UNIUNEA EUROPEANĂ
GUVERNUL ROMÂNIEI
MINISTERUL MUNCII, FAMILIEI ŞI PROTECŢIEI SOCIALE
AMPOSDRU
Fondul Social European
POSDRU 2007-2013
Instrumente Structurale
2007-2013
MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI
OIPOSDRU
UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
CLUJ-NAPOCA

Universtitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică

Emilia-Loredana Pop

Dualitate şi Condiţii de Optim în Optimizarea Vectorială

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat:
Prof. Univ. Dr. Dorel I. Duca

Cluj-Napoca
2012

FONDUL SOCIAL EUROPEAN
Investeşte în
OAMENI

Titlul proiectului
„Studii doctorale inovative într-o societate bazată pe cunoaştere"
POSDRU/88/1.5/S/60185
Proiect cofinanţat din Fondul Social European
prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane
2007-2013

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
Departamentul Cercetare şi Management de Programe
Str. Universităţii, nr. 7-9, 400091 Cluj-Napoca
Tel. (00) 40 - 264 - 40.53.00*; int. 5329
Fax: 40 - 264 - 59.19.06
E-mail: bd.posdru2008@ubbcluj.ro

Cuprins

Introducere **i**

1 Probleme de optimizare vectorială **1**
1.1 Preliminarii 1
1.1.1 Mulţimi şi interioare de mulţimi 1
1.1.2 Câteva funcţii şi proprietăţile lor 3
1.2 Probleme de optimizare 4
1.2.1 Probleme de optimizare scalară 4
1.2.2 Probleme de optimizare vectorială 4

2 Dualitate vectorială de tip Wolfe şi Mond-Weir **5**
2.1 Dualitate vectorială de tip Wolfe şi Mond-Weir 5
2.1.1 Rezultate generale de dualitate 5
2.1.2 Rezultate de dualitate pentru clase particulare de probleme . . 8
2.1.3 Comparaţii între duale 17
2.2 Dualitate vectorială de tip Wolfe şi Mond-Weir în raport cu soluţiile slab eficiente 18
2.2.1 Rezultate generale de dualitate 18
2.2.2 Rezultate de dualitate pentru clase particulare de probleme . . 18

3 Dualitate vectorială în raport cu quasi-minimalitatea **19**
3.1 Probleme de optimizare vectorială în raport cu quasi-minimalitatea . . 19
3.1.1 Elemente quasi-minimale 20
3.1.2 Rezultate generale de dualitate 21
3.1.3 Rezultate de dualitate pentru clase particulare de probleme . . 23
3.1.4 Comparaţii între duale 27
3.2 Câteva observaţii pentru problemele de optimizare vectială în raport cu relativ-minimalitatea 28

4 Condiţii de optim pentru probleme de optimizare vectorială 29
4.1 Condiţii de optim pentru probleme de optimiza re vectorială în sensul diferitelor scalarizări 29
4.1.1 Scalarizarea generală 30
4.1.2 Scalarizarea liniară 31
4.1.3 Scalarizarea maxim(-liniară) 33
4.1.4 Scalarizarea mulţime 35
4.1.5 Scalarizarea (semi)normă 37
4.1.6 Scalarizarea distanţă 39

5 Câteva aplicaţii 41
5.1 Legături între problemele de optimizare şi problemele de optimizare care le aproximează 41
5.1.1 Probleme de optimizare şi probleme de optimizare care le aproximează 41
5.1.2 Legături între soluţiile optime şi punctele şa ale Lagrangienilor Problemei (P_v) şi Problemei (AP_v) 42
5.1.3 Legături între problemele de optimizare şi dualele lor 42
5.2 Legături între probleme de optimizare vectorială, soluţiile lor eficiente şi punctele şa ale Lagrangienilor 42

Bibliografie 47

Introducere

Un loc important in matematică revine teoriei optimizării. Idea principală este de a obţine noi rezultate de dualitate în optimizarea vectorială. Există multe lucrări ce abordează acest domeniu, ca [80], D.T. Luc [87], R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [25], C. Zălinescu [151], T. Antczak [4], G. Cristescu şi L. Lupşa [43], R.I. Boţ [15], R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [22], R.I. Boţ şi G. Wanka [28, 29], R. Cambini şi L. Carosi [33], R.R. Egudo [49, 50], R.R. Egudo, T. Weir şi B. Mond [51], M. Ehrgott [52], A. Göpfert [60], D. Inoan [75], D. Inoan şi J. Kolumán [76], M.A. Islam [74], H. Kawasaki [82], D.S. Kim, K.M. Miettinen [91], N. Popovici [112], Y. Sawaragi, H. Nakayama şi T. Tanino [116], T. Tanino şi H. Kuk [126], T. Tanino şi Y. Sawaragi [127], G. Wanka şi R.I. Boţ [129–131], X.M. Yang, K.L. Teo şi X.Q. Yang [149] şi M. Zeleny [152].

Unei probleme de optimizare vectorială i se ataşează diferite duale vectoriale şi se pot obţine legături între aceste probleme în ceea ce priveşte soluţiile lor. De asemenea unei probleme de optimizare vectorială i se pot ataşa şi alte probleme, cum ar fi cele care aproximează problema dată. Când unei probleme de minim de optimizare vectorială i se ataşează probleme de maxim de optimizare vectorială (sau duale) şi sunt formulate rezultate de dualitate facem referire la dualitatea vectorială. Rezultatele de dualitate folosite sunt cele de dualitate slabă, tare şi reciprocă. Pentru dualitatea tare şi reciprocă sunt necesare ipoteze suplimentare numite condiţii de regularitate (a se vedea, spre exemplu, R.I. Boţ [14], R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [22, 23, 25], E.R. Csetnek [44], J. Jahn [77], D.T. Luc [87], B.S. Mordukhovich [103, 104], H. Nakayamma [105], R.T. Rockafellar [114], C. Tammer, A. Göpfert [122], T. Tanino [125], C. Zălinescu [150]). Există multe condiţii de regularitate care pot fi folosite, dar aici vom lucra în special cu cea clasică ce implică continuitatea, cea care funcţionează în spaţii Frechét, cea din cazul finit dimensional şi cea de tip închidere (a se vedea R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [25]).

Soluţiile folosite în rezultatele de dualitate pot fi soluţii optime, soluţii eficiente, soluţii slab eficiente şi soluţii propriu eficiente (în cazul nostru, în sensul scalarizării liniare) (a se vedea, spre exemplu, R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [25], A.M. Geoffrion [57], A. Guerraggio, E. Molho şi A. Zaffaroni [69], I. Kaliszewski [81]). Diferitele tipuri de soluţii ce se consideră pentru o problemă de optimizare vectorială pot da diferite duale ataşate primalei. Mai mult, pentru o problemă de optimizare vectorială şi dualele ataşate ei se pot studia şi condiţii de optim (a se vedea, spre exemplu R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [25], A. Ben-Israel, A. Ben-Tal şi S. Zlobec [8]).

Vom lucra în special în infinit dimensional, dar la final vom prezenta şi câteva rezultate în finit dimensional, pentru care vom considera alte condiţii de regularitate.

În această teză prezentăm diferite direcţii şi interpretări pentru dualitatea vectorială. Unei probleme primale de optimizare vectorială i se pot ataşa diferite duale vectoriale folosind diferite funcţii vectoriale perturbatoare, ca Lagrange, Fenchel sau Fenchel-Lagrange. Includem concepte şi rezultate de dualitate generală prezentate de numeroşi autori, ca R.T. Rockafellar [113], C. Zălinescu [151], R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [14, 25], J. Jahn [77–80], C.R. Chen şi S.J. Li [36], W. Breckner şi I. Kolumbán [31, 32]. O foarte importantă parte a acestei teze se referă la dualitatea vectorială de tip Wolfe şi Mond-Weir, subiect studiat de asemenea de mulţi autori (a se vedea, spre exemplu R.I. Boţ şi S.-M. Grad [20, 21]). Pentru concepte de dualitate vectorială de tip Wolfe putem face referire la B.D. Craven [41], M. Schechter [119] şi P. Wolfe [148] şi în cazul dualităţii vectoriale de tip Mond-Weir la B. Monde [98], B. Mond şi M.A. Hanson [99], B. Mond şi S. Zlobec [102], T. Weir [135–140], T. Weir şi B. Mond [100, 101, 141–144], T. Weir, B. Mond şi B.D. Craven [145, 146]. Câteva caracterizări ale problemelor de optimizare vectorială în raport cu soluţiile lor (eficiente, slab eficiente, propriu eficiente în sensul scalarizării liniare, quasi-eficiente) şi câteva rezultate de dualitate sunt presentate. De asemenea sunt formulate comparaţii între imaginile mulţimilor diferitelor duale vectoriale ataşate aceleaşi probleme de optimizare vectorială, obţinându-se relaţii de incluziune între ele sau contraexemple atunci când niciuna dintre ele nu e submulţime a celeilalte. Mai studiem şi condiţiile de optim dintre problema de optimizare vectorială şi dualele vectoriale ataşate ei obţinute prin folosirea diferitelor scalarizări (scalarizarea liniară, scalarizarea maximă($-$liniară), scalarizarea mulţime, scalarizarea (semi)normă, scalarizarea distanţă).

Vom include rezultatele autorului obţinute în colaborări şi care fac referire la diferite probleme din optimizarea vectorială. Afirmaţiile teoretice sunt însoţite de demonstraţii şi urmate de exemple. Rezultatele sunt parţial incluse în următoarele lucrări: S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66–68], E.-L. Pop [107], E.-L. Pop şi D.I. Duca [108–111].

Teza este împărţită în cinci capitole, precedate de o introducere şi urmate de bibliografie.

Primul capitol prezintă cele mai importante noţiuni şi rezultate din literatura de specialitate (după [14,25,39,46,54,77,80,103–105,113,114,151]) folosite în următoarele capitole şi în rezultatele autorului. Lucrăm în special cu noţiunile de bază şi rezultatele din analiza convexă (după J.M. Borwein şi A.S. Lewis [13], J.-B. Hiriart-Urruty şi C. Lamaréchal [73], D.T. Luc [87], S.K. Mishra, S. Wang şi K.K. Lai [97], C. Tammer şi A. Göpfert [122], R.T. Rockafellar [113], T. Tanino [125], P. Weidner [134], C. Zălinescu [151], spre exemplu). În prima secţiune introducem câteva submulţimi ale spaţiilor vectoriale, ca mulţimile convexe; dăm definiţiile pentru conuri, noţiuni de interior şi de interioare generalizate pentru mulţimile convexe care sunt folosite în special în formularea condiţiilor de regularitate, ordine parţiale, teoreme de separare şi proprietăţi. Următoarea parte conţine noţiuni şi rezultate pentru funcţiile reale extinse şi pentru funcţiile vectoriale. Reamintim defniţiile pentru funcţie convexă, funcţie indicator şi suport a unui mulţimi, domeniul şi epigraficul unei funcţii, funcţia conjugată, inegalitatea Young-Fenchel şi subdiferenţiala. În a doua parte a acestui capitol este introdusă teoria conjugării pentru o problemă de optimizare scalară şi sunt date legături între problema de optimizare vectorială şi câteva duale ataşate ei şi obţinute prin folosirea teoriei perturbării. Lucrăm cu o problemă fără restricţii care are ca şi funcţie de scop compunerea cu un operator liniar continuu şi căreia îi sunt asociate soluţii propriu eficiente în sensul scalarizării liniare şi soluţii slab eficiente. Folosind ideea dată de R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [25] particularizăm cazul dualităţii Fenchel pentru această problemă de optimizare vectorială fără restricţii în care operatorul liniar şi continuu este şi inversabil şi dualele obţinute sunt rescrieri echivalente a celora deja cunoscute. De asemenea, câteva legături între soluţiile propriu eficiente ale problemei de optimizare primală şi soluţiile eficiente ale dualelor vectoriale de tip Wolfe şi Mond-Weir ataşate primalei urmează ca şi un caz particular.

În **capitolul doi** ataşăm unei probleme de optimizare vectorială două noi duale folosind teoria perturbării. Aceste duale sunt construite pornind de la dualele scalare de tip Wolfe şi Mond-Weir ataşate unei probleme de optimizare introduse de R.I. Boţ şi S.-M. Grad [21] folosind idea dată de W. Breckner şi I. Kolumbán [31, 32]. Apoi formulăm rezultate de dualitate (a se vedea [66]). Particularizăm problema iniţială de optimizare vectorială la una cu restricţii (o problemă de optimizare vectorială cu restricţii de tip geometric şi con) şi apoi la una fără restricţii (o problemă de optimizare vectorială având ca şi funcţie de scop compunerea cu un operator liniar continuu) şi din cazul general obţinem dualele vectoriale de tip Wolfe şi Mond-Weir corespunzătoare diferitelor funcţii perturbatoare vectoriale considerate (Lagrange, Fenchel, Fenchel-Lagrange). Apoi formulăm comparaţii între duale. În a doua parte a acestui capitol introducem duale vectoriale de tip Wolfe type şi Mond-Weir în raport cu soluţiile slab eficiente.

Contribuţiile autorului se găsesc în următoarele teoreme: 2.1.4, 2.1.6, 2.1.7, 2.1.8, 2.1.16, 2.1.17, 2.1.24, 2.1.25, 2.1.29, 2.1.30, 2.1.37 şi 2.1.38; observaţii: 2.1.3, 2.1.5, 2.1.9, 2.1.10, 2.1.11, 2.1.12, 2.1.14, 2.1.19, 2.1.20, 2.1.21, 2.1.27, 2.1.28, 2.1.31, 2.1.32 şi 2.1.43; leme: 2.1.2; propoziţii: 2.1.13, 2.1.22 şi 2.1.33; exemple: 2.1.15, 2.1.23, 2.1.39 şi 2.1.40; şi o parte din acestea pot fi găsite în [66].

Capitolul trei prezintă rezultate de dualitate în raport cu soluţiile quasi-eficiente. Acest subiect a fost studiat de J.M. Borwein şi A.S. Lewis [12], R.I. Boţ şi E.R. Csetnek [16], R.I. Boţ, E.R. Csetnek şi A. Moldovan [17], R.I. Boţ, E.R. Csetnek şi G. Wanka [18], E.R. Csetnek [44], B.D. Craven [42]. Pornind de la cazul general considerăm problema de optimizare vectorială cu restricţii dar şi fără restricţii obţinând diferite duale vectoriale în funcţie de funcţia perturbatoare vectorială considerată. Sunt folosite rezultate preliminare, mai precis teoreme de separare (a se vedea, spre exemplu, J.M. Borwein, A.S. Lewis [12], R.I. Boţ, E.R. Csetnek şi A. Moldovan [17], R.I. Boţ, E.R. Csetnek şi G. Wanka [18], C. Gerth şi P. Weidner [62]). Rezultatele de dualitate se referă la dualitatea slabă, tare şi reciprocă şi s-au stabilit legături între imaginile mulţimilor diferitelor duale vectoriale ataşate aceleiaşi probleme de optimizare vectorială. În a doua parte a acestui capitol formulăm observaţii în cazul în care considerăm relativ interiorul în locul quasi-interiorului şi soluţiile corespunzătoare, după J.M. Borwein, R. Goebel [11].

Contribuţiile autorului se găsesc în următoarele teoreme: 3.1.11, 3.1.13, 3.1.17, 3.1.19, 3.1.21, 3.1.22, 3.1.24, 3.1.25, 3.1.26, 3.1.32 şi 3.1.33; observaţii: 3.1.4, 3.1.7, 3.1.9, 3.1.18, 3.1.20, 3.1.23, 3.1.29 şi 3.1.31; leme: 3.1.8 şi 3.1.12; propoziţii: 3.1.10, 3.1.28 şi 3.1.30; corolarii: 3.1.14 şi 3.1.34; definiţii: 3.1.3, 3.1.6, 3.1.15 şi 3.1.16; exemple: 3.1.5; şi o parte din acestea pot fi găsite în [68].

În **capitolul patru** ne îndreptăm atenţia spre formularea condiţiilor de optim pentru o problemă de optimizare vectorială cu restricţii de tip geometric şi con şi câteva duale ataşate ei obţinute folosind diferite scalarizări (ca şi scalarizarea liniară, scalarizarea maximum($-$liniară), scalarizarea mulţime, scalarizarea (semi)normă, scala rizarea distanţă). În construcţia dualelor sunt folosite funcţiile scalarizatoare şi mulţimea funcţiilor scalarizatoare în construirea dualelor (a se vedea, spre exemplu R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [22, 25], E. Carrizosa şi J. Fliege [35], J. Fliege [55], S. Helbig [72], J, Jahn [78,80], P.Q. Khanh [83], D.T. Luc [87], E. Miglierina şi E. Molho [93], C. Tammer şi K. Winkler [123], P. Weidner [134]).

Contribuţiile autorului se găsesc în următoarele teoreme: 4.1.11, 4.1.14, 4.1.17, 4.1.22, 4.1.32 şi 4.1.36; şi o parte din acestea pot fi găsite în [67].

Capitolul cinci prezintă câteva aplicaţii. Prima dată studiem legăturile între soluţiile optime şi punctele şa ale Lagrangianului problemei de optimizare care o aproximează

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ \text{s. t.} & x \in X \\ & g(x) \leqq 0 \\ & h(x) = 0, \end{cases}$$

unde X este o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g = (g_1, ..., g_m) : X \to \mathbb{R}^m$ şi $h = (h_1, ..., h_q) : X \to \mathbb{R}^q$ sunt trei funcţii, şi problema de optimizare considerată. Aici prezentăm câteva rezultate şi legături referitoare la soluţiile optime şi punctele şa ale Lagrangianului problemei de optimizare primală şi cele ale problemei de optimizare $(0, 1) - \eta$ care o aproximează (după [108–110]). Încheiem extinzând problemele considerate în cazul vectorial şi dăm legături între soluţiile eficiente şi punctele şa ale Lagrangienilor acestor probleme (după [111]). Altă aplicaţie poate să fie dată şi pentru multifuncţii. Spre exemplu, considerând noţiunea de relativ interior putem să formulăm noi relaţii de tip mulţime cu ajutorul unui con convex introdus de D. Kuroiwa [124]. Apoi folosind ideea lui A. Grad [64, 65] putem obţine rezultate de dualitate şi condiţii de optim pentru probleme de tip mulţime (a se vedea de exemplu [107]).

Contribuţiile autorului se găsesc în următoarele teoreme: 5.2.4, 5.2.8, 5.2.12 şi 5.2.14; observaţii: 5.1.5; leme: 5.2.10; şi o parte din acestea pot fi găsite în [109, 111].

Cuvinte cheie
problemă de optimizare vectorială, problemă de optimizare duală vectorială, funcţie perturbatoare, funcţie conjugată, subdiferenţială (convexă), condiţie de regularitate, dualitate vectorială, dualitate slabă/ tare/ reciprocă, dualitate Wolfe, dualitate Mond-Weir, soluţie eficientă, soluţie propriu eficientă, soluţie slab eficientă, funcţie perturbatoare de tip Lagrange, funcţie perturbatoare de tip Fenchel-Lagrange, funcţie perturbatoare de tip Fenchel, quasi interior, element quasi-minimal, soluţie quasi-eficientă, relativ interior, scalarizare generală, scalarizare liniară, scalarizare maxim ($-$liniară), scalarizare mulţime, scalarizare (semi)normă scalarization, scalarizare distanţă, condi ţie de optim, soluţie optimă, punct şa al Lagrangianului, problemă de optimizare, problemă de optimizare aproximantă $(0, 1) - \eta$, duală.

Mulţumiri
Aş dori să îmi exprim recunoştiinţa pentru conducătorul de doctorat, Prof. Dr. DOREL DUCA de la Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca. Mi-a oferit o temă de cercetare actuală şi excelentă în cadrul căreia m-a condus cu multă pricepere şi analiză continuă a rezultatelor obţinute. Mi-a oferit sprijinul constant, sugestii şi asistenţă pe parcursul întregului studiu doctoral.

Aş dori să mulţumesc dl. Dr. SORIN-MIHAI GRAD pentru o îndrumare continuă în cercetare şi mai ales pentru perioada în care am fost acceptată să studiez la Facultatea of Matematică de la Universitatea Tehnologică din Chemnitz Germania. Mi-a sugerat teme noi de cercetare şi am lucrat împreună în obţinerea unor noi rezultate importante în domeniul cercetării. În tot timpul mi-a oferit discuţii constructive, sfaturi de cercetare foarte bune şi mi-a ghidat munca oferindu-mi materiale bibliografice şi resurse ştiinţifice.

Sunt recunoscătoare dl. Prof. Dr. GERT WANKA pentru furnizarea unui mediu excelent de cercetare în perioada în care am fost acceptată să studiez la Facultatea of Matematică de la Universitatea Tehnologică din Chemnitz Germania.

Mulţumirile mele se îndreaptă de asemenea şi către dl. P.D.Dr. habil. RADU BOŢ şi dl. Dr. ERNÖ ROBERT CSETNEK de la Facultatea of Matematică de la Universitatea Tehnologică din Chemnitz Germania, în ceea ce priveşte diferite aspecte ale temei de cercetare.

Aş dori să mulţumesc membrilor Catedrei de Algebră, Geometrie şi Analiză Matematică de la Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca, pentru ajutorul primit, suport şi un bun mediu de cercetare.

Aş dori są mulţumesc familiei pentru sprijinul, întelegerea, încurajrea şi iubirea necondiţionată. De asemenea doresc să îi multumesc prietenului meu pentru iubirea, răbdarea, încurajarea, sprijinul oferit şi mai ales pentru că a crezut în mine în tot acest timp.

Capitolul 1

Probleme de optimizare vectorială

1.1 Preliminarii

Începem prin a prezenta noţiunile de bază şi rezultatele principale din analiza convexă şi de asemenea cele referitoare la funcţii reale extinse şi la funcţii vectoriale (după J.M. Borwein, A.S. Lewis [12], R.I. Boţ [14], R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [25], P. Daniele, S. Giuffré, G. Idone, A. Maugeri [46], R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [23], J. Jahn [80], R.T. Rockafellar [113], C. Zălinescu [151], etc).

1.1.1 Mulţimi şi interioare de mulţimi

Mulţimi convexe, mulţimi afine şi conuri

Fie X un spaţiu vectorial. O mulţime $U \subseteq X$ se numeşte *convexă* dacă $(1-\lambda)x+\lambda y \in U$ pentru toţi $x, y \in U$ şi toţi $\lambda \in [0, 1]$.

Un *con* $K \subseteq X$ este o mulţime nevidă care satisface $\lambda K \subseteq K$ pentru toţi $\lambda \geq 0$. Un *con convex* este un con care este o mulţime convexă. Un con $K \subseteq X$ se numeşte *netrivial* dacă $K \neq \{0\}$ şi $K \neq X$ şi *cu vârf* dacă $K \cap (-K) = \{0\}$.

Pe X considerăm ordinea parţială "$\leqq_K$" intusă de conul convex $K \subseteq X$, şi definită prin $x \leqq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$ când $x, y \in X$. Notaţia $x \leq_K y$ este folosită pentru a scrie mai compact că $x \leqq_K y$ şi $x \neq y$, unde $x, y \in X$. Un con convex care induce o ordine parţială pe X se numeşte *con de ordine*. Dacă $K \neq \{0\}$, atunci vom nota cu "$\leqq_K$", cel mai mare element în raport ce nu aparţine lui X notat prin ∞_K este ataşat lui X, şi fie $X^\bullet = X \cup \{\infty_K\}$.
Pentru $U \subseteq X$ o mulţime nevidă considerăm

- *învelitoarea liniară* a lui U $\operatorname{lin} U = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in U, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}$;
- *învelitoarea convexă* a lui U $\operatorname{co} U = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in U, \lambda_i \geq 0, i = 1, ..., n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$;
- *învelitoarea conică* a lui U $\operatorname{cone} U = \{\lambda x : \lambda \geq 0, x \in U\}$.

De asemenea, notăm cu $\operatorname{int} U$, $\operatorname{cl} U$ şi $\dim U$ *interiorul*, *închiderea* şi *dimensiunea* mulţimii U. Pentru $U \subseteq X \times Y$, unde X şi Y sunt spaţii reale vectoriale netriviale, *funcţia proiecţie* a lui U pe X, $\operatorname{Pr}_X : X \times Y \to X$ este definită prin $\operatorname{Pr}_X(U) = \{x \in X : \exists y \in Y$ astfel încât $(x, y) \in U\}$. *Funcţia identică* pe X este o funcţie liniară specială, $\operatorname{id}_X : X \to X$ definită prin $\operatorname{id}_X(x) = x$ pentru toţi $x \in X$.

Fie X un spaţiu topologic vectorial şi X^* spaţiul său dual topologic înzestrat cu topologia slabă* şi notăm prin $\langle x^*, x\rangle = x^*(x)$ valoare în $x \in X$ a funcţionalei liniare continue $x^* \in X^*$.

Conul dual a lui K este $K^* = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle \geq 0 \; \forall x \in K\}$, *quasi interiorul conului dual* a lui K este dat de $K^{*0} = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle > 0 \; \forall x \in K \setminus \{0\}\}$ şi *conul normal* asociat unei mulţimi $U \subseteq X$ este definit prin $N_U(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x\rangle \leq 0$ pentru toţi $y \in U\}$.

Prin $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ notăm *spaţiul real extins* care are aceleaşi operaţii ca şi $\mathbb{R}$ şi câteva noi.

Interioare de mulţimi

În ceea ce urmează amintim câteva interioare generalizate ale unei mulţimi şi legături între ele care sunt utile în formularea condiţiilor de regularitate.

Pentru X un spaţiu vectorial netrivial şi $U \subseteq X$ o mulţime avem *interiorul algebric* a lui U $\operatorname{core} U = \{x \in X :$ pentru toţi $y \in X \; \exists \delta > 0$ astfel încât $x + \lambda y \in U \forall \lambda \in [0, \delta]\}$.

Câteva noţiuni de topologie legate de interioare generalizate ale lui $U \subseteq X$, unde X este un spaţiu local convex Hausdorff şi X^* este spaţiul său dual topologic înzestrat cu topologia slabă*, urmează.

- *Quasi interiorul* lui U este mulţimea $\operatorname{qi} U = \{x \in U : \operatorname{cl}(\operatorname{cone}(U - x)) = X\}$;
- *Quasi relativ interiorul* lui U este mulţimea $\operatorname{qri} U = \{x \in U : \operatorname{cl}(\operatorname{cone}(U - x))$ este un subspaţiu liniar$\}$;
- *Quasi relativ interiorul tare* a lui U este mulţimea $\operatorname{sqri} U = \{x \in U : \operatorname{cone}(U - x)$ este un subspaţiu liniar închis$\}$.

În cazul în care $X = \mathbb{R}^n$ şi $U \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulţime, avem *relativ interiorul* lui U definit prin $\operatorname{ri} U = \{x \in \operatorname{aff} U : \exists \varepsilon > 0$ astfel încât $B(x, \varepsilon) \cap \operatorname{aff} U \subseteq U\}$, unde $B(x, \varepsilon)$ este bila închisă cu centrul în x şi de rază ε şi $\operatorname{aff} U$ este învelitoarea afină a lui U.

Teoreme de separare

O teoremă de separare pentru mulţimi convexe în raport cu quasi-relativ interiorul urmează.

Teorema 1.1.17 (*[18, Theorem 2.7]) Fie U o mulţime convexă nevidă a unui spaţiu local convex separat X şi $\overline{x} \in U$. Dacă $\overline{x} \notin \operatorname{qri} U$, atunci există un $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ astfel încât $\langle x^*, x\rangle \leq \langle x^*, \overline{x}\rangle$ pentru toţi $x \in U$.*

1.1.2 Câteva funcţii şi proprietăţile lor

Funcţii reale extinse

Fie X un spaţiu local convex, X^* spaţiul său dual topologic înzestrat cu topologia slabă* şi $U \subseteq X$ o submulţime nevidă.

Funcţia indicator $\delta_U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este definită prin 0 dacă $x \in U$ şi prin $+\infty$, altfel, iar *funcţia suport* $\sigma_U : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ prin $\sigma_U(x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle : x \in U\}$. Pentru $U \subseteq X$ o mulţime convexă absorbantă *funcţia Minkowski* asociată ei $\gamma_U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este definită prin $\gamma_U(x) = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda U\}$.

Funcţia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *convexă* dacă pentru toţi $x, y \in X$ şi toţi $\lambda \in [0, 1]$ avem $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Funcţia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *concavă* dacă $(-f)$ este convexă. Notăm prin $\operatorname{dom} f = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ *domeniul* său şi prin $\operatorname{epi} f = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$ *epigraficul* său. Reamintim că f este *inferior semicontinuă* dacă şi numai dacă $\operatorname{epi} f$ este o mulţime închisă. Funcţia f este *proprie* dacă $f(x) > -\infty$ pentru toţi $x \in X$ şi $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$.

Fie $x \in X$ un punct arbitrar astfel încât $f(x) \in \mathbb{R}$. Mulţimea $\partial f(x) = \{x^* \in X^* : f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle \ \forall y \in X\}$ se numeşte *subdiferenţială* (*convexă*) a lui f în x. Elementele sale se numesc *subgradienţi* a lui f în x. Dacă $\partial f(x) \neq \emptyset$ atunci funcţia f se numeşte *subdiferenţiabilă* în x. Dacă $f(x) \notin \mathbb{R}$ atunci considerăm $\partial f(x) = \emptyset$.

Funcţia $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin $f^*(x^*) = \sup\limits_{x \in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}$ se numeşte *funcţie conjugată* (*Fenchel*) a lui f şi $f_U^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin $f_U^*(x^*) = (f + \delta_U)^*(x^*) = \sup_{x \in U}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}$ se numeşte *conjugata funcţiei f în raport cu mulţimea nevidă $U \subseteq X$*. Între o funcţie şi conjugata sa există *inegalitate Young-Fenchel* $f^*(x^*) + f(x) \geq \langle x^*, x\rangle$ pentru toţi $x \in X$ şi $x^* \in X^*$. Această inegalitate devine egalitate dacă şi numai dacă $x^* \in \partial f(x)$.

Fie X şi Y două spaţii vectoriale topologice. Pentru un operator liniar continuu $A : X \to Y$ *operatorul adjunct* $A^* : Y^* \to X^*$ este dat de $\langle A^* y^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle$ pentru orice $(x, y^*) \in X \times Y^*$.

Definiţia 1.1.24 *Fie X un spaţiu vectorial parţial ordonat de conul convex K, $U \subseteq X$ şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie dată.*

(a) Dacă $f(x) \leq f(y)$ pentru toţi $x, y \in U$ astfel încât $x \leqq_K y$, funcţia f se numeşte $K-$crescătoare pe U.

(b) Dacă $f(x) < f(y)$ pentru toţi $x, y \in U$ astfel încât $x \leq_K y$, funcţia f se numeşte tare $K-$crescătoare pe U.

(c) Dacă f este $K-$crescătoare pe U, core $K \neq \emptyset$ *şi pentru toţi $x, y \in U$ îndeplinind $x <_K y$ urmează $f(x) < f(y)$, funcţia f se numeşte strict $K-$crescătoare pe U.*

(d) Dacă $X = U$ aceste clase de funcţii se numesc $K-$crescătoare, tare $K-$crescă toare şi strict $K-$crescătoare.

Funcţii vectoriale extinse

Fie X un spaţiu vectorial şi fie V un spaţiu local convex parţial ordonat de conul convex nevid K şi $V^\bullet = V \cup \{\pm\infty_K\}$.

Pentru funcţia vectorială $F : X \to V^\bullet$ vom nota cu $\operatorname{dom} F = \{x \in X : F(x) \in V\}$ *domeniul* său şi cu $\operatorname{epi}_K F = \{(x, v) \in X \times V : F(x) \leqq_K v\}$ $K-$*epigraficul* său. Funcţia F se numeşte *proprie* dacă $\operatorname{dom} F$ este nevid; $K-$*convexă* dacă $F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqq_K \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$ pentru toţi $x, y \in X$ şi toţi $\lambda \in [0,1]$; $K-\operatorname{epi}-$*închisă* dacă K este închis şi $K-$epigrafi cul său este închis; $K-$*semicontinuă* dacă pentru toţi $x \in X$, fiecare vecinătate W a lui zero în V şi pentru orice $b \in V$ satisfăcând $b \leqq_K F(x)$, există o vecinătate U a lui x în X astfel încât $F(U) \subseteq b + W + K \cup \{+\infty_K\}$.

Pentru $v^* \in K^*$ funcţia $(v^*F) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este definită prin $(v^*F)(x) = \langle v^*, F(x)\rangle$ pentru toţi $x \in X$.

1.2 Probleme de optimizare

În această secţiune prezentăm teoria conjugării pentru o problemă de optimizare scalară. Apoi considerăm o problemă de optimizare vectorială având ca şi funcţie de scop compunerea cu un operator liniar continuu şi inversabil şi dăm rezultate de dualitate în raport cu soluţiile propriu eficiente în sensul scalarizării liniare şi cu soluţiile slab eficiente. Pentru această problema introducem duale de tip Wolfe şi Mond-Weir obţinând rezultate de dualitate slabă şi tare (ca şi în [21, 139, 140, 143]). Această parte este un caz particular al dualităţii de tip Fenchel unde operatorul este considerat şi inversabil, iar dualele sunt doar rescrieri echivalente ale celor din [25].

1.2.1 Probleme de optimizare scalară

Aici prezentăm câteva rezultate de dualitate pentru duale utilizând teoria perturbării.

1.2.2 Probleme de optimizare vectorială

Unei probleme de optimizare vectorială fără restricţii cu funcţia de scop compunerea unei funcţii cu un operator liniar continuu şi inversabil i se ataşează duale vectoriale (ce sunt formulări echivalente a celor introduse în [25]) şi se dau rezultate de dualitate.

Capitolul 2

Dualitate vectorială de tip Wolfe şi Mond-Weir

Dualitatea de tip Wolfe şi Mond-Weir utilizată în acest capitol a fost considerată iniţial pentru probleme de optimizare cu restricţii (a se vedea, spre exemplu R.I. Boţ şi S.-M. Grad [21]) dar a fost rapid generalizată pentru probleme de optimizare vectorială. Pentru o problemă de minimizare vectorială T.Q. Chien [37] a dat rezultate, în care funcţiile folosite au fost considerate quasidiferenţiabile.

2.1 Dualitate vectorială de tip Wolfe şi Mond-Weir

Folosind ideea lui W. Breckner şi I. Kolumbán [31, 32] şi J. Jahn [80] introducem noi duale de tip Wolfe şi Mond-Weir ataşate unei probleme vectoriale de minimizare. Comparăm aceste duale noi cu cele introduse de R.I. Boţ şi S.-M. Grad [20] şi dăm rezultate de dualitate slabă şi tare. Apoi sunt considerate câteva cazuri particulare ale problemei de optimizare luând diverse funcţii perturbatoare şi obţinând noi duale de tip Wolfe şi Mond-Weir ataşate acestor primale. Se compară imaginile mulţimilor acestor duale vectoriale ataşate aceleaşi probleme de optimizare vectorială, obţinând incluziuni sau contraexemple atunci când niciuna dintre ele nu e submulţime a celeilalte.

O parte din rezultate au fost obţinute de autor în colaborări cu dr. S.-M. Grad şi se găsesc în [66].

2.1.1 Rezultate generale de dualitate

Fie X, Y şi V spaţii local convexe separate, cu V parţial ordonat de conul convex nevid cu vârf $K \subseteq V$. Fie $F : X \to V^\bullet$ o funcţie proprie şi $K-$convexă şi considerăm următoarea problemă de optimizare vectorială

$$(PVG) \qquad \operatorname*{Min}_{x\in X} F(x).$$

Pentru această problemă de optimizare vectorială considerăm următoarele tipuri de soluţii.

(i) Un element $\overline{x} \in X$ se numeşte *soluţie eficientă* a problemei de optimizare vectorială (PVG) dacă $\overline{x} \in \operatorname{dom} F$ şi pentru toţi $x \in \operatorname{dom} F$ din $F(x) \leqq_K F(\overline{x})$ urmează $F(x) = F(\overline{x})$.

(ii) Un element $\overline{x} \in X$ se numeşte *soluţie propriu eficientă* a problemei de optimizare vectorială (PVG) dacă există $v^* \in K^{*0}$ astfel încât $(v^*F)(\overline{x}) \leq (v^*F)(x)$ pentru toţi $x \in X$.

În cele ce urmează vom numi funcţie perturbatoare pentru Problema (PVG), orice funcţie $\Phi : X \times Y \to V^\bullet$ care îndeplineşte $0 \in \operatorname{Pr}_Y(\operatorname{dom}\Phi)$ şi $\Phi(x, 0) = F(x)$ pentru toţi $x \in X$. Atunci, dacă $\Phi : X \times Y \to V^\bullet$ este o funcţie perturbatoare $K-$convexă, problema de optimizare vectorială (PVG) se poate reformula astfel

$$(PVG) \qquad \operatorname*{Min}_{x\in X} \Phi(x, 0).$$

Problemei (PVG) îi ataşăm două duale vectoriale. Pentru obţinerea lor am folosit dualele scalare de tip Wolfe şi Mond-Weir introduse de R.I. Boţ şi S.-M. Grad în [21] şi idea dată de J. Jahn [80] şi W. Breckner şi I. Kolumbán [31, 32].

Duala vectorială de tip Wolfe ataşată Problemei (PVG) este

$$(DVG^W) \qquad \operatorname*{Max}_{(v^*,y^*,v,u,y)\in\mathcal{B}_G^W} h_G^W(v^*, y^*, v, u, y)$$

unde

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_G^W = \{&(v^*, y^*, v, u, y) \in K^{*0} \times Y^* \times V \times X \times Y : (0, y^*) \in \partial(v^*\Phi)(u, y),\\ &\langle v^*, v\rangle \leq -(v^*\Phi)^*(0, y^*)\}\end{aligned}$$

şi

$$h_G^W(v^*, y^*, v, u, y) = v,$$

în timp ce *duala vectorială de tip Mond-Weir* este

$$(DVG^M) \qquad \operatorname*{Max}_{(v^*,y^*,v,u)\in\mathcal{B}_G^M} h_G^M(v^*, y^*, v, u)$$

unde

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_G^M = \{&(v^*, y^*, v, u) \in K^{*0} \times Y^* \times V \times X : (0, y^*) \in \partial(v^*\Phi)(u, 0),\\ &\langle v^*, v\rangle \leq \langle v^*, \Phi(u, 0)\rangle\}\end{aligned}$$

şi

$$h_G^M(v^*, y^*, v, u) = v.$$

Lema 2.1.2 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Avem* $h_G^M(\mathcal{B}_G^M) \subseteq h_G^W(\mathcal{B}_G^W)$.

Observaţia 2.1.3 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Mulţimile* $h_G^M(\mathcal{B}_G^M)$ *şi* $h_G^W(\mathcal{B}_G^W)$ *nu coincid în general. O astfel de situaţie este dată în Exemplul 2.1.15.*

Legături între dualele (DVG^W) şi (DVG^M) ataşate Problemei (PVG) şi cele de tip Wolfe şi Mond-Weir introduse de R.I. Boţ şi S.-M. Grad în [20] şi ataşate aceleaşi probleme primale, care sunt

$$(DVG_W) \qquad \operatorname*{Max}_{(v^*,y^*,u,y,r)\in\mathcal{B}_W^G} h_W^G(v^*,y^*,u,y,r)$$

unde

$$\mathcal{B}_W^G = \{(v^*,y^*,u,y,r) \in K^{*0} \times Y^* \times X \times Y \times (K \setminus \{0\}) : (0,y^*) \in \partial(v^*\Phi)(u,y)\}$$

şi

$$h_W^G(v^*,y^*,u,y,r) = \Phi(u,y) - \frac{\langle y^*,y\rangle}{\langle v^*,r\rangle} r$$

şi,

$$(DVG_M) \qquad \operatorname*{Max}_{(v^*,y^*,u)\in\mathcal{B}_M^G} h_M^G(v^*,y^*,u)$$

unde

$$\mathcal{B}_M^G = \{(v^*,y^*,u) \in K^{*0} \times Y^* \times X : (0,y^*) \in \partial(v^*\Phi)(u,0)\}$$

şi

$$h_M^G(v^*,y^*,u) = \Phi(u,0).$$

Să observăm că dualele (DVG^W) şi (DVG^M) nu conţin funcţia de scop a Problemei (PVG) în funcţia lor de scop. Dualele noi moştenesc toate restricţiile dualelor vectoriale date de R.I. Boţ şi S.-M. Grad [20], având şi una suplimentară ce implică vectorul ce acţionează ca şi funcţie de scop. Mai mult, imaginile mulţimilor introduse aici sunt mai mari în sensul incluziunii decât cele date de R.I. Boţ şi S.-M. Grad [20].

Teorema 2.1.4 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Avem* $h_W^G(\mathcal{B}_W^G) \subseteq h_G^W(\mathcal{B}_G^W)$ *şi* $h_M^G(\mathcal{B}_M^G) \subseteq h_G^M(\mathcal{B}_G^M)$.

Observaţia 2.1.5 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Incluziunile din Teorema 2.1.4 sunt în general stricte, aşa cum arată Exemplul 2.1.15.*

Pentru noile duale avem dualitate slabă.

Teorema 2.1.6 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Nu există* $x \in X$ *şi* $(v^*,y^*,v,u,y) \in \mathcal{B}_G^W$ *astfel încât* $F(x) \leq_K h_G^W(v^*,y^*,v,u,y)$.

Teorema 2.1.7 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Nu există* $x \in X$ *şi* $(v^*,y^*,v,u) \in \mathcal{B}_G^M$ *astfel încât* $F(x) \leq_K h_G^M(v^*,y^*,v,u)$.

Pentru a formula rezultate de dualitate tare pentru problema de optimizare vectorială (PVG) şi cele două noi duale vectoriale, avem nevoie de condiţii de regularitate (după R.I. Boţ [14], R.I. Boţ şi S.-M. Grad [20], R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [25]). Noi am folosit următoarele: cea care implică continuitatea

$$(RCV^1) \quad \Big| \quad \exists x' \in X \text{ astfel încât } (x', 0) \in \operatorname{dom} \Phi \text{ şi } \Phi(x', \cdot) \text{ este continuă în } 0;$$

urmată de cea care se aplică pentru X şi Y spaţii Frechét

$$(RCV^2) \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} X \text{ şi } Y \text{ sunt spaţii Fréchet, } \Phi \text{ este } K-\text{inferior semicontinuă şi} \\ 0 \in \operatorname{sqri}(\Pr_Y(\operatorname{dom} \Phi)); \end{array}$$

apoi în cazul finit dimensional

$$(RCV^3) \quad \Big| \quad \dim(\operatorname{lin}(\Pr_Y(\operatorname{dom} \Phi))) < +\infty \text{ şi } 0 \in \operatorname{ri}(\Pr_Y(\operatorname{dom} \Phi));$$

şi condiţia de regularitate de tip închidere

$$(RCV^4) \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \Phi \text{ este } K-\text{inferior semicontinuă şi } \Pr_{X^* \times \mathbb{R}}(\operatorname{epi}(v^*\Phi)^*) \text{ este închisă în} \\ \text{topologia } w(X^*, X) \times \mathbb{R}, \text{ pentru toţi } v^* \in K^{*0}. \end{array}$$

Teorema 2.1.8 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Presupunem că una din condiţiile de regularitate* (RCV^i), $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, *este îndeplinită. Dacă* $\overline{x} \in X$ *este o soluţie propriu eficientă a Problemei* (PVG), *atunci există soluţii eficiente* $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}^*, \overline{u}, \overline{y})$ *pentru Problema* (DVG^W) *şi* $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}, \overline{u})$ *pentru Problema* (DVG^M) *astfel încât* $F(\overline{x}) = h_G^W(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}, \overline{u}, \overline{y}) = h_G^M(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}, \overline{u})$.

Observaţia 2.1.9 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Pentru dualitatea tare putem să folosim şi condiţia de regularitate dată de R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka în [25, Observaţia 4.3.2]: pentru toţi* $v^* \in K^{*0}$ *Problema* $\inf_{x \in X} \langle v^*, F(x) \rangle$ *este normală.*

Observaţia 2.1.10 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *În cazul în care* $V = \mathbb{R}$ *şi* $K = \mathbb{R}_+$, *identificând* $V^\bullet$ *cu* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *şi* $\infty_{\mathbb{R}_+}$ *cu* $+\infty$, *pentru funcţia proprie şi convexă* $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *redescoperim dualitatea scalară de tip Wolfe şi Mond-Weir dată de R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [25], în care Problema* (PVG) *devine problema de optimizare scalară* (PG) *şi dualele vectoriale* (DVG^W) *şi* (DVG^M) *devin dualele scalare de tip Wolfe şi Mond-Weir ataşate Problemei* (PG), *adică* (DG_W) *şi* (DG_M).

2.1.2 Rezultate de dualitate pentru clase particulare de probleme

Unor probleme de optimizare vectorială particulare Problemei (PVG), cu restricţii şi fără restricţii, ataşam duale vectoriale care sunt cazuri speciale ale dualelor vectoriale (DVG^W) şi (DVG^M), obţinute prin folosirea diferitelor funcţii perturbatoare vectoriale.

Probleme de optimizare vectorială cu restricţii

Considerăm acelaşi cadru ca şi în Secţiunea 2.1, cu Y parţial ordonat de conul convex nevid $C \subseteq Y$, şi considerăm mulţimea convexă nevidă $S \subseteq X$, funcţia $f : X \to V^\bullet$ proprie şi $K-$convexă şi funcţia $g : X \to Y^\bullet$ proprie şi $C-$convexă îndeplinind $\operatorname{dom} f \cap S \cap g^{-1}(C) \neq \emptyset$. Problema de optimizare vectorială cu restricţii de tip geometric şi con pe care o folosim este

$$(PV_C) \qquad \operatorname*{Min}_{x \in \mathcal{A}} f(x),$$

unde

$$\mathcal{A} = \big\{x \in S : g(x) \in -C\big\}.$$

În această secţiune arătăm că Problemei (PV_C) îi putem ataşa mai multe duale vectoriale obţinute în concordanţă cu funcţia perturbatoare aleasă. Astfel, pentru funcţia perturbatoare vectorială Lagrange $\Phi^V_{C_L} : X \times Y \to V^\bullet$ dată de

$$\Phi^V_{C_L}(x, y) = \begin{cases} f(x), & x \in S, g(x) \in y - C, \\ \infty_K, & \text{altfel,} \end{cases}$$

obţinem *duala vectorială Lagrange de tip Wolfe*

$$(DV^W_{C_L}) \qquad \operatorname*{Max}_{(v^*,y^*,v,u) \in \mathcal{B}^W_{C_L}} h^W_{C_L}(v^*, y^*, v, u)$$

unde

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^W_{C_L} = \{&(v^*, y^*, v, u) \in K^{*0} \times C^* \times V \times S : \langle v^*, v - f(u)\rangle \leq -(y^*g)(u), \\ & 0 \in \partial((v^*f) + (y^*g) + \delta_S)(u)\} \end{aligned}$$

şi

$$h^W_{C_L}(v^*, y^*, v, u) = v$$

şi *duala vectorială Lagrange de tip Mond-Weir*

$$(DV^M_{C_L}) \qquad \operatorname*{Max}_{(v^*,y^*,v,u) \in \mathcal{B}^M_{C_L}} h^M_{C_L}(v^*, y^*, v, u)$$

unde

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^M_{C_L} = \{&(v^*, y^*, v, u) \in K^{*0} \times C^* \times V \times S : (y^*g)(u) \geq 0, g(u) \in -C, \\ & \langle v^*, v\rangle \leq (v^*f)(u), 0 \in \partial((v^*f) + (y^*g) + \delta_S)(u)\} \end{aligned}$$

şi

$$h^M_{C_L}(v^*, y^*, v, u) = v.$$

Observăm că în restricţia ultimei dualei putem înlocui $(y^*g)(u) \geq 0$ cu $(y^*g)(u) = 0$ fără a se modifica ceva deoarece $g(u) \in -C$ şi $y^* \in C^*$. La fel ca în R.I. Boţ şi S.-M. Grad [20,21], R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [25], din duala vectorială Lagrange de tip Mond-Weir putem scoate resctricţia $g(u) \in -C$, obţinând o altă duală vectorială $(DV_{C_L}^{MW})$ asociată Problemei (PV_C)

$$(DV_{C_L}^{MW}) \qquad \operatorname*{Max}_{(v^*,y^*,v,u)\in\mathcal{B}_{C_L}^{MW}} h_{C_L}^{MW}(v^*,y^*,v,u)$$

unde

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{C_L}^{MW} = \{(v^*,y^*,v,u) \in K^{*0}\times C^*\times V\times S : (y^*g)(u)\geq 0, \langle v^*,v\rangle \leq (v^*f)(u),\\ 0\in\partial((v^*f)+(y^*g)+\delta_S)(u)\}\end{aligned}$$

şi

$$h_{C_L}^{MW}(v^*,y^*,v,u) = v.$$

Observaţia 2.1.11 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Presupunem că f este o funcţie vectorială $K-$convexă şi g este o funcţie vectorială $C-$convexă. Folosind că S este o muţime convexă se poate arăta că funcţia perturbatoare vectorială $\Phi_V^{C_L}$ este $K-$convexă. Notăm $\Delta_{X^3}=\{(x,x,x) : x\in X\}$. Dacă una dintre următoarele condiţii (a se vedea R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [25])*

(i) f şi g sunt continue într-un punct din $\operatorname{dom} f\cap\operatorname{dom} g\cap S$;

(ii) $\operatorname{dom} f\cap\operatorname{int}(S)\cap\operatorname{dom} g\neq\emptyset$ şi f sau g este continuă într-un punct din $\operatorname{dom} f\cap\operatorname{dom} g$;

(iii) X este un spaţiu Fréchet, S este închisă, f este $K-$inferior semicontinuă, g este $C-$inferior semicontinuă şi $0\in\operatorname{sqri}(\operatorname{dom} f\times S\times\operatorname{dom} g-\Delta_{X^3})$;

(iv) $\dim(\operatorname{lin}(\operatorname{dom} f\times S\times\operatorname{dom} g-\Delta_{X^3}))<+\infty$ şi $\operatorname{ri}(\operatorname{dom} f)\cap\operatorname{ri}(S)\cap\operatorname{ri}(\operatorname{dom} g)\neq\emptyset$; este îndeplinită, atunci pentru toţi $v^*\in K^{*0}$ şi toţi $y^*\in C^*$, are loc

$$\partial((v^*f)+(y^*g)+\delta_S)(x) = \partial(v^*f)(x)+\partial(y^*g)(x)+N_S(x)\ \forall x\in X.$$

În consecinţă, când una dintre aceste situaţii se întâmplă restricţia ce implică subdiferenţiala în $(DV_{C_L}^{W})$, $(DV_{C_L}^{M})$ şi $(DV_{C_L}^{MW})$ se poate modifica.

Observaţia 2.1.12 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *O duală vectorială similară cu $(DV_{C_L}^{W})$, dar în raport cu soluţiile slab eficiente a fost introdusă de T.Q. Chien [37], prin folosirea ipotezelor de quasidiferenţiabilitate pentru funcţiile considerate. Mai târziu au fost date rezultate de către T. Weir, B. Mond şi B.D. Craven [145], unde funcţiile au fost considerate diferenţiabile.*

În ceea ce urmează dăm rezultate pentru imaginile mulţimilor acestor duale vectoriale.

Propoziţia 2.1.13 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Avem $h_{C_L}^{M}(\mathcal{B}_{C_L}^{M})\subseteq h_{C_L}^{MW}(\mathcal{B}_{C_L}^{MW})$ şi $h_{C_L}^{M}(\mathcal{B}_{C_L}^{M})\subseteq h_{C_L}^{W}(\mathcal{B}_{C_L}^{W})$.*

Observaţia 2.1.14 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Incluziunile din Propoziţia 2.1.13 sunt în general stricte, aşa cum arată următorul exemplu.*

Exemplul 2.1.15 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Fie* $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}_+$, $K = \mathbb{R}^2_+$, $S = \mathbb{R}_+$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, x)^T$ *şi* $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x > 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ +\infty, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Atunci $g(x) \neq 0$ *pentru toţi* $x \in \mathbb{R}$ *obţinem că* $(y^*g)(u) = 0$ *şi pentru câtiva* $u \geq 0$ *admisibili că ar trebui să avem* $y^* = 0$. *Pentru* $u > 0$ *şi* $v^* = (v_1^*, v_2^*)^T$ *subdiferenţiala funcţiei* $(v^*f + 0g + \delta_S)(\cdot) = (v_1^* + v_2^*)(\cdot) + \delta_{\mathbb{R}_+}(\cdot)$ *este mulţimea* $\{v_1^* + v_2^*\}$. *Atunci singurul element eligibil pentru* $\mathcal{B}^M_{C_L}$ *ar fi* $u = 0$, *deoarece* $g(u) = +\infty$ *când* $u < 0$. *Dar* $g(0) = 1 \notin -C$ *şi atunci* $\mathcal{B}^M_{C_L} = \emptyset$. *Mai mult, considerând duala vectorială Lagrange de tip Wolfe ataşată Problemei* (PV_C) *din* (DV^G_W) *obţinem (după R.I. Boţ şi S.-M. Grad [20]), că funcţia de scop ia valori numai vectori cu componente egale.*

Pe de altă parte, pentru $v^* = (1/2, 1/2)^T$ *avem* $0 \in \partial((v^*f) + (y^*g) + \delta_S)(0) = (-\infty, 1]$, $(y^*g)(u) = 0$ *şi pentru* $v = (0, -1)$ *obţinem că* $\langle v^*, v\rangle - (v^*f)(u) = -1/2 < 0$. *Prin urmare* $((1/2, 1/2)^T, 0, (0, -1), 0) \in \mathcal{B}^{MW}_{C_L}$ *şi* $((1/2, 1/2)^T,\ 0, (0, -1), 0) \in \mathcal{B}^W_{C_L}$. *Deci* $(0, -1) \in h^{MW}_{C_L}(\mathcal{B}^{MW}_{C_L}) \cap h^W_{C_L}(\mathcal{B}^W_{C_L})$.

În consecinţă, $h^W_{C_L}(\mathcal{B}^W_{C_L}) \neq h^M_{C_L}(\mathcal{B}^M_{C_L})$ *şi* $h^{MW}_{C_L}(\mathcal{B}^{MW}_{C_L}) \neq h^M_{C_L}(\mathcal{B}^M_{C_L})$ *şi, în general,* $h^M_G(\mathcal{B}^M_G) \neq h^W_G(\mathcal{B}^W_G)$ *şi* $h^W_G(\mathcal{B}^W_G) \neq h^G_W(\mathcal{B}^G_W)$.

Relativ la posibilele incluziuni între dualele vectoriale Lagrange de tip Wolfe şi "M-W", putem afirma doar că imaginea primei duale vectoriale nu este o submulţime a celei de a doua.

Pentru a da rezultate de dualitate tare pentru dualele vectoriale Lagrange ataşate Problemei (PV_C), avem nevoie de condiţii de regularitate. Particularizând (RCV^i), $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ obţinem $(RCV^i_{C_L})$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, unde spre exemplu $(RCV^1_{C_L})$ este

$$(RCV^1_{C_L}) \quad \Big| \quad \exists x' \in \operatorname{dom} f \cap S \text{ astfel încât } g(x') \in -\operatorname{int}(C).$$

Particularizând rezultatele din cazul general, obţinem următoarele afirmaţii de dualitate.

Teorema 2.1.16 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) (*dualitate slabă şi tare pentru* (PV_C) *şi* $(DV^W_{C_L})$)

(*a*) *Nu există* $x \in \mathcal{A}$ *şi* $(v^*, y^*, v, u) \in \mathcal{B}^W_{C_L}$ *astfel încât* $f(x) \leq_K h^W_{C_L}(v^*, y^*, v, u)$.

(*b*) *Dacă* $\overline{x} \in \mathcal{A}$ *este o soluţie propriu eficientă pentru Problema* (PV_C) *şi una dintre condiţiile de regularitate* $(RCV^i_{C_L})$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ *este îndeplinită, atunci există* $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}, \overline{u}) \in \mathcal{B}^W_{C_L}$ *soluţie eficientă pentru Problema* $(DV^W_{C_L})$ *astfel încât* $f(\overline{x}) = h^W_{C_L}(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}, \overline{u})$.

Teorema 2.1.17 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) (*dualitate slabă şi tare pentru* (PV_C) *şi* $(DV^M_{C_L})$)

(*a*) *Nu există* $x \in \mathcal{A}$ *şi* $(v^*, y^*, v, u) \in \mathcal{B}^M_{C_L}$ *astfel încât* $f(x) \leq_K h^M_{C_L}(v^*, y^*, v, u)$.

(b) Dacă $\overline{x} \in \mathcal{A}$ este o soluţie propriu eficientă a Problemei (PV_C) şi una dintre condiţiile de regularitate $(RCV^i_{C_L})$, $i \in \{1,2,3,4\}$, este îndeplinită, atunci există $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}, \overline{u}) \in \mathcal{B}^M_{C_L}$ soluţie eficientă pentru Problema $(DV^M_{C_L})$ astfel încât $f(\overline{x}) = h^M_{C_L}(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}, \overline{u})$.

Analog se pot da şi afirmaţiile corespunzătoare pentru (PV_C) şi $(DV^{MW}_{C_L})$.

Observaţia 2.1.19 *(S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]) Condiţia de regularitate din Teorema 2.1.19 (b) şi 2.1.20 (b) poate să fie înlocuită cu orice condiţie care garantează stabilitatea problemei de optimizare* $\inf_{x\in\mathcal{A}} (\overline{v}^* f)(x)$ *în raport cu duala Lagrange.*

Observaţia 2.1.20 *(S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]) Dacă $V = \mathbb{R}$ şi $K = \mathbb{R}_+$, atunci dualele $(DV^W_{C_L})$, $(DV^M_{C_L})$ şi $(DV^{MW}_{C_L})$ devin dualele scalare Lagrange de tip Wolfe şi Mond-Weir corespunzătoare Problemei (PV_C), considerate de R.I. Boţ şi S.-M. Grad în [21].*

O altă funcţie perturbatoare vectorială pe care o considerăm este funcţia perturbatoare vectorială Fenchel-Lagrange $\Phi^V_{FL} : X \times X \times Y \to V^\bullet$ dată de

$$\Phi^V_{C_{FL}}(x,t,y) = \begin{cases} f(x+t), & x \in S, g(x) \in y - C \\ \infty_K, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Duala vectorială Fenchel-Lagrange de tip Wolfe ataşată Problemei (PV_C) este

$$(DV^W_{C_{FL}}) \qquad \operatorname*{Max}_{(v^*,t^*,y^*,v,u,t)\in\mathcal{B}^W_{C_{FL}}} h^W_{C_{FL}}(v^*,t^*,y^*,v,u,t)$$

unde

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^W_{C_{FL}} = \{&(v^*,t^*,y^*,v,u,t) \in K^{*0} \times X^* \times C^* \times V \times S \times X : \langle v^*, v\rangle \leq \langle t^*, u\rangle \\ &-(v^*f)^*(t^*) - (y^*g)(u), 0 \in \partial((v^*f)(u+t) \cap (-\partial((y^*g)+\delta_S)(u))\}\end{aligned}$$

şi

$$h^W_{C_{FL}}(v^*,t^*,y^*,v,u,t) = v$$

şi *duala vectorială Fenchel-Lagrange de tip Mond-Weir* este

$$(DV^M_{C_{FL}}) \qquad \operatorname*{Max}_{(v^*,y^*,v,u)\in\mathcal{B}^M_{C_{FL}}} h^M_{C_{FL}}(v^*,y^*,v,u)$$

unde

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^M_{C_{FL}} = \{&(v^*,y^*,v,u) \in K^{*0} \times C^* \times V \times S : (y^*g)(u) \geq 0, g(u) \in -C, \\ &\langle v^*, v\rangle \leq (v^*f)(u), 0 \in \partial(v^*f)(u) + \partial((y^*g)+\delta_S)(u)\}\end{aligned}$$

şi

$$h^M_{C_{FL}}(v^*,y^*,v,u) = v.$$

Observăm că în restricţiile celei de a doua duale putem înlocui $(y^*g)(u) \geq 0$ cu $(y^*g)(u) = 0$ fără a apărea modificări deoarece $g(u) \in -C$ şi $y^* \in C^*$. Ca şi în cazul anterior, eliminând restricţia $g(u) \in -C$, obţinem altă duală vectorială ataşată Problemei (PV_C)

$$(DV^{MW}_{C_{FL}}) \qquad \operatorname*{Max}_{(v^*,y^*,v,u)\in\mathcal{B}^{MW}_{C_{FL}}} h^{MW}_{C_{FL}}(v^*,y^*,v,u)$$

unde

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{MW}_{C_{FL}} = \; & \{(v^*,y^*,v,u) \in K^{*0} \times C^* \times V \times S : (y^*g)(u) \geq 0, \\ & \langle v^*, v\rangle \leq (v^*f)(u), 0 \in \partial(v^*f)(u) + \partial((y^*g) + \delta_S)(u)\}\end{aligned}$$

şi

$$h^{MW}_{C_{FL}}(v^*,y^*,v,u) = v.$$

Observaţia 2.1.21 *Ca şi în Observaţia 2.1.11 se pot formula condiţii pentru a altă grupare a funcţiilor ce apar în subdiferenţiala restricţiilor dualelor vectoriale Fenchel-Lagrange ataşate Problemei (PV_C) (a se vedea R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [25, Secţiune 3.5]).*

Folosind modul în care Problema $(DV^M_{C_{FL}})$ a fost construită şi aplicând Lema 2.1.2, obţinem următoarele incluziuni.

Propoziţia 2.1.22 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Avem $h^M_{C_{FL}}(\mathcal{B}^M_{C_{FL}}) \subseteq h^{MW}_{C_{FL}}(\mathcal{B}^{MW}_{C_{FL}})$ şi $h^M_{C_{FL}}(\mathcal{B}^M_{C_{FL}}) \subseteq h^W_{C_{FL}}(\mathcal{B}^W_{C_{FL}})$.*

Întrebarea dacă incluziuni similare pot avea loc pentru dualele vectoriale Lagrange de tip Wolfe ataşate Problemei (PV_C) are un răspuns negativ, aşa cum arată următorul exemplu.

Exemplul 2.1.23 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Fie $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $K = \mathbb{R}^2_+$, $S = \mathbb{R}_+$, $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^2)^\bullet$,*

$$f(x) = \begin{cases} (1,1)^T x, & \text{dacă } x \leq 0, \\ \infty_{\mathbb{R}^2_+}, & \text{altfel,} \end{cases}$$

şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = (x, 1-x)^T$.

Ca şi în R.I. Boţ şi S.-M. Grad [21, Exemplul 2] se poate arăta că $\mathcal{B}^{MW}_{C_{FL}} = \emptyset$, iar pe de altă parte că $((1/2,1/2)^T, 0, (0,0), (0,0)^T, 0, 0) \in \mathcal{B}^W_{C_{FL}}$ şi $(0,0)^T \in h^W_{C_{FL}}(\mathcal{B}^W_{C_{FL}})$. În consecinţă, $h^W_{C_{FL}}(\mathcal{B}^W_{C_{FL}}) \nsubseteq h^{MW}_{C_{FL}}(\mathcal{B}^{MW}_{C_{FL}})$.

Pentru a obţine dualitatea tare, particularizăm condiţiile de regularitate (RCV^i), $i \in \{1,2,3,4\}$. Acestea devin $(RCV^i_{C_{FL}})$, $i \in \{1,2,3,4\}$, unde de exemplu $(RCV^1_{C_{FL}})$ este

$$(RCV^1_{C_{FL}}) \quad \Big| \quad \exists x' \in \operatorname{dom} f \cap S \text{ astfel încât } f \text{ este continuă în } x' \text{ şi } g(x') \in -\operatorname{int}(C)$$

şi celelalte pot fi obţinute analog (a se vedea R.I. Boţ şi S.-M. Grad [21]).

Din cazul general obţinem afirmaţiile de dualitate slabă şi tare.

Teorema 2.1.24 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) (*dualitate slabă şi tare pentru* (PV_C) *şi* $(DV^W_{C_{FL}})$)

(*a*) *Nu există* $x \in \mathcal{A}$ *şi* $(v^*, t^*, y^*, v, u, t) \in \mathcal{B}^W_{C_{FL}}$ *astfel încât* $f(x) \leq_K h^W_{C_{FL}}(v^*, t^*, y^*, v, u, t)$.

(*b*) *Dacă* $\overline{x} \in \mathcal{A}$ *este o soluţie propriu eficientă a Problemei* (PV_C) *şi una dintre condiţiile de regularitate* $(RCV^i_{C_{FL}})$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, *este îndeplinită, atunci există* $(\overline{v}^*, \overline{t}^*, \overline{y}^*, \overline{v}, \overline{u}, \overline{t}) \in \mathcal{B}^W_{C_{FL}}$ *soluţie eficientă pentru Problema* $(DV^W_{C_{FL}})$ *astfel încât* $f(\overline{x}) = h^W_{C_{FL}}(\overline{v}^*, \overline{t}^*, \overline{y}^*, \overline{v}, \overline{u}, \overline{t})$.

Teorema 2.1.25 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) (*dualitate slabă şi tare pentru* (PV_C) *şi* $(DV^M_{C_{FL}})$)

(*a*) *Nu există* $x \in \mathcal{A}$ *şi* $(v^*, y^*, v, u) \in \mathcal{B}^M_{C_{FL}}$ *astfel încât* $f(x) \leq_K h^M_{C_{FL}}(v^*, y^*, v, u)$.

(*b*) *Dacă* $\overline{x} \in \mathcal{A}$ *este o soluţie propriu eficientă pentru Problema* (PV_C) *şi una dintre condiţiile de regularitate* $(RCV^i_{C_{FL}})$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, *este îndeplinită, atunci există* $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}, \overline{u}) \in \mathcal{B}^M_{C_{FL}}$ *soluţie eficientă pentru Problema* $(DV^M_{C_{FL}})$ *astfel încât* $f(\overline{x}) = h^M_{C_{FL}}(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}, \overline{u})$.

Analog se pot formula rezultate de dualitate pentru (PV_C) şi $(DV^{MW}_{C_{FL}})$.

Observaţia 2.1.27 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Condiţia de regularitate din Teorema 2.1.24 (b) şi 2.1.25 (b) poate fi înlocuită cu orice altă condiţie care garantează stabilitatea problemei de optimizare* $\inf_{x\in\mathcal{A}}(\overline{v}^* f)(x)$ *în raport cu duala Fenchel-Lagrange.*

Observaţia 2.1.28 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Dacă* $V = \mathbb{R}$ *şi* $K = \mathbb{R}_+$, *atunci dualele* $(DV^W_{C_{FL}})$, $(DV^M_{C_{FL}})$ *şi* $(DV^{MW}_{C_{FL}})$ *devin dualele scalare Fenchel-Lagrange de tip Wolfe şi Mond-Weir ataşate Problemei* (PV_C) *considerată de R.I. Boţ şi S.-M. Grad în [21].*

Probleme de optimizare vectorială fără restricţii

Folosind acelaşi cadru ca şi în Secţiunea 2.1, considerăm funcţiile vectoriale $f : X \to V^\bullet$ şi $h : Y \to V^\bullet$ proprii şi $K-$convexe şi $A : X \to Y$ un operator liniar continuu astfel încât $\mathrm{dom}\, f \cap A^{-1}(\mathrm{dom}\, h) \neq \emptyset$. Problema de optimizare vectorială fără restricţii

$$(PV_A) \qquad \operatorname*{Min}_{x\in X}[f(x) + h(Ax)]$$

este un caz particular al Problemei (PVG) unde $F = f + h \circ A$ şi considerăm funcţia perturbatoare vectorială $\Phi^V_A : X \times Y \to V^\bullet$ definită prin

$$\Phi^V_A(x, y) = f(x) + h(Ax + y).$$

Dualele vectoriale ataşate Problemei (PV_A) sunt

$$(DV_A^W) \qquad \operatorname*{Max}_{(v^*,y^*,v,u,y)\in\mathcal{B}_A^W} h_A^W(v^*,y^*,v,u,y)$$

unde

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_A^W &= \{(v^*,y^*,v,u,y)\in K^{*0}\times Y^*\times V\times X\times Y : y^*\in (A^*)^{-1}(-\partial(v^*f)(u)) \\ &\qquad \cap\partial(v^*h)^*(Au+y) \text{ şi } \langle v^*,v\rangle \leq -(v^*f)^*(-A^*y^*)+(v^*h)^*(y^*)\}\end{aligned}$$

şi

$$h_A^W(v^*,y^*,v,u,y)=v$$

şi, respectiv,

$$(DV_A^M) \qquad \operatorname*{Max}_{(v^*,v,u)\in\mathcal{B}_A^M} h_A^M(v^*,v,u)$$

unde

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_A^M &= \{(v^*,v,u)\in K^{*0}\times V\times X : 0\in (A^*)^{-1}(-\partial(v^*f)(u))-\partial(v^*h)(Au) \\ &\qquad \text{şi } \langle v^*,v\rangle \leq \langle v^*, f(u)+h(Au)\rangle\}\end{aligned}$$

şi

$$h_A^M(v^*,v,u)=v.$$

Pentru Problema (PV_A) şi dualele vectoriale de tip Wolfe şi Mond-Weir (DV_A^W) şi (DV_A^M), dualitatea slabă şi tare urmează din cazul general.

Teorema 2.1.29 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) (*dualitate slabă pentru (PV_A) şi (DV_A^W), (PV_A) şi (DV_A^M)*)

(a) Nu există $x\in X$ şi $(v^*,y^*,v,u,y)\in\mathcal{B}_A^W$ astfel încât $f(x)+h(Ax)\leq_K h_A^W(v^*,y^*,v,u,y)$.

(b) Nu există $x\in X$ şi $(v^*,v,u)\in\mathcal{B}_A^M$ astfel încât $f(x)+h(Ax)\leq_K h_A^M(v^*,v,u)$.

În formularea dualităţii tari sunt necesare condiţii de convexitate care garantează $K-$convexitatea funcţiei perturbatoare vectoriale şi condiţii de regularitate obţinute prin particularizarea celor clasice date de R.I. Boţ, S.-M. Grad şi G. Wanka [25], numite (RC_i^A), $i\in\{1,2,3,4\}$, unde spre exemplu (RC_1^A) este

$$(RC_1^A) \quad \Big| \quad \exists x'\in \operatorname{dom} f\cap A^{-1}(\operatorname{dom} h) \text{ astfel încât } h \text{ este continuă în } Ax'.$$

Teorema 2.1.30 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) (*dualitate tare pentru (PV_A) şi (DV_A^W), (PV_A) şi (DV_A^M)*)

Presupunem că f şi h sunt funcţii vectoriale $K-$convexe şi una dintre condiţiile de regularitate $(RC_i^A), i\in\{1,2,3,4\}$, este îndeplinită. Dacă $\overline{u}$ este o soluţie propriu eficientă a Problemei (PV_A), atunci există $\overline{v}^*\in K^{*0}$, $\overline{y}^*\in Y^*$ şi $\overline{v}\in V$ astfel încât $(\overline{v}^*,\overline{y}^*,\overline{v},\overline{u},0)$ este o soluţie eficientă a Problemei (DV_A^W), $(\overline{v}^*,\overline{v},\overline{u})$ este o soluţie eficientă a Problemei (DV_A^M) şi $f(\overline{u})+h(A\overline{u})=h_A^W(\overline{v}^*,\overline{y}^*,\overline{v},\overline{u},0)=h_A^M(\overline{v}^*,\overline{v},\overline{u})$.

Observaţia 2.1.31 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *În cazul în care $V = \mathbb{R}$ şi $K = \mathbb{R}_+$, luând funcţiile $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ proprii, redescoperim dualitatea Wolfe şi Mond-Weir pentru problema de optimizare scalară corespunzătoare dată de R.I. Boţ şi S.-M. Grad în [21].*

Revenind la (PV_C), şi văzându-o ca o problemă de optimizare vectorială fără restricţii, îi ataşăm două duale vectoriale generate de (DVG^W) şi (DVG^M) prin considerarea funcţiei perturbatoare vectoriale Fenchel $\Phi^V_{C_F} : X \times Y \to V^\bullet$ dată prin

$$\Phi^V_{C_F}(x,y) = \begin{cases} f(x+y), & x \in \mathcal{A}, \\ \infty_K, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Prima duală obţinută este *duala vectorială Fenchel de tip Wolfe*

$$(DV^W_{C_F}) \qquad \underset{(v^*,y^*,v,u,y)\in\mathcal{B}^W_{C_F}}{\operatorname{Max}} h^W_{C_F}(v^*,y^*,v,u,y)$$

unde

$$\mathcal{B}^W_{C_F} = \{(v^*,y^*,v,u,y) \in K^{*0} \times Y^* \times V \times X \times X : \langle v^*, v\rangle \leq \langle y^*, u\rangle - (v^*f)^*(y^*), y^* \in \partial(v^*f)(u+y) \cap (-N_{\mathcal{A}}(u))\}$$

şi

$$h^W_{C_F}(v^*,y^*,v,u,y) = v;$$

şi a doua duală obţinută este *duala vectorială Fenchel de tip Mond-Weir*

$$(DV^M_{C_F}) \qquad \underset{(v^*,v,u)\in\mathcal{B}^M_{C_F}}{\operatorname{Max}} h^M_{C_F}(v^*,v,u)$$

unde

$$\mathcal{B}^M_{C_F} = \{(v^*,v,u) \in K^{*0} \times V \times X : \langle v^*, v\rangle \leq (v^*f)(u), 0 \in \partial(v^*f)(u) + N_{\mathcal{A}}(u)\}$$

şi

$$h^M_{C_F}(v^*,v,u) = v.$$

Observaţia 2.1.32 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *În definiţia dualei vectoriale Fenchel de tip Mond-Weir $(DV^M_{C_F})$, condiţia $g(u) \in -C$ nu mai apare explicit. Prin urmare nu mai putem considera o altă duală vectorială de tip "M-W" ataşată Problemei (PV_C).*

Din Lema 2.1.2 obţinem următoarea afirmaţie.

Proposition 2.1.33 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Avem $h^M_{C_F}(\mathcal{B}^M_{C_F}) \subseteq h^W_{C_F}(\mathcal{B}^W_{C_F})$.*

Condiţiile de regularitate (RCV^i), $i = 1, ..., 4$ pot fi formulate şi în acest caz şi apoi din cazul general obţinem teoremele de dualitate slabă şi tare.

2.1.3 Comparaţii între duale

În ceea ce urmează comparăm imaginile mulţimilor unor duale vectoriale de tip Wolfe şi Mond-Weir ataşate Problemei (PV_C) în raport cu funcţiile perturbatoare vectoriale Lagrange, Fenchel şi Fenchel-Lagrange.

Teorema 2.1.37 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Avem* $h^M_{C_{FL}}(\mathcal{B}^M_{C_{FL}}) \subseteq h^M_{C_L}(\mathcal{B}^M_{C_L})$ *şi* $h^M_{C_{FL}}(\mathcal{B}^M_{C_{FL}}) \subseteq h^M_{C_F}(\mathcal{B}^M_{C_F})$.

În ceea ce priveşte dualele vectoriale de tip "M-W" se poate demonstra următorul rezultat.

Teorema 2.1.38 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Avem* $h^{MW}_{C_{FL}}(\mathcal{B}^{MW}_{C_{FL}}) \subseteq h^{MW}_{C_L}(\mathcal{B}^{MW}_{C_L})$.

Oricum, întrebarea dacă afirmaţii similare sunt adevărate şi pentru dualele vectoriale de tip Wolfe ataşate Problemei (PV_C), ca şi în cazul scalar (a se vedea R.I. Boţ şi S.-M. Grad [21]), are un răspuns negativ, aşa cum arată următoarele exemple.

Exemplul 2.1.39 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Fie* $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}_+$, $K = \mathbb{R}^2_+$, $S = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^2)^\bullet$ *şi* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definite prin*

$$f(x) = \begin{cases} (1,1)^T x, & \text{dacă } x > 0, \\ \infty_{\mathbb{R}^2_+}, & \text{altfel,} \end{cases} \quad \text{şi} \quad g(x) = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x \leq 0, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Observăm că pentru toţi $v^* = (v^*_1, v^*_2)^T \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^2_+)$ *şi* $y^* \geq 0$ *avem*

$$\partial((v^* f) + (y^* g) + \delta_S)(u) = \partial(v^* f)(u) = \begin{cases} \{v^*_1 + v^*_2\}, & \text{dacă } u > 0, \\ \emptyset, & \text{altfel.} \end{cases}$$

În consecinţă, $\mathcal{B}^W_{C_L} = \emptyset$. *Pe de altă parte se poate arăta că* $((1/2, 1/2)^T, 1, 1, (0,0)^T, 0, 1) \in \mathcal{B}^W_{C_{FL}}$, *deci* $(0,0)^T \in h^W_{C_{FL}}(\mathcal{B}^W_{C_{FL}})$. *În consecinţă,* $h^W_{C_{FL}}(\mathcal{B}^W_{C_{FL}}) \not\subseteq h^W_{C_L}(\mathcal{B}^W_{C_L})$.

Exemplul 2.1.40 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Fie* $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}_+$, $K = \mathbb{R}^2_+$,

$$S = \left\{ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 2, \begin{array}{ll} 3 \leq x_2 \leq 4, & \text{dacă } x_1 = 0 \\ 1 \leq x_2 \leq 4, & \text{dacă} x_1 \in (0, 2] \end{array} \right\},$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^\bullet, \ f(x_1, x_2) = \begin{cases} (1,1)^T x_2, & \text{dacă } x_1 \leq 0, \\ \infty_{\mathbb{R}^2_+}, & \text{altfel,} \end{cases}$$

şi $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = 0$.

Avem că $((1/2, 1/2)^T, y^*, (3,3)^T, (0,3)) \in \mathcal{B}^W_{C_L}$ *şi* $(3,3)^T \in h^W_{C_L}(\mathcal{B}^W_{C_L})$, *dar* $(3,3)^T \notin h^W_{C_{FL}}(\mathcal{B}^W_{C_{FL}})$. *În consecinţă,* $h^W_{C_L}(\mathcal{B}^W_{C_L}) \not\subseteq h^W_{C_{FL}}(\mathcal{B}^W_{C_{FL}})$.

Observaţia 2.1.43 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [66]*) *Din exemplele date mai sus se pot construi alte situaţii în care să se demonstreze că în general nici o incluziune nu are loc între imaginile mulţimilor* $(DV^W_{C_L})$ *şi* $(DV^W_{C_F})$.

2.2 Dualitate vectorială de tip Wolfe şi Mond-Weir în raport cu soluţiile slab eficiente

2.2.1 Rezultate generale de dualitate

Aici introducem duale vectoriale de tip Wolfe şi Mond-Weir şi stabilim rezultate de dualitate între problema de optimizare vectorială în raport cu soluţiile slab eficiente şi aceste duale.

2.2.2 Rezultate de dualitate pentru clase particulare de probleme

Particularizăm problema de optimizare vectorială în raport cu soluţiile slab eficiente să fie cu restricţii şi fără restricţii şi construim noi duale vectoriale de tip Wolfe şi Mond-Weir şi formulăm rezultate de dualitate.

Capitolul 3

Dualitate vectorială în raport cu quasi-minimalitatea

3.1 Probleme de optimizare vectorială în raport cu quasi-minimalitatea

Definim şi caracterizăm elementele quasi-minimale ale unei mulţimi în raport cu un con convex. Apoi ataşăm unei probleme de optimizare vectorială duala sa vectorială în raport cu soluţiile quasi-eficiente şi stabilim noi rezultate de dualitate. Considerând cazuri particulare ale problemei de optimizare vectorială construim duale vectoriale ataşate acesteia în raport cu soluţiile quasi-eficiente dăm rezultate de dualitate slabă, tare şi reciprocă.

O parte din rezultate au fost obţinute de autor în colaborări cu dr. S.-M. Grad şi se găsesc în [68].

Câteva noţiuni prelimiare legate de quasi interiorul unui con urmează (a se vedea, spre exemplu [12, 16–18, 25]). Fie X un spaţiu local convex separat.

Observaţia 3.1.2 *Fie $K \subseteq X$ un con convex.*

(*a*) *Dacă K este şi cu vârf, atunci $0 \notin \operatorname{qi} K$.*

(*b*) *Avem $\operatorname{qi} K + K = \operatorname{qi} K$.*

(*c*) *Mulţimea $\operatorname{qi} K \cup \{0\}$ este un con.*

(*d*) *Dacă K este şi închis, atunci $\operatorname{qi} K^* = \{x^* \in K^* : \langle x^*, x\rangle > 0 \ \forall x \in K \setminus \{0\}\}$, acest con se notează cu K^{*0} şi poartă numele de quasi interiorul conului dual a lui K.*

Fie $K \subseteq X$ un con convex. Când $\operatorname{qi} K \neq \emptyset$ notăm $x <_K y$ dacă $y - x \in \operatorname{qi} K$, extinzând notaţia obişnuită considerată în literatură pentru cazul $\operatorname{int} K \neq \emptyset$.

Definiţia 3.1.3 *Fie spaţiul X parţial ordonat de conul convex K, o mulţime nevidă*

$U \subseteq X$ şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie dată. Dacă f este $K-$crescătoare pe U, $\operatorname{qi} K \neq \emptyset$ şi pentru toţi $x, y \in U$ îndeplinind $x <_K y$ urmează $f(x) < f(y)$ funcţia f se numeşte strict $K-$crescătoare pe U.

Observaţia 3.1.4 *În Definiţia 3.1.3 extindem noţiunea de strict $K-$crescătoare pe U funcţiilor date în literatură pentru cazul $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ (sau $\operatorname{core} K \neq \emptyset$).*

Ilustrăm această definiţie în următorul exemplu (a se vedea [25]).

Exemplul 3.1.5 *Fie $x^* \in X^*$. Dacă $x^* \in K^*$, atunci pentru toţi $x_1, x_2 \in X$ astfel încât $x_1 \leqq_K x_2$ avem că $\langle x^*, x_2 - x_1 \rangle \geq 0$. Prin urmare $\langle x^*, x_1 \rangle \leq \langle x^*, x_2 \rangle$ şi asta înseamna că elementele lui K^* sunt funcţii $K-$crescătoare pe X.*

Dacă $x^* \in K^{*0}$, atunci pentru toţi $x_1, x_2 \in X$ astfel încât $x_1 \leq_K x_2$ are loc $\langle x^*, x_2 - x_1 \rangle > 0$. Aceasta înseamnă prin definiţie că elementele lui K^{*0} sunt funcţii $K-$crescătoare pe X.

Dacă $K \subseteq X$ este un con convex închis, $\operatorname{qi} K \neq \emptyset$, atunci din Observaţia 3.1.2 (d) $\operatorname{qi} K = \{x \in X : \langle x^*, x \rangle > 0 \ \forall x^* \in K^* \setminus \{0\}\}$ şi pentru toţi $x^* \in K^* \setminus \{0\}$ este strict $K-$crescătoare pe X.

3.1.1 Elemente quasi-minimale

Introducem şi caracterizăm soluţiile quasi-minimale ale unei mulţimi.

Fie V un spaţiu local convex separat parţial ordonat de conul convex cu vârf $K \subseteq V$ având quasi interiorul nevid şi $U \subseteq V$ o mulţime nevidă convexă.

Definiţia 3.1.6 *Un element $\overline{x} \in U$ se numeşte element quasi-minimal a lui U (în raport cu ordinea parţială indusă de K) dacă $(\overline{x} - \operatorname{qi} K) \cap U = \emptyset$.*

Observaţia 3.1.7 *Elemetele quasi-minimale au fost considerate în lucrări ca [65, 71, 128], fiind numite elemente slab-quasi minimale. Am optat pentru denumirea folosită în Definiţia 3.1.6, chiar dacă este folistă în literatură pentru alte tipuri de soluţii minimale (a se vedea, spre exemplu [86]). Pentru condiţia $U + \operatorname{qi} K = \operatorname{qi}(U + K)$ îndeplinită, credem că elementele quasi-minimale ar trebui numite chiar slab minimale. Observăm de asemenea că în lucrările [5, 6, 71] se pot găsi şi elemente quasi-relativ minimale.*

Notăm prin $\operatorname{QMin}(U, K)$ mulţimea tuturor elementelor quasi-minimale ale mulţimii U (în raport cu ordinea parţială indusă de K).

Un element $\overline{x} \in U$ se numeşte *element minimal* al lui U (în raport cu ordinea parţială indusă de K) dacă nu există $x \in U$ care să satisfacă $x \leq_K \overline{x}$.

Relaţia $(\overline{x} - \operatorname{qi} K) \cap U = \emptyset$ din Definiţia 3.1.6 poate fi scrisă echivalent ca $(U - \overline{x}) \cap (-\operatorname{qi} K) = \emptyset$. Dacă avem conul K netrivial atunci pentru conul de ordine $\widehat{K} = \operatorname{qi} K \cup \{0\}$ avem că $\overline{x} \in \operatorname{QMin}(U, K)$ dacă şi numai dacă $(\overline{x} - \widehat{K}) \cap U = \{\overline{x}\}$.

Dacă $K \neq V$, orice element minimal al lui U este şi quasi-minimal deoarece $(\overline{x} - K) \cap U = \{\overline{x}\}$ implică din Observaţia 3.1.2 (a) că $(\overline{x} - \operatorname{qi} K) \cap U = \emptyset$. Dacă $K = V$ atunci $\operatorname{QMin}(U, K) = \emptyset$.

În cazul în care core $K \neq \emptyset$ (sau int $K \neq \emptyset$) următoarele investigaţii dau rezultatele din [25, Secţiunea 2.4.2, Secţiunea 2.4.4 şi Secţiunea 4.3.4], deci ele pot fi văzute ca şi generalizări de mai târziu.

Lema 3.1.8 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Are loc* $\mathrm{QMin}(U, K) \subseteq \mathrm{QMin}(U + K, K)$.

Observaţia 3.1.9 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *În Definiţia 3.1.6 şi Lema 3.1.8 nu este necesar să presupunem că* U *este convex.*

Propoziţia 3.1.10 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Avem că* $\mathrm{qi}(U + \mathrm{qi}\, K) = U + \mathrm{qi}\, K \subseteq \mathrm{qi}(U + K)$.

În ceea ce urmează presupunem că are loc $U + \mathrm{qi}\, K = \mathrm{qi}(U + K)$ şi păstrăm această ipoteză suplimentară adaptându-o corespunzător.

Mai mult, formulăm caracterizări necesare şi suficiente ale elementelor quasi-minimale ale mulţimii U în raport cu K.

Teorema 3.1.11 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Dacă* $\overline{x} \in \mathrm{QMin}(U, K)$ *atunci există* $x^* \in K^* \setminus \{0\}$ *astfel încât* $\langle x^*, \overline{x}\rangle \leq \langle x^*, x\rangle$, *pentru toţi* $x \in U$.

Lema 3.1.12 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Fie o funcţie* $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *strict* $K-$*crescătoare pe* U. *Dacă există un element* $\overline{x} \in U$ *satisfăcând* $f(\overline{x}) \leq f(x)$ *pentru toţi* $x \in U$, *atunci* $\overline{x} \in \mathrm{QMin}(U, K)$.

Mai mult fie K şi închis. Următoarea teoremă este o concluzie directă a Lemei 3.1.12 şi Exemplului 3.1.5.

Teorema 3.1.13 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Dacă există* $x^* \in K^* \setminus \{0\}$ *şi* $\overline{x} \in U$ *astfel încât pentru toţi* $x \in U$ *are loc* $\langle x^*, \overline{x}\rangle \leq \langle x^*, x\rangle$, *atunci* $\overline{x} \in \mathrm{QMin}(U, K)$.

Din Teorema 3.1.11 şi Teorema 3.1.13 obţinem o caracterizare echivalentă în raport cu scalarizarea liniară pentru elementele quasi-minimale ale lui U în raport cu K.

Corolar 3.1.14 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Fie* $x \in U$. *Atunci* $\overline{x} \in \mathrm{QMin}(U, K)$ *dacă şi numai dacă există* $x^* \in K^* \setminus \{0\}$ *satisfăcând* $\langle x^*, \overline{x}\rangle \leq \langle x^*, x\rangle$ *pentru toţi* $x \in U$.

3.1.2 Rezultate generale de dualitate

Aici introducem o duală vectorială în raport cu soluţiile quasi-eficiente ataşate unei probleme de optimizare vectorială şi stabilim rezultate de dualitate slabă, tare şi reciprocă.

Considerăm problema de optimizare vectorială

$$(PVG_q) \qquad \underset{x \in X}{\mathrm{QMin}}\, F(x),$$

unde $F : X \to V^\bullet$ este o funcţie proprie şi $K-$convexă cu $\mathrm{dom}\, F = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$ şi determinăm elementele quasi-minimale ale lui $F(\mathrm{dom}\, F)$ în raport cu K. De asemenea, presupunem că $F(\operatorname{dom} F) + \operatorname{qi} K = \operatorname{qi}(F(\operatorname{dom} F) + K)$ şi K un con convex închis.

Definiţia 3.1.5 *Un element $\overline{x} \in X$ se numeşte soluţie quasi-eficientă a problemei de optimizare vectorială (PVG_q) dacă $\overline{x} \in \operatorname{dom} F$ şi $F(\overline{x}) \in \operatorname{QMin}(F(\operatorname{dom} F), K)$.*

Problemele pentru care soluţiile quasi-eficiente ale problemei de optimizare vectorială pot să aibă un rol important pot fi găsite, de exemplu în matematici financiare (a se vedea [1,63]).

Folosind funcţia perturbatoare vectorială $\Phi : X \times Y \to V^\bullet$ care satisface $0 \in \operatorname{Pr}_Y(\operatorname{dom} \Phi)$ şi $\Phi(x, 0) = F(x)$ pentru toţi $x \in X$, problema de optimizare vectorială introdusă mai sus se poate reformula echivalent astfel

$$(PVG_q) \qquad \operatorname*{QMin}_{x \in X} \Phi(x, 0).$$

Problemei (PVG_q) îi ataşăm următoarea duală vectorială în raport cu soluţiile quasi-eficiente

$$(DVG_q) \qquad \operatorname*{QMax}_{(v^*, y^*, v) \in \mathcal{B}_q^G} h_q^G(v^*, y^*, v)$$

unde

$$\mathcal{B}_q^G \quad = \quad \{(v^*, y^*, v) \in (K^* \setminus \{0\}) \times Y^* \times V : \langle v^*, v \rangle \leq -(v^*\Phi)^*(0, -y^*)\}$$

şi

$$h_q^G(v^*, y^*, v) = v.$$

Definiţia 3.1.16 *Un element $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}) \in \mathcal{B}_q^G$ se numeşte soluţie quasi-efficientă a dualei vectoriale (DVG_q) dacă $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}) \in \operatorname{dom} h_q^G$ şi $h_q^G(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}) = \overline{v} \in \operatorname{QMax}(h_q^G(\operatorname{dom} h_q^G), K)$.*

În continuare formulăm teoremele de dualitate slabă şi tare.

Teorema 3.1.17 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Nu există $x \in X$ şi $(v^*, y^*, v) \in \mathcal{B}_q^G$ astfel încât $F(x) <_K h_q^G(v^*, y^*, v)$.*

Observaţia 3.1.18 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *F nu trebuie să fie $K-$convexă şi K închisă pentru a putea formula rezultatul de dualitate slabă.*

Pentu dualitatea tare considerăm următoarele condiţii de regularitate (după [25])

(RCV^1) | $\exists x' \in X$ astfel încât $(x', 0) \in \operatorname{dom} \Phi$ şi $\Phi(x', \cdot)$ este continuă 0;

când X şi Y sunt spaţii Fréchet

(RCV^2) | X şi Y sunt spaţii Fréchet, Φ este $K-$inferior semicontinuă şi $0 \in \operatorname{sqri}(\operatorname{Pr}_Y(\operatorname{dom} \Phi))$;

cazul finit dimensional

$$(RCV^3) \quad \Big| \quad \dim(\mathrm{lin}(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}\,\Phi))) < +\infty \text{ şi } 0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}\,\Phi));$$

(RCV^4) | Φ este $K-$inferior semicontinuă şi $\mathrm{Pr}_{X^* \times \mathbb{R}}(\mathrm{epi}(v^*\Phi)^*)$ este închisă în topologia $w(X^*, X) \times \mathbb{R}$ pentru toţi $v^* \in K^* \setminus \{0\}$.

Teorema 3.1.19 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Presupunem că una dintre condiţiile de regularitate* (RCV^i), $i \in \{1, \ldots, 4\}$, *este îndeplinită. Dacă* $\overline{x} \in X$ *este o soluţie quasi-eficientă a Problemei* (PVG_q), *atunci există* $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v})$ *o soluţie quasi-eficientă a Problemei* (DVG_q) *astfel încât* $F(\overline{x}) = h_q^G(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}) = \overline{v}$.

Observaţia 3.1.20 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *În locul condiţiilor de regularitate menţionate mai sus, pentru a obţine dualitatea tare este suficient să presupunem că pentru toţi* $\overline{v}^* \in K^* \setminus \{0\}$ *problema de optimizare scalară* $\inf_{x \in X}(\overline{v}^*\Phi)(x, 0)$ *este stabilă.*

În continuare, dăm un rezultat preliminar pentru dualitatea reciprocă, urmat de afirmaţia în sine.

Teorema 3.1.21 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Presupunem că una dintre condiţiile de regularitate* (RCV^i), $i \in \{1, \ldots, 4\}$, *este îndeplinită. Atunci* $V \setminus \mathrm{cl}(F(\mathrm{dom}\,F) + K) \subseteq \mathrm{core}(h_q^G(\mathcal{B}_q^G))$.

Teorema 3.1.22 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Presupunem că una dintre condiţiile de regularitate* (RCV^i), $i \in \{1, \ldots, 4\}$, *este îndeplinită şi că mulţimea* $F(\mathrm{dom}\,F) + K$ *este închisă. Atunci pentru toate soluţiile quasi-eficiente* $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v})$ *ale Problemei* (DVG_q) *avem că* $\overline{v}$ *este un element quasi-minimal al mulţimii* $F(\mathrm{dom}\,F) + K$.

Observaţia 3.1.23 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *În Teorema 3.1.21 şi Teorema 3.1.22, condiţiile de regularitate* (RCV^i), $i \in \{1, \ldots, 4\}$, *pot să fie înlocuite cu afirmaţia mai slabă că pentru toţi* $\overline{v}^* \in K^* \setminus \{0\}$ *Problema* $\inf_{x \in X}\langle \overline{v}^*, F(x) \rangle$ *este normală (a se vedea [25, Theorem 4.3.3]).*

3.1.3 Rezultate de dualitate pentru clase particulare de probleme

În ceea ce urmează considerăm probleme de optimizare vectorială cu restricţii şi fără restricţii ca şi cazuri speciale ale problemei de optimizare vectorială şi deducem pentru ele duale vectoriale în raport cu soluţiile quasi-eficiente, urmate de afirmaţii de dualitate slabă, tare şi reciprocă.

Probleme de optimizare vectorială cu restricţii

Considerăm acelaşi cadru ca şi în secţiunea anterioară. Fie de asemenea Y parţial ordonat în raport cu, conul convex nevid $C \subseteq Y$. Mai mult, considerăm mulţimea

$S \subseteq X$ convexă nevidă, funcţia $f : X \to V^\bullet$ proprie şi K-convexă şi funcţia $g : X \to Y^\bullet$ proprie şi $C-$convexă satisfăcând $\operatorname{dom} f \cap S \cap g^{-1}(C) \neq \emptyset$. Presupunem că $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + \operatorname{qi} K = \operatorname{qi}(f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + K)$ şi K un con convex închis. Problema de optimizare vectorială cu restricţii de tip geometric şi con pe care o folosim este

$$(PV_q^C) \qquad \underset{x \in \mathcal{A}}{\operatorname{QMin}} f(x),$$

unde

$$\mathcal{A} = \big\{x \in S : g(x) \in -C\big\},$$

fiind un caz special al Problemei (PVG_q). Construim diferite duale vectoriale ataşate Problemei (PV_q^C) în raport cu soluţiile quasi-eficiente prin considerarea diferitelor funcţii perturbatoare vectoriale şi dăm rezultate de dualitate slabă, tare şi reciprocă.

Prima dată considerăm funcţia perturbatoare vectorială Lagrange $\Phi_{C_L}^V$ introdusă în Capitolul 2 şi din (DVG_q) obţinem *duala vectorială Lagrange* ataşată Problemei (PV_q^C) în raport cu soluţiile quasi-eficiente

$$(DV_q^{C_L}) \qquad \underset{(v^*,y^*,v) \in \mathcal{B}_q^{C_L}}{\operatorname{QMax}} h_q^{C_L}(v^*, y^*, v),$$

unde

$$\mathcal{B}_q^{C_L} = \left\{(v^*, y^*, v) \in (K^* \setminus \{0\}) \times C^* \times V : \ \langle v^*, v\rangle \leq \inf_{u \in S}\{(v^* f)(u) + (y^* g)(u)\}\right\}$$

şi

$$h_q^{C_L}(v^*, y^*, v) = v.$$

Pentru dualitatea tare avem nevoie de condiţii de regularitate obţinute prin particularizarea celor (RCV^i), $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Acestea devin $(RCV_{C_L}^i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, de exemplu $(RCV_{C_L}^1)$ este

$$(RCV_{C_L}^1) \quad \Big| \quad \exists x' \in \operatorname{dom} f \cap S \text{ astfel încât } g(x') \in -\operatorname{int} C.$$

Teoremele de dualitate slabă, tare şi reciprocă urmează.

Teorema 3.1.24 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*)

(a) *Nu există $x \in X$ şi $(v^*, y^*, v) \in \mathcal{B}_q^{C_L}$ astfel încât $f(x) <_K h_q^{C_L}(v^*, y^*, v)$.*

(b) *Presupunem că una dintre condiţiile de regularitate $(RCV_{C_L}^i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, este îndeplinită. Dacă $\overline{x} \in X$ este o soluţie quasi-eficientă a Problemei (PV_q^C), atunci există $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v})$ o soluţie quasi-eficientă a Problemei $(DV_q^{C_L})$ astfel încât $f(\overline{x}) = h_q^{C_L}(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v}) = \overline{v}$.*

(c) *Presupunem că una dintre condiţiile de regularitate $(RCV_{C_L}^i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, este îndeplinită şi că mulţimea $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + K$ este închisă. Atunci pentru orice soluţie quasi-eficientă $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{v})$ a Problemei $(DVG_q^{C_L})$ avem că $\overline{v}$ este un element quasi-minimal al mulţimii $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + K$.*

O altă funcţie perturbatoare vectorială pe care o considerăm este funcţia perturbatoare vectorială Fenchel-Lagrange Φ_{FL}^V dată în Capitolul 2 şi din (DVG_q) obţinem *duala vectorială Fenchel-Lagrange* ataşată Problemei (PV_q^C) în raport cu soluţiile quasi-eficiente

$$(DV_q^{C_{FL}}) \qquad \underset{(v^*,t^*,y^*,v)\in\mathcal{B}_q^{C_{FL}}}{\text{QMax}} h_q^{C_{FL}}(v^*,t^*,y^*,v),$$

unde

$$\mathcal{B}_q^{C_{FL}} = \{(v^*,t^*,y^*,v) \in (K^* \setminus \{0\}) \times X^* \times C^* \times V : \langle v^*, v\rangle \leq -(v^*f)^*(t^*) - (y^*g)_S^*(-t^*)\}$$

şi

$$h_q^{C_{FL}}(v^*,t^*,y^*,v) = v.$$

Particularizând (RCV^i), $i \in \{1,2,3,4\}$ la acest caz, obţinem $(RCV_{C_{FL}}^i)$, $i \in \{1,2,3,4\}$, unde spre exemplu $(RCV_{C_{FL}}^1)$ este

$$(RCV_{C_{FL}}^1) \ \big| \ \exists x' \in \operatorname{dom} f \cap S \text{ astfel încât } f \text{ este continuă în } x' \text{ şi } g(x') \in -\operatorname{int} C.$$

Rezultatele de dualitate slabă, tare şi reciprocă urmează din cazul general.

Teorema 3.1.25 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*)

(*a*) *Nu există* $x \in X$ *şi* $(v^*,t^*,y^*,v) \in \mathcal{B}_q^{C_{FL}}$ *astfel încât* $f(x) <_K h_q^{C_{FL}}(v^*,t^*,y^*,v)$.

(*b*) *Presupunem că una dintre condiţiile de regularitate* $(RCV_{C_{FL}}^i)$, $i \in \{1,\dots,4\}$, *este îndeplinită. Dacă* $\overline{x} \in X$ *este o soluţie quasi-eficientă a Problemei* (PV_q^C), *atunci există* $(\overline{v}^*,\overline{t}^*,\overline{y}^*,\overline{v})$ *o soluţie quasi-eficientă a Problemei* $(DV_q^{C_{FL}})$ *astfel încât* $f(\overline{x}) = h_q^{C_{FL}}(\overline{v}^*,\overline{t}^*,\overline{y}^*,\overline{v}) = \overline{v}$.

(*c*) *Presupunem că una dintre condiţiile de regularitate* $(RCV_{C_{FL}}^i)$, $i \in \{1,\dots,4\}$, *este îndeplinită şi că mulţimea* $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + K$ *este închisă. Atunci pentru toate soluţiile quasi-eficiente* $(\overline{v}^*,\overline{t}^*,\overline{y}^*,\overline{v})$ *ale Problemei* $(DVG_q^{C_{FL}})$ *avem că* $\overline{v}$ *este un element quasi-minimal al mulţimii* $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + K$.

Probleme de optimizare vectorială fără restricţii

În acelaşi cadru, considerăm funcţiile vectoriale $f : X \to V^\bullet$ şi $h : Y \to V^\bullet$ proprii şi K-convexe şi $A : X \to Y$ un operator liniar şi continuu astfel încât $\operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} h) \neq \emptyset$. Presupunem din nou că $\operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} h) + \operatorname{qi} K = \operatorname{qi}(\operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} h) + K)$ şi K un con convex închis. Problema de optimizare vectorială fără restricţii

$$(PV_q^A) \qquad \underset{x\in X}{\text{QMin}}[f(x) + h(Ax)]$$

este un caz special al Problemei (PVG_q) unde $F = f + h \circ A$.

Considerăm funcţia perturbatoare vectorială $\Phi_q^A : X \times Y \to V^\bullet$ definită prin $\Phi_q^A(x,y) = f(x) + h(Ax+y)$. Folosind această funcţie perturbatoare obţinem duala vectorială ataşată Problemei (PV_q^A) dată prin

$$(DV_q^A) \qquad \operatorname*{QMax}_{(v^*,y^*,v)\in\mathcal{B}_q^A} h_q^A(v^*,y^*,v)$$

unde

$$\mathcal{B}_q^A = \{(v^*,y^*,v) \in (K^* \setminus \{0\}) \times Y^* \times V : \langle v^*, v\rangle \le -(v^*f)^*(-A^*y^*) + (v^*h)^*(y^*)\}$$

şi

$$h_q^A(v^*,y^*,v) = v.$$

Pentru problema de optimizare vectorială (PV_q^A) şi duala vectorială (DV_q^A) avem dualitate slabă, tare şi reciprocă, obţinute din cazul general. Pentru a garanta dualitatea tare folosim condiţiile de regularitate obţinute din (RCV^i), $i \in \{1,2,3,4\}$. Spre exemplu (RCV_A^1) este

$$(RCV_A^1) \quad \Big| \quad \exists x' \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} h) \text{ astfel încât } h \text{ este continuă în } Ax'.$$

Teorema 3.1.26 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*)

(*a*) *Nu există* $x \in X$ *şi* $(v^*,y^*,v) \in \mathcal{B}_q^A$ *astfel încât* $f(x)+h(Ax) <_K h_q^A(v^*,y^*,v)$.

(*b*) *Presupunem că una dintre condiţiile de regularitate* (RCV_A^i), $i \in \{1,\dots,4\}$, *este îndeplinită. Dacă* $\overline{x} \in X$ *este o soluţie quasi-eficientă a Problemei* (PV_q^A), *atunci există* $(\overline{v}^*,\overline{y}^*,\overline{v})$ *o soluţie quasi-eficientă a Problemei* (DV_q^A) *astfel încât* $f(\overline{x})+h(A\overline{x}) = h_q^A(\overline{v}^*,\overline{y}^*,\overline{v}) = \overline{v}$.

(*c*) *Presupunem că una dintre condiţiile de regularitate* (RCV_A^i), $i \in \{1,\dots,4\}$, *este îndeplinită şi că mulţimea* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} h) + K$ *este închisă. Atunci pentru toate soluţiile quasi-eficiente* $(\overline{v}^*,\overline{y}^*,\overline{v})$ *ale Problemei* (DVG_q^A) *avem că* $\overline{v}$ *este un element quasi-minimal al mulţimii* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} h) + K$.

Întorcându-ne la (PV_q^C) şi privindu-o ca o problemă de optimizare vectorială fără restricţii îi ataşăm problema vectorială duală generată de (DVG_q) prin considerarea funcţiei perturbatoare vectoriale Fenchel $\Phi_{C_F}^V$ dată în Capitolul 2. Presupunem din nou că $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + \operatorname{qi} K = \operatorname{qi}(f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + K)$ şi K este un con convex închis.

Prin urmare din (DVG_q) obţinem *duala vectorială Fenchel* ataşată Problemei (PV_q^C) în raport cu soluţiile quasi-eficiente

$$(DV_q^{C_F}) \qquad \operatorname*{QMax}_{(v^*,t^*,v)\in\mathcal{B}_q^{C_F}} h_q^{C_F}(v^*,t^*,v),$$

unde

$$\mathcal{B}_q^{C_F} = \{(v^*,t^*,v) \in (K^* \setminus \{0\}) \times X^* \times V : \ \langle v^*, v\rangle \le -(v^*f)^*(t^*) - \sigma_{\mathcal{A}}(-t^*)\}$$

şi

$$h_q^{C_F}(v^*, t^*, v) = v.$$

Ca şi în Teorema 3.1.26 putem obţine teoremele de dualitate slabă, tare şi reciprocă pentru problemele (PV_q^C) şi $(DV_q^{C_F})$.

3.1.4 Comparaţii între duale

În această secţiune comparăm imaginile mulţimilor dualelor vectoriale ataşate Problemei (PV_q^C) în raport cu funcţiile perturbatoare vectoriale Lagrange, Fenchel şi Fenchel-Lagrange.

Propoziţia 3.1.28 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Avem* $h_q^{C_{FL}}(\mathcal{B}_q^{C_{FL}}) \subseteq h_q^{C_L}(\mathcal{B}_q^{C_L})$.

Observaţia 3.1.28 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *O situaţie când incluziunile din Propoziţia 3.1.28 nu sunt îndeplinite ca şi egalitate poate fi găsită în [28, Exemplul 2.2].*

Propoziţia 3.1.30 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Avem* $h_q^{C_{FL}}(\mathcal{B}_q^{C_{FL}}) \subseteq h_q^{C_F}(\mathcal{B}_q^{C_F})$.

Observaţia 3.1.31 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *O situaţie când incluziunile din Propoziţia 3.1.31 nu sunt îndeplinite ca şi egalitate poate fi găsită în [28, Exemplul 2.1].*

În anumite ipoteze, imaginile mulţimilor dualelor vectoriale ataşate Problemei (PV_q^C) anterior coincid.

Teorema 3.1.32 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Dacă una dintre condiţiile*

(*a*) *există* $x' \in \operatorname{dom} f \cap S \cap \operatorname{dom} g$ *astfel încât* f *este continuă în* x';

(*b*) *pentru* X *şi* Z *spaţii Fréchet,* S *închisă şi* g $C-$*epi închisă avem* $0 \in \operatorname{sqri}((\operatorname{dom} g \cap S) - \operatorname{dom} f)$;

(*c*) *dacă* $\operatorname{lin}((\operatorname{dom} g \cap S) - \operatorname{dom} f) < +\infty$ *avem* $0 \in \operatorname{ri}((\operatorname{dom} g \cap S) - \operatorname{dom} f)$;

este îndeplinită, atunci $h_q^{C_{FL}}(\mathcal{B}_q^{C_{FL}}) = h_q^{C_L}(\mathcal{B}_q^{C_L})$.

Teorema 3.1.33 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Dacă una dintre condiţiile*

(*a*) *există* $x' \in \operatorname{dom} f \cap S \cap \operatorname{dom} g$ *astfel încât* $g(x') \in -\operatorname{int} C$;

(*b*) *pentru* X *şi* Z *spaţii Fréchet,* S *închisă şi* g $C-$*epi închisă avem* $0 \in \operatorname{sqri}(g(\operatorname{dom} g \cap S) + C)$;

(*c*) *dacă* $\operatorname{lin}(g(\operatorname{dom} g \cap S) + C) < +\infty$ *avem* $0 \in \operatorname{ri}(g(\operatorname{dom} g \cap S) + C)$;

este îndeplinită, atunci $h_q^{C_{FL}}(\mathcal{B}_q^{C_{FL}}) = h_q^{C_F}(\mathcal{B}_q^{C_F})$.

Pentru a garanta faptul că imaginile mulţimilor dualelor vectoriale ataşate Problemei (PV_q^C) în raport cu soluţiile quasi-eficiente coincid, putem combina ultimele două teoreme, sau din Propoziţia 3.1.28, Propoziţia 3.1.30 şi Teorema 3.1.25, putem formula următoarea concluzie.

Corolar 3.1.34 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [68]*) *Dacă una dintre condiţiile de regularitate* $(RCV^i_{C_{FL}})$, $i \in \{1, \ldots, 4\}$, *este îndeplinită, atunci*

$$h_q^{C_{FL}}(\mathcal{B}_q^{C_{FL}}) = h_q^{C_F}(\mathcal{B}_q^{C_F}) = h_q^{C_L}(\mathcal{B}_q^{C_L}).$$

Dacă în plus $f(\mathrm{dom}(f \cap \mathcal{A})) + K$ *este închisă, atunci avem*

$$\mathrm{QMin}(f(\mathrm{dom}\, f \cap \mathcal{A}), K) \subseteq \mathrm{QMax}(h_q^{C_{FL}}(\mathcal{B}_q^{C_{FL}}), K) = \mathrm{QMax}(h_q^{C_L}(\mathcal{B}_q^{C_L}), K)$$

$$= \mathrm{QMax}(h_q^{C_F}(\mathcal{B}_q^{C_F}), K) \subseteq \mathrm{QMin}(f(\mathrm{dom}\, f \cap \mathcal{A}) + K, K).$$

3.2 Câteva observaţii pentru problemele de optimizare vectială în raport cu relativ-minimalitatea

Din păcate, o teorie analogă cu cea din secţiunea precedentă nu se poate obţine şi în cazul quasi-relativ interiorului unui con K. Chiar şi în $\mathbb{R}^n$, unde $\mathrm{qri}\, K = \mathrm{ri}\, K$, avem doar unele din rezultatele similare celor date mai sus, dar nimic care să asigure existanţa rezultatelor de dualitate.

Capitolul 4

Condiţii de optim pentru probleme de optimizare vectorială

4.1 Condiţii de optim pentru probleme de optimiza re vectorială în sensul diferitelor scalarizări

În literatură sunt prezentate diverse metode de scalarizare ce folosesc funcţii liniare, norme şi alte construcţii (a se vedea, spre exemplu [28,35,55,58,72,78,83,87,88,95,115, 118, 121–123, 130, 132, 134]). Unei probleme de optimizare vectorială îi ataşăm duale vectoriale folosind diverse scalarizări (după [22, 25, 70, 83]). Funcţiile folosite sunt tare $K-$crescătoare sau strict $K-$crescătoare. Ele se numesc funcţii de scalarizare şi corespunzător avem mulţimea funcţiilor de scalarizare.

În acest capitol formulăm condiţii de optim pentru problema de optimizare vectorială cu restricţii de tip geometric şi con căreia i se asociază soluţii propriu eficiente şi dualele vectoriale construite folosind scalarizarea liniară, scalarizarea maxim($-$liniară), scalarizarea mulţime, scalarizarea (semi)normă şi scalarizarea distanţă cărora li se asociază soluţii eficiente sau slab eficiente (după [40, 94]) cărora li se ataşează soluţii eficiente sau slab eficiente. Majoritatea rezultatelor au fost obţinute de autor în colaborări cu dr. S.-M. Grad şi se găsesc în [67].

Fie X, Y şi V spaţii local convexe Hausdorff şi presupunem că Y este parţial ordonat de conul convex $C \subseteq Y$, în timp ce V este parţial ordonat de conul convex netrivial cu vârf $K \subseteq V$. Mai mult, fie $S \subseteq X$ o mulţime convexă nevidă, $f : X \to V^\bullet = V \cup \{+\infty_K\}$ o funcţi proprie şi $K-$convexă şi $g : X \to Y^\bullet = Y \cup \{+\infty_C\}$ o funcţie proprie şi $C-$convexă astfel încât $\operatorname{dom} f \cap S \cap g^{-1}(C) \neq \emptyset$. Problema de optimizare vectorială cu restricţii de tip geometric şi con pe care o folosim este

$$(PV_C) \qquad \underset{x \in \mathcal{A}}{\mathrm{Min}}\, f(x),$$

unde

$$\mathcal{A} = \big\{x \in S : g(x) \in -C\big\}.$$

Definiţia 4.1.1 *Fie X un spaţiu vectorial parţial ordonat de conul convex K şi $U \subseteq X$ o mulţime nevidă în raport cu ordinea parţială "$\leqq_K$" indusă de K. Un element $\overline{x} \in U$ se numeşte*

(a) element minimal al lui U (în raport cu ordinea parţială indusă de K) dacă nu există nici un $x \in U$ satisfăcând $x \leq_K \overline{x}$.

(b) element slab minimal al lui U (în raport cu ordinea parţială indusă de K) dacă $(\overline{x} - \operatorname{int} K) \cap U = \emptyset$.

Observaţia 4.1.2 Din Definiţia 4.1.1 (b) elementele slab minimale pot fi considerate şi în raport cu interiorul algebric (core) sau quasi-interiorul (qi) în locul interiorului (int), făcând doar înlocuirea corespunzătoare. Ipotezele fiecărei subsecţiuni vor stabili tipul de element slab minimal folosit (de exemplu atunci când $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ lucrăm exact cu Definiţia 4.1.1 (b)).

4.1.1 Scalarizarea generală

Scalarizarea generală foloseşte funcţii monotone de tip con (după [22, 25]). Fie $\mathcal{S}$ o mulţime arbitrară de funcţii proprii şi convexe $s : V \cup \{+\infty_K\} \to \overline{\mathbb{R}}$ îndeplinind $s(+\infty_K) = +\infty$, $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + K \subseteq \operatorname{dom} s$ şi mai mult s este tare $K-$crescătoare pe mulţimea $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + K$. Elementele mulţimii $\mathcal{S}$ se numesc *funcţii de scalarizare.*

Definiţia 4.1.3 *Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}$ se numeşte soluţie $\mathcal{S}-$propriu eficientă pentru Problema (PV_C) dacă $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ şi dacă există un $s \in \mathcal{S}$ astfel încât $s(f(\overline{x})) \leq s(f(x))$ pentru toţi $x \in \mathcal{A}$.*

În [25, Secţiune 4.4] sunt date afirmaţii pentru problema de optimizare vectorială cu restricţii de tip geometric şi con (PV_C) şi cea duală vectorială ataşată acesteia. Ne referim la dualitatea slabă şi tare şi la condiţiile de optim. Pentru dualitatea tare folosim spre exemplu următoarea condiţie de regularitate:

$$(RCV_{C_{FL}}) \quad \Big| \quad \exists x' \in \operatorname{dom} f \cap S \text{ astfel âincât } f \text{ este continuă în } x' \text{ şi } g(x') \in -\operatorname{int}(C).$$

Fie qi $K \neq \emptyset$, $\mathcal{T}$ o mulţime arbitrară de funcţii proprii şi convexe $s : V^\bullet \to \overline{\mathbb{R}}$ îndeplinind $s(+\infty_K) = +\infty$, $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + K \subseteq \operatorname{dom} s$ şi s este strict $K-$crescătoare pe mulţimea $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + K$.

Definiţia 4.1.7 *Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}$ se numeşte soluţie $\mathcal{T}-$propriu eficientă a Problemei (PV_C) dacă $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ şi dacă există un $s \in \mathcal{T}$ astfel încât $s(f(\overline{x})) \leq s(f(x))$ pentru toţi $x \in \mathcal{A}$.*

O duală vectorială a fost ataşată Problemei (PV_C) în raport cu mulţimea funcţilor de scalarizare $\mathcal{T}$ înlocuind $\mathcal{S}$ cu $\mathcal{T}$ în definiţia dualei vectoriale dată în raport cu mulţimea funcţiilor de scalarizare $\mathcal{S}$ şi au fost obţinute rezultate de dualitate şi condiţii de optim.

Pornind de la scalarizarea generală există şi alte scalarizări: liniară, maxim(-liniară), mulţime, (semi)normă, quadratică, distanţă (a se vedea, spre exemplu, [19, 22, 25, 78, 80, 83, 92, 93]).

4.1.2 Scalarizarea liniară

Considerăm mulţimea funcţiilor de scalarizare

$$\mathcal{S}_l = \{s_{v^*} : V^\bullet \to \overline{\mathbb{R}} : \quad v^* \in K^{*0}, s_{v^*}(v) = \langle v^*, v\rangle \ \forall v \in V^\bullet\}.$$

Pentru $s_{v^*} \in \mathcal{S}_l$ are loc $s_{v^*}(+\infty_K) = +\infty$, deoarece $\langle v^*, \infty_K\rangle = +\infty \ \forall v^* \in K^*$. Evident, pentru toţi $v^* \in K^{*0}$, $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + K \subseteq V = \operatorname{dom} s_{v^*}$ şi s_{v^*} este tare $K-$crescătoare, liniară, şi continuă. În continuare observăm că pentru toţi $k^* \in K^*$ avem $s_{v^*}(k^*) = \delta_{\{v^*\}}(k^*)$.

Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}$ se numeşte soluţie $\mathcal{S}_l-$*propriu eficientă* a Problemei (PV_C) dacă $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ şi dacă există un $s_{v^*} \in \mathcal{S}_l$ astfel încât $s_{v^*}(f(\overline{x})) \leq s_{v^*}(f(x))$ pentru toţi $x \in \mathcal{A}$.

Problema de optimizare duală ataşată Problemei (PV_C) este

$$(DV^{Cs_l}) \qquad \operatorname*{Max}_{(v^*,y^*,z^*,v)\in\mathcal{B}^{Cs_l}} h^{Cs_l}(v^*, y^*, z^*, v)$$

unde

$$\mathcal{B}^{Cs_l} = \{(v^*, y^*, z^*, v) \in K^{*0} \times X^* \times C^* \times V : \langle v^*, v\rangle \leq -(v^*f)^*(y^*) - (z^*g)^*_{\mathcal{S}}(-y^*)\}$$

şi

$$h^{Cs_l}(v^*, y^*, z^*, v) = v.$$

Această problemă duală vectorială este chiar duala de tip Fenchel-Lagrange $(DV^{C_{FL}})$ din [25, Secţiune 4.3]. Dualitatea slabă şi tare urmează din cazul general.

Propoziţia 4.1.11 (*Dualitate slabă şi tare pentru* (PV_C) *şi* (DV^{Cs_l}))

(a) Nu există $x \in \mathcal{A}$ *şi* $(v^*, y^*, z^*, v) \in \mathcal{B}^{Cs_l}$ *astfel încât* $f(x) \leq_K h^{Cs_l}(v^*, y^*, z^*, v)$.

(b) Presupunem că avem condiţia de regularitate $(RCV_{C_{FL}})$ *îndeplinită. Dacă* $\overline{x} \in \mathcal{A}$ *este soluţie* $\mathcal{S}_l-$*propriu eficientă a Problemei* (PV_C), *atunci există* $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{v}) \in \mathcal{B}^{Cs_l}$ *o soluţie eficientă a Problemei* (DV^{Cs_l}), *astfel încât* $f(\overline{x}) = h^{Cs_l}(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{v}) = \overline{v}$.

Teorema 4.1.12 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [67]*) (*Condiţii de optim pentru* (PV_C) *şi* (DV^{Cs_l}))

(a) Fie $\overline{x} \in \mathcal{A}$ o soluţie $\mathcal{S}_l-$propriu eficientă a Problemei (PV_C) şi condiţia de regularitate $(RCV_{C_{FL}})$ îndeplinită. Atunci există $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{v}) \in \mathcal{B}^{C_{\mathcal{S}_l}}$ o soluţie eficientă a Problemei $(DV^{C_{\mathcal{S}_l}})$ astfel încât

(i) $f(\overline{x}) = \overline{v}$;

(ii) $\overline{v}^* = \overline{k}^*$;

(iii) $(\overline{v}^* f)^*(\overline{y}^*) + (\overline{v}^* f)(\overline{x}) = \langle \overline{y}^*, \overline{x} \rangle$;

(iv) $(\overline{z}^* g)^*_S(-\overline{y}^*) = -\langle \overline{y}^*, \overline{x} \rangle$;

(v) $(\overline{z}^* g)(\overline{x}) = 0$.

(b) Presupunem că $\overline{x} \in \mathcal{A}$ şi $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{v}) \in \mathcal{B}^{C_{\mathcal{S}_l}}$ îndeplinesc relaţiile $(i) - (v)$. Atunci $\overline{x}$ este o soluţie $\mathcal{S}_l-$propriu eficientă a Problemei (PV_C) şi $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{v})$ o soluţie eficientă a problemei duale $(DV^{C_{\mathcal{S}_l}})$.

Dacă $\operatorname{qi} K \neq \emptyset$ considerăm mulţimea funcţiilor de scalarizare

$$\mathcal{T}_l = \{s_{v^*} : V^\bullet \to \overline{\mathbb{R}} : \quad v^* \in K^* \setminus \{0\}, s_{v^*}(v) = \langle v^*, v \rangle \ \forall v \in V^\bullet\}$$

şi urmează că fiecare funcţie de scalarizare $s_{v^*} \in \mathcal{T}$ este strict $K-$crescătoare, liniară şi continuă, în timp ce domeniul este $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) + K$. Mai mult presupunem că $\mathcal{V} + \operatorname{qi} K = \operatorname{qi}(\mathcal{V} + K)$ cu $\mathcal{V} = f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A})$.

Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}$ se numeşte soluţie *$\mathcal{T}_l-$propriu eficientă* a Problemei (PV_C) dacă $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ şi dacă există $s_{v^*} \in \mathcal{T}_l$ astfel încât $s_{v^*}(f(\overline{x})) \leq s_{v^*}(f(x))$ pentru toţi $x \in \mathcal{A}$.

Duala introdusă în raport cu mulţimea funcţiilor de scalarizare $\mathcal{T}_l$ este

$$(DV^{C_{\mathcal{T}_l}}) \qquad \underset{(v^*, y^*, z^*, v) \in \mathcal{B}^{C_{\mathcal{T}_l}}}{\operatorname{WMax}} h^{C_{\mathcal{T}_l}}(v^*, y^*, z^*, v)$$

unde

$$\mathcal{B}^{C_{\mathcal{T}_l}} = \{(v^*, y^*, z^*, v) \in (K^* \setminus \{0\}) \times X^* \times C^* \times V : \langle v^*, v \rangle \leq -(v^* f)^*(y^*) - (z^* g)^*_S(-y^*)\}$$

şi

$$h^{C_{\mathcal{T}_l}}(v^*, y^*, z^*, v) = v.$$

Pentru această duală vectorială dualitatea slabă şi tare şi condiţiile de optim urmează similar ca şi în cazul dualei vectoriale în raport cu mulţimea funcţiilor de scalarizare $\mathcal{S}_l$.

Propoziţia 4.1.14 *(Dualitate slabă şi tare pentru (PV_C) şi $(DV^{C_{\mathcal{T}_l}})$)*

(a) Nu există $x \in \mathcal{A}$ şi $(v^*, y^*, z^*, v) \in \mathcal{B}^{C_{\mathcal{T}_l}}$ astfel încât $f(x) \leq_K h^{C_{\mathcal{T}_l}}(v^*, y^*, z^*, v)$.

(b) Presupunem că avem condiţia de regularitate $(RCV_{C_{FL}})$ îndeplinită. Dacă $\overline{x} \in \mathcal{A}$ este o soluţie $\mathcal{T}_l-$propriu eficientă a Problemei (PV_C), atunci există $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{v}) \in$

$\mathcal{B}^{C\mathcal{T}_l}$ *o soluţie slab eficientă a Problemei* $(DV^{C\mathcal{T}_l})$, *astfel încât* $f(\overline{x}) = h^{C s_l}(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{v})$ $= \overline{v}$.

Teorema 4.1.15 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [67]*) (*Condiţii de optim pentru* (PV_C) *şi* $(DV^{C\mathcal{T}_l})$)

(*a*) *Fie* $\overline{x} \in \mathcal{A}$ *o soluţie* $\mathcal{T}_l-$*propriu eficientă a Problemei* (PV_C) *şi condiţia de regularitate* $(RCV_{C_{FL}})$ *îndeplinită. Atunci există* $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{v}) \in \mathcal{B}^{C s_l}$ *o soluţie slab eficientă a Problemei* $(DV^{C\mathcal{T}_l})$ *astfel încât condiţiile* $(i)-(v)$ *din Teorema 4.1.11 sunt îndeplinite.*

(*b*) *Presupunem că* $\overline{x} \in \mathcal{A}$ *şi* $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{v}) \in \mathcal{B}^{C\mathcal{T}_l}$ *îndeplineşte relaţiile* $(i) - (v)$. *Atunci* $\overline{x}$ *este o soluţie* $\mathcal{T}_l-$*propriu eficientă a Problemei* (PV_C) *şi* $(\overline{v}^*, \overline{y}^*, \overline{z}^*, \overline{v})$ *o soluţie slab eficientă a problemei duale* $(DV^{C\mathcal{T}_l})$.

Observaţia 4.1.16 *Observăm că* $(i)-(iii)$ *în Teorema 4.1.15 nu coincid cu cele din Teorema 4.1.12, deoarece aici* $v^* \in K^* \setminus \{0\}$, *în timp ce dincolo* $v^* \in K^{*0}$.

4.1.3 Scalarizarea maxim(-liniară)

Una dintre scalarizările folosite în optimizarea vectorială pentru V finit dimensional este scalarizarea Tchebyshev (maximă). Lucrăm cu o funcţie de scalarizare generală definită prin combinarea unei funcţii de maxim de scalarizare (după [80, 126]) cu o funcţie liniară. Scalarizarea maxim(-liniară) a fost studiată de K. Mitani şi H. Nakayama în [95] (a se vedea, de asemenea şi [19, 22, 25]).

Fie $V = \mathbb{R}^k$, $V^\bullet = \mathbb{R}^k \cup \{+\infty_{\mathbb{R}^k_+}\} = (\mathbb{R}^k)^\bullet$, $K = \mathbb{R}^k_+$ şi $f_i : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, ..., k$, funcţii proprii şi convexe astfel încât $\bigcap_{i=i}^k \operatorname{dom} f_i \cap S \cap g^{-1}(-C) \neq \emptyset$. Fie $f : X \to (\mathbb{R}^k)^\bullet$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} (f_1(x), ..., f_k(x))^T, & \text{dacă } x \in \bigcap\limits_{i=1}^k \operatorname{dom} f_i, \\ +\infty_{\mathbb{R}^k_+}, & \text{altfel,} \end{cases}$$

$\eta \geq 0$, $w = (w_1, ..., w_k)^T \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^k_+)$ şi $a = (a_1, ..., a_k)^T \in \mathbb{R}^k$. Considerăm funcţia de scalarizare

$$s_{w,a}(y) = \max_{j=1,\dots,k} \{w_j(y_j - a_j)\} + \eta \sum_{j=1}^k w_j y_j, \ y = (y_1, ..., y_k)^T \in \mathbb{R}^k,$$

cu $s_{w,a}(+\infty_{\mathbb{R}^k_+}) = +\infty$. Pentru toţi $w \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^k_+)$ şi $a \in \mathbb{R}^k$, funcţia tocmai introdusă este convexă, strict $\mathbb{R}^k_+-$crescătoare şi $f(\cap_{i=1}^k \operatorname{dom} f_i \cap \mathcal{A}) + \mathbb{R}^k_+ \subseteq \mathbb{R}^k$. Atunci introducem mulţimea funcţiilor de scalarizare

$$\mathcal{T}_{ml} = \{s_{w,a} : (\mathbb{R}^k)^\bullet \to \overline{\mathbb{R}} : \quad (w, a) \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^k_+) \times \mathbb{R}^k\}.$$

Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}$ se numeşte soluţie $\mathcal{T}_{ml}-$*propriu eficientă* a Problemei (PV_C) dacă există $w \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^k_+)$ şi $a \in \mathbb{R}^k$ astfel încât $\max_{j=1,...,k}\{w_j(f_j(\overline{x})-a_j)\}+\eta\sum_{j=1}^k w_j f_j(\overline{x}) \leq \max_{j=1,...,k}\{w_j(f_j(x)-a_j)\}+\eta\sum_{j=1}^k w_j f_j(x)$ pentru toţi $x \in \mathcal{A}$.

Pentru $w=(w_1,...,w_k)^T \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^k_+)$, $a=(a_1,...,a_k)^T \in \mathbb{R}^k$ fixat şi $k^*=(k_1^*,...,k_k^*)^T \in \mathbb{R}^k$, funcţia conjugată a lui $s_{w,a} \in \mathcal{T}_{ml}$ este

$$s^*_{w,a}(k^*) = \begin{cases} (k^*-\eta w)^T a, & \text{dacă } \eta w \leqq k^* \text{ şi } \sum\limits_{j=1}^k \frac{k_j^*}{w_j} = k\eta+1, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Duala vectorială corespunzătoare ataşată Problemei (PV_C) în raport cu mulţimea funcţiilor de scalarizare $\mathcal{T}_{ml}$ este

$$(DV^{C\mathcal{T}_{ml}}) \qquad \operatorname*{WMax}_{(w,a,y^*,k^*,z^*,v)\in\mathcal{B}^{C\mathcal{T}_{ml}}} h^{C\mathcal{T}_{ml}}(w,a,y^*,k^*,z^*,v)$$

unde

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{C\mathcal{T}_{ml}} = \Big\{ & (w,a,y^*,k^*,z^*,v) \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^k_+) \times \mathbb{R}^k \times X^* \times \mathbb{R}^k_+ \times C^* \times \mathbb{R}^k : \\ & \eta w \leqq k^*, \ \sum_{j=1}^k \frac{k_j^*}{w_j} = k\eta+1, \ \max_{j=1,...,k}\{w_j(v_j-a_j)\} + \eta\sum_{j=1}^k w_j v_j \\ & \leq -(k^*-\eta w)^T a - \left(\sum_{j=1}^k k_j^* f_j\right)^*(y^*) - (z^*g)^*_S(-y^*)\Big\}\end{aligned}$$

şi

$$h^{C\mathcal{T}_{ml}}(w,a,y^*,k^*,z^*,v) = v.$$

Dualitatea slabă şi tare urmează din cazul general.

Propoziţia 4.1.17 (*[25, Teorema 4.4.8, Teorema 4.4.9]*) (*Dualitate slabă şi tare pentru* (PV_C) *şi* $(DV^{C\mathcal{T}_{ml}})$)

(a) Nu există $x \in \mathcal{A}$ *şi* $(w,a,y^*,k^*,z^*,v) \in \mathcal{B}^{C\mathcal{T}_{ml}}$ *astfel încât* $f_i(x) < h_i^{C\mathcal{T}_{ml}}(w,a,y^*,k^*,z^*,v)$.

(b) Presupunem că avem condiţia de regularitate $(RCV_{C_{FL}})$ *îndeplinită. Dacă* $\overline{x} \in \mathcal{A}$ *este o soluţie* $\mathcal{T}_{ml}-$*propriu eficientă a Problemei* (PV_C)*, atunci există* $(\overline{w},\overline{a},\overline{y}^*,\overline{k}^*,\overline{z}^*,\overline{v})$ *o soluţie slab eficientă a Problemei* $(DV^{C\mathcal{T}_{ml}})$*, astfel încât* $f_i(\overline{x}) = h_i^{C\mathcal{T}_{ml}}(\overline{w}^*,\overline{a},\overline{y}^*,\overline{k}^*,\overline{z}^*,\overline{v}) = \overline{v}_i$, $i=1,...,k$.

Teorema 4.1.18 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [67]*) (*Condiţii de optim pentru* (PV_C) *şi* $(DV^{C\mathcal{T}_{ml}})$)

(a) Fie $\overline{x} \in \mathcal{A}$ *o soluţie* $\mathcal{T}_{ml}-$*propriu eficientă a Problemei* (PV_C) *şi condiţia de regularitate* $(RCV_{C_{FL}})$ *îndeplinită. Atunci există* $(\overline{w},\overline{a},\overline{y}^*,\overline{k}^*,\overline{z}^*,\overline{v}) \in \mathcal{B}^{C\mathcal{T}_{ml}}$ *o soluţie slab eficientă a Problemei* $(DV^{C\mathcal{T}_{ml}})$ *cu* $\overline{w}=(\overline{w}_1,...,\overline{w}_k)^T$ *şi* $\overline{k}^*=(\overline{k}_1^*,...,\overline{k}_k^*)^T$ *astfel încât*

(i) $f(\overline{x}) = \overline{v}$;

(ii) $\max\limits_{j=1,\dots,k} \{\overline{w}_j(f_j(\overline{x}) - \overline{a}_j)\} + \eta \sum\limits_{j=1}^{k} \overline{w}_j f_j(\overline{x}) + (\overline{k}^* - \eta\overline{w})^T \overline{a} + \delta_{-\mathbb{R}^k_+}(\eta\overline{w} - \overline{k}^*) = \left(\overline{k}^{*T} f\right)(\overline{x})$;

(ii′) $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{\overline{k}_j^*}{\overline{w}_j} = k\eta + 1$;

(iii) $\left(\overline{k}^{*T} f\right)^* (\overline{y}^*) + \left(\overline{k}^{*T} f\right)(\overline{x}) = \langle \overline{y}^*, \overline{x}\rangle$;

(iv) $(\overline{z}^* g)^*_S(-\overline{y}^*) = -\langle \overline{y}^*, \overline{x}\rangle$;

(v) $(\overline{z}^* g)(\overline{x}) = 0$.

(b) *Presupunem că* $\overline{x} \in \mathcal{A}$ *şi că* $(\overline{w}, \overline{a}^*, \overline{y}^*, \overline{k}^*, \overline{z}^*, \overline{v}) \in \mathcal{B}^{C\mathcal{T}_{ml}}$ *îndeplineşte relaţiile* (i)−(v). *Atunci* $\overline{x}$ *este o soluţie* $\mathcal{T}_{ml}-$*propriu eficientă a Problemei* (PV_C) *şi* $(\overline{w}^*, \overline{a}^*, \overline{y}^*, \overline{k}^*, \overline{z}^*, \overline{v})$ *o soluţie slab eficientă a problemei duale* $(DV^{C\mathcal{T}_{ml}})$.

În cazul în care $\eta = 0$, $w_j = 1$ şi $a_j = 0$ pentru toţi $j = 1, ..., k$, mulţimea funcţiilor de scalarizare $\mathcal{T}_m$ este dată prin

$$\mathcal{T}_m = \left\{ s : (\mathbb{R}^k)^\bullet \to \overline{\mathbb{R}} : \quad s(y) = \max_{j=1,\dots,k} y_j \ \forall y \in \mathbb{R}^k, s(\infty_{\mathbb{R}^k_+}) = +\infty \right\}.$$

Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}$ se numeşte soluţie $\mathcal{T}_m-$*propriu eficientă* a Problemei (PV_C) dacă $\max_{j=1,\dots,k}\{f_j(\overline{x})\} \leq \max_{j=1,\dots,k}\{f_j(x)\}$ pentru toţi $x \in \mathcal{A}$.

Corespunzător, obţinem duala vectorială ataşată Problemei (PV_C) în raport cu mulţimea funcţiilor de scalarizare $\mathcal{T}_m$, dualitatea slabă şi tare şi putem formula condiţiile de optim.

4.1.4 Scalarizarea mulţime

Aici includem acele scalarizări pentru care funcţiile de scalarizare sunt definite prin intermediul unor mulţimi. Considerăm o funcţie de scalarizare generală aflată în legătură cu una dată de C. Gerth şi P. Weidner (după [62]). Această funcţie de scalarizare a fost studiată şi în [22, 25, 122, 123, 134].

Fie core $K \neq \emptyset$ şi considerăm o mulţime convexă nevidă $E \subsetneq V$ care satisface $\mathrm{cl}(E) + \mathrm{int}(K) \subseteq \mathrm{core}(E)$. Pentru toţi $\mu \in \mathrm{core}(K)$ definim $s_\mu : V^\bullet \to \overline{\mathbb{R}}$ prin

$$s_\mu(v) = \inf\{t \in \mathbb{R} : v \in t\mu - \mathrm{cl}(E)\}$$

funcţia de scalarizare. Atunci $s_\mu(+\infty_K) = +\infty$. Pentru $\mu \in \mathrm{core}(K)$ funcţia s_μ este convexă, strict $K-$crescătoare şi ia doar valori reale pe V şi deci $f(\mathrm{dom}\, f \cap \mathcal{A}) + K \subseteq$

$V = \operatorname{dom} s_\mu$. Dacă $\operatorname{core} K \neq \emptyset$ considerăm mulţimea funcţiilor de scalarizare

$$\mathcal{T}_s = \{s_\mu : V^\bullet \to \overline{\mathbb{R}},\ \mu \in \operatorname{core}(K)\}.$$

Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}$ se numeşte soluţie $\mathcal{T}_s-$*propriu eficientă* a Problemei (PV_C) dacă există $\mu \in \operatorname{core} K$ astfel încât $s_\mu(f(\overline{x}) \leq s_\mu(f(x))$ pentru toţi $x \in \mathcal{A}$.

Când $\mu \in \operatorname{core}(K)$ este fixat, conjugata funcţiei de scalarizare $s_\mu^* : V^* \to \overline{\mathbb{R}}$ este definită prin

$$s_\mu^*(k^*) = \begin{cases} \sigma_{-\operatorname{cl}(E)}(k^*), & \text{dacă } \langle k^*, \mu\rangle = 1, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Problema duală vectorială ataşată Problemei (PV_C) în sensul scalarizării mulţime este dată prin

$$(DV^{C\mathcal{T}_s}) \qquad \operatorname*{WMax}_{(\mu,y^*,k^*,z^*,v)\in\mathcal{B}^{C\mathcal{T}_s}} h^{C\mathcal{T}_s}(\mu, y^*, k^*, z^*, v)$$

unde

$$\mathcal{B}^{C\mathcal{T}_s} = \Big\{(\mu, y^*, k^*, z^*, v) \in \operatorname{core}(K) \times X^* \times K^* \times C^* \times V : \langle k^*, \mu\rangle = 1, \inf\{t \in \mathbb{R} : v \in t\mu - \operatorname{cl}(E)\} \leq -\sigma_{-\operatorname{cl}(E)}(k^*) - (k^*f)^*(y^*) - (z^*g)_S^*(-y^*)\Big\}$$

şi

$$h^{C\mathcal{T}_s}(\mu, y^*, k^*, z^*, v) = v.$$

Dualitatea slabă şi tare urmează din cazul general şi apoi şi condiţiile de optim.

Propoziţia 4.1.22 (*[25, Teorema 4.4.10, Teorema 4.4.11]*) (*Dualitate slabă şi tare pentru* (PV_C) *şi* $(DV^{C\mathcal{T}_s})$)

(a) Nu există $x \in \mathcal{A}$ *şi* $(\mu, y^*, k^*, z^*, v) \in \mathcal{B}^{C\mathcal{T}_s}$ *astfel încât* $f(x) <_K h^{C\mathcal{T}_s}(\mu, y^*, k^*, z^*, v)$.

(b) Presupunem că avem condiţia de regularitate $(RCV_{C_{FL}})$ *îndeplinită. Dacă* $\overline{x} \in \mathcal{A}$ *este o soluţie* $\mathcal{T}_s-$*propriu eficientă a Problemei* (PV_C)*, atunci există* $(\overline{\mu}, \overline{y}^*, \overline{k}^*, \overline{z}^*, \overline{v})$ *o soluţie slab eficientă a Problemei* $(DV^{C\mathcal{T}_s})$*, astfel încât* $f(\overline{x}) = h^{C\mathcal{T}_s}(\overline{\mu}^*, \overline{y}^*, \overline{k}^*, \overline{z}^*, \overline{v}) = \overline{v}$.

Teorema 4.1.23 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [67]*) (*Condiţii de optim pentru* (PV_C) *şi* $(DV^{C\mathcal{T}_s})$)

(a) Fie $\overline{x} \in \mathcal{A}$ *o soluţie* $\mathcal{T}_s-$*propriu eficientă pentru Problema* (PV_C) *şi condiţia de regularitate* $(RCV_{C_{FL}})$ *îndeplinită. Atunci există* $(\overline{\mu}, \overline{y}^*, \overline{k}^*, \overline{z}^*, \overline{v}) \in \mathcal{B}^{C\mathcal{T}_s}$ *o soluţie slab eficientă a problemei duale* $(DV^{C\mathcal{T}_s})$ *astfel încât*

(i) $f(\overline{x}) = \overline{v}$;

(ii) $\inf\{t \in \mathbb{R} : f(\overline{x}) \in t\mu - \operatorname{cl}(E)\} + \sigma_{-\operatorname{cl}(E)}(\overline{k}^*) = (\overline{k}^* f)(\overline{x})$;

(ii') $\langle \overline{k}^*, \overline{\mu} \rangle = 1$;

(iii) $(\overline{k}^* f)^*(\overline{y}^*) + (\overline{k}^* f)(\overline{x}) = \langle \overline{y}^*, \overline{x} \rangle$;

(iv) $(\overline{z}^* g)_S^*(-\overline{y}^*) = -\langle \overline{y}^*, \overline{x} \rangle$;

(v) $(\overline{z}^* g)(\overline{x}) = 0$.

(b) Presupunem că $\overline{x} \in \mathcal{A}$ şi $(\overline{\mu}, \overline{y}^*, \overline{k}^*, \overline{z}^*, \overline{v}) \in \mathcal{B}^{C_{\mathcal{T}_s}}$ îndeplineşte relaţiile $(i) - (v)$. Atunci $\overline{x}$ este o soluţie $\mathcal{T}_s-$propriu eficientă a Problemei (PV_C) şi $(\overline{\mu}^*, \overline{y}^*, \overline{k}^*, \overline{z}^*, \overline{v})$ o soluţie slab eficientă a problemei duale $(DV^{C_{\mathcal{T}_s}})$.

De asemenea, se poate considera şi scalarizarea pentru o mulţime conică şi cea cu mulţimi generate de norme (după [22]) şi condiţiile de optim urmează.

4.1.5 Scalarizarea (semi)normă

În această parte avem ca şi punct de plecare faptul că în anumite circumstanţe (semi)normele pe V devin funcţii tare $K-$crescătoare (a se vedea, spre exemplu [80, 118, 147]). Acest tip de funcţii de scalarizare a fost folosit pentru probleme locale în [35]. În ceea ce urmează vom cerceta funcţiile de scalarizare bazate pe funcţii Minkovski tare $K-$crescătoare (după [22, 25]).

Considerăm $b \in V$ astfel încât $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) \subseteq b + K$, $E \subseteq V$ o mulţime convexă cu $0 \in \operatorname{int}(E)$ şi funcţia Minkovski γ_E tare $K-$crescătoare pe K. Deoarece $0 \in \operatorname{int}(E)$ avem $\gamma_E(v) \in \mathbb{R}$ pentru toţi $v \in V$. Pentru $a \in b - K$ definim $s_a : V^\bullet \to \overline{\mathbb{R}}$ prin

$$s_a(v) = \begin{cases} \gamma_E(v-a), & \text{dacă } v \in b + K, \\ +\infty, & \text{altfel,} \end{cases}$$

cu $s_a(+\infty_K) = +\infty$. Pentru $a \in b - K$ fixat, funcţia s_a este convexă cu $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}) \subseteq b + K = \operatorname{dom} s_a$ şi s_a este tare $K-$crescătoare pe $f(\operatorname{dom} f \cap \mathcal{A})$. Considerăm următoarea familie de funcţii de scalarizare

$$\mathcal{S}_g = \{s_a : V^\bullet \to \overline{\mathbb{R}} : \ a \in b - K\}.$$

Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}$ se numeşte soluţie $\mathcal{S}_g-$*propriu eficientă* a Problemei (PV_C) dacă există $a \in b - K$ astfel încât $s_a(f(\overline{x})) \leq s_a(f(x))$ pentru toţi $x \in \mathcal{A}$.

Pentru $a \in b - K$ fixat şi $k^* \in V^*$, funcţia conjugată $s_a^* : V^* \to \overline{\mathbb{R}}$ este

$$s_a^*(k^*) = \langle k^*, a \rangle + \min_{\substack{w^* \in -K^* \\ \sigma_E(k^* - w^*) \leq 1}} \langle w^*, b - a \rangle,$$

unde σ_E defineşte duala funcţiei Minkovski γ_E şi dacă γ_E este o normă a ei devine chiar duala normei.

Duala vectorială ataşată Problemei (PV_C) în sensul scalarizării (semi)normă este dată de

$$(DV^{Cs_g}) \qquad \underset{(a,y^*,k^*,z^*,w^*,v)\in\mathcal{B}^{Cs_g}}{\text{Max}} h^{Cs_g}(a,y^*,k^*,z^*,w^*,v)$$

unde

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{Cs_g} = \Big\{&(a,y^*,k^*,z^*,w^*,v)\in(b-K)\times X^*\times K^*\times C^*\times(-K^*)\times(b+K):\\ &\sigma_E(k^*-w^*)\le 1,\ \gamma_E(v-a)\le\langle w^*,a-b\rangle-\langle k^*,a\rangle-\\ &(k^*f)^*(y^*)-(z^*g)^*_S(-y^*)\Big\}\end{aligned}$$

şi

$$h^{Cs_g}(a,y^*,k^*,z^*,w^*,v)=v.$$

Dualitatea slabă şi tare urmează din cazul general şi apoi condiţiile de optim.

Proposition 4.1.32 (*[25, Teorema 4.4.12, Teorema 4.4.13]*) (*Dualitate slabă şi tare pentru* (PV_C) *şi* (DV^{Cs_g}))

(*a*) *Nu există* $x\in\mathcal{A}$ *şi* $(a,y^*,k^*,z^*,w^*,v)\in\mathcal{B}^{Cs_g}$ *astfel încât* $f(x)<_K h^{Cs_g}(a,y^*,k^*,z^*,w^*,v)$.

(*b*) *Presupunem că avem condiţia de regularitate* $(RCV_{C_{FL}})$ *îndeplinită. Dacă* $\overline{x}\in\mathcal{A}$ *este o soluţie* $\mathcal{S}_g-$*propriu eficientă a Problemei* (PV_C)*, atunci există* $(\overline{a},\overline{y}^*,\overline{k}^*,\overline{z}^*,\overline{w}^*,\overline{v})$ *o soluţie eficientă a Problemei* (DV^{Cs_g})*, astfel încât* $f(\overline{x})=h^{Cs_g}(\overline{a}^*,\overline{y}^*,\overline{k}^*,\overline{z}^*,\overline{w}^*,\overline{v})=\overline{v}$.

Teorema 4.1.33 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [67]*) (*Condiţii de optim pentru* (PV_C) *şi* (DV^{Cs_g}))

(*a*) *Fie* $\overline{x}\in\mathcal{A}$ *o soluţie* $\mathcal{S}_g-$*propriu eficientă a Problemei* (PV_C) *şi condiţia de regularitate* $(RCV_{C_{FL}})$ *îndeplinită. Atunci există* $(\overline{a},\overline{y}^*,\overline{k}^*,\overline{z}^*,\overline{w}^*,\overline{v})\in\mathcal{B}^{Cs_g}$ *o soluţie eficientă a Problemei* (DV^{Cs_g}) *astfel încât*

(*i*) $f(\overline{x})=\overline{v}$;

(*ii*) $\gamma_E(f(\overline{x})-\overline{a})+\langle\overline{w}^*,b-\overline{a}\rangle+\langle\overline{k}^*,\overline{a}\rangle=(\overline{k}^*f)(\overline{x})$;

(*ii'*) $\sigma_E(\overline{k}^*-\overline{w}^*)\le 1$;

(*ii''*) $\langle\overline{w}^*,b-\overline{a}\rangle=\min\limits_{\substack{w^*\in-K^*\\ \sigma_E(k^*-w^*)\le 1}}\langle w^*,b-\overline{a}\rangle$;

(*iii*) $(\overline{k}^*f)^*(\overline{y}^*)+(\overline{k}^*f)(\overline{x})=\langle\overline{y}^*,\overline{x}\rangle$;

(*iv*) $(\overline{z}^*g)^*_S(-\overline{y}^*)=-\langle\overline{y}^*,\overline{x}\rangle$;

(*v*) $(\overline{z}^*g)(\overline{x})=0$.

(b) Presupunem că $\overline{x} \in \mathcal{A}$ şi $(\overline{a}, \overline{y}^*, \overline{k}^*, \overline{z}^*, \overline{w}^*, \overline{v}) \in \mathcal{B}^{C s_g}$ îndeplinesc relaţiile (i) − (v). Atunci $\overline{x}$ este o soluţie $\mathcal{S}_g$−propriu eficientă a Problemei (PV_C) şi $(\overline{a}^*, \overline{y}^*, \overline{k}^*, \overline{z}^*, \overline{w}^*, \overline{v})$ este soluţie eficientă a problemei duale $(DV^{C s_g})$.

Observaţia 4.1.35 *Rezultatele date în această parte pot fi considerate şi în cazul particular când γ_E este o normă având bila unitate E. Condiţiile care asigură că o normă este tare K−crescătoare pe o mulţime dată au fost studiate în [78, 80, 147]*

4.1.6 Scalarizarea distanţă

Problematica din această scalarizare nu a mai fost considerată până acum pentru dualitate vectorială conjugată, din cauza dificultăţii de calculare a conjugatei. În [40] a fost obţinută în cazul $V = \mathbb{R}^k$, deci putem să considerăm această scalarizare în acelaşi cadru.

Pentru mulţimea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ fie $\Delta_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dată prin $\Delta_U(x) = \sup\limits_{x^* \in \mathbb{R}^n} [\langle x^*, x\rangle - \sigma_U(x^*) :\ ||x^*|| = 1]$ şi mulţimea $\mathcal{B} = \{x^* \in \mathbb{R}^n : ||x^*|| = 1\}$. Deci, Δ_U poate fi scrisă echivalent astfel $\Delta_U(x) = \sup_{x^* \in \mathcal{B}}[\langle x^*, x\rangle - \sigma_U(x^*)]$. Această funcţie este finită şi convexă pe tot spaţiul $\mathbb{R}^n$ şi coincide cu funcţia distanţă $d_U(x) = \sup[\langle x^*, x\rangle - \sigma_U(x^*) : ||x^*|| \leq 1]$ înfara lui K (după [94]). Mai mult, Δ_{-K} este strict K−crescătoare pe $\mathbb{R}^n_+$.

Considerăm funcţia de scalarizare $s_d : (\mathbb{R}^k)^\bullet \to (\overline{\mathbb{R}})^\bullet$ dată prin

$$s_d(y) = \begin{cases} \Delta_{-K}(y), & \text{dacă } y \in \mathbb{R}^k \\ +\infty, & \text{else.} \end{cases}$$

Această funcţie este proprie, convexă şi strict K−crescătoare. Mulţimea funcţiilor de scalarizare este dată în acest caz de

$$\mathcal{T}_d = \{\Delta_{-K} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}.$$

Un element $\overline{x} \in \mathcal{A}$ se numeşte soluţie $\mathcal{T}_d$*−propriu eficientă* a Problemei (PV_C) dacă $\Delta_{-K}(f(\overline{x})) \leq \Delta_{-K}(f(x))$ pentru toţi $x \in \mathcal{A}$.

Funcţia conjugată a lui $s_d \in \mathcal{T}_d$ este (după [40])

$$s_d^*(k^*) = \Delta_{-K}^*(k^*) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{l} \delta_{K^*}(x_j^*) :\ 1 \leq l \leq n+2,\ k^* = \sum_{j=1}^{l} x_j^*,\ \sum_{j=1}^{l} ||x_j^*|| = 1\right\}$$

şi pentru a scrie duala folosim următoarea formulă

$$\sup_{x^* \in U} [\langle x^*, v\rangle - \sigma_{-K}(x^*)] \leq -(k^* f)^*(y^*) - (z^* g)_S^*(-y^*),$$

când $1 \leq l \leq n+2,\ k^* = \sum_{j=1}^{l} x_j^*,\ \sum_{j=1}^{l} ||x_j^*|| = 1$ şi $x_j^* \in K^*$.

Duala vectorială a Problemei (PV_C) în raport cu mulţimea funcţiilor de scalarizare $\mathcal{T}_d$ este

$$(DV^{\mathcal{T}_d}) \qquad \underset{(y^*,k^*,x^*,z^*,v)\in\mathcal{B}^{\mathcal{T}_d}}{\text{WMax}} h^{\mathcal{T}_d}(y^*,k^*,x^*,z^*,v)$$

unde

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{\mathcal{T}_d} = & \Big\{(y^*,k^*,x^*,z^*,v)\in X^*\times K^*\times(K^*)^l\times C^*\times\mathbb{R}^n : \Delta_{-K}(v)\leq -(k^*f)^*(y^*) \\ & -(z^*g)^*_S(-y^*),\ \text{for } 1\leq l\leq n+2,\ k^*=\sum_{j=1}^{l}x_j^*,\ \sum_{j=1}^{l}\|x_j^*\|=1 \\ & \text{şi } x^*=(x_1^*,...x_l^*)\Big\}\end{aligned}$$

şi

$$h^{\mathcal{T}_d}(y^*,k^*,x^*,z^*,v)=v.$$

Pentru această duală avem dualitate slabă şi tare şi condiţii de optim.

Propoziţia 4.1.36 (*Dualitate slabă şi tare pentru* (PV_C) *şi* $(DV^{\mathcal{T}_d})$)

(*a*) *Nu există* $x\in\mathcal{A}$ *şi* $(y^*,k^*,x^*,z^*,v)\in\mathcal{B}^{\mathcal{T}_d}$ *astfel încât* $f(x)<h^{\mathcal{T}_d}(y^*,k^*,x^*,z^*,v)$.

(*b*) *Presupunem că avem condiţia de regularitate* $(RCV_{C_{FL}})$ *îndeplinită. Dacă* $\overline{x}\in\mathcal{A}$ *este o soluţie* $\mathcal{T}_d-$*propriu efiicentă a Problemei* (PV_C), *atunci există* $(\overline{y}^*,\overline{k}^*,\overline{x}^*,\overline{z}^*,\overline{v})$ *o soluţie slab eficientă Problemei* $(DV^{\mathcal{T}_d})$, *astfel încât* $f(\overline{x})=h^{\mathcal{T}_d}(\overline{y}^*,\overline{k^*},\overline{x}^*,\overline{z}^*,\overline{v})=\overline{v}$.

Teorema 4.1.37 (*S.-M. Grad şi E.-L. Pop [67]*) (*Condiţii de optim pentru* (PV_C) *şi* $(DV^{\mathcal{T}_d})$)

(*a*) *Fie* $\overline{x}\in\mathcal{A}$ *o soluţie* $\mathcal{T}_d-$*propriu eficientă a Problemei* (PV_C) *şi condiţia de regularitate* $(RCV_{C_{FL}})$ *îndeplinită. Atunci există* $(\overline{y}^*,\overline{k^*},\overline{x}^*,\overline{z}^*,\overline{v})\in\mathcal{B}^{\mathcal{T}_d}$ *o soluţie slab eficientă a Problemei* $(DV^{\mathcal{T}_d})$ *astfel încât*

(*i*) $f(\overline{x})=\overline{v}$;

(*ii*) $\Delta_{-K}(f(\overline{x}))=(\overline{k}^*f)(\overline{x})$;

(*ii′*) $\overline{k}^*=\sum_{j=1}^{l}\overline{x}_j^*$ *şi* $\sum_{j=1}^{l}\|\overline{x}_j^*\|=1$;

(*iii*) $(\overline{k}^*f)^*(\overline{y}^*)+(\overline{k}^*f)(\overline{x})=\langle\overline{y}^*,\overline{x}\rangle$;

(*iv*) $(\overline{z}^*g)^*_S(-\overline{y}^*)=-\langle\overline{y}^*,\overline{x}\rangle$;

(*v*) $(\overline{z}^*g)(\overline{x})=0$.

(*b*) *Presupunem că* $\overline{x}\in\mathcal{A}$ *şi* $(\overline{y}^*,\overline{k^*},\overline{x}^*,\overline{z}^*,\overline{v})\in\mathcal{B}^{\mathcal{T}_d}$ *îdeplinesc relaţiile* $(i)-(v)$. *Atunci* $\overline{x}$ *este o soluţie* $\mathcal{T}_d-$*propriu eficientă a Problemei* (PV_C) *şi* $(\overline{y}^*,\overline{k^*},\overline{x}^*,\overline{z}^*,\overline{v})$ *este o soluţie slab eficientă a problemei duale* $(DV^{\mathcal{T}_d})$.

Capitolul 5

Câteva aplicaţii

În acest capitol unei probleme de optimizare îi ataşăm problema de optimizare $(0,1)-\eta$ care o aproximează şi dăm legături între soluţiile optime şi punctele şa ale Lagrangienilor acestor două probleme (a se vedea E.-L. Pop şi D.I. Duca [108–110]). Pornind de la lucrarea [47], s-au formulat discuţii similare de către H. Boncea şi D.I. Duca în [10] şi L. Cioban şi D.I. Duca în [38]. În cea de a doua parte a acestui capitol problemele considerate au fost extinse la cazul vectorial (a se vedea E.-L. Pop şi D.I. Duca [111]).

5.1 Legături între problemele de optimizare şi problemele de optimizare care le aproximează

Problemei de optimizare (P_v) i se ataşează problema de optimizare (AP_v) ce o aproximează şi se stabilesc legături între soluţiile optime ale celor două probleme şi punctele şa ale Lagrangienilor problemelor. Mai mult, Problemei (P_v) i se poate ataşa şi duala, obţinându-se anumite legături. De asemenea sunt prezentate şi exemple.

5.1.1 Probleme de optimizare şi probleme de optimizare care le aproximează

În acest paragraf unei probleme de optimizare îi ataşăm problema de optimizare care o aproximează şi stabilim legături între soluţiile optime şi punctele şa ale Lagrangienilor problemelor considerate (a se vedea [109]).

5.1.2 Legături între soluţiile optime şi punctele şa ale Lagrangienilor Problemei (P_v) şi Problemei (AP_v)

Câteva legături între soluţiile admisibile ale Problemei (P_v) si ale Problemei (AP_v) sunt date. Apoi cercetăm legături între soluţiile optime şi punctele şa ale Lagrangienilor celor două probleme (a se vedea [109]).

5.1.3 Legături între problemele de optimizare şi dualele lor

Pentru a rezolva Problem (P_v), există diferite moduri de abordare. Unul din aceste moduri presupune să îi ataşăm Problemei (P_v) o altă problemă de optimizare, duala ei, pentru a obţine informaţii legate de soluţiile optime şi punctele şa ale Lagrangienilor problemei iniţiale (a se vedea [110]).

5.2 Legături între probleme de optimizare vectorială, soluţiile lor eficiente şi punctele şa ale Lagrangienilor

În această secţiune considerăm cazul vectorial pentru problema de optimizare (P_v) şi problema de optimizare $(0, 1) - \eta$ ce o aproximează şi studiem legături între soluţiile eficiente şi punctele şa ale Lagrangienilor acestor probleme (după D.I. Duca [47]).

Considerăm problema de optimizare vectorială

$$(P_v) \qquad \begin{array}{rl} & \min f(x) \\ \text{s. t.} & x \in X \\ & g(x) \leqq 0 \\ & h(x) = 0, \end{array}$$

unde X este o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^p$, $g : X \to \mathbb{R}^m$ şi $h : X \to \mathbb{R}^q$ sunt trei funcţii. Fie $\mathcal{F}(P_v) := \{x \in X : g(x) \leqq 0,\ h(x) = 0\}$ mulţimea tuturor soluţiilor admisibile ale Problemei (P_v).

Definiţia 5.2.1 *Spunem că $\overline{x} \in \mathcal{F}(P_v)$ este o soluţie eficientă pentru Problema (P_v) dacă nu există nici un $x \in \mathcal{F}(P_v)$ astfel încât $f(x) \leq f(\overline{x})$.*

Teorema 5.2.2 *Fie X o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, $\overline{x}$ un punct interior al lui X şi $f : X \to \mathbb{R}^p$, $g : X \to \mathbb{R}^m$ şi $h : X \to \mathbb{R}^q$ trei funcţii diferenţiabile în $\overline{x}$ şi fie $\overline{x}$ o soluţie eficientă a Problemei (P_v).*

(a) (Teorema Fritz-John) Atunci există $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) \in \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q \setminus \{(0, 0, 0)\}$ astfel încât

$$[\nabla f(\overline{x})]^T (\overline{u}) + [\nabla g(\overline{x})]^T (\overline{v}) + [\nabla h(\overline{x})]^T (\overline{w}) = 0, \tag{5.1}$$

$$\langle \overline{v}, g(\overline{x})\rangle = 0 \tag{5.2}$$

sunt îndeplinite.

(*b*) (*Teorema Karush-Kuhn-Tucker*) *Dacă o condiţie de regularitate pentru Problema* (P_v) *este îdeplinită în* $\overline{x}$, *atunci există* $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) \in \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q$ *cu* $\overline{u} \neq \emptyset$ *astfel încât (5.1) şi (5.2) sunt îndeplinite.*

Dacă $\overline{x}$ este o soluţie eficientă pentru Problema (P_v) şi f, g şi h sunt diferenţiabile în $\overline{x}$, atunci există $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) \in \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q \setminus \{(0,0,0)\}$ pentru care avem (5.1) şi (5.2) îndeplinite (după Teorema Fritz-John). Urmează că soluţiile eficiente ale Problemei (P_v), $\overline{x}$, se pot găsi între componentele $\overline{x}$ ale soluţiilor $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ sistemului $(5.1) - (5.2)$. Dacă acest sistem are doar soluţii cu $\overline{u} = 0$, atunci $(\overline{x}, 0, \overline{v}, \overline{w})$ rămâne soluţia sistemului $(5.1) - (5.2)$ pentru orice funcţie f; în acest caz Teorema Fritz-John nu mai este utilă. Ipotezele care adăugate asigură existenţa uneia dintre soluţiile $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ cu $\overline{u} \neq 0$ se numesc *condiţii de regularitate*. În literatură există multe tipuri de astfel de condiţii de regularitate (a se vedea [89, 96]): Slater, Karlin, Kuhn-Tucker, Arrow-Hurwicz-Uzawa, strict, reciproc convexă şi altele. În ceea ce urmează, printr-o *condiţie de regularitate*, înţelegem una dintre condiţiile mai sus enumerate.

Fie $L_{P_v} : X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ definit prin

$$L_{P_v}(x, v, w) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) v_i e + \sum_{k=1}^{q} h_k(x) w_k e,$$

pentru toţi $(x, v, w) \in X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q$, unde $e = (1, 1, .., 1) \in \mathbb{R}^p$, numit *Lagrangianul vectorial al Problemei* (P_v).

Fie acum $u \in \mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}$. Atunci funcţia $L^u_{P_v} : X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ definită prin

$$L^u_{P_v}(x, v, w) = \sum_{j=1}^{p} u_j f_j(x) + \sum_{i=1}^{m} v_i g_i(x) + \sum_{k=1}^{q} w_k h_k(x),$$

pentru toţi $(x, v, w) \in X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q$, se numeşte *Lagrangianul scalar al Problemei* (P_v).

Definiţia 5.2.3 (*i*) *Un punct* $(\overline{x}, \overline{v}, \overline{w}) \in X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q$ *se numeşte punct şa al Lagrangianul vectorial* L_{P_v} *al Problemei* (P_v) *dacă*

(*a*) *nu există nici un* $(v, w) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q$ *astfel încât* $L_{P_v}(\overline{x}, \overline{v}, \overline{w}) \leq L_{P_v}(\overline{x}, v, w)$;

(*b*) *nu există nici un* $x \in X$ *astfel încât* $L_{P_v}(\overline{x}, \overline{v}, \overline{w}) \geq L_{P_v}(x, \overline{v}, \overline{w})$.

(*ii*) *Fie* $\overline{u} \in \mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}$. *Un punct* $(\overline{x}, \overline{v}, \overline{w}) \in X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q$ *se numeşte punct şa al Lagrangianului scalar* $L^{\overline{u}}_{P_v}$ *al Problemei* (P_v) *dacă*

$$L^{\overline{u}}_{P_v}(\overline{x}, v, w) \leqq L^{\overline{u}}_{P_v}(\overline{x}, \overline{v}, \overline{w}) \leqq L^{\overline{u}}_{P_v}(x, \overline{v}, \overline{w}),$$

pentru toţi $(x, v, w) \in X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q$.

Pentru problema de optimizare $(0,1)-\eta$ ce aproximează Problema (P_v),

$$(AP_v) \qquad \min f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & x \in X \\ & g(\overline{x}) + [\nabla g(\overline{x})]\,(\eta(x,\overline{x})) \leqq 0 \\ & h(\overline{x}) + [\nabla h(\overline{x})]\,(\eta(x,\overline{x})) = 0, \end{aligned}$$

notăm prin $\mathcal{F}(AP_v) := \{x \in X : g(\overline{x}) + [\nabla g(\overline{x})]\,(\eta(x,\overline{x})) \leqq 0, h(\overline{x}) + [\nabla h(\overline{x})]\,(\eta(x,\overline{x})) = 0\}$ mulţimea soluţiilor admisibile ale Problemei (AP_v).

Lagrangianul vectorial al Problemei (AP_v) şi *Lagrangianul scalar al Problemei* (AP_v) se pot defini analog cu cei pentru Problema (P_v).

În continuare dăm noţiuni pe care le folosim în ceea ce urmează.

Definiţia 5.1.4 (*a se vedea [96]*) *Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, $\overline{x}$ un punct interior al lui X, $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în $\overline{x}$ şi $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ o funcţie. Spunem că funcţia f este*

(i) invexă în $\overline{x}$ în raport cu η dacă

$$f(x) - f(\overline{x}) \geqq \langle \nabla f(\overline{x}), \eta(x,\overline{x}) \rangle\,, \text{ pentru toţi } x \in X.$$

(ii) incavă în $\overline{x}$ în raport cu η dacă $(-f)$ este invexă în $\overline{x}$ în raport cu η.

(iii) avexă în $\overline{x}$ în raport cu η dacă f este şi invexă şi incavă în $\overline{x}$ în raport cu η, sau echivalent

$$f(x) - f(\overline{x}) = [\nabla f(\overline{x})]\,(\eta(x,\overline{x}))\,, \text{ pentru toţi } x \in X.$$

(iv) avexă pe X în raport cu η dacă X este deschis, f este diferenţiabilă pe X şi avexă în orice $\overline{x} \in X$ în raport cu η.

Pentru $f = (f_1, ..., f_p) : X \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială, spunem că f este invexă (respectiv incavă, avexă) dacă fiecare funcţie componentă este invexă (respectiv incavă, avexă).

Observaţia 5.1.5 (*E.-L. Pop şi D.I. Duca [109]*) *În general, nu există o singură funcţie η astfel încât funcţia f este invexă în punctul $\overline{x} \in X$ în raport cu η.*

În continuare, prezentăm pentru problema de optimizare vectorială (P_v) un rezultat referitor la legăturile între soluţiile eficiente şi punctele şa ale Lagrangienilor (după [89]).

Teorema 5.2.4 (*E.-L. Pop şi D.I. Duca [111]*) *Fie X o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$ şi $f : X \to \mathbb{R}^p$, $g : X \to \mathbb{R}^m$ şi $h : X \to \mathbb{R}^q$ funcţii.*
Dacă $(\overline{x}, \overline{v}, \overline{w}) \in X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q$ este un punct şa al Lagrangianului vectorial L_{P_v} al Problemei (P_v), atunci $\overline{x}$ este o soluţie eficientă a Problemei (P_v).

Teorema 5.2.8 (*E.-L. Pop şi D.I. Duca [111]*) *Fie X o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, $\overline{x}$ un punct interior al lui X, $\eta : X \times X \to X$ o funcţie, $f : X \to \mathbb{R}^p$, $g : X \to \mathbb{R}^m$ şi $h : X \to \mathbb{R}^q$ alte funcţii. Presupunem că:*

(i) funcţiile f, g şi h sunt diferenţiabile în $\overline{x}$;

(ii) funcţiile f şi g sunt invexe în $\overline{x}$ în raport cu η;

(iii) funcţia h este avexă în $\overline{x}$ în raport cu η;

(iv) o condiţie de regularitate pentru Problema (P_v) este îndeplinită în $\overline{x}$.

Dacă $\overline{x}$ este o soluţie eficientă pentru Problema (P_v), atunci există un punct $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) \in (\mathbb{R}^p_+ \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{v}, \overline{w})$ este un punct şa al Lagrangianului scalar $L^{\overline{u}}_{P_v}$ al Problemei (P_v).

O legătură între soluţiile admisibile ale Problemei (P_v) şi ale Problemei (AP_v) (după [111]) urmează.

Lema 5.2.10 (*E.-L. Pop şi D.I. Duca [111]*) *Fie X o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, $\overline{x}$ un punct interior al lui X, $\eta : X \times X \to X$ o funcţie, $f : X \to \mathbb{R}^p$, $g : X \to \mathbb{R}^m$ şi $h : X \to \mathbb{R}^q$. Dacă:*

(i) funcţia g este diferenţiabilă în $\overline{x}$ şi incavă în $\overline{x}$ în raport cu η;

(ii) funcţia h este diferenţiabilă în $\overline{x}$ şi avexă în $\overline{x}$ în raport cu η;

atunci $\mathcal{F}(AP_v) \subseteq \mathcal{F}(P_v)$.

Teorema 5.2.12 (*E.-L. Pop şi D.I. Duca [111]*) *Fie X o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, $\overline{x}$ un punct interior al lui X, $\eta : X \times X \to X$, $f : X \to \mathbb{R}^p$, $g : X \to \mathbb{R}^m$ şi $h : X \to \mathbb{R}^q$ funcţii. Presupunem că:*

(i) funcţiile g şi h sunt diferenţiabile în $\overline{x}$;

(ii) funcţia g este invexă în $\overline{x}$ în raport cu η;

(iii) funcţia h este avexă în $\overline{x}$ în raport cu η;

(iv) $\eta(\overline{x}, \overline{x}) = 0$.

(a) Dacă $(\overline{x}, \overline{v}, \overline{w})$ este un punct şa al Lagrangianului vectorial L_{AP_v} al Problemei (AP_v), atunci $(\overline{x}, \overline{v}, \overline{w})$ este un punct şa al Lagrangianului vectorial L_{P_v} al Problemei (P_v).

(b) Dacă $(\overline{x}, \overline{v}, \overline{w})$ este un punct şa al Lagrangianului scalar $L^{\overline{u}}_{AP_v}$ al Problemei (AP_v), atunci $\overline{x}$ este o soluţie eficientă a Problemei (P_v).

Teorema 5.2.14 (*E.-L. Pop şi D.I. Duca [111]*) *Fie X o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, $\overline{x}$ un punct interior al lui X, $\eta : X \times X \to X$ o funcţie, şi $f : X \to \mathbb{R}^p$, $g : X \to \mathbb{R}^m$ şi $h : X \to \mathbb{R}^q$ alte funcţii. Presupunem că:*

(i) funcţia f este diferenţiabilă în $\overline{x}$;

(ii) funcţia g este diferenţiabilă în $\overline{x}$ şi incavă în $\overline{x}$ în raport cu η;

(iii) funcţia h este diferenţiabilă în $\overline{x}$ şi avexă în $\overline{x}$ în raport cu η;

(iv) $\overline{x} \in \mathcal{F}(AP_v)$.

Dacă $\overline{x}$ este o soluţie eficientă pentru Problemă (P_v), atunci $\overline{x}$ este o soluţie eficientă a Problemei (AP_v).

Alte legături între soluţiile eficiente şi punctele şa ale Lagrangienilor Problemei

(P_v) şi Problemei (AP_v) se pot formula, de asemenea.

Bibliografie

[1] C.D. Aliprantis, M. Florenzano , V.F. Martins-da-Rocha, R. Tourky, *Equilibrium analysis in financial markets with countably many securities*, Journal of Mathematical Economics 40, 683-699, 2004.

[2] T. Antczak, *Optimality and duality for nonsmooth multiobjective programming problems with V-r-invexity*, Journal of Global Optimization 45, 319-334, 2009.

[3] T. Antczak, *Saddle-point criteria in an $\eta-$approximation method for nonlinear mathematical programming problems involving invex functions*, Journal of Optimization Theory and Applications 132(1), 71-87, 2007.

[4] T. Antczak, *Saddle-point criteria and duality in multiobjective programming via an $\eta-$approximation method*, The ANZIAM Journal 47(2), 155-172, 2005.

[5] T.Q. Bao, B.S. Mordukhovich, *Extended Pareto optimality in multiobjective problems*, Recent Developments in Vector Optimization, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 467-515, 2012.

[6] T.Q. Bao, B.S. Mordukhovich, *Relative Pareto minimizers for multiobjective problems: existence and optimality conditions*, Mathematical Programming, Series A 122, 301-347, 2010.

[7] M. S. Bazarra, H. D. Sherali, C. M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algoritms*, John Wiley and Sons, New York, NY, 1991.

[8] A. Ben-Israel, A. Ben-Tal, S. Zlobec, *Optimality in nonlinear programming: a feasible directions approach*, John Wiley & Sons, New York, 1981.

[9] A. Ben-Israel, B. Mond, *What is invexity?*, Journal of Australian Mathematical Society Series B 88, 1-9, 1986.

[10] H. Boncea, D. Duca, *On the $\eta-(1,2)$ approximated optimization problems*, Carpathian Journal of Mathematics 28(1), 17-24, 2012.

[11] J.M. Borwein, R. Goebel, *Notions of relative interior in Banach spaces*, Journal of Mathematical Sciences (New York) 115(4), 2542-2553, 2003.

[12] J.M. Borwein, A.S. Lewis, *Partially finite convex programming, Part I: Quasi relative interiors and duality theory*, Mathematical Programming Series B 57(1), 15-48, 1992.

[13] J.M. Borwein, A.S. Lewis, *Convex analysis and nonlinear optimization: Theory and examples, Second edition*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathéematiques de la SMC 3, Springer-Verlag, New York, 2006.

[14] R.I. Boţ, *Conjugate duality in convex optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 637, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.

[15] R.I. Boţ, *Duality and optimality in multiobjective optimization*, Ph.D. Thesis. Fakultät für Mathematik, Technische Universität Chemnitz, 2003.

[16] R.I. Boţ, E.R. Csetnek, *Regularity conditions via generalized interiority notions in convex optimization: new achievements and their relation to some classical statements*, Optimization 61(1), 35-65, 2012.

[17] R.I. Boţ, E.R. Csetnek, A. Moldovan, *Revisiting some duality theorems via the quasirelative interior in convex optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications 139(1), 67-84, 2008.

[18] R.I. Boţ, E.R. Csetnek, G. Wanka, *Regularity conditions via quasi-relative interior in convex programming*, SIAM Journal of Optimization 19(1), 217-233, 2008.

[19] R.I. Boţ, S.-M. Grad, *Duality for vector optimization problems via a general scalarization*, 23rd European Conference on Operational Research in Bonn, July 5 - 8, 2009 - Guest Eds: Erik Kropat and Gerhard-Wilhelm Weber, Volume 60, Issue 10-11, 2011.

[20] R.I. Boţ, S.-M. Grad, *Extending the classical vector Wolfe and Mond-Weir duality concepts via perturbations*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis 12(1), 81-101, 2011.

[21] R.I. Boţ, S.-M. Grad, *Wolfe duality and Mond-Weir duality via perturbations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 73(2), 374-384, 2010.

[22] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *A general approach for studying duality in multiobjective optimization*, Mathematical Methods of Operations Research (ZOR) 65(3), 417-444, 2007.

[23] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *A new constraint qualification for the formula of the subdifferential of composed convex functions in infinite dimensional spaces*, Mathematische Nachrichten 281(8), 1088-1107, 2008.

[24] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *New regularity conditions for strong and total Fenchel-Lagrange duality in infinite dimensional spaces*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 69(1), 323-336, 2008.

[25] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *Duality in vector optimization*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.

[26] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *New regularity conditions for Lagrange and Fenchel-Lagrange duality in infinite dimensional spaces*, Mathematical Inequalities & Applications 12(1), 171-189, 2009.

[27] R.I. Boţ, G. Kassay, G. Wanka, *Strong duality for generalized convex optimization problem*, Journal of Optimization Theory and Applications 127(1), 45-70, 2005.

[28] R.I. Boţ, G. Wanka, *An analysis of some dual problems in multiobjective optimization (I)*, Optimization 53(3), 281-300, 2004.

[29] R.I. Boţ, G. Wanka, *An analysis of some dual problems in multiobjective optimization (II)*, Optimization 53(3), 301-324, 2004.

[30] R. I. Boţ, G. Wanka, *Duality for multiobjective optimization problems with convex objective functions and D.C. constraints*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 315(2), 526-543, 2006.

[31] W. Breckner, I. Kolumbán, *Dualität bei Optimierungsaugaben in Topologischen Vektorräumen*, Mathematica 10(33), 229-244, 1968.

[32] W. Breckner, I. Kolumbán, *Konvexe Optimierungsaufgaben in Topologischen Vektorräumen*, Mathematica Scandinavica 25, 227-247, 1969.

[33] R. Cambini, L. Carosi, *Duality in multiobjective optimization problems with set constraints*, in: A. Eberhard, N. Hadjisavvas, D.T. Luc (eds.), Generalized convexity, generalized monotonicity and applications, Proceedings of the 7th International Symposium on Generalized Convexity and Generalized Monotonicity held in Hanoi, August 27-31, 2002, Nonconvex Optimization and its Applications 77, Springer-Verlag, New York, 131-146, 2005.

[34] F. Cammaroto, B. Di Bella, *Separation theorem based on the quasirelative interior and application to duality theory*, Journal of Optimization Theory and Applications 125, 223-229, 2005.

[35] E. Carrizosa, J. Fliege, *Generalized goal programming: polynomial methods and applications*, Mathematical Programming 93(2), 281-303, 2002.

[36] C.R. Chen, S.J. Li, *Different conjugate dual problems in vector optimization and their relations*, Journal of Optimization Theory and Applications 140(3), 443-461, 2009.

[37] T.Q. Chien, *Nondifferentiable and quasidifferentiable duality in vector optimization theory*, Kybernetika 21(4), 298-312, 1985.

[38] L. Cioban, D. Duca, *Optimization problems and* $(0,2)-\eta-$*approximated optimization problems*, Carpathian Journal of Mathematics 28(1), 37-46, 2012.

[39] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, John Wiley and Sons Inc, New York, A Wiley-Interscience Publication, 1983.

[40] A. Coulibaly, J.-P. Crouzeix, *Condition numbers and error bounds in convex programming*, Mathematical Programming Series B 116, 79-113, 2009.

[41] B.D. Craven, *A modified Wolfe dual for weak vector minimization*, Numerical Functional Analysis and Optimization 10(9-10), 899-907, 1989.

[42] B.D. Craven, *Lagrangean conditions and quasiduality*, Bulletin of the Australian Mathematical Society 16(3), 325-339, 1989.

[43] G. Cristescu, L. Lupşa, *Non-Connected Convexities and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 2002.

[44] E.R. Csetnek, *Overcoming the failure of the classical generalized interior-point regularity conditions in convex optimization. Applications of the duality theory to enlargements of maximal monotone operators*, Logos Verlag, Berlin, 2010.

[45] P. Daniele, S. Giuffrè, *General infinite dimensional duality theory and applications to evolutionary network equilibrium problems*, Optimization Letters 1, 227-243, 2007.

[46] P. Daniele, S. Giuffré, G. Idone, A. Maugeri, *Infinite dimensional duality and applications*, Mathematische Annalen 339(1), 221-239, 2007.

[47] D.I. Duca, *Multicriteria Optimization in Complex Space*, Casa Cărţii de ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005.

[48] D.I. Duca, E. Duca, *Optimization Problems and* $\eta-$ *Approximation Optimization Problems*, Studia Universitatis Babeş-Boyai, Math 54(4), 49-62, 2009.

[49] R.R. Egudo, *Efficiency and generalized convex duality for multiobjective programs*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 138(1), 84-94, 1989.

[50] R.R. Egudo, *Proper efficiency and multiobjective duality in nonlinear programming*, Journal of Information & Optimization Scieces 8(2), 155-166, 1987.

[51] R.R. Egudo, T. Weir, B. Mond, *Duality without constraint qualification for multiobjective programming*, Journal of the Australian Mathematical Society Series B 33(4), 531-544, 1992.

[52] M. Ehrgott, *Multicriteria optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 491, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[53] D.H. Fang, C. Li, X.Q. Yan, *Stable and total Fenchl duality for DC optimization problems in locally convex spaces*, SIAM ournal on Optimization 21(3), 730-760, 2011.

[54] W. Fenchel, *On conjugate convex functions*, Canadian Journal of Mathematics 1, 73-77, 1949.

[55] J. Fliege, *Approximation techniques for the set of efficient points*, Habilitationsschrift, Fachbereich Mathematik, Universität Dortmund, 2001.

[56] F. Flores-Bazán, F. Flores-Bazán, C. Vera, *Gordan-type alternative theorems and vector optimization revisited*, Recent Developments in Vector Optimization, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 29-59, 2012.

[57] A.M. Geoffrion, *Proper efficiency and the theory of vector maximization*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 22(3), 618-630, 1968.

[58] C. Gerstewitz, *Nichtkonvexe Dualität in der Vektoroptimierung*, Wissenschaftliche Zeitschrift den Technischen Hochschule "Carl Schorlemmer" Leuna-Merseburg 25(3), 357-364, 1983.

[59] M.S. Gowda, M. Teboulle, *A comparison of constraint qualifications in infinite dimensional convex programming*, SIAM Journal on Control and Optimization 28(4), 925-935, 1990.

[60] A. Göpfert, *Multicriterial duality, examples and advances*, In: G. Fandel, M. Grauer, A. Kurzhanski, A.P, Wierzbicki (eds) Large-scale modelling and interactive decision analysis. Proceedings of the international workshop held in Eisenach, November 18-21, 1985. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 273, Springer-Verlag, Berlin, 52-58, 1986.

[61] L.M. Graña Drummond, B.F. Svaiterb, *A steepest descent method for vector optimization*, Journal of Computational and Applied Mathematics 175, 395-414, 2005.

[62] C. Gerth, P. Weidner, *Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications 67(2), 297-320, 1990.

[63] X.-H. Gong, *Optimality conditions for Henig and globally proper efficient solutions with ordering cone has empty interior*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 307(1), 12-31, 2005.

[64] A. Grad, *Generalized duality and optimality conditions*, Editura Mega, Cluj-Napoca, 2010.

[65] A. Grad, *Quasi interior-type optimality conditions in set-valued duality*, va apărea în Journal of Nonlinear and Convex Analysis.

[66] S.-M. Grad, E.-L. Pop, *Alternative generalized Wolfe type and Mond-Weir type vector duality*, trimis spre publicare în Journal of Nonlinear and Convex Analysis.

[67] S.-M. Grad, E.-L. Pop, *Comparing the optimality conditions for a constrained vector optimization problem via different scalarizations*, prezentat la 10th EUROPT Workshop on Advances in Continuous Optimization, July 5-7, 2012, Siauliai, Lithuania.

[68] S.-M. Grad, E.-L. Pop, *Vector duality for convex vector optimization problems with respect to quasi-minimality*, trimis spre publicare în to Optimization, Special Issue on Recent Advances in Continuous Optimization.

[69] A. Guerraggio, E. Molho, A. Zaffaroni, *On the notion of proper efficiency in vector optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications 82(1), 1-21, 1994.

[70] C. Gutiérez, B. Jiménez, V. Novo, *On approximate solutions in vector optimization problems via scalarization*, Computational Optimization and Applications 35 (3), 305-324, 2006.

[71] T.X.D Ha, *Optimality conditions for various efficient solutions involving coderivatives: from set-valued optimization problems to set-valued equilibrium problems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 75, 1305-1323, 2012.

[72] S. Helbig, *A scalarization for vector optimization problems in locally convex spaces*, Proceedings of the Annual Scientific Meeting of the GAMM (Vienna, 1988), Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 69(4), T89-T91, 1989.

[73] J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lamaréchal, *Fundamentals of convex analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[74] M.A. Islam, *Sufficiency and duality in nondifferentiable multiobjective programming*, Pure and Applied Mathematika Scieces 39(1-2), 31-39, 1994.

[75] D. Inoan, *Existence and behavior of solutions for variational inequalities over products of sets*, Mathematical Inequalities and Applications, Zagreb, 12(4), 753-762, 2009.

[76] D. Inoan, J. Kolumbán, *On pseudomonotone mappings*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 68(1), 47-53, 2008.

[77] J. Jahn, *Duality in vector optimization*, Mathematical Programming 25(3), 343-353, 1983.

[78] J. Jahn, *Scalarization in vector optimization*, Mathematical Programming 29(2), 203-218, 1984.

[79] J. Jahn, *Mathematical vector optimization in partially ordered linear spaces*, Verlag Peter Lang, Frankfurt am Main, 1986.

[80] J. Jahn, *Vector optimization - theory, applications, and extensions*, Springer-Verlag, Berline-Heidelberg, 2004.

[81] I. Kaliszewski, *Norm scalarization and proper efficiency in vector optimization*, Foundations of Control Engineering 11(3), 117-131, 1986.

[82] H. Kawasaki, *A duality theorem in multiobjective nonlinear programming*, Mathematics of Operations Research 7(1), 95-110, 1982.

[83] P.Q. Khanh, *Optimality conditions via norm scalarization in vector optimization*, SIAM Journal on Control and Optimization 31(3), 646-658, 1993.

[84] V.L. Klee, *Convex sets in linear spaces*, Duke Mathematics Journal 16, 443-466, 1948.

[85] M.A. Limber, R.K. Goodrich, *Quasi interiors, Lagrange multipliers and L^p spectral estimation with lattice bounds*, Journal of Optimization Theory and Applications 78(1), 143-161, 1993.

[86] T.J. Lowe, J.-F. Thisse, J.E. Ward, R.E. Wendell, *On efficient solutions to multiple objective mathematical problems*, Management Science 30(11), 13-46, 1984.

[87] D.T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 319, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[88] D.T. Luc, T.Q. Phong, M. Volle, *Scalarizing functions for generating the weakly efficient solution set in convex multiobjective problems*, SIAM Journal on Optimization 15(4), 987-1001, 2005.

[89] O.L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1969.

[90] O.L. Mangasarian, *Second and Higher-Order Duality in Nonlinear Programming*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 51, 607-620, 1975.

[91] K.M. Miettinen, *Nonlinear multiobjective optimization*, Kluwer Academic Publishers, Boston Dordrecht London, 1998.

[92] K. Miettinen, M.M. Mäkelä, *On scalarizing functions in multiobjective optimization*, OR Spectrum 24(2), 193-213, 2002.

[93] E. Miglierina, E. Molho, *Scalarization and stability in vector optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications 114(3), 657-670, 2002.

[94] E. Miglierina, E. Molho, M. Rocca, *Well-posedness and scalarization in vector optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications 126(6), 391-409, 2004.

[95] K. Mitani, H. Nakayama, *A multiobjective diet planning support system using the satisficing trade-off method*, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis 6(3), 131-139, 1997.

[96] K.S. Mishra, G. Giorgi, *Nonconvex Optimization and its applications: Invexity and Optimization*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

[97] S.K. Mishra, S. Wang, K.K. Lai, *Generalized convexity and vector optimization*, Nonconvex Optimization and its Applications 90, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[98] B. Mond, *A symmetric dual theorem for non-linear programs*, Quarterly of Applied Mathematics 23, 265-269, 1965.

[99] B. Mond, M.A. Hanson, *On duality with generalized convexity*, Mathematische Operationsforschung und Statistik Series Optimization 15(2), 313-317, 1984.

[100] B. Mond, T. Weir, *Generalized concavity and duality*, In: Schaible S, Zemba WT (eds) Generalized concavity in optimization and economics. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, University of British Columbia, Vancouver, 1980. Academic Press, New York-London, 263-279, 1981.

[101] B. Mond, T. Weir, *Symmetric duality for nonlinear multiobjective programming*, In: Kumar HI, Santosh K (eds) Recent developments in mathematical programming. CRC Press, 137-153, 1991.

[102] B. Mond, S. Zlobec, *Duality for nondifferentiable programing without a constraint qualification*, Utilitas Mathematica 15, 291-302, 1979.

[103] B.S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation, Vol. I: Basic Theory. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (A series of Comprehensive Studies in Mathematics 330)*, Berlin, 2006.

[104] B.S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation, Vol. II: Applications. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (A series of Comprehensive Studies in Mathematics 330)*, Berlin, 2006.

[105] H. Nakayamma, *Duality theory in vector optimization: an overview*, In: Y.Y. Haimes, V. Chankong (eds) Decision making with multiple obectives, Proceedings of the sixth international conference on mutiple-criteria decision making held at Case Wstern Reserve University, Cleveland, Ohio, June 4-8, 1984, Lecture notes in Economics and Mathematical Systems 242, Springer-Verlag, Berlin, 109-125.

[106] H. Nakayamma, *Some remarks on dualization in vector optimization*, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis 5(3), 218-255, 1996.

[107] E.-L. Pop, *Some remarks for relative interior in set-valued optimization*, General Mathematics (Special Issue) 20(5), 83-91, 2012.

[108] E.-L. Pop, D. Duca, *Optimization problems and first order approximated optimization problems*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity 8, 65-79, 2010.

[109] E.-L. Pop, D. Duca, *Optimization problems, first order approximated optimization problems and their connections*, Carpathian Journal of Mathematics 28(1), 133-141, 2012.

[110] E.-L. Pop, D. Duca, *Optimization problems, first order approximated optimization problems, duals and the connections between their saddle points*, Buletinul Stiintific al Universitatii "Politehnica" din Timisoara, Romania, Seria Matematica - Fizica 56(70)(2), 3-13, 2011.

[111] E.-L. Pop, D.I. Duca, *Connections between vector optimization problems, their solutions and saddle points*, va apărea în Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity.

[112] N. Popovici, *Optimizare vectorială*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005.

[113] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[114] R.T. Rockafellar, *Conjugate duality and optimization*, CBMS Regional Conferences Series in Mathematics 16, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1974.

[115] A.M. Rubinov, R.N. Gasimov, *Scalarization and nonlinear scalar duality for vector optimization with preferences that are not necessarily a pre-order relation*, Journal of Global Optimization 29(4), 455-477, 2004.

[116] Y. Sawaragi, H. Nakayama, T. Tanino, *Theory of multiobjective optimization*, Mathematics in Science and Engineering 176, Academic Press, Orlando, 1985.

[117] H.H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[118] B. Schandl, K. Klamroth, M.M. Wiecek, *Norm-based approximation in multicriteria programming*, Global optimization, control, and games IV. Computers & Mathematics with Applications 44(7), 925-942, 2002.

[119] M. Schechter, *A subgradient duality theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 61(3), 850-855, 1977.

[120] J. Stoer, C. Witzgall, *Convexity and Optimization in Finite Dimensions*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1970.

[121] C. Tammer, *A variational principle and applications for vectorial control approximation problems*, Preprint 96-09, Reports on Optimization and Stochastics, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 1996.

[122] C. Tammer, A. Göpfert, *Theory of vector optimization*, In: M. Ehrgott, X. Gandibleux (eds) Multiple criteria optimization: state of the art annotated bibliographic surveys, International Series in Operations Research & Management Science 52, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1-70, 2002.

[123] C. Tammer, K. Winkler, *A new scalarization approach and applications in multicriteria d.c. optimization*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis 4(3), 365-380, 2003.

[124] T. Tanaka, D. Kuroiwa, *The convexity of A and B assures* $\operatorname{int} A + B = \operatorname{int}(A + B)$, Applied Mathematics Letters 6(1), 83-86, 1993.

[125] T. Tanino, *Conjugate duality in vector optimization*, Journal of Mathematical Analysis and Application 167(1), 84-97, 1992.

[126] T. Tanino, H. Kuk, *Nonlinear multiobjective programming*, In: M. Ehrgott, X. Gandibleux X (eds) Multiple criteria optimization: state of the art annotated bibliographic surveys, International Series in Operations Research & Management Science 52, Kluwer Academic Publishers, Boston, 71-128, 2002.

[127] T. Tanino, Y. Sawaragi, *Conjugate maps and duality in multiobjective optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications 31(4), 473-499, 1980.

[128] T.N. Tasset, *Lagrange multipliers for set-valued functions when ordering cones have empty interior*, PhD Thesis, University of Colorado, 2010.

[129] G. Wanka, R.I. Boţ, *Multiobjective duality for convex-linear problems*, In: K. Inderfurth, G. Schwödiauer, W. Domschke, F. Juhnke, P. Kleinschmidt, G. Wäscher (eds) Operations research proceedings 1999, Selected papers of the symposium (SOR 1999) held at the Otto-von-Guericke University Magdeburg, Magdeburg, September 1-3, 1999. Springer-Verlag, Berlin, 36-40, 2000.

[130] G. Wanka, R.I. Boţ, *Multiobjective duality for convex-linear problems II*, Mathematical Methods of Operations Research (ZOR) 53(3), 419-433, 2001.

[131] G. Wanka, R.I. Boţ, *A new duality approach for multiobjective convex optimization problems*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis 3(1), 41-57, 2002.

[132] G. Wanka, R.I. Boţ, S.-M. Grad, *Multiobjective duality for convex semidefinite programming problems*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen (Journal for Analysis and its Applications) 22(3), 711-728, 2003.

[133] G. Wanka, R.I. Boţ, E.T. Vargyas, *Duality for location problems with unbounded unit balls*, European Journal of Operational Research 179(3), 1252-1265, 2007.

[134] P. Weidner, *An approach to different scalarizations in vector optimization*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Ilmenau 36(3), 103-110, 1990.

[135] T. Weir, *A duality theorem for a multiple objective fractional optimization problem*, Bulletin of the Australian Mathematical Society 34(3), 415-425, 1986.

[136] T. Weir, *A note on invex functions and duality in multiple objective optimization*, Opsearch 25(2), 98-104, 1988.

[137] T. Weir, *Duality for nondifferentiable multiple objective fractional programming problems*, Utilitas Mathematica 36, 53-64, 1989.

[138] T. Weir, *On duality in multiobjective fractional programming*, Opsearch 26(3), 151-158, 1989.

[139] T. Weir, *On efficiency, proper efficiency and duality in multiobjective programming*, Asia-Pacific Journal of Operational Research 7(1), 46-54, 1990.

[140] T. Weir, *Proper efficiency and duality for vector valued optimization problems*, Journal of Australian Mathematical Society Series A 43(1), 21-34, 1987.

[141] T. Weir, B. Mond, *Duality for generalized convex programming without a constraint qualification*, Utilitas Mathematica 31, 233-242, 1987.

[142] T. Weir, B. Mond, *Generalised convexity and duality in multiple objective programming*, Bulletin of the Australian Mathematical Society 39(2), 287-299, 1989.

[143] T. Weir, B. Mond, *Multiple objective programming duality without a constraint qualification*, Utilitas Mathematica 39, 41-55, 1991.

[144] T. Weir, B. Mond, *Symmetric and self duality in mutiple objective programming*, Asia-Pacific Journal of Operational Research 5(2), 124-133, 1988.

[145] T. Weir, B. Mond, B.D. Craven, *On duality for weakly minimized vector valued optimization problems*, Optimization 17(6), 711-721, 1986.

[146] T. Weir, B. Mond, B.D. Craven, *Weak minimization and duality*, Numerical Functional Analysis and Optimization 9(1-2), 181-192, 1987.

[147] A.P. Wierzbicki, *Basic properties of scalarizing functionals for multiobjective optimization*, Mathematische Operationsforschung und Statistik Series Optimization 8(1), 55-60, 1977.

[148] P. Wolfe, *A duality theorem for nonlinear programming*, Quarterly of Applied Mathematics 19, 239-244, 1961.

[149] X.M. Yang, K.L. Teo, X.Q. Yang, *Duality for a class of nondifferentiable multiobjective programming problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 252(2), 999-1005, 2000.

[150] C. Zălinescu, *A comparison of constraint qualifications in infinite-dimensional convex programming revisited*, Journal of Australian Mathematical Society Series B 40(3), 353-378, 1999.

[151] C. Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, Singapore, 2002.

[152] M. Zeleny, *Linear multiobjective programming*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 95, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[153] Z. Zhou, *Optimality conditions of vector set-valued optimization problem involving relative interior*, Journal of Inequalities and Applications, doi:10.1155/2011/183297, 2011.

[154] Z.A. Zhou, X.M. Yang, *Optimality conditions of generalized subconvexlike set-valued optimization problems based on the quasi-relative interior*, Journal of Optimization Theory and Applications 150(2), 327-340, 2011.