clean.*

Continuăm cu o lemă care este un instrument util în [47], iar noi vom demonstra şi folosi în capitolul 4 un rezultat similar util în caracterizarea matricilor m-nil-clean:

Lema. 1.3.30._[47, Lemma 2.1] Fie $\mathbb{F}$ corp comutativ şi q un polinom monic peste $\mathbb{F}$, atunci există polinomul monic Q astfel încât matricea companion $C_q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ este similară cu matricea $C_Q + \mathrm{diag}(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0)$, dacă n este par, sau cu matricea $C_Q + \mathrm{diag}(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, 1)$, dacă n este impar._

Definiţia. 1.3.33. Un element al unui inel R este unipotent dacă este suma dintre 1_R şi un nilpotent al lui R.

Tot în capitolul 4 vom folosi şi următoarea caracterizare a matricilor companion nil-clean dată de Breaz şi Modoi în [12]:

Teorema. 1.3.34._[12, Theorem 5] Fie $\mathbb{F}$ un corp comutativ, de caracteristică pozitivă, p. Fie $C = C_{c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}} \in M_n(\mathbb{F})$ o matrice companion. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:_

1. _C este nil-clean._

2. _Una din următoarele condiţii este adevărată:_

   (a) C este nilpotentă (i.e. $c_0 = \ldots = c_{n-1} = 0$);

   (b) C este unipotentă (i.e. $c_i = (-1)^i \binom{n}{n-i}$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n-1\}$);

   (c) există un întreg $k \in \{1, \ldots, p\}$ astfel încât $-c_{n-1} = k \cdot 1$ şi $n > k$.

Ca o consecinţă a acestui fapt are loc rezultatul de mai jos:

Corolarul. 1.3.35._[12, Corollary 8] Fie $n \geq 3$ un întreg pozitiv. Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru corpul $\mathbb{F}$:_

1. _$\mathbb{F} \cong \mathbb{F}_p$ pentru un număr prim $p < n$;_

2. _orice matrice companion $C \in M_n(\mathbb{F})$ este nil-clean._

Capitolul 2

Indicele w-nil-clean şi inele uw-nil-clean

2.1 Rezultate despre indicele w-nil-clean şi inele uw-nil-clean

În acest capitol vom introduce şi studia indicele w-nil-clean asociat unui inel. Vom prezenta proprietăţile de bază ale acestui indice. Rezultatul central al capitolului este Propoziţia 2.1.9, în care demonstrăm că inelele cu indicele w-nil-clean egal cu 1, coincid cu inelele abeliene. Totodată, în secţiunea a doua vom calcula indexul w-nil-clean pentru diverse inele de matrici.

Rezultatele din această parte au fost publicate în [21].

Definiţia. 2.1.1. Fie R un inel şi $a \in R$. Definim mulţimea

$$\alpha(a) = \{e \in R \mid e^2 = e \text{ şi } a - e \text{ sau } a + e \text{ este nilpotent}\}.$$

Definiţia. 2.1.2. Pentru un element $a \in R$ *indicele w-nil-clean* al lui a, prescurtat $\mathrm{wnc}(a)$, este definit ca fiind cardinalul mulţimii $\alpha(a)$.

Definiţia. 2.1.3. Definim *indicele w-nil-clean* al inelului R astfel:

$$\mathrm{wnc}(R) = \sup\{|\alpha(a)| : a \in R\}.$$

În continuare vom da câteva proprietăţi ale acestui indice.

Lema. 2.1.6. *Dacă R este un inel şi S un subinel al său, atunci $wnc(R) \geq wnc(S)$.*

Lema. 2.1.8. *Pentru orice inel R are loc inegalitatea $wnc(R) \geq nc(R)$.*

Propoziţia. 2.1.9. *Fie R un inel. Atunci $wnc(R) = 1$ dacă şi numai dacă R este abelian.*

Teorema. 2.1.10. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru inelul R:*

1. *R este uw-nil-clean;*
2. *R este w-nil-clean abelian;*
3. *Există inelul nul sau nil-clean abelian, R_1 şi inelul nul sau w-nil-clean local R_2, cu $J(R_2)$ nil şi $R_2/J(R_2) \cong \mathbb{Z}_3$, astfel încât $R \cong R_1 \times R_2$.*

2.2 Indicele w-nil-clean pentru inele de matrici

În această secţiune vom calcula indicele w-nil-clean pentru diverse inele de matrici.

Exemplul. 2.2.2. Fie p un număr prim. Atunci $wnc(\mathbb{T}_2(\mathbb{F}_p)) = \mathrm{nc}(\mathbb{T}_2(\mathbb{F}_p)) = p$.

Exemplul. 2.2.3. Fie p un număr prim. Atunci $\mathrm{wnc}(\mathbb{T}_3(\mathbb{F}_p)) = \mathrm{nc}(\mathbb{T}_3(\mathbb{F}_p)) = p^2$.

Exemplul. 2.2.5. $wnc(\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_3)) = 5$.

Pe lângă un exemplu de calcul al indexului w-nil-clean al unui inel de matrici, propoziţia următoare furnizează caracterizarea inelelor de index w-nil-clean egal cu 2. Se observă că este aceeaşi caracterizare ca a inelelor de indice nil-clean egal cu 2, conform [5].

Propoziţia. 2.2.7. *Fie R un inel. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *$wnc(R) = 2$;*
2. *Există inelele A şi B abeliene şi bimodulul ${}_AM_B$, cu $|M| = 2$, astfel încât $R = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$.*

Capitolul 3

Inele w-tripotente

Reamintim că un element a al unui inel R se numeşte tripotent dacă $a^3 = a$. Un inel se numeşte tripotent dacă fiecare element al său este tripotent. Un inel este w-tripotent, dacă pentru fiecare element x al său este adevărat că cel puţin unul din elementele x şi $1 + x$ este tripotent.

Există diferenţe majore între clasa inelelor tripotente şi clasa inelelor w-tripotente. Primele sunt întotdeauna comutative, al doilea tip există şi în varianta necomutativă. Un produs direct de inele tripotente este un inel tripotent, dar un produs direct de inele w-tripotente nu e întotdeauna w-tripotent. Sub acest aspect (al produselor directe de inele) diferenţa are aceeaşi natură ca cea descrisă în cazul inelelor w-nil-clean. Vom stabili şi alte proprietăţi pentru inelele w-tripotente şi vom determina caracteristica unui astfel de inel. Vom obţine o teoremă de structură pentru inelele w-tripotente in care singurele elemente idempotente sunt 0 si 1, iar 3 este inversabil. Totodată vom obţine o teoremă de structură şi pentru cazul comutativ, acesta fiind rezultatul central al acestui capitol.

Rezultatele din acest capitol au fost publicate în [10].

3.1 Inele w-tripotente generale

Definiţia. 3.1.1. Un inel este w-tripotent, dacă pentru fiecare element x al său este adevărat că cel puţin unul din elementele x sau $1+x$ este tripotent.

Lema. 3.1.2. *Fie R un inel w-tripotent. Atunci*

(1) *orice subinel al lui R este w-tripotent;*

(2) *orice imagine omomorfă a lui R este w-tripotentă;*

(3) $24 = 0$, *aşadar există inelele w-tripotente R_1 şi R_2, cu $8R_1 = 0$ şi $3R_2 = 0$ astfel încât R are descompunerea $R = R_1 \times R_2$.*

Pentru cazul în care R are caracteristică 3, este uşor de văzut că identitatea $(1+x)^3 = 1+x$ implică $x^3 = x$. De aici, inelele w-tripotente de caracteristică 3 sunt tripotente. Deci ne putem restrânge studiul asupra inelelor de caracteristică 2^k, $k \in \{1, 2, 3\}$.

Corolarul. 3.1.5. *Clasa inelelor w-tripotente este o subclasă proprie a inelelor cu proprietatea că fiecare element al său este suma dintre un idempotent şi un tripotent care comută.*

Un produs direct de inele w-tripotente nu este în mod necesar w-tripotent.

Propoziţia. 3.1.11. *Fie $\{R_\alpha\}$ o familie de inele. Atunci produsul direct $R = \prod R_\alpha$ este w-tripotent dacă şi numai dacă fiecare R_α este w-tripotent şi cel mult un R_α nu este tripotent.*

Teorema. 3.1.12.*[35, 12.3] (Teorema lui Birkhoff) Orice inel nenul R poate fi reprezentat ca un produs subdirect de inele subdirect ireductibile.*

Următorul rezultat a fost demonstrat în [54, Theorem 3.6] folosind faptul că dacă R este un inel cu proprietatea că fiecare element este suma dintre un idempotent şi un tripotent care comută, atunci R este s-nil-clean, (adică fiecare element al său este suma dintre un idempotent şi un tripotent care comută), deci $R/J(R)$ este Boolean şi $J(R)$ este nil, [32, Theorem 5.6]. Demonstraţia acestuia, prezentată mai jos foloseşte tehnici descrise în [35, Section 12] şi este prezentată în lucrarea [54].

Teorema. *[54, Theorem 3.6] Fie R un inel de caracteristică 2^k. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) *fiecare element al lui R este suma dintre un idempotent şi un tripotent care comută;*

(2) *$x^4 = x^6$ pentru orice $x \in R$;*

(3) *$R/J(R)$ este Boolean şi $U(R)$ este un grup de exponent 2;*

(4) *$R/J(R)$ este Boolean şi pentru orice $x \in J(R)$ avem $x^2 = 2x$.*

În consecinţă, dacă R satisface una din condiţiile de mai sus, atunci $J(R)$ este mulţimea elementelor nilpotente ale lui R.

În următorul corolar avem o caracterizare a inelelor w-tripotente în care singurele elemente idempotente sunt 0 şi 1, iar 3 este inversabil. Aceasta va fi utilă pentru a descrie inelele w-tripotente comutative, deoarece în acest caz fiecare inel subdirect ireductibil este un inel în care singurele elemente idempotente sunt 0 şi 1.

Corolarul. 3.1.24. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru un inel R în care singurele elemente idempotente sunt 0 şi 1 şi în care $3 \in U(R)$.*

(1) *R este w-tripotent;*

(2) *R este un inel local astfel încât $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ şi $x^2 = 1$ pentru orice $x \in U(R)$;*

(3) *R are proprietatea $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ şi pentru orice $x \in J(R)$ avem $x^2 = 2x$.*

În consecinţă, fiecare inel w-tripotent în care singurele elemente idempotente sunt 0 şi 1 şi în care 3 este inversabil este comutativ.

3.2 Inele w-tripotente comutative

Scopul aceste secţiuni este de a da o caracterizare a inelelor w-tripotente comutative. Pentru aceasta avem nevoie de următoarea lemă.

Lema. 3.2.1. *FieR un inel w-tripotent comutativ, de caracteristică* 2^k *(*$k \leq 3$*) şi fie* N *radicalul nil al lui* R*. Atunci pentru orice idempotent* e *din* R *una din următoarele proprietăţi este adevărată:*

(a) $en = 0$ *pentru fiecare* $n \in N$*;*

(b) $en = n$ *pentru fiecare* $n \in N$*.*

Avem următoarea caracterizare pentru inelele w-tripotente comutative.

Teorema. 3.2.2. *Un inel comutativ* R *este w-tripotent dacă şi numai dacă* $R = R' \times R''$ *astfel încât:*

(1) R'' *este un inel tripotent de caracteristică* 3 *sau* $R'' = 0$*;*

(2) $R' = 0$ *sau* $3 \in U(R')$ *şi* R' *poate fi scufundat ca un subinel al unui produs direct* $R_0 \times \left(\prod_{i \in I} R_i\right)$ *astfel încât* R_0 *este un inel w-tripotent în care singurele elemente idempotente sunt* 0 *şi* 1 *şi fiecare* R_i *este un inel Boolean, pentru* $i \neq 0$.

Capitolul 4

Matrici companion m-nil-clean

Fie $m \geq 2$ un număr natural. Un element al unui inel R este m-nil-clean dacă se scrie ca suma dimtre m idempotenţi din R şi un nilpotent din R. În secţiunea 3 din [1] au fost investigate inelele cu proprietatea că fiecare element este m-nil-clean. Motivaţia studiului matricilor companion m-nil-clean stă în faptul că orice matrice este similară cu o sumă directă de matrici companion şi că la fel ca şi matricile nil-clean, matricile m-nil-clean se scriu şi ele în funcţie de idempotenţi şi nilpotenţi şi că o matrice similară cu una idempotentă este idempotentă, iar o matrice similară cu una nilpotentă este nilpotentă.

Ca o consecinţă a Teoremei 3 din [12], dacă dimensiunea unei matrici, de tip $n \times n$ peste corpul comutativ $\mathbb{F}$, de caracteristică pozitivă p, este mai mare decât acea caracteristică, atunci matricea este nil-clean. De aceea în studiul caracterizării matricilor companion m-nil-clean vom considera $n \leq p$. Acest studiu va fi concretizat sub forma unui rezultat central şi va fi făcut în funcţie de urma matricii, dimensiunea matricii şi caracteristica p a corpului comutativ de unde sunt coeficienţii matricii. Ca instrument de lucru, la fel ca în [47] şi în [7], vom folosi similaritatea matricii companion cu suma dintre o matrice diagonală cu coeficienţi 0 şi 1 şi o matrice companion.

Rezultatele din acest capitol sunt preluate din lucrarea [20].

4.1 Un rezultat util

Următoarea lemă va fi utilă când se vor demonstra rezultate despre matrici companion 2-nil-clean.

Lema. 4.1.1 *Fie* $\mathbb{F}$ *un corp comutativ. Pentru orice matrice companion* $C_q \in M_n(\mathbb{F})$ *şi orice* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *există o matrice companion* $C_{q'}$ *astfel încât* C_q *şi* $\mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{de\ k\ ori}, 0, \ldots, 0) + C_{q'}$ *sunt similare.*

4.2 O caracterizare a matricilor companion m-nil-clean

Definiţia. 4.2.1. Fie $m \geq 1$ un număr natural. O matrice este m-nil-clean dacă este suma a m matrici idempotente şi a unei matrici nilpotente.

Fie $\mathbb{F}$ un corp comutativ de caracteristică pozitivă p. Ca o consecinţă a Teoremei 1.3.34., dacă $n > p$, atunci orice matrice companion, de tip $n \times n$ peste $\mathbb{F}$ este nil-clean. Prin urmare vom presupune că $n \leq p$.

În al doilea rând, pentru $n = 1$ singurul nilpotent al lui $M_n(\mathbb{F})$ este (0) şi singurii idempotenţi ai lui $M_n(\mathbb{F})$ sunt (0) şi (1). În concluzie $C \in M_1(\mathbb{F})$ este m-nil-clean dacă şi numai dacă $C \in \{(0), (1), (2), \ldots, (m)\}$. Astfel că nu ne vom referi la cazul $n = 1$, deci vom presupune de acum că $n > 1$.

Lema. 4.2.2. *Fie* $m \geq 2$ *un număr natural. Fie* $\mathbb{F}$ *un corp comutativ de caracteristică pozitivă* p*. Fie* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ *o matrice (nu în mod necesar companion), pentru care există* E_i *matrice idempotentă, cu* $k_i = \mathrm{rang}(E_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, m)$ *şi* N *matrice nilpotentă astfel încât* $A = E_1 + E_2 + \cdots + E_m + N,$ *. Atunci există un întreg* c *astfel încât* $\mathrm{tr}(A) = c \cdot 1$ *şi* $c = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ *(mod* p*), iar fiecare* k_i *este un număr natural mai mic sau egal cu* n*.*

Lema. 4.2.4. *Fie* $m \geq 2$ *un număr întreg. Fie* $\mathbb{F}$ *un corp comutativ, de caracteristică pozitivă* p *şi* n *un număr natural,* $1 < n \leq p$*. Dacă* $-c_{n-1} = c \cdot 1$ *şi* $c \in \{m, m+1, \ldots, mn-1\}$*, atunci* $C = C_{c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ *este* m*-nil-clean.*

Următorul corolar este al teoremei 1.3.34:

Corolarul. 4.2.5 *Fie* $\mathbb{F}$ *un corp comutativ de caracteristică* 2. *Fie* $C = C_{c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}} \in M_n(\mathbb{F})$ *o matrice companion. Atunci* C *este nil-clean dacă şi numai dacă* $-c_{n-1} \in \{0, 1\}$.

Având cazul $p = 2$ rezolvat (C fiind nil-clean este şi m-nil-clean) putem presupune de acum că p este impar.

Teorema. 4.2.6. *Fie* $m \geq 2$ *un număr natural,* $\mathbb{F}$ *un corp comutativ de caracteristică pozitivă impară* p, $1 < n \leq p$, $C = C_{c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}}$ *o matrice companion şi* c *cel mai mic întreg nenegativ, astfel încât* $-c_{n-1} = c \cdot 1$.

Următoarele afirmaţii au loc:

1. *dacă* $c = 0$ *şi* $mn - 1 < p$, *atunci* C *este* m*-nil-clean dacă şi numai dacă* C *este nilpotentă sau* $C - (m-1)I_n$ *este unipotentă;*

2. *dacă* $c = t$, $1 \leq t \leq m$, *atunci* C *este* t*-nil-clean, aşa că este* m*-nil-clean;*

3. *dacă* $c \in \{m, m+1, \ldots, mn-2, mn-1\}$, *atunci* C *este* m*-nil-clean;*

4. *dacă* $mn - 2 \geq p$, *atunci* C *este* m*-nil-clean;*

5. *Presupunem că* $mn - 2 < p$

   (a) *dacă* $c = mn$ *şi* $p = mn - 1$, *atunci* C *este nil-clean, deci este şi* m*-nil-clean;*

   (b) *dacă* $c = mn$ *şi* $p = mn$, *atunci* C *este* m*-nil-clean dacă şi numai dacă* C *este nilpotentă sau* $C - (m-1)I_n$ *este o matrice unipotentă;*

   (c) *dacă* $c = mn$, $p > mn$, *atunci* C *este* m*-nil-clean dacă şi numai dacă* $C - (m-1)I_n$ *este o matrice unipotentă;*

   (d) *dacă* $c > mn$, *atunci* C *nu este* m*-nil-clean.*

Bibliografie

[1] A. N. Abyzov, *Strongly q-nil-clean rings*, Siberian Mathematical Journal, 60 (2019), Issue 2, 197–208.

[2] F. W. Anderson, K. R. Fuller, Kent R., *Rings and Categories of Modules*, Graduate Texts in Mathematics, 13 (2 ed.), New York: Springer-Verlag, 1992.

[3] D. Andrica, G. Călugăreanu, *A nil-clean* 2×2 *matrix over the integers which is not clean*, Journal of Algebra and Its Applications, 13 (2014), No. 06, 1450009.

[4] M. -S. Ahn, D. D. Anderson, *Weakly clean rings and almost clean rings*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 36 (2006), No. 3, 783–789.

[5] D.K. Basnet, J. Bhattacharyya, *Nil clean index of rings*, International Electronic Journal of Algebra, 15 (2014), Issue 15, 145–156.

[6] J. D. Botha, *Sums of two square-zero matrices over an arbitrary field*, Linear Algebra and Its Applications, 436 (2012), Issue 3, 516–524.

[7] S. Breaz, *Matrices over finite fields as sums of periodic and nilpotent elements*, Linear Algebra and Its Applications, 555 (2018), 92–97.

[8] S. Breaz, G. Călugăreanu, *Sums of nilpotent matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 65 (2017), 67–78.

[9] S. Breaz, G. Călugăreanu, P. Danchev, and T. Micu, *Nil-clean matrix rings*, Linear Algebra and Its Applications, 439 (2013), Issue 10, 3115–3119.

[10] S. Breaz, A. Cîmpean, *Weakly tripotent rings*, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 55 (2018), No. 4, 1179–1187.

[11] S. Breaz, P. Danchev, Y Zhou, *Rings in which every element is either a sum or a difference of a nilpotent and an idempotent*, Journal of Algebra and Its Applications, 15 (2016), No. 08, 1650148.

[12] S. Breaz, G.C. Modoi, *Nil-clean companion matrices*, Linear Algebra and Its Applications, 489 (2016), 50–60.

[13] V.P. Camillo, H.-P. Yu, *Exchange rings, units and idempotents*, Communications in Algebra, 22 (1994), Issue 12, 4737-4749.

[14] G. Călugăreanu, T. Y. Lam, *Fine rings: A new class of simple rings,* Journal of Algebra and its Applications,15 (2016), No. 9, 1650173.

[15] H. Chen, *On uniquely clean rings*, Communications in Algebra, 39 (2010), Issue 1, 189-198.

[16] H. Chen, *Rings Related Stable to Range Conditions*, Series in Algebra 11, World Scientific, Hackensack, NJ, 2011.

[17] H. Chen, M. Sheibani, *Strongly 2-nil-clean rings*, Journal of Algebra and Its Applications, 16 (2017), No. 09, 1750178.

[18] H. Chen, M. Sheibani, *Rings in which the power of every element is the sum of an idempotent and a unit*, Publications de l' Institut Mathématique, 116 (2017), 133–148.

[19] H. Chen and M. S. Abdolyousefi, *On Yaqub nil-clean ring*, preprint arXiv:1704.00213 [math.RA].

[20] A. Cîmpean, *m-nil-clean companion matrices*, Electronic Journal of Linear Algebra, 35 (2019), 626–632.

[21] A. Cîmpean, P. Danchev, *Weakly nil-clean index and uniquely weakly nil-clean rings*, International Electronic Journal of Algebra, 21 (2017), Issue 21, 180–197.

[22] P.V. Danchev, W.Wm. McGovern, *Commutative weakly nil clean unital rings*, Journal of Algebra, 425 (2015), 410–422.

[23] J. Dauns, *Modules and rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[24] A. J. Diesl, *Nil-clean rings*, Journal of Algebra, 383 (2013), 197-211.

[25] J. Han, W. K. Nicholson, *Extensions of clean rings*, Communications in Algebra, 29 (2001), Issue 6, 2589–2595.

[26] D. Handelman, *Perspectivity and cancellation in regular rings*, Journal of Algebra, 48 (1977), Issue 1, 1–16.

[27] B. Harris, *Commutators in division rings*, Proceedings of the American Mathematical Society, 9 (1958), No. 4, 628-630.

[28] R. E. Hartwig, M. S. Putcha, *When is a matrix a sum of idempotents ?*, Linear and Multilinear Algebra, 26 (1990), Issue 4, 279–286.

[29] R. E. Hartwig, M. S. Putcha, *When is a matrix a difference of two idempotents ?*, Linear and Multilinear Algebra, 26 (1990), Issue 4, 267–277.

[30] Y. Hirano, H. Tominaga, *Rings in which every element is the sum of two idempotents*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 37 (1988), Issue 2, 161–164.

[31] N. Jacobson, *Structure of Rings*, Colloquium Publications, 37, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1956.

[32] T. Koşan, Z. Wang, Y. Zhou, *Nil-clean and strongly nil-clean rings*, Journal of Pure and Applied Algebra, 220 (2016), Issue 2, 633–646.

[33] M. T. Koşan, T.-K. Lee, Y. Zhou, *When is every matrix over a division ring a sum of an idempotent and a nilpotent?*, Linear Algebra and its Applications, 450 (2014), 7–12.

[34] J. Krempa, *Logical connections between some open problems concerning nil rings*, Fundamenta Mathematicae 76 (1972), No. 2, 121130.

[35] T.Y. Lam, A first course in noncommutative rings, Graduate Texts in Mathematics, 131. New York: Springer-Verlag, 1991.

[36] T. Y. Lam, Exercises in classical ring theory, Problem books in Mathematics, Springer, Second edition, 2003.

[37] T.-K. Lee, Y. Zhou, *Clean index of rings*, Communications in Algebra, 40 (2012), Issue 3, 807–822.

[38] J. Matczuk, *Conjugate (nil) clean rings and Köthe' s problem*, Journal of Algebra and its Applications, 16 (2017), No. 4, 1750073.

[39] W. K. Nicholson, *Lifting idempotents and exchange rings*, Transactions of the American Mathematical Society, 229 (1977), 269–278.

[40] W.K. Nicholson, Y. Zhou, *Clean rings: a survey*, Advances in Ring Theory (2005), 181–198.

[41] C. de Pazzis, *On sums of idempotent matrices over a field of positive characteristic*, Linear Algebra and its Applications, 433 (2010), Issue 4, 856-866.

[42] C. de Pazzis, *On linear combinations of two idempotent matrices over an arbitrary field*, Linear Algebra and Its Applications, 433 (2010), Issue 3, 625-636.

[43] C. Pearcy, D. Topping, *Sums of small numbers of idempotents*, Michigan Mathematical Journal, 14 (1967), Issue 4, 453-465.

[44] B. L. Schoonmaker, *Clean indices of common rings*, A dissertation submitted to the faculty of Brigham Young University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, BYU Scholars Archive, 2018.

[45] X. Song, B. Zheng, C. Cao, *A note on decomposing a square matrix as sum of two square nilpotent matrices over an arbitrary field*, Scientific World Journal, (2013), 640350.

[46] J.G. Stampfli, *Sums of projections* Duke Mathematical Journal, 31 (1964), No. 3, 455461.

[47] J. Šter, *On expressing matrices over* $\mathbb{Z}_2$ *as the sum of an idempotent and a nilpotent*, Linear Algebra and its Applications, 544 (2018), 339–349.

[48] J. Šter, *Nil-clean quadratic elements,* Journal of Algebra and Its Applications, 16 (2017), No. 10, 1750197.

[49] G. Tang, Y. Zhou, H. Su, *Matrices over a commutative ring as sums of three idempotents or three involutions*, Linear and Multilinear Algebra, 67 (2019), Issue 2, 267–277.

[50] E. A. Walker, *Introduction to Abstract Algebra*, Las Cruces, New Mexico, 1986.

[51] R. B. Warfield Jr., *Exchange rings and decomposition of modules*, Mathematische Annalen, 199 (1972), Issue 1, 31–36.

[52] R. Wisbauer, *Foundation of module and ring theory, a handbook for study and research*, Gordon and Breach science publishers, reading, 1991.

[53] P. Y. Wu, *Sums of idempotent matrices*, Linear Algebra and its Applications, 142 (1990), 43–54.

[54] Z. Ying, T. Koşan, Y. Zhou, *Rings in which every element is a sum of two tripotents*, Canadian Mathematical Bulletin, 59 (2016), Issue 3, 661–672.

[55] Y. Zhou, *Rings in which elements are sums of nilpotents, idempotents and tripotents*, Journal of Algebra and Its Applications, 17 (2018), No. 1, 1850009.