UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

TEZA DE DOCTORAT
- REZUMAT -

Contribuţii la teoria punctului fix pentru operatori ciclici şi aplicaţii

Coordonator ştiinţific
Prof. dr. Adrian Petruşel

Autor
Adrian Magdaş

2020

Preşedinte: Prof. dr. Octavian Agratini (Universitatea Babeş-Bolyai)

Referenţi:

Prof. dr. Aurelian Cernea (Universitatea Bucureşti)
Prof. dr. Radu Miculescu (Universitatea Transilvania Braşov)
Assoc. Prof. dr. Marcel-Adrian Şerban (Universitatea Babeş-Bolyai)

Coordonator ştiinţific: Prof. dr. Adrian Olimpiu Petruşel (Universitatea Babeş-Bolyai)

Contents

Introducere

Teoria punctului fix a fost descoperită ca un instrument puternic pentru rezolvarea diverselor probleme apărute în diferite domenii ale matematicii pure şi aplicate. Piatra de temelie a teoriei metrice a punctului fix, principiul contracţiilor al lui S. Banach [1], a fost generalizat în mai multe direcţii. Majoritatea acestor generalizări, vezi de exemplu [54], [70], slăbesc natura contractivă a operatorul, dar, în compensare, necesită condiţii care îmbogăţesc structura spaţiului metric şi / sau au cerinţe suplimentare asupra operatorului.

În 1969, S.B. Nadler a extins principiul contracţiilor de la cazul operatorilor univoci la cazul operatorilor multivoci (vezi [40]). Teorema lui Nadler a fost generalizată de mulţi matematicieni, a se vedea de exemplu rezultatele din teoria punctului fix pentru operatori multivoci de tip contractiv ale lui H. Covitz, S.B. Nadler [13], L. Ćirić [9], N. Mizoguchi şi W. Takahashi [38], S.B. Nadler [41], A. Petruşel [56], C. Vetro şi F. Vetro [80].

Principiul contracţiilor a fost extins la cazul contracţiilor univoce definite pe spaţii metrice vectoriale de A.I. Perov şi A.V. Kibenko [45]. Cazul contracţiilor multivoce definite pe spaţii metrice vectoriale a fost tratat în A. Petruşel [53], I.R. Petre, A. Petruşel [46].

Una din cele mai consistente generalizări ale principiului contracţiilor a fost dată în 2003 de W.A. Kirk, P.S. Srinivasan şi P. Veeramani, utilizând conceptul de operator ciclic (vezi [29]). Acest concept a atras interesul a multor autori datorită potenţialului său în studiul ecuaţiilor diferenţiale şi integrale (vezi de exemplu [2], [23], [61], [75]).

Conceptul de punct fix cuplat, introdus de V.I. Opoitsev [43], se dezvoltă rapid datorită rezultatelor obţinute de D. Guo, V. Lakshmikantham [20] şi T.G. Bhaskar, V. Lakshmikantham [5]. O nouă direcţie de cercetare a teoriei punctului fix cuplat a fost dezvoltată de mulţi autori (vezi V. Lakshmikantham, L. Ćirić [31], A. Petruşel, G. Petruşel şi B. Samet [57], B. Samet şi C. Vetro [74]) utilizând condiţii contractive.

A. Eldred şi P. Veeramani au deschis în 2006 a altă direcţie de cercetare, stabilind condiţii care asigură existenţa punctelor de cea mai bună proximitate în cazul operatorilor ciclici definiţi pe spaţii metrice (vezi [16]).

Scopul acestei lucrări este de a realiza un studiu referitor la existenţa, unicitatea şi unele proprietăţi calitative ale soluţiilor ecuaţiei de punct fix, ale sistemului de puncte fixe cuplate, precum şi a problemei punctului de cea mai bună proximitate pentru operatorii univoci şi multivoci care satisfac condiţii ciclice. Acest studiu este susţinut prin prezentarea unor aplicaţii.

Lucrarea este structurată pe trei capitole astfel:

Capitolul 1: Preliminarii

Acest capitol oferă o scurtă privire de ansamblu asupra noţiunilor de bază şi a rezultatelor care sunt luate în considerare în capitolele următoare.

Pentru început, sunt prezentate notaţii standard şi terminologia utilizată în analiza neliniară. De asemenea, este prezentată noţiunea de funcţie de comparaţie şi proprietăţile aferente utilizate pe parcursul lucrării. În cele ce urmează sunt prezentate teoremele metrice fundamentale de punct fix începând cu principiul contracţiilor şi continuând cu rezultate din teoria punctului fix pentru operatori care satisfac condiţii contractive clasice. Noţiunea de bază folosită în dezvoltarea acestei teze este cea de operator ciclic. Această noţiune este prezentată împreună cu câteva teoreme de punct fix date de Kirk, Srinivasan şi Veeramani în [29]. Teoreme de bază pentru puncte de cea mai bună proximitate şi pentru puncte fixe cuplate, teoreme utile în dezvoltarea capitolelor următoare sunt prezentate în ultimele două secţiuni.

Capitolul 2: Contracţii generalizate univoce definite pe reprezentări ciclice

În al doilea capitol prezentăm rezultate de teoria punctului fix pentru operatori univoci, definiţi pe reprezentări ciclice în spaţii metrice şi în spaţii metrice vectoriale.

Acest capitol este structurat pe trei secţiuni.

În prima secţiune cercetăm proprietăţile unor contracţii generalizate de tip Ćirić definite pe reprezentări ciclice într-un spaţiu metric. Condiţia de contracţie generalizată dată de Ćirić este una din cele mai generale condiţii metrice pentru care punctul fix este unic şi poate fi aproximat prin şirul Picard al iteratelor. Rezultatele prezentate generalizează teoreme metrice fundamentale din teoria punctului fix date pentru operatori de tip Banach, Kannan, Bianchini, Reich, Chatterjea, Zamfirescu, Ćirić (vezi [52], [66]), în cazul unei condiţii ciclice (vezi [47]). De asemenea, rezultatul principal din această secţiune (Teorema 2.1.5) generalizează următoarele rezultate: Teorema 2.1.1 dată de Petric şi Zlatanov în [50] şi Teorema 2.1.3 dată de Păcurar şi Rus în [44].

Pe parcursul acestei secţiuni este dezvoltată o teorie a problemei de punct fix, teorie ce constă în:

• studiul existenţei şi al unicitătăţii punctului fix a unui operator univoc, ciclic, φ-contracţie de tip Ćirić;

• convergenţa şirului Picard al iteraţiilor la punctul fix;

• dependenţa continuă de date a operatorului perturbator;

• bine-punerea problemei de punct fix;

• şiruri de operatori şi puncte fixe.

De asemenea, este enunţată o teoremă de tip Maia pentru contracţii generalizate de tip Ćirić definite pe reprezentări ciclice.

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în lucrarea: Magdaş [33].

În a doua secţiune prezentăm o teoremă de tip Perov pentru operatori ciclici. Abordarea noastră se bazează pe teorema de punct fix a lui Perov (vezi Teorema 2.2.3), în spaţii metrice vectoriale. Rezultatul principal al acestei secţiuni este Teorema 2.2.5, o extensie a Teoremei 1.3.1 şi a Teoremei 1.3.12 în spaţii metrice vectoriale. Sunt enenţate două rezultate referitoare la dependenţa de date şi la bine-punerea problemei de punct fix. Ca aplicaţii, sunt studiate existenţa, unicitatea şi dependenţa de date a soluţiei unui sistem de ecuaţii integrale de tip Fredholm; soluţia sistemului poate fi obţinutăprin metoda aproximaţiilor succesive. De asemenea, sunt studiate existenţa şi unicitatea soluţiei unui sistem de ecuaţii integrale de tip Volterra.

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în lucrarea: Magdaş [36].

În a treia secţiune studiem problema punctului fix cuplat pentru operatori univoci ciclici contractivi, dând metode iterative pentru aproximarea punctului fix / punctului fix cuplat precum /c si proprietăţi calitative ale punctului fix / punctului fix cuplat, cum ar fi: dependenţa de date, stabilitatea Ulam-Hyers generalizată, bine-punerea problemei. Ca aplicaţii, studiem existenţa, unicitatea şi stabilitatea Ulam-Hyers generalizată ale soluţiilor sistemelor de ecuaţii integrale.

Rezultatul principal din această secţiune este Teorema 2.3.2 care generalizează diverse teoreme cum ar fi Teorema 1.5.9, Teorema 1.5.11, Teorema 1.5.13, Teorema 1.5.15.

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în lucrarea: Magdaş [35].

Capitolul 3: Contracţii generalizate multivoce definite pe reprezentări ciclice

În cel de-al treilea capitol prezentăm rezultate de teoria punctului fix şi ale punctului de cea mai bună proximitate pentru operatori multivoci definiţi pe reprezentări ciclice. Studiem problema punctului fix cuplat / punctului de cea mai bună proximitate cuplat pentru operatori multivoci, ciclici, care iau valori proximinale.

Acest capitol este structurat pe trei secţiuni.

În prima secţiune sunt investigate propetăţi ale φ-contracţiilor multivoce de tip Ćirić definite pe reprezentări ciclice ale spaţiului metric (X, d). Sunt analizate condiţiile în care un astfel de operator T are puncte fixe şi anume există $x \in X$ care satisface relaţia $x \in T(x)$. Construim un şir al aproximaţiilor succesive ale lui T care converge către un punct $x^* \in F_T$, pornind de la orice punct (x, y) de pe graficul operatorului T. Sunt studiate dependenţa de date şi stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a incluziunii $x \in T(x)$. Rezultatele prezentate extind teoreme metrice de punct fix binecunoscute ca: Teorema lui Nadler (vezi [40]) sau rezultate de punct fix ale unor operatori multivoci de tip Ćirić (vezi [9]), în cazul unei condiţii ciclice. De asemenea, rezultatul principal Teorema 3.1.4 este o generalizare a Teoremei 2.1 dată de Neammanee şi Kaewkhao în [42].

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în lucrarea: Magdaş [34].

În a doua secţiune sunt studiate existenţa soluţiilor şi stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a problemei de cea mai bună proximitate pentru operatori multivoci, ciclici: Dacă (X, d) este un spaţiu metric, $A, B \in P(X)$, $T : A \cup B \to P(X)$ este un operator multivoc care satisface condiţia ciclică $T(A) \subseteq B, T(B) \subseteq A$, atunci ne propunem să aflăm $x^* \in A \cup B$ astfel încât $D(x^*, T(x^*)) = D(A, B)$, unde D este funcţionala distanţă. x^* se numeşte punct de cea mai bună proximitate al lui T.

Mulţi autori au studiat existenţa punctului de cea mai bună proximitate pentru operatori ciclici definiţi pe spaţii metrice, vezi de ex. [17], [19], [24], [25], [26], [28], [49], [51]. Primul rezultat principal al acestei secţiuni extinde Teorema 1.4.5 (Suzuki, Kikkawa, C. Vetro, [77]) şi Theorem 1.4.6 (Neammanee, Kaewkhao [42]) la cazul operatorilor multivoci de tip Ćirić care iau valori proximinale, în contextul spaţiilor metrice cu propietatea UC.

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în lucrarea: Magdaş [37].

În a treia secţiune sunt studiate problema de punct fix cuplat şi problema de punct cuplat de cea mai bună proximitate pentru operatori multivoci ciclici. Abordarea se bazează pe rezultate de punct fix pentru operatori generaţi de problemele iniţiale. Primul rezultat, Teorema 3.3.5, enunţă un rezultat de punct fix cuplat pentru operatori multivoci ciclici cuplaţi, φ-contracţii de tip Ćirić. De asemenea, este studiată stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a problemei de punct fix cuplat. Teorema 3.3.10 studiază existenţa punctului cuplat de cea mai bună proximitate pentru un operator multivoc ciclic cuplat de tip Ćirić care ia valori proximinale, în cadrul spaţiilor metrice cu proprietatea UC. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în lucrarea: Magdaş [35].

Teza se încheie cu referinţele bibliografice utilizate în text şi cu lista lucrărilor publicate.

Cuvinte-cheie: spatiu metric, operator ciclic, punct fix, punct de cea mai bun proximitate, punct fix cuplat, aplicatii la sisteme de ecuatii integrale.

Cuvânt de mulţumire

Aş vrea să-mi exprim recunoştinţa către coordonatorul ştiinţific, Profesor Adrian Petruşel, pentru îndrumare, susţinere, răbdare şi pentru asigurarea unui climat pozitiv pe parcursul acestui proiect de cercetare.

Chapter 1

Preliminarii

Acest capitol oferă o scurtă privire de ansamblu asupra noţiunilor de bază şi a rezultatelor care sunt luate în considerare în capitolele următoare.

1.1 Notaţii şi noţiuni fundamentale

Prezentăm câteva notaţii standard şi terminologia din analiza neliniară care vor fi utilizate pe parcursul lucrării.

Fie (X, d) un spaţiu metric şi Y o mulţime nevidă a mulţimii X. Notăm:

$$P(X) := \{A \subseteq X \mid A \text{ este nevidă}\};\ P_b(X) := \{A \in P(X) \mid A \text{ este mărginită}\};$$

$$P_{cl}(X) := \{A \in P(X) \mid A \text{ este închisă}\};\ P_{cp}(X) := \{A \in P(X) \mid A \text{ este compactă}\};$$

$$P_{cv}(X) := \{A \in P(X) \mid A \text{ este convexă}\};\ P_{cl,cv}(X) := P_{cl}(X) \cap P_{cv}(X).$$

Definim următoarele funcţionale (generalizate) utilizate în lucrare:

• funcţionala diametru

$$\delta : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},\ \delta(A, B) = \sup\{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\};$$

• funcţionala distanţă

$$D : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+,\ D(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\};$$

• funcţionala generalizată exces

$$\rho : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},\ \rho(A, B) = \sup\{D(a, B) \mid a \in A\};$$

• funcţionala generalizată Pompeiu-Hausdorff

$$H : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},\ H(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}.$$

Reamintim următoarele noţiuni şi rezultate.

Lemma 1.1.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric, $A, B \in P(X)$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât*

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon.$$

Definition 1.1.2. (Fletcher, Moors [18]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi fie $Y \in P(X)$. Notăm

$$P_Y(x) = \{y \in Y \mid d(x,y) = D(x,Y)\}, \text{ unde } x \in X.$$

Mulţimea Y se numeşte proximinală dacă pentru orice $x \in X$, $P_Y(x)$ este nevidă. Dacă pentru orice $x \in X$, $P_Y(x)$ conţine exact un element, atunci Y se numeşte mulţime Chebyshev.

Se observă uşor că orice mulţime Chebysev este proximinală.

Notăm $P_{prox}(X) = \{Y \in P(X) \mid Y \text{ este proximinală}\}$.

Remark 1.1.3. Fie (X,d) un spaţiu metric. Atunci

$$P_{cp}(X) \subset P_{prox}(X) \subset P_{cl}(X).$$

Remark 1.1.4. (Deutsch [15]) Un spaţiu Banach X este reflexiv dacă şi numai dacă orice submulţime nevidă, închisă şi convexă lui X este proximinală.

Remark 1.1.5. (Cobzaş [14]) Dacă Y este o submulţime nevidă, completă, convexă, a unui spaţiu uniform convex normat X, atunci Y este o mulţime Chebyshev în X.

Pentru detalii privind noţiunile anterioare a se vedea [40], [63], [70], [76].

1.2 Funcţia de comparaţie

În literatura de specialitate există o mare diversitate de a defini funcţia de comparaţie. Pe parcursul lucrării ne vom referi doar la următoarele noţiuni.

Definition 1.2.1. (Rus, Şerban [72]) O funcţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ se numeşte funcţie de comparaţie dacă satisface următoarele condiţii:

$(i)_\varphi$ φ este crescătoare;

$(ii)_\varphi$ $(\varphi^n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge spre 0 când $n \to \infty$, pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$.

Dacă înlocuim condiţia $(ii)_\varphi$ cu condiţia:

$(iii)_\varphi$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t) < \infty$, pentru orice $t > 0$,

atunci φ se numeşte funcţie de comparaţie tare.

Lemma 1.2.2. (Rus, A. Petruşel, G. Petruşel [70]) *Dacă $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie de comparaţie, atunci au loc următoarele:*

(i) $\varphi(t) < t$, pentru orice $t > 0$;

(ii) $\varphi(0) = 0$;

(iii) φ este continuă în 0.

Lemma 1.2.3. (Păcurar, Rus [44], Rus, Şerban [72]) *Dacă $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie de comparaţie tare, atunci au loc următoarele:*

(i) φ este o funcţie de comparaţie ;

(ii) funcţia $s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definită prin

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t), \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.2.1}$$

este crecătoare şi continuă în 0;

(iii) există $k_0 \in \mathbb{N}$, $a \in (0,1)$ şi o serie convergentă cu termeni nenegativi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ astfel încât

$$\varphi^{k+1}(t) \le a\varphi^k(t) + v_k, \ \text{pentru } k \ge k_0 \text{ şi orice } t \in \mathbb{R}_+.$$

Remark 1.2.4. Anumiţi autori utilizează noţiunea de funcţie de comparaţie (c) definită prin afirmaţiile (i) şi (iii) din Lema 1.2.3. De fapt, conceptul de funcţie de comparaţie (c) coincide cu cel de funcţie de comparaţie tare.

Example 1.2.5. Următoarele funcţii $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sunt funcţii de comparaţie:

(1) $\varphi(t) = at$, unde $a \in [0, 1)$.

(2) $\varphi(t) = \begin{cases} at, \text{ for } t \in [0, 1] \\ t + a - 1, \text{ for } t > 1 \end{cases}$, unde $a \in [0, 1)$.

(3) $\varphi(t) = at + \frac{1}{2}[t]$, unde $a \in (0, \frac{1}{2})$.

(4) $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, \text{ for } t \in [0, a] \\ a, \text{ for } t > a \end{cases}$, unde $a \in (1, \infty)$.

(5) $\varphi(t) = \frac{t}{t + a}$, unde $a \in [1, \infty)$.

Primele patru exemple sunt funcţii de comparaţie. Al cincilea exemplu este o funcţie de comparaţie tare dacă şi numai dacă $a \in (1, \infty)$. Pentru mai multe aspecte privind funcţiile de comparaţie se pot consulta [69], [70].

1.3 Teoreme metrice de punct fix fundamentale

Dacă $f : Y \to X$ este un operator univoc, atunci
$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in Y\}$ reprezintă graficul lui f şi
$F_f := \{x \in Y \mid f(x) = x\}$ reprezintă mulţimea punctelor fixe ale lui f.

Dacă $T : Y \to P(X)$ este un operator multivoc, atunci
$\text{Graph}(T) := \{(x, y) \mid x \in Y, y \in T(x)\}$ reprezintă graficul lui T şi
$F_T := \{x \in Y \mid x \in T(x)\}$ reprezintă mulţimea punctelor fixe ale lui T.

Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care satisface următoarele condiţii:

(i) $x_0 = x,\ x_1 = y$;

(ii) $x_{n+1} \in T(x_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

se numeşte şir al aproximaţiilor succesive ale lui T care porneşte din $(x, y) \in \text{Graph}(T)$.

Principiul contracţiilor este unul dintre cele mai utile rezultate ale analizei neliniare. Intr-un spaţiu metric, principiul contracţiilor a fost enunţat în 1922.

Theorem 1.3.1. (Banach [1]) *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi fie $f : X \to X$ o contracţier, adică există o contantă $a \in [0, 1)$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$,*

$$d(f(x), f(y)) \leq ad(x, y).$$

Atunci:

(1) *f are un unic punct fix $x^* \in X$;*

(2) *şirul Picard $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin*

$$x_n = f(x_{n-1}),\ n \geq 1 \tag{1.3.1}$$

converge la x^* pentru orice $x_0 \in X$;

(3) *au loc următoarele estimări:*

$$d(x_{n+k-1}, x^*) \leq \frac{a^k}{1 - a} d(x_n, x_{n-1}), \forall n, k \in \mathbb{N}^*;$$

(4) *rata de convergenţă a şirului Picard este dată prin:*

$$d(x_n, x^*) \leq ad(x_{n-1}, x^*), \forall n \geq 1.$$

In 1969, Nadler [40] a extins principiul contracţiilor al lui Banach de la operatori univoci la operatori multivoci. Existenţa punctelor fixe pentru diferiţi operatori multivoci a fost studiată de mulţi autori, utilizând diverse condiţii, a se vedea Ćirić [9], [10], Mizoguchi, Takahashi [38], Rhoades [67].

Reamintim aici teorema de punct fix a lui Nadler.

Theorem 1.3.2. (Nadler [40]) *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi fie $T : X \to P_{b,cl}(X)$ o a-contracţie multivocă, pentru care există o constantă $a \in [0, 1)$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$,*

$$H(T(x), T(y)) \leq a \cdot d(x, y).$$

Atunci T are un punct fix.

In ultimele decenii, autorii au dat multe generalizări principiului contracţiilor al lui Banach, o direcţie de generalizare fiind slăbirea condiţiei de contracţie.

Prezentăm câteva condiţii existente în literatură. Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi fie $f : X \to X$ un operator.

(i) (Kannan, [22]) există o constantă $a \in [0, \frac{1}{2})$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq a[d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \forall x, y \in X;$$

(ii) (Chatterjea, [7]) există o constantă $a \in [0, \frac{1}{2})$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq a[d(x, f(y)) + d(y, f(x))], \forall x, y \in X;$$

(iii) (Zamfirescu, [81]) există numerele reale $a \in [0, 1), b, c \in [0, \frac{1}{2})$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$, are loc cel puţin una dintre condiţiile:

(z1) $d(f(x), f(y)) \leq ad(x, y)$;

(z2) $d(f(x), f(y)) \leq b[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$;

(z3) $d(f(x), f(y)) \leq c[d(x, f(y)) + d(y, f(x))]$.

(iv) (Bianchini, [6]) există o constantă $a \in [0, 1)$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq a \max\{d(x, f(x)), d(y, f(y))\}, \forall x, y \in X;$$

(v) (Reich [64], Rus [69]) există numerele reale $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ cu $a + b + c < 1$ astfel încât pentru orice y $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \leq ad(x, y) + bd(x, f(x)) + cd(y, f(y)).$$

Ljubomir Ćirić a slăbit condiţiile anterioare introducând în 1971 noţiunea de contracţie generalizată.

Definition 1.3.3. (Ćirić [8]) Fie (X, d) un spaţiu metric. Un operator $f : X \to X$ se spune că este contracţie λ-generalizată dacă şi numai dacă pentru orice $x, y \in X$ există numerele pozitive $q(x, y)$, $r(x, y)$, $s(x, y)$ şi $t(x, y)$ cu

$$\sup\{q(x, y) + r(x, y) + s(x, y) + 2t(x, y) \mid x, y \in X\} = \lambda < 1$$

astfel încât $d(f(x), f(y)) \leq q(x, y)d(x, y) + r(x, y)d(x, f(x))+$

$$+s(x, y)d(y, f(y)) + t(x, y)(d(x, f(y)) + d(y, f(x))).$$

Remark 1.3.4. (Ćirić [9]) f este o contracţie generalizată dacă şi numai dacă există $q \in [0,1)$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \leq qM(x,y),$$

unde $M(x,y) =$

$$= \max\{d(x,y), d(x, f(x)), d(y), f(y)), \frac{1}{2}[d(x, f(y)) + d(y, f(x))]\}. \tag{1.3.2}$$

Example 1.3.5. (Ćirić [8]) Fie $X = [0,2]$, şi fie $f : X \to X$, $f(x) = \frac{x}{9}$, pentru $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = \frac{x}{10}$, pentru $1 < x \leq 2$. Operatorul f nu este o contracţie, dar este o contracţie generalizată.

Definition 1.3.6. [9] Fie (X,d) un spaţiu metric şi fie $T : X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc. Spunem că T este o q-contracţie multivocă generalizată dacă există $q \in (0,1)$ astfel încât

$$H(T(x), T(y)) \leq$$

$$\leq q \cdot \max\left\{d(x,y), D(x, T(x)), D(y, T(y)), \frac{1}{2}[D(x, T(y)) + D(y, T(x))]\right\},$$

are loc pentru orice $x, y \in X$.

Definition 1.3.7. [8] Fie (X,d) un spaţiu metric şi fie $f : X \to X$ un operator univoc. X se numeşte f-orbital complet dacă orice şir Cauchy $(f^{n_i}(x))_{i \in \mathbb{N}}, x \in X$, are un punct limită în X.

Definition 1.3.8. [9] Fie (X,d) un spaţiu metric şi fie $T : X \to P(X)$ un operator multivoc. X se numeşte T-orbital complet dacă orice şir Cauchy $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ cu $x_{n_i} \in T(x_{n_i - 1})$ converge în X.

Theorem 1.3.9. [8] *Fie f o λ-contracţie generalizată a spaţiului metric (X,d) f-orbital complet în el însuşi. Atunci*

(1) *f are un unic punct fix $x^* \in X$;*

(2) *şirul Picard $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin*

$$x_n = f(x_{n-1}), \;\; n \geq 1, \tag{1.3.3}$$

converge la x^* pentru orice punct $x_0 \in X$;

(3) *are loc următoarea estimare:*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(x_0, x_1), \forall n \geq 0.$$

Theorem 1.3.10. [9] *Fie $T : X \to P_{cl}(X)$ o q-contracţie multivocă generalizată şi fie (X,d) un spaţiu metric T-orbital complet .*

Atunci au loc următoarele afirmaţii:

(1) *$F_T \neq \emptyset$;*

(2) *pornind de la orice punct $(x,y) \in \mathrm{Graph}(T)$, există un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al aproximaţiilor succesive ale lui T care converge spre un punct fix $x^*(x,y) \in X$;*

(3) *are loc următoarea estimare:*

$$d(x_n, x^*(x,y)) \leq \frac{q^{an}}{1-q^a} \cdot d(x_0, x_1), \forall a \in (0,1), \forall n \geq 0.$$

O altă direcţie consistentă de generalizare a principiului contracţiilor al lui Banach a fost prezentată în 2003 de Kirk, Srinivasan şi Veeramani, utilizând conceptul de operator ciclic.

Definition 1.3.11. (Kirk, Srinivasan, Veeramani [29]) Fie A şi B două mulţimi nevide. Un operator $f : A \cup B \to A \cup B$ se numeşte ciclic dacă $f(A) \subseteq B$ şi $f(B) \subseteq A$.

Ei au demonstrat următoarele rezultate.

Theorem 1.3.12. [29] *Fie A şi B două mulţimi nevide ale spaţiului metric complet (X, d) şi presupunem că $f : X \to X$ satisface următoarele condiţii:*

(1) $f(A) \subseteq B$ şi $f(B) \subseteq A$;

(2) $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y),\ \forall x \in A,\ \forall y \in B$, unde $k \in (0, 1)$.

Atunci f are un unic punct fix.

Theorem 1.3.13. [29] *Fie $\{A_i\}_{i=1}^m$ submulţimi nevide ale unui spaţiu metric complet şi presupunem că $f : \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i \to \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ satisface următoarele condiţii (unde $A_{m+1} = A_1$):*

(1) $f(A_i) \subseteq A_{i+1}$ pentru $1 \leq i \leq m$;

(2) $d(f(x), f(y)) \leq \psi(d(x, y)),\ \forall x \in A_i,\ \forall y \in A_{i+1}$, pentru $1 \leq i \leq m$, unde $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este semicontinuă la dreapta şi satisface $0 \leq \psi(t) < t$ pentru $t > 0$.

Atunci f are un unic punct fix.

Aceste rezultate sugerează introducerea noţiunii următoare.

Definition 1.3.14. Fie X o mulţime nevidă, m un întreg pozitiv şi $T : X \to P(X)$ un operator multivoc. Prin definiţie, $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ este o reprezentare ciclică a lui X în raport cu T dacă:

(i) $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$, cu $A_i \in P(X)$, pentru $1 \leq i \leq m$;

(ii) $T(A_i) \subseteq A_{i+1}$, for $1 \leq i \leq m$, where $A_{m+1} = A_1$.

Pentru cazul particular al unui operator univoc vezi Rus [68].

1.4 Teoreme de bază pentru studiul punctelor de cea mai bună proximitate

Problema celei mai bune proximităţi pentru un operator ciclic multivoc este definită astfel:

Fie (X, d) un spaţiu metric, $A, B \in P(X)$ şi $T : A \cup B \to P(X)$ un operator multivoc.

Dacă T satisface condiţia $T(A) \subseteq B, T(B) \subseteq A$, atunci suntem interesaţi să găsim

$$x^* \in A \cup B \text{ astfel încât } D(x^*, T(x^*)) = D(A, B). \tag{1.4.1}$$

x^* se numeşte punct de cea mai bună proximitate a lui T.

In particular, dacă operatorul este univoc atunci avem următoarea problemă pentru cea mai bună proximitate pentru un operator ciclic univalent::

Dacă (X, d) este un spaţiu metric, $A, B \in P(X)$, $f : A \cup B \to X$ este un operator univalent care satisface condiţia ciclică $f(A) \subseteq B, f(B) \subseteq A$, atunci suntem interesaţi să aflăm

$$x^* \in A \cup B \text{ astfel încât } d(x^*, f(x^*)) = D(A, B). \tag{1.4.2}$$

x^* se numeşte punct de cea mai bună proximitate a lui f.

Eldred and Veeramani au demonstrat în 2006 următoarea teoremă care asigură existenţa punctului de cea mai bună proximitate a unei contracţii ciclice în contextul spaţiilor Banach uniform convexe.

Theorem 1.4.1. (Eldred, Veeramani [16])

Fie A şi B două submulţimi nevide, închise şi convexe ale unui spaţiu Banach uniform convex. Presupunem că $f : A \cup B \to A \cup B$ este o contracţie ciclică, adică f satisface următoarele condiţii:

(1) $f(A) \subseteq B$ şi $f(B) \subseteq A$;

(2) $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| + (1-k)D(A,B),\ \forall x \in A,\ \forall y \in B$,

unde $k \in (0,1)$.

Atunci există un unic punct de cea mai bună proximitate în A. In plus, dacă $x_0 \in A$ şi $x_{n+1} = f(x_n)$, atunci $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge la punctul de cea mai bună proximitate.

In 2009, Suzuki, Kikkawa şi C. Vetro au introdus proprietatea UC şi au extins Teorema 1.4.1 la spaţii metrice cu proprietatea UC.

Definition 1.4.2. (Suzuki, Kikkawa, C. Vetro [77]) Fie A şi B submulţimi nevide ale unui spaţiu metric (X,d). Atunci se spune că (A,B) satisface proprietatea UC dacă pentru şirurile $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ din A şi şirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ din B astfel încât $d(x_n,y_n) \to D(A,B)$ şi $d(z_n,y_n) \to D(A,B)$ cînd $n \to \infty$, rezultă $d(x_n,z_n) \to 0$ când $n \to \infty$.

Următoarele propziţii sunt exemple de perechi de mulţimi care satisfac proprietatea UC.

Proposition 1.4.3. *Orice pereche de submulţimi nevide (A,B) ale unui spaţiu metric (X,d) cu $D(A,B) = 0$ are proprietatea UC.*

Proposition 1.4.4. (Eldred, Veeramani [16]) *Orice pereche de submulţimi nevide (A,B) ale unui spaţiu Banach uniform convex cu A convexă are proprietatea UC.*

Theorem 1.4.5. [77] *Fie (X,d) un spaţiu metric şi fie A şi B submulţimi nevide ale lui X astfel încât (A,B) satisface proprietatea UC. presupunem că A este completă. Fie $f : A \cup B \to X$ o funcţie ciclică, astfel ca $f(A) \subseteq B$ şi $f(B) \subseteq A$.*

Presupunem că există $k \in (0,1)$ astfel încât $x \in A$ şi $y \in B$,

$$d(f(x), f(y)) \leq k \max\{d(x,y), d(x,f(x)), d(y,f(y))\} + (1-k)D(A,B).$$

Atunci au loc următoarele:

(i) f are un unic punct de cea mai bună proximitate $z \in A$.

(ii) z este un unic punct fix a lui f^2 în A.

(iii) $\left(f^{2n}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la z pentru orice $x \in A$.

(iv) f are cel puţin un punct de cea mai bună proximitate în B.

(v) Dacă (B,A) satisface proprietatea UC, atunci $f(z)$ este un unic punct de cea mai bună proximitate în B şi $\left(f^{2n}(y)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la $f(z)$ pentru orice $y \in B$.

Theorem 1.4.6. (Neammanee, Kaewkhao [42]) *Fie A şi B submulţimi nevide ale unui spaţiu metric (X,d) astfel încât (A,B) satisface proprietatea UC şi A este completă. Fie $T : A \cup B \to P(X)$ cu valori mărginite şi închise, o contracţie multivocă, astfel încât:*

(i) $T(A) \subseteq B$ şi $T(B) \subseteq A$;

(ii) atunci există $k \in (0,1)$ astfel încât pentru orice $x \in A$, $y \in B$,

$$H(T(x), T(y)) \leq kd(x,y) + (1-k)D(A,B).$$

Atunci T are un punct de cea mai bună proximitate în A.

1.5 Teoreme de bază de punct fix cuplat

Un concept foarte util în multe aplicaţii, în special în teoria ecuaţiilor/ incluziunilor integrale şi diferenţiale este teoria punctului fix cuplat. Opoitsev în [43] a considerat, pentru prima dată, problema punctului fix cuplat, dar problematica a avut o dezvoltare rapidă prin munca prodigioasă a lui D. Guo şi V. Lakshmikantham [20] şi T.G. Bhaskar, V. Lakshmikantham [5]. O nouă direcţie de cercetare pentru teoria punctului fix cuplat a fost dezvoltată de mulţi autori (vezi [4], [21], [31], [57], [58], [60], [73]) utilizând condiţii de tip contractiv.

Prezentăm noţiunea de punct fix cuplat pentru operatori univoci şi respectiv multivoci.

Definition 1.5.1. Fie X o mulţime nevidă. O pereche $(x, y) \in X \times X$ se numeţe punct fix cuplat a unui operator univoc $F : X \times X \to X$ dacă

$$\begin{cases} F(x, y) = x \\ F(y, x) = y. \end{cases} \tag{1.5.1}$$

Dacă $F(x, x) = x$ atunci x se numeşte punct fix cuplat tare a lui F (numit de asemenea, în anumite lucrări, punct fix a lui F).

Definition 1.5.2. Fie X o mulţime nevidă. O pereche $(x, y) \in X \times X$ se numeţe punct fix cuplat a unui operator multivoc $F : X \times X \to P(X)$ dacă

$$\begin{cases} x \in F(x, y) \\ y \in F(y, x). \end{cases} \tag{1.5.2}$$

dacă $x \in F(x, x)$ atunci x se numeşte punct fix cuplat tare a lui F.

Pentru a enunţa rezultatul principal din [5], avem nevoie de următoarea noţiune.

Definition 1.5.3. Fie $(X, \leq)$ o mulţime parţial ordonată. Spunem că $F : X \times X \to X$ are proprietatea de monotonie mixtă dacă $F(x, y)$ este monoton crescătoare în x şi este monoton descrescătoare în y, adică, pentru orice $x, y \in X$,

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y),$$

respectiv,

$$y_1, y_2 \in X, y_1 \leq y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \geq F(x, y_2).$$

Theorem 1.5.4. (Bhaskar, Lakshmikantham [5])

Fie $(X, \leq)$ o mulţime parţial ordonată şi presupunem că există o metrică d pe X astfel încât (X, d) este un spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \to X$ un operator care are proprietatea de monotonie mixtă pe X.

Presupunem că există o constantă $k \in [0, 1)$ cu

$$d(F(x, y), F(u, v)) \leq \frac{k}{2} \cdot [d(x, u)) + d(y, v)], \forall x \geq u, \forall y \leq v. \tag{1.5.3}$$

Dacă există $x_0, y_0 \in X$ astfel încât

$$x_0 \leq F(x_0, y_0) \text{ and } y_0 \geq F(y_0, x_0), \tag{1.5.4}$$

atunci există $x, y \in X$ astfel încât

$$x = F(x, y) \text{ and } y = F(y, x).$$

De asemenea, Bhaskar şi Lakshmikantham au stabilit în [5] rezultate de unicitate a punctului fix cuplat punând condiţii suplimentare pe spaţiul metric, precum şi rezultate de existenţa a punctului fix cuplat tare.

Remark 1.5.5. Dacă (X, d) este un spaţiu metric complet fără o relaţie de ordine parţială şi presupunem că (1.5.3) are loc pentru orice perechi $(x, y), (u, v) \in X \times X$, atunci pot fi obţinute existenţa şi unicitatea punctului fix cuplat tare fără condiţiile de continuitate şi monotonie şi fără ipoteza (1.5.4).

Un rezultat mai general a fost dat de A. Petruşel et al. in [59] pentru contracţii multivoce simetrice:

Theorem 1.5.6. (A. Petruşel, G. Petruşel, Samet, Yao [59]) *Fie $(X, \preceq, d)$ un spaţiu b-metric ordonat cu constanta $s \geq 1$ astfel încât b-metric d este complet. Fie $G : X \times X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc având proprietatea de strictă monotonie în raport cu "$\preceq$". Presupunem că:*
(i) există $k \in (0, \frac{1}{s})$ astfel încât

$$H_d(G(x, y), G(u, v)) + H_d(G(y, x), G(v, u)) \leq k[d(x, u) + d(y, v)], \forall x \preceq u, y \succeq v;$$

(ii) există $(x_0, y_0) \in X \times X$ şi $(x_1, y_1) \in G(x_0, y_0) \times G(y_0, x_0)$ astfel încât $x_0 \preceq x_1$ şi $y_0 \succeq y_1$.
Atunci, există $x^*, y^* \in X$ şi există două şiruri $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, with $x_{n+1} \in G(x_n, y_n)$ and $y_{n+1} \in G(y_n, x_n)$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to y^*$ când $n \to \infty$ şi

$$\begin{cases} x^* \in G(x^*, y^*) \\ y^* \in G(y^*, x^*). \end{cases}$$

Dacă, în plus, b-metrica d este continuă, atunci, pentru cele două şiruri menţionate anterior $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, are loc următoarea estimare:

$$d(x_n, x^*) + d(y_n, y^*) \leq \frac{sk^n}{1 - sk}[d(x_0, x_1) + d(y_0, y_1)], \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Prezentăm în continuare conceptul de operator univoc ciclic cuplat.

Definition 1.5.7. (Choudhury, Maity [11]) Fie A şi B două submulţimi nevide ale lui X. Un operator $F : X \times X \to X$ având proprietatea că pentru orice $x \in A$ and $y \in B$, $F(x, y) \in B$ and $F(y, x) \in A$, se numeşte operator ciclic în raport cu A and B.

Definition 1.5.8. [11] Fie A şi B două submulţimi nevide ale unui spaţiu metric (X, d). Un operator $F : X \times X \to X$ se numeşte contracţie ciclică cuplată de tip Kannan dacă F este ciclic în raport cu A şi B, care satisface pentru un $k \in (0, \frac{1}{2})$ inegalitatea:

$$d(F(x, y), F(u, v)) \leq k \cdot [d(x, F(x, y)) + d(u, F(u, v))],$$

unde $x, v \in A$, $y, u \in B$.

Theorem 1.5.9. [11] *Fie A şi B două submulţimi închise nevide ale unui spaţiu metric complet (X, d). Fie $F : X \times X \to X$ o contractţie ciclică cuplată de tip Kannan în raport cu A şi B şi $A \cap B \neq \emptyset$. Atunci F are un punct fix cuplat tare în $A \cap B$.*

Definition 1.5.10. (Choudhury, Maity, Konar [12]) Fiet A şi B două submulţimi nevide ale unui spaţiu metrice (X, d). Un operator $F : X \times X \to X$ se numeşte cuplat de tip Banach dacă F este ciclic în raport cu A şi B şi satiface următoarea inegalitate:

$$d(F(x, y), F(u, v)) \leq \frac{k}{2} \cdot [d(x, u) + d(y, v)],$$

unde $x, v \in A$, $y, u \in B$, şi $k \in (0, 1)$.

Theorem 1.5.11. [12] *Fie A şi B două submulţimi nevide închise ale unui spaţiu metric complet (X, d). Fie $F : X \times X \to X$ un operator de tip Banach cuplat în raport cu A şi B.Atunci $A \cap B \neq \emptyset$ şi F are un unic punct fix cuplat tare în $A \cap B$.*

Definition 1.5.12. [12] Fie A şi B două submulţimi nevide ale unui spaţiu metric (X, d). Un operator $F : X \times X \to X$ se numeşte cuplat de tip Chatterjea dacă F este ciclic în raport cu A and B, şi satiface următoarea inegalitate:

$$d(F(x, y), F(u, v)) \leq k \cdot [d(x, F(u, v)) + d(u, F(x, y))],$$

unde $x, v \in A$, $y, u \in B$, and $k \in (0, \frac{1}{2})$.

Theorem 1.5.13. [12] *Fie A şi B două submulţimi nevide închise ale unui spaţiu metric complet (X, d). Fie $F : X \times X \to X$ cuplat de tip Chatterjea în raport cu A şi B.Atunci $A \cap B \neq \emptyset$ şi F are un unic punct fix cuplat tare în $A \cap B$.*

Definition 1.5.14. (Udo-utun [78]) Fie A şi B două submulţimi nevide ale unui spaţiu metric (X, d). Un operator $F : X \times X \to X$ se numeşte ciclic Ćirić în raport cu A and B dacă F este ciclic în raport cu A and B şi pentru o constantă $q \in (0, 1)$, F satisface următoarea condiţie:

$$d(F(x, y), F(u, v)) \leq q \cdot M(x, v, y, u),$$

unde $x, v \in A$, $y, u \in B$, şi

$$\begin{aligned} M(x, v, y, u) = \max \Big\{ & d(x, u), \frac{1}{2} d(u, F(x, y)), \frac{1}{2} d(x, F(u, v)), \\ & \frac{1}{2} [d(x, F(x, y)) + d(u, F(u, v))] \Big\} \end{aligned}$$

Theorem 1.5.15. [78] *Fie A şi B două submulţimi ñevide inchise ale unui spaţiu metric complet (X, d), $F : X \times X \to X$ un operator ciclic de tip Ćirić în raport cu A and B, unde $A \cap B \neq \emptyset$. Atunci F are un punct fix cuplat tare în $A \cap B$.*

Chapter 2

Contracţii generalizate univoce definite pe reprezentări ciclice

În acest capitol sunt prezentate rezultate de punct fix pentru operatori univoci definiţi pe reprezentări ciclice în spaţii metrice şi în spaţii metrice vectoriale.

Acest capitol este structurat pe trei secţiuni.

În prima secţiune cercetăm proprietăţile unor contracţii generalizate de tip Ćirić definite pe reprezentări ciclice într-un spaţiu metric. Condiţia de contracţie generalizată dată de Ćirić este una din cele mai generale condiţii metrice pentru care punctul fix este unic şi poate fi aproximat prin şirul Picard al iteratelor. Rezultatele prezentate generalizează teoreme metrice fundamentale din teoria punctului fix date pentru operatori de tip Banach, Kannan, Bianchini, Reich, Chatterjea, Zamfirescu, Ćirić (vezi [52], [66]), în cazul unei condiţii ciclice (vezi [47]). De asemenea, rezultatul principal din această secţiune (Teorema 2.1.5) generalizează următoarele rezultate: Teorema 2.1.1 dată de Petric şi Zlatanov în [50] şi Teorema 2.1.3 dată de Păcurar şi Rus în [44].

Pe parcursul acestei secţiuni este prezentat un studiu extins a ecuaţiei de punct fix $x = f(x)$, unde f este un operator univoc, ciclic, φ-contracţie de tip Ćirić. Mai exact, sunt studiate existenţa şi unicitatea punctului fix, convergenţa şirului Picard al iteraţiilor la punctul fix, dependenţa continuă de date a punctului fix şi bine-punerea problemei de punct fix.

De asemenea, este enunţată o teoremă de tip Maia pentru contracţii generalizate de tip Ćirić definite pe reprezentări ciclice.

Contribuţiile originale din prima secţiune sunt următoarele rezultate:

• Teorema 2.1.5 extinde rezultate de punct fix pentru operatori contractivi definiţi pe reprezentări ciclice ale spaţiului metric;

• Teorema 2.1.7 este un rezultat cu privire la bine-punerea problemei de punct fix;

• Teorema 2.1.8 studiază dependenţa de date a ecuaţiei de punct fix;

• Teorema 2.1.9 este un rezultat de convergenţă a şirului de puncte fixe ale unui şir de operatori niform convergent la contracţia generalizată de tip Ćirić;

• Teorema 2.1.10 este o teoremă de punct fix de tip Maia pentru φ-contracţii ciclice de tip Ćirić.

Rezultatele prezentate în această sunt incluse în lucrarea: Magdaş [33].

În a doua secţiune prezentăm o teoremă de tip Perov pentru operatori ciclici. Abordarea noastră se bazează pe teorema de punct fix a lui Perov (vezi Teorema 2.2.3), în spaţii metrice vectoriale.

Contribuţiile originale din a doua secţiune sunt următoarele rezultate:

• Teorema 2.2.5 este rezultatul principal, o extensie a Teoremei 1.3.1 şi a Teoremei 1.3.12 în spaţii metrice vectoriale;

• Teorema 2.2.6 este un rezultat cu privire la dependeną de date a ecuaţiei de punct fix;

• Teorema 2.2.7 studiază bine-punerea problemei de punct fix;

• Teorema 2.2.8 studiază existenţa şi unicitatea soluţiei unui sistem de ecuaţii integrale de tip Fredholm; soluţia sistemului poate fi obţinutăprin metoda aproximaţiilor succesive;

• Teorema 2.2.9 este un rezultat cu privire la dependenţa de date a soluţiei sistemului de ecuaţii integrale de tip Fredholm;

• Teorema 2.2.11 studiate existenţa şi unicitatea soluţiei unui sistem de ecuaţii integrale de tip Volterra.

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în lucrarea: Magdaş [36].

In the **third section** we study the coupled fixed point problem for single-valued contraction type operators defined on cyclic representations of the space.

În a treia secţiune studiem problema punctului fix cuplat pentru operatori univoci ciclici contractivi definiţi pe reprezentări ciclice ale spaţiului.

Contribuţiile originale din a treia secţiune sunt următoarele rezultate:

• Teorema 2.3.2 este rezultatul principal care generalizează teoremele 1.5.9, 1.5.11, 1.5.13, 1.5.15; acest rezultat oferă metode iterative pentru aproximarea punctului fix cuplat tare şi estimări care sunt utile în studiul proprietăţilor calitative ale problemei de punct fix cuplat.

• Teorema 2.3.4 studiază proprietatea de bine-punere a problemei de punct fix cuplat;

• Teorema 2.3.5 studiază dependenţa de date a problemei de punct fix cuplat;

• Teorema 2.3.6 este un rezultat de convergenţă a unui şir de punct cuplate tari ale unui şir de operatori uniform convergent la o φ-contracţie ciclică cuplată de tip Ćirić;

• Teorema 2.3.8 studiază stabilitatea Ulam-Hyers generalizată pentru problema de punct fix cuplat;

• Teorema 2.3.9 studiază existenţa şi unicitatea soluţiei unui sistem de ecuaţii integrale de tip Fredholm;

• Teorema 2.3.11 studiază stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a sistemului de mai sus;

• Teorema 2.3.12 studiază existenţa şi unicitatea soluţiei unui sistem de ecuaţii integrale de tip Volterra.

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în lucrarea: Magdaş [35].

2.1 Un studiu al problemei de punct fix pentru operatori univoci de tip Ćirić care satisfac o condiţie ciclică

Scopul acestei secţiuni este de a cerceta proprietăţile unor contracţii generalizate de tip Ćirić definite pe reprezentări ciclice într-un spaţiu metric.

În urma rezultatelor obţinute de Kirk, Srinivasan şi Veeramani (vezi [29]), mulţi autori au studiat existenţa, unicitatea şi propietăţi calitative ale punctelor fixe ale unui operator ciclic.

Teorema lui Zamfirescu (vezi [81]) este o generalizare a teoremelor de punct fix date de Banach, Kannan şi Chatterjea. Petric şi Zlatanov au enunţat următorul rezultat pentru operatori ciclici, generalizând teorema de punct fix a lui Zamfirescu.

Theorem 2.1.1. (Petric, Zlatanov [50]) *Fie (X,d) un spaţiu metric, m un număr natural nenul, $A_1,\ldots,A_m \in P_{cl}(X)$ şi fie $f:\bigcup_{i=1}^{m} A_i \to \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ un operator ciclic, adică $f(A_i)\subseteq A_{i+1}$, pentru $1\le i\le m$, unde $A_{m+1}=A_1$. Presupunem că există numerele reale $a\in[0,1), b,c\in[0,\frac{1}{2})$ astfel încât pentru orice $x\in A_i$, $y\in A_{i+1}$ cel puţin una din următoarele afirmaţii este adevărată:*

(z1) $d(f(x),f(y))\le ad(x,y)$;

(z2) $d(f(x),f(y))\le b[d(x,f(x))+d(y,f(y))]$;

(z3) $d(f(x),f(y))\le c[d(x,f(y))+d(y,f(x))]$.

Atunci:

(1) *f are un unic punct fix $x^*\in\bigcap_{i=1}^{m} A_i$, iar şirul iteratelor Picard $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de* (1.3.1) *converge către x^* pornind de la orice punct $x_0\in\bigcup_{i=1}^{m} A_i$.*

(2) *au loc următoarele estimări:*

$$d(x_n,x^*)\le\frac{\lambda^n}{1-\lambda}d(x_0,x_1),\ \ n\ge 0;$$

$$d(x_{n+1},x^*)\le\frac{\lambda}{1-\lambda}d(x_n,x_{n+1}),\ \ n\ge 0;$$

(3) *rata de convergenţă a şirului iteratelor Picard este dată de:*

$$d(x_n,x^*)\le\lambda d(x_{n-1},x^*),\ \ n\ge 1$$

unde $\lambda=\max\left\{a,\frac{b}{1-b},\frac{c}{1-c}\right\}$.

Păcurar şi Rus au enunţat în [44] o teoremă de punct fix pentru φ-contracţii ciclice.

Definition 2.1.2. (Păcurar, Rus [44]) Fie (X,d) un spaţiu metric, m un număr natural nenul, $A_1,\ldots,A_m\in P_{cl}(X)$, $Y\in P(X)$ şi $f:Y\to Y$ un operator. Dacă

(i) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ este o reprezentare ciclică a lui Y în raport cu f;

(ii) există o funcţie de comparaţie $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ astfel încât

$$d(f(x),f(y))\le\varphi(d(x,y)),$$

pentru orice $x\in A_i$, $y\in A_{i+1}$, $1\le i\le m$, unde $A_{m+1}=A_1$, atunci f este o φ-contracţie ciclică.

Theorem 2.1.3. [44] *Fie (X,d) un spaţiu metric complet, m un număr natural nenul, $A_1,\ldots,A_m\in P_{cl}(X)$, $Y\in P(X)$, fie $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ o funcţie de comparaţie-(c), şi $f:Y\to Y$ un operator. Presupunem că:*

(i) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ este o reprezentare ciclică a lui Y în raport cu f;

(ii) f este o φ-contracţie ciclică.

Atunci:

(1) *f are un unic punct fix $x^*\in\bigcap_{i=1}^{m} A_i$, iar şirul iteratelor Picard $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de* (1.3.1) *converge către x^* pornind de la orice punct $x_0\in Y$;*

(2) *au loc următoarele estimări:*

$$d(x_n,x^*)\le s(\varphi^n(d(x_0,x_1))),\ \ n\ge 1;$$

$$d(x_n, x^*) \le s(d(x_n, x_{n+1})),\ n \ge 1;$$

(3) *pentru orice* $x \in Y$*:*

$$d(x, x^*) \le s(d(x, f(x))),$$

unde s *este dat de* (1.2.1) *în Lemma 1.2.3.*

În continuare vom introduce noţiunea de φ-contracţie ciclică de tip Ćirić.

Definition 2.1.4. (Magdaş [33]) Fie (X, d) un spaţiu metric, $Y \in P(X)$, $f : Y \to Y$ un operator, $m \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_m \in P_{cl}(X)$. Dacă

(i) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ este o reprezentare ciclică a lui Y în raport cu f;

(ii) există o funcţie de comparaţie tare $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încat

$$d(f(x), f(y)) \le \varphi(M(x, y)),$$

pentru orice $x \in A_i$, $y \in A_{i+1}$, $1 \le i \le m$, unde $A_{m+1} = A_1$ şi $M(x, y)$ este dat de (1.3.2), atunci f se numeşte φ-contracţie ciclică de tip Ćirić.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este teorema următoare care generalizează rezultate similare pentru operatori de tip Ćirić (vezi Petruşel [52], Rhoades [66]), în cazul unei condiţii ciclice (vezi Petric [47]). De asemenea, teoorema următoare generalizează Teorema 2.1.1 şi Teorema 2.1.3.

În cele ce urmează vom prezenta un studiu extins al acestei teoreme, studiu ce conţine dependenţa de date, bine-punerea problemei de punct fix, proprietatea de umbrire la limită şi şiruri de operatori şi puncte fixe.

Theorem 2.1.5. (Magdaş [33])

Fie (X, d) *un spaţiu metric complet,* $m \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_m \in P_{cl}(X)$, $Y \in P(X)$, $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie de comparaţie tare şi* $f : Y \to Y$ *un operator astfel încât* $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ *este o reprezentare ciclică a lui* Y *în raport cu* f*. Dacă* f *este o* φ*-contracţie ciclică de tip Ćirić atunci:*

(1) f *are un punct fix unic* $x^* \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i$*, iar şirul iteratelor Picard* $(x_n)_{n \ge 0}$ *dat de* (1.3.1) *converge către* x^* *pornind de la orice punct* $x_0 \in Y$*;*

(2) *au loc următoarele estimări:*

$$d(x_n, x^*) \le s(\varphi^n(d(x_0, x_1))),\ n \ge 0;$$

$$d(x_n, x^*) \le s(d(x_n, x_{n+1})),\ n \ge 0;$$

(3) *pentru orice* $x \in Y$,

$$d(x, x^*) \le s(d(x, f(x))),$$

unde s *este dat de* (1.2.1) *în Lema 1.2.3;*

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$*, i.e.,* f *este un operator Picard bun;*

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d(x_n, x^*) < \infty$*, i.e.,* f *este un operator Picard special.*

Remark 2.1.6. Pentru un rezultat asemănător obţinut printr-o metodă diferită, referitor la existenţa şi unicitatea punctului fix, menţionăm lucrarea [27]. Rezultatele noastre extind rezultatul mai sus menţionat la un studiu extensiv al problemei de punct fix.

Următorul rezultat reprezintă proprietatea de bine-punere a problemei de punct fix. Pentru conceptul de bine-punere a problemelor de punct fix vezi Reich, Zaslavski [65].

Theorem 2.1.7. (Magdaş [33]) *Fie $f : Y \to Y$ un operator ca în Teorema 2.1.5. Atunci problema de punct fix pentru f este bine-pusă, adică, presupunând că există $z_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$d(z_n, f(z_n)) \to 0 \text{ când } n \to \infty,$$

aceasta implică

$$z_n \to x^* \text{ când } n \to \infty,$$

unde $F_f = \{x^*\}$.

Theorem 2.1.8. (Magdaş [33]) *Fie $f : Y \to Y$ un operator ca în Teorema 2.1.5 şi $g : Y \to Y$ astfel încât:*

(i) g are cel puţin un punct fix $x_g^* \in F_g$;

(ii) există $\eta > 0$ astfel încât

$$d(f(x), g(x)) \le \eta, \text{ pentru orice } x \in Y.$$

Atunci $d(x_f^*, x_g^*) \le s(\eta)$, unde $F_f = \{x_f^*\}$ şi s este definit în Lema 1.2.3.

Theorem 2.1.9. (Magdaş [33]) *Fie $f : Y \to Y$ un operator ca în Teorema 2.1.5 şi $f_n : Y \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât:*

(i) pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $x_n^* \in F_{f_n}$;

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către f.

Atunci $x_n^* \to x^*$ când $n \to \infty$, unde $F_f = \{x^*\}$.

Următorul rezultat este o teoremă de tip Maia pentru contracţii generalizate de tip Ćirić definite pe reprezentări ciclice.

Theorem 2.1.10. (Magdaş [33]) *Fie X o mulţime nevidă, d şi ρ două metrici pe X, m un număr natural nenul, $A_1, \ldots, A_m \in P_{cl}(X)$, $Y \in P(X)$ şi $f : Y \to Y$ un operator.*

Presupunem că:

(i) există $c > 0$ astfel încât $d(x, y) \le c \cdot \rho(x, y)$, pentru orice $x, y \in Y$;

(ii) (Y, d) este un spaţiu metric complet;

(iii) $f : (Y, d) \to (Y, d)$ este continuu;

(iv) $f : (Y, \rho) \to (Y, \rho)$ este o φ-contracţie ciclică de tip Ćirić.

Atunci f are un unic punct fix $x^* \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i$, iar şirul iteratelor Picard $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de (1.3.1) *converge către x^* pornind de la orice punct $x_0 \in Y$.*

Remark 2.1.11. Este o problemă deschisă săgăsim condiţii în care operatorul $f : Y \to Y$ definit ca în Teorema 2.1.5 are proprietatea de stabilitate a lui Ostrowski: dacă $F_f = \{x^*\}$ şi pentru orice şir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, cu proprietatea $d(z_{n+1}, f(z_n)) \to 0$ când $n \to \infty$, avem

$$z_n \to x^* \text{ as } n \to \infty.$$

2.2 Teoreme de tip Perov pentru contracţii ciclice

Scopul acestei secţiuni este demonstrarea unei teoreme de punct fix de tip Perov pentru contracţii ciclice definite pe spaţii metrice generalizate complete. Ca aplicaţii, vom studia existenţa, unicitatea şi aproximarea soluţiei unui sistem de ecuaţii integrale de tip Fredholm, precum şi fenomenul dependenţei continue a sistemului dat. De asemenea, vom studia existenţa şi unicitatea soluţiei unui sistem de ecuaţii integrale de tip Volterra.

Matricele convergente la zero au fost utilizate de Perov şi Kibenko [45] pentru a generaliza principiul contracţiilor la cazul spaţiilor metrice vectoriale.

Theorem 2.2.1. (Varga [79], Rus, A. Petruşel, G. Petruşel [70])
Fie $S \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}_+)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) S este o matrice convergentă la zero, adică $S^k \to 0$ as $k \to +\infty$;
(ii) $S^k x \to 0$ când $k \to +\infty$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^p$;
(iii) $I_p - S$ este nesingulară şi

$$(I_p - S)^{-1} = I_p + S + S^2 + \dots \tag{2.2.1}$$

(iv) $I_p - S$ este nesingulară şi $(I_p - S)^{-1}$ are elemente pozitive;
(v) $\lambda \in \mathbb{C}$, $\det(S - \lambda I_p) = 0$ implică $|\lambda| < 1$.

Definition 2.2.2. (Rus, A. Petruşel, G. Petruşel [70]) Fie (X, d) un spaţiu metric cu $d : X \times X \to \mathbb{R}^p_+$ o metrică generalizată în sens Perov şi $f : X \to X$. Operatorul f se numeşte S-contracţie dacă există o matrice $S \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}_+)$ astfel încât:
(i) S este o matrice convergentă la zero;
(ii) $d(f(x), f(y)) \leq S d(x, y)$, $\forall\, x, y \in X$.

Theorem 2.2.3. (Perov, Kibenko [45]) *Fie (X, d) un spaţiu metric complet cu $d : X \times X \to \mathbb{R}^p_+$ o metrică generalizată în sens Perov şi $f : X \to X$ o S-contracţie. Atunci:*
(i) f are un unic punct fix $x^* \in X$;
(ii) $f^k(x) \xrightarrow{d} x^*$ când $k \to +\infty$, pentru orice $x \in X$;
(iii) $d(f^k(x), x^*) \leq S^k (I_p - S)^{-1} d(x, f(x))$, pentru orice $x \in X$ şi $k \in \mathbb{N}$;
(iv) $d(x, x^*) \leq (I_p - S)^{-1} d(x, f(x))$ pentru orice $x \in X$.

We recall the following notion, introduced in [36], suggested by the considerations in [29].

Definition 2.2.4. (Magdaş [36]) Fie (X, d) un spaţiu metric cu $d : X \times X \to \mathbb{R}^p_+$ o metrică generalizată în sens Perov, $A_1, \dots, A_m \in P_{cl}(X)$ şi $f : X \to X$ un operator. Dacă:
(i) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ este o reprezentare ciclică a lui X în raport cu f;
(ii) există o matrice $S \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}_+)$ convergentă la zero astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq S \cdot d(x, y), \text{ pentru orice } x \in A_i,\ y \in A_{i+1}, \text{ unde } A_{m+1} = A_1,$$

atunci, prin definiţie, spunem că f este o S-contracţie ciclică.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următoarea teoremă care generalizează Teorema de punct fix a lui Perov 2.2.3, în spaţii metrice vectoriale.

Theorem 2.2.5. (Magdaş [36]) *Fie (X, d) un spaţiu metric cu $d : X \times X \to \mathbb{R}^p_+$ o metrică generalizată în sens Perov, $A_1, A_2, \ldots, A_m \in P_{cl}(X)$. Dacă $f : X \to X$ este S-contracţie ciclică atunci au loc următoarele afirmaţii:*

(1) f are un punct fix unic $x^* \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i$, iar şirul iteratelor Picard $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de

$$x_n = f(x_{n-1}),\ n \geq 1,$$

converge către x^* pornind de la orice punct $x_0 \in X$;

(2) au loc următoarele estimări:

$$d(x_n, x^*) \leq S^n(I_p - S)^{-1} d(x_0, x_1),\ n \geq 1; \tag{2.2.2}$$

$$d(x_n, x^*) \leq (I_p - S)^{-1} d(x_n, x_{n+1}),\ n \geq 1; \tag{2.2.3}$$

(3) pentru orice $x \in X$,

$$d(x, x^*) \leq (I_p - S)^{-1} d(x, f(x)). \tag{2.2.4}$$

Concluziile Teoremei 2.2.5 sunt utile în studiul dependenţei de date şi al bine-punerii problemei de punct fix pentru o S-contracţie ciclică.

Theorem 2.2.6. (Magdaş [36]) *Fie $f : X \to X$ un operator ca în Teorema 2.2.5 cu $F_f = \{x^*_f\}$. Fie $g : X \to X$ un operator astfel încât:*

(i) g are cel puţin un punct fix x^*_g;

(ii) există $\eta > 0$ astfel încât

$$d(f(x), g(x)) \leq \eta,\ \textit{pentru orice } x \in X.$$

Atunci $d(x^*_f, x^*_g) \leq \eta(I_p - S)^{-1}$.

Theorem 2.2.7. (Magdaş [36]) *Fie $f : X \to X$ un operator ca în Teorema 2.2.5. Atunci problema de punct fix pentru f este bine-pusă, adică, presupunând că există $z_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(z_n, f(z_n)) \to 0$, când $n \to \infty$, aceasta implică $z_n \to x^*$, când $n \to \infty$, unde $F_f = \{x^*\}$.*

În continuare vom aplica rezultatele din Teorema 2.2.5 la studiul existenţei şi al unicităţii soluţiilor următorului sistem de ecuaţii integrale de tip Fredholm:

$$\begin{cases} x_1(t) = \displaystyle\int_a^b G_1(t,s) f_1(s, x_1(s), x_2(s))ds \\ x_2(t) = \displaystyle\int_a^b G_2(t,s) f_2(s, x_1(s), x_2(s))ds \end{cases},\ t \in [a,b] \tag{2.2.5}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$$G_1, G_2 \in C([a,b] \times [a,b], [0, \infty)),$$
$$f_1, f_2 \in C([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Theorem 2.2.8. (Magdaş [36]) *Presupunem că:*

(i) există $\alpha_k, \beta_k \in C[a,b]$, $m_k, M_k \in \mathbb{R}, m_k \leq \alpha_k(t) \leq \beta_k(t) \leq M_k$, pentru orice $t \in [a,b]$, astfel încât pentru $k \in \{1,2\}$,

$$\begin{cases} \alpha_k(t) \leq \displaystyle\int_a^b G_k(t,s) f_k(s, \beta_1(s), \beta_2(s))ds \\ \beta_k(t) \geq \displaystyle\int_a^b G_k(t,s) f_k(s, \alpha_1(s), \alpha_2(s))ds \end{cases},\ \textit{pentru orice } t \in [a,b]. \tag{2.2.6}$$

(ii) există $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$\begin{aligned} |f_1(s,u_1,u_2) - f_1(s,v_1,v_2)| &\le a_1|u_1 - v_1| + a_2|u_2 - v_2|, \\ |f_2(s,u_1,u_2) - f_2(s,v_1,v_2)| &\le b_1|u_1 - v_1| + b_2|u_2 - v_2|, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

pentru orice $s \in [a,b]$ and $u_k, v_k \in \mathbb{R}$, cu

$$\begin{cases} u_k \le M_k \\ v_k \ge m_k \end{cases} \textit{sau} \quad \begin{cases} u_k \ge m_k \\ v_k \le M_k \end{cases} \quad \textit{pentru } k \in \{1,2\};$$

(iii) $\sup\limits_{t\in[a,b]} \int_a^b G_k(t,s)ds \le 1$ *for* $k \in \{1,2\}$*;*

(iv) f_k este descrescătoare în fiecare din ultimele două variabile, adică,

$$u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R},\ u_1 \le v_1,\ u_2 \le v_2 \Rightarrow f_k(s,u,v) \ge f_k(s,u_2,v_2),$$

pentru orice $s \in [a,b]$ şi $k \in \{1,2\}$;

(v) matricea $S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ *converge la zero.*

Atunci sistemul (2.2.5) are o soluţie unică

$x^* = (x_1^*, x_2^*) \in C([a,b],\mathbb{R}^2)$, *cu* $\alpha_k \le x_k^* \le \beta_k$, *pentru* $k \in \{1,2\}$.

Această soluţie poate fi obţinută prin metoda aproximaţiilor succesive, pornind de la orice element $x^0 \in C([a,b],\mathbb{R}^2)$. Mai mult, dacă x^n este a n-a aproximaţie successivă, atunci are loc următoarea estimare:

$$\|x^* - x^n\| \le S^n(I_2 - S)^{-1}\|x^0 - x^1\|,$$

unde

$$\|x\| = \begin{pmatrix} |x_1|_\infty \\ |x_2|_\infty \end{pmatrix} \quad \textit{şi} \quad |x|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

În continuare vom studia fenomenul de dependenţă continuă pentru sistemul (2.2.5). Considerăm sistemul perturbat de ecuaţii integrale

$$\begin{cases} y_1(t) = \displaystyle\int_a^b H_1(t,s)g_1(s,y_1(s),y_2(s))ds \\ y_2(t) = \displaystyle\int_a^b H_2(t,s)g_2(s,y_1(s),y_2(s))ds \end{cases} \tag{2.2.8}$$

unde

$$H_1, H_2 \in C([a,b]\times[a,b],[0,\infty)), \quad g_1, g_2 \in C([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}).$$

Theorem 2.2.9. (Magdaş [36]) *Presupunem că sunt satisfăcute condiţiile din Teorema 2.2.5 şi notăm cu x^* soluţia unică a sistemului de ecuaţii integrale (2.2.5).*

Dacă $y^* \in C([a,b],\mathbb{R}^2)$ este o soluţie a sistemului perturbat de ecuaţii integrale (2.2.8) şi

$$\sup_{t\in[a,b]} \int_a^b H_k(t,s)ds \le 1,$$

atunci avem următoarea estimare:

$$\|x^* - y^*\|_{\mathbb{R}^2} \le (I_2 - S)^{-1}(\eta + \tau), \tag{2.2.9}$$

unde $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ şi

$$\begin{cases} \eta_k = \sup\{|f_k(s,u,v)| \ \mid s \in [a,b],\ u,v \in \mathbb{R}\}, \\ \tau_k = \sup\{|g_k(s,u,v)| \ \mid s \in [a,b],\ u,v \in \mathbb{R}\}, \end{cases} \quad \textit{pentru } k \in \{1,2\}.$$

Remark 2.2.10. Rezultate similare pot fi obţinute pentru un sistem de ecuaţii integrale de tip Volterra utilizând norma Bielecki. De exemplu, avem următorul rezultat.

Theorem 2.2.11. *Considerând următorul sistem de ecuaţii integrale de tip Volterra:*

$$\begin{cases} x_1(t) = \displaystyle\int_a^t G_1(t,s) f_1(s, x_1(s), x_2(s))ds \\ x_2(t) = \displaystyle\int_a^t G_2(t,s) f_2(s, x_1(s), x_2(s))ds \end{cases}, \ t \in [a,b], \tag{2.2.10}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$$G_1, G_2 \in C([a,b] \times [a,b], [0,\infty)),$$

$$f_1, f_2 \in C([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}),$$

presupunem că:

(i) există $\alpha_k, \beta_k \in C[a,b]$, $m_k, M_k \in \mathbb{R}, m_k \leq \alpha_k(t) \leq \beta_k(t) \leq M_k$, *pentru orice* $t \in [a,b]$, *astfel încât pentru* $k \in \{1,2\}$,

$$\begin{cases} \alpha_k(t) \leq \displaystyle\int_a^t G_k(t,s) f_k(s, \beta_1(s), \beta_2(s))ds \\ \beta_k(t) \geq \displaystyle\int_a^t G_k(t,s) f_k(s, \alpha_1(s), \alpha_2(s))ds \end{cases}, \ \textit{pentru orice } t \in [a,b]. \tag{2.2.11}$$

(ii) există $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât*

$$\begin{aligned} |f_1(s,u_1,u_2) - f_1(s,v_1,v_2)| &\leq a_1|u_1 - v_1| + a_2|u_2 - v_2|, \\ |f_2(s,u_1,u_2) - f_2(s,v_1,v_2)| &\leq b_1|u_1 - v_1| + b_2|u_2 - v_2|, \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

pentru orice $s \in [a,b]$ *şi* $u_k, v_k \in \mathbb{R}$, *cu*

$$\begin{cases} u_k \leq M_k \\ v_k \geq m_k \end{cases} \quad \textit{sau} \quad \begin{cases} u_k \geq m_k \\ v_k \leq M_k \end{cases} \quad \textit{pentru } k \in \{1,2\};$$

(iii) f_k *este descrescătoare în fiecare din ultimele două variabile, adică,*

$$u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}, \ u_1 \leq v_1, \ u_2 \leq v_2 \Rightarrow f_k(s,u,v) \geq f_k(s,u_2,v_2),$$

pentru orice $s \in [a,b]$, *şi* $k \in \{1,2\}$.
Atunci sistemul (2.2.10) are o unică soluţie
$x^* = (x_1^*, x_2^*) \in C([a,b], \mathbb{R}^2)$, *cu* $\alpha_k \leq x_k^* \leq \beta_k$, *pentru* $k \in \{1,2\}$.

2.3 Teoreme de punct fix cuplat pentru operatori univoci ciclici contractivi

Scopul acestei secţiuni este studiul următoarei probleme de punct fix cuplat pentru operatori univoci ciclici contractivi:

Dacă (X, d) este un spaţiu metric, $A, B \in P(X)$, $F : X \times X \to X$ este un operator univoc care satisface condiţia de ciclicitate $F(A \times B) \subseteq B, F(B \times A) \subseteq A$, atunci ne interesează să găsim $(x^*, y^*) \in X \times X$ astfel încât

$$\begin{cases} F(x^*, y^*) = x^* \\ F(y^*, x^*) = y^*. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Perechea (x^*, y^*) se numeşte punct fix cuplat al operatorului univoc $F : X \times X \to X$. Dacă $x^* = y^*$ atunci x^* se numeşte punct fix cuplat tare al lui F.

Abordarea se bazează pe rezultate de punct fix pentru operatori corespunzători generaţi de problema iniţială.

Primul obiectiv al secţiunii este de a generaliza Teorema 1.5.9, Teorema 1.5.11, Teorema 1.5.13 şi Teorema 1.5.15, slăbind condiţia contractivă. De asemenea, se poate observa că presupunerea $A \cap B \neq \emptyset$ din Teorema 1.5.9 şi Teorema 1.5.15 nu este necesară. Vom demonstra, de asemenea, unicitatea punctului fix cuplat tare şi vom da o metodă iterativă de aproximare a punctului fix cuplat. Pe de altă parte, sunt studiate anumite proprietăţi calitative ale mulţimii de puncte fixe cuplate ca: dependenţa de date, stabilitatea Ulam-Hyers generalizată şi bine-punerea problemei. Abordarea noastră se bazează pe următoarea idee inspirată din rezultatele lui A. Petruşel în [55]: vom transforma problema de punct fix cuplat într-o problemă de punct fix pentru un operator corespunzător definit pe un produs cartezian al spaţiului. Folosind această metodă, multe rezultate de punct fix cuplat se pot obţine utilizând teoreme clasice de punct fix.

Vom introduce următorul concept.

Definition 2.3.1. (Magdaş [35])

Fie (X, d) un spaţiu metric, $A, B \in P_{cl}(X)$, $Y = A \cup B$ şi $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie de comparaţie tare. Prin definiţie, un operator $F : Y \times Y \to Y$ se numeşte φ-contracţie ciclică cuplată de tip Ćirić dacă au loc următoarele afirmaţii:

(i) F este ciclic în raport cu A and B;

(ii)
$$d(F(x, y), F(u, v)) \leq \varphi(M(x, v, y, u)), \tag{2.3.2}$$

pentru orice $x, v \in A$ şi $y, u \in B$, unde

$$\begin{aligned} M(x, v, y, u) = \max\Big\{ & d(x, u), d(v, y), d(x, F(x, y)), d(u, F(u, v)), d(v, F(v, u)), \\ & d(y, F(y, x)), \frac{1}{2}[d(x, F(u, v)) + d(u, F(x, y))], \\ & \frac{1}{2}[d(y, F(v, u)) + d(v, F(y, x))]\Big\}. \end{aligned}$$

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următoarea teoremă care generalizează Teorema 1.5.9, Teorema 1.5.11, Teorema 1.5.13 şi Teorema 1.5.15.

Theorem 2.3.2. (Magdaş [35]) *Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $A, B \in P_{cl}(X)$, $Y = A \cup B$ şi $F : Y \times Y \to Y$ o φ-contracţie ciclică cuplată de tip Ćirić. Atunci:*

(1) *F are un unic punct fix cuplat tare $x^* \in A \cap B$;*

(2) *pentru orice $(x_0, y_0) \in A \times B$, există un şir $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset X \times X$ definit prin*

$$\begin{cases} x_n = F(y_{n-1}, x_{n-1}) \\ y_n = F(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases}, \text{ pentru } n \geq 1,$$

care converge spre (x^*, x^*);

(3) *următoarea estimare are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}$:*

$$\max\{d(x_n, x^*), d(y_n, x^*)\} \leq s(\varphi^n(\max\{d(x_0, F(x_0, y_0)), d(y_0, F(y_0, x_0))\})),$$

$$\max\{d(x_n, x^*), d(y_n, x^*)\} \leq s(\max\{d(x_n, x_{n+1}), d(y_n, y_{n+1})\});$$

(4) *pentru orice $x, y \in Y$, $d(x, x^*) \leq s(\max\{d(x, F(x, y)), d(y, F(y, x))\})$,*
unde s este dată de Lema 1.2.3.

Example 2.3.3. (Magdaş [35]) Fie $X = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$,

$$A = [0, 2], B = [0, 1], Y = A \cup B, F : Y \times Y \to Y, F(x, y) = \frac{x + 3y}{9}.$$

Este uşor de verificat faptul că F este ciclic în raport cu A şi B.

Pentru orice $x, v \in A$ şi $y, u \in B$,

$$\begin{aligned} d(F(x, y), F(u, v)) &= \Big|\frac{x + 3y}{9} - \frac{u + 3v}{9}\Big| \\ &= \Big|\frac{x - u}{9} + \frac{y - v}{3}\Big| \\ &\leq \Big|\frac{1}{9}(x - u) + \frac{10}{27}(y - v)\Big| \\ &= \frac{1}{3}\Big|y - \frac{v + 3u}{9} + \frac{y + 3x}{9} - v\Big| \\ &\leq \frac{1}{3}\Big(\Big|y - F(v, u)\Big| + \Big|v - F(y, x)\Big|\Big) \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}[d(y, F(v, u)) + d(v, F(y, x))]. \end{aligned}$$

Atunci F o φ-contracţie ciclică cuplată de tip Ćirić, unde $\varphi(t) = \frac{2}{3} \cdot t$.

Ipoteza din Theorem 2.3.2 este îndeplinită, deci prin Theorem 2.3.2, F are un unic punct cuplat tare $x^* \in A \cap B$. Prin calcul obţinem că:

$$F(x^*, x^*) = x^* \Leftrightarrow x^* = 0.$$

Următoarea teoremă dă proprietatea de bine-punere pentru problema de punct fix cuplat.

Theorem 2.3.4. (Magdaş [35]) *Fie $F : Y \times Y \to Y$ un operator ca în Theorem 2.3.2. Atunci problema de punct fix cuplat este bine pusă, adică, dacă există un şir $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y \times Y$ astfel încât*

$$\begin{cases} d(a_n, F(a_n, b_n)) \to 0 \\ d(b_n, F(b_n, a_n)) \to 0 \end{cases} \text{ as } n \to \infty,$$

atunci $a_n \to x^*$ şi $b_n \to x^*$, când $n \to \infty$.

Pentru problema de dependenţă a datelor avem următorul rezultat.

Theorem 2.3.5. (Magdaş [35]) *Fie* $F : Y \times Y \to Y$ *un operator ca în Theorem 2.3.2. Fie* $G : Y \times Y \to Y$ *astfel încât:*

(i) G *are cel puţin un punct fix cuplat* x_G^**;*

(ii) există $\eta > 0$ *astfel încât*

$$d(F(x,x), G(x,x)) \leq \eta, \text{ pentru orice } x \in Y.$$

Atunci $d(x_F^*, x_G^*) \leq s(\eta)$*, unde* x_F^* *este unicul punct fix cuplat tare al lui* F *şi*

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t), \ t \in \mathbb{R}_+.$$

Theorem 2.3.6. (Magdaş [35]) *Fie* $F : Y \times Y \to Y$ *un operator ca în Theorem 2.3.2 şi* $F_n : Y \times Y \to Y$*,* $n \in \mathbb{N}$*, astfel încât:*

(i) pentru orice $n \in \mathbb{N}$ *există un punct fix cuplat tare* x_n^* *al lui* F_n*;*

(ii) $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniform spre* F*.*

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$*, unde* x^* *este unicul punct fix cuplat tare al lui* F*.*

Vom discuta stabilitatea Ulam-Hyers generalizată pentru problema de punct fix cuplat corespunzătoare unui operator ciclic.

Definition 2.3.7. (Magdaş [35]) Fie (X, d) un spaţiu metric, $Y \in P(X)$ şi let $F : Y \times Y \to Y$ un operator. Problema de punct fix cuplat

$$\begin{cases} F(x,y) = x \\ F(y,x) = y \end{cases}, \ x, y \in Y \tag{2.3.3}$$

se numeşte stabilă în sens Ulam-Hyers generalizat dacă există $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescătoare, continuă în 0 şi $\psi(0) = 0$ astfel incât pentru orice $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ şi pentru orice soluţie $(x, y) \in Y \times Y$ a sistemului

$$\begin{cases} d(x, F(x,y)) \leq \varepsilon_1 \\ d(y, F(y,x)) \leq \varepsilon_2 \end{cases},$$

există o soluţie (x^*, y^*) a problemei de punct fix cuplat astfel încât

$$\begin{cases} d(x, x^*) \leq \psi(\varepsilon) \\ d(y, y^*) \leq \psi(\varepsilon) \end{cases}, \quad \text{unde } \varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}.$$

În particular, dacă $x^* = y^*$, atunci avem stabilitatea Ulam-Hyers generalizată pentru problema de punct fix cuplat $F(x, x) = x, x \in Y$.

Theorem 2.3.8. (Magdaş [35]) *Presupunem că au loc toate ipotezele din Theorem 2.3.2. Atunci problema de punct fix cuplat (2.3.3) este stabilă în sens Ulam-Hyers generalizat.*

Aplicăm rezultatele date în Theorem 2.3.2 pentru studiul existenţei şi unicităţii soluţiei următorului sistem de ecuaţii integrale:

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_a^b G(t,s) f(s, x(s), y(s)) ds \\ y(t) = \displaystyle\int_a^b G(t,s) f(s, y(s), x(s)) ds \end{cases}, \ t \in [a, b] \tag{2.3.4}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$$G \in C([a,b] \times [a,b], [0,\infty)),$$

$$f \in C([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Theorem 2.3.9. (Magdaş [35]) *Presupiunem că:*

(i) există $\alpha, \beta \in C[a,b]$, cu $\alpha(t) \leq \beta(t)$, pentru orice $t \in [a,b]$, astfel încât

$$\begin{cases} \alpha(t) \leq \displaystyle\int_a^b G(t,s) f(s, \beta(s), \alpha(s)) ds \\ \beta(t) \geq \displaystyle\int_a^b G(t,s) f(s, \alpha(s), \beta(s)) ds \end{cases} \quad \textit{pentru orice } t \in [a,b]; \tag{2.3.5}$$

(ii) există o funcţie de comparaţie tare $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$|f(s, u_1, u_2) - f(s, v_1, v_2)| \leq \varphi(\max\{|u_1 - v_1|, |u_2 - v_2|\}),$$

pentru orice $s \in [a,b]$ şi $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$;

(iii) $\sup\limits_{t \in [a,b]} \displaystyle\int_a^b G(t,s) ds \leq 1$*;*

(iv) $f(s, \cdot, \ y)$ este monoton descrescătoare pentru orice $s \in [a,b]$ şi orice $y \in \mathbb{R}$;

(v) $f(s, x, \cdot\ )$ este monoton crescătoare pentru orice $s \in [a,b]$ şi orice $x \in \mathbb{R}$.

Atunci sistemul (2.3.4) are o soluţie unică $(x^*, x^*) \in C([a,b], \mathbb{R}^2)$, cu $\alpha \leq x^* \leq \beta$.

Definition 2.3.10. (Magdaş [35]) Sistemul (2.3.4) se spune că este stabil în sens Ulam-Hyers generalizat dacă există $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescătoare, continuă în 0 şi $\psi(0) = 0$ astfel încât pentru orice $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ şi pentru orice soluţie $(x, y) \in C([a,b], \mathbb{R}^2)$, a sistemului

$$\begin{cases} |x(t) - \displaystyle\int_a^b G(t,s) f(s, x(s), y(s)) ds| \leq \varepsilon_1 \\ |y(t) - \displaystyle\int_a^b G(t,s) f(s, y(s), x(s)) ds| \leq \varepsilon_2 \end{cases}$$

există o soluţie $(x^*, y^*) \in C([a,b], \mathbb{R}^2)$ a sistemului (2.3.4) astfel încât pentru orice $t \in [a,b]$,

$$\begin{cases} |x(t) - x^*(t)| \leq \psi(\varepsilon) \\ |y(t) - y^*(t)| \leq \psi(\varepsilon) \end{cases}, \quad \text{unde } \varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}.$$

Theorem 2.3.11. (Magdaş [35]) *Presupunem că au loc ipotezele din Theorem 2.3.9. Atunci sistemul (2.3.4) este stabil în sens Ulam-Hyers generalizat.*

Similar abordării din Theorem 2.2.11, dacă se consideră următorul sistem de ecuaţii integrale de tip Volterra:

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_a^t f(s, x(s), y(s)) ds \\ y(t) = \displaystyle\int_a^t f(s, y(s), x(s)) ds \end{cases}, \quad t \in [a,b], \tag{2.3.6}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b, f \in C([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, atunci un rezultat de existenţă şi unicitate poate fi obţinut lucrând cu o normă de tip Bielecki.

Mai exact, considerăm $C[a, b]$ dotată cu următoarea normă de tip Bielecki

$$|x|_B = \max_{t \in [a,b]}(|x(t)|e^{-\tau(t-a)}), \tau > 0.$$

Atunci $(C[a, b], |\cdot|_B)$ este un spaţiu Banach.

Theorem 2.3.12. *Considerăm sistemul (2.3.6). Presupunem că:*
(i) există $\alpha, \beta \in C[a, b]$, cu $\alpha(t) \leq \beta(t)$, pentru orice $t \in [a, b]$, astfel încât

$$\begin{cases} \alpha(t) \leq \displaystyle\int_a^t f(s, \beta(s), \alpha(s))ds \\ \beta(t) \geq \displaystyle\int_a^t f(s, \alpha(s), \beta(s))ds \end{cases}, \textit{ for any } t \in [a, b];$$

(ii) există o funcţie de comparaţie tare $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ care are proprietăţile:
$(i)_\varphi$ există $M > e^{b-a}$ astfel încât pentru orice $q \in (1, M)$ şi $t > 0$,

$$\varphi(qt) \leq q \cdot \varphi(t);$$

$(ii)_\varphi$ pentru orice $s \in [a, b]$ şi $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$,

$$|f(s, u_1, u_2) - f(s, v_1, v_2)| \leq \varphi(\max\{|u_1 - v_1|, |u_2 - v_2|\});$$

(iii) $f(s, \cdot, y)$ este monoton descrescătoare pentru orice $s \in [a, b]$ şi orice $y \in \mathbb{R}$;
(iv) $f(s, x, \cdot)$ este monoton crescătoare pentru orice y $s \in [a, b]$ şi orice $x \in \mathbb{R}$.
Atunci sistemul (2.3.6) are o soluţie unică $(x^*, x^*) \in C([a, b], \mathbb{R}^2)$, cu $\alpha \leq x^* \leq \beta$.

Chapter 3

Contracţii generalizate multivoce definite pe reprezentări ciclice

În acest capitol sunt prezentate rezultate de teoria punctului fix şi ale punctului de cea mai bună proximitate pentru operatori multivoci definiţi pe reprezentări ciclice. Acest capitol este structurat pe trei secţiuni.

Scopul primei secţiuni este de a investiga proprietăţi ale φ-contracţiilor ciclice multivoce de tip Ćirić. În această situaţie, anumiţi operatori T posedă cel puţin un punct fix ($x \in X$ care satisface relaţia $x \in T(x)$). De asemenea, sunt studiate dependenţa de date şi stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a incluziunii $x \in T(x)$.

Contribuţiile originale din prima secţiune sunt următoarele:

• Teorema 3.1.4 este rezultatul principal al acestei secţiuni, o extindere a altor rezultate de punct fix pentru operatori multivoci contractivi definiţi pe reprezentări ciclice ale spaţiului (vezi de exemplu Teorema 3.1.6);

• Teorema 3.1.8 este un rezultat referitor la dependenţa de date a punctului fix;

• Teorema 3.1.9 studiază stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a problemei de punct fix.

Rezultatele prezentate în prima secţiune sunt incluse în următoarea lucrare: Magdaş [34].

Scopul cele de a doua secţiuni este de a studia existenţa soluţiilor şi stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a problemei celei mai bune proximităţi pentru operatori multivoci ciclici de tip Ćirić.

Contribuţiile originale din a doua secţiune sunt următoarele:

• Teorema 3.2.4, primul rezultat principal al acestei secţiuni, extinde Teorema 1.4.5 (Suzuki, Kikkawa, Vetro, [77]) şi Teorema 1.4.6 (Neammanee, Kaewkhao [42]) pentru cazul operatorilor multivoci ciclici de tip Ćirić care iau valori proximinale, în contextul spaţiilor metrice cu proprietatea UC;

• Teorema 3.2.8, al doilea rezultat important al acestei secţiuni, demonstrează că dacă φ este o funcţie subaditivă de comparaţie tare, atunci condiţia ca un operator multivoc să ia valori proximinale poate fi eliminată;

• Teorema 3.2.10 studiază stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a problemei celei mai bune proximităţi pentru un operator multivoc.

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în lucrarea: Magdaş [37].

În a treia secţiune se studiază problema punctului fix cuplat şi problema punctului cuplat de cea mai bună proximitate pentru operatori de tip contracţie ciclică multivocă.

Contribuţiile originale din a treia secţiune sunt următoarele:

• Teorema 3.3.5 enunţă un rezultat de punct fix cuplat pentru o φ-contracţie ciclică cuplată de tip Ćirić;

• Teorema 3.3.7 este un rezultat referitor la stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a problemei punctului fix cuplat;

• Teorema 3.3.10 studiază existenţa punctului cuplat de cea mai bună proximitate a unui operator multivoc ciclic cuplat de tip Ćirić care ia valori proximinale, în contextul spaţiilor metrice cu propietatea UC.

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în lucrarea: Magdaş [35].

3.1 Un studiu al problemei de punct fix pentru operatori multivoci de tip Ćirić care satisfac o condiţie ciclică

Scopul acestei secţiuni este studiul proprietăţilor φ-contracţiilor multivoce ciclice de tip Ćirić. Astfel de operatori posedă puncte fixe ($x \in X$ care satisfac incluziunea $x \in T(x)$). Prin construcţia unui şir al aproximaţiilor succesive ala lui T este asigurată convergenţa acestui şir la un punct fix $x^* \in F_T$ pornind de la orice punct $(x, y) \in \mathrm{Graph}(T)$. De asemenea. sunt studiate dependenţa de date şi stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a incluziunii $x \in T(x)$.

Definition 3.1.1. (Magdaş [34]) Fie (X, d) un spaţiu metric, m un întreg pozitiv, $A_1, \ldots, A_m \in P_{cl}(X)$, $Y := \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ şi $T : Y \to P(Y)$ un operator multivoc. Dacă:

(i) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ este o reprezentare ciclică a lui Y în raport cu T;

(ii) există o funcţie de comparaţie tare $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$H(T(x), T(y)) \leq$$

$$\leq \varphi\left(\max\left\{d(x, y), D(x, T(x)), D(y, T(y)), \frac{1}{2}[D(x, T(y)) + D(y, T(x))]\right\}\right),$$

pentru orice $x \in A_i$, $y \in A_{i+1}$, unde $A_{m+1} = A_1$,
atunci T se numeşte φ-contracţie multivocă de tip Ćirić.

Pentru următoarele noţiuni vezi [53], [69] şi [71].

Definition 3.1.2. Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci $T : X \to P(X)$ se numeşte operator Picard multivoc slab (prescurtat operator MWP) dacă pentru orice $(x, y) \in \mathrm{Graph}(T)$ există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în X astfel încât:

(i) $x_0 = x,\ x_1 = y$;

(ii) $x_{n+1} \in T(x_n)$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$;

(iii) şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi limita sa este un punct fix al lui T.

Dacă $T : X \to P(X)$ este un operator MWP, atunci definim

$$T^\infty : \mathrm{Graph}(T) \to P(F_T)$$

prin formula

$T^\infty(x, y) := \{z \in F_T \mid$ există un şir al aproximaţiilor succesive
ale lui T pornind de la (x, y) care converge spre $z\}$.

Definition 3.1.3. (Lazăr [32]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $T : X \to P(X)$ un operator MWP. Atunci T se numeşte operator ψ-multivoc slab Picard (operator ψ-MWP) dacă funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este crescătoare şi continuă în 0 astfel încât $\psi(0) = 0$, şi există o selecţie t^∞ a lui T^∞ astfel încât

$$d(x, t^\infty(x,y)) \leq \psi(d(x,y)), \text{ pentru orice } (x,y) \in \mathrm{Graph}(T).$$

In particular, dacă $\psi(t) := ct$, cu $c > 0$, atunci T se numeşte operator c-MWP (see [69]).

Principalul rezultat al acestei secţiuni este următoarea teoremă.

Theorem 3.1.4. (Magdaş [34]) *Fie (X,d) un spaţiu metric complet, m un întreg pozitiv, $A_1, A_2, \ldots, A_m \in P_{cl}(X)$, $Y := \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie de comparaţie tare şi $T : Y \to P_{prox}(Y)$ un operator multivoc. Presupunem că:*

(i) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ *este o reprezentare ciclică a lui Y în raport cu T;*

(ii) *T este o φ-contracţie multivocă ciclică de tip Ćirić.*

Atunci au loc următoarele afirmaţii:

(1) $F_T \neq \emptyset$;

(2) *pentru fiecare $(x,y) \in \mathrm{Graph}(T)$, există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al aproximaţiilor succesive ale lui T pornind de la orice punct $(x,y) \in \mathrm{Graph}(T)$, care converge spre un punct fix $x^*(x,y) \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i$, prin urmare T este un operator MWP;*

(3) *au loc următoarele estimări:*

$$d(x_n, x^*(x,y)) \leq s(\varphi^n(d(x,y))), \text{ pentru orice } (x,y) \in \mathrm{Graph}(T), \ n \geq 1,$$

$$d(x_n, x^*(x,y)) \leq s(d(x_n, x_{n+1})), \text{ pentru orice } (x,y) \in \mathrm{Graph}(T), \ n \geq 1;$$

(4) *pentru orice $(x,y) \in \mathrm{Graph}(T)$,*

$$d(x, x^*(x,y)) \leq s(d(x,y)), \text{ i.e. } T \text{ este un operator } s\text{-MWP},$$

unde s este dat prin Lemma 1.2.3;

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$, *i.e. T este un operator MWP bun.*

Remark 3.1.5. Dacă alegem $\varphi(t) = kt$, pentru $k \in (0,1)$, atunci avem generalizarea următoarei teoreme (Teorema 2.1 în [42]), unde operatorul multivoc T ia valori închise şi mărginite.

Theorem 3.1.6. (Neammanee, Kaewkhao [42]) *Fie A şi B submulţimi nevide închise ale unui spaţiu metric (X,d). Presupunem că $T : A \cup B \to P(X)$ este un operator multivoc cu valori închise şi mărginite, care satisface condiţiile:*

(i) $T(A) \subseteq B, T(B) \subseteq A$;

(ii) există $k \in (0,1)$ astfel încât pentru orice $x \in A$, $y \in B$,

$$H(T(x), T(y)) \leq kd(x,y).$$

Atunci T are cel puţin un punct fix în $A \cap B$.

Remark 3.1.7. Dacă funcţia tare de comparaţie φ este subaditivă, atunci condiţia de proximinalitate poate fi mai puţin restrictivă: valorile operatorului multivoc T trebuie să fie închise. Demonstraţia se face într-o manieră similară.

O teoremă de dependenţă a datelor pentru problema dată este:

Theorem 3.1.8. (Magdaş [34]) *Fie* $T : Y \to P_{prox}(Y)$ *ca în Teorema 3.1.4 şi* $U : Y \to P(Y)$ *astfel încât:*

(i) $F_U \neq \emptyset$*;*

(ii) există $\eta > 0$ *astfel încât*

$$\rho(T(x), U(x)) \leq \eta, \text{ pentru orice } x \in Y.$$

Atunci $\rho(F_U, F_T) \leq s(\eta)$*, unde* s *este dat de Lemma 1.2.3.*

Theorem 3.1.9. (Magdaş [34]) *(Stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a incluziunii* $x \in T(x)$*) Fie* $T : Y \to P_{prox}(Y)$ *ca în Theorem 3.1.4,* $\varepsilon > 0$ *şi* $x \in Y$ *astfel încât* $D(x, T(x)) \leq \varepsilon$*. Atunci există* $x^* \in F_T$ *astfel încâ* $d(x, x^*) \leq s(\varepsilon)$*, unde* s *este dat de Lemma 1.2.3.*

Remark 3.1.10. Multe probleme deschise referitoare la φ - contracţii multivoce ciclice de tip Ćirić pot fi discutate. Prezentăm aici două astfel de întrebări deschise:

1) Este problema de punct fix pentru un operator multivoc $T : Y \to P_{prox}(Y)$ care satisface condiţiile din Theorem 3.1.4 bine pusă în raport cu D ?, adică, presupunem că există un şir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ astfel încât

$$D(z_n, T(z_n)) \to 0 \text{ când } n \to \infty,$$

rezultă că $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge spre un punct fix a lui T.

2) In ce condiţii operatorul $T : Y \to P_{prox}(Y)$ care satisface ipotezele din Theorem 3.1.4 are proprietatea de umbrire la limită?, adică, presupunem că există un şir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ astfel încât $D(z_{n+1}, T(z_n)) \to 0$ când $n \to \infty$, atunci există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ al aproximaţiilor succesive a lui T, astfel încât $d(x_n, z_n) \to 0$ când $n \to \infty$.

3.2 Teoreme de cea mai bună proximitate pentru operatori multivoci

Scopul acestei secţiuni este de a studia existenţa soluţiilor şi stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a următoarei probleme de cea mai bună proximitate pentru un operator ciclic multivoc:

Dacă (X, d) este un spaţiu metric, $A, B \in P(X)$, $T : A \cup B \to P(X)$ este un operator multivoc care satisface condiţia ciclică $T(A) \subseteq B, T(B) \subseteq A$, atunci ne interesează să găsim

$$x^* \in A \cup B \text{ astfel încât } D(x^*, T(x^*)) = D(A, B). \tag{3.2.1}$$

x^* se numeşte punct de cea mai bună proximitate a lui T.

Conceptul de operator multivoc ciclic de tip Ćirić este următorul.

Definition 3.2.1. (Magdaş [37]) Fie (X, d) un spaţiu metric, $A, B \in P(X)$, şi $T : A \cup B \to P(X)$ un operator multivoc. Dacă:

(i) $T(A) \subseteq B, T(B) \subseteq A$;

(ii) atunci există o funcţie de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât pentru orice $x \in A$, $y \in B$,

$$H(T(x), T(y)) \leq \varphi(M(x, y) - D(A, B)) + D(A, B),$$

unde

$$M(x,y)=\max\left\{d(x,y), D(x,T(x)), D(y,T(y)), \frac{1}{2}[D(x,T(y))+D(y,T(x))]\right\},$$

atunci T se numeşte operator multivoc ciclic de tip Ćirić.

Example 3.2.2. Următorii operatori sunt operatori multivoci ciclici de tipĆirić:

(1) O contracţie multivocă ciclică (vezi [42]) i.e. operator ciclic multivoc $T : A \cup B \to P(X)$ care satisface condiţia:

există $k \in (0,1)$ astfel încât pentru orice $x \in A$, $y \in B$,

$$H(T(x),T(y)) \leq kd(x,y) + (1-k)D(A,B).$$

(2) Un operator multivoc ciclic $T : A \cup B \to P(X)$ care satisface o condiţie de tip Kannan (pentru cazul univoc vezi [48]):

atunci există $k \in (0, \frac{1}{2})$ astfel încât pentru orice $x \in A$, $y \in B$,

$$H(T(x),T(y)) \leq k(D(x,T(x)) + D(y,T(y))) + (1-2k)D(A,B).$$

(3) Un operator multivoc ciclic $T : A \cup B \to P(X)$ care satisface o condiţie de tip Bianchini (pentru cazul univoc vezi [49]):

atunci există $k \in (0,1)$ astfel încât pentru orice $x \in A$, $y \in B$,

$$H(T(x),T(y)) \leq k \cdot \max\{D(x,T(x)), D(y,T(y))\} + (1-k)D(A,B).$$

Următoarea lemă va fi utilizată pentru demonstrarea rezultatelor noastre.

Lemma 3.2.3. [42] *Fie (A,B) o pereche de submulţimi nevide ale unui spaţiu metric (X,d), care satisface proprietatea UC, şi fie un şir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ în A. Dacă există un şir $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$,in B astfel încât $d(x_n,y_n) \to D(A,B)$ şi $d(x_{n+1},y_n) \to D(A,B)$, atunci $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un şir Cauchy.*

Primul nostru rezultat principal extinde Theorem 1.4.5 la un operator multivoc ciclic de tip Ćirić într-un spaţiu metric având proprietatea UC. Mai mult decât atât, el extinde Theorem 1.4.6 la cazul operatorului multivoc ciclic de tip Ćirić care ia valori proximinale.

Theorem 3.2.4. (Magdaş [37])

Fie (X,d) un spaţiu metric complet, $A \in P_{cl}(X), B \in P(X)$, astfel încât (A,B) satisface proprietatea UC. Dacă $T : A \cup B \to P_{prox}(X)$ este un operator multivoc ciclic de tip Ćirić, atunci au loc următoarele rezultate:

(i) T are un punct de cea mai bună proximitate $x_A^* \in A$;

(ii) există un şir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $x_0 \in A$ şi $x_{n+1} \in T(x_n)$ astfel încât $(x_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge spre x_A^*.

Remark 3.2.5. Dacă în Teorema 3.2.4 $D(A,B) = 0$, atunci obţinem un rezultat de punct fix similar cu Teorema 3.1.4 pentru $m = 2$.

Theorem 3.2.6. (Magdaş [37])

Fiet (X,d) un spaţiu metric complet, $A, B \in P_{cl}(X)$, astfel încât perechile (A,B) şi (B,A) satisfac proprietatea UC. Fiet $T : A \cup B \to P_{prox}(X)$ un operator multivoc. Atunci au loc următoarele rezultate:

(i) dacă T este un operator multivoc ciclic de tip Ćirić, atunci T are cel puţin un punct de cea mai bună proximitate în A şi cel puţin un punct de cea mai bună proximitate în B;

(ii) Dacă T satisface următoarele condiţii mai puternice:
pentru orice $x \in A$, $y \in B$,

$$\delta(T(x), T(y)) \leq \varphi(M(x,y) - D(A,B)) + D(A,B),$$

atunci există un punct de cea mai bună proximitate $x_A^* \in A$ şi un punct de cea mai bună proximitate $x_B^* \in B$ astfel încât:

$$d(x_A^*, x_B^*) \leq \sup\{t \geq 0 \mid t - \varphi(t) \leq 3D(A,B)\}.$$

Corollary 3.2.7. (Magdaş [37]) *Fie X un spaţiu Banach uniform convex, $A, B \in P_{cl,cv}(X)$ şi $T : A \cup B \to P_{cl,cv}(X)$ un operator multivoc. Atunci au loc următoarele rezultate:*

(i) dacă T este un operator multivoc ciclic de tip Ćirić, atunci T are cel puţin un punct de cea mai bunp̆roximitate în A şi cel puţin un punct de cea mai bună proximitate în B;

(ii) Dacă T satisface următoarele condiţii mai puternice:
pentru orice $x \in A$, $y \in B$,

$$\delta(T(x), T(y)) \leq \varphi(M(x,y) - D(A,B)) + D(A,B),$$

atunci există un punct de cea mai bună proximitate $x_A^* \in A$ şi un punct de cea mai bună proximitate în $x_B^* \in B$ astfel încât:

$$\|x_A^* - x_B^*\| \leq \sup\{t \geq 0 \mid t - \varphi(t) \leq 3D(A,B)\}.$$

Dacă, în Theorem 3.2.6, φ este o funcţie de comparaţie tare, atunci condiţia ca un operator multivoc să ia valori proximinale poate fi eliminată. Mai exact, se obţine al doilea rezultat important, după cum urmează.

Theorem 3.2.8. (Magdaş [37]) *Fie (X,d) un spaţiu metric complet, $A, B \in P_{cl}(X)$, astfel încât (A,B) satisface proprietatea UC. Dacă $T : A \cup B \to P(X)$ este un operator multivoc ciclic de tip Ćirić, cu o funcţie de comparaţie tare φ, atunci au loc următoarele rezultate:*

(i) T are un punct de cea mai bună proximitate $x_A^* \in A$;

(ii) atunci existŭn şir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $x_{n+1} \in T(x_n)$ pornind de la un punct arbitrar $(x_0, x_1) \in Graph(T)$, astfel încât $(x_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge la x_A^*.

În cele ce urmează vom defini şi studia stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a problemei de cea mai bună proximitate (3.2.1) pentru un operator multivoc ciclic.

Definition 3.2.9. (Magdaş [37]) Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi fie $A, B \in P(X)$.
Fie $T : A \cup B \to P(X)$ un operator multivoc care satisface condiţia de ciclicitate
$T(A) \subset B, T(B) \subset A$. Spunem că problema de cea mai bună proximitate (3.2.1) este stabilă în sens Ulam-Hyers generalizat dacă există $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescătoare, continuă în 0, cu $\psi(0) = 0$ şi există $c > 0$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $x \in B$ cu

$$D(x, T(x)) \leq \varepsilon + D(A,B),$$

atunci există o soluţie $x_A^* \in A$ a problemei (3.2.1) astfel încât:

$$d(x, x_A^*) \leq \psi(\varepsilon) + c \cdot D(A,B).$$

Rezultatul nostru de stabilitate este următorul.

Theorem 3.2.10. (Magdaş [37]) *Fie (X,d) un spaţiu metric complet, $A \in P_{cl}(X), B \in P(X)$, astfel încât (A,B) satisface proprietatea UC şi φ o funcţie de comparaţie. Fie $T : A \cup B \to P_{prox}(X)$ un operator multivoc. Presupunem că:*

(i) $T(A) \subset B, T(B) \subset A$;

(ii) pentru orice $x \in A$, $y \in B$,

$$\delta(T(x),T(y)) \le \varphi(\max\{D(x,T(x)),D(y,T(y))\} - D(A,B)) + D(A,B).$$

Atunci problema celei mai bune proximităţi (3.2.1) este stabilă în sens Ulam-Hyers generalizat.

3.3 Teoreme de puncte fixe cuplate şi teoreme de puncte cuplate de cea mai bună proximitate pentru operatori multivoci ciclici contractivi

Scopul acestei secţiuni este de a studia problema punctelor fixe cuplate şi problema punctelor cuplate de cea mai bună proximitate pentru operatori multivoci ciclici contractivi. Abordarea se bazează pe rezultate de punct fix şi rezultate de puncte de cea mai bună proximitate pentru operatori corespunzători generaţi de problema iniţială.

Definition 3.3.1. Fie (X,d) un spaţiu metric, $A,B \in P(X)$, $Y = A \cup B$ şi $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie de comparaţie tare. Un operator multivoc $F : Y \times Y \to P(Y)$ se numeşte φ-contracţie ciclică cuplată a unui operator multivoc de tip Ćirić dacă au loc următoarele:

(i) F este ciclic în raport cu A şi B, adică

$$F(A \times B) \subseteq B \text{ şi } F(B \times A) \subseteq A;$$

(ii) $H(F(x,y),F(u,v)) \le \varphi(\widetilde{M}(x,v,y,u))$, pentru orice $x,v \in A,\ y,u \in B$, unde

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(x,v,y,u) = \max\Big\{ & d(x,u), d(v,y), D(x,F(x,y)), D(u,F(u,v)), D(v,F(v,u)),\\ & D(y,F(y,x)), \frac{1}{2}[D(x,F(u,v)) + D(u,F(x,y))],\\ & \frac{1}{2}[D(y,F(v,u)) + D(v,F(y,x))]\Big\}.\end{aligned}$$

Următoarea teoremă este un caz particular al Theorem 3.1.4 care va fi utilizat pentru a demonstra primul rezultat din această secţiune.

Theorem 3.3.2. *Fie (X,d) un spaţiu metric complet, $A,B \in P_{cl}(X)$ şi $T : A \cup B \to P_{prox}(A \cup B)$ o φ-contracţie multivocă ciclică de tip Ćirić, adică:*

(i) $T(A) \subseteq B$ şi $T(B) \subseteq A$;

(ii) atunci există o funcţie de comparaţie tare $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât pentru orice $x \in A$ şi $y \in B$,

$$H(T(x),T(y)) \le \varphi\Big(\max\Big\{ d(x,y), D(x,T(x)), D(y,T(y)), \frac{1}{2}[D(x,T(y)) + D(y,T(x))]\Big\}\Big).$$

Atunci au loc următoarele rezultate:

(1) există $x^* \in A \cap B$ astfel încât $x^* \in T(x^*)$;

(2) pentru orice $x \in A$ şi $y \in T(x)$, există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ with $x_0 = x$, $x_1 = y$ and $x_n \in T(x_{n-1})$, $n \ge 1$, care converge la un punct fix $x^* \in A \cap B$ al lui T.

Următoarea lemă prezintă rezultate bine cunoscute din literatura ştiinţifică (de exemplu Mleşniţe, Petruşel [39]).

Lemma 3.3.3. *Fie (X,d) un spaţiu metric, d^* metrica definită pe $X \times X$ prin*

$$d^*(z,w) = \max\{d(x,u), d(y,v)\}, \text{ unde } z = (x,y), w = (u,v), \tag{3.3.1}$$

şi D^* funcţionala distanţă, respectiv H^* funcţionala Pompeiu-Hausdorff generalizată generată de d^*. Atunci pentru orice $a, b \in X$ şi orice $A, B, C, D \in P_{prox}(X)$, au loc următoarele rezultate:
(1) $D^*((a,b), C \times D) = \max\{D(a,C), D(b,D)\}$;
(2) $D^*(A \times B, C \times D) = \max\{D(A,C), D(B,D)\}$;
(3) $H^*(A \times B, C \times D) = \max\{H(A,C), H(B,D)\}$;
(4) $D^*(A \times B, B \times A) = D(A,B)$.

Lemma 3.3.4. *Fie (X,d) un spaţiu metric, d^* metrica definită pe $X \times X$ prin (3.3.1). Dacă un operator multivoc $F : X \times X \to P(X)$ ia valori proximinale în raport cu d atunci operatorul multivoc $T : X \times X \to P(X \times X)$, $T(x,y) = (F(x,y), F(y,x))$ ia valori proximinale în raport cu d^*.*

Primul rezultat din această secţiune este următoarea teoremă.

Theorem 3.3.5. (Magdaş [35]) *Fie (X,d) un spaţiu metric complet, $A, B \in P_{cl}(X)$, $Y = A \cup B$ şi $F : Y \times Y \to P_{prox}(Y)$ o φ-contracţie ciclică cuplată a unui operator multivoc de tip Ćirić.*
Atunci au loc următoarele rezultate:
(1) *există $x^*, y^* \in A \cap B$ astfel încât*

$$x^* \in F(x^*, y^*),\ \ y^* \in F(y^*, x^*),$$

(adică perechea (x^*, y^*) este un punct fix cuplat al lui F);
(2) *pentru orice $(a,b) \in A \times B$ există un şir $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in Y \times Y$ cu $a_0 = a$, $b_0 = b$ şi*

$$a_n \in F(b_{n-1}, a_{n-1}),\ \ b_n \in F(a_{n-1}, b_{n-1}) \text{ for } n \geq 1$$

care converge spre un punct fix cuplat (x^*, y^*) a lui F.

In continuare definim şi studiem stabilitatea Ulam-Hyers generalizată a următoarei probleme de punct fix cuplat.

Definition 3.3.6. (Magdaş [35]) Fie (X,d) un spaţiu metric, $Y \in P(X)$, $F : Y \times Y \to P(Y)$ un operator multivalent. Prin definiţie, problema de punct fix cuplat

$$\begin{cases} x \in F(x,y) \\ y \in F(y,x) \end{cases},\ x, y \in Y, \tag{3.3.2}$$

este stabilă în sens Ulam-Hyers generalizat dacă există o funcţie crecătoare $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continuă în 0, cu $\psi(0) = 0$ astfel încât pentru fiecare $\varepsilon > 0$ şi pentru fiecare soluţie $(x,y) \in Y \times Y$ a inegalităţii

$$\max\{D(x, F(x,y)), D(y, F(y,x))\} \leq \varepsilon,$$

există o soluţie $(x^*, y^*) \in Y \times Y$ a problemei de punct fix cuplat astfel încât

$$\max\{d(x,x^*), d(y,y^*)\} \leq \psi(\varepsilon).$$

Rezultatul nostru de stabilitate este o consecinţă a Theorem 3.1.8.

Theorem 3.3.7. (Magdaş [35]) *Dacă toate ipotezele din Teorema 3.3.5 au loc, atunci problema de punct fix cuplat (3.3.2) este stabilă în sens Ulam-Hyers generalizat.*

În ultima parte a acestei secţiuni vom considera următoarea problemă de cea mai bună proximitate pentru un operator multivoc ciclic cuplat:

Dacă (X, d) este un spaţiu metric, $A, B \in P(X)$, $Y = A \cup B$, $F : Y \times Y \to P(Y)$ este un operator multivoc cuplat care satisface condiţia ciclică

$$F(A \times B) \subseteq B, F(B \times A) \subseteq A,$$

atunci ne interesează să găsim $(x^*, y^*) \in A \times B$ astfel încât

$$D(x^*, F(x^*, y^*)) = D(y^*, F(y^*, x^*)) = D(A, B). \tag{3.3.3}$$

(x^*, y^*) se numeşte punct cuplat de cea mai bună proximitate a lui F.

Se observă că, în particular, dacă $A \cap B \neq \emptyset$ atunci (x^*, y^*) este un punct fix cuplat al lui F.

Definition 3.3.8. (Magdaş [35]) Fie (X, d) un spaţiu metric, $A, B \in P(X)$, $Y = A \cup B$. Un operator multivoc $F : Y \times Y \to P(Y)$ se numeşte operator multivoc ciclic cuplat de tip Ćirić dacă:

(i) $F(A \times B) \subseteq B$ şi $F(B \times A) \subseteq A$;

(ii) există o funcţie de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$H(F(x, y), F(u, v)) \leq \varphi(\widetilde{M}(x, v, y, u) - D(A, B)) + D(A, B),$$

pentru orice $x, v \in A$, $y, u \in B$.

Lemma 3.3.9. *Fie A şi B submulţimi nevide ale unui spaţiu metric (X, d), şi d^* metrica definită pe $X \times X$ prin (3.3.1). Dacă (A, B) şi (B, A) satisfac proprietatea UC în raport cu d atunci $(A \times B, B \times A)$ satisface proprietatea UC în raport cu d^*.*

Următorul rezultat este o consecinţă a Teoremei 3.2.4.

Theorem 3.3.10. (Magdaş [35]) *Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $A, B \in P_{cl}(X)$ astfel încât (A, B) şi (B, A) satisfac proprietatea UC şi $Y = A \cup B$. Dacă $F : Y \times Y \to P_{prox}(Y)$ este un operator multivoc ciclic cuplat de tip Ćirić, atunci au loc următoarele rezultate:*

(i) F are un punct cuplat de cea mai bună proximitate $(x^*, y^*) \in A \times B$;

(ii) există două şiruri $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu

$$(x_0, y_0) \in A \times B,\ x_{n+1} \in F(x_n, y_n),\ y_{n+1} \in F(y_n, x_n),$$

astfel încât $((x_{2n}, y_{2n}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge către (x^*, y^*).

Bibliography

[1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta Math., **3**(1922), 133-181.

[2] C. Di Bari, T. Suzuki, C. Vetro, *Best proximity points for cyclic Meir-Keeler contractions*, Nonlinear Anal., **69**(2008), 3790-3794.

[3] V. Berinde, *Contracţii Generalizate şi Aplicaţii*, Editura Cub Press 22, Baia Mare, 1997.

[4] V. Berinde, *Generalized coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal. **74**(2011), no. 18, 7347-7355.

[5] T.G. Bhaskar, V. Lakshmikantham, *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications*, Nonlinear Anal., **65**(2006), 1379-1393.

[6] R.M.T. Bianchini, *Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi*, Boll. Unione Mat. Ital., IV. Ser., **(4)5**(1972), 103-106.

[7] S.K. Chatterjea, *Fixed-point theorems*, C.R. Acad. Bulg. Sci., **25** (1972), 727-730.

[8] L. Ćirić, *Generalized contractions and fixed-point theorems*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 12(26) (1971), 19-26.

[9] L. Ćirić, *Fixed points for generalized multi-valued contractions*, Mat. Vesnik 9(24) (1972), 265-272.

[10] L. Ćirić, *Multivalued nonlinear contraction mappings*, Nonlinear Anal., **71**(2009), 2716-2723.

[11] B.S. Choudhury, P. Maity, *Cyclic coupled fixed point result using Kannan type contractions*, Journal of Operators, **2014**(2014), Article ID 876749, 5 pages.

[12] B.S. Choudhury, P. Maity, P. Konar, *Fixed point results for couplings on metric spaces*, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. **79**(2017), no. 1, 77-88.

[13] H. Covitz, S.B. Nadler, *Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces*, Israel J. Math., **8**(1970), 5-11.

[14] Ş. Cobzaş, *Geometric properties of Banach spaces and the existence of nearest and farthest points*, Abstr. Appl. Anal., **2005**(2005), 259-285.

[15] F. Deutsch, *Existence of best approximations*, J. Approximation Theory, **28**(1980), 132-154.

[16] A.A. Eldred, P. Veeramani, *Existence and convergence of best proximity points*, J. Math. Anal. Appl., **323**(2006), no. 2, 1001-1006.

[17] M. Fakhar, F. Mirdamadi, Z. Soltani, *Some results on best proximity points of cyclic Meir-Keeler contraction mappings*, Filomat **32**(2018), no. 6, 2081-2089.

[18] J. Fletcher, W.B. Moors, *Chebyshev sets*, J. Aust. Math. Soc., **98**(2015), 161-231.

[19] M. Gabeleh, N. Shahzad, *Best proximity points, cyclic Kannan maps and geodesic metric spaces*, J. Fixed Point Theory Appl., **18**(2016) 167-188.

[20] D. Guo, V. Lakshmikantham, *Coupled fixed points of nonlinear operators with applications*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., **11**(1987), 623-632.

[21] J.G. Kadwin, M. Marudai, *Fixed point and best proximity point results for generalised cyclic coupled mappings*, Thai J. Math., **14**(2016), no. 2, 431-441.

[22] R. Kannan, *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta. Math. Soc., **10**(1968), 71-76.

[23] E. Karapínar, *Fixed point theory for cyclic weak -contraction*, Appl. Math. Lett., **24**(2011), no. 6, 822-825.

[24] E. Karapínar, *Best proximity points of cyclic mappings*, Appl. Math. Lett., **25**(2012), no. 11, 1761-1766.

[25] E. Karapínar, G.S.R. Kosuru, K. Taş, *Best proximity theorems for Reich type cyclic orbital and Reich type Meir-Keeler contraction maps*, J. Nonlinear Anal. Optim. **5**(2014), no. 1, 1-10.

[26] E. Karapínar, G. Petruel, K. Taş, *Best proximity point theorems for KT-types cyclic orbital contraction mappings*, Fixed Point Theory **13**(2012), no. 2, 537-545.

[27] E. Karapínar, S. Romaguera, K. Taş, *Fixed points for cyclic orbital generalized contractions on complete metric spaces*, Cent. Eur. J. Math., **11**(2013), no. 3, 552-560.

[28] S. Karpagam, S. Agrawal, *Existence of best proximity points of p-cyclic contractions*, Fixed Point Theory, **13**(2012), no. 1, 99-105.

[29] W.A. Kirk, P.S. Srinivasan, P. Veeramani, *Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions*, Fixed Point Theory, **4**(2003), no. 1, 79-89.

[30] H.E. Kunze, D. La Torre, E.R. Vrscay, *Contractive multifunctions, fixed point inclusions and iterated multifunction systems*, J. Math. Anal. Appl., **330**(2007), 159-173.

[31] V. Lakshmikantham, L. Ćirić, *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal., **70**(2009), 4341-4349.

[32] V. Lazăr, *Fixed point theory for multivalued ϕ-contractions*, Fixed Point Theory and Appl., 2011, 2011:50.

[33] **A. Magdaş**, *Fixed point theorems for generalized contractions defined on cyclic representations*, J. Nonlinear Sci. Appl., **8**(2015), 1257-1264.

[34] **A. Magdaş**, *A fixed point theorem for Ćirić type multivalued operators satisfying a cyclical condition*, J. Nonlinear Convex Anal., **17**(2015), no. 6, 1109-1116.

[35] **A. Magdaş**, *Coupled fixed points and coupled best proximity problems for cyclic Ćirić type operators*, Arab J. Math. Sci. (2019), https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2019.05.002

[36] **A. Magdaş**, *A Perov type theorem for cyclic contractions and applications to systems of integral equations*, Miskolc Mathematical Notes, **17**(2017), no. 2, 931-939.

[37] **A. Magdaş**, *Best proximity problems for Ćirić type multivalued operators satisfying a cyclic condition*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **62**(2017), no. 3, 395-405.

[38] N. Mizoguchi, W. Takahashi, *Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **141**(1989), 177-188.

[39] O. Mleşniţe, A. Petruşel, *Existence and Ulam-Hyers stability results for multivalued coincidence problems*, Filomat, **26**(2012), no. 5, 965-976.

[40] S.B. Nadler, *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Math., **30**(1969), 475-488.

[41] S.B. Nadler, *Periodic points of multivalued ε-contractive maps*, Topol. Methods in Nonlinear Anal., **22**(2003), 399-409.

[42] K. Neammanee, A. Kaewkhao, *Fixed points and best proximity points for multi-valued mapping satisfying cyclical condition*, Int. J. Math. Sci. Appl., **1**(2011), 1-9.

[43] V.I. Opoitsev, *Dynamics of collective behavior. III. Heterogenic systems*, Automat. Remote Control **36**(1975), no. 1, 111-124.; translated from Avtomat. i Telemeh. 1975, no. 1, 124-138(Russian).

[44] M. Păcurar, I.A. Rus, *Fixed point theory for cyclic φ-contractions*, Nonlinear Anal., **72**(2010), 1181-1187.

[45] A.I. Perov, A.V. Kibenko, *About a general method for studying boundary value problems*, Izv. Akad. Nauk SSSR, **30**(1966), no. 4, 249-264.

[46] I.R. Petre, A. Petruşel, *Krasnoselskii's theorem in generalized Banach spaces and applications*, Electronic J. Qual. Theory Differ. Equ., **85**(2012), 1-20.

[47] M. Petric, *Some results concerning cyclical contractive mappings*, Gen. Math., **18**(2010), no. 4, 213-226.

[48] M. Petric, *Best proximity point theorems for weak cyclic Kannan contractions*, Filomat **25**(2011), no. 1, 145-154.

[49] M. Petric, *Best proximity point theorems for weak cyclic Bianchini contractions*, Creat. Math. Inform. **27**(2018), no. 1, 71-77.

[50] M. Petric, B. Zlatanov, *Fixed point theorems of Kannan type for cyclical contractive conditions*, Proceedings of the Anniversary International Conference REMIA 2010, Plovdiv, Bulgaria, 187-194.

[51] M. Petric, B. Zlatanov, *Best proximity points for p-cyclic summing iterated contractions*, Filomat **32**(2018), no. 9, 3275-3287.

[52] A. Petruşel, *Ćirić type fixed point theorems*, Stud. Univ. Babe-Bolyai, Math., **59**(2014), no. 2, 233-245.

[53] A. Petruşel, *Multivalued weakly Picard operators*, Sci. Math. Jpn., **59** (2004), no. 1, 169–202.

[54] A. Petruşel, *Operatorial Inclusions*, House of the Book of Science, Cluj-Napoca, 2002.

[55] A. Petruşel, *Fixed points vs. coupled fixed points*, J. Fixed Point Theory Appl. **20**(2018), no. 4, Art. 150, 11 pp.

[56] A. Petruşel, *Multi-funcţii şi Aplicaţii* (Romanian) [Multifunctions and Applications], Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2002.

[57] A. Petruşel, G. Petruşel, B. Samet, *A study of the coupled fixed point problem for operators satisfying a max-symmetric condition in b-metric spaces with applications to a boundary value problem*, Miskolc Math. Notes, **17**(2016), no. 1, 501-516.

[58] A. Petruşel, G. Petruşel, B. Samet, J.-C. Yao, *Coupled fixed point theorems for symmetric contractions in b-metric spaces with applications to operator equation systems*, Fixed Point Theory, **17**(2016), no. 2, 457-476.

[59] A. Petruşel, G. Petruşel, B. Samet, J.-C. Yao, *Coupled fixed point theorems for symmetric multi-valued contractions in b-metric space with applications to systems of integral inclusions*, J. Nonlinear Convex Anal. **17**(2016), no. 7, 1265-1282.

[60] A. Petruşel, G. Petruşel, Yi-Bin Xiao, J.-C. Yao, *Fixed point theorems for generalized contractions with applications to coupled fixed point theory*, J. Nonlinear Convex Anal., **19**(2018), no. 1, 71-88.

[61] A. Petruşel, I.A. Rus, *Fixed point theory in terms of a metric and of an order relation*, Fixed Point Theory, **20**(2019), no. 2, 601-622.

[62] A. Petruşel, I.A. Rus, *Well-posedness of the fixed point problem for multivalued operators*, Applied Analysis and Differential Equations, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2007), 295-306.

[63] G. Petruşel, *Cyclic representations and periodic points*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **50**(2005), no. 3, 107-112.

[64] S. Reich, *Fixed point of contractive functions*, Boll. Unione Mat. Ital., IV. Ser., **5**(1972), 26-42.

[65] S. Reich, A.J. Zaslavski, *Well-posedness of fixed point problems*, Far East J. Math. Sci., **46**(2001), no. 3, 393-401.

[66] B.E. Rhoades, *A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans. Am. Math. Soc., **226**(1977), 257-290.

[67] B.E. Rhoades, *A fixed point theorem for a multi-valued non-self mapping*, Comment. Math. Univ. Carolin., **37**(1996), 401-404.

[68] I.A. Rus, *Cyclic representations and fixed points*, Ann. T. Popoviciu Seminar Funct. Eq. Approx. Convexity, **3**(2005), 171-178.

[69] I.A. Rus, *Generalized Contractions and Applications*, Cluj University Press, 2001.

[70] I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, 2008.

[71] I.A. Rus, A. Petruşel, A. Sîntămărian, *Data dependence of the fixed point set of some multi-valued weakly Picard operators*, Nonlinear Anal., **52**(2003), 1947-1959.

[72] I.A. Rus, M.A. Şerban, *Some generalizations of a Cauchy lemma and applications*, Topics in Mathematics, Computer Science and Philosophy, (Şt. Cobzaş Ed.), Cluj University Press, 2008, 173-181.

[73] B. Samet, C. Vetro, *Coupled fixed point, F-invariant set and fixed point of N-order*, Annals Functional Anal., **1**, (2010), 46-56.

[74] B. Samet, C. Vetro, *Coupled fixed point theorems for multi-valued nonlinear contraction mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal., **74**(2011), 4260-4268.

[75] B. Samet, E. Karapinar, H. Aydi, V.C. Rajić, *Discussion on some coupled fixed point theorems*, Fixed Point Theory Appl., **50**(2013), 12 pages.

[76] S.P. Singh, B. Watson, P. Srivastava, *Fixed Point Theory and Best Approximation: the KKM-map Principle*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[77] T. Suzuki, M. Kikkawa, C. Vetro, *The existence of best proximity points in metric spaces with the property UC*, Nonlinear Anal., **71**(2009), no. 7-8, 2918-2926.

[78] X. Udo-utun, *Existence of strong coupled fixed points for cyclic coupled Ćirić-type mappings*, J. Oper., **2014**(2014), Article ID 381685, 4 pages.

[79] R. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Springer, Berlin, 2000.

[80] C. Vetro, F. Vetro, *Caristi type selections of multivalued mappings*, J. Funct. Spaces, **2015**(2015), Article ID 941856, 6 pages.

[81] T. Zamfirescu, *Fixed point theorems in metric spaces*, Arch. Math. (Basel), **23**(1972), 292-298.

Addend: Author's published papers

This thesis is developed on the basis of the following published papers:

1. Adrian Magdaş, *Fixed point theorems for generalized contractions defined on cyclic representations*, J. Nonlinear Sci. Appl., 8(2015), 1257-1264.

2. Adrian Magdaş, *A fixed point theorem for Ćirić type multivalued operators satisfying a cyclical condition*, J. Nonlinear Convex Anal., 17(2015), no. 6, 1109-1116.

3. Adrian Magdaş, *A Perov type theorem for cyclic contractions and applications to systems of integral equations*, Miskolc Mathematical Notes, 17(2017), no. 2, 931-939.

4. Adrian Magdaş, *Best proximity problems for Ćirić type multivalued operators satisfying a cyclic condition*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 62(2017), no. 3, 395-405.

5. Adrian Magdaş, *Coupled fixed points and coupled best proximity points for cyclic operators*, Arab J. Math. Sci. (2019),
https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2019.05.002.