



Universitatea Babeș-Bolyai
Facultatea de Matematică și Informatică

Probleme cu valori pe frontieră mixte pentru sisteme neliniare din mecanica fluidelor și a mediilor poroase

Teză de doctorat - Rezumat

Coordonator științific

Prof. Univ. Dr. Mirela Kohr

Student doctorand

Robert Gutt

Cluj-Napoca
2019

Cuprins

Introducere	5
I Probleme cu valori pe frontieră pentru sistemele Brinkman și Darcy-Forchheimer-Brinkman în cadrul Euclidean	10
1 Concepte geometrice și funcționale	11
1.1 Domenii Lipschitz în \mathbb{R}^n	11
1.2 Spații Sobolev și Besov în \mathbb{R}^n și pe domenii Lipschitz	13
1.3 Operatorii urmă	15
1.4 Operatorul Stokes și Brinkman	16
1.5 Operatorul de derivare conormal pentru sistemul Brinkman	17
2 Teoria potențialelor de strat pentru sistemele Stokes și Brinkman pe domenii Lipschitz în \mathbb{R}^n	20
2.1 Soluția fundamentală pentru sistemele Stokes and Brinkman în \mathbb{R}^n	20
2.2 Proprietățile de mapare a potențialului Newtonian pentru sistemul Brinkman	21
2.3 Proprietăți de mapare a potențialelor de strat Brinkman în spații Sobolev și Besov	22
2.3.1 Potențialul de simplu strat Brinkman și proprietăți de mapare corespunzătoare	22
2.3.2 Potențialul de dublu strat Brinkman și proprietăți de mapare corespunzătoare	24
2.4 Proprietăți ale potențialelor de strat Brinkman în spații Sobolev și Besov	25
2.4.1 Relațiile de salt a potențialelor de simplu și dublu strat	25
2.4.2 Proprietăți de inversabilitate ale operatorilor potențiali de strat	27
3 Probleme mixte pentru sistemele Brinkman și Darcy-Forchheimer-Brinkman în spații Besov pe domenii Lipschitz mărginite și încrețite din $\mathbb{R}^n, n \geq 3$	29
3.1 Probleme cu valori pe frontieră pentru sistemul Brinkman în domenii Lipschitz din \mathbb{R}^n	30
3.1.1 Problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman cu date în spații cu baza în L^2	30
3.1.2 Operatorul Neumann-to-Dirichlet pentru sistemul Brinkman	31
3.1.3 Problema mixtă Dirichlet și Neumann pentru sistemul Brinkman cu date în spații cu baza în L^p	32
3.1.4 Problema Poisson de tipul mixt Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman cu date în spații cu baza în L^p	33
3.2 Probleme semiliniare pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman	34
3.2.1 Problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul semilinear Darcy-Forchheimer-Brinkman în spații Besov	34

4	Abordare variațională și potențială pentru probleme mixte pentru sistemele Brinkman și Darcy-Forchheimer-Brinkman în \mathbb{R}^2	36
4.1	Abordare variațională pentru probleme pe frontieră pentru sistemul Brinkman	37
4.1.1	Abordare variațională pentru problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman	37
4.2	Problema Poisson cu condiții mixte la frontieră pentru sistemul Brinkman	39
4.2.1	Problema Poisson pentru sistemul Brinkman cu condiții mixte Dirichlet și Neumann	39
4.2.2	Problema Poisson pentru sistemul Brinkman cu condiții Dirichlet și Robin	40
4.3	Probleme cu valori pe frontieră pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman system în \mathbb{R}^2	40
4.3.1	Probleme cu valori pe frontieră de tipul mixt Dirichlet-Robin pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman	41
II Probleme cu valori pe frontieră pentru sistemele Stokes și Navier-Stokes pe varietăți Riemanniene compacte		42
5	Rezultate preliminarii pentru probleme la frontieră pe varietăți Riemanniene compacte	43
5.1	Setări funcționale și rezultate aferente varietăților Riemanniene compacte	43
5.1.1	Concepte geometrice asociate varietăților Riemanniene compacte	44
5.1.2	Spații Sobolev pe varietăți Riemanniene compacte	45
5.1.3	Operatorul de deformare pe spațiile Sobolev	45
5.1.4	Operatorul Stokes și Oseen pe varietăți Riemanniene compacte	46
5.1.5	Operatorul urmă și operatorul de derivare conormal	47
5.2	Soluția fundamentală și teoria potențialelor de strat pentru sistemul Stokes	48
5.2.1	Soluția fundamentală pentru sistemul Stokes pe varietăți Riemanniene compacte	48
5.2.2	Operatorii potențiali de strat Stokes și proprietățile corespunzătoare	49
5.2.3	Rezultate de inversabilitate pentru operatorii potențiali de strat asociați problemelor mixte	50
5.2.4	Operatori compacți asociați problemelor cu valori pe frontieră mixte	50
6	Probleme cu valori pe frontieră pentru sistemele Stokes, Oseen și Navier-Stokes pe varietăți Riemanniene compacte	51
6.1	Probleme cu valori pe frontieră de tipul mixt în domenii Lipschitz pe varietăți Riemanniene compacte	52
6.1.1	Problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Stokes	52
6.1.2	Problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Oseen	54
6.2	Probleme cu valori pe frontieră de tipul mixt pentru sisteme neliniare pe varietăți Riemanniene compacte	54
6.2.1	Problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Navier-Stokes	54
III Metode numerice și aplicații asociate problemelor cu valori pe frontieră mixte		56
7	Metode și rezultate numerice pentru problema fluxului cavității antrenată de mișcarea unui perete umplută cu un mediu poros	57
7.1	Problema fluxului într-o cavitate antrenată de un perete mișcător. Enunț și observații	58

7.2	Analiza adimensională a sistemului Darcy-Forchheimer-Brinkman	58
7.2.1	Forma adimensională a sistemului neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman .	58
7.2.2	Formularea funcție de curent-vorticitate a sistemului neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman	60
7.2.3	Proprietăți fizice asociate curgerii fluidului	60
7.3	Metoda diferențelor centrale (CD) și Metoda elementului de frontieră dual reciproc (DRBEM)	61
7.4	Comparații cu rezultate numerice clasice din literatură	61
7.5	Rezultate numerice și discuții aferente pentru problema cavității antrenate de mișcarea unui perete care este umplută cu un mediu poros	63
7.5.1	Variația parametrilor fizici pentru problema cavității antrenată de un perete mobil în absența parametrului de alunecare	64
7.5.2	Problema curgerii unui fluid într-o cavitate antrenată de mișcarea unui perete în cazul unui parametru de alunecare	65
	Concluzii	67
	Bibliografie - Listă selectivă	68

Mulțumiri

În primul rând, aș dori să-mi exprim recunoștința către supraveghetorul meu științific, **Prof. Mirela Kohr**, pentru introducerea într-un domeniu atât de interesant și pentru tot ajutorul, toate sfaturile, încurajările, sprijinul constant și ideile prețioase. Fără sprijinul ei extraordinar și supravegherea atentă această teză nu ar fi fost posibilă.

De asemenea, îi mulțumesc **Prof. Gabriela Kohr**, pentru încurajarea ei de-a lungul acestor ani și pentru ajutorul acordat în pregătirea seminarului de analiză complexă. Recunoștința mea merge și la **Conf. Teodor Groșan**, care m-a ajutat în dezvoltarea simulărilor numerice referitoare la mecanica fluidelor și la **Conf. Cornel Pinte** pentru discuțiile utile pe tema varietăților Riemanniene.

În al doilea rând, îmi exprim recunoștința față de **Prof. Univ. Sergey Mikhailov** și **Prof. Wolfgang Wendland** pentru discuțiile și sugestiile lor valoroase. Mai mult, mulțumirile mele se îndreaptă către **Prof. Massimo Lanza de Cristoforis** pentru cele două oportunități de a vizita și de a studia în Departamentul de Matematică al Universității din Padova. De asemenea, aș dori să le mulțumesc colegilor de doctorat din Padova pentru mediul de lucru plăcut.

În al doilea an al studiilor de doctorat, am primit sprijin financiar de la Programul Operațional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, sub numărul proiectului POSDRU/187/1.5/S/155383.

Mai mult, aș dori, de asemenea, să-mi exprim recunoștința față de colaboratorii mei din departamentele de fizică. Am beneficiat mult de expertiza și experiența lor. Prin urmare, recunoștința mea merge la **CSIII Mircea Giloan** pentru faptul că m-a cooptat în domeniul interesant al metamaterialelor și pentru toată răbdarea și explicațiile sale din ultimii ani. De asemenea, aș dori să recunosc sprijinul financiar oferit de **Gavril Saplacan** în cadrul ”Companiei de Informatică Aplicată”.

Nu în ultimul rând, aș dori să-mi exprim recunoștința față de **CSII Emanoil Surducan** și **IDTI Vasile Surducan** pentru ajutorul oferit în obținerea unor rezultate experimentale în domeniul microundelor și electronic, precum și, de asemenea, pentru sprijinul lor constant la ”Institutul Național de Cercetare și Dezvoltare pentru Tehnologii Izotopice și Moleculare”.

În cele din urmă, aș dori să le mulțumesc mamei și prietenilor mei că m-au sprijinit în acest demers.

Introducere

Scopul prezentei teze este studierea problemelor cu valori pe frontieră de tip mixt (Dirichlet-Neumann, Dirichlet-Robin) pentru diverse sisteme eliptice în mecanica fluidelor și teoria mediilor poroase. Pentru a face acest lucru, sunt examinate și alte tipuri de probleme cu valori pe frontieră, precum condiții la limită de tip Dirichlet, Neumann și Robin.

Fie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ un domeniu Lipschitz, în care se află un fluid vâscos incompresibil și fie Γ frontiera acestuia, $\Gamma := \partial\mathcal{D}$. Pentru o constantă $\alpha > 0$ dată, *sistemul normalizat Brinkman* constă în următoarele ecuații

$$\Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{în } \mathcal{D} \quad (0.0.1)$$

unde \mathbf{u} este *câmpul viteză* și π este *câmpul presiune* al fluidului considerat. Mai mult, \mathbf{f} este numit *forța motrice*, care acționează asupra curgerii fluidului. Pentru $\alpha = 0$, sistemul (0.0.1) se reduce la *sistemul normalizat Stokes* care constă în următoarele ecuații

$$\Delta \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{în } \mathcal{D}. \quad (0.0.2)$$

Pentru problema în care inerția fluidului nu este neglijabilă, trebuie luat în considerare *sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman*, dat de

$$\Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \kappa |\mathbf{u}| \mathbf{u} - \beta (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{în } \mathcal{D}. \quad (0.0.3)$$

Menționăm că proprietățile fluidului și ale mediului poros în care se află fluidul sunt descrise de parametrii $\alpha, \kappa, \beta > 0$ (a se vedea Capitolul 9 pentru o discuție a rezultatelor numerice sau [87, p. 17]).

Când termenul neliniar nu apare în expresia sistemului (0.0.3), i.e., constanta $\beta = 0$, spunem că considerăm *sistemul semiliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman*. Similar, în cazul $\kappa = 0$, subliniem absența termenului semiliniar numindu-l sistemul *neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman*. Un alt caz special al sistemului (0.0.3) este bine-cunoscutul *sistem Navier-Stokes* obținut când $\alpha = 0$ și $\kappa = 0$, i.e.,

$$\Delta \mathbf{u} - \beta (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{în } \mathcal{D}. \quad (0.0.4)$$

Mai mult, condițiile la frontieră asociate sistemelor de mai jos pot fi de tipul Dirichlet, Neumann sau Robin pe toată frontiera

$$\gamma^+ \mathbf{u} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi) = \mathbf{g}, \quad \mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi) + \lambda \gamma^+ \mathbf{u} = \mathbf{l} \quad \text{pe } \Gamma, \quad (0.0.5)$$

unde operatorul urmă γ^+ , operatorul de derivare conormal \mathbf{t}_α^+ și o funcție cu valori matriciale λ sunt definite în ceea ce urmează. Menționăm acum că "sensul" în care acești operatori sunt considerați, joacă un rol important în înțelegerea diferitelor probleme cu valori pe frontieră pe parcursul acestei teze. Pe de altă parte, pentru a putea formula probleme mixte la limită, frontiera Γ a unui domeniu Lipschitz \mathcal{D} trebuie să fie descompusă în două părți Γ_D și Γ_N . Definițiile precise sunt date în Capitolele 3 și 4, depinzând de regularitatea datelor pe frontieră.

Începem cu o scurtă privire istorică de ansamblu a literaturii științifice legate de astfel de probleme cu valori pe frontieră, să menționăm importanța acestor probleme pe frontieră în

cea ce privește condițiile speciale de frontieră. În prezent, multe probleme de inginerie se ocupă din punct de vedere matematic cu astfel de probleme de frontieră (a se vedea, de ex., [5, 6, 11, 77, 85, 86, 7]). Fluxul unui fluid într-o conductă este modelat deseori de ecuațiile Navier-Stokes și condițiile de tip Dirichlet sunt impuse pe pereții țevilor, în timp ce intrarea fluidului este dată de condițiile Dirichlet sau Neumann, în funcție de datele cunoscute, iar evacuarea este în cea mai mare parte simulată de condițiile limită Neumann bazate pe presiunea fluidului. În funcție de tensiunea de suprafață dintre fluid și peretele conductei, se poate impune un parametru suplimentar de alunecare, care duce la condițiile pe frontieră de tip Robin. Alte aplicații practice interesante, care sunt direct legate de problemele analizate în această teză, pot fi consultate în [46], [76], [109], [31, 87].

Au fost utilizate diferite metode pentru a studia probleme cu valori la frontieră în mecanica fluidelor, cum ar fi abordarea variațională [61], metodele teoriei potențiale și metodele integrale de tip domeniu-frontieră bazate pe parametrix (sau funcția Levi). Începem prin menționarea lucrării lui Fabes, Kenig și Verchota [30], care reduce studiul problemelor Dirichlet și Neumann pentru sistemul Stokes la analiza unor ecuații integrale de frontieră (BIE). Acestea au dovedit bine-punerea problemelor de regularitate și Neumann atunci când datele la frontieră aparțin spațiilor cu baza în L^p , cu p aproape de 2. Interpolând rezultatul maximal slab obținut de Dahlberg și Kenig în [24] cu rezultatul din [30], Shen a obținut în [101] rezultatul de bine-punere a problemei Dirichlet pentru sistemul Stokes cu date în L^p ori de câte ori $2 < p < \infty$. Mitrea și Wright [86] au obținut mai multe rezultate de solvabilitate pentru un spectru mare de probleme la frontieră pentru sistemul Stokes în domeniile Lipschitz, cu datele la frontieră în diverse spații.

În ceea ce privește sistemul Laplace, I. Mitrea și M. Mitrea au furnizat rezultate de bine-punere în [83] pentru problema Poisson cu condiții la frontieră mixte Dirichlet-Neumann pe domenii Lipschitz mărginite în \mathbb{R}^3 , unde frontiera satisface o condiție geometrică specială (legată de noțiunea de domeniu Lipschitz încrețit) și unde datele aparțin spațiilor Sobolev și Besov. Pipher și Verchota [90] și Dahlberg și Kenig [22] au construit funcția Green pentru sistemul biarmonic cu condiții Dirichlet-Neumann în domeniile Lipschitz în cadrul spațiului Euclidian tridimensional. Taylor, Ott și Brown în [106] au studiat problema mixtă Dirichlet-Neumann în spațiile Sobolev cu bază în L^p pentru ecuația Laplace într-un domeniu Lipschitz mărginit în \mathbb{R}^n cu o descompunere generală a frontierei. Costabel și Stephan în [21] au analizat problemele mixte cu valori la frontieră pentru laplacian în domenii poligonale, folosind o abordare integrală la frontieră. Precup [93] a obținut rezultate de existență și localizare a soluțiilor nontriviale pozitive pentru sisteme variaționale eliptice semiliniare bazate pe ecuația Laplace.

Mai mult, să menționăm că rezultate similare de bine-punere au fost obținute pentru sistemul Lamé de Dahlberg și Kenig în [24]. Utilizând rezultatul de solvabilitate pentru problema cu valori pe frontieră mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Lamé obținut de Brown și Mitrea [12], Brown și colab. [13] au furnizat rezultate de bine-punere pentru problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Stokes pe domeniile Lipschitz încrețite în \mathbb{R}^3 , prin reducerea studiului său la cel al unei familii de operatori Fredholm în legătură cu sistemul Lamé și la unele estimări utile de tip Rellich.

Solvabilitatea problemei mixte *Dirichlet-Robin* pentru sistemul Brinkman dintr-un domeniu încrețit cu date pe frontieră în spațiile cu baza în L^2 a fost asigurată de Kohr, Lanza de Cristoforis și Wendland în [51, Teorema 6.1]. Ott, Kim și Brown [88] au construit funcția Green pentru sistemul liniar Stokes într-un domeniu Lipschitz în \mathbb{R}^2 , prin impunerea unor condiții privind descompunerea frontierei. De asemenea, menționăm că sistemul Laplace pe un domeniu Lipschitz cu o descompunere generală a frontierei a fost tratat în [106]. Cakoni, Hsiao și Wendland au dezvoltat ecuații integrale pe frontieră pentru o problemă cu valori pe frontieră mixtă pentru ecuația biarmonică [15] (a se vedea și [23]).

Metodele combinate, cum ar fi metodele integrale pe frontieră și teoremele de punct fix au fost folosite cu succes în analiza problemelor cu valori pe frontieră pentru sistemele eliptice

liniare cu condiții la frontieră neliniare și pentru sisteme eliptice neliniare. Recent, Kohr, Lanza de Cristoforis și Wendland [50] au aplicat o metodă integrală pentru a obține rezultate de existență a tipului de transmisie Neumann neliniar pentru sistemele Stokes și Brinkman pe domeniile Lipschitz și cu date la frontieră în diverse spații L^p , Sobolev sau Besov. Tehnicile potențiale de strat au fost utilizate pentru sistemele Stokes și Brinkman în [53] pentru a analiza problemele Poisson pentru sistemele Brinkman semilineare pe domenii Lipschitz în domenii \mathbb{R}^n cu condiții la limită Dirichlet sau Robin în diferite spații Sobolev și Besov. O metodă potențială integrală pentru probleme de transmisie la interfața Lipschitz în \mathbb{R}^3 pentru sistemele Stokes și Darcy-Forchheimer-Brinkman și datele de frontieră în spațiile Sobolev ponderate, a fost dovedită în [49].

În [18, 19], Chkadua, Mikhailov și Natroshvili au analizat sisteme directe segregate de ecuații integrale de tipul domeniu-frontieră, care sunt echivalente cu problema Dirichlet-Neumann mixtă pentru o ecuație diferențială divergentă eliptică cu derivate parțiale (PDE) și cu un coeficient variabil în domeniile interioare și exterioare în \mathbb{R}^3 (a se vedea, de asemenea, [17] pentru problemele amestecate cu fisuri și [80] pentru ecuații integrale de domeniu-frontieră). Mai mult, Kohr, Mikhailov și Wendland [56] au obținut bine-punerea problemelor de transmisie în spații Sobolev ponderate cu baza în L^p pentru sistemele Stokes și Navier-Stokes cu coeficienți anisotropici puternic eliptici din L^∞ , localizați în domenii complementare Lipschitz de \mathbb{R}^n , ($n \geq 3$), prin utilizarea unei abordări variaționale.

Teza este structurată în trei părți. Scopul primei părți este studierea problemelor mixte cu valori pe frontieră pentru sistemele Brinkman și Darcy-Forchheimer-Brinkman pe un domeniu Lipschitz din cadrul Euclidian. În acest scop, avem nevoie de câteva rezultate de solvabilitate pentru unele dintre principalele probleme la frontieră, cum ar fi problemele Dirichlet, Neumann sau Robin pentru sistemele menționate. În cea de-a doua parte, extindem rezultatele anterioare la varietăți Riemanniene compacte. Analizăm rezultatele de bine-punere pentru problemele mixte la frontieră de tip Dirichlet-Neumann pentru sistemele Stokes, Oseen și Navier-Stokes din domeniile Lipschitz pe varietăți Riemanniene compacte. Ultima parte se referă la rezultate numerice legate de rezultatele de bine-punere a problemelor obținute în părțile anterioare. Studiem cazul special al problemei cavității antrenate de un perete mișcător pentru o cavitate dreptunghiulară în două dimensiuni și analizăm dependența parametrilor fizici principali pentru mișcarea de fluid.

Partea I este împărțită în patru capitole referitoare la probleme cu valori pe frontieră în cadrul Euclidian.

- **Capitolul 1** este o introducere a principalelor definiții, notații, spații și a operatorilor necesari în această teză. Începem cu definițiile domeniului Lipschitz, ale domeniului Lipschitz încrețit și disecția frontierei necesare pentru problemele cu valori la frontieră mixte. Continuăm cu o scurtă prezentare a spațiilor Lebesgue, Sobolev și, de asemenea, Besov, definite pe \mathbb{R}^n , pe domenii Lipschitz, pe frontiere Lipschitz sau pe suprafețe admisibile. În continuare, introducem operatorii urmă și operatorii de derivare conormali legați de sistemele Brinkman și Stokes. Să remarcăm faptul că teorema de echivalență între operatorii urmă netangențial și Gagliardo, precum și echivalența între operatorii de derivare conormali netangențiali, canonici și clasici s-au obținut în [41, Teorema 2.5 și 2.13].
- **Capitolul 2** începe cu introducerea soluției fundamentale pentru sistemul Brinkman, care permite definirea operatorilor potențiali, cum ar fi cel Newtonian, operatorii de simplu strat și de dublu strat. Cercetăm proprietățile de mapare ai acestor operatori potențiali de strat în diverse spații, relațiile de salt la frontiera domeniului Lipschitz și formula de reprezentare Green a soluției pentru sistemul Brinkman, așa cum au fost obținute în [41, Secțiunea 3].

- **Capitolul 3** este referă la probleme cu valori pe frontieră de tipul Dirichlet-Neumann mixt pentru sistemul Brinkman liniar și sistemul semiliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman pe domeniile Lipschitz încrețite în \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, când datele la frontieră aparțin spațiilor Sobolev cu baza în L^p cu p într-o vecinătate a lui 2, așa cum au fost obținute de noi în [41, Secțiunile 5 și 6]. Pentru a obține rezultate de bine-punere pentru cele două sisteme luate în considerare, avem nevoie de rezultate de solvabilitate pentru problemele de frontieră Dirichlet și Neumann pentru sistemul Brinkman cu date la limită în L^p (pentru rezultate corelate, ne referim la [100, Teorema 5.5], [86, Corolarul 9.1.5, Teoremele 9.1.4, 9.2.2 și 9.2.5] și [85, Teorema 7.1]). O atenție deosebită este acordată „sensului” operatorului urmă și a operatorului de derivare conormal, adică menționăm cazurile în care operatorii sunt considerați în sensul non-tangențial sau în sensul Gagliadro (ne referim la Secțiunile 1.5 și 1.6 din Capitolul 1 sau la [41, Secțiunile 2.1 și 2.2]).
- În **Capitolul 4** ne concentrăm atenția asupra soluției slabe a problemelor cu valori la frontieră pentru sistemul Brinkman pe domeniile Lipschitz situate în \mathbb{R}^2 . Astfel, putem lua în considerare o formulare variațională pentru ecuațiile integrale pe frontieră directă derivate din problemele pe frontieră mixtă. Sursele principale pentru acest capitol sunt [37] și [40], dar referim cititorul și la [61], [76]. Mai mult, ipoteza că datele la frontieră aparțin unor spații Sobolev fracționale, ne permite să studiem problemele mixte pe frontieră Dirichlet-Robin pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman (a se vedea, de ex., [37, Teorema 2.9], vezi și [40, Teorema 3.2] pentru problema Robin).

Part II este structurată în două capitole și prezintă probleme cu valori pe frontieră în mecanica fluidelor pe varietăți Riemanniene compacte. Studiem problemele mixte pe frontieră Dirichlet-Neumann pentru sistemele Stokes, Oseen și Navier-Stokes pe o varietate Riemanniană infinit de netedă, compactă, fără frontieră, cu o dimensiune de $M \geq 2$. Cu toate acestea, suntem limitați la dimensiunea $m = 2$ sau 3 , ori de câte ori este implicat sistemul Navier-Stokes, din cauza unor rezultate de incluziune compactă care sunt necesare în analiza noastră.

Principalul operator eliptic care apare în structura sistemului Stokes pe varietăți Riemanniene compacte este

$$L := \text{Def}^* \text{Def} = -\Delta + d\delta - 2\text{Ric}, \quad (0.0.6)$$

unde Def este operatorul de deformare, $\Delta := -(d\delta + \delta d)$ este Laplacianul Hodge, care este definit în termeni operatorului de derivare exterior d și a operatorului de derivare co-exterior δ și Ric este tensorul Ricci pe M . Atunci *sistemul "incompresibil" Stokes* pe o varietate Riemanniană netedă și compactă este dat de sistemul liniar cu derivate parțiale

$$L\mathbf{u} + d\pi = 0, \quad \delta\mathbf{u} = 0 \text{ în } \mathfrak{D}, \quad (0.0.7)$$

unde necunoscutele \mathbf{u} și π pot fi considerate câmpul viteză și presiune a curgerii fluidului într-un domeniu Lipschitz $\mathfrak{D} \subset M$. Similar, pentru $\alpha > 0$, *sistemul Brinkman* este descris de următoarele ecuații

$$L\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + d\pi = 0, \quad \delta\mathbf{u} = 0, \text{ în } \mathfrak{D}. \quad (0.0.8)$$

Pentru un câmp vectorial fixat ω fără divergență, *sistemul neomogen Oseen system* constă în următoarele

$$L\mathbf{u} + \nabla_\omega \mathbf{u} + d\pi = \mathbf{f}, \quad \delta\mathbf{u} = 0, \text{ în } \mathfrak{D}, \quad (0.0.9)$$

unde ∇ este conexiunea Levi-Civita pe M (pentru mai multe detalii pentru acești operatori, vă referim la Capitolul 5). Pentru $\beta > 0$, sistemul neliniar

$$L\mathbf{u} + \beta \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + d\pi = \mathbf{f}, \quad \delta\mathbf{u} = 0, \text{ în } \mathfrak{D}, \quad (0.0.10)$$

este numit *sistemul Navier-Stokes*. Aici $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}$ este derivata covariantă a lui \mathbf{u} în raport cu \mathbf{u} . Ca și în cazul Euclidean, proprietățile fizice ale fluidului sunt modelate de constantele α and β .

Studiul curgerii fluidelor pe varietăți Riemanniene compacte și netede joacă un rol important în analiza ecuațiilor fundamentale ale meteorologiei și oceanografiei, așa cum este indicat în [109, 71] (a se vedea și [108, 26]). De asemenea, alte tipuri de ecuații de curgere, de ex., sistemul Stokes sau sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman, pot fi luate în considerare pe suprafețe compacte (de exemplu, pe sfera S^2) și modelează curgerea apei sau a altui fluid vâcos, care trece prin roci poroase sau sol poros (a se vedea, de exemplu, [55]). Condițiile la frontieră mixte descriu într-un mod cât mai intuitiv comportamentul unui ocean superficial, unde țărmul este reprezentat de condiții omogene Dirichlet, fluxurile de intrare prin condiții Dirichlet sau Neumann și fluxul de ieșire de condițiile de limită Neumann, deoarece acestea sunt descrise în mod normal prin presiunea la suprafață.

Metodele integrale la frontieră au fost, de asemenea, utilizate pentru studiul problemelor cu valori pe frontieră pentru sistemele eliptice pe varietăți Riemanniene compacte. Mentionăm că problema Dirichlet pentru sistemul Stokes pe domenii Lipschitz arbitrare, cu date la frontieră în spații cu baza în L^2 a fost studiată de Mitrea și Taylor [85]. Mai mult, Dindós și Mitrea [25] au studiat bine-punerea problemei Poisson pentru sistemele Stokes și Navier-Stokes pe domeniile C^1 și Lipschitz pe varietăți Riemanniene compacte folosind metode integrale la frontieră.

Mitrea și Taylor [85] și Dindós și Mitrea [25] au utilizat teoria operatorilor pseudodiferențiali pentru a arăta existența soluției fundamentale pentru sistemul Stokes pe varietăți Riemanniene compacte. Una dintre principalele ipoteze necesare pentru a construi soluția fundamentală pentru sistemul Stokes, este presupunerea că varietatea nu are câmpuri Killing netriviiale (a se vedea Definiția 5.1.3), ceea ce garantează că operatorul de deformare Def dat în (5.1.14) este inversabil. Presupunerea că varietatea Riemanniană nu are câmpuri Killing netriviiale nu impune restricții, deoarece varietatea poate fi modificată pentru a satisface această condiție. O dovadă a acestui fapt poate fi găsită la începutul Secțiunii 3 în [85]

Kohr, Pinea și Wendland [57, Secțiunea 3] (a se vedea, de ex., [58]) au dezvoltat o tehnică alternativă la cea utilizată de Mitrea și Taylor [85] pentru a obține soluția fundamentală în caz general al operatorilor eliptici Agmon-Douglis-Nirenberg pe varietăți Riemanniene compacte.

În lucrarea lor recentă, Kohr și Wendland [63] au dezvoltat teoria potențialelor pentru sistemul Stokes cu coeficienți netezi de clasa L^∞ pe varietăți Riemanniene compacte, pornind de la o metodă variațională. În cazul particular al coeficienților netezi, autorii au găsit multe dintre rezultatele obținute anterior de Mitrea, Taylor [85]. Kohr și Wendland [62, Teorema 7.9] au obținut rezultate de bine-punerea problemei pe varietăți Riemanniene compacte pentru problema Poisson neomogenă de tip mixt pentru sistemul Brinkman cu coeficienți netezi, când soluția aparține unor spații cu baza în L^p cu p într-o vecinătate a lui 2. Kohr și Wendland [63] au obținut recent echivalența între unele probleme de transmisie pentru sistemul Stokes cu coeficienți nenetezi în domeniile Lipschitz complementare pe varietăți Riemanniene compacte, prin utilizarea remarcabilei tehnici Nečas-Babuška-Brezzi și prin justificarea unui rezultat de solvabilitate al formulărilor omologe variaționale mixte.

Să menționăm, că studiul din această a doua parte este o abordare puternică bazată pe teoria potențialelor de strat și pe metode variaționale indirecte pentru a obține rezultate de bine-punere pentru diverse probleme cu valori pe frontieră.

Această parte este structurată în două părți precum urmează

- **Capitolul 5** începe cu principalele concepte și definiții geometrice care sunt necesare în studiul problemelor cu valori la frontieră pe varietăți Riemanniene compacte. O parte importantă sunt definițiile conexiunii Levi-Civita ∇ , a operatorului de deformare Def și a operatorului diferențial eliptic de ordinul doi L (a se vedea și (0.0.7)). În continuare, vom introduce soluția fundamentală pentru sistemul Stokes și operatorii potențiali de strat asociați. Capitolul se încheie cu câteva rezultate originale privind inversabilitatea operatorului potențial de simplu strat și a operatorului potențial hipersingular obținut în [38, Teorema 4.2], precum și cu câteva proprietăți de compactitate ale operatorilor potențiali de dublu strat (cf. [38, Teorema 4.3]) legată de o parte din descompunerea

frontierei.

- **Capitolul 6** este preocupat de problemele cu valori pe frontieră pentru sistemele Stokes, Oseen și Navier-Stokes pe varietăți Riemanniene compacte. În acest rezumat, studiem problemele pe frontieră cu condiții la limită mixte Dirichlet-Neumann pentru Stokes (cf. [38, Teorema 4.1] și pentru sistemul Oseen [39]). Pe baza rezultatului de bine-punere a problemei pentru sistemul Oseen, continuăm cu analiza sistemului neliniar Navier-Stokes prin utilizarea unei teoreme de punct fix și a rezultatului de solvabilitate pentru sistemul Oseen. Aceste rezultate sunt incluse în lucrarea noastră [39].

Partea III conține ultimul capitol al acestei teze. Scopul acestei părți este de a da câteva exemple numerice și de a descrie comportamentul fizic al curgerii unui fluid modelat de o problemă cu valori pe frontieră pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman, pentru care a fost obținut un rezultat de bine-punere în Capitolul 4. Prin urmare, analiza descrisă în Capitolul 4 reprezintă un fundament matematic al problemei practice luate în considerare. Problema analizată în capitolul 7 constă într-o cavitate pătratică umplută cu un fluid cu trei pereți rigizi pe care sunt impuse condiții de alunecare antiderapantă și un perete în mișcare tangențial cu viteza unitară. Această problemă este cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de *lid driven cavity flow problem*, tradusă ca fiind *problema cavității antrenate de un perete mișcător* în această teză.

Mai întâi, oferim o scurtă descriere a celor două metode numerice utilizate pentru a analiza unele probleme cu valori la frontieră în această teză: metoda diferențelor centrale și metoda elementului de frontieră dual reciproc. Apoi ne concentrăm atenția asupra unei probleme speciale bidimensionale, care constă într-o cavitate dreptunghiulară umplută cu un domeniu poros în care fluidul este condus de mișcarea peretelui superior.

Problema cavității antrenate a făcut obiectul multor studii fizice, teoretice și numerice, deoarece această problemă are o geometrie simplă și conectează aspectele fizice relevante la modele matematice și metode de calcul. Lucrarea lui U. Ghia, K. Ghia și Shin [31], care a devenit o analiză numerică de referință de-a lungul anilor, folosește o metodă multigradă cuplată puternic implicită.

Cu siguranță, de departe cea mai utilizată tehnică numerică este metoda diferențelor finite, datorită geometriei speciale a cavității pătrate examinate, ceea ce face această metodă ideală pentru această problemă ([14], [36], [99], [98]). În activitatea lor, Erturk, Corke și Gokcol [28] au calculat soluții constante pentru problema cavității antrenate în cazul sistemului Navier-Stokes cu un număr Reynolds până la $Re = 20000$. Deși au fost făcute multe studii numerice, foarte puține studii experimentale legate aceste probleme sunt disponibile în literatură și le menționăm pe cele ale lui Koseff și Street [67], [66].

Metodele elementelor de frontieră au fost utilizate pe scară largă pentru a rezolva diferite probleme de inginerie, legate de mecanica fluidelor și alte domenii de interes. Să menționăm cărți relevante ale lui Brebbia și Telles [9], Brebbia și Wroble [89] și Katsikadelis [48], legate de metodele elementelor de frontieră, precum și de elementul de frontieră dual reciproc (metoda DRBEM).

Conținutul acestui capitol este următorul:

- **Capitolul 7** prezintă metodele numerice menționate mai sus utilizate pentru a studia unele probleme particulare legate de problemele cu valori pe frontieră mixte în mecanica fluidelor. Începem cu o scurtă descriere a formei nedimensionale a ecuațiilor Navier-Stokes și a continuității (a se vedea, de ex., [44]) și formularea funcției de curent-vorticitate (a se vedea, de ex., [60]) pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman, care simplifică tratarea numerică a ecuațiilor în două dimensiuni. De asemenea, discutăm relațiile dintre proprietățile fizice legate de fluid și domeniul poros [87]. Pentru a valida rezultatele obținute prin două metode numerice utilizate, considerăm că mișcarea fluidului este gover-

nată de sistemul Navier-Stokes. În plus, comparăm rezultatele obținute prin ambele metode cu rezultatele clasice din literatură. În continuare, vom descrie câteva rezultate numerice pentru problema cavității antrenate pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman în două dimensiuni. Se consideră condițiile la frontieră Dirichlet și Robin-Dirichlet, descrise prin semnificația fizică a unui parametru de alunecare (vezi, de ex., [44], [43]). Conținutul acestui capitol se bazează pe rezultatele obținute în [40, Secțiunea 4] și [37, Secțiunea 3].

Rezultatele originale din această teză sunt incluse în următoarele lucrări:

- **R. Gutt**, M. Kohr, S.E. Mikhailov, W.L. Wendland, *On the mixed problem for the semilinear Darcy-Forchheimer-Brinkman PDE system in Besov spaces on creased Lipschitz domains*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 40 (18), 7780-7829, 2017, (ISI), DOI: 10.1002/ma.4562.
- **R. Gutt**, M. Kohr, C. Pinteau, W.L. Wendland, *On the transmission problem for the Oseen and Brinkman systems on Lipschitz domains in compact Riemannian manifolds*, Mathematische Nachrichten, 289 (4), 2015, (ISI), DOI: 10.1002/mana.201400365
- **R. Gutt**, T. Groșan, *On the lid-driven problem in a porous cavity. A theoretical and numerical approach*, Applied Mathematics and Computation, 266:1070-1082, 2015, (ISI), DOI: 10.1016/j.amc.2015.06.038.
- **R. Gutt**, *Mixed boundary value problems for the Stokes system on compact Riemannian manifolds*, Mathematica Cluj, 60 (83):152-165 2018.
- **R. Gutt**, *BIE and BEM approach for the mixed Dirichlet-Robin boundary value problem for the nonlinear Darcy-Forchheimer-Brinkman system*, submitted, arXiv:1810.09543.
- **R. Gutt**, *Mixed boundary value problems for the Navier-Stokes system on compact Riemannian manifolds*, submitted.

Keywords: Mecanica fluidelor, medii poroase, probleme cu valori pe frontieră eliptice, teoria potențialului, abordări variaționale, teoreme de punct fix, sistemul Stokes, sistemul Brinkman, sistemul Oseen, sistemul Navier-Stokes, sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman, domenii Lipschitz, varietăți Riemanniene compacte, metoda diferențelor centrale, metoda elementului de frontieră dual reciproc.

MSC: Primary 35J25, 42B20, 46E35; Secondary 76D, 76M.

Partea I

Probleme cu valori pe frontieră pentru sistemele Brinkman și Darcy-Forchheimer-Brinkman în cadrul Euclidean

Capitolul 1

Concepte geometrice și funcționale

În acest capitol menționăm principalele definiții, notații și proprietăți fundamentale care sunt necesare pentru a defini și trata problemele cu valori pe frontieră pentru sistemele Stokes, Brinkman și Darcy-Forchheimer-Brinkman din cadrul Euclidian, care sunt studiate în prima parte a acestei teze.

Începem cu conceptele și definițiile geometrice ale domeniului Lipschitz mărginit și ale domeniului Lipschitz mărginit și încrețit în \mathbb{R}^n , pe care sunt luate în considerare problemele cu valori pe frontieră. Rețineți că proprietatea domeniului Lipschitz încrețit este necesară atunci când avem în vedere probleme pe frontieră a căror soluție ar trebui să aibă o regularitate ridicată [11], în timp ce la problemele de regularitate mai slabă pot fi considerate în domeniile Lipschitz mărginite. În continuare, reamintim definițiile spațiilor Sobolev, Bessel-potențial și Besov urmând prezentările [110], [113], [8, Secțiunile 2-3]. O atenție specială este acordată teoremelor de incluziune și rezultatelor de interpolare, care sunt esențiale pentru studiul următor.

Următoarele secțiuni conțin rezultate cunoscute, dar și rezultate originale obținute în [41, Secțiunea 1.1], care se referă la cele două tipuri diferite de operatori urmă, și anume, operatorii urmă netangențial și Gagliardo, precum și conexiunile dintre aceștia. Echivalența dintre acești operatori a fost obținută în [41, Teorema 2.5]. Mai mult, introducem operatorii Stokes și Brinkman urmând [50, Secțiunea 2.2], apoi definim operatorii de derivare conormali corespunzători. Diferențele dintre operatorii de derivare cononic, generalizat și netangențial sunt explicate în subsecțiunea următoare, cu accent pe cazurile în care aceștia sunt echivalenți (Teorema 1.3.3). O parte din aceste rezultate au fost obținut în colaborare cu M. Kohr, S. E. Mikhailov and W. L. Wendland în [41, Section 1.2].

1.1 Domenii Lipschitz în \mathbb{R}^n

Scopul acestei secțiuni este de a introduce conceptul de domeniu Lipschitz mărginit, pentru principalele probleme cu valori pe frontieră ale acestei teze. Reamintim, de asemenea, definiția unui domeniu Lipschitz încrețit ca în, de ex., [13, 83], care joacă un rol fundamental pentru problemele la frontieră a căror soluție ar trebui să aibă o regularitate ridicată.

1.1.1 Domenii Lipschitz mărginite în \mathbb{R}^n

Mai întâi, reamintim definiția unui domeniu Lipschitz mărginit și descriem principalele proprietăți (cf. [83, Definiția 2.1]). Orice punct $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ poate fi scris în forma simplificată ca și $x = (x', x_n)$, unde $x' := (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ și $x'' := (x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}$.

Definiția 1.1.1. [25] Fie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) o mulțime deschisă, conexă și mărginită și fie $\Gamma = \partial\mathcal{D}$. Spunem că \mathcal{D} este un *domeniu Lipschitz*, dacă există $M > 0$ astfel încât pentru orice $x \in \Gamma$ să existe un sistem de coordonate \mathbb{R}^n (isometric cu cel canonic), $(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, o

rază $r > 0$, un cilindru $\mathcal{C}_r(x) := \{(y', y_n) : |y' - x'| < r, |y_n - x_n| < 2Mr\}$, și o funcție Lipschitz $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \leq M$, astfel încât

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_r(x) \cap \mathfrak{D} &= \{(y', y_n) : y_n > \phi(y')\} \cap \mathcal{C}_r(x), \\ \mathcal{C}_r(x) \cap \Gamma &= \{(y', y_n) : y_n = \phi(y')\} \cap \mathcal{C}_r(x).\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

În ceea ce urmează, fie $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) un domeniu Lipschitz mărginit cu frontiera conexă $\Gamma = \partial\mathfrak{D}$, și fie $\mathfrak{D}_+ := \mathfrak{D}$ și $\mathfrak{D}_- := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathfrak{D}}$.

Fie $\kappa = \kappa(\Gamma) > 1$ o constantă suficient de mare (a se vedea, de ex., [33]). Atunci mulțimea

$$\mathfrak{E}_\pm(x) := \{y \in \mathfrak{D}_\pm : \text{dist}(x, y) < \kappa \text{dist}(y, \Gamma), x \in \Gamma\},\tag{1.1.2}$$

sunt regiuni conice netangente aflate în \mathfrak{D}_+ și respectiv \mathfrak{D}_- , (a se vedea, de ex., [86]). Menționăm că aceste concepte sunt necesare în definiția operatorului urmă netanșial.

1.1.2 Disecția frontierei a unui domeniu Lipschitz

Una dintre problemele de interes ale acestei teze sunt probleme cu valori pe frontieră de tipul mixt pentru sisteme eliptice. Pentru aceasta definim noțiunea de *disecție a frontierei* pentru astfel de probleme pe frontieră.

Întrucât lucrăm cu această noțiune în \mathbb{R}^2 , afirmăm definiția unei disecții a frontierei doar pentru un domeniu Lipschitz bidimensional, deoarece analizăm acest caz particular în Capitolul 4.

Definiția 1.1.2. Fie $\mathfrak{D} := \mathfrak{D}_+ \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu Lipschitz mărginit cu frontiera conexă Γ , care este decompus în părțile Γ_D , Λ și Γ_N , astfel încât $\Gamma = \Gamma_D \cup \Lambda \cup \Gamma_N$. Mai mult, considerăm că Γ_D și Γ_N sunt submulțimi disjuncte și relativ deschise la Γ , având Λ ca frontieră comună. Pentru fiecare $x \in \Lambda$, trebuie să existe un sistem de coordonate (x', x'') , un cilindru $\mathcal{C}_r(x)$ centrat în x , o funcție Lipschitz ϕ și o constantă M_1 astfel încât

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_r(x) \cap \Gamma_D &= \{(y', y'') : y' > M_1, y'' = \phi(y')\} \cap \mathcal{C}_r(x), \\ \mathcal{C}_r(x) \cap \Gamma_N &= \{(y', y'') : y' < M_1, y'' = \phi(y')\} \cap \mathcal{C}_r(x),\end{aligned}\tag{1.1.3}$$

(a se vedea de asemenea [88], [62] pentru cazul unui domeniu Lipschitz bidimensional cu o decompunere specială a frontierei, în care o parte este o mulțime Ahlfors regulată). Spunem că Γ_D și Γ_N determină o *disecție* a frontierei Γ .

1.1.3 Domenii Lipschitz încrețite în \mathbb{R}^n

Începem cu definiția unor suprafețe speciale a frontierei Γ , pentru a defini noțiunea de domeniu Lipschitz încrețit (cf. [83, Section 2]). Condiția (1.1.5) de mai jos pentru un domeniu Lipschitz încrețit joacă un rol important când lucrăm cu probleme cu valori pe frontieră mixte a căror date au o regularitate ridicată, adică data Dirichlet aparține spațiului $H_p^1(S, \mathbb{R}^n)$. R. M. Brown discută această idee în [11] pentru probleme mixte a ecuației Laplace.

Introducem acum definiția unui domeniu Lipschitz încrețit (cf. [83, Definiția 2.3], [41, Definiția 6.2]).

Definiția 1.1.3. Fie $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu Lipschitz mărginit cu frontiera conexă Γ , și fie $\Gamma_D, \Gamma_N \subset \Gamma$ două suprafețe admisibile nevide, disjuncte astfel încât $\overline{\Gamma_D} \cap \overline{\Gamma_N} = \partial\Gamma_D = \partial\Gamma_N$ și $\overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N} = \Gamma$. Atunci \mathfrak{D} este *încrețit* dacă

- (a) Există $m \in \mathbb{N}$, $a > 0$ și $z_i \in \Gamma$, $i = 1, \dots, m$, astfel încât $\partial\mathfrak{D} \subset \cup_{i=1}^m B_a(z_i)$, unde $B_a(z_i)$ este o bilă de rază a și centrată în z_i .

- (b) Pentru fiecare punct z_i , $i = 1, \dots, m$, să existe un sistem de coordonate $\{x_1, \dots, x_n\}$ cu originea în z_i și o funcție Lipschitz ϕ_i de la \mathbb{R}^{n-1} la \mathbb{R} astfel încât mulțimea $\mathcal{D}_i := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \phi_i(x')\}$, a cărei frontieră Γ_i admite o descompunere $\Gamma_i = \overline{\Gamma_{D_i}} \cup \overline{\Gamma_{N_i}}$, să fie un domeniu Lipschitz de graf și încrețit în sensul Definiției 6.2 din [41], și

$$\mathcal{D} \cap B_{2a}(z_i) = \mathcal{D}_i \cap B_{2a}(z_i), \quad \Gamma_D \cap B_{2a}(z_i) = \Gamma_{D_i} \cap B_{2a}(z_i), \quad \Gamma_N \cap B_{2a}(z_i) = \Gamma_{N_i} \cap B_{2a}(z_i). \quad (1.1.4)$$

Interpretarea geometrică a definiției de mai sus este aceea că suprafețe admisibile Γ_D și Γ_N sunt separate de o interfață Lipschitz $\overline{\Gamma_D} \cap \overline{\Gamma_N}$ care este o varietate *încrețită* pentru \mathcal{D} și că Γ_D și Γ_N se întâlnesc la un unghi strict mai mic decât π (cf. [11, 83]).

O proprietate fundamentală a unui domeniu Lipschitz mărginit și încrețit este existența unei funcții $\varphi \in C^\infty(\overline{\mathcal{D}})$ și a unei constante $\delta > 0$ pentru care are loc

$$\varphi \cdot \nu > \delta \text{ pe } \Gamma_N, \quad \varphi \cdot \nu < -\delta \text{ pe } \Gamma_D, \quad (1.1.5)$$

i.e., produsul scalar $\varphi \cdot \nu$, între φ și vectorul unitate normal ν , schimbă semnul la trecerea de la Γ_D la Γ_N (cf. [12, (1.122)]). Pentru mai multe detalii legate de proprietățile domeniilor Lipschitz vă referim la [76], [41], [25].

1.2 Spații Sobolev și Besov în \mathbb{R}^n și pe domenii Lipschitz

În această secțiune oferim o scurtă trecere în revistă a unor notații și definiții de bază referitoare la spațiile Sobolev, Bessel-potențiale, Sobolev-Slobodeckij și Besov, cu accent pe relațiile dintre aceste spații. Sursele principale utilizate la pregătirea acestor secțiuni sunt [2], [4], [8], [94], [76], [113].

1.2.1 Spații Sobolev și Besov în \mathbb{R}^n

Fie $k \in \mathbb{N}_0$ și $p, p' \in (1, \infty)$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Atunci *spațiul Sobolev* $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ este definit prin (a se vedea, de ex., [94, Section 7.1])

$$W_p^k(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n)} := \sum_{\nu \leq k} \|\partial^\nu f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}. \quad (1.2.1)$$

Spațiul Sobolev $W_p^{-k}(\mathbb{R}^n)$ este definit ca fiind dualul lui $W_{p'}^k(\mathbb{R}^n)$. Este bine cunoscut faptul că $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ este dens în $W_p^k(\mathbb{R}^n)$, și că $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ poate fi definit echivalent ca completitudinea spațiului de funcții netede cu suport compact în raport cu norma $\|\cdot\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)}$ dată în (1.2.1).

Pentru $s \in \mathbb{R}$, *spațiul Bessel potențial cu baza în* L^p , $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ și $H_p^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ este definit ca

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : (\mathbb{I} - \Delta)^{\frac{s}{2}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)\} = \{f : J^s f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}, \quad (1.2.2)$$

$$H_p^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) := \{\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) : f_j \in H_p^s(\mathbb{R}^n), j = 1, \dots, n\}, \quad (1.2.3)$$

unde $J^s : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ este *operatorul Bessel potențial de ordin* s definit de (a se vedea, de ex., [76, Capitolul 3])

$$J^s f := \mathcal{F}^{-1}(\rho^s \mathcal{F} f), \quad \rho^s = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}. \quad (1.2.4)$$

Menționăm că $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ este un spațiu Banach în raport cu norma (a se vedea, de ex., [4])

$$\|f\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} = \|J^s f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}^{-1}(\rho^s \mathcal{F} f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.2.5)$$

1.2.2 Spații Sobolev și Besov în domenii Lipschitz

Acum, definim spațiile Sobolev și Bessel-potentiale pe domenii Lipschitz. Pentru aceasta, fie $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) un domeniu Lipschitz mărginit, și fie $\mathfrak{D}_+ := \mathfrak{D}$ și $\mathfrak{D}_- := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathfrak{D}}$.

Fie $\mathcal{D}(\mathfrak{D}_\pm) := C_0^\infty(\mathfrak{D}_\pm)$ spațiul funcțiilor infinit diferentiabile cu support compact în \mathfrak{D}_\pm , echipat cu topologia indusă. Spațiul $\mathcal{D}'(\mathfrak{D}_\pm)$ este spațiul distribuțiilor definit ca dualul topologic a lui $\mathcal{D}(\mathfrak{D}_\pm)$. În aceasta teză folosim notația $(\cdot)|_X$ pentru operatorul de restricție la $X \subset \mathbb{R}^n$. Aceast operator este evidențiat și câteodată prin r_X .

Spațiul Bessel potential $H_p^s(\mathfrak{D}_\pm)$ și $\tilde{H}_p^s(\mathfrak{D}_\pm)$ este definit prin

$$H_p^s(\mathfrak{D}_\pm) := \{f \in \mathcal{D}'(\mathfrak{D}_\pm) : \exists F \in H_p^s(\mathbb{R}^n) \text{ astfel încât } F|_{\mathfrak{D}_\pm} = f\}, \quad (1.2.6)$$

$$\tilde{H}_p^s(\mathfrak{D}_\pm) := \left\{ f \in H_p^s(\mathbb{R}^n) : \text{supp } f \subseteq \overline{\mathfrak{D}_\pm} \right\}. \quad (1.2.7)$$

Spațiile Bessel potentiale $H_p^s(\mathfrak{D}_\pm, \mathbb{R}^n)$ și $\tilde{H}_p^s(\mathfrak{D}_\pm, \mathbb{R}^n)$ sunt definite ca spațiile de funcții vectoriale (distribuții) a căror componente aparțin spațiilor $H_p^s(\mathfrak{D}_\pm)$ și $\tilde{H}_p^s(\mathfrak{D}_\pm)$ (a se vedea, de ex., [76]).

Pentru orice $s \in \mathbb{R}$, $C^\infty(\overline{\mathfrak{D}_\pm})$ este dens în $H_p^s(\mathfrak{D}_\pm)$ și următoarele relații de dualitate au loc (cf. [47, Propoziția 2.9], [29, (1.9)], [84, (4.14)])

$$\left(H_p^s(\mathfrak{D}_\pm) \right)' = \tilde{H}_{p'}^{-s}(\mathfrak{D}_\pm), \quad H_{p'}^{-s}(\mathfrak{D}_\pm) = \left(\tilde{H}_p^s(\mathfrak{D}_\pm) \right)'. \quad (1.2.8)$$

În ceea ce urmează, pentru $p \in (1, \infty)$ dat, p' reprezintă exponentul conjugat dat de relația

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad (1.2.9)$$

Similar cu (1.2.6) și (1.2.7), pentru $s \in \mathbb{R}$ și $p, q \in (1, \infty)$ spațiul Besov $B_{p,q}^s(\mathfrak{D}_\pm)$ și $B_{p,q}^s(\mathfrak{D}_\pm, \mathbb{R}^n)$ sunt definite de

$$B_{p,q}^s(\mathfrak{D}_\pm) := \{f \in \mathcal{D}'(\mathfrak{D}_\pm) : \exists F \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \text{ such that } F|_{\mathfrak{D}_\pm} = f\}, \quad (1.2.10)$$

$$B_{p,q}^s(\mathfrak{D}_\pm, \mathbb{R}^n) := \{\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) : f_i \in B_{p,q}^s(\mathfrak{D}_\pm), j = 1, \dots, n\}, \quad (1.2.11)$$

$$\tilde{B}_{p,q}^s(\mathfrak{D}_\pm, \mathbb{R}^n) := \left\{ \tilde{\mathbf{f}} \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \text{supp } \tilde{\mathbf{f}} \subseteq \overline{\mathfrak{D}_\pm} \right\}. \quad (1.2.12)$$

1.2.3 Spații Sobolev și Besov pe frontiere Lipschitz

Principalele surse în pregătirea acestei părți sunt [46, Secțiunea 4.3], [113].

Pentru $s \in (0, 1)$, se definește spațiul $H_p^s(\Gamma)$ ca fiind completitudinea spațiului

$$C_s^0 = \left\{ f \in C^0(\Gamma) : \|f\|_{H_p^s(\Gamma)} < \infty \right\} \quad (1.2.13)$$

în raport cu norma

$$\|f\|_{H_p^s(\Gamma)} := \left\{ \|f\|_{L^p(\Gamma)}^p + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N-1+ps}} d\sigma_x d\sigma_y \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (1.2.14)$$

Pentru $p \in (1, \infty)$ și $s \in (-1, 0)$, avem $H_{p'}^{-s}(\Gamma) = \left(H_p^s(\Gamma) \right)'$. De asemenea, menționăm că $H_p^0(\Gamma) = L^p(\Gamma)$.

Fie $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ vectorul unitate exterior la \mathfrak{D} , care este definit aproape peste tot în raport cu măsura $d\sigma$ pe Γ .

Fie $p \in (1, \infty)$, $q \in (1, \infty]$ și $s \in (0, 1]$. În ceea ce urmează, avem nevoie de următoarele spații.

$$L_{\boldsymbol{\nu}}^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) := \left\{ \mathbf{v} \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) : \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma = 0 \right\},$$

$$\begin{aligned} H_{p;\nu}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) &:= \left\{ \mathbf{v} \in H_p^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) : \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma = 0 \right\}, \\ B_{p,q;\nu}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) &:= \left\{ \mathbf{v} \in B_{p,q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) : \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Mai mult, considerăm și următoarele subspații.

$$\begin{aligned} H_{p;\text{div}}^s(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) &:= \left\{ \mathbf{v} \in H_p^s(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) : \text{div } \mathbf{v} = 0 \right\}, \\ B_{p,q;\text{div}}^s(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) &:= \left\{ \mathbf{v} \in B_{p,q}^s(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) : \text{div } \mathbf{v} = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

În cele din urmă, introducem subspațiile de funcții local integrabile. Fie Ω o mulțime deschisă (în particular $\Omega \in \{\mathbb{R}^n, \mathfrak{D}, \Gamma\}$). Spațiile de funcții local integrabile $L_{\text{loc}}^p(\Omega), H_{p;\text{loc}}^s(\Omega)$ și $B_{p,q;\text{loc}}^s(\Omega)$ sunt definite ca

$$\begin{aligned} L_{\text{loc}}^p(\Omega, \mathbb{R}^n) &:= \{ \mathbf{v} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) : \mathbf{v}|_K \in L^p(K, \mathbb{R}^n), \forall K \subset \Omega, K \text{ is compact} \}, \\ H_{p;\text{loc}}^s(\Omega, \mathbb{R}^n) &:= \left\{ \mathbf{v} \in H_p^s(\Omega, \mathbb{R}^n) : \mathbf{v}|_K \in H_p^s(K, \mathbb{R}^n), \forall K \subset \Omega, K \text{ is compact} \right\}, \\ B_{p,q;\text{loc}}^s(\Omega, \mathbb{R}^n) &:= \left\{ \mathbf{v} \in B_{p,q}^s(\Omega, \mathbb{R}^n) : \mathbf{v}|_K \in B_{p,q}^s(K, \mathbb{R}^n), \forall K \subset \Omega, K \text{ is compact} \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

1.3 Operatorii urmă

Ca și în secțiunea precedentă, considerăm $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) un domeniu Lipschitz mărginit cu frontiera conexă Γ , și fie $\mathfrak{D}_+ := \mathfrak{D}$ și $\mathfrak{D}_- := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathfrak{D}}$. Fie $\kappa = \kappa(\Gamma) > 1$ o constantă suficient de mare. Atunci *operatorul maximal netangențial* pentru o funcție arbitrară $u : \mathfrak{D}_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}$ este definit prin (a se vedea, de ex., [41, Secțiunea 2.1], [50])

$$M(u)(x) := \{ \sup |u(y)| : y \in \mathfrak{C}_{\pm}(x), x \in \Gamma \}, \quad (1.3.1)$$

unde \mathfrak{C}_{\pm} sunt conurile de apropiere netangențiale (1.1.2) din \mathfrak{D}_+ și respectiv \mathfrak{D}_- (a se vedea, de ex., [86]). Mai mult,

$$u_{\text{nt}}^{\pm}(x) := \lim_{\mathfrak{C}_{\pm} \ni y \rightarrow x} u(y) \quad (1.3.2)$$

sunt *limitele netangențiale* a lui u în raport cu \mathfrak{D}_{\pm} în $x \in \Gamma$. Dacă $M(u) \in L^p(\Gamma)$ pentru o alegerea a lui κ , atunci proprietatea este valabilă pentru orice κ (a se vedea, de ex., [78, p 63.]). O să folosim notația \mathfrak{C}_{\pm} în loc de $\mathfrak{C}_{\kappa;\pm}$.

Un rezultat util pentru problemele care urmează să le investigăm în această teză este Lema lui Gagliardo menționată mai jos (see [20], [47, Propoziția 3.3], [81, Teorema 2.3, Lema 2.6], [79], [86, Teorema 2.5.2]).

Lema 1.3.1. *Fie $p \in (1, \infty)$ și $s \in (0, 1)$ constante date. Atunci, există operatori urmă Gagliardo liniari și continui $\gamma^{\pm} : H_p^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_{\pm}) \rightarrow B_{p,p}^s(\Gamma)$ astfel încât $\gamma^{\pm}g = g|_{\Gamma}$ pentru orice $g \in C^{\infty}(\overline{\mathfrak{D}_{\pm}})$. Acești operatori sunt surjectivi și au inverse la dreapta neunice, liniare și continue*

$$(\gamma^{\pm})^{-1} : B_{p,p}^s(\Gamma) \rightarrow H_p^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_{\pm}). \quad (1.3.3)$$

Rezultă imediat că Lema 1.3.1 rămâne valabilă și pentru funcții vectoriale sau matriciale. Rezultatul de mai jos este o versiune a Lemei 1.3.1 pentru spații Besov definite pe frontiere Lipschitz (a se vedea, de ex., [86, Teorema 2.5.2]).

Lema 1.3.2. *Fie $p, q \in (1, \infty)$ și $s \in (0, 1)$ constante date. Atunci există operatorii urmă Gagliardo liniari și continui $\gamma^{\pm} : B_{p,q}^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_{\pm}) \rightarrow B_{p,q}^s(\Gamma)$ astfel încât $\gamma^{\pm}g = g|_{\Gamma}$ pentru orice $g \in C^{\infty}(\overline{\mathfrak{D}_{\pm}})$. Acești operatori sunt surjectivi și au inverse la dreapta neunice, liniare și continue $(\gamma^{\pm})^{-1} : B_{p,q}^s(\Gamma) \rightarrow B_{p,q}^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_{\pm})$.*

Rezultatul următor răspunde la întrebarea firească când operatorul urmă netangențial coincide cu operatorul urmă Gagliardo [41, Teorema 2.5].

Teorema 1.3.3. *Fie \mathcal{D} un domeniu Lipschitz în \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Fie $p, q \in (1, \infty)$.*

- (i) *Dacă există o constantă $s > 0$ cu proprietatea că $\mathbf{u} \in B_{p,q}^{s+\frac{1}{p}}(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$ și urma netangențială punct cu punct \mathbf{u}_{nt}^+ există aproape peste tot pe Γ , atunci urma Gagliardo $\gamma^+ \mathbf{u}$ este definită pe Γ și $\gamma^+ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{nt}}^+$. Dacă $s \in (0, 1)$, atunci $\gamma^+ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{nt}}^+ \in B_{p,q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n)$.*
- (ii) *Mai mult, dacă $\mathbf{u}_{\text{nt}}^+ \in H_p^{s+\frac{1}{p}}(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ pentru $s \in (0, 1]$, atunci $\gamma^+ \mathbf{u} \in H_p^s(\Gamma, \mathbb{R}^n)$.*

1.4 Operatorul Stokes și Brinkman

Acum, definim operatorul Brinkman care joacă un rol cheie în această teză. Reamintim că $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ este spațiul funcțiilor Schwarz și $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ este spațiul distribuțiilor temperate.

Fie $\alpha > 0$ o constantă dată. Fie \mathbb{B}_α operatorul Brinkman definit în așa fel încât (a se vedea, de ex., [50, Secțiunea 2.2])

$$\mathbb{B}_\alpha := \begin{pmatrix} (\Delta - \alpha \mathbb{I}) & -\nabla \\ \text{div} & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (1.4.1)$$

și operatorul asociat \mathcal{L}_α definit prin

$$\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{u}, \pi) := (\Delta - \alpha \mathbb{I})\mathbf{u} - \nabla \pi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n). \quad (1.4.2)$$

Pentru $\alpha = 0$, se obține operatorul Stokes. Operatorii \mathbb{B}_α și \mathbb{B}_0 (i.e., $\alpha = 0$) definiți în (1.4.1) sunt eliptici în sensul lui Agmon-Douglis-Nirenberg (cf. [50, Lemma 2.1], [46, p. 330-331]), în consecință, pentru $\alpha > 0$, $p, q \in (1, \infty)$ și $s \in (0, 1)$, acești operatori se extind la operatori liniari și mărginiți pe spații Sobolev (Bessel potențiale), după cum urmează

$$\mathbb{B}_\alpha : H_p^{s+\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times H_p^{s+\frac{1}{p}-1}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_p^{s+\frac{1}{p}-2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times H_p^{s+\frac{1}{p}-1}(\mathbb{R}^n), \quad (1.4.3)$$

$$\mathcal{L}_\alpha : H_p^{s+\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times H_p^{s+\frac{1}{p}-1}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_p^{s+\frac{1}{p}-2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad (1.4.4)$$

sau cu definiții asemănătoare pe spații Besov.

Un alt operator care joacă un rol important în definirea diferitelor probleme cu valori pe frontieră de tip Neumann, mixt sau de transmisie este operatorul de derivare conormal. Pentru a defini acest operator, introducem următoarele spații. Fie $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in (1, \infty)$ și $t \geq -1/p'$, unde p' este exponentul conjugat a lui p . Avem în vedere următoarele spații (cf. [81, Definiția 3.3])

$$\mathfrak{H}_{p,\text{div}}^{s+\frac{1}{p},t}(\mathcal{D}, \mathcal{L}_\alpha) := \left\{ (\mathbf{u}, \pi) \in H_p^{s+\frac{1}{p}}(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n) \times H_p^{s+\frac{1}{p}-1}(\mathcal{D}) : \mathcal{L}_\alpha(\mathbf{u}, \pi) = \tilde{\mathbf{f}}|_{\mathcal{D}}, \tilde{\mathbf{f}} \in \tilde{H}_p^t(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n) \right. \\ \left. \text{and } \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathcal{D} \right\}.$$

De asemenea, fie

$$\mathfrak{B}_{p,q,\text{div}}^{s+\frac{1}{p},t}(\mathcal{D}, \mathcal{L}_\alpha) := \left\{ (\mathbf{u}, \pi) \in B_{p,q}^{s+\frac{1}{p}}(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n) \times B_{p,q}^{s+\frac{1}{p}-1}(\mathcal{D}) : \mathcal{L}_\alpha(\mathbf{u}, \pi) = \tilde{\mathbf{f}}|_{\mathcal{D}}, \tilde{\mathbf{f}} \in \tilde{B}_{p,q}^t(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n) \right. \\ \left. \text{and } \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathcal{D} \right\},$$

unde $\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{u}, \pi)$ este definit în (1.4.2).

Similar cu Teorema 2.16 în [81], pentru $p, q \in (1, \infty)$ introducem operatorul \mathring{E}_\pm extensie la zero pentru funcțiile din $H_p^t(\mathfrak{D}_\pm)$ pe $\mathbb{R}^n \setminus \mathfrak{D}_\pm$. Pentru $0 \leq t < \frac{1}{p}$, fie \tilde{E}_\pm operatorul definit pe $H_p^t(\mathfrak{D}_\pm)$ prin $\tilde{E}_\pm := \mathring{E}_\pm$. Dacă $-\frac{1}{p'} < t < 0$, atunci \tilde{E}_\pm este definit ca

$$\langle \tilde{E}_\pm h, v \rangle_{\mathfrak{D}_\pm} := \langle h, \tilde{E}_\pm v \rangle_{\mathfrak{D}_\pm} = \langle h, \mathring{E}_\pm v \rangle_{\mathfrak{D}_\pm}, \quad h \in H_p^t(\mathfrak{D}_\pm), \quad v \in H_{p'}^{-t}(\mathfrak{D}_\pm), \quad (1.4.5)$$

unde $h \in H_p^t(\mathfrak{D}_\pm)$, $v \in H_{p'}^{-t}(\mathfrak{D}_\pm)$ sau $h \in B_{p,q}^t(\mathfrak{D}_\pm)$, $v \in B_{p',q'}^{-t}(\mathfrak{D}_\pm)$.

Atunci, pentru $-1/p' < t < 1/p$, operatorii

$$\tilde{E}_\pm : H_p^t(\mathfrak{D}_\pm) \rightarrow \tilde{H}_p^t(\mathfrak{D}_\pm), \quad \tilde{E}_\pm : B_{p,q}^t(\mathfrak{D}_\pm) \rightarrow \tilde{B}_{p,q}^t(\mathfrak{D}_\pm) \quad (1.4.6)$$

sunt operatori liniari de extensie. Aceste proprietăți se extind și la spațiile corespunzătoare de funcții sau distribuții cu valori vectoriale.

Ca în cazul Definiției 3.6 din [81], introducem *operatorul de extensie canonic* $\tilde{\mathcal{L}}_\alpha$ după cum urmează (cf. Definiția 2.8 în [41]).

Definiția 1.4.1. Fie $p, q \in (1, \infty)$, $s \in \mathbb{R}$ și $t \geq -1/p'$. Operatorul $\tilde{\mathcal{L}}_\alpha$, care atribuie

(i) funcțiile $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathfrak{H}_{p,\text{div}}^{s+\frac{1}{p},t}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_\alpha)$ la extensia distribuției $\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{u}, \pi) \in H_p^t(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)$ la $\tilde{H}_p^t(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)$

(ii) funcțiile $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathfrak{B}_{p,q,\text{div}}^{s+\frac{1}{p},t}(\mathfrak{D}; \mathcal{L}_\alpha)$ la extensia distribuției $\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{u}, \pi) \in B_{p,q}^t(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)$ la $\tilde{B}_{p,q}^t(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)$,

este numit *operatorul de extensie canonic*.

1.5 Operatorul de derivare conormal pentru sistemul Brinkman

În această secțiune, introducem operatorii de derivare conormali care sunt utilizați de-a lungul acestei teze, adică, *operatorul de derivare clasic*, *operatorii de derivare conormală netangențială*, *canonici și generalizați* și descriem relațiile dintre ei.

În acest scop, fie $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu Lipschitz mărginit cu frontieră Γ .

1.5.1 Operatorul clasic de derivare conormal

Dacă $(\mathbf{u}, \pi) \in C^1(\overline{\mathfrak{D}_\pm}, \mathbb{R}^n) \times C^0(\overline{\mathfrak{D}_\pm})$, astfel încât $\text{div } \mathbf{u} = 0$ în \mathfrak{D}_\pm , atunci *operatorul clasic de derivare* pentru operatorul Stokes (sau Brinkman) sunt definite prin formula bine cunoscută (i.e., ecuațiile constitutive a unui fluid vâscos incompresibil)

$$\mathbf{t}_\alpha^{\text{c}\pm}(\mathbf{u}, \pi) := \gamma_\pm \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \pi) \boldsymbol{\nu}, \quad (1.5.1)$$

unde

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \pi) := (-\pi \mathbb{I} + 2\mathbb{E}(\mathbf{u})) \quad (1.5.2)$$

este tensorul de stres, și $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^+$ este vectorul unitate exterior la \mathfrak{D}_+ , definit aproape peste tot pe Γ . Pentru orice funcție $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, următoarea formulă Green are loc

$$\pm \langle \mathbf{t}_\alpha^{\text{c}\pm}(\mathbf{u}, \pi), \boldsymbol{\varphi} \rangle_\Gamma = 2\langle \mathbb{E}(\mathbf{u}), \mathbb{E}(\boldsymbol{\varphi}) \rangle_{\mathfrak{D}_\pm} + \alpha \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathfrak{D}_\pm} - \langle \pi, \text{div } \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathfrak{D}_\pm} + \langle \mathcal{L}_\alpha(\mathbf{u}, \pi), \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathfrak{D}_\pm}. \quad (1.5.3)$$

Formula (1.5.3) urmează dintr-un argument de integrare prin părți.

1.5.2 Operatorul de derivare conormal netangențial

Dacă în orice punct al frontierei Γ există urmele netangențiale $\mathbf{t}_{\text{nt}}^\pm(\mathbf{u}, \pi)$, și vectorul unitate $\boldsymbol{\nu}$ este definit în orice punct, atunci operatorul de derivare conormal netangențial este definit în acel punct de

$$\mathbf{t}_{\text{nt}}^\pm(\mathbf{u}, \pi) := \boldsymbol{\sigma}_{\text{nt}}^\pm \boldsymbol{\nu}. \quad (1.5.4)$$

1.5.3 Operatorul de derivare conormal generalizat

Formula (1.5.3) sugerează următoarea definiție a operatorului de derivare conormal generalizat definit pe spații Besov, (cf., Lema 3.2 în [20], Lema 2.2 în [53], Definiția 3.8, Teorema 3.9 în [81], Definiția 6.5, Teorema 6.6 în [82], Propoziția 10.2.1 în [86]).

Definiția 1.5.1. Fie $\alpha \geq 0$, $s \in (0, 1)$, $p, q \in (1, \infty)$. Atunci operatorul de derivare conormal generalizat \mathbf{t}_α^+ este definit pentru orice $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathfrak{H}_{p, \text{div}}^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_\alpha)$ sau $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathfrak{B}_{p, q, \text{div}}^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_\alpha)$, în sensul slab de formula

$$\begin{aligned} \pm \left\langle \mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, p; \mathbf{f}), \varphi \right\rangle &= 2 \left\langle \tilde{E}_+ \mathbb{E}(\mathbf{u}), \mathbb{E}((\gamma^+)^{-1} \varphi) \right\rangle_{\mathfrak{D}} + \alpha \left\langle \tilde{E}_+ \mathbf{u}, (\gamma^+)^{-1} \varphi \right\rangle_{\mathfrak{D}} \\ &- \left\langle \tilde{E}_+ \pi, \text{div} (\gamma^+)^{-1} \varphi \right\rangle_{\mathfrak{D}} + \left\langle \tilde{\mathbf{f}}, (\gamma^+)^{-1} \varphi \right\rangle_{\mathfrak{D}}, \quad \forall \varphi \in B_{p', p'}^{1-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \text{ or } \varphi \in B_{p', q'}^{1-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Lema 1.5.2. În ipotezele Definiției 1.5.1, operatorul de derivare conormal generalizat

$$\mathbf{t}_\alpha^+ : \mathfrak{H}_{p, \text{div}}^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_\alpha) \rightarrow B_{p, p}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad \mathbf{t}_\alpha^+ : \mathfrak{B}_{p, q, \text{div}}^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_\alpha) \rightarrow B_{p, q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n),$$

este liniar și mărginit. Mai mult, următoarea identitate de tip Green are loc

$$\left\langle \mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi), \gamma^+ \mathbf{w} \right\rangle_{\Gamma} = 2 \left\langle \tilde{E}_+ \mathbb{E}(\mathbf{u}), \mathbb{E}(\mathbf{w}) \right\rangle_{\mathfrak{D}} + \alpha \left\langle \tilde{E}_+ \mathbf{u}, \mathbf{w} \right\rangle_{\mathfrak{D}} - \left\langle \tilde{E}_+ \pi, \text{div} \mathbf{w} \right\rangle_{\mathfrak{D}} + \left\langle \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{w} \right\rangle_{\mathfrak{D}} \quad (1.5.6)$$

pentru orice $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathfrak{H}_{p, \text{div}}^{s+\frac{1}{p}, -\frac{1}{p'}}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_\alpha)$, $\mathbf{w} \in H_{p'}^{1+\frac{1}{p'}-s}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)$ și orice $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathfrak{B}_{p, q, \text{div}}^{s+\frac{1}{p}, -\frac{1}{p'}}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_\alpha)$, $\mathbf{w} \in B_{p', q'}^{1+\frac{1}{p'}-s}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)$.

Menționăm că operaotrul de derivare conormal *canonic* din Definiția 1.5.3 este diferit de cel *generalized* dat în următoarea lemă, precum urmează (cf. [53, Lema 2.2], [81, Definiția 3.1, Teorema 3.2], [82, Definiția 5.2, Teorema 5.3].)

1.5.4 Operatorul de derivare conormal canonic

Operatorul de derivare conormal generalizat definit de formula (1.5.5) este legat de o extensie a operatorului Brinkman din domeniul \mathfrak{D} , unde \mathcal{L}_α nu are un nivel ridicat de regularitate (a se vedea [81]). Deoarece extensiile operatorului \mathcal{L}_α de la \mathfrak{D} la \mathbb{R}^n nu sunt unice, pentru unele regularități ale spațiilor corespunzătoare, se pare că operatorul de derivare conormal generalizat este neunic și neliniar, cu excepția cazului în care se impune o relație liniară între soluția ecuațiilor cu derivate parțiale și extensia părții drepte a ecuației. Astfel, pentru problemele cu valori pe frontieră a căror soluție ar trebui să aibă o regularitate ridicată, trebuie să revizuiim condițiile problemei pentru a face operatorul de derivare conormal nesensibil la această neunicitate, adică folosim unicitatea operatorului de extensii dat în (1.4.6) pentru $1/p' < t < 1/p$, așa cum am făcut-o în [41].

Având în vedere formula (1.5.3) din cazul clasic, introducem operatorul de derivare conormal *canonic* pe spații Besov prin următoarea Definiție [41, Definiția 2.10], [20, Lema 3.2], [53, Lema 2.2], [81, Definiția 3.8, Teorema 3.9], [82, Definiția 6.5, Teorema 6.6], [86, Propoziția 10.2.1].

Definiția 1.5.3. Fie $\alpha \geq 0$, $s \in (0, 1)$, $p, q \in (1, \infty)$. Atunci operatorul de derivare conormal *canonic* $\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi)$ este definit pentru orice $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathfrak{H}_{p, \text{div}}^{s+\frac{1}{p}, -\frac{1}{p'}}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_\alpha)$, sau orice $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathfrak{B}_{p, q, \text{div}}^{s+\frac{1}{p}, -\frac{1}{p'}}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_\alpha)$, în sensul slab de formula

$$\left\langle \mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi), \varphi \right\rangle_{\Gamma} := 2 \left\langle \tilde{E}_+ \mathbb{E}(\mathbf{u}), \mathbb{E}((\gamma^+)^{-1} \varphi) \right\rangle_{\mathfrak{D}} + \alpha \left\langle \tilde{E}_+ \mathbf{u}, (\gamma^+)^{-1} \varphi \right\rangle_{\mathfrak{D}} - \left\langle \tilde{E}_+ \pi, \text{div}((\gamma^+)^{-1} \varphi) \right\rangle_{\mathfrak{D}} \quad (1.5.7)$$

$$+ \left\langle \tilde{\mathcal{L}}_\alpha(\mathbf{u}, \pi), (\gamma^+)^{-1} \varphi \right\rangle_{\mathfrak{D}}, \quad \forall \varphi \in B_{p', p'}^{1-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad \text{or } \forall \varphi \in B_{p', q'}^{1-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n), \text{ respectively.} \quad (1.5.8)$$

Având în vedere Definiția 1.5.3, obținem următoarea formula Green conform rezultatului nostru din [41, Lema 2.11].

Lema 1.5.4. *În ipotezele Definiției 1.5.3, operatorul de derivare conormal canonic*

$$\mathbf{t}_\alpha^+ : \mathfrak{H}_{p,\text{div}}^{s+\frac{1}{p},-\frac{1}{p'}}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_\alpha) \rightarrow B_{p,p}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad \mathbf{t}_\alpha^+ : \mathfrak{B}_{p,q,\text{div}}^{s+\frac{1}{p},-\frac{1}{p'}}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_\alpha) \rightarrow B_{p,q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n),$$

este liniar și mărginit. Mai mult, are loc prima formula Green

$$\langle \mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi), \gamma^+ \mathbf{w} \rangle_\Gamma = 2 \left\langle \tilde{E}_+ \mathbb{E}(\mathbf{u}), \mathbb{E}(\mathbf{w}) \right\rangle_{\mathfrak{D}} + \alpha \left\langle \tilde{E}_+ \mathbf{u}, \mathbf{w} \right\rangle_{\mathfrak{D}} - \left\langle \tilde{E}_+ \pi, \text{div } \mathbf{w} \right\rangle_{\mathfrak{D}} + \left\langle \tilde{E}_+ \mathcal{L}_\alpha, \mathbf{w} \right\rangle_{\mathfrak{D}} \quad (1.5.9)$$

pentru orice $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathfrak{H}_{p,\text{div}}^{s+\frac{1}{p},-\frac{1}{p'}}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_\alpha)$, $\mathbf{w} \in H_{p'}^{1+\frac{1}{p'}-s}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)$ și orice $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathfrak{B}_{p,q,\text{div}}^{s+\frac{1}{p},-\frac{1}{p'}}(\mathfrak{D}, \mathcal{L}_\alpha)$, $\mathbf{w} \in B_{p',q'}^{1+\frac{1}{p'}-s}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)$ și a doua formula de tip Green

$$\pm \left(\langle \mathbf{t}_\alpha^\pm(\mathbf{u}, \pi), \gamma^+ \mathbf{v} \rangle_\Gamma - \langle \mathbf{t}_\alpha^\pm(\mathbf{v}, q), \gamma^+ \mathbf{u} \rangle_\Gamma \right) = \left\langle \tilde{\mathcal{L}}_\alpha(\mathbf{u}, \pi), \mathbf{v} \right\rangle_{\mathfrak{D}_\pm} - \left\langle \tilde{\mathcal{L}}_\alpha(\mathbf{v}, q), \mathbf{u} \right\rangle_{\mathfrak{D}_\pm} \quad (1.5.10)$$

pentru orice $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathfrak{H}_{p,\text{div}}^{s+\frac{1}{p},-\frac{1}{p'}}(\mathfrak{D}_\pm, \mathcal{L}_\alpha)$, $(\mathbf{v}, q) \in \mathfrak{H}_{p',\text{div}}^{1+\frac{1}{p'}-s,-\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_\pm, \mathbb{R}^n)$, și respectiv orice $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathfrak{B}_{p,q,\text{div}}^{s+\frac{1}{p},-\frac{1}{p'}}(\mathfrak{D}_\pm, \mathcal{L}_\alpha)$, $(\mathbf{v}, q) \in \mathfrak{B}_{p',q'}^{1+\frac{1}{p'}-s,-\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_\pm, \mathbb{R}^n)$.

Următorul rezultat arată echivalența dintre derivatele conormale canonice, netangențiale și conormale clasice. Acest rezultat a fost obținut în Theorem 2.13 din [41].

Teorema 1.5.5. *Fie \mathfrak{D}_+ un domeniu Lipschitz cu frontiera Γ în \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ și fie $\mathfrak{D}_- = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathfrak{D}_+}$. Fie $\alpha \geq 0$, și $p, q \in (1, \infty)$. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate.*

- (i) *Dacă $s > 1$ și $(\mathbf{u}, \pi) \in B_{p,q,\text{div}}^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_\pm, \mathbb{R}^n) \times B_{p,q}^{s-1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_\pm)$, atunci $\mathbf{t}_\alpha^{c+}(\mathbf{u}, \pi)$ și $\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi)$ sunt bine definite și are loc $\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi) = \mathbf{t}_\alpha^{c+}(\mathbf{u}, \pi) \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)$.*

Mai mult, dacă urma netangențială a tensorului de stress, $\sigma_{\text{nt}}^+(\mathbf{u}, \pi)$, există aproape peste tot pe Γ , atunci există și derivata conormală netangențială aproape peste tot pe Γ și este egală cu $\mathbf{t}_{\text{nt},\alpha}^+(\mathbf{u}, \pi) = \mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi) = \mathbf{t}_\alpha^{c+}(\mathbf{u}, \pi) \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)$.

- (ii) *Fie $0 < s \leq 1$ și $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathfrak{B}_{p,q,\text{div}}^{s+\frac{1}{p},t}(\mathfrak{D}_\pm, \mathcal{L}_\alpha)$, pentru $t > -\frac{1}{p'}$. Dacă funcția maximală netangențială există $M(\sigma(\mathbf{u}, \pi))$ și urma netangențială a tensorului de stres, $\sigma_{\text{nt}}^+(\mathbf{u}, \pi)$, există aproape peste tot pe Γ și aparține lui $L^p(\Gamma, \mathbb{R}^{n \times n})$, atunci $\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi) = \mathbf{t}_{\text{nt},\alpha}^+(\mathbf{u}, \pi) \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)$.*

Capitolul 2

Teoria potențialelor de strat pentru sistemele Stokes și Brinkman pe domenii Lipschitz în \mathbb{R}^n

Teoria potențialelor de strat este un instrument puternic în studiul problemelor eliptice cu valorilor pe frontieră (a se vedea, de ex., [4], [20], [46], [60], [76], [86], [111]). În această secțiune reamintim definiția și unele proprietăți ale operatorilor potențiali pentru sistemele Stokes și Brinkman, adică, operatorul potențial Newtonian și operatorii potențiali de simplu și dublu strat.

Teoria potențială se bazează pe existența unei soluții fundamentale pentru sistemul analizat. Prin urmare, începem prin introducerea soluției fundamentale pentru operatorul Brinkman urmând principalele idei din [50], dar și pentru sistemul Stokes. Multe proprietăți ale potențialelor se bazează pe expresia tensorului vitează fundamental și tensiunea fundamentală, așa cum se arată în toată această secțiune. În continuare, introducem operatorul potențial Newtonian care definește o soluție pentru sistemul în cauză condus de o forță de acțiune. Proprietățile de mapare ale potențialului Newtonian care apar în această teză au fost publicate în [41].

Următoarea secțiune se referă la operatorii potențiali de strat și la principalele proprietăți ale acestora. În primul rând, introducem operatorul potențial Brinkman de simplu strat și discutăm despre proprietățile sale de mapare. O atenție specială este acordată operatorului maximal netangențial. În al doilea rând, este introdus operatorul potențial de dublu strat, urmând o structură analogă cu cea pentru operatorul de simplu strat. După aceea, vom lua în considerare relația de salt la frontieră pentru operatorii potențiali de strat subliniind diferența dintre abordarea netangențială și cea canonică. Încheiem această secțiune cu câteva rezultate utile ale inversabilității.

Rețineți că rezultatele prezentate în această secțiune reprezintă o colecție de rezultate cunoscute, dar și multe rezultate noi obținute în colaborare cu M. Kohr, S. E. Mikhailov și W. L. Wendland în [41].

2.1 Soluția fundamentală pentru sistemele Stokes and Brinkman în \mathbb{R}^n

În această secțiune prezentăm soluțiile fundamentale pentru cele două sisteme considerate, adică soluțiile fundamentale pentru sistemul Stokes și sistemul Brinkman din spațiul Euclidian n dimensional \mathbb{R}^n . Aceste soluții fundamentale joacă un rol cheie în definirea operatorilor de strat, care au un rol esențial în dezvoltarea teoriei potențiale pentru aceste sisteme. Sursele principale utilizate la pregătirea acestui capitol sunt [50] și [51].

Soluția fundamentală pentru sistemul Brinkman în \mathbb{R}^n

Fie $\mathcal{G}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)$ și $\Pi^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *tensorul viteză fundamental și vectorul presiune fundamental* pentru sistemul Brinkman în \mathbb{R}^n ($n \geq 2$). Perechea $(\mathcal{G}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Pi^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ este soluția fundamentală a sistemului Brinkman și satisface ecuația

$$(\Delta_{\mathbf{x}} - \alpha \mathbb{I})\mathcal{G}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \nabla_{\mathbf{x}}\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\mathbb{I}, \quad \operatorname{div}_{\mathbf{x}}\mathcal{G}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (2.1.1)$$

unde $\delta_{\mathbf{y}}$ este distribuția Dirac cu masa în $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, în timp ce subscriptul \mathbf{x} adăugat unui operator diferențial se referă la acțiunea acestuia asupra variabilei \mathbf{x} .

Componentele tensorului viteză fundamental și a vectorului presiune fundamental sunt date de (a se vedea, de ex., [75, (3.6)], [60, Secțiunea 3.2.1])

$$\mathcal{G}_{jk}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\omega_n} \left\{ \frac{\delta_{jk}}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^{n-2}} A_1(\alpha|\mathbf{y}-\mathbf{x}|) + \frac{x_j x_k}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^n} A_2(\alpha|\mathbf{y}-\mathbf{x}|) \right\}, \quad \Pi_k(x) = \frac{1}{\omega_n} \frac{x_k}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^n} \quad (2.1.2)$$

unde $A_1(z)$ și $A_2(z)$ sunt definite de

$$A_1(z) := \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} K_{\frac{n}{2}-1}(z)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + 2 \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}}(z)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) z^2} - \frac{1}{z^2}, \quad A_2(z) := \frac{n}{z^2} - 4 \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1} K_{\frac{n}{2}+1}(z)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) z^2}, \quad (2.1.3)$$

K_\varkappa este funcția Bessel de al doilea fel și ordinul $\varkappa \geq 0$, Γ este funcția Gamma, și ω_n este măsura de suprafață pe sfera unitate S^{n-1} în \mathbb{R}^n . Ecuațiile (2.1.2) și (2.1.3) arată că tensorul viteză fundamental este simetric, i.e., $(\mathcal{G}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^\top = \mathcal{G}^\alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

În ceea ce urmează, folosim convenția de adunare a indexului repetat pentru a simplifica prezentarea. *Tensorul de stress fundamental* $\mathbf{S}^\alpha(\cdot, \cdot)$ are componentele

$$S_{ij\ell}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\Pi_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})\delta_{i\ell} + \frac{\partial \mathcal{G}_{ij}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \mathcal{G}_{\ell j}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i}, \quad (2.1.4)$$

unde δ_{jk} este simbolul Kronecker, $\Pi_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sunt componentele lui Π , și $\mathcal{G}_{ij}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sunt componentele lui $\mathcal{G}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (a se vedea, de ex., [50, Section 2.3]).

2.2 Proprietățile de mapare a potențialului Newtonian pentru sistemul Brinkman

Notăm cu $*$ produsul de convoluție. Prin urmare, potențialele Newtoniene de viteză și presiune asociați cu sistemul Brinkman sunt date de

$$(\mathbf{N}_{\alpha; \mathbb{R}^n} \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) := -(\mathcal{G}^\alpha * \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) = -\langle \mathcal{G}^\alpha(\mathbf{x}, \cdot), \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad (2.2.1)$$

$$(\mathcal{Q}_{\alpha; \mathbb{R}^n} \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) = (\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) := -(\boldsymbol{\Pi} * \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) = -\langle \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x}, \cdot), \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad (2.2.2)$$

unde $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ și \mathcal{G}^α este tensorul fundamental reprezentat prin componentele sale din (2.1.2).

Utilizând expresia (2.2.1), deducem următoarea proprietate (cf. [41, Lema 3.1] precum și Teorema 3.10 în [75]).

Lema 2.2.1. *Fie $\alpha > 0$. Atunci pentru orice $p, q \in (1, \infty)$ și $s \in \mathbb{R}$ următorii operatori*

$$\mathbf{N}_{\alpha; \mathbb{R}^n} : H_p^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_p^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad (2.2.3)$$

$$\mathbf{N}_{\alpha; \mathbb{R}^n} : B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p,q}^{s+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad (2.2.4)$$

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^n} : H_p^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_{p,\text{loc}}^{s+1}(\mathbb{R}^n), \quad (2.2.5)$$

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^n} : B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p,q,\text{loc}}^{s+1}(\mathbb{R}^n), \quad (2.2.6)$$

sunt liniari și continui.

În consecință, obținem următorul rezultat.

Corolarul 2.2.2. *Presupunem că $\mathfrak{D}_+ \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) este un domeniu Lipschitz și fie $\mathfrak{D}_- = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathfrak{D}_+}$. Fie $\alpha > 0$, $p \in (1, \infty)$, și $p^* = \max\{2, p\}$. Atunci potențialul viteză Newtonian și potențialul presiune satisfac ecuațiile sistemului Brinkman și următorii operatori*

$$(\mathbf{N}_{\alpha; \mathfrak{D}_+}, \mathcal{Q}_{\mathfrak{D}_+}) : L^p(\mathfrak{D}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{H}_{p, \text{div}}^{2,0}(\mathfrak{D}_+, \mathcal{L}_\alpha), \quad (2.2.7)$$

$$(\mathbf{N}_{\alpha; \mathfrak{D}_-}, \mathcal{Q}_{\mathfrak{D}_-}) : L^p(\mathfrak{D}_-, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{H}_{p, \text{div}, \text{loc}}^{2,0}(\overline{\mathfrak{D}_-}, \mathcal{L}_\alpha), \quad (2.2.8)$$

$$(\mathbf{N}_{\alpha; \mathfrak{D}_+}, \mathcal{Q}_{\mathfrak{D}_+}) : L^p(\mathfrak{D}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{B}_{p, p^*, \text{div}}^{2,0}(\mathfrak{D}_+, \mathcal{L}_\alpha), \quad (2.2.9)$$

$$(\mathbf{N}_{\alpha; \mathfrak{D}_-}, \mathcal{Q}_{\mathfrak{D}_-}) : L^p(\mathfrak{D}_-, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{B}_{p, p^*, \text{div}, \text{loc}}^{2,0}(\overline{\mathfrak{D}_-}, \mathcal{L}_\alpha), \quad (2.2.10)$$

sunt continui.

2.3 Proprietăți de mapare a potențialelor de strat Brinkman în spații Sobolev și Besov

În această secțiune, introducem operatorii de simplu și dublu strat pentru sistemul Brinkman și oferim principalele proprietăți care sunt necesare în studiul problemelor la frontieră în secțiunile următoare. În primul rând, ne preocupăm de proprietățile de mapare a potențialelor de strat definite pe spațiile Sobolev și Besov cu baza în L^p , cu p într-o vecinătate a lui 2. Aceste proprietăți joacă un rol cheie în analiza problemelor la limită pe domenii Lipschitz încrețite, mărginite, tratate în capitolul 3. Apoi, vom extinde aceste proprietăți în spațiile Sobolev și Besov cu un indice $s \in (0, 1)$. O astfel de extensie este foarte utilă în analiza unor probleme la frontieră, care este dezvoltată în capitolul 4. O atenție deosebită se acordă relațiilor de salt la frontieră pentru operatorii potențiali de simplu strat și dublu strat, cu accent pe diferența dintre urma netangențială și Gagliardo, precum și dintre operatorii de derivare conormali netangențiali și canonici. Mai mult, oferim formula de reprezentare a câmpului de viteză și presiune în ceea ce privește potențialele de strat, prin utilizarea atât a abordării netangențiale, cât și a celei canonice. Încheiem această secțiune cu câteva rezultate utile de inversabilitate pentru potențialele de strat. Rezultatele acestei secțiuni sunt contribuții originale obținute în [41].

2.3.1 Potențialul de simplu strat Brinkman și proprietăți de mapare corespunzătoare

De acum înainte, în acest capitol vom lua în considerare următoarea ipoteză, dacă nu se specifică altfel.

Ipoteza 2.3.1. Fie $\mathfrak{D}_+ \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) un domeniu Lipschitz mărginit cu frontiera conexă Γ și fie $\mathfrak{D}_- := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathfrak{D}_+}$.

Fie $\alpha > 0$, $s \in [0, 1]$ și $p \in (1, \infty)$. Pentru o denistate dată $\mathbf{g} \in H_p^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, potențialul Brinkman viteză de simplu strat, $\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}$, și potențialul presiune corespunzător, $Q_\alpha^s \mathbf{g}$, sunt date de

$$(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g})(\mathbf{x}) := \langle \mathcal{G}^\alpha(\mathbf{x}, \cdot)|_\Gamma, \mathbf{g} \rangle_\Gamma, \quad (Q_\alpha^s \mathbf{g})(\mathbf{x}) := \langle \Pi(\mathbf{x}, \cdot)|_\Gamma, \mathbf{g} \rangle_\Gamma, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma. \quad (2.3.1)$$

Datorită (2.3.1), perechea $(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}, Q_\alpha^s \mathbf{g})$ satisface sistemul omogen Brinkman în \mathfrak{D}_\pm ,

$$(\Delta - \alpha \mathbb{I})\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g} - \nabla Q_\alpha^s \mathbf{g} = 0, \quad \text{div} \mathbf{V}_\alpha \mathbf{g} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Gamma. \quad (2.3.2)$$

Potențialul de simplu strat pentru sistemul Brinkman pe spații Besov poate fi definit similar pentru $\mathbf{g} \in B_{p,q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, unde $s \in (0, 1)$ și $p, q \in (1, \infty)$. În cazul sistemului Stokes, i.e., pentru $\alpha = 0$, utilizăm notațiile $\mathbf{V} \mathbf{g}$ și $Q^s \mathbf{g}$, i.e.,

$$\mathbf{V}_0 \mathbf{g} \equiv \mathbf{V} \mathbf{g}, \quad Q_0^s \mathbf{g} \equiv Q^s \mathbf{g}. \quad (2.3.3)$$

În continuare, descriem acțiunea operatorului maximal netangetial aplicat potențialului de simplu strat $\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}$, când $\mathbf{g} \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ și respectiv $\mathbf{g} \in H_p^{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n)$. Mai mult, arătăm că limitele netangetiale există aproape peste tot pe frontieră în ambele cazuri. Urmărim pentru aceasta argumentele principale din Lema 3.4 din lucrarea noastră [41].

Lema 2.3.2. *În ipoteza 2.3.1 și pentru $\alpha \geq 0$ și $p \in (1, \infty)$, avem*

(i) *Există două constante $C_i = C_i(\Gamma, p, \alpha) > 0$, $i = 1, \dots, 2$, astfel încât*

$$\|M(\nabla \mathbf{V}_\alpha \mathbf{g})\|_{L^p(\Gamma)} + \|M(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g})\|_{L^p(\Gamma)} + \|M(Q^s \mathbf{g})\|_{L^p(\Gamma)} \leq C_1 \|\mathbf{g}\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)}, \quad (2.3.4)$$

pentru toate $\mathbf{g} \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ și

$$\|M(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g})\|_{L^p(\Gamma)} \leq C_2 \|\mathbf{g}\|_{H_p^{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n)}, \quad (2.3.5)$$

pentru orice $\mathbf{g} \in H_p^{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n)$.

(ii) *Pentru orice $\mathbf{g} \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, există limitele netangetiale pentru $\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}$, $\nabla \mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}$ și $Q^s \mathbf{g}$ aproape peste tot pe Γ și*

$$\|(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g})_{\text{nt}}^\pm\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)}, \|(\nabla \mathbf{V}_\alpha \mathbf{g})_{\text{nt}}^\pm\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)}, \|(Q^s \mathbf{g})_{\text{nt}}^\pm\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|\mathbf{g}\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)}. \quad (2.3.6)$$

(iii) *Pentru orice $\mathbf{g} \in H_p^{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, există limitele netangetiale pentru $\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}$ aproape peste tot pe Γ , și*

$$\|(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g})_{\text{nt}}^\pm\|_{L^p(\Gamma)} \leq C_2 \|\mathbf{g}\|_{H_p^{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n)}. \quad (2.3.7)$$

Proprietățile de mapare a potențialelor Stokes de simplu strat în spațiile Bessel potențiale și Besov pe domeniile Lipschitz mărginite, sunt bine cunoscute și ne referim la, de ex., [30], [46], [86, Teorema 10.5.3], [85, Teorema 3.1, Propoziția 3.3].

Următoarea teoremă colectează principalele proprietăți ale operatorilor potențiali viteză și presiune de simplu strat Brinkman. Le-am obținut în [41, Teorema 3.5]. Menționăm faptul că anumite proprietăți au fost obținute în [25, Propoziția 3.4], [49, Lema 3.4], [50, Lema 3.1], [85, Teorema 3.1], [100, Teoremele 3.4 și 3.5]).

Teorema 2.3.3. *Fie ipoteza 2.3.1 satisfăcută. Fie $p, q \in (1, \infty)$, $\alpha > 0$, și $p^* := \max\{2, p\}$. Fie $t \geq -\frac{1}{p}$ arbitrar, unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Atunci următoarele afirmații au loc.*

(i) *Operatorii*

$$\mathbf{V}_\alpha|_{\mathfrak{D}_+} : L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, p^*; \text{div}}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+, \mathbb{R}^n), \quad Q^s|_{\mathfrak{D}_+} : L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+), \quad (2.3.8)$$

$$(\mathbf{V}_\alpha|_{\mathfrak{D}_+}, Q^s|_{\mathfrak{D}_+}) : L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{B}_{p, p^*; \text{div}}^{1+\frac{1}{p}, t}(\mathfrak{D}_+, \mathcal{L}_\alpha), \quad (2.3.9)$$

$$\mathbf{V}_\alpha|_{\mathfrak{D}_+} : H_p^{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, p^*; \text{div}}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+, \mathbb{R}^n), \quad Q^s|_{\mathfrak{D}_+} : H_p^{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, p^*}^{-1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+), \quad (2.3.10)$$

$$(\mathbf{V}_\alpha|_{\mathfrak{D}_+}, Q^s|_{\mathfrak{D}_+}) : H_p^{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{B}_{p, p^*; \text{div}}^{\frac{1}{p}, t}(\mathfrak{D}_+, \mathcal{L}_\alpha), \quad (2.3.11)$$

sunt liniari și continui.

(ii) *Pentru orice $s \in (0, 1)$, următorii operatori*

$$\mathbf{V}_\alpha : B_{p, q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, q; \text{div}}^{s+\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad Q^s : B_{p, q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, q; \text{loc}}^{s+\frac{1}{p}-1}(\mathbb{R}^n), \quad (2.3.12)$$

$$\mathbf{V}_\alpha|_{\mathfrak{D}_+} : B_{p, q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, q; \text{div}}^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+, \mathbb{R}^n), \quad (Q^s)|_{\mathfrak{D}_+} : B_{p, q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, q}^{s+\frac{1}{p}-1}(\mathfrak{D}_+), \quad (2.3.13)$$

$$(\mathbf{V}_\alpha|_{\mathfrak{D}_+}, Q^s|_{\mathfrak{D}_+}) : B_{p, q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{B}_{p, q; \text{div}}^{s+\frac{1}{p}, t}(\mathfrak{D}_+, \mathcal{L}_\alpha), \quad (2.3.14)$$

$$\mathbf{V}_\alpha|_{\mathfrak{D}_-} : B_{p, q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, q; \text{div}}^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_-, \mathbb{R}^n), \quad Q^s|_{\mathfrak{D}_-} : B_{p, q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, q; \text{loc}}^{s+\frac{1}{p}-1}(\overline{\mathfrak{D}_-}), \quad (2.3.15)$$

$$(\mathbf{V}_\alpha|_{\mathfrak{D}_-}, Q^s|_{\mathfrak{D}_-}) : B_{p, q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{B}_{p, q; \text{div}; \text{loc}}^{s+\frac{1}{p}, t}(\overline{\mathfrak{D}_-}, \mathcal{L}_\alpha), \quad (2.3.16)$$

sunt liniari și continui.

2.3.2 Potențialul de dublu strat Brinkman și proprietăți de mapare corespunzătoare

Pentru o densitate dată $\mathbf{h} \in H_p^s(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, potențialul de dublu strat viteză și presiune, $\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}$ și $Q_\alpha^d \mathbf{h}$, sunt definite de reprezentarea integrală

$$(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h})_j(\mathbf{x}) := \int_\Gamma S_{ij\ell}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nu_\ell(\mathbf{y}) h_i(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma, \quad (2.3.17)$$

$$(Q_\alpha^d \mathbf{h})(\mathbf{x}) := \int_\Gamma \Lambda_{j\ell}^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nu_\ell(\mathbf{y}) h_j(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma, \quad (2.3.18)$$

unde ν_ℓ , $\ell = 1, \dots, n$, sunt componentele vectorului unitate normal $\boldsymbol{\nu}$ pe \mathfrak{D} , care este definit aproape peste tot pe Γ .

Definiții similare pentru potențialul de dublu strat viteză și potențialul presiune corespunzător se aplică și în cazul spațiilor Besov pentru $\mathbf{h} \in B_{p,q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, unde $s \in (0, 1)$ și $p, q \in (1, \infty)$.

Pentru $\alpha = 0$, utilizăm notațiile $\mathbf{W}\mathbf{h}$ și $Q^d \mathbf{h}$ pentru potențialele de dublu strat corespunzătoare, i.e.,

$$\mathbf{W}_0 \mathbf{h} \equiv \mathbf{W}\mathbf{h}, \quad Q_0^d \mathbf{h} \equiv Q^d \mathbf{h}. \quad (2.3.19)$$

Ținând cont de relația (2.1.1), perechea $(\mathbf{W}_\alpha^s \mathbf{h}, Q_\alpha^d \mathbf{h})$ satisface sistemul Brinkman în ambele domenii \mathfrak{D}_+ și respectiv \mathfrak{D}_- , i.e.,

$$(\Delta - \alpha \mathbb{I}) \mathbf{W}_\alpha \mathbf{h} - \nabla Q_\alpha^s \mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{W}_{\alpha; \Gamma} \mathbf{h} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Gamma. \quad (2.3.20)$$

Valuarea directă a potențialului de dublu strat $\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}$ pe frontieră este definit prin valuarea principală Cauchy ca fiind

$$(\mathbf{K}_\alpha \mathbf{h})_k(\mathbf{x}) := \text{p.v.} \int_\Gamma S_{jk\ell}^\alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \nu_\ell(\mathbf{y}) h_j(\mathbf{x}) d\sigma_y \quad (2.3.21)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus B_\varepsilon(\mathbf{x})} S_{jk\ell}^\alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \nu_\ell(\mathbf{y}) h_j(\mathbf{x}) d\sigma_y \quad \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2.3.22)$$

unde $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ reprezintă o vecinătate deschisă și centrată în \mathbf{x} cu raza ε (a se vedea, de ex., Hsiao-Wendland, [46], sau Mitrea-Wright, [86]).

Asemănător proprietăților potențialului de simplu strat, următoarea leamnă descrie acțiunea operatorului maximal netangențial asupra operatorului potențial de dublu strat și afirmă că limitele netangențiale există aproape peste tot pentru potențialul de dublu strat cu densitatea \mathbf{h} în $L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ și respectiv $H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ (cf. [41, Lema 3.4]).

Lema 2.3.4. *Fie ipoteza 2.3.1 satisfăcută. Fie $\alpha \geq 0$ și $p \in (1, \infty)$ constante date. Atunci avem*

(i) *Există două constante $C_i = C_i(\Gamma, p, \alpha) > 0$, $i = 1, 2$, astfel încât*

$$\|M(\nabla \mathbf{W}_\alpha \mathbf{h})\|_{L^p(\Gamma)} + \|M(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h})\|_{L^p(\Gamma)} + \|M(Q_\alpha^d \mathbf{h})\|_{L^p(\Gamma)} \leq C_1 \|\mathbf{h}\|_{H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)}, \quad (2.3.23)$$

pentru orice $\mathbf{h} \in H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ și

$$\|M(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h})\|_{L^p(\Gamma)} \leq C_2 \|\mathbf{h}\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)}. \quad (2.3.24)$$

pentru toate $\mathbf{h} \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)$.

(ii) *Pentru orice $\mathbf{h} \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, există limitele netangențiale a lui $\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}$ aproape peste tot pe Γ și*

$$\|(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{g})_{\text{nt}}^\pm\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|\mathbf{h}\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)}. \quad (2.3.25)$$

(iii) Fie $\mathbf{h} \in H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$. Atunci există limitele netangențiale pentru $\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}$, $\nabla \mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}$ și $Q_\alpha^d \mathbf{h}$ aproape peste tot pe Γ și

$$\|(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h})_{\text{nt}}^\pm\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)}, \|(\nabla \mathbf{W}_\alpha \mathbf{h})_{\text{nt}}^\pm\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)}, \|(Q_\alpha^d \mathbf{h})_{\text{nt}}^\pm\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|\mathbf{h}\|_{H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)}. \quad (2.3.26)$$

Pentru proprietățile de mapare ale potențialului de dublu strat pentru sistemul Stokes (i.e., pentru $\alpha = 0$) pe domenii Lipschitz mărginite referim cititorul la, de ex., [30], [46], [86, Teorema 10.5.3], [85, Teorema 3.1, Propoziția 3.3].

Principalele proprietăți ale operatorului potențial de dublu strat sunt rezumate mai jos. Ele se găsesc demonstrate în [41, Teorema 3.5] (undele dintre ele au fost obținute în [25, Propoziția 3.4], [49, Lema 3.4], [50, Lema 3.1], [85, Teorema 3.1], [100, Teorema 3.4 și 3.5]).

Teorema 2.3.5. *Fie ipoteza 2.3.1 adevărată. Fie $p, q \in (1, \infty)$, $\alpha > 0$, și $p^* := \max\{2, p\}$. Fie $t \geq -\frac{1}{p'}$ arbitrar, unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Atunci următoarele afirmații au loc.*

(i) *Următorii operatori sunt liniari și continui*

$$\mathbf{W}_\alpha|_{\mathfrak{D}_+} : H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, p^*; \text{div}}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+, \mathbb{R}^n), \quad Q_\alpha^d|_{\mathfrak{D}_+} : H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+), \quad (2.3.27)$$

$$\left(\mathbf{W}_\alpha|_{\mathfrak{D}_+}, Q_\alpha^d|_{\mathfrak{D}_+}\right) : H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{B}_{p, p^*; \text{div}}^{1+\frac{1}{p}, t}(\mathfrak{D}_+, \mathcal{L}_\alpha). \quad (2.3.28)$$

$$\mathbf{W}_\alpha|_{\mathfrak{D}_+} : L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, p^*; \text{div}}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+, \mathbb{R}^n), \quad Q_\alpha^d|_{\mathfrak{D}_+} : L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, p^*}^{\frac{1}{p}-1}(\mathfrak{D}_+), \quad (2.3.29)$$

$$\left(\mathbf{W}_\alpha|_{\mathfrak{D}_+}, Q_\alpha^d|_{\mathfrak{D}_+}\right) : L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{B}_{p, p^*; \text{div}}^{\frac{1}{p}, t}(\mathfrak{D}_+, \mathcal{L}_\alpha). \quad (2.3.30)$$

(ii) *Pentru orice $s \in (0, 1)$ următorii operatori*

$$\mathbf{W}_\alpha|_{\mathfrak{D}_+} : B_{p, q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, q; \text{div}}^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+, \mathbb{R}^n), \quad Q_\alpha^d|_{\mathfrak{D}_+} : B_{p, q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, q}^{s+\frac{1}{p}-1}(\mathfrak{D}_+), \quad (2.3.31)$$

$$\left(\mathbf{W}_\alpha|_{\mathfrak{D}_+}, Q_\alpha^d|_{\mathfrak{D}_+}\right) : B_{p, q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{B}_{p, q; \text{div}}^{s+\frac{1}{p}, t}(\mathfrak{D}_+, \mathcal{L}_\alpha), \quad (2.3.32)$$

$$\mathbf{W}_\alpha|_{\mathfrak{D}_-} : B_{p, q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, q; \text{div}; \text{loc}}^{s+\frac{1}{p}}(\overline{\mathfrak{D}_-}, \mathbb{R}^n), \quad Q_\alpha^d|_{\mathfrak{D}_-} : B_{p, q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p, q; \text{loc}}^{s+\frac{1}{p}-1}(\overline{\mathfrak{D}_-}), \quad (2.3.33)$$

$$\left(\mathbf{W}_\alpha|_{\mathfrak{D}_-}, Q_\alpha^d|_{\mathfrak{D}_-}\right) : B_{p, q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{B}_{p, q; \text{div}; \text{loc}}^{s+\frac{1}{p}, t}(\overline{\mathfrak{D}_-}, \mathcal{L}_\alpha). \quad (2.3.34)$$

sunt liniari și continui.

2.4 Proprietăți ale potențialelor de strat Brinkman în spații Sobolev și Besov

În secțiunea următoare, obținem relațiile de salt satisfăcute de potențialele de strat pentru sistemul Brinkman în cazul în care operatorul urmă și operatorul de derivare conormal sunt considerați în sensul netangențial, precum și în sensul Gagliardo sau canonic. Mai mult, acordăm o atenție specială situațiilor în care aceste noțiuni sunt echivalente.

2.4.1 Relațiile de salt a potențialelor de simplu și dublu strat

Ne concentrăm atenția asupra relațiilor de salt peste o frontieră Lipschitz pentru potențialele de strat Brinkman în spațiile Sobolev, dar și în spațiile Besov. Pentru cazul potențialelor de strat Stokes facem referire la, de ex., [30], [46], [86, Teorema 10.5.3], [85, Teorema 3.1, Propoziția 3.3]. Am obținut aceste rezultate în [41, Teorema 3.5].

Mai întâi, ne concentrăm atenția asupra cazului netangențial, cf. [41, Teorema 3.5] (și menționăm și următoarele rezultate [25, Propoziția 3.4], [49, Lema 3.4], [50, Lema 3.1], [85, Teorema 3.1], [100, Teoremele 3.4 și 3.5]).

Teorema 2.4.1. Presupunem că \mathfrak{D}_+ este un domeniu Lipschitz mărginit în \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) cu frontiera conexă Γ și $\mathfrak{D}_- = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathfrak{D}_+}$. Fie $p, q \in (1, \infty)$, $\alpha > 0$, și $p^* := \max\{2, p\}$. Fie $t \geq -\frac{1}{p'}$ arbitrar, unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Fie $\mathbf{h} \in H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ și $\mathbf{g} \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)$. Atunci următoarele proprietăți sunt valabile aproape peste tot pe Γ ,

$$(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g})_{\text{nt}}^+ = (\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g})_{\text{nt}}^- =: \mathcal{V}_\alpha \mathbf{g}, \quad \forall \mathbf{g} \in H_p^{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n); \quad (2.4.1)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{h} + (\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h})_{\text{nt}}^+ = -\frac{1}{2} \mathbf{h} + (\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h})_{\text{nt}}^- =: \mathbf{K}_\alpha \mathbf{h}, \quad \forall \mathbf{h} \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n); \quad (2.4.2)$$

$$-\frac{1}{2} \mathbf{g} + \mathbf{t}_{\text{nt}}^+(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}, Q^s \mathbf{g}) = \frac{1}{2} \mathbf{g} + \mathbf{t}_{\text{nt}}^-(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}, Q^s \mathbf{g}) =: \mathbf{K}_\alpha^* \mathbf{g}, \quad \forall \mathbf{g} \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n); \quad (2.4.3)$$

$$\mathbf{t}_{\text{nt}}^+(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}, Q_\alpha^d \mathbf{h}) = \mathbf{t}_{\text{nt}}^-(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}, Q_\alpha^d \mathbf{h}) =: \mathbf{D}_\alpha \mathbf{h}, \quad \forall \mathbf{h} \in H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n); \quad (2.4.4)$$

unde \mathbf{K}_α^* este transpusa lui \mathbf{K}_α . Mai mult, următorii operatori integrali

$$\mathcal{V}_\alpha : L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad \mathbf{K}_\alpha : H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad (2.4.5)$$

$$\mathcal{V}_\alpha : H_p^{-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad \mathbf{K}_\alpha : L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad (2.4.6)$$

$$\mathbf{K}_\alpha^* : L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad \mathbf{D}_\alpha : H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n). \quad (2.4.7)$$

sunt liniari și continui.

Următoarea teoremă este o versiune a Teoremei 2.4.1 în cazul în care relațiile de salt sunt considerate în sens Gagliardo și în cel canonic (cf. [41, Theorem 3.5]).

Teorema 2.4.2. Fie ipoteza 2.3.1 satisfăcută. Fie $p, q \in (1, \infty)$, $\alpha > 0$, și $p^* := \max\{2, p\}$. Fie $t \geq -\frac{1}{p'}$ arbitrar, unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Atunci, pentru $\mathbf{h} \in B_{p,q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ și $\mathbf{g} \in B_{p,q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, $s \in (0, 1)$, următoarele relații au loc aproape peste tot pe Γ ,

$$\gamma^+(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}) = \gamma^-(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}) =: \mathcal{V}_\alpha \mathbf{g}, \quad (2.4.8)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{h} + \gamma^+(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}) = -\frac{1}{2} \mathbf{h} + \gamma^-(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}) =: \mathbf{K}_\alpha \mathbf{h}, \quad (2.4.9)$$

$$-\frac{1}{2} \mathbf{g} + \mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}, Q^s \mathbf{g}) = \frac{1}{2} \mathbf{g} + \mathbf{t}_\alpha^-(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}, Q^s \mathbf{g}) =: \mathbf{K}_\alpha^* \mathbf{g}, \quad (2.4.10)$$

$$\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}, Q_\alpha^d \mathbf{h}) = \mathbf{t}_\alpha^-(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}, Q_\alpha^d \mathbf{h}) =: \mathbf{D}_\alpha \mathbf{h}. \quad (2.4.11)$$

În plus, următorii operatori

$$\mathcal{V}_\alpha : B_{p,q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p,q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad \mathbf{K}_\alpha : B_{p,q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p,q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad (2.4.12)$$

$$\mathbf{K}_\alpha^* : B_{p,q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p,q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad \mathbf{D}_\alpha : B_{p,q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p,q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n). \quad (2.4.13)$$

sunt liniari și continui.

Acum dăm răspunsul la întrebarea firească dacă urmele Gagliardo și operatorii urmă netangențiale aplicate potențialelor de strat sunt identici. Am dovedit următorul rezultat în [41, Lema 3.6].

Lema 2.4.3. Fie ipoteza 2.3.1 satisfăcută. Atunci următoarele proprietăți sunt adevărate.

- (i) Dacă $p \in (1, \infty)$, $\alpha \in (0, \infty)$, $\mathbf{g} \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ și $\mathbf{h} \in H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, atunci următoarele egalități au loc

$$\gamma^\pm(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}) = (\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g})_{\text{nt}}^\pm \in H_{p,\nu}^1(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad (2.4.14)$$

$$\gamma^\pm(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}) = (\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h})_{\text{nt}}^\pm \in H_{p,\nu}^1(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad (2.4.15)$$

$$\mathbf{t}_\alpha^\pm(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}, Q^s \mathbf{g}) = \mathbf{t}_{\text{nt}}^\pm(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}, Q^s \mathbf{g}) \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad (2.4.16)$$

$$\mathbf{t}_\alpha^\pm(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}, Q_\alpha^d \mathbf{h}) = \mathbf{t}_{\text{nt}}^\pm(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}, Q_\alpha^d \mathbf{h}) \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) \quad (2.4.17)$$

cu estimările în normă corespunzătoare.

(ii) Dacă $p, q \in (1, \infty)$, $s \in (0, 1)$, $\alpha \in (0, \infty)$, $\mathbf{g} \in B_{p,q}^{s-1}(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ și $\mathbf{h} \in B_{p,q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, atunci următoarele egalități au loc

$$\gamma^\pm(\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g}) = (\mathbf{V}_\alpha \mathbf{g})_{\text{nt}}^\pm \in B_{p,q;\nu}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad (2.4.18)$$

$$\gamma^\pm(\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h}) = (\mathbf{W}_\alpha \mathbf{h})_{\text{nt}}^\pm \in B_{p,q;\nu}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \quad (2.4.19)$$

cu estimările în normă corespunzătoare.

În continuare, vom avea nevoie de următoarea formulă de reprezentare integrală pentru soluția sistemului Brinkman omogen, în termenii operatorului urmă Gagliardo și a operatorului de derivare conormal canonic (a se vedea, de ex., [41, Lemma 3.7]).

Lema 2.4.4. *Fie ipoteza 2.3.1 satisfăcută. Fie $\alpha \in (0, \infty)$, $p, q \in (1, \infty)$ și $s \in (0, 1)$. Dacă $(\mathbf{u}, \pi) \in H_p^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+, \mathbb{R}^n) \times H_p^{s-1-\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+)$, sau $(\mathbf{u}, \pi) \in B_{p,q}^{s+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+, \mathbb{R}^n) \times B_{p,q}^{s-1-\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+)$ și perechea (\mathbf{u}, π) satisfac sistemul Brinkman*

$$\Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{D}_+, \quad (2.4.20)$$

atunci

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_\alpha \left(\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi) \right) (\mathbf{x}) - \mathbf{W}_\alpha \left(\gamma^+ \mathbf{u} \right) (\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{D}_+, \quad (2.4.21)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = Q^s \left(\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi) \right) (\mathbf{x}) - Q_\alpha^d \left(\gamma^+ \mathbf{u} \right) (\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{D}_+. \quad (2.4.22)$$

Apoi, obținem formula de reprezentare analogă (a treia relație a lui Green) (2.4.21) în termeni urmei netangențiale și a derivatei conormale netangențiale (cf., [41, Lema 3.8]).

Lema 2.4.5. *Fie ipoteza 2.3.1 satisfăcută. Fie $\alpha > 0$ și $p \in (1, \infty)$. Dacă $M(\mathbf{u}), M(\nabla \mathbf{u}), M(\pi) \in L^p(\Gamma)$, atunci există limitele netangențiale ale lui \mathbf{u} , $\nabla \mathbf{u}$ și π aproape peste tot pe Γ , și perechea (\mathbf{u}, π) satisface sistemul Brinkman omogen*

$$\Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{D}_+. \quad (2.4.23)$$

Atunci \mathbf{u} satisface următoarea formulă

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_\alpha \left(\mathbf{t}_{\text{nt}}^+(\mathbf{u}, \pi) \right) (\mathbf{x}) - \mathbf{W}_\alpha \left(\mathbf{u}_{\text{nt}}^+ \right) (\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{D}_+. \quad (2.4.24)$$

2.4.2 Proprietăți de inversabilitate ale operatorilor potențiali de strat

De-a lungul acestei teze, avem nevoie de rezultate ale inversabilității operatorilor potențiali de dublu strat. Rețineți că, majoritatea rezultatelor următoare se bazează pe proprietățile generale ale operatorilor Fredholm și au fost obținute în [41, Secțiunea 4]. Reamintim faptul că spațiile Sobolev (Bessel-potențiale) cu baza în L^2 , $H_2^s(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)$ sunt notate pentru simplitate cu $H^s(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)$.

Pentru a simplifica notațiile pentru următoarele teoreme și pentru secțiunea următoare a proprietăților de izomorfism pentru anumiți operatori pe spații Sobolev cu baza în L^p , introducem următoarele două intervale ca în [41, Relațiile (166) și (167)],

$$\mathcal{R}_0(n, \varepsilon) = \left(\frac{2(n-1)}{n+1} - \varepsilon, 2 + \varepsilon \right) \cap (1, +\infty), \quad \mathcal{R}_1(n, \varepsilon) = \begin{cases} (2 - \varepsilon, +\infty) & \text{if } n = 3, \\ \left(2 - \varepsilon, \frac{2(n-1)}{n-3} + \varepsilon \right) & \text{if } n > 3 \end{cases}. \quad (2.4.25)$$

Aceste două mulțimi sunt cazuri particulare a următoarei mulțimi

$$\mathcal{R}_\theta(n, \varepsilon) = \begin{cases} (2 - \varepsilon, +\infty) & \text{if } n = 3 \text{ and } \theta = 1, \\ \left(\frac{2(n-1)}{n+1-2\theta} - \varepsilon, \frac{2(n-1)}{n-1-2\theta} + \varepsilon \right) \cap (1, +\infty) & \text{if } n > 3 \text{ and } 0 \leq \theta \leq 1 \end{cases}. \quad (2.4.26)$$

Lemele [41, Lema 4.2] și [41, Lemele A.1 și B.1(ii)] implică următoarea afirmație (cf. [41, Corolarul 4.3]).

Corolarul 2.4.6. *Fie ipoteza 2.3.1 satisfăcută. Atunci pentru $\alpha \in (0, \infty)$, există $\varepsilon = \varepsilon(\Gamma) > 0$ astfel încât pentru orice $p \in \mathcal{R}_s(n, \varepsilon)$ și $p' \in \mathcal{R}_{1-s}(n, \varepsilon)$ (cf. (2.4.26)), operatorii*

$$\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_\alpha : H_{p'}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_{p'}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad s \in [0, 1], \quad (2.4.27)$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_\alpha^* : H_p^{-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_p^{-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad s \in [0, 1], \quad (2.4.28)$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_\alpha : B_{p',q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p',q}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad s \in (0, 1), \quad q \in (1, \infty), \quad (2.4.29)$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_\alpha^* : B_{p,q}^{-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p,q}^{-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad s \in (0, 1), \quad q \in (1, \infty). \quad (2.4.30)$$

sunt izomorfisme. Dacă \mathfrak{D}_+ este de clasă C^1 , atunci proprietățile sunt valabile pentru orice $p, p' \in (1, \infty)$.

Lemele [41, Lema 4.4] și [41, Lemele A.1 și B.1(ii)] implică prin interpolare următoarea afirmație [40, Corolarul 4.5].

Corolarul 2.4.7. *Fie ipoteza 2.3.1 satisfăcută. Atunci pentru $\alpha \in (0, \infty)$, există $\varepsilon = \varepsilon(\Gamma) > 0$ astfel încât pentru orice $p \in \mathcal{R}_s(n, \varepsilon)$ și $p' \in \mathcal{R}_{1-s}(n, \varepsilon)$, cf. (2.4.26), următorii operatori sunt izomorfisme,*

$$-\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_\alpha : H_{p',\nu}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_{p',\nu}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad s \in [0, 1], \quad (2.4.31)$$

$$-\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_\alpha^* : H_p^{-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n)/\mathbb{R}\nu \rightarrow H_p^{-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n)/\mathbb{R}\nu, \quad s \in [0, 1], \quad (2.4.32)$$

$$-\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_\alpha : B_{p',q,\nu}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow B_{p',q,\nu}^s(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad s \in (0, 1), \quad q \in (1, \infty), \quad (2.4.33)$$

$$-\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_\alpha^* : B_{p,q}^{-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n)/\mathbb{R}\nu \rightarrow B_{p,q}^{-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n)/\mathbb{R}\nu, \quad s \in (0, 1), \quad q \in (1, \infty). \quad (2.4.34)$$

Dacă \mathfrak{D}_+ este de clasă C^1 , atunci proprietățile sunt valabile pentru orice $p, p' \in (1, \infty)$.

În cazul $\alpha = 0$, afirmația din lema de mai jos a fost obținută în [86, Teorema 9.1.4, Corolarul 9.1.5] (a se vedea și [85, Teorema 6.1]).

În final, print-un argument de interpolare [41, Lemele A.1 și B.1] și Lema [41, Lema 4.6], obținem următoarea proprietate (a se vedea, de ex., [41, Corolarul 4.7]).

Corolarul 2.4.8. *Fie ipoteza 2.3.1 satisfăcută. Atunci pentru $\alpha \in (0, \infty)$ și $p \in \mathcal{R}_s(n, \varepsilon)$, există $\varepsilon = \varepsilon(\Gamma) > 0$ astfel încât următorii operatori*

$$\mathcal{V}_\alpha : H_p^{-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n)/\mathbb{R}\nu \rightarrow H_{p,\nu}^{1-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad s \in [0, 1], \quad (2.4.35)$$

$$\mathcal{V}_\alpha : B_{p,q}^{-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n)/\mathbb{R}\nu \rightarrow B_{p,q,\nu}^{1-s}(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad s \in (0, 1), \quad q \in (1, \infty). \quad (2.4.36)$$

sunt izomorfisme. Dacă, în plus, \mathfrak{D}_+ este de clasă C^1 , atunci proprietatea este valabilă pentru orice $p \in (1, \infty)$.

Capitolul 3

Probleme mixte pentru sistemele Brinkman și Darcy-Forchheimer-Brinkman în spații Besov pe domenii Lipschitz mărginite și încrețite din \mathbb{R}^n , $n \geq 3$

Acest capitol se referă la probleme cu valori pe frontieră de tipul mixt Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman liniar și sistemul semiliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman pe domeniile Lipschitz încrețite în \mathbb{R}^n , unde $n \geq 3$, presupunând că datele la frontieră aparțin spațiilor Sobolev cu bază în L^p cu p într-o vecinătate a lui 2, așa cum au fost obținute în colaborare cu M. Kohr, S. E. Mikhailov și W. L. Wendland în [41, Secțiunile 5 și 6]. Pentru a obține rezultatele de bine-punere pentru cele două sisteme luate în considerare, avem nevoie de solvabilitatea problemelor de frontieră Dirichlet și Neumann pentru sistemul Brinkman cu date la frontieră în L^p (pentru rezultate corelate, referim cititorul la [100, Teorema 5.5], [86, Corolarul 9.1.5, Teorema 9.1.4, 9.2.2 și 9.2.5] și [85, Teorema 7.1]). O atenție deosebită se acordă cazurilor speciale legate de diferite tipuri de operatori umră și operatori de derivare conormală, adică în cazurile în care operatorii sunt considerați în cazul netangențial sau în sensul Gagliardo și canonic (ne referim la Secțiunile 1.5 și 1.6 din Capitolul 1, precum și la [41, Secțiunile 2.1 și 2.2]). Mai mult, subliniem cerința domeniului special Lipschitz încrețit pentru probleme la frontieră de tip mixt, deoarece datele limită luate în considerare au o regularitate ridicată.

Brown și colab. în [13, Teorema 1.1] au obținut rezultatul de solvabilitate pentru problema Dirichlet-Neumann mixtă pentru sistemul Stokes, cu date la frontieră în spații L^2 pe domenii Lipschitz încrețite în \mathbb{R}^n ($n \geq 3$), prin reducerea unei astfel de probleme la limită la analiza ecuațiilor integrale de frontieră. Mai mult decât atât, în [51, Teorema 6.1] s-a dovedit bine-punerea problemei mixte *Dirichlet-Robin* pentru sistemul Brinkman într-un domeniu Lipschitz încrețit, cu date la limită în spații Sobolev cu bază în L^p , cu p într-o vecinătate a lui 2. Având în vedere rezultatele în [13], vom arăta în această secțiune bine-punerea problemei la frontieră mixtă *Dirichlet-Neumann* pentru sistemul Brinkman spații Bessel potențiale definite pe un domeniu Lipschitz mărginit \mathfrak{D} în \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) și extinzându-le în final în spații L^p pentru p în vecinătatea a lui 2, folosind teoria complexă a interpolării și a rezultatelor de incluziune a spațiilor Sobolev.

3.1 Probleme cu valori pe frontieră pentru sistemul Brinkman în domenii Lipschitz din \mathbb{R}^n

În această secțiune analizăm problemele pe frontieră de tipul Dirichlet, Neumann și tipul mixt Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman. Reamintim că printr-un domeniu Lipschitz încrețit ne referim la un domeniu care îndeplinește condițiile din Definiția 1.1.3. Problemele la frontieră din această secțiune sunt analizate pentru ambele cazuri atunci când limita la frontieră este considerată în sensul netangențial și Gagliadro.

3.1.1 Problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman cu date în spații cu baza în L^2

În acest rezumat ne referim direct la problema mixtă pentru concizia expunerii. Începem prin a preciza versiunea analogică a presupunerii 2.3.1 pentru probleme la frontieră mixte.

Ipoteza 3.1.1. Fie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) un domeniu Lipschitz mătginit și încrețit cu frontiera conexă Γ , care este descompusă suprafețe admissibile Γ_D și Γ_N (a se vedea Definiția 1.1.3).

Aceasta înseamnă că Γ_D și Γ_N nu se întâlnesc tangențial și mai mult că Γ_D și Γ_N sunt separate de o interfață Lipschitz, iar unghiul sub care se întâlnesc este mai mic decât π . Fie $(\cdot)|_{\Gamma_D}$, $(\cdot)|_{\Gamma_N}$ operatorii de restricție de la spațiul $H_p^s(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ la $H_p^s(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)$ și respectiv la $H_p^s(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)$.

În această secțiune aratăm bine-punerea problemei mixte *Dirichlet-Neumann* pentru sistemul Brinkman,

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{0}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \mathcal{D}, \\ \mathbf{u}_{\text{nt}}^+|_{\Gamma_D} = \mathbf{h}_0, \\ \mathbf{t}_{\text{nt}}^+(\mathbf{u}, \pi)|_{\Gamma_N} = \mathbf{g}_0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

unde condițiile la limită sunt considerate în sensul netangențial precum și problema echivalentă

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{0}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \mathcal{D}, \\ \gamma^+ \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{h}_0, \\ \mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi)|_{\Gamma_N} = \mathbf{g}_0, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

unde operatorul urmă este considerat în sens Gagliardo iar operatorul de derivare conormal în sensul canonic.

Pentru prima problema (3.1.1), o să aratăm că pentru $\mathbf{h}_0 \in H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)$ și $\mathbf{g}_0 \in L^p(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)$ date într-un interval pentru p , există o unică soluție L^p a problemei (3.1.3), i.e., o pereche unică (\mathbf{u}, π) astfel încât \mathbf{u} și π să satisfacă sistemul Brinkman în \mathcal{D}_+ , să existe limitele netangențiale ale \mathbf{u} , $\nabla \mathbf{u}$ și π aproape peste tot pe Γ , $M(\mathbf{u}), M(\nabla \mathbf{u}), M(\pi) \in L^p(\Gamma)$, și condițiile la frontieră în (3.1.3) să fie satisfăcute în sensul netangențial aproape peste tot pe Γ_D și respectiv Γ_N . Mai mult, aratăm că $(\mathbf{u}, \pi) \in B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n) \times B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathcal{D})$.

În cazul problemei (3.1.2), în care condițiile la frontieră sunt înțelese în sensul Gagliardo și cel canonic, o să aratăm că pentru $\mathbf{h}_0 \in H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)$ și $\mathbf{g}_0 \in L^p(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)$ date într-un interval a lui p , atunci există o soluție L^p , $(\mathbf{u}, \pi) \in B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n) \times B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathcal{D})$ a problemei mixte (3.1.2), care satisface $M(\mathbf{u}), M(\nabla \mathbf{u}), M(\pi) \in L^p(\Gamma)$.

Să menționăm că, pentru un domeniu Lipschitz mărginit și încrețit, Brown [11] a dovedit că problema mixtă pentru ecuația Laplace are o soluție unică și, în plus, că gradientul său aparține lui $L^2(\Gamma)$ când data Dirichlet aparține lui $H_2^1(\Gamma_D) = H^1(\Gamma_D)$ și data Neumann la $L^2(\Gamma_N)$. Pentru aceeași clasă de domenii, rezultatele de bine-punere au rezultat într-un interval pentru p a datelor pe frontiera cu bază în L^p în [83].

Pentru a demonstra următorul rezultat obținut în [41, Teorema 6.4], folosim ideile principale din [51, Teorema 6.1].

Teorema 3.1.2. Fie $\alpha \in (0, \infty)$. Atunci în ipoteza 3.1.1, problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman cu datele $(\mathbf{h}_0, \mathbf{g}_0)$ în spațiu $H_2^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n) \times L^2(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)$ descris de sistemul

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{0} & \text{în } \mathfrak{D}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{în } \mathfrak{D}, \\ (\mathbf{u}_{\text{nt}}^+) |_{\Gamma_D} = \mathbf{h} \\ (\mathbf{t}_{\text{nt}}^+(\mathbf{u}, \pi)) |_{\Gamma_N} = \mathbf{g}, \\ M(\nabla \mathbf{u}), M(\mathbf{u}), M(\pi) \in L^2(\Gamma), \end{cases} \quad (3.1.3)$$

are o soluție unică (\mathbf{u}, π) , care satisface condițiile la frontieră în sensul netangențial aproape peste tot pe Γ_D și respectiv Γ_N . Mai mult, (\mathbf{u}, π) aparțin spațiilor $H_2^{\frac{3}{2}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) \times H_2^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{D})$ și există două constante C_M și C depinzând de $\Gamma_D, \Gamma_N, \alpha$ și n astfel încât

$$\|M(\nabla \mathbf{u})\|_{L_2(\Gamma)} + \|M(\mathbf{u})\|_{L_2(\Gamma)} + \|M(\pi)\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_M \left(\|\mathbf{h}_0\|_{H_2^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{g}_0\|_{L_2(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)} \right), \quad (3.1.4)$$

$$\|\mathbf{u}\|_{H_2^{\frac{3}{2}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)} + \|\pi\|_{H_2^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{D})} \leq C \left(\|\mathbf{h}_0\|_{H_2^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{g}_0\|_{L_2(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)} \right). \quad (3.1.5)$$

În subsecțiunea următoare, extindem rezultatul stabilit în Teorema 3.1.2, la spații Sobolev cu baza în L^p cu p într-o vecinătate a lui 2, pentru problema mixtă (3.1.3), cu date $(\mathbf{h}_0, \mathbf{g}_0) \in H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n) \times L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)$.

Mai mult, arătăm că soluția problemei mixte (3.1.1) aparține spațiului $B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) \times B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D})$, unde $p^* = \max\{2, p\}$.

În ceea ce urmează, avem nevoie de următoarele spații definite pentru un subspațiu a lui $S_0 \subset \Gamma$, i.e.,

$$\tilde{H}_p^0(S_0, \mathbb{R}^n) := \left\{ \Phi \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} \Phi \subseteq \overline{S_0} \right\}. \quad (3.1.6)$$

3.1.2 Operatorul Neumann-to-Dirichlet pentru sistemul Brinkman

Inspirat din lucrarea [83], în care autorii au studiat problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru ecuația Laplace în domenii Lipschitz încrețite, introducem operatorul Neumann-to-Dirichlet $\Upsilon_{\text{nt};\alpha}$, care asociază data $\mathbf{g} \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, cu restricția operatorului urmă netangențial \mathbf{u}_{nt}^+ pe partea Γ_D , unde (\mathbf{u}, π) este soluția unică L^p a problemei Neumann cu derivata conormală netangențială \mathbf{g} . Astfel, (\mathbf{u}, π) satisface condiția Neumann aproape peste tot pe Γ în sensul limitei netangențiale, condițiile $M(\mathbf{u}), M(\nabla \mathbf{u}), M(\pi) \in L^p(\Gamma)$, și

$$\Upsilon_{\text{nt};\alpha} \mathbf{g} = \mathbf{u}_{\text{nt}}^+ |_{\Gamma_D}. \quad (3.1.7)$$

Similar, considerăm Υ_α , care asociază lui $\mathbf{g} \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, data $\gamma^+ \mathbf{u}$ a părții Γ_D , unde (\mathbf{u}, π) este soluția unică a problemei Neumann cu $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ și derivata conormală canonică \mathbf{g} , i.e.,

$$\Upsilon_\alpha \mathbf{g} = \gamma^+ \mathbf{u} |_{\Gamma_D}. \quad (3.1.8)$$

Idea cheie aici este proprietatea de inversabilitate a fiecărui operator Neumann-to-Dirichlet $\Upsilon_{\text{nt};\alpha}$ și Υ_α pe spații Sobolev cu baza în L^p , care duce la o extensie a rezultatului de bine-punerea problemei din 3.1.2 pe astfel de spații. Un pas intermediar în obținerea acestui rezultat este următoarea teoremă, obținută în [41, Lemma 6.5]. Reamintim că $\mathcal{R}_0(n, \varepsilon)$ este intervalul definit în (2.4.25).

Lema 3.1.3. Fie $\alpha \in (0, \infty)$. Atunci în ipoteza 3.1.1, există $\varepsilon = \varepsilon(\Gamma) > 0$ astfel încât pentru fiecare $p \in \mathcal{R}_0(n, \varepsilon)$, următoarele proprietăți au loc.

(i) Operatorii $\Upsilon_{\text{nt};\alpha}$ și Υ_α coincid, sunt continui și au expresia

$$\Upsilon_{\text{nt};\alpha} = \Upsilon_\alpha = \left(\nu_\alpha \circ \left(\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_\alpha^* \right)^{-1} \right) \Big|_{\Gamma_D}. \quad (3.1.9)$$

(ii) Problema cu valori pe frontieră mixtă Dirichlet-Neumann (3.1.1) cu data $(\mathbf{h}_0, \mathbf{g}_0) \in H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n) \times L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)$ are o soluție unică (\mathbf{u}, π) astfel încât să existe limitele netangențiale \mathbf{u} , $\nabla \mathbf{u}$ și π aproape peste tot pe Γ , $M(\mathbf{u}), M(\nabla \mathbf{u}), M(\pi) \in L^p(\Gamma)$, iar \mathbf{u} și π satisfac condițiile Dirichlet și Neumann aproape peste tot în sensul netangențial, dacă și numai dacă operatorul

$$\Upsilon_{\text{nt};\alpha} : \tilde{H}_p^0(\Gamma_D, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n) \quad (3.1.10)$$

este un izomorfism.

(iii) Problema (3.1.2) cu data $(\mathbf{h}_0, \mathbf{g}_0) \in H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n) \times L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)$ are o soluție unică $(\mathbf{u}, \pi) \in B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) \times B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D})$ dacă și numai dacă

$$\Upsilon_\alpha : \tilde{H}_p^0(\Gamma_D, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n) \quad (3.1.11)$$

este un izomorfism.

În plus, dacă soluția există (\mathbf{u}, π) , atunci aparține spațiului $B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) \times B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D})$ și există constantele $C_M \equiv C_M(\alpha, p, \Gamma_D, \Gamma_N, n) > 0$, $C \equiv C(\alpha, p, \Gamma_D, \Gamma_N, n) > 0$ și $C' \equiv C'(\alpha, p, \Gamma_D, \Gamma_N, n) > 0$ astfel încât

$$\|M(\nabla \mathbf{u})\|_{L^p(\Gamma)} + \|M(\mathbf{u})\|_{L^p(\Gamma)} + \|M(\pi)\|_{L^p(\Gamma)} \leq C_M \left(\|\mathbf{h}_0\|_{H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{g}_0\|_{L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)} \right), \quad (3.1.12)$$

$$\|\mathbf{u}\|_{B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)} + \|\pi\|_{B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D})} \leq C \left(\|\mathbf{h}_0\|_{H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{g}_0\|_{L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)} \right), \quad p^* = \max\{2, p\}, \quad (3.1.13)$$

$$\|\gamma^+ \mathbf{u}\|_{H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{t}^+(\mathbf{u}, \pi)\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)} \leq C' \left(\|\mathbf{h}_0\|_{H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{g}_0\|_{L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)} \right). \quad (3.1.14)$$

3.1.3 Problema mixtă Dirichlet și Neumann pentru sistemul Brinkman cu date în spații cu baza în L^p

Acum, formulăm rezultatul principal al acestei secțiuni, care se referă la bine-punerea problemei mixte Dirichlet-Neumann (3.1.3) cu datele pe frontieră în spații Bessel potențiale cu baza în L^p , cu p într-o vecinătate a lui 2 și când condițiile la frontieră sunt considerate în sensul netangențial. Demonstrația acestui rezultat este o consecință a Teoremei 3.1.2 și a Lemmei 3.1.3, care au fost obținute în lucrarea noastră [41, Teorema 6.6(i)].

Teorema 3.1.4. Fie $\alpha \in (0, \infty)$ și fie ipoteza 3.1.1 satisfăcută. Atunci există un număr $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $p \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ și toate datele $(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \in H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n) \times L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)$ problema de tipul mixt pentru sistemul Brinkman

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{0} & \text{in } \mathfrak{D}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \mathfrak{D}, \\ (\mathbf{u}_{\text{nt}}^+) |_{\Gamma_D} = \mathbf{h} \in H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n) \\ (\mathbf{t}_{\text{nt}}^+(\mathbf{u}, \pi)) |_{\Gamma_N} = \mathbf{g} \in L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n), \\ M(\nabla \mathbf{u}), M(\mathbf{u}), M(\pi) \in L^p(\Gamma), \end{cases} \quad (3.1.15)$$

în care condițiile Dirichlet și Neumann sunt satisfăcute în sensul netangențial aproape peste tot pe Γ_D și respectiv Γ_N , are o soluție unică (\mathbf{u}, π) . Mai mult, $(\mathbf{u}, \pi) \in B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) \times B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D})$, și există constantele $C_j \equiv C_j(\alpha, p, \Gamma_D, \Gamma_N, n) > 0$, $j = 1, \dots, 3$ astfel încât

$$\|M(\nabla \mathbf{u})\|_{L^p(\Gamma)} + \|M(\mathbf{u})\|_{L^p(\Gamma)} + \|M(\pi)\|_{L^p(\Gamma)} \leq C_1 \left(\|\mathbf{h}\|_{H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{g}\|_{L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)} \right), \quad (3.1.16)$$

$$\|\mathbf{u}\|_{B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)} + \|\pi\|_{B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D})} \leq C_2 \left(\|\mathbf{h}\|_{H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{g}\|_{L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)} \right), \quad (3.1.17)$$

$$\|\gamma^+ \mathbf{u}\|_{H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi)\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)} \leq C_3 \left(\|\mathbf{h}\|_{H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{g}\|_{L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)} \right). \quad (3.1.18)$$

Următoarea teoremă este contrapartida teoremei 3.1.4, când operatorul urmă este considerat în sensul Gagliardo și derivata conormală în sensul canonic. Acest rezultat se referă la a doua parte a Teoremei 6.6 din lucrarea noastră [41].

Teorema 3.1.5. *Fie ipoteza 3.1.1 satisfăcută. Atunci pentru orice $\alpha \in (0, \infty)$, există un număr $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru fiecare $p \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ și pentru toate datele $(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \in H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n) \times L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)$, problema mixtă Dirichlet-Neumann dată de*

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{0} & \text{in } \mathfrak{D}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \mathfrak{D}, \\ (\gamma^+ \mathbf{u})|_{\Gamma_D} = \mathbf{h} \in H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n) \\ (\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi))|_{\Gamma_N} = \mathbf{g} \in L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n), \end{cases} \quad (3.1.19)$$

are o soluție unică (\mathbf{u}, π) , unde condițiile la frontieră sunt luate în sensul Gagliardo și cel canonic. Mai mult, $(\mathbf{u}, \pi) \in B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) \times B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D})$, și există constantele $C_j \equiv C_j(\alpha, p, \Gamma_D, \Gamma_N, n) > 0$, $j = 1, 2, 3$ astfel încât

$$\|M(\nabla \mathbf{u})\|_{L^p(\Gamma)} + \|M(\mathbf{u})\|_{L^p(\Gamma)} + \|M(\pi)\|_{L^p(\Gamma)} \leq C_1 \left(\|\mathbf{h}\|_{H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{g}\|_{L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)} \right), \quad (3.1.20)$$

$$\|\mathbf{u}\|_{B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n)} + \|\pi\|_{B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D})} \leq C_2 \left(\|\mathbf{h}\|_{H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{g}\|_{L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)} \right), \quad (3.1.21)$$

$$\|\gamma^+ \mathbf{u}\|_{H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi)\|_{L^p(\Gamma, \mathbb{R}^n)} \leq C_3 \left(\|\mathbf{h}\|_{H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{g}\|_{L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^n)} \right). \quad (3.1.22)$$

3.1.4 Problema Poisson de tipul mixt Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman cu date în spații cu baza în L^p

Utilizând Theorema 3.1.4, demonstrăm rezultatul de bine-punere a problemei pentru următoarea problemă Poisson de tipul mixt Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman în domenii Lipschitz mărginite și încrețite \mathfrak{D} , și cu date în spații cu baza în L^p ,

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{f} \in L^p(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^3), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \mathfrak{D} \\ (\gamma^+ \mathbf{u})|_{\Gamma_D} = \mathbf{h}_0 \in H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^3) \\ (\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi))|_{\Gamma_N} = \mathbf{g}_0 \in L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (3.1.23)$$

unde operatorul urmă și operatorul de derivare conormal sunt considerați în sensul limitelor netangențiale. În primul rând, menționăm următoarea definiție.

Definiția 3.1.6. Printr-o soluție a problemei cu valori pe frontieră (3.1.23) înțelegem o pereche $(\mathbf{u}, \pi) \in B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+, \mathbb{R}^n) \times B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}_+)$, unde $p^* = \max\{2, p\}$, care satisface sistemul neomogen Brinkman în \mathfrak{D}_+ , condițiile Dirichlet pe Γ_D în sensul Gagliardo și condiția Neumann pe Γ_N în sensul canonic dat în Definiția 1.5.3.

Teorema 3.1.7. *Fie ipoteza 3.1.1 adevărată. Atunci pentru orice $\alpha \in (0, \infty)$, există un număr $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru fiecare $p \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ și orice date $(\mathbf{f}, \mathbf{h}_0, \mathbf{g}_0) \in L^p(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^n) \times H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^3) \times L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^3)$ problema cu valori pe frontieră (3.1.23) are o soluție unică*

$$(\mathbf{u}, \pi) \in B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^3) \times B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}), \quad (3.1.24)$$

unde $p^* = \max\{2, p\}$. Soluția satisface condițiile

$$\gamma^+ \mathbf{u} \in H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi) \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^3), \quad (3.1.25)$$

și există un operator liniar și continuu

$$\mathcal{A}_p : L^p(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^3) \times H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^3) \times L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^3) \rightarrow B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^3) \times B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D})$$

care livrează soluția, ceea ce înseamnă că $\mathcal{A}_p(\mathbf{f}, \mathbf{h}_0, \mathbf{g}_0) = (\mathbf{u}, \pi)$.

3.2 Probleme semiliniare pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman

În această secțiune oferim un rezultat de solvabilitate pentru problema mixtă la frontieră Dirichlet-Neumann pentru sistemul semiliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman.

3.2.1 Problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul semilinear Darcy-Forchheimer-Brinkman în spații Besov

Acum, studiem problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul semiliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \beta |\mathbf{u}| \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{0} & \text{in } \mathfrak{D}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \mathfrak{D}. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Acest sistem semiliniar joacă un rol important în mecanica fluidelor, deoarece descrie curgerea unui fluid în medii poroase saturate cu lichide Newtoniene incompresibile [87, p. 17]. Constanțele $\alpha, \beta > 0$ sunt legate de proprietățile fizice ale unui astfel de mediu poros și descriu convecția fluxului de fluid.

Analiza acestei probleme este limitată la setarea tridimensională, datorită faptului că argumentele noastre se bazează pe unele rezultate de incluziune.

În ceea ce urmează, extindem rezultatul de solvabilitate obținut în [51, Theorem 7.1] pentru sistemul (3.2.1) cu datele la frontieră în spații Sobolev cu baza în L_2 , la cazul în care datele se regăsesc în spații Bessel potențiale cu baza L^p , adică la cazul când datele $(\mathbf{h}_0, \mathbf{g}_0)$ aparțin spațiilor $H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^3) \times L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^3)$, cu $p \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ și o constantă $\varepsilon > 0$ ca în Teorema 3.1.7, și acesta date sunt suficient de mici. Următoarea teorema a fost obținută în colaborare cu M. Kohr, S. Mikhailov și W. Wendland în [41, Theorem 7.1].

Teorema 3.2.1. *Fie ipoteza 3.1.1 satisfăcută. Atunci pentru orice $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $p \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ să existe două constante $\zeta_p \equiv \zeta_p(\mathfrak{D}, \alpha, \beta, p) > 0$ și $\eta_p \equiv \eta_p(\mathfrak{D}, \alpha, \beta, p) > 0$ cu proprietatea că pentru toate datele la frontieră $(\mathbf{h}_0, \mathbf{g}_0) \in H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^3) \times L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^3)$ care satisfac condiția*

$$\|\mathbf{h}_0\|_{H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{g}_0\|_{L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^3)} \leq \zeta_p, \quad (3.2.2)$$

problema mixtă cu valori pe frontieră pentru sistemul semilinear Darcy-Forchheimer-Brinkman

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \beta |\mathbf{u}| \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{0} & \text{in } \mathfrak{D}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \mathfrak{D}, \\ (\gamma^+ \mathbf{u})|_{\Gamma_D} = \mathbf{h}_0 & \text{on } \Gamma_D \\ (\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi))|_{\Gamma_N} = \mathbf{g}_0 & \text{on } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.2.3)$$

are o soluție unică $(\mathbf{u}, \pi) \in B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^3) \times B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D})$, care satisface estimarea

$$\|\mathbf{u}\|_{B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^3)} \leq \eta_p, \quad (3.2.4)$$

și relațiile $\gamma^+ \mathbf{u} \in H_p^1(\Gamma, \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi) \in L^p(\Gamma, \mathbb{R}^3)$. Mai mult, soluția depinde continuu de datele problemei, ceea ce înseamnă că există o constantă $C \equiv C(\mathfrak{D}, \alpha, \beta, p) > 0$ astfel încât

$$\|\mathbf{u}\|_{B_{p,p^*}^{1+\frac{1}{p}}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{B_{p,p^*}^{\frac{1}{p}}(\mathfrak{D})} \leq C \left(\|\mathbf{h}_0\|_{H_p^1(\Gamma_D, \mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{g}_0\|_{L^p(\Gamma_N, \mathbb{R}^3)} \right). \quad (3.2.5)$$

Capitolul 4

Abordare variațională și potențială pentru probleme mixte pentru sistemele Brinkman și Darcy-Forchheimer-Brinkman în \mathbb{R}^2

În acest capitol, ne concentrăm atenția asupra soluției slabe a problemelor pe frontieră pentru sistemului Brinkman pe un domeniul Lipschitz al spațiului Euclidian bidimensional \mathbb{R}^2 . Considerăm o formulare variațională pentru ecuațiile integrale de frontieră derivate din problemele la limită avute în vedere. Ca și în capitolul anterior, luăm în considerare problema Dirichlet, Neumann și, de asemenea, problema Robin pentru sistemul Brinkman. Principalele surse folosite în pregătirea acestui capitol sunt lucrările [37] și [40], bazate pe [61], [76]. În plus, analizăm și problema Dirichlet-Robin mixtă pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman (cf. [37, Teorema 2.9] pentru problema Robin).

Începem cu o prezentare succintă a unor rezultate valoroase legate de problemele eliptice pe frontieră în două dimensiuni. Mulți autori au considerat probleme la frontieră legate de problemele de curgere a fluidului în două dimensiuni. Problemele bidimensionale sunt de mare interes, deoarece multe probleme oceanografice și meteorologice pot fi reduse la studiul unor astfel de probleme [26], [71]. Mai mult decât atât, s-au făcut eforturi mari pentru a studia curgerea unui fluid în exteriorul sau în interiorul unui cilindru sau al altui domeniu neregulat în două dimensiuni [64], [92]. În [45], Hsiao și Kress au studiat problema externă Dirichlet bidimensională pentru sistemul Stokes prin reducerea problemei la un sistem de ecuații integrale Fredholm de al doilea tip. Problemele externe bidimensionale ale fluxului Stokes în domenii multiplicare au fost studiate de Power [91] prin utilizarea unei metode integrale de două straturi. O extindere a principalelor rezultate în [30], obținută în contextul Euclidian plat în cazul domeniilor Lipschitz pe varietăți Riemanniane compacte, este obținută de Mitrea și Taylor în [85].

Referința principală ale acestui capitol este lucrarea publicată de Kohr și Wendland [61], care analizează ecuațiile directe la frontieră pentru problema Dirichlet, Neumann și pentru problema mixtă a sistemului Stokes în \mathbb{R}^3 pe frontiere Lipschitz, prin folosirea formulărilor variaționale. Multe proprietăți de coercivitate descrise în continuare pentru sistemul Brinkman se bazează pe proprietățile coercivitate dovedite în [61]. Bazându-ne pe bine-punerea problemei Dirichlet, construim rezultate de existență și unicitate pentru problema mixtă Dirichlet-Robin pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman. Acest rezultat constituie baza teoretică a problemelor pe frontieră mixte studiate numeric în capitolul 9.

4.1 Abordare variațională pentru probleme pe frontieră pentru sistemul Brinkman

Urmărind structura secțiunii anterioare, începem cu analiza problemei Dirichlet pentru sistemul Brinkman ca în secțiunea 3 prin utilizarea unei abordări variaționale, bazată pe cea din [37].

4.1.1 Abordare variațională pentru problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman

Similar cu secțiunile anterioare, presupunem următoarele.

Ipoteza 4.1.1. Fie $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu Lipschitz mărginit cu frontiera conexă $\Gamma = \partial\mathfrak{D}$, care poate fi descompusă în Γ_D, Γ_N ca și în Definiția 1.1.2.

Apoi, considerăm problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \nabla \pi = 0 \text{ in } \mathfrak{D}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathfrak{D}, \\ (\gamma^+ \mathbf{u})|_{\Gamma_D} = \mathbf{h} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2), \\ (\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi))|_{\Gamma_N} = \mathbf{g} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2), \end{cases} \quad (4.1.1)$$

unde $(\cdot)|_{\Gamma_D}$ reprezintă operatorul de restricție din spațiul Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ la $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2)$, și $(\cdot)|_{\Gamma_N}$ este operatorul de restricție de la $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ la $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2)$.

Înainte de a preciza o teoremă de echivalență între problema mixtă (4.1.1) și un sistem de ecuații integrale pe frontieră, facem mai întâi câteva observații. Reformulăm problema de frontieră (4.1.1) ca un sistem de ecuații integrale pe frontieră, inspirat de ideile principale din [61] așa cum am făcut în [37] (a se vede și Teorema 7.9 în [76]). Începând cu reprezentarea Green a unei soluții slabe (a se vedea, de ex., [46] și [86] pentru $\alpha = 0$)

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi)) - \mathbf{W}_\alpha(\gamma^+ \mathbf{u}), \quad \pi(x) = Q_\alpha^s(\mathbf{t}_\alpha(\mathbf{u}, \pi)) - Q_\alpha^d(\gamma^+ \mathbf{u}), \quad (4.1.2)$$

și aplicând operatorul urmă în \mathfrak{D} , obținem următoarea relație

$$\mathcal{V}_\alpha(\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi)) - \left(\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_\alpha\right) \gamma^+ \mathbf{u} = 0. \quad (4.1.3)$$

Aplicând acum operatorul conormal de derivare în (4.1.2) și utilizând formulele de salt corespunzătoare (Theorema 2.4.2), obținem ecuația

$$\left(-\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}_\alpha^*\right) (\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi)) - \mathbf{D}_\alpha \gamma^+ \mathbf{u} = 0. \quad (4.1.4)$$

Din definiția spațiilor $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2)$ și $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2)$ rezultă că există $\mathbf{h}^* \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ și $\mathbf{g}^* \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ astfel încât $\mathbf{h}^*|_{\Gamma_D} = \mathbf{h}$ și $\mathbf{g}^*|_{\Gamma_N} = \mathbf{g}$. Prin urmare, urma și derivata conormală $\gamma^+ \mathbf{u}$ și $\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi)$ pentru problema mixtă (4.1.1) pot fi scrise în forma

$$(\gamma^+ \mathbf{u})|_\Gamma = \varphi_N + \mathbf{h}^*, \quad (\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi))|_\Gamma = \psi_D + \mathbf{g}^*. \quad (4.1.5)$$

cu necunostutele $\varphi_N \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2)$ și $\psi_D \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2)$.

Conform condiției $\langle \gamma^+ \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu} \rangle = 0$ care este satisfăcută de urma $\gamma^+ \mathbf{u}$ pe Γ , alegem o extensie \mathbf{h}_D^* a datei Dirichlet \mathbf{h} , Astfel încât să fie satisfăcută următoare condiție de ortogonalitate $\langle \mathbf{h}_D^*, \boldsymbol{\nu} \rangle = 0$, adică,

$$\mathbf{h}_D^* \in H_V^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^2). \quad (4.1.6)$$

Prin urmare, urma \mathbf{u} pe Γ poate fi scrisă ca

$$(\gamma^+ \mathbf{u})|_{\Gamma} = \varphi_N + \mathbf{h}_D^* \quad (4.1.7)$$

și datorită ecuației de continuitate și a teoremei flux-divergență, deducem că densitatea dorită φ_N satisface condiția de ortogonalitate

$$\langle \varphi_N, \boldsymbol{\nu} \rangle = 0, \text{ i.e., } \varphi \in \tilde{H}_{\boldsymbol{\nu}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^2). \quad (4.1.8)$$

Înainte de a începe analiza ecuațiilor de frontieră (4.1.3), (4.1.4) referitoare la problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman, introducem pentru claritate următoarele notații. De vreme ce lucrăm cu restricții la frontieră, notăm

$$\mathcal{V}_{\alpha}^D \psi := \mathcal{V}_{\alpha} \psi|_{\Gamma_D}, \quad \mathbf{K}_{\alpha}^{*N} \psi := \mathbf{K}_{\alpha}^* \psi|_{\Gamma_N}, \quad \psi \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2), \quad (4.1.9)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha}^D \varphi := \mathbf{K}_{\alpha} \varphi|_{\Gamma_D}, \quad \mathbf{D}_{\alpha}^N \varphi := \mathbf{D}_{\alpha} \varphi|_{\Gamma_N}, \quad \varphi \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2). \quad (4.1.10)$$

Restricționând (4.1.3) la Γ_D și ecuația (4.1.4) la Γ_N , obținem sistemul de ecuații de frontieră cu necunoscutele $\psi_D \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2)$ și $\varphi_N \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2)$ de forma

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{\alpha}^D \psi_D - \mathbf{K}_{\alpha}^D \varphi_N = f_1, & x \in \Gamma_D \\ \mathbf{K}_{\alpha}^{*N} \psi_D - \mathbf{D}_{\alpha}^N \varphi_N = f_2, & x \in \Gamma_N \end{cases} \quad (4.1.11)$$

unde $(f_1, f_2) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2)$ sunt date de

$$f_1 = \frac{1}{2} \mathbf{h}_D^* + \mathbf{K}_{\alpha}^D \mathbf{h}_D^* - \mathcal{V}_{\alpha}^D \mathbf{g}^*, \quad f_2 = \mathbf{D}_{\alpha}^N \mathbf{h}_D^* + \frac{1}{2} \mathbf{g}^* - \mathbf{K}_{\alpha}^{*N} \mathbf{g}^*. \quad (4.1.12)$$

Având argumentele de mai sus, menționăm o teoremă de echivalență între problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman (4.1.1) și sistemul de ecuații integrale limită (4.1.11). De asemenea, ne referim la Teorema 7.9 din [76].

Teorema 4.1.2. *Fie ipoteza 4.1.1 satisfăcută și fie $\mathbf{h} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ și $\mathbf{g} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^2)$. De asemenea, fie \mathbf{g}^* și \mathbf{h}_D^* date de (4.1.5) și (4.1.6). Atunci, următoarele afirmații sunt adevărate.*

(i) *Dacă $(\mathbf{u}, \pi) \in H^1(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^2) \times L^2(\mathfrak{D})$ este o soluție a sistemului (4.1.1), atunci (ψ_D, φ_N) date de*

$$\psi_D = \mathbf{t}_{\alpha}^+(\mathbf{u}, \pi) - \mathbf{g}^*, \quad \varphi_N = \gamma^+ \mathbf{u} - \mathbf{h}_D^*, \quad (4.1.13)$$

sunt o soluție pentru (4.1.11). Mai mult, soluția (\mathbf{u}, π) poate fi reprezentată

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}_{\alpha}(\psi_D + \mathbf{g}^*) - \mathbf{W}_{\alpha}(\varphi_N + \mathbf{h}_D^*), \quad \pi = Q_{\alpha}^s(\psi_D + \mathbf{g}^*) - Q_{\alpha}^d(\varphi_N + \mathbf{h}_D^*), \quad (4.1.14)$$

(ii) *Dacă, $(\varphi_N, \psi_D) \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2)$ este o soluție pentru sistemul integral (4.1.11), atunci formula (4.1.14) definește o soluție pentru sistemul (4.1.1).*

Pentru simplitate, introducem notația \mathcal{H} pentru spațiul produs

$$\mathcal{H} := \tilde{H}_{\boldsymbol{\nu}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2) \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^2). \quad (4.1.15)$$

Definim forma biliniară $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$a((\varphi_N, \psi_D); (\varphi, \psi)) := \langle \mathcal{V}_{\alpha}^D \psi_D, \varphi \rangle - \langle \mathbf{K}_{\alpha}^D \varphi_N, \psi \rangle + \langle \mathbf{K}_{\alpha}^{*N} \psi_D, \varphi \rangle + \langle -\mathbf{D}_{\alpha}^N \varphi_N, \psi \rangle. \quad (4.1.16)$$

Apoi luăm în considerare următoarea problemă variațională a problemei mixte Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman (4.1.1). Găsiți $(\varphi_N, \psi_D) \in \mathcal{H}$ astfel încât următoarea ecuație să fie îndeplinită (a se vedea [61] pentru $\alpha = 0$)

$$a((\varphi_N, \psi_D); (\varphi, \psi)) = l(\varphi, \psi), \quad \forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{H}, \quad (4.1.17)$$

unde

$$l(\varphi, \psi) = \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{h}_D^* + \mathbf{K}_\alpha^D \mathbf{h}_D^* - \mathcal{V}_\alpha^D \mathbf{g}^*, \psi \right\rangle + \left\langle \mathbf{D}_\alpha^N \mathbf{h}_D^* + \frac{1}{2} \mathbf{g}^* - \mathbf{K}_\alpha^{*N} \mathbf{g}^*, \varphi \right\rangle. \quad (4.1.18)$$

Înainte de a analiza sistemului de ecuații integrale (4.1.11), studiem proprietățile de coercivitate ale operatorilor potențiali de simplu și dublu strat.

Teorema 4.1.3. *În ipoteza 4.1.1, avem următoarele proprietăți de coercivitate.*

(i) *Operatorul de simplu strat*

$$\mathcal{V}_\alpha^D : \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2), \quad (4.1.19)$$

este elliptic, adică,

$$\langle \mathcal{V}_\alpha^D \psi, \psi \rangle \geq c_V \|\psi\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2)}, \quad \forall \psi \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2). \quad (4.1.20)$$

(ii) *Operatorul hipersingular*

$$\mathbf{D}_\alpha^N : \tilde{H}_\nu^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2)/\mathbb{R}\nu, \quad (4.1.21)$$

este elliptic, adică,

$$\langle -\mathbf{D}_\alpha^N \varphi, \varphi \rangle \geq c_D \|\varphi\|_{\tilde{H}_\nu^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2)}, \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_\nu^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2). \quad (4.1.22)$$

Acum arătăm următorul rezultat de bine-punerea problemei pentru problema variațională (4.1.17).

Teorema 4.1.4. *În ipoteza 4.1.1 și pentru $\alpha \in (0, \infty)$ problema variațională (4.1.17) are o soluție unică.*

4.2 Problema Poisson cu condiții mixte la frontieră pentru sistemul Brinkman

Următoarea subsecțiune este dedicată extinderii rezultatului de solvabilitate pentru problema Dirichlet-Neumann mixtă pentru sistemul Brinkman omogen la problema Poisson înrudită folosind o abordare constructivă cu ajutorul potențialul Newtonian ([37, Teorema 3]). Ulterior, ne concentrăm atenția asupra problemei de frontieră Dirichlet-Robin pentru sistemul Brinkman, care joacă un rol principal în analiza sistemelor neliniare din ultima parte a acestei secțiuni. Rezultatul dorit se bazează pe proprietatea Fredholm a operatorului aferent și a fost obținut în lucrarea noastră [37, Teorema 4].

4.2.1 Problema Poisson pentru sistemul Brinkman cu condiții mixte Dirichlet și Neumann

În această subsecțiune vom arăta rezultatul de bine-punere al soluției slabe pentru problema la limită mixtă a tipului Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman în spații Sobolev cu bază în L^2 pe un domeniu Lipschitz mărginit \mathcal{D} în \mathbb{R}^2 cu frontiera conexă. Rezultatul de bine-punere pentru această problemă se bazează pe proprietatea de bine-punere a problemei obținută în secțiunea anterioară și urmează argumente similare ca în [53], unde autorii au studiat problema Poisson pentru sistemul Stokes și Brinkman (a se vedea și [65, Secțiunea 4]).

Pentru simplitatea notațiilor, să definim spațiul soluției \mathcal{X} , spațiul datelor pe frontieră \mathcal{B} și spațiul \mathcal{Y} pentru problema pe frontieră mixtă pentru Brinkman sistem ca

$$\mathcal{X} := H^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^2) \times L^2(\mathcal{D}), \quad \mathcal{B} := H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2), \quad \mathcal{Y} := \tilde{H}^{-1}(\mathcal{D}, \mathbb{R}^2) \times \mathcal{B}. \quad (4.2.1)$$

Teorema 4.2.1. În ipoteza 4.1.1 și pentru datele $(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \in \mathcal{B}$, problema pe frontieră de tipul Dirichlet-Neumann pentru sistemul Brinkman

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{f}|_{\mathfrak{D}}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathfrak{D} \\ (\gamma^+ \mathbf{u})|_{\Gamma_D} = \mathbf{h} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2) \\ (\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi))|_{\Gamma_N} = \mathbf{g} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2), \end{cases} \quad (4.2.2)$$

are o soluție unică $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{X}$. Mai mult, există un operator liniar și coninuu $\mathcal{A}_\alpha : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ care livrează soluția, și o constantă $C \equiv C(\alpha, \Gamma_D, \Gamma_N) > 0$ astfel încât

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^2)} + \|\pi\|_{L^2(\mathfrak{D})} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{\tilde{H}^{-1}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^2)} + \|\mathbf{h}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2)} + \|\mathbf{g}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \mathbb{R}^2)} \right).$$

4.2.2 Problema Poisson pentru sistemul Brinkman cu condiții Dirichlet și Robin

În continuare, ne preocupăm de problema mixtă Dirichlet-Robin pentru sistemul Brinkman. Să luăm în considerare acum că frontiera Γ este împărțită în două părți care nu se suprapun Γ_D și Γ_R astfel încât $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_R = \Gamma$ în analogie cu Definiția 1.1.2, adică acum avem $\mathcal{B} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_R, \mathbb{R}^2)$. Atunci, problema mixtă Dirichlet-Robin pentru sistemul Brinkman este

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{f}|_{\mathfrak{D}}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathfrak{D} \\ (\gamma^+ \mathbf{u})|_{\Gamma_D} = \mathbf{h} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2), \\ (\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi))|_{\Gamma_R} + (\lambda \gamma^+ \mathbf{u})|_{\Gamma_R} = \mathbf{g} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_R, \mathbb{R}^2). \end{cases} \quad (4.2.3)$$

unde $(\cdot)|_{\Gamma_R}$ denotă operatorul de restricție de la spațiul $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ definit pe întreaga frontieră la cel definit pe partea Γ_R , și $\lambda \in L^\infty(\Gamma_R, \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2)$ este o funcție cu valori matriciale simetrică, astfel încât (ca în [52, Teorema 4.1])

$$\langle \lambda \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_R} \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Gamma_R, \mathbb{R}^2). \quad (4.2.4)$$

Teorema 4.2.2. Presupunând că $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu Lipschitz cu frontiera conexă Γ , care este descompusă în două părți adiacente care nu se suprapun $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_R$ ca în Definiția 1.1.2. Fie $\alpha \in (0, \infty)$ și fie $\lambda \in L^\infty(\Gamma, \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2)$ o funcție cu valori matriciale simetrică care satisface proprietatea (4.2.4). Atunci problema (4.2.3) are o soluție unică, care satisface estimarea

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^2)} + \|\pi\|_{L^2(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^2)} \leq c(\|\mathbf{f}\|_{\tilde{H}^{-1}(\mathfrak{D}, \mathbb{R}^2)} + \|\mathbf{h}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2)} + \|\mathbf{g}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_R, \mathbb{R}^2)}). \quad (4.2.5)$$

4.3 Probleme cu valori pe frontieră pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman system în \mathbb{R}^2

Această secțiune este dedicată analizei problemelor cu valori pe frontieră (probleme pe frontieră) pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman pentru un domeniu Lipschitz din \mathbb{R}^2 . Secțiunea începem cu problema Dirichlet și precizăm rezultatul de bine-punere a problemei ca un caz particular de probleme la limită din literatura de specialitate. Apoi oferim o demonstrație constructivă pentru problema Neumann urmând ideile principale din [51, Teorema 4.1] și [34, Teorema 4.1]. Rezultatele existenței și unicității pentru problema Robin sunt menționate ca în lucrarea noastră [34, Teorema 4.2].

În sfârșit, ajungem la rezultatul principal al acestei secțiuni, care este problema pe frontieră mixtă Dirichlet-Robin pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman, ca rezultat original publicat în [37]. Această problemă reprezintă fundamentul teoretic pentru problemele la frontieră mixte, care sunt studiate numeric în ultima parte.

4.3.1 Probleme cu valori pe frontieră de tipul mixt Dirichlet-Robin pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman

În acest rezumat obținem un rezultat de existență și unicitate similar cu cel în [51, Teorema 7.1] pentru soluția slabă a problemei mixte Dirichlet-Robin (4.3.2), cu datele pe frontieră $(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \in \mathcal{B}$. Sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman cu condiții la frontieră Robin în domeniile Lipschitz din cazul Euclidian a fost cercetat în [52] (a se vedea, de asemenea, [54] și [65] pentru probleme de transmisie).

Teorema 4.3.1. *Presupunând că $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu Lipschitz mărginit cu frontieră conexă Γ , care este descmpus similar cu (1.1.2) în două părți adiacente Γ_D și Γ_R . Fie $\alpha, \beta > 0$ două constante date și fie $\lambda \in L^\infty(\Gamma, \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2)$ o funcție cu valori matriciale simetrică cu proprietatea (4.2.4). Atunci există două constante $C_j \equiv C_j(\mathcal{D}, \alpha, \beta) > 0$, $j = 1, 2$, cu proprietatea că pentru orice $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{g}) \in \mathcal{Y}$, care satisfac condiția*

$$\|\mathbf{f}\|_{\tilde{H}^{-1}(\mathcal{D}, \mathbb{R}^2)} + \|\mathbf{h}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2)} + \|\mathbf{g}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_R, \mathbb{R}^2)} \leq C_1, \quad (4.3.1)$$

problema de tipul mixt Dirichlet-Robin pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} - \beta(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \pi = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathcal{D}, \\ (\gamma^+ \mathbf{u})|_{\Gamma_D} = \mathbf{h} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2) \\ (\mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi))|_{\Gamma_R} + \lambda(\gamma^+ \mathbf{u})|_{\Gamma_R} = \mathbf{g} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_R, \mathbb{R}^2) \end{cases} \quad (4.3.2)$$

are o soluție unică $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathcal{X}$, cu proprietatea $\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^2)} \leq C_2$.

Partea II

Probleme cu valori pe frontieră pentru sistemele Stokes și Navier-Stokes pe varietăți Riemanniene compacte

Capitolul 5

Rezultate preliminare pentru probleme la frontieră pe varietăți Riemanniene compacte

Acest capitol este dedicat rezultatelor preliminare legate de studiul problemelor cu valori pe frontieră pe varietăți Riemanniene compacte. Prin urmare, în acest scop, includem definiția varietăți Riemanniene netede, compacte, fără frontieră, metrică Riemanniană, spațiu tangent și cotangent, precum și spațiile funcțiilor vectoriale și a formelor diferențiale, bazate pe [110], [85] și [113, Capitolul 8]. Ulterior, introducem noțiunea de domeniu Lipschitz, principalele spații Sobolev, operatorul urmă și operatorul de derivare conormal necesare în continuarea tezei. Să menționăm că o condiție importantă care asigură invertibilitatea operatorului de deformare este condiția ca singurul câmp vector Killing să fie cel trivial (vezi Definiția 5.1.17).

În continuare, urmând structura principală a primei părți a acestei teze, introducem în a doua parte a acestui capitol soluția fundamentală pentru sistemul Stokes și operatorii potențiali de strat asociați. În partea finală a acestui capitol, introducem câteva rezultate originale privind inversabilitatea operatorului potențial de simplu strat și a operatorului potențial hipersingular legat de problema mixtă la frontieră [38, Teorema 4.2] și unele proprietăți de compactitate ale operatorului potențial de dublu strat [38, Teorema 4.3] asociat unei părți din descompunerea frontierei.

5.1 Setări funcționale și rezultate aferente varietăților Riemanniene compacte

În această secțiune, începem cu o scurtă introducere despre varietăți și rezultate aferente. Prin urmare, introducem definițiile și conceptele geometrice principale legate de varietăți Riemanniene compacte, cum ar fi definițiile unei varietăți Riemanniene netede, compacte, fără frontieră, metrica Riemanniană, fibratele tangente și cotangente, precum și spațiile funcțiilor vectoriale și a formelor diferențiale. Prezentarea acestor concepte se bazează pe cărțile [110], [85] și [113, Capitolul 5].

În plus, introducem noțiunea de domeniu Lipschitz, spațiile Sobolev pe varietăți Riemanniene compacte, operatorul urmă și operatorul de derivare conormal necesare în continuare. O parte importantă este definiția conexiunii Levi-Civita, a operatorului de deformare Def și a operatorului diferențial eliptic de ordinul doi L , care este principalul operator eliptic în definiția sistemului Stokes pe varietăți Riemanniene compacte. Rețineți că o condiție importantă care asigură invertibilitatea operatorului de deformare este condiția ca varietatea să nu aibă câmpuri vectoriale Killing netriviale (vezi Definiția 5.1.17).

5.1.1 Concepte geometrice asociate varietăților Riemanniene compacte

În primul rând, reamintim definiția unei *varietăți Riemanniene netede și compacte* de dimensiune $m \geq 2$ fără frontieră $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ urmărind [113, Capitolul 5], [69, Capitolul 1], [70] și [112].

O metrică Riemanniană pe o varietate netedă M este un tensor de tipul $(0, 2)$ – notat aici cu g care este simetric, i.e., $g(X, Y) = g(Y, X)$ și este definit pozitiv, i.e., $g(X, X) > 0$ pentru toate $X \neq 0$. Lucrând în contextul de sistem de coordonate local, metrica Riemannian are forma

$$g : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow C^\infty(U), \quad g = \sum_{j,k} g_{jk} dx_j \otimes dx_k = g_{jk} dx_j \otimes dx_k^1. \quad (5.1.1)$$

Astfel, metrica Riemanniană determină un produs scalar pe fiecare spațiu tangent $T_p M$, astfel încât pentru fiecare $p \in M$, spațiul cotangent poate fi identificat natural cu spațiul tangent iar fibratul cotangent T^*M cu fibratul tangent TM . Mai mult, spațiul formelor diferențiale $\Lambda^1 TM$ este identificat cu spațiul $\mathfrak{X}(M)$ a câmpurilor vectoriale netede prin izometria $\partial_j \rightarrow g_{jl} dx_l$ (index de scădere), sau inversa acesteia $dx_j \rightarrow g^{jl} \partial_l$ (index de ridicare), unde (g^{jl}) reprezintă inversa lui (g_{jl}) , i.e., $g^{jl} g_{lk} = \delta_{jk}$. Fie $g = \det(g_{jk})$. Atunci elementul de volum în M , $dvol$ este dat de tensorul metri a lui M . Astfel, în coordonate locale avem $dvol = \sqrt{g} dx_1 \dots dx_m$.

Prin urmare, operatorul gradient $\text{grad} : C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ devine *operatorul exterior de derivare*

$$d : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^1 TM), \quad \text{dat de } d = \partial_j dx^j, \quad (5.1.2)$$

și operatorul divergență $-\text{div} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ se identifică cu *operatorul exterior de co-derivare*

$$\delta : C^\infty(M, \Lambda^1 TM) \rightarrow C^\infty(M), \quad \delta = d^*. \quad (5.1.3)$$

Pentru mai multe detalii referitoare la geometrie diferențială pe varietăți Riemanniene, vă trimitem la [113, Capitolul 5], [69, Capitolul 1], [70] și [112].

Domenii Lipschitz pe varietăți Riemanniene compacte

Reamintim pentru claritate Definiția 5.1.4 al domeniului Lipschitz în cadrul Euclidian, care constituie baza pentru definirea unui domeniu Lipschitz pe varietăți Riemanniene compacte.

Având definiția 5.1.4, oferim acum definiția unui domeniu Lipschitz pe varietăți Riemanniene compacte bazate pe Definiția 3.5 din [32].

Definiția 5.1.1. Fie M o varietate topologică compactă fără frontieră de dimensiune n echipată cu un atlas neted A . Un domeniu Lipschitz pe M este o mulțime deschisă $\mathfrak{D} \subset M$ relativ la A , dacă pentru fiecare $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$, există un chart local $(U, \varphi) \in A$ cu $\mathbf{x}_0 \in U$ astfel încât $\varphi(U \cap \mathfrak{D}) \subset \mathbb{R}^n$ este un domeniu Lipschitz în \mathbb{R}^n .

Următoarea definiție oferă noțiunea de disecție a frontierei în două părți Γ_D și Γ_N , care este utilizată pentru a formula probleme pe frontieră mixte pe varietăți Riemanniene compacte.

Definiția 5.1.2. Fie $\mathfrak{D} \subset M$ un domeniu Lipschitz mărginit cu frontiera conexă $\Gamma = \partial \mathfrak{D}$. O disecție a frontierei este o descompunere în două părți adiacente, deschise relativ la Γ , care nu se suprapun Γ_D, Γ_N și au următoarele proprietăți

$$\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N, \quad \partial \Gamma_D = \partial \Gamma_N = \bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N, \quad \text{și } \text{meas } \Gamma_D > 0, \quad \text{meas } \Gamma_N > 0. \quad (5.1.4)$$

¹În ceea ce urmează folosim convenția de adunare a indicelui repetat.

5.1.2 Spații Sobolev pe varietăți Riemanniene compacte

Fie $s \in \mathbb{R}$. Spațiul Sobolev $H^s(M)$ este definit ca fiind spațiul cu bază în L^2 pe M , care poate fi obținut prin ridicarea ("lifting") spațiului Sobolev (sau Bessel potential)

$$H^s(\mathbb{R}^m) := \{(\mathbb{I} - \Delta)^{-s/2} f : f \in L^2(\mathbb{R}^m)\} \quad (5.1.5)$$

via o partiție a unității pe M și "pullback" pe charturile locale corespunzătoare. De menționat este faptul că spațiile $H^s(M)$ și $H^{-s}(M)$ sunt reciproc duale.

Fie $\mathcal{D} := \mathcal{D}_+ \subset M$ un domeniu Lipschitz și presupunem că $M \setminus \overline{\mathcal{D}} := \mathcal{D}_-$ este conex și nevid. Pentru $s > 0$, spațiul Sobolev cu bază în L^2 pe \mathcal{D} este definit ca

$$H^s(\mathcal{D}) := \{f|_{\mathcal{D}} : f \in H^s(M)\}, \quad \tilde{H}^s(\mathcal{D}) := \{f \in H^s(M) : \text{supp } f \subseteq \overline{\mathcal{D}}\}, \quad (5.1.6)$$

$$\tilde{H}^s(\mathcal{D})|_{\mathcal{D}} := \{f|_{\mathcal{D}} : f \in \tilde{H}^s(\mathcal{D})\}. \quad (5.1.7)$$

Mai mult, $H^{-s}(\mathcal{D})$ este dualul spațiului $\tilde{H}^s(\mathcal{D})$. Pentru fiecare $s \in \mathbb{R}$ (a se vedea [47, Propoziția 2.9], [84, (4.14)])

$$(H^s(\mathcal{D}))' = \tilde{H}^{-s}(\mathcal{D}), \quad H^{-s}(\mathcal{D}) = (\tilde{H}^s(\mathcal{D}))'. \quad (5.1.8)$$

Spațiul Sobolev cu bază în L^2 a formelor defrențiale pe \mathcal{D} este dat de

$$H^s(\mathcal{D}, \Lambda^1 TM) := H^s(\mathcal{D}) \otimes \Lambda^1 TM|_{\mathcal{D}}, \quad \tilde{H}^s(\mathcal{D}, \Lambda^1 TM) = \tilde{H}^s(\mathcal{D}) \otimes \Lambda^1 TM, \quad (5.1.9)$$

$$\tilde{H}^s(\mathcal{D}, \Lambda^1 TM)|_{\mathcal{D}} = \tilde{H}^s(\mathcal{D})|_{\mathcal{D}} \otimes \Lambda^1 TM|_{\mathcal{D}}, \quad (5.1.10)$$

unde simbolul \otimes denotă produsul tensorial (a se vedea [105, Capitolul 4, Secțiunea 3]).

Spațiile Sobolev frontieră cu bază în L^2 : Pentru $s \in [0, 1]$, $H^s(\Gamma)$ și $H^s(\Gamma, \Lambda^1 TM)$ denotă spațiile Sobolev frontieră a funcțiilor sau a unu-formelor. Pentru $s \in [-1, 0)$, spațiul $H^s(\Gamma)$ este spațiul distribuțiilor definite pe $H^{-s}(\Gamma)$, i.e., $H^s(\Gamma) = H^{-s}(\Gamma)$. Pentru mai multe detalii a se vedea [110].

Fie $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ vectorul unitate normal spre exteriorul lui Γ , care este definit aproape peste tot referitor la măsura de suprafață $d\sigma$ pe Γ . În ceea ce urmează, o să lucrăm cu spațiile închise $H_{\nu}^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM)$ ale lui $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM)$ și cu spațiul cât $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM)/\mathbb{R}\nu$ a lui $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM)$, definit prin

$$H_{\nu}^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM) := \left\{ \mathbf{f} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM) : \langle \nu, \mathbf{f} \rangle_{\Gamma} = 0 \right\}, \quad (5.1.11)$$

$$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM)/\mathbb{R}\nu := \left\{ [\mathbf{g}] = \mathbf{g} + \mathbb{R}\nu \text{ where } \mathbf{g} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM) \right\}. \quad (5.1.12)$$

Observăm că $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM)/\mathbb{R}\nu = (H_{\nu}^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM))^*$, (cf. [86, 5.118]).

În final, fie spațiul

$$H_{\delta}^1(\mathcal{D}_{\pm}, \Lambda^1 TM) := \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{D}_{\pm}, \Lambda^1 TM) : \delta \mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathcal{D}_{\pm} \right\}, \quad (5.1.13)$$

care reprezintă spațiul câmpurilor vectoriale (sau a unu-formelor) care au divergența zero pe \mathcal{D}_{\pm} .

5.1.3 Operatorul de deformare pe spațiile Sobolev

O *conexiune Levi-Civita* pe M este o conexiune afină care este compatibilă cu metrica Riemanniană g și este "torsion-free". Un rezultat cheie a geometriei Riemanniene afirmă ca pentru fiecare varietate Riemanniană dată (M, g) există o unică conexiune Levi-Civita ∇ , definită de condiția de "torsion-free" (cf. [107, Propoziția 11.1, Capitolul 1 §11]).

Partea simetrică a lui ∇X se numește deformarea lui X , și se notează cu $\text{Def } X$. Astfel,

$$(\text{Def } X)(Y, Z) = \frac{1}{2} \{ \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle \}, \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (5.1.14)$$

Câmpul tensorial $\text{Def } X$ poate fi reprezentat global în forma echivalentă ca și $\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g$, unde $\mathcal{L}_X g$ este derivata Lie a lui g în direcția lui X (a se vedea, de ex., [107]). Reprezentăm prin $S^2 T^* M$ mulțimea câmpurilor tensoriale simetrice de tipul $(0, 2)$, astfel încât să avem

$$\text{Def} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, S^2 T^* M). \quad (5.1.15)$$

Adjunctul lui Def este definit prin $\text{Def}^* w = -\text{div} w$, $w \in S^2 T^* M$ (a se vedea, de ex., [107]). Operatorul (5.1.15) admite o extensie liniară și mărginită

$$\text{Def} : H^1(M, \Lambda^1 TM) \rightarrow H^{-1}(M, S^2 T^* M). \quad (5.1.16)$$

Definiția 5.1.3. Un câmp vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ care satisface ecuația

$$\text{Def } X = 0 \quad \text{on } M, \quad (5.1.17)$$

este numit *câmp Killing*.

În continuarea acestui capitol presupunem că singurul câmp Killing este cel trivial. Prin modificarea lui M departe de $\overline{\mathfrak{D}}$, această condiție poate fi realizată (a se vedea, de ex., [85], [25]).

5.1.4 Operatorul Stokes și Oseen pe varietăți Riemanniene compacte

În ceea ce urmează, fie M o varietate Riemanniană, netedă și compactă fără frontieră, fie \mathfrak{D}_+ un domeniu Lipschitz pe M și $\mathfrak{D}_- = M \setminus \overline{\mathfrak{D}}$. Considerăm operatorul diferențial eliptic de ordinul doi

$$L : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad L := 2\text{Def}^* \text{Def} = -\Delta + d\delta - 2\text{Ric}, \quad (5.1.18)$$

unde $\Delta := -(d\delta + \delta d)$ este Laplacianul Hodge și Ric este tensorul Ricci (a se vedea, de ex., [25, (2.6)]). Pentru orice $s \in (0, 1)$, operatorul (5.1.18) se extinde la un operator liniar și mărginit (a se vedea, de ex., [68, p. 177])

$$L = 2\text{Def}^* \text{Def} : H^{s+\frac{1}{2}}(M, \Lambda^1 TM) \rightarrow H^{s-\frac{3}{2}}(M, \Lambda^1 TM). \quad (5.1.19)$$

Operatorul Oseen este o perturbare de ordinul întâi a operatorului Stokes, care este definit prin

$$B_\omega : H^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM) \times L^2(\mathfrak{D}) \rightarrow H^{-1}(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM) \times L^2(\mathfrak{D}), \quad (5.1.20)$$

$$B_\omega := \begin{pmatrix} L & d \\ \delta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla_\omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde $\omega \in H^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM)$ este un câmp vectorial fără divergență, i.e.,

$$\delta\omega = 0 \quad \text{in } \mathfrak{D}. \quad (5.1.21)$$

De remarcat este faptul că dacă $\omega = 0$, se obține operatorul Stokes B_0 . În partea care urmează în această teză, presupunem că M are dimensiune mică, i.e., $\dim(M) \in \{2, 3\}$, oricînd avem de-a face cu operatorul Oseen. Prin urmare, următoarea incluziuni sunt continue (a se vedea, de ex., [53])

$$H^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM) \cdot L^2(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM \otimes \Lambda^1 TM) \hookrightarrow L^{\frac{3}{2}}(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM) \hookrightarrow \tilde{H}^{-1}(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM). \quad (5.1.22)$$

Rețineți că (5.1.22) și incluziunea $\tilde{H}^{-1}(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM) \hookrightarrow H^{-1}(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM)$ arată că operatorul Oseen (5.1.20) este bine definit.

Datorită unor detalii tehnice, câmpul vectorial fără divergență ω trebuie să satisfacă condiția de pozitivitate ²

$$\langle \nabla_{\omega} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathfrak{D}} \geq 0, \forall \mathbf{u} \in H^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM). \quad (5.1.23)$$

Relația (5.1.22) arată că $\nabla_{\omega} \mathbf{u} \in \tilde{H}^{-1}(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM) = (H^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM))'$, și prin urmare produsul dual (5.1.23) este bine definit, pentru orice $u \in H^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM)$.

În versiunea completă a tezei am arătat că gradientul unor funcții harmonice pot juca rolul lui ω , deoarece divergența lor este nulă. Deoarece constantele sunt singulele funcții harmonice pe varietății compacte iar presupunerea noastră necesită câmpuri vectoriale nenule, considerăm funcții harmonice pe varietatea necompactă $M \setminus \{x_0\}$. Acest rezultat a fost obținut în articolul nostru [42, Propoziția 5.4.1].

5.1.5 Operatorul urmă și operatorul de derivare conormal

Similar cu prima parte a acestei teze, introducem operatorul urmă și operatorul de derivate conormal generalizat, care sunt necesare în continuare.

Operatorul urmă pe domenii Lipschitz complementare. Fie $\mathbf{x} \in \Gamma$ și fie $\mathfrak{C}_{\pm}(\mathbf{x}) \subseteq \mathfrak{D}_{\pm}$ regiunile netangential de apropiere, i.e., regiuni conice cu centrul în \mathbf{x} (a se vedea definiția (1.1.2) dată în contextul Euclidean). Limitele netangentiale la frontieră a unei funcții u pe Γ_{\pm} sunt definite ca (a se vedea (1.3.2) pentru cazul Euclidean)

$$(\gamma^{\pm} u)(\mathbf{x}) := \lim_{\mathbf{y} \in \mathfrak{C}_{\pm}(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (5.1.24)$$

(a se vedea, de ex., [85, (3.23)]). Acești operatori de extind la spații Sobolev similar cu Lemma 1.3.1. Versiunea următoare a lemei Gagliardo are loc și pentru varietăți Riemanniene compacte (a se vedea, de ex., [86, Teorema 2.5.2], [85, 20]).

Lema 5.1.4. *Fie $s \in (0, 1)$. Atunci există doi operatori liniari și continui*

$$\gamma^{\pm} : H^{s+\frac{1}{2}}(\mathfrak{D}_{\pm}) \rightarrow H^s(\Gamma), \quad (5.1.25)$$

astfel încât $\gamma^{\pm} u = u|_{\Gamma}$, $\forall u \in C^{\infty}(\overline{\mathfrak{D}_{\pm}})$, să admită o inversă (neunică) liniară, continuă la dreapta

$$(\gamma^{\pm})^{-1} : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+\frac{1}{2}}(\mathfrak{D}_{\pm}), \quad \gamma^{\pm}((\gamma^{\pm})^{-1} \phi) = \phi, \quad \forall \phi \in H^s(\Gamma). \quad (5.1.26)$$

Rezultatul din Lemma 5.1.4 are loc și pentru operatorul urmă care acționează pe forme diferențiale $\gamma^{\pm} : H^{s+\frac{1}{2}}(\mathfrak{D}_{\pm}, \Lambda^1 TM) \rightarrow H^s(\Gamma, \Lambda^1 TM)$. Acești operatori sunt bine definiți, liniari, mărginiți și surjectivi (a se vedea [25, 47, 84]).

Fie $\alpha \geq 0$ o constantă dată. În ceea ce urmează, considerăm spațiile Sobolev spațiale

$$\mathfrak{H}^1(\mathfrak{D}) := \{(\mathbf{u}, \pi, \mathbf{f}) \in H^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM) \times L^2(\mathfrak{D}) \times \tilde{H}^{-1}(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM)|_{\mathfrak{D}} : (L + \alpha \mathbb{I})\mathbf{u} + d\pi = \mathbf{f} \text{ and } \delta \mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathfrak{D}\}. \quad (5.1.27)$$

Reprezentăm cu $d\sigma$ măsura de suprafață pe Γ și prin ν vectorul unitate exterior, care este definit aproape peste tot pe Γ , relativ la $d\sigma$.

Operatorul de derivare conormal pentru sistemul Stokes pe varietăți Riemanniene compacte este definit în continuare (a se vedea, de ex., [81] [86, Teorema 10.4.1], [59, Lema 2.2]). Mai mult, menționăm faptul că definiția unui operator eliptic în cazul general Agmon-Douglis-Nirenberg este dat în Lema 2.4 din [58].

²Reamintim că notația $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ reprezintă dualitatea între două spații Sobolev pe X .

Lema 5.1.5. Fie $\alpha \geq 0$ o constantă dată. Fie M o varietate Riemanniană compactă și $\mathcal{D} \subset M$ un domeniu Lipschitz. Operatorul de derivare conormal

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\alpha^+ : \mathfrak{H}^1(\mathcal{D}) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM), \\ \langle \mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi)_{\mathbf{f}}, \Phi \rangle_\Gamma &:= 2\langle \text{Def}\mathbf{u}, \text{Def}((\gamma^+)^{-1}\Phi) \rangle_{\mathcal{D}} + \left\langle \pi, \delta((\gamma^+)^{-1}\Phi) \right\rangle_{\mathcal{D}} \\ &\quad - \langle \mathbf{f}, (\gamma^+)^{-1}\Phi \rangle_{\mathcal{D}} + \alpha \langle \mathbf{u}, (\gamma^+)^{-1}\Phi \rangle_{\mathcal{D}}, \quad \forall \Phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM) \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

este bine definit, liniar și mărginit, și este independent de alegerea inversei la dreapta $(\gamma^+)^{-1} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM) \rightarrow H^1(\mathcal{D}, \Lambda^1 TM)$ a operatorului urmă netangential $\gamma^+ : H^1(\mathcal{D}, \Lambda^1 TM) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM)$. Mai mult, pentru toate $(\mathbf{u}, \pi, \mathbf{f}) \in \mathfrak{H}^1(\mathcal{D})$ și orice $\mathbf{w} \in H^1(\mathcal{D}, \Lambda^1 TM)$ avem următoarea formulă de tipul Green

$$\langle \mathbf{t}_\alpha^+(\mathbf{u}, \pi)_{\mathbf{f}}, \gamma^+ \mathbf{w} \rangle_\Gamma = 2\langle \text{Def}\mathbf{u}, \text{Def}\mathbf{w} \rangle_{\mathcal{D}} + \langle \pi, \delta\mathbf{w} \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{\mathcal{D}} + \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_{\mathcal{D}}. \quad (5.1.29)$$

Lema 5.1.5 este un caz particular cu $g = 0$ în [59, Lema 2.2].

5.2 Soluția fundamentală și teoria potențialelor de strat pentru sistemul Stokes

Mitrea și Taylor [85] și Dindos și Mitrea [25] au folosit teoria operatorilor pseudodiferențiali pentru a arăta existența soluției fundamentale pentru sistemul Stokes pe variatății Riemanniene compacte. Una dintre principalele ipoteze necesare pentru a construi soluția fundamentală pentru sistemul Stokes, este presupunerea că variatatea nu are câmpuri de Killing netriviiale (a se vedea Definiția 5.1.3), ceea ce garantează că operatorul de deformare Def dat în (5.1.14) este inversabil.

Presupunerea că varietatea Riemanniană nu are câmpuri Killing nontriviiale nu impune restricții, deoarece varietatea poate fi modificată astfel încât să satisfacă această condiție. O demonstrație a acestui fapt poate fi găsită în secțiunea 3 în [85].

Kohr, Pinteș și Wendland [57, Secțiunea 3] (a se vedea, de asemenea, [58]) au dezvoltat o tehnică alternativă la cea a lor Mitrea și Taylor [85] pentru a obține soluția fundamentală în caz general al operatorilor eliptici Agmon-Douglis-Nirenberg pe variatăți Riemanniene compacte. În [58], Kohr, Pinteș și Wendland au furnizat dovada inversibilității unei matrice a operatorilor pseudodiferențiali de ordinul I și II, și pun un accent special pe un operator general Brinkman. Soluția fundamentală a unor astfel de operatori pseudodiferențiali este furnizată de nucleul Schwartz. Mai mult, autorii au derivat teoria potențialelor de strat pentru un operator Brinkman pseudodiferențial pe domenii Lipschitz pe variatăți Riemanniene.

În lucrarea lor recentă, Kohr și Wendland [63], au dezvoltat teoria potențialelor pentru sistemul Stokes cu coeficienți netezi din clasa L^∞ pe variatăți Riemanniene compacte, pornind de la o metodă variațională. În cazul particular al coeficienților netezi, autorii au descoperit ceea ce Mitrea, Taylor [85] au obținut anterior.

Această secțiune este structurată după cum urmează. Începem prin introducerea soluției fundamentale a sistemului Stokes, care ne permite să definim potențialele corespunzătoare de simplu strat și dublu strat, bazat pe lucrările [85], [57], [58], [62]. Ulterior, vom oferi unele proprietăți de inversibilitate și de compactitate pentru operatorii potențiali de strat legați de problema mixtă pentru sistemul Stokes, urmând ideile din lucrarea noastră [38]. Să menționăm și faptul că această lucrare este inspirată din lucrări [61], [76], [16].

5.2.1 Soluția fundamentală pentru sistemul Stokes pe variatăți Riemanniene compacte

Utilizând teoria operatorilor pseudodiferențial și descompunerea Hodge, Mitrea and Taylor [85] au demonstrat existența a doi operatori $\Phi \in OPS_{cl}^{-2}(\Lambda^1 TM, \Lambda^1 TM)$ și $\Psi \in$

$OPS_{cl}^{-1}(\Lambda^1 TM, \mathbb{R})$ ale căror inverse au nucleele Schwartz $\mathcal{G}(x, y)$ și $\Pi(x, y)$ și determină soluția fundamentală pentru operatorul Stokes B_0 pe M . Prin urmare

$$L_x \mathcal{G}(x, y) + d_x \Pi(x, y) = \text{Dirac}_y(x), \quad \delta_x \mathcal{G}(x, y) = 0, \quad (5.2.1)$$

unde Dirac_y este distribuția lui Dirac centrată în y . Operatorii diferențiali cu subscriptul adăugat în x se referă la acțiunea operatorului referitor la variabila x . Menționăm că Dindoș and Mitrea [25] au demonstrat existența operatorului $\Upsilon \in OPS_{cl}^0(M, \mathbb{R})$ pentru care următoarea echivalență are loc

$$\Psi L = \Upsilon \delta \iff L \Psi^\top = d \Upsilon^\top. \quad (5.2.2)$$

Reprezentăm cu Ξ nucleul Schwartz a operatorului clasic pseudodiferențial Υ^\top , care este transpusa lui Υ . Egalitatea (5.2.2) implică

$$L_x \Pi^\top(y, x) = d_x \Xi(x, y) \quad (5.2.3)$$

(a se vedea [25, (3.22)]). Mai mult, menționăm ca soluția fundamentală pentru operatorul pseudodiferențial Brinkman a fost obținut în [57].

5.2.2 Operatorii potențiali de strat Stokes și proprietățile corespunzătoare

Fie $s \in (0, 1)$. Atunci $\mathbf{f} \in H^{s-1}(\Gamma, \Lambda^1 TM)$, \mathbf{Vf} reprezintă potențialul de simplu strat cu densitatea \mathbf{f} pentru sistemul Stokes, și $Q^s \mathbf{f}$ denotă potențialul presiune corespunzător. Atunci,

$$(\mathbf{Vf})(\mathbf{x}) = \langle \mathcal{G}(\mathbf{x}, \cdot), \mathbf{f} \rangle_\Gamma, \quad (Q^s \mathbf{f})(\mathbf{x}) := \langle \Pi(\mathbf{x}, \cdot), \mathbf{f} \rangle_\Gamma, \quad \mathbf{x} \in M \setminus \Gamma. \quad (5.2.4)$$

Limitele netangențiale \mathbf{Vf} există aproape peste tot pe Γ și sunt date de $\gamma^\pm(\mathbf{Vf})$ (cf. [85, Teorema 3.1]).

Fie $\mathbf{h} \in H_\nu^s(\Gamma, \Lambda^1 TM)$, atunci \mathbf{Wh} denotă potențialul de dublu strat cu densitatea \mathbf{h} pentru sistemul Stokes, iar $Q^d \mathbf{h}$ reprezintă potențialul presiune corespunzător. Prin urmare,

$$(\mathbf{Wh})(\mathbf{x}) := \left\langle -2\text{Def } \mathcal{G}(\mathbf{x}, \cdot) \nu + \Pi^\top(\cdot, \mathbf{x}) \nu, \mathbf{h} \right\rangle_\Gamma, \quad \mathbf{x} \in M \setminus \Gamma, \quad (5.2.5)$$

$$(Q^d \mathbf{h})(\mathbf{x}) := \left\langle -2\text{Def } \Pi(\mathbf{x}, \cdot) \nu - \Xi(\mathbf{x}, \cdot) \nu, \mathbf{h} \right\rangle_\Gamma, \quad \mathbf{x} \in M \setminus \Gamma, \quad (5.2.6)$$

unde $\Pi^\top(\cdot, \mathbf{x})$ este transpusa lui $\Pi(\cdot, \mathbf{x})$, și $\Xi(\mathbf{x}, \cdot)$ este nucleul Schwartz a operatorului pseudodiferențial Υ (a se vedea (5.2.2) și (5.2.3)). Urmele netangențiale la frontieră \mathbf{Wh} există aproape peste tot pe Γ și sunt reprezentate prin $\gamma^+(\mathbf{Wh})$ și $\gamma^-(\mathbf{Wh})$. Valuarea principală \mathbf{Wh} este notată cu \mathbf{Kh} și este definită aproape peste tot în $\mathbf{x} \in \Gamma$ prin

$$\begin{aligned} (\mathbf{Kh})(\mathbf{x}) &:= \text{p.v.} \int_\Gamma \left\langle -2[(\text{Def}_y \mathcal{G}(\mathbf{x}, \cdot)) \nu](\mathbf{y}) + \Pi^\top(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \nu(\mathbf{y}), \mathbf{h}(\mathbf{y}) \right\rangle d\sigma(\mathbf{y}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{\mathbf{y} \in \Gamma: r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \varepsilon\}} \left\langle -2[(\text{Def}_y \mathcal{G}(\mathbf{x}, \cdot)) \nu](\mathbf{y}) + (\Pi)^\top(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \nu(\mathbf{y}), \mathbf{h}(\mathbf{y}) \right\rangle d\sigma(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

unde $r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este distanța geodezică între \mathbf{x} și $\mathbf{y} \in M$ (cf. [85, Lema 3.2 and Propoziția 3.3]).

Având în vedere (5.2.1), obținem relațiile

$$\begin{aligned} L(\mathbf{Vf}) + d(Q^s \mathbf{f}) &= 0, \quad \delta \mathbf{Vf} = 0 \\ &\text{in } M \setminus \Gamma. \\ L(\mathbf{Wh}) + d(Q^d \mathbf{h}) &= 0, \quad \delta \mathbf{Wh} = 0 \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Prin urmare, perechile $(\mathbf{Vg}, Q^s \mathbf{g})$ și $(\mathbf{Wh}, Q^d \mathbf{h})$ satisfac sistemul Stokes în fiecare domeniu \mathfrak{D}_+ și respectiv \mathfrak{D}_- .

Proprietățile prezentate mai jos reprezintă versiunea Riemanniană a Teoremei 2.4.2. Pentru mai multe detalii, vă sugerăm articolele [86, Propoziția 4.2.5, 4.2.9, Corolarul 4.3.2, Teoremele

5.3.6, 5.4.1, 5.4.3, 10.5.3] pentru sistemul Stokes în cadrul Euclidian, [25, Teorema 2.1, (3.5), Propoziția 3.5], [85, Teoremele 3.1, 6.1] pentru sistemul Stokes pe varietăți Riemanniene compacte, și [58, Teoremele 4.3, 4.9, 4.11, (131), (132), (137)] pentru operatorul pseudodiferențial Brinkman pe varietăți Riemanniene compacte.

Teorema 5.2.1. *Fie $\mathfrak{D} \subset M$ un domeniu Lipschitz și fie Γ frontiera lui. Fie $s \in (0, 1)$. Se presupune că $\mathbf{f} \in H^{s-1}(\Gamma, \Lambda^1 TM)$ și $\mathbf{h} \in H^s_\nu(\Gamma, \Lambda^1 TM)$. Următoarele formule au loc aproape peste tot pe Γ :*

$$\gamma^+(\mathbf{Vf}) = \gamma^-(\mathbf{Vf}) := \mathcal{V}\mathbf{f}, \quad (5.2.9)$$

$$\gamma^+(\mathbf{Wh}) = \left(\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}\right)\mathbf{h}, \quad \gamma^-(\mathbf{Wh}) = \left(-\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}\right)\mathbf{h}, \quad (5.2.10)$$

$$\mathbf{D}^+\mathbf{h} - \mathbf{D}^-\mathbf{h} \in \mathbb{R}\nu, \quad (5.2.11)$$

$$\mathbf{t}^+(\mathbf{Vf}, \mathcal{Q}^s\mathbf{f}) = \left(-\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}^*\right)\mathbf{f}, \quad \mathbf{t}^-(\mathbf{Vf}, \mathcal{Q}^s\mathbf{f}) = \left(\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbf{K}^*\right)\mathbf{h}, \quad (5.2.12)$$

unde $\mathbf{D}^\pm\mathbf{h} := \mathbf{t}^\pm(\mathbf{Wh}, \mathcal{Q}^d\mathbf{h})$, și \mathbf{K}^* este transpusa formală a lui \mathbf{K} , i.e.,

$$(\mathbf{K}^*\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \text{p.v.} \int_\Gamma \langle -2[(\text{Def}_{\mathbf{x}} \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y}))\nu](\mathbf{x}) + \Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\nu(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle d\sigma(\mathbf{y}). \quad (5.2.13)$$

Mai mult,

$$\mathbf{V}\nu = 0, \quad \mathcal{Q}^s\nu = c_\pm \in \mathbb{R} \text{ in } \mathfrak{D}_\pm, \quad (5.2.14)$$

$$\text{Ker}(\mathcal{V} : H^{s-1}(\Gamma, \Lambda^1 TM) \rightarrow H^s(\Gamma, \Lambda^1 TM)) = \mathbb{R}\nu. \quad (5.2.15)$$

5.2.3 Rezultate de inversabilitate pentru operatorii potențiali de strat asociați problemelor mixte

Înainte de a lua în considerare problema mixtă la frontieră Dirichlet-Neumann din secțiunea următoare, să analizăm câteva proprietăți ale operatorilor potențiali de strat necesari. Aceste proprietăți au fost obținute în lucrarea noastră din Teorema 4.2 în [38]. Ele sunt versiunile analogice ale rezultatelor din cazul Euclidian.

În acest scop, să reamintim operatorii \mathcal{V}^D , \mathbf{K}^D , \mathbf{K}^{*N} și \mathbf{D}^N au definiții similare cu cele dată în (4.1.9), pentru cazul Euclidian.

Teorema 5.2.2. *Fie $\mathfrak{D} \subset M$ un domeniu Lipschitz cu frontiera conexă Γ ca în definiția 5.1.2. Atunci următorii operatori sunt inversabili:*

(i) *Operatorul integral de simplu strat*

$$\mathcal{V}^D : \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM), \quad (5.2.16)$$

(ii) *Operatorul integral hipersingular*

$$\mathbf{D}^N : \tilde{H}^{\frac{1}{2}}_\nu(\Gamma_N, \Lambda^1 TM) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \Lambda^1 TM)/\mathbb{R}\nu. \quad (5.2.17)$$

5.2.4 Operatori compacți asociați problemelor cu valori pe frontieră mixte

Această subsecțiune este dedicată proprietății de compacitate a unor operatori integrali speciali cu dublu strat, care joacă un rol important în analiza problemei la frontieră mixte Dirichlet-Neumann pentru sistemul Stokes pe varietăți Riemanniene compacte studiate în capitolul următor. Aceste rezultate sunt obținute în articolul nostru [38, Teorema 4.3].

Teorema 5.2.3. *Fie $\mathfrak{D} \subset M$ un domeniu Lipschitz cu frontiera descompusă ca în definiția 5.1.2. Atunci următorii operatori sunt compacți:*

$$\mathbf{K}^D : \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \Lambda^1 TM) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM), \quad \text{dat de } \mathbf{K}^D\varphi = \mathbf{K}\varphi|_{\Gamma_D}, \quad (5.2.18)$$

$$\mathbf{K}^{*N} : \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \Lambda^1 TM), \quad \text{dat de } \mathbf{K}^{*N}\psi = \mathbf{K}^*\psi|_{\Gamma_N}. \quad (5.2.19)$$

Capitolul 6

Probleme cu valori pe frontieră pentru sistemele Stokes, Oseen și Navier-Stokes pe varietăți Riemanniane compacte

Acest capitol este dedicat diferitelor probleme pe frontieră legate de sistemele Stokes, Oseen și Navier-Stokes pe varietăți Riemanniene compacte. Studiul curgerii a fluidelor pe o varietate compactă, netedă Riemanniană, joacă un rol important în analiza ecuațiilor fundamentale ale meteorologiei și oceanografiei, așa cum se arată în [109, 71], în care se obține o justificare matematică pentru ecuațiile primitive ale atmosferei și a oceanului ca un model al ecuațiilor Navier-Stokes pe suprafețe sferice subțiri (a se vedea și [108, 26]). De asemenea, alte tipuri de ecuații de curgere, de exemplu, ecuațiile Stokes sau ecuațiile Darcy-Forchheimer-Brinkman pot fi luate în considerare pe suprafețe compacte (de exemplu, pe sfera S^2) care modelează fluxul de apă sau alte fluide newtoniene, trecând prin roci poroase sau sol poros (a se vedea, de ex., [55]).

Versiunea completa a tezei începe cu studiul unei anumite probleme de transmisie pentru sistemul Stokes pe varietăți Riemanniene compacte. Problemele de transmisie au fost intens studiate în ultimele decenii, deoarece descriu fluxul într-o particulă staționară încorporată într-un fluid [86], [60]. Mai mult, problemele pe frontieră Dirichlet și Neumann pot fi privite ca cazuri limită ale problemelor de transmitere, așa cum este explicat în [86, pp. 1- 10], [58, Secțiunea 6].

A doua parte a acestui capitol se referă la probleme la frontieră mixte pentru sistemele Stokes, Oseen și Navier-Stokes. Problemele cu valori pe frontieră de tip mixt Dirichlet-Neumann pe varietăți Riemanniene compacte ar putea descrie un model matematic pentru fluxul de fluide într-un ocean superficial.

Kohr și Wendland [62, Teorema 7.9] au obținut rezultate de bine-punere a problemei pe varietăți Riemanniene compacte pentru condițiile la frontieră de tip mixt și pentru problema Poisson neomogenă pentru sistemul cu coeficienți nenetezi Brinkman când soluția aparține unor spații Sobolev cu bază în L^p cu p într-o vecinătate a lui 2.

Rezultatele principale ale acestui capitol se bazează pe lucrarea [42], obținută prin lucrul comun cu M. Kohr, C. Pinteș și W. L. Wendland și lucrarea [38]. Mai mult, Teorema 6.1.4 este o generalizare a rezultatelor de bine-punere a problemei obținute în lucrarea noastră [38, Teorema 4.1].

6.1 Probleme cu valori pe frontieră de tipul mixt în domenii Lipschitz pe varietăți Riemanniene compacte

Această secțiune analizează problemele mixte la frontieră Dirichlet-Neumann pentru sistemele Stokes, Oseen și Navier Stokes. Să menționăm că, recent, Kohr și Wendland [62, Teorema 7.9] au obținut un rezultat de bine-punere pentru problema Poisson neomogenă cu condiții la frontieră mixte pentru sistemului Brinkman cu coeficienți variabili în L^∞ , când soluția aparține spațiului $H_D^{1,p}(\mathcal{D}, \Lambda^1 TM) \times L^p(\mathcal{D})$, cu p într-o vecinătate a lui 2, unde $H_D^{1,p}(\mathcal{D}, \Lambda^1 TM)$ este subspațiul spațiului $H^{1,p}(\mathcal{D}, \Lambda^1 TM)$ (notat de noi $H_p^1(\mathcal{D}, \Lambda^1 TM)$), ale cărui elemente au urma la frontieră zero pe o parte a frontierei Γ_D (a se vedea, de asemenea, Teorema 7.4 în [63] și Observația 7.10 în [62]). În plus, să menționăm lucrările lui I. Mitrea și M. Mitrea [83, Teorema 8.2], care studiază probleme la frontieră mixte pentru operatorul Laplace pe spațiile Besov din cadrul Euclidian.

Rezultate de bine-punere a problemei pentru sisteme eliptice de ordin mai mare într-un domeniu (ϵ, δ) în \mathbb{R}^n cu o parte regulată de tip Ahlfors a frontierei au fost obținute în [10, Teorema 7.3]. De asemenea, un rezultat general de bine-punere a pentru un operator puternic eliptic în domeniile Lipschitz din \mathbb{R}^n este dezvoltat în [76, Teorema 7.9] (a se vedea și [3] pentru cazul Euclidiană). Pentru cazul problemelor la frontieră mixte pe domenii poliedrice vă referim la [73, Teorema 5.2] și [74].

În această secțiune dezvoltăm o abordare diferită de cele utilizate în [62] și [83], pentru a analiza problemele mixte Dirichlet-Neumann pentru sistemul Stokes în domeniile Lipschitz pe varietăți Riemanniene compacte.

6.1.1 Problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Stokes

Începem din nou cu o presupunere a cadrului geometric cu care lucrăm.

Ipoteza 6.1.1. Fie $\mathcal{D} \subset M$ un domeniu Lipschitz cu frontiera conexă $\Gamma = \partial\mathcal{D}$, care este descompusă în două părți adiacente, disjuncte Γ_D, Γ_N ca în Definiția 5.1.2.

Rețineți că, măsura pozitivă a ambelor partiții este esențială pentru cazul nostru, așa cum va fi explicat în continuare. Apoi, avem în vedere problema mixt cu condițiile la limită Dirichlet și Neumann pentru sistemul Brinkman

$$\begin{cases} L\mathbf{u} + d\pi = 0 \text{ in } \mathcal{D}, \\ \delta\mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathcal{D}, \\ \gamma^+\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{h} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM), \\ \mathbf{t}^+(\mathbf{u}, \pi)|_{\Gamma_N} = \mathbf{g} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \Lambda^1 TM), \end{cases} \quad (6.1.1)$$

unde $(\cdot)|_{\Gamma_D}, (\cdot)|_{\Gamma_N}$ denotă operatorii de restricție de la spațiile definite pe întreaga frontieră Γ la una dintre părțile corespunzătoare Γ_D sau respectiv Γ_N .

Pentru a potrivi sistemul compus din (4.1.3) și (4.1.4) la problema cu valori pe frontieră mixtă pentru sistemul Stokes (6.1.1), se denotă prin $\mathbf{h}^* \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM)$ și $\mathbf{g}^* \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM)$, extensii arbitrare la întreaga frontieră Γ a datelor corespunzătoare \mathbf{h}, \mathbf{g} . Considerând $\mathbf{h}_D^* \in \tilde{H}_D^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM)$ fiind definite în (4.1.6), rezultă că datele la frontieră sunt date de

$$\gamma^+\mathbf{u} = \varphi_N + \mathbf{h}_D^*, \quad \mathbf{t}^+(\mathbf{u}, \pi) = \psi_D + \mathbf{g}^*. \quad (6.1.2)$$

Evident $\varphi_N \in \tilde{H}_N^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \Lambda^1 TM)$ și $\psi_D \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM)$, deoarece $\varphi_N = 0$ pe Γ_D .

Pentru a demonstra bine-punerea problemei la frontieră (6.1.1), vom reformula problema ca un sistem de ecuații integrale la frontieră, inspirat de ideile principale din [16] pentru ecuația Laplace și [61] pentru sistemul Stokes. Să menționăm și Teorema 7.9 în [76], care se referă la un sistem general puternic eliptic.

Teorema 6.1.2. Fie \mathfrak{D}, Γ_D și Γ_N ca în ipoteza 6.1.1 și fie $\mathbf{h} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM)$ și $\mathbf{g} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \Lambda^1 TM)$. Mai mult, considerăm \mathbf{g}^* și \mathbf{h}_D^* date de (6.1.2). Atunci, următoarele afirmații sunt adevărate:

(i) Dacă $(\mathbf{u}, \pi) \in H^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM) \times L^2(\mathfrak{D})$ este o soluție pentru (6.1.1), atunci (ψ_D, φ_N) date de

$$\psi_D = \mathbf{t}^+(\mathbf{u}, \pi) - \mathbf{g}^*, \quad \varphi_N = \gamma^+ \mathbf{u} - \mathbf{h}_D^*, \quad (6.1.3)$$

sunt o soluție pentru ecuațiile integrale

$$\begin{cases} -\mathcal{V}^D \psi_D + \mathbf{K}^D \varphi_N = f_1, & \mathbf{x} \in \Gamma_D \\ -\mathbf{K}^{*N} \psi_D + \mathbf{D}^N \varphi_N = f_2, & \mathbf{x} \in \Gamma_N \end{cases} \quad (6.1.4)$$

unde (f_1, f_2) sunt date de

$$f_1 = \frac{1}{2} \mathbf{h} - \mathbf{K}^D \mathbf{h}_D^* + \mathcal{V}^D \mathbf{g}^*, \quad f_2 = -\mathbf{D}^N \mathbf{h}_D^* + \frac{1}{2} \mathbf{g} + \mathbf{K}^{*N} \mathbf{g}^*. \quad (6.1.5)$$

Mai mult, soluția (\mathbf{u}, π) poate fi reprezentată în forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}(\varphi_N + \mathbf{h}_D^*) - \mathbf{V}(\psi_D + \mathbf{g}^*), \quad \pi = Q^d(\varphi_N + \mathbf{h}_D^*) - Q^s(\psi_D + \mathbf{g}^*), \quad (6.1.6)$$

(ii) Dacă, $(\varphi_N, \psi_D) \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \Lambda^1 TM) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM)$ este o soluție a sistemului integral (6.1.4), atunci reprezentarea în forma de potențiale (6.1.6) definesc o soluție a problemei Dirichlet-Neumann (6.1.1).

Sistemul de ecuații (6.1.4) poate fi rescrisă în formă matricială

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} \psi_D \\ \varphi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{V}^D & \mathbf{K}^D \\ -\mathbf{K}^{*N} & \mathbf{D}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_D \\ \varphi_N \end{bmatrix} = \mathbf{f}, \quad (6.1.7)$$

unde $\mathbf{f} = [f_1, f_2]^T$. Să descompunem operatorul \mathcal{A} ca

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\mathcal{V}^D & \mathbf{K}^D \\ -\mathbf{K}^{*N} & \mathbf{D}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{V}^D & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}^D \\ -\mathbf{K}^{*N} & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{B} + \mathfrak{P}. \quad (6.1.8)$$

unde \mathfrak{B} este un operator matricial inversabil iar \mathfrak{P} este un operator compact precum a fost demonstrat în [38], ceea ce implică utilizând Alternativa Fredholm că operatorul \mathcal{A} este un operator Fredholm de index zero. Acum, suntem pregătiți să aratăm teorema principală a acestei secțiuni.

Teorema 6.1.3. În ipoteza 6.1.1, sistemul de ecuații integrale (6.1.4) are o soluție unică în spațiul $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM) \times \tilde{H}_V^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \Lambda^1 TM)$.

Teorema 6.1.4. Fie \mathfrak{D}, Γ_D și Γ_N ca în ipoteza 6.1.1. Atunci problema mixtă cu condiții Dirichlet și Neumann pentru sistemul Stokes omogen (6.1.1) are o soluție unică $(\mathbf{u}, \pi) \in H^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM) \times L^2(\mathfrak{D})$. În plus, există o constantă $C = C(\Gamma_D, \Gamma_N)$ astfel încât

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM)} + \|\pi\|_{L^2(\mathfrak{D})} \leq C \|(\mathbf{h}, \mathbf{g})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \Lambda^1 TM)}. \quad (6.1.9)$$

Având acest rezultat, putem extinde problema pe frontieră mixtă dată în teorema 6.1.4 la problema Poisson pentru sistemul Stokes prin utilizarea potențialelor Newtoniene. Ne referim la [55, Secțiunea 3.1 și 4.2], [42, Teorema 4.1] și [50, Secțiunea 8] pentru operatorul Brinkman. De asemenea, să introducem pentru simplitate notația pentru datele problemei

$$\mathcal{B} := \tilde{H}^{-1}(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \Lambda^1 TM). \quad (6.1.10)$$

Teorema 6.1.5. Fie \mathfrak{D}, Γ_D și Γ_N ca în ipoteza 6.1.1. Atunci problema mixtă de tip Dirichlet-Neumann pentru sistemul Stokes neomogen

$$\begin{cases} L\mathbf{u} + d\pi = \mathbf{f} \in \tilde{H}^{-1}(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM), \\ \delta\mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathfrak{D}, \\ \gamma^+\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{h} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM), \\ \mathbf{t}^+(\mathbf{u}, \pi)|_{\Gamma_N} = \mathbf{g} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \Lambda^1 TM), \end{cases} \quad (6.1.11)$$

are o soluție unică $(\mathbf{u}, \pi) \in H^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM) \times L^2(\mathfrak{D})$. În plus, există o constantă $C = C(\Gamma_D, \Gamma_N)$ astfel încât

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM)} + \|\pi\|_{L^2(\mathfrak{D})} \leq \mathbf{C}\|(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{g})\|_{\mathcal{B}}. \quad (6.1.12)$$

6.1.2 Problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Oseen

Înainte de a continua analiza noastră, să menționăm că Russo și Simader au arătat în [96] rezultatul de bine-punere a sistemului Oseen în domeniul Lipschitz din cadrul Euclidian (a se vedea, de ex., [97]). Mai mult, Tartaglione în [104] a studiat soluții foarte slabe pentru problemele pe frontieră pentru Stokes și Oseen în domeniul mărginite și exterioare din \mathbb{R}^n , ($n = 2, 3$) de clasă $C^{k-1,1}$ for $k \geq 2$.

Teorema 6.1.6. În ipoteza 6.1.1, există o pereche $(\mathbf{u}, \pi) \in H^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM) \times L^2(\mathfrak{D})$, care satisface problema cu valori pe frontieră de tipul mixt Dirichlet-Neumann pentru sistemul Oseen

$$\begin{cases} L\mathbf{u} + \nabla_\omega \mathbf{u} + d\pi = \mathbf{f} \text{ in } \mathfrak{D}, \\ \delta\mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathfrak{D}, \\ \gamma^+\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{h} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM), \\ \mathbf{t}^+(\mathbf{u}, \pi)|_{\Gamma_N} = \mathbf{g} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \Lambda^1 TM), \end{cases} \quad (6.1.13)$$

și satisface următoarea estimare

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\mathfrak{D}, \Lambda^1 TM)} + \|\pi\|_{L^2(\mathfrak{D})} \leq \mathbf{C}\|(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{g})\|_{\mathcal{B}}, \quad (6.1.14)$$

cu o constantă pozitivă $C = C(\Gamma_D, \Gamma_N)$.

6.2 Probleme cu valori pe frontieră de tipul mixt pentru sisteme neliniare pe varietăți Riemanniene compacte

În această secțiune, vom arăta un rezultat de solvabilitate pentru problemele pe frontieră mixte Dirichlet-Neumann pentru sistemul Navier-Stokes pe varietăți Riemanniene compacte. Oferim o demonstrație alternativă a problemelor mixte Dirichlet-Neumann pentru sistemul Navier-Stokes din domeniul Lipschitz pe varietăți Riemanniene compacte, folosind rezultatul de bine-punere a problemei pentru sistemul Oseen obținut în secțiunea anterioară din Teorema 6.1.6. Acest rezultat subliniază relația strânsă dintre sistemele Oseen și Navier-Stokes [39, Teoremele 3.6 și 4.1].

6.2.1 Problema mixtă Dirichlet-Neumann pentru sistemul Navier-Stokes

Această secțiune studiază problema mixtă pe frontieră Dirichlet-Neumann pentru sistemul Navier-Stokes. Obținem un rezultat de solvabilitate pentru sistemul Navier-Stokes neliniar care demonstrează că operatorul soluție pentru sistemul Oseen are un punct fix [39, Teorema 4.1].

Teorema 6.2.1. *În ipoteza 6.1.1 și pentru o constantă $\beta > 0$, există două constante $C_j \equiv C_j(\Gamma_D, \Gamma_N, \beta) > 0$, $j = 1, 2$, cu proprietatea că pentru toate datele $(\mathbf{f}, \mathbf{h}, \mathbf{g}) \in \mathcal{B}$, care satisfac inegalitatea*

$$\|\mathbf{f}\|_{\tilde{H}^{-1}(\mathcal{D}, \Lambda^1 TM)} + \|\mathbf{h}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM)} + \|\mathbf{g}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \Lambda^1 TM)} \leq C_1, \quad (6.2.1)$$

problema de tipul mixt Dirichlet-Neumann pentru sistemul Navier-Stokes

$$\begin{cases} L\mathbf{u} + \beta \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + d\pi = \mathbf{f}, & \text{in } \mathcal{D} \\ \delta \mathbf{u} = 0, & \text{in } \mathcal{D}, \\ \gamma^+ \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{h} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D, \Lambda^1 TM), \\ \mathbf{t}^+(\mathbf{u}, \pi)|_{\Gamma_N} = \mathbf{g} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N, \Lambda^1 TM), \end{cases} \quad (6.2.2)$$

are o soluție unică $(\mathbf{u}, \pi) \in H^1(\mathcal{D}, \Lambda^1 TM) \times L^2(\mathcal{D})$, astfel încât

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{D}, \Lambda^1 TM)} \leq C_2.$$

Partea III

Metode numerice și aplicații asociate problemelor cu valori pe frontieră mixte

Capitolul 7

Metode și rezultate numerice pentru problema fluxului cavității antrenată de mișcarea unui perete umplută cu un mediu poros

Rezultatul solvabilității pentru problema Dirichlet pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman dat în (4.3.2) a fost furnizat în Teorema 4.3.1. În continuare, ne referim la un studiu numeric al unei astfel de probleme într-un domeniu Lipschitz special. Astfel, în acest capitol vom descrie câteva metode numerice referitoare la binecunoscuta problemă a mișcării unui fluid într-o cavității antrenată de mișcarea unui perete, cu condiții la frontieră Dirichlet și Robin, notate pe scurt în continuare ca problemă cavității antrenate. Problema cavității antrenate de un perete mișcător are în vedere o cavitate pătrată formată din trei pereți rigizi pe care sunt impuse condițiile de alunecare antiderapante și un perete în mișcare tangențial cu viteza unitară. Considerăm că mișcarea fluidului în interiorul cavității pătrate este guvernată de sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman. De fapt, considerăm doar termenul neliniar $\beta \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ în simulările noastre, ceea ce înseamnă că avem în vedere $\kappa = 0$, $\alpha > 0$ și $\beta > 0$ (a se vedea descrierea din introducere (0.0.3), dar și [87]).

Problema cavității antrenate de mișcarea unui perete a făcut obiectul multor studii fizice, teoretice și numerice, deoarece conectează prin geometria sa simplă toate aspectele fizice relevante cu modele matematice și metode numerice. Prin urmare, problema cavității antrenate a devenit o problemă de referință pentru mulți autori care au încercat să valideze metodele numerice studiate (a se vedea, de ex., [1], [31]).

Acest capitol prezintă două metode numerice importante utilizate pentru studiul problemelor speciale precum mișcarea într-o cavitate antrenată de un perete mișcător în mecanica fluidelor, care sunt descrise matematic de probleme pe frontieră mixte. Începem cu o scurtă descriere a ecuațiilor nedimensionale legate de astfel de probleme de flux a fluidor (a se vedea, de ex., [44]), precum și formularea funcție de curent-vorticitate (a se vedea, de ex., [60]) pentru sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman. O astfel de formulare simplifică tratarea numerică a ecuațiilor în cazul bidimensional. Metoda diferenței centrale (CD) și Metoda Elementului de Frontieră Dual Reciproc (DRBEM) luate în considerare în acest capitol sunt analizate succint pentru a evalua stabilitatea în cazul particular al problemei cavității antrenate bidimensionale. În plus, oferim o scurtă comparație a ambelor metode bazate pe [40, Secțiunea 4] și [37, Secțiunea 3], cu rezultate clasice găsite în literatura de specialitate asociată sistemului Navier-Stokes.

După aceea, vom discuta câteva rezultate numerice pentru problema fluxului cavității antrenate de un perete mișcător pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman în două dimensiuni. Condiții Dirichlet și condiții mixte Robin-Dirichlet sunt luate în considerare. Condiția Robin

are semnificația fizică de a descrie un parametru de alunecare (a se vedea, de ex., [44], [43]). Mai mult, descriem relația dintre geometria liniilor de flux și următorii parametri: numărul Reynolds, numărul Darcy și parametrul de alunecare [87]. Rezultatele acestui capitol se bazează pe lucrarea [40, Secțiunea 4] scrisă în colaborare cu T. Groșan și [37, Secțiunea 3].

7.1 Problema fluxului într-o cavitate antrenată de un perete mișcător. Enunț și observații

Ne referim în continuare la fluxul unui fluid Newtonian incompresibil într-un mediu poros saturat, situat într-o cavitate pătrată de lungime L (un domeniu special Lipschitz), unde sunt impuse anumite condiții specifice la limită de tip Dirichlet și Robin. Trei dintre pereții domeniului sunt fixați și ultimul se mișcă cu o viteză dată, care este tangențială la peretele superior. Fie $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ pereții fixi și fie Γ_4 peretele în mișcare (a se vedea figura 7.1).

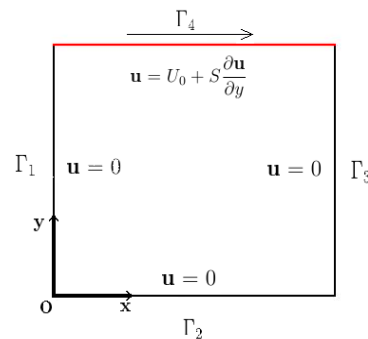


Figura 7.1: The geometry of the fluid domain

Devenită o problemă de referință pentru validarea și testarea metodelor numerice propuse de mulți autori de-a lungul literaturii, fluxul incompresibil laminar într-o cavitate pătrată al cărui perete superior se mișcă tangențial cu o viteză uniformă a fost cunoscut sub numele de problema cavității antrenate de mișcarea peretelui superior.

Condiția de alunecare zero la pereții neporos conduce la anularea câmpului viteză \mathbf{u} , precum și a derivatelor normale pe întreaga frontieră. După cum se știe, nu sunt prevăzute condiții la frontieră directă pentru vorticitatea Ω la pereți (a se vedea, de ex., [87]). Cu toate acestea, de cele mai multe ori condițiile la frontieră pentru vorticitatea Ω sunt derivate din definiția dată în ecuația (7.2.10) de mai jos.

7.2 Analiza adimensională a sistemului Darcy-Forchheimer-Brinkman

În scopul rezolvării numerice a problemei noastre fizice, este adesea convenabil să derivăm un sistem de ecuații adimensionale, astfel încât lungimea, înălțimea și viteza peretelui în mișcare să fie scalate la unitate. Următoarea subsecțiune oferă derivarea formulării abstracte a formei adimensionale a sistemului Darcy-Forchheimer-Brinkman bazat pe [44, p. 307-309].

7.2.1 Forma adimensională a sistemului neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman

Sistemul neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman, adică sistemul neliniar de ecuații cu derivate parțiale (4.3.2) descrie fluxul unui fluid incompresibil, vâcos situat într-o cavitate pătrată

umplută cu un mediu poros saturat. Sub mișcarea tangențială a peretelui superior, fluidul din interiorul cavității se rotește până ajunge la o stare de echilibru descrisă de ecuațiile din (4.3.2). Pe peretele în mișcare se impun condiții la limitare diferite, care corespund fie condițiilor Dirichlet, fie condițiilor de frontieră mixte Dirichlet-Robin (4.3.2).

Fie $\mathbf{u}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ câmpul vitează a curgerii fluidului și $\pi = \pi(x, y)$ câmpul presiune corespunzător. Atunci sistemul nelinier Darcy-Forchheimer-Brinkman (4.3.2) constă în următoarele ecuații scalare cu derivate parțiale

$$\begin{cases} Ox : & \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \alpha u - \frac{\partial \pi}{\partial x} = \beta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ Oy : & \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \alpha v - \frac{\partial \pi}{\partial y} = \beta \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (7.2.1)$$

Menționăm că constantele α și β sunt legate de proprietățile fizice ale fluidului Newtonian și ale mediului poros. O descriere mai detaliată urmează în subsecțiunea 7.2.3.

Un scop principal al analizei noastre este discretizarea domeniului în care este considerat fluidul. Pentru a face acest lucru, avem în vedere următoarele variabile adimensionale, care reprezintă o scalare a lungimii cavității pătrate și a vitezei peretelui în mișcare la unitate, după cum urmează (see, de ex., [40, Section 4.1])

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad P = \frac{\pi L}{U_0}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \quad V = \frac{v}{U_0}. \quad (7.2.2)$$

Atunci primele două ecuații (7.2.1) se reduc la forma lor adimensională

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \alpha U - \frac{\partial P}{\partial X} = \beta \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right), \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \alpha V - \frac{\partial P}{\partial Y} = \beta \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right). \end{cases} \quad (7.2.3)$$

Acestor ecuații se adaugă ecuația de continuitate adimensională

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (7.2.4)$$

Menționăm că parametrii de scalare sunt incluși și în constantele α , β din ecuația (7.2.3), dar folosim aceeași notație ca în (7.2.1) pentru simplitatea prezentării.

Forma adimensională a condițiilor la frontieră

Având în vedere definiția de mai sus a variabilelor adimensionale (7.2.2), obținem condițiile la frontieră asociate de tip Dirichlet (fără alunecare) pentru problema noastră sub forma (a se vedea Figura 7.1)

$$\gamma^+ \mathbf{u} = 0 \text{ on } \Gamma_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.2.5)$$

$$\gamma^+ \mathbf{u} = U_0 \text{ on } \Gamma_4, \quad (7.2.6)$$

unde U_0 este viteza peretelui mișcător. Mai mult, considerăm condiții la frontieră de tip Robin pentru peretele mișcător Γ_4 , care este exprimat în termenii parametrului de alunecare S . Astfel, condițiile la limită Robin considerate în continuare au forma

$$\gamma \mathbf{u} = U_0 + S \frac{d\mathbf{u}}{d\nu} \text{ on } \Gamma_4, \quad (7.2.7)$$

care conduc la forma adimensională a condițiilor pe frontieră mixte Dirichlet-Robin în termeni de funcție de curent exprimat prin

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \Gamma_3, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0 \quad \text{on } \Gamma_2, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 1 + S \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \quad \text{on } \Gamma_4, \quad (7.2.8)$$

unde Ψ este funcția de curent a curgerii fluidului (definiția exactă este dată mai jos (7.2.9)).

7.2.2 Formularea funcție de curent-vorticitate a sistemului neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman

Întrucât avem de-a face doar cu două dimensiuni din acest capitol, rescriem ecuațiile adimensionale folosind formularea funcție de curent-vorticitate. Rețineți că această formularea a fluxului fluidului oferă o modalitate simplă de analiză a problemelor pe frontieră în mecanica fluidelor, deoarece funcția de curent reprezintă contururile fluxului de fluid cu aceeași viteză (vezi, de ex., [44]). Această abordare nu se limitează la două dimensiuni, dar din moment ce traiectoriile particulelor de fluid cu aceeași viteză nu sunt limitate la un singur plan, formularea matematică devine mai complexă în trei dimensiuni (a se vedea, de ex., [60]).

Acum, ținând cont de ecuația de continuitate (7.2.4), introducem funcția de curent Ψ , definită de următoarele ecuații

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} = U, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = -V. \quad (7.2.9)$$

Fie Ω câmpul vorticitate, definit de relația

$$\Omega := \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}. \quad (7.2.10)$$

Funcția de curent Ψ și vorticitatea Ω sunt legate de relația

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega. \quad (7.2.11)$$

Rearanjând ecuația (7.2.3) și utilizând expresia (7.2.9), vorticitatea Ω dată de (7.2.10), și ecuația de continuitate (7.2.4), precum și ecuația (7.2.11), obținem ecuația de bază a abordării noastre numerice

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} + \alpha \Omega = \beta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right), \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega. \end{cases} \quad (7.2.12)$$

7.2.3 Proprietăți fizice asociate curgerii fluidului

Proprietățile fizice a unui fluid vâcos și a unui mediu poros sunt descrise de următorii parametri (a se vedea, de ex., [87, Secțiunile 1.2, 1.5.2 și 1.5.3]):

- *Numărul lui Reynolds* Re , care este definit de raportul forțelor inerțiale și a forțelor vâscoase și quantifică astfel importanța celor două forțe în curgerea fluidului.
- *Numărul lui Darcy* Da , care reprezintă efectul relativ a permitivității mediului în raport cu area secțiunii transversale, și este definit ca fiind raportul permitivității și a pătratului diametrului a particulelor.
- *Porozitatea* φ , care este fracțiunea de volum a vidului pe volumul total și reprezintă o măsură a spațiilor goale în mediul poros.
- *Coeficientul de vâscozitate* μ care este legat de porozitatea mediului.

Constantele α și β , care apar în modelul matematic (4.3.2) sunt legate de parametri fizici prin următoarele formule

$$\alpha = \frac{\varphi}{\mu Da}, \quad (7.2.13)$$

$$\beta = \frac{Re}{\varphi \mu}, \quad (7.2.14)$$

unde α este numit *coeficientul Darcy*, și β este *coeficientul de convecție*.

7.3 Metoda diferențelor centrale (CD) și Metoda elementului de frontieră dual reciproc (DRBEM)

În versiunea completă a acestei teze, sunt descrise două metode numerice, metoda diferențelor centrale (CD) și Metoda Elementului de Frontieră Dual Reciproc (DRBEM).

Este prezentată o descriere detaliată a discretizării domeniului și a stabilității metodei diferenței centrale combinată cu iterația Gauss-Seidel pentru ecuațiile diferențiale parțiale.

A doua metodă numerică considerată în această teză este Metoda Elementului de Frontieră Dual Reciproc (DRBEM), care poate fi aplicată formei integrale a sistemului Darcy-Forchheimer-Brinkman. Metoda DRBEM ia în considerare o serie de extensii a termenului Poisson pentru Laplacian în raport cu o funcție de bază radială (a se vedea, de ex., [9], [89], [35]).

7.4 Comparații cu rezultate numerice clasice din literatură

Pentru a valida rezultatele numerice obținute prin metoda diferențelor centrale în [40] cât și prin metoda DRBEM [37], începem analiza prin a compara rezultatele noastre cu rezultate clasice din literatura de specialitate.

Astfel ne referim la problema curgerii antrenată de mișcarea unui perete și prezentăm câteva rezultate numerice obținute în [40] și în [37]. Începem cu compararea valorilor absolute maxime a funcției de curent, în cazul în care fluidul din interiorul cavității este descris de ecuațiile Navier-Stokes.

Sistemul Navier-Stokes este evaluat prima data pentru a verifica corectitudinea rezultatelor numerice deoarece ample rezultate sunt disponibile în literatura de specialitate, în special pentru cazul $Re = 100$. Tabelul 7.1 prezintă rezultatele simulărilor noastre pentru diferite valori a numărului Reynolds, precum și rezultatele obținute în [31], [95], [72] and [27].

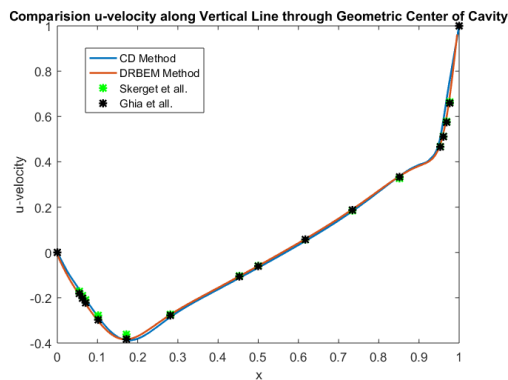
$ \psi_{max} $ (center)	$Re = 10$	$Re = 100$	$Re = 1000$
Gutt [37]	0.1001 (0.5175, 0.7658)	0.1036 (0.6136, 0.7367)	0.1187 (0.5275, 0.5715)
Gutt and Groșan [40]	0.1000 (0.51, 0.77)	0.1034 (0.615, 0.74)	- -
Ghia et al. [31]	- -	0.1034 (0.6172, 0.7344)	0.1179 (0.5313, 0.5625)
Rek and Škerget [95]	- -	- -	0.113 (0.524, 0.565)
Marchi et al. [72]	0.1001 (0.516, 0.7646)	0.1035 (0.616, 0.737)	0.1189 (0.531, 0.565)
Erturk et al. [27]	- -	0.1035 (0.6152, 0.7363)	0.1187 (0.5313, 0.5645)

Tabela 7.1: Comparația rezultatului nostru numeric cu rezultate clasice pentru sistemul Navier-Stokes.

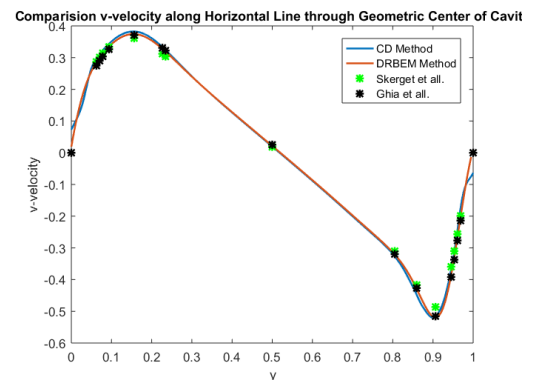
O doua abordare pentru a valida metodele numerice folosite aici este compararea profilelor vitezei u de-a lungul liniei verticale care trece prin centrul cavității și v de-a lungul liniei orizontale, cu profilele date în [31] și [95].

Menționăm că lucrarea lui U. Ghia, K. Ghia și Shin [31] studiază formularea funcție de curent-vorticitatea pentru ecuațiile Navier-Stokes în două dimensiuni utilizând o metodă multigrad cuplată implicit. Lucrarea lui se referă la problema antrenată de un perete mobil pentru valori mari ale numărului Reynolds cu valori până la 10.000 și a devenit o lucrare de referință pentru această problemă.

De asemenea, comparăm rezultatele numerice cu cele ale lucrării lui Rek și Škerget [95]. Autorii au folosit metoda elementului de frontieră (BEM) în studiul lor. Această comparație este importantă, deoarece în ciuda singularităților de la cele două colțuri superioare ale cavității care duc inevitabil la erori în calculul integralelor pe frontieră, rezultatele prezentate aici sunt în acord cu cele obținute de Rek și Škerget.

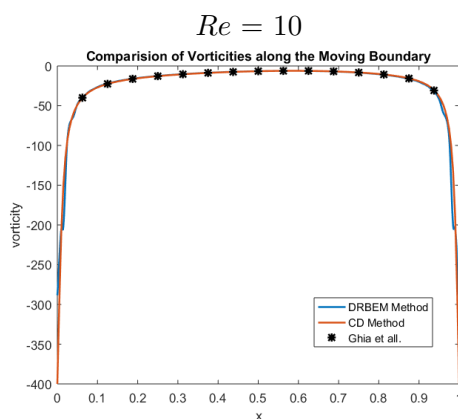


Profilul componentei u a vitezei de-a lungul liniei verticale

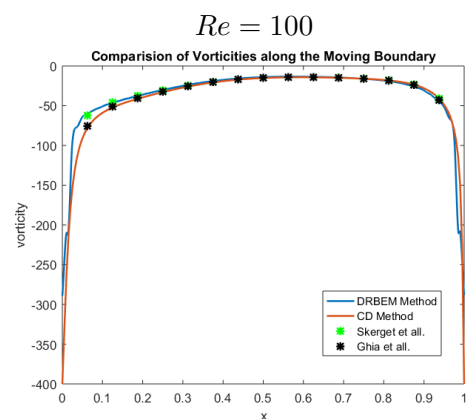


Profilul componentei v a vitezei de-a lungul liniei orizontale

Figura 7.2: Comparația profilurilor de viteză pentru u și v de-a lungul liniei verticale și a liniei orizontale care trec prin centrul geometric al cavității $Re = 1000$ cu rezultatele obținute de [31] și [95].



Profilul vorticității Ω pentru $Re = 1000$



Profilul vorticității Ω pentru $Re = 1000$

Figura 7.3: Comparația profilurilor vorticității Ω de-a lungul frontierei în mișcare a cavității pentru $Re = 100$ și $Re = 1000$ cu rezultatele obținute de [31] și [95].

Figurile 7.2 arată profilurile de viteză pentru u de-a lungul liniei verticale și v de-a lungul liniei orizontale pentru $Re = 1000$ care trece prin centrul geometric al cavității. Putem observa că pe măsură ce numărul Reynolds crește, vortexul primar se deplasează în sus în cavitate, ceea

ce duce la subțierea stratului de flux de la frontieră. Pentru aceste valori ale numărului lui Reynolds, subțierea este foarte lentă, dar crește mai rapid pentru $Re > 5000$ (a se vedea, de ex., [31]).

Precum profilele de viteză din Figura 7.2 sugerează, la numere Reynolds mari, profilul aproape liniar a vitezei în întreaga cavitate indică regiunea cu vorticității uniformă (a se vedea, de ex., [31]). Prin urmare, componenta u a câmpului de viteză se îndoaie rapid aproape de $y = 1$, în timp ce componenta de viteză v se îndoaie rapid aproape de $x = 1$.

Pentru ambele valori $Re = 100$ și $Re = 1000$, rezultatele obținute prin metoda diferențelor centrale cât și prin metoda elementelor de frontieră sunt de acord cu rezultatele raportate de U. Ghia, K. Ghia and Shin [31] și [95].

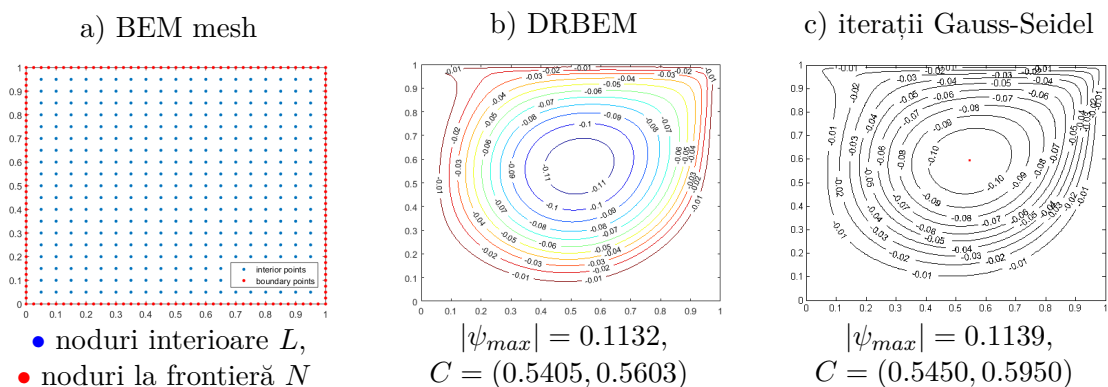


Figura 7.4: (a) Discretizarea domeniului, (b)-(c) Compararea liniilor de curent a curgerii fluidului într-un mediu poros pentru problema cavității antrenate în cazul $Re = 100$, $Da = 0.25$, $\phi = 0.2$.

În al treilea rând, comparăm profilele vorticității de-a lungul peretelui în mișcare, cu rezultatele date în [31] și [95]. Rezultatele obținute pentru $Re = 100$ și $Re = 1000$, sunt prezentate în Figura 7.3. Așa cum am menționat, singularitățile la cele două colțuri apar clar și rezultatele sunt în acord. Observați că pentru $Re = 1000$, profilul de vorticitate obținut de BEM (atât pentru simulările prezentate în această teză, cât și pentru cele obținute în [95]) se află peste profilul vorticității obținut prin metoda diferențelor centrale.

Ultima metodă de validare pe care o folosim necesită o comparație între rezultatele numerice obținute prin utilizarea metodelor de diferențe centrale și schema iterativă Gauss-Seidel pentru sistemul nelinier Darcy-Forchheimer-Brinkman (a se vedea [44] pentru mai multe detalii), și simulările obținut utilizând abordarea DRBEM prezentată în Figura 7.4. Fluidul și mediul poros pentru sistemul nelinier Darcy-Forchheimer-Brinkman sunt aleși după cum urmează: $Re = 100$, $Da = 0.25$, $\phi = 0.2$ and $\mu = 1$.

Rezultatele obținute în Figurile 7.4 (b) - (c) pentru sistemul nelinier Darcy-Forchheimer-Brinkman prin metoda diferențelor centrale și metoda elementelor de frontieră dual reciproce sunt de acord. Diferența valorii maxime absolute a funcției de curent are o eroare absolută mai mică de 10^{-3} , în timp ce variația centrului de vortex se explică prin faptul că pentru DRBEM am folosit o procedură de interpolare cu peste 1000×1000 de puncte, în timp ce discretizarea pentru metoda diferențelor centrale are doar 201×201 de puncte de discretizare.

7.5 Rezultate numerice și discuții aferente pentru problema cavității antrenate de mișcarea unui perete care este umplută cu un mediu poros

Deoarece am stabilit validarea celor două metode, descriem câteva rezultate numerice referitoare la sistemul nelinier Darcy-Forchheimer-Brinkman pentru problema cavității antrenate

de mișcarea unui perete mobil. Analiza începe cu cazul condițiilor la limită Dirichlet, adică în absența parametrului de alunecare. Pentru acest caz, discutăm schimbarea fluxurilor cu variația numărului de Reynolds Re pentru valori de la 10 până la 1000, pentru două cazuri când parametrul de porozitate este setat la $\phi = 0, 2$, ca în [40], și $\phi = 0, 5$ ca în [37]. După aceea, ne vom concentra asupra influenței numărului Darcy Da asupra geometriei fluxului, având $Re = 100$.

În continuare, impunem un parametru de alunecare pe peretele superior de mișcare, care duce la o problemă mixtă Dirichlet-Robin pentru problema cavității antrenate. Sensul fizic al parametrului de alunecare este acela că nu tot fluidul din vecinătatea peretelui superior este angajat în mișcarea fluidului. Prin urmare, pe măsură ce parametru de alunecare crește, ne așteptăm ca puterea vortexului primar să scadă, un comportament care este în acord cu rezultatele numerice. Cu toate acestea, acest efect este vizibil numai în cazul în care se folosește metoda DRBEM, deoarece metoda diferențelor centrale nu este stabilă pentru valori suficient de mari a parametrului de alunecare.

7.5.1 Variația parametrilor fizici pentru problema cavității antrenată de un perete mobil în absența parametrului de alunecare

În această subsecțiune, analizăm structura fluxurilor pentru câțiva parametri reprezentativi de fluid (Re și Da) în absența parametrului de alunecare, adică $S = 0$ corespunzând condițiilor pe frontieră Dirichlet, deoarece nu avem nicio alunecare a fluidului din vecinătatea frontierei.

Decrierea fizică a variației numărului Reynolds

Mai întâi, analizăm dependența liniilor de curent pentru $Re = 10, 100, 1000$. Parametrul Darcy este presupus a fi constant și egal cu $Da = 0.25$, precum și coeficientul de vâscozitate $\mu = 1$.

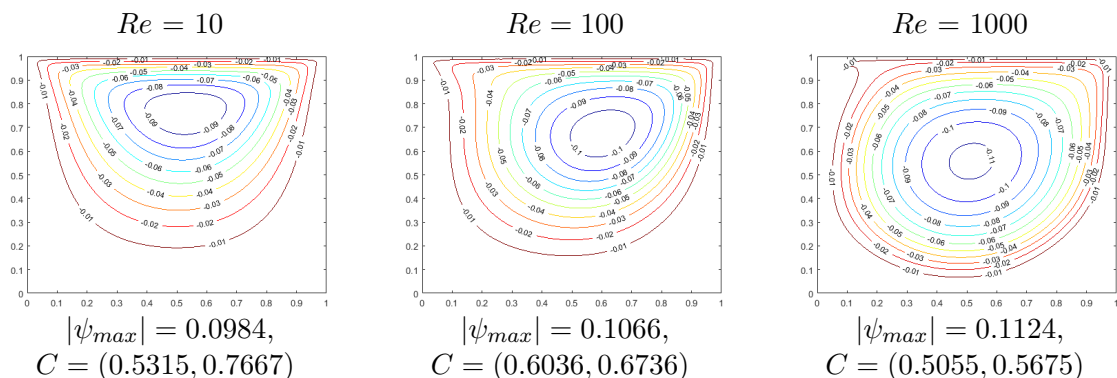


Figura 7.5: Liniile de curent a curgerii fluidului într-un mediu poros cu $\phi = 0.5$, în cazul problemei antrenate de un perete mobil cu $Re = 10, 100, 1000$, obținute prin DRBEM.

Pe măsură ce Re crește, deficiența discretizării grosiere devine treptat aparentă, iar metoda de diferență centrală de ordinul întâi folosită nu mai este convergentă. Prin urmare, metoda diferenței centrale prezentată este doar convergentă pentru numerele Reynolds de până la 200. Cu toate acestea, întrucât parametrul de porozitate ϕ apare la calculul parametrului convenției β , valoarea $\phi = 0.5$ corespunde valorii $\beta = 1000$, similar cu cazul sistemului Navier-Stokes cu $Re = 1000$. Prin urmare, comportamentul liniilor de curent a curgerii în cazul unui mediu poros este similar cu cel al numerelor Reynolds mai mari.

Contururile funcției de curent calculate pentru parametrul de porozitate $\phi = 0.5$ folosind DRBEM pentru problema cavității antrenate, cu Re crescând de la 10 la 1000 sunt arătate în Figura 7.5. Pentru numere Reynolds mari, valoarea maximă a funcției de curent este mai

mare decât cea în cazul sistemului Navier-Stokes, deoarece termenul de convecție are un rol semnificativ.

Descrierea fizică a variației numărului Darcy

Acum, alegem $Re = 100$ și $\mu = 1$ și analizăm dependența geometriei funcției de curent de Da pentru valorile de 0,25, 0,025, 0,0025, care sunt considerate valori relevante precum este menționat de Nield și Bejan [87].

Observați că pentru ambele cazuri $\phi = 0.5$ și $\phi = 0.2$ din [40], vortexul se deplasează în colțul din dreapta sus al cavității pe măsură ce numărul Darcy scade și că puterea vortexului este direct proporțională cu numărul Darcy. Această dependență a fluxului de fluid este în concordanță cu comportamentul fizic al fluidului [87].

Pentru $\phi = 0.5$, efectul numărului Darcy este mai vizibil începând cu valori mai mari. Din Figura 7.6, observăm că vortexul primar este situat la un nivel mai înalt în cavitate când porozitatea este $\phi = 0.5$ în comparație cu cazul $\phi = 0.2$ din [40] și că puterea vortexului este mai slabă pentru aceeași valoare a numărului Darcy. Prin urmare, în cazul $\phi = 0.5$, considerăm valorile numărului Darcy numai în apropierea valorii 0.0025.

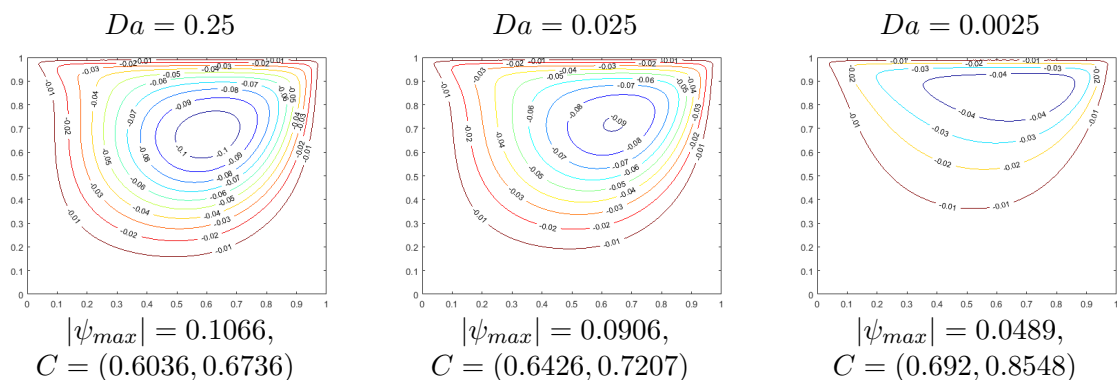


Figura 7.6: Linile de curent a curgerii fluidului într-un mediu poros cu porozitatea $\phi = 0.5$ în cazul problemei cavității antrenate pentru $Da = 0.25, 0.025, 0.0025$, calculat prin DRBEM.

7.5.2 Problema curgerii unui fluid într-o cavitate antrenată de mișcarea unui perete în cazul unui parametru de alunecare

Această subsecțiune este preocupată de problema mixtă la frontieră Dirichlet-Robin, asociată sistemului nelinier Darcy-Forchheimer-Brinkman. Astfel, avem în vedere un parametru de alunecare suplimentar impus peretelui superior în mișcare. Un studiu numeric al stării de alunecare Navier poate fi găsit în [43]. Această condiție implică faptul că nu întregul fluid situat în vecinătatea frontierei este antrenat de peretele în mișcare.

Să menționăm că acest tip de condiții ar putea fi un caz particular al unei condiții de interfață mai generale, care ține cont de frecare, aderență și contactul cu memorie (a se vedea [102] și [103]).

Menționăm că DRBEM a oferit o convergență mai bună în comparație cu metoda diferențelor centrale folosite în [40], când porozitatea este considerată a fi $\phi = 0.5$, astfel încât valorile mai mari ale parametrului de alunecare pot fi luate în considerare până la valori de $S = 0.1$. Pentru astfel de valori ale parametrului de alunecare, o schimbare a fluxului este bine vizibilă.

Figurile 7.7 arată că structura fluxului de fluid se schimbă ușor odată cu creșterea parametrului de alunecare și, de asemenea, puterea valorii maxime absolute a funcției de curent scade

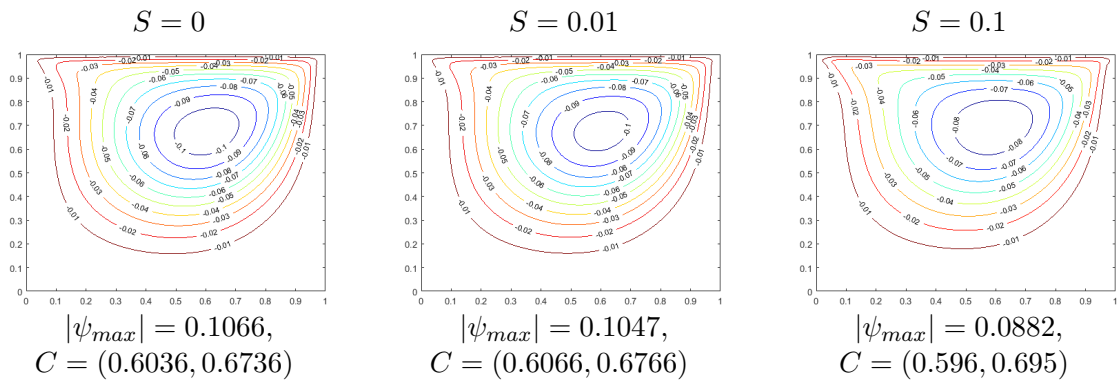


Figura 7.7: Linii de curent a curgerii unui fluid într-un mediu poros cu porozitatea $\phi = 0.5$ calculat prin DRBEM pentru un parametru de alunecare de $S = 0, 0.001, 0.01$.

pe măsură ce parametru de alunecare crește. Acest comportament este în acord cu semnificația fizică a parametrului.

Concluzii

Această teză studiază problemele cu valori la frontieră de tip mixt (Dirichlet-Neumann, Dirichlet-Robin) pentru diverse sisteme eliptice în mecanica fluidelor și teoria mediilor poroase, începând cu analiza în cadrul Euclidian, continuând studiul pe varietății Riemanniene compacte și luând în considerare în cele din urmă unele rezultate numerice referitoare la o problemă la frontieră specială cu condiții mixte.

Începem cu câteva observații introductive despre setările geometrice și funcționale de care avem nevoie în această teză. Ca unul dintre primele rezultate originale, considerăm conexiunea (teorema 1.3.3) între operatorii urmă netangențial și Gagliardo (Lema 1.3.1 și Lema 1.3.2). Ulterior, se prezintă conexiunea (Teorema 1.5.5) între operatorul de derivare conormal netangențial (Ecuația 1.5.4), operatorul de derivare generalizat (Definiția 1.5.5) și operatorul de derivare canonic (Definiția 1.5.3).

În capitolul următor, se definesc operatorii potențiali asociați sistemului Brinkman și se obțin câteva proprietăți de mapare a operatorului potențial Newtonian (Lema 2.2.1), al operatorului potențial de simplu strat (Lema 2.3.2 și Teorema 2.3.3), al operatorului potențial de dublu strat (Lema 2.3.4 și Teorema 2.3.5) și relațiile de salt între ele (teorema 2.4.2).

Având rezultatele menționate mai sus, următorul capitol începe cu analiza anumitor probleme la frontieră în cadrul Euclidian \mathbb{R}^n , cu $n \geq 3$. Pentru a extinde problema la frontieră mixtă Dirichlet-Neumann la spațiile Sobolev cu baza în L^p , considerăm mai întâi că datele limită aparțin spațiilor Sobolev cu baza în L^2 (Teorema 3.1.2) și introducem un operator Dirichlet-to-Neumann (Lema 3.1.3) care furnizează extensia dorită în Teorema 3.1.4. În cele din urmă, putem obține rezultatul de bine-punerea problemei mixte pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman (Teorema 3.2.1).

Capitolul următor consideră o structură similară cu cea anterioară, dar studiază problemele la frontieră în două dimensiuni $n = 2$, bazată în principal pe o combinație a unei abordări potențiale cu o abordare variațională. Coercivitatea potențialelor de strat asociate duce la bine-punerea problemei variaționale legate de problema Dirichlet-Neumann mixtă pentru sistemul Brinkman. Mergând mai departe demonstrăm solvabilitatea sistemului neliniar Darcy-Forchheimer-Brinkman cu condițiile mixte Dirichlet-Robin (Teorema 4.3.1).

În a doua parte a acestei teze, avem în vedere probleme la frontieră pentru sistemele Stokes, Oseen și Navier-Stokes pe varietăți Riemanniene compacte. Vă prezentăm câteva rezultate originale ale invertisabilității și compactității operatorilor potențiali de strat în Teorema 5.2.2 și Teorema 5.2.3. Pentru a obține un rezultat de bine-punere pentru sistemul Navier-Stokes pe varietăți Riemanniene compacte (Teorema 6.2.1), considerăm problema Dirichlet-Neumann mixtă pentru sistemul Stokes (Teorema 6.1.4), trecând la sistemul Oseen (Teorema 6.1.6) și, în final, aplicând o teoremă a punctului fix, obținem rezultatul dorit.

Ultima parte a acestei teze prezintă metode și rezultate numerice, care corespund rezultatelor de bine-punerea problemelor obținute în această teză. Rezultatele oferite de metodele folosite aici sunt comparate cu rezultatele existente în literatura de specialitate. Mai mult, vom discuta câteva rezultate numerice pentru problema cavității antrenate de mișcarea unui perete pentru sistemul Darcy-Forchheimer-Brinkman, cu condiții la frontieră Dirichlet și Dirichlet-Robin.

Bibliografie - listă selectivă

- [1] T. A. AbdelMigid, K. M. Saqr, M. A. Kotb, and A. A. Aboelfarag. Revisiting the lid-driven cavity flow problem: Review and new steady state benchmarking results using GPU accelerated code. *Alexandria Engineering Journal*, 56(1):123 – 135, 2017. 57
- [2] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Pure Appl. Math. Academic Press, 2 edition, 2003. 13
- [3] M. S. Agranovich. Mixed problems in a Lipschitz domain for strongly elliptic second-order systems. *Functional Analysis and Its Applications*, 45(2):81, Jun 2011. 52
- [4] M. S. Agranovich. *Sobolev Spaces, their Generalizations and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains*. Springer, 2015. 13, 20
- [5] C. Amrouche and M. Rodríguez-Bellido. Stationary Stokes, Oseen and Navier–Stokes equations with singular data. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 199(2), 2011. 4
- [6] C. Bacuta, M. E. Hassell, G. C. Hsiao, and F.-J. Sayas. Boundary Integral Solvers for an Evolutionary Exterior Stokes Problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 53(3):1370–1392, 2015. 4
- [7] H. Begehr and G. C. Hsiao. Nonlinear boundary value problems of Riemann-Hilbert type. *Contemp. Math.*, pages 139–153, 1982. 4
- [8] A. Behzadan and M. Holst. Multiplication in sobolev spaces, revisited. *arXiv preprint arXiv:1512.07379*, 2015. 11, 13
- [9] C. A. Brebbia, J.C.F. Telles, and L. C. Wrobel. *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 1984. 8, 61
- [10] K. Brewster, D. Mitrea, I. Mitrea, and M. Mitrea. Extending Sobolev functions with partially vanishing traces from locally (ε, δ) -domains and applications to mixed boundary problems. *J. Funct. Anal.*, 266(7):4314–4421, 2014. 52
- [11] R. M. Brown. The Mixed Problem for Laplace’s Equation in a Class of Lipschitz Domains. *Comm. Partial Diff. Eqns*, 19:1217–1233, 1994. 4, 11, 12, 13, 30
- [12] R. M. Brown and I. Mitrea. The mixed problem for the Lamé system in a class of Lipschitz domains. *J. Differential Equations*, 246(7):2577 – 2589, 2009. 4, 13
- [13] R. M. Brown, I. Mitrea, M. Mitrea, and M. Wright. Mixed boundary value problems for the Stokes system. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(3):1211–1230, 2010. 4, 11, 29
- [14] O. R. Burggraf. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. *J. Fluid Mech.*, 24(1):113–151, 1966. 8
- [15] F. Cakoni, G. C. Hsiao, and W. L. Wendland. On the boundary integral equation method for a mixed boundary value problem of the biharmonic equation. *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, 50(7-11):681–696, 2005. 4
- [16] T. K. Chang and H. J. Choe. Mixed boundary value problem of Laplace equation in a bounded Lipschitz domain. *J. Math. Anal. Appl.*, 337(2):794 – 807, 2008. 48, 52
- [17] O. Chkadua, S. E. Mikhailov, and D. Natroshvili. Analysis of segregated boundary-domain integral equations for variable-coefficient problems with cracks. *Numer. Methods for Partial Differential Equations*, 27(1):121–140, 2011. 5
- [18] O. Chkadua, S. E. Mikhailov, and D. Natroshvili. Analysis of direct segregated boundary-domain integral equations for variable-coefficient mixed bvps in exterior domains. *Anal. Appl.*, 11(04):1350006, 2013. 5
- [19] O. Chkadua, S.E. Mikhailov, and D. Natroshvili. Analysis of direct boundary-domain integral equations for a mixed BVP with variable coefficient, I: Equivalence and invertibility. *J. Int. Equ. Appl.*, 21(4):499–543, 12 2009. 5
- [20] M. Costabel. Boundary integral operators on Lipschitz domains: Elementary results. *SIAM J. Math. Anal.*, 19:613–0, 1988. 15, 18, 20, 47

- [21] M. Costabel and E. Stephan. Boundary integral equations for mixed boundary value problems in polygonal domains and Galerkin approximation. *Banach Center Publ.*, 15(1):175–251, 1985. 4
- [22] B. E. J. Dahlberg, C. E. Kenig, and G. C. Verchota. The Dirichlet problem for the biharmonic equation in a Lipschitz domain. *Annales de l’institut Fourier*, 36, 1986. 4
- [23] B. E. J. Dahlberg, C. E. Kenig, and G. C. Verchota. Boundary value problems for the systems of elastostatics in Lipschitz domains. *Duke Math. J.*, 57(3):795–818, 1988. 4
- [24] B. E. J. Dahlberg and C.E. Kenig. L^p estimates for the three-dimensional systems of elastostatics on Lipschitz domains. *Analysis and Partial Differential Equations, Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, Dekker, New York, 122, 03 1990. 4
- [25] M. Dindoš and M. Mitrea. The stationary Navier-Stokes system in nonsmooth manifolds: the Poisson problem in Lipschitz and C^1 domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 174:1–47, 2004. 7, 11, 13, 23, 25, 46, 47, 48, 49, 50
- [26] D. G. Ebin and J. Marsden. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid. *Ann. of Math.*, 92(1):102–163, 1970. 7, 36, 51
- [27] E. Erturk. Discussion on driven cavity flow. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 60:275–294, 2009. 61
- [28] E. Erturk, T. C. Corke, and C. Gokcol. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 48:747–774, 2005. 8
- [29] E. Fabes, O. Mendez, and M. Mitrea. Boundary layers on Sobolev-Besov spaces and Poisson’s equation for the Laplacian in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 159:323–368, 1998. 14
- [30] E. B. Fabes, C. E. Kenig, and G. C. Verchota. The Dirichlet problem for the Stokes system on Lipschitz domains. *Duke Math. J.*, 57(3):769–793, 12 1988. 4, 23, 25, 36
- [31] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, 48, 1982. 4, 8, 57, 61, 62, 63
- [32] V. Gol’dshstein, I. Mitrea, and M. Mitrea. Hodge decompositions with mixed boundary conditions and applications to partial differential equations on Lipschitz manifolds. *J. Math. Sci.*, 172(3):347–400, Jan 2011. 44
- [33] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. SIAM, 2011. 12
- [34] T. Groşan, M. Kohr, and W. L. Wendland. Dirichlet problem for a nonlinear generalized Darcy-Forchheimer-Brinkman system in Lipschitz domains. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 38(17):3615–3628, 2015. 40
- [35] S. Gümğüm and M. Tezer-Sezgin. DRBEM solution of natural convection flow of nanofluids with a heat source. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 34:727–737, 2010. 61
- [36] M. M. Gupta and J. C. Kalita. A new paradigm for solving Navier-Stokes equations: streamfunction-velocity formulation. *J. Comput. Phys.*, 207:52–68, 2005. 8
- [37] **R. Gutt**. BIE and BEM approach for the mixed Dirichlet-Robin boundary value problem for the nonlinear Darcy-Forchheimer-Brinkman system. *submitted, arXiv:1810.09543*. 6, 9, 36, 37, 39, 40, 57, 58, 61, 64
- [38] **R. Gutt**. Mixed boundary value problems for the Stokes system on compact Riemannian manifolds. *Mathematica (Cluj)*, 60 (83)(2):152–165, 2018. 7, 8, 43, 48, 50, 51, 53
- [39] **R. Gutt**. Mixed boundary value problems for the Navier-Stokes system on compact Riemannian manifolds. *submitted*, 2019. 8, 54
- [40] **R. Gutt** and T. Groşan. On the lid-driven problem in a porous cavity. A theoretical and numerical approach. *Appl. Math. Comput.*, 266:1070–1082, 09 2015, (**ISI**). 6, 9, 28, 36, 57, 58, 59, 61, 64, 65
- [41] **R. Gutt**, M. Kohr, S. E. Mikhailov, and W. L. Wendland. On the mixed problem for the semilinear Darcy-Forchheimer-Brinkman PDE system in Besov spaces on creased Lipschitz domains. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2017, (**ISI**). 5, 6, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34
- [42] **R. Gutt**, M. Kohr, C. Pinteau, and W. L. Wendland. On the transmission problems for the Oseen and Brinkman systems on Lipschitz domains in compact Riemannian manifolds. *Math. Nachr.*, 289(4):471–484, 2016, (**ISI**). 47, 51, 53
- [43] Q. He and X.-P. Wang. Numerical study of the effect of Navier slip on the driven cavity flow. *ZAMM · Z. Angew. Math. Mech.*, 89:857–868, 2009. 9, 58, 65
- [44] K. A. Hoffmann and S. T. Chiang. *Computational Fluid Mechanics*. Wichita, fourth edition edition, 2000. 8, 9, 57, 58, 60, 63
- [45] G. C. Hsiao and R. Rainer Kress. On an integral equation for the two-dimensional exterior Stokes problem. *Appl. Numer. Math.*, 1(1), 1985. 36

- [46] G. S. Hsiao and W. L. Wendland. *Boundary Integral Equations: Variational Methods*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2008. 4, 14, 16, 20, 23, 24, 25, 37
- [47] D. S. Jerison and C. Kenig. The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 130:161–219, 1995. 14, 15, 45, 47
- [48] J. T. Katsikadelis. *The Boundary Element Method for Engineers and Scientists. Theory and Applications*. Academic Press, 2 edition, 2016. 8
- [49] M. Kohr, M. Lanza de Cristoforis, S. E. Mikhailov, and W. L. Wendland. Integral potential method for a transmission problem with Lipschitz interface in \mathbb{R}^3 for the Stokes and Darcy–Forchheimer–Brinkman PDE systems. *ZAMP*, 67(5):116, 2016. 5, 23, 25
- [50] M. Kohr, M. Lanza de Cristoforis, and W. L. Wendland. Nonlinear Neumann-Transmission problems for Stokes and Brinkman equations on Euclidean Lipschitz domains. *Potential Anal.*, 38:1123–1171, 05 2013. 5, 11, 15, 16, 20, 21, 23, 25, 53
- [51] M. Kohr, M. Lanza de Cristoforis, and W. L. Wendland. Boundary value problems of Robin type for the Brinkman and Darcy-Forchheimer-Brinkman systems in Lipschitz domains. *J. Math. Fluid Mech.*, 16:595–630, 09 2014. 4, 20, 29, 30, 34, 40, 41
- [52] M. Kohr, M. Lanza de Cristoforis, and W. L. Wendland. Nonlinear Darcy-Forchheimer-Brinkman system with linear Robin boundary conditions in Lipschitz domains. *Cambridge Scientific Publishers, Proceedings of the 9th ISAAC Congress*, 2014. 40, 41
- [53] M. Kohr, M. Lanza de Cristoforis, and W. L. Wendland. Poisson problems for semilinear Brinkman systems on Lipschitz domains in \mathbb{R}^3 . *Z. Angew. Math. Phys.*, 66(3):833–864, 2015. 5, 18, 39, 46
- [54] M. Kohr, M. Lanza de Cristoforis, and W. L. Wendland. On the Robin-Transmission boundary value problems for the nonlinear Darcy–Forchheimer–Brinkman and Navier–Stokes systems. *J. Math. Fluid Mech.*, 18(2):293–329, 2016. 41
- [55] M. Kohr, S. E. Mikhailov, and W. L. Wendland. Transmission problems for the Navier–Stokes and Darcy–Forchheimer–Brinkman systems in Lipschitz domains on compact Riemannian manifolds. *J. Math. Fluid Mech.*, pages 1–36, 2016. 7, 51, 53
- [56] M. Kohr, S. E. Mikhailov, and W. L. Wendland. Potentials and transmission problems in weighted Sobolev spaces for anisotropic Stokes and Navier-Stokes systems with l^∞ strongly elliptic coefficient tensor. *arXiv:1902.09739*, 2019. 5
- [57] M. Kohr, C. Pinteá, and W. L. Wendland. Brinkman-type Operators on Riemannian Manifolds: Transmission problems in Lipschitz and C^1 Domains. *Potential Anal.*, 32(3):229–273, 2010. 7, 48, 49
- [58] M. Kohr, C. Pinteá, and W. L. Wendland. Layer potential analysis for pseudodifferential matrix operators in Lipschitz domains on compact Riemannian manifolds: Applications to pseudodifferential Brinkman operators. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2013(19):4499, 2013. 7, 47, 48, 50, 51
- [59] M. Kohr, C. Pinteá, and W. L. Wendland. Poisson-Transmission problems for L^∞ -Perturbations of the Stokes system on Lipschitz domains in compact Riemannian manifolds. *J. Dyn. Diff. Equat.*, 27(3):823–839, 2015. 47, 48
- [60] M. Kohr and I. Pop. *Viscous Incompressible Flow for Low Reynolds Numbers*. WIT Press, Southampton (UK), Boston, 2004. 8, 20, 21, 51, 57, 60
- [61] M. Kohr and W. L. Wendland. Variational boundary integral equations for the Stokes system. *Appl. Anal.*, 85:1343–1372, 11 2006. 4, 6, 36, 37, 38, 48, 52
- [62] M. Kohr and W. L. Wendland. Layer potentials and Poisson problems for the nonsmooth coefficient Brinkman system in Sobolev and Besov spaces. *J. Math. Fluid Mech.*, 20(4):1921–1965, Dec 2018. 7, 12, 48, 51, 52
- [63] M. Kohr and W. L. Wendland. Variational approach for the Stokes and Navier–Stokes systems with nonsmooth coefficients in Lipschitz domains on compact Riemannian manifolds. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 57(6):165, Oct 2018. 7, 48, 52
- [64] M. Kohr, W. L. Wendland, and G. P. Raja Sekhar. Boundary integral equations for two-dimensional low Reynolds number flow past a porous body. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 32(8):922–962, 2009. 36
- [65] M. Kohr, M. and Lanza de Cristoforis, S. E. Mikhailov, and W. L. Wendland. Integral potential method for a transmission problem with Lipschitz interface in \mathbb{R}^3 for the Stokes and Darcy–Forchheimer–Brinkman PDE systems. *Z. Angew. Math. Phys.*, 67(5):116, Sep 2016. 39, 41
- [66] J. R. Koseff and R. L. Street. The lid-driven cavity flow: A synthesis of qualitative and quantitative observations. *ASME J. Fluid Eng.*, 106:390–398, 1984. 8
- [67] J. R. Koseff and R. L. Street. Visualisation studies of a shear driven three-dimensional recirculating flow. *ASME J. Fluid Eng.*, 106:21–29, 1984. 8

- [68] H. B. Jr. Lawson and M.-L. Michelsohn. *Spin Geometry*. Princeton University Press, Princeton, 1989. 46
- [69] J. M. Lee. Introduction to smooth manifolds. 44
- [70] J. M. Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, volume 176. Springer Science & Business Media, 2006. 44
- [71] J. L. Lions, R. Temam, and S. Wang. New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications. *Nonlinearity*, 5(2):237, 1992. 7, 36, 51
- [72] C. H. Marchi, R. Suero, and L. K. Araki. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024×1024 grid. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.*, 31:186–198, 2009. 61
- [73] V. Maz'ya and J. Rossmann. L^p estimates of solutions to mixed boundary value problems for the Stokes system in polyhedral domains. *Math. Nachr.*, 280(7):751–793, 2007. 52
- [74] A. L. Mazzucato and V. Nistor. Well-posedness and regularity for the elasticity equation with mixed boundary conditions on polyhedral domains and domains with cracks. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 195(1):25–73, Jan 2010. 52
- [75] M. McCracken. The resolvent problem for the Stokes equations on halfspace in L_p . *SIAM J. Math. Anal.*, 12, 03 1981. 21
- [76] W. C. H. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge university press, 2000. 4, 6, 13, 14, 20, 36, 37, 38, 48, 52
- [77] D. Medkova. Bounded solutions of the Dirichlet problem for the Stokes resolvent system. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 61(12):1689–1715, 2016. 4
- [78] D. Medkova. L^q -solution of the Robin problem for the Oseen system. *Acta Appl. Math.*, 142, 4 2016. 15
- [79] S. E. Mikhailov. Direct localized boundary-domain integro-differential formulations for physically nonlinear elasticity of inhomogeneous body. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 29(11):1008–1015, 2005. 15
- [80] S. E. Mikhailov. Analysis of united boundary-domain integro-differential and integral equations for a mixed BVP with variable coefficient. *Math. Methods Appl. Sci.*, 29(6):715–739, 2006. 5
- [81] S. E. Mikhailov. Traces, extensions and co-normal derivatives for elliptic systems on Lipschitz domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 378:324–342, 2011. 15, 16, 17, 18, 47
- [82] S. E. Mikhailov. Solution regularity and co-normal derivatives for elliptic systems with non-smooth coefficients on Lipschitz domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 400(1):48–67, 2013. 18
- [83] I. Mitrea and M. Mitrea. The Poisson problem with mixed boundary conditions in Sobolev and Besov spaces in non-smooth domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(9):4143–4182, 2007. 4, 11, 12, 13, 30, 31, 52
- [84] M. Mitrea and M. Taylor. Potential Theory on Lipschitz Domains in Riemannian Manifolds: Sobolev–Besov Space Results and the Poisson Problem. *J. Funct. Anal.*, 176(1):1 – 79, 2000. 14, 45, 47
- [85] M. Mitrea and M. Taylor. Navier-Stokes equations on Lipschitz domains in Riemannian manifolds. *Math. Ann.*, 321:955–987, 2001. 4, 6, 7, 23, 25, 28, 29, 36, 43, 46, 47, 48, 49, 50
- [86] M. Mitrea and M. Wright. Boundary Value Problems for the Stokes System in Arbitrary Lipschitz Domains. *Astérisque*, 344:viii–241, 2012. 4, 6, 12, 15, 18, 20, 23, 24, 25, 28, 29, 37, 45, 47, 50, 51
- [87] D. A. Nield and A. Bejan. *Convection in Porous Media*. Springer, New York, third edition, 2013. 3, 4, 8, 34, 57, 58, 60, 65
- [88] K. A. Ott, S. Kim, and R. M. Brown. The Green function for the mixed problem for the linear Stokes system in domains in the plane. *Math. Nachr.*, 288, 03 2015. 4, 12
- [89] P. W. Partridge, C. A. Brebbia, and L. C. Wrobel. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. International Series on Computational Engineering. Springer Netherlands, first edition, 1991. 8, 61
- [90] J. Pipher and G. Verchota. A maximum principle for biharmonic functions in Lipschitz and C^1 domains. *Comment. Math. Helv.*, 68, 1993. 4
- [91] H. Power. The completed double layer boundary integral equation method for two-dimensional Stokes flow. *IMA J. Appl. Math.*, 51(2), 1993. 36
- [92] H. Power and G. Miranda. Second kind integral equation formulation of Stokes flows past a particle of arbitrary shape. *SIAM J. Appl. Math.*, 47(4):689–698, 1987. 36
- [93] R. Precup. Two positive nontrivial solutions for a class of semilinear elliptic variational systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 373(1):138 – 146, 2011. 4
- [94] R. Precup. *Linear and semilinear partial differential equations. An introduction*. De Gruyter Textbook. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2013. 13
- [95] Z. Rek and L. Škerget. Boundary element method for steady 2D high-Reynolds-number flow. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 19, 1994. 61, 62, 63

- [96] R. Russo and C. G. Simader. A note on the existence of solutions to the Oseen system in Lipschitz domains. *J. Math. Fluid Mech.*, 8(1):64–76, 2006. 54
- [97] R. Russo and A. Tartaglione. On the Oseen and Navier-Stokes systems with a slip boundary condition. *Appl. Math. Letters*, 29:674–678, 2009. 54
- [98] M. Sahin and R. G. Owens. A novel fully-implicit finite volume method applied to the lid-driven cavity flow problem. Part ii: Linear stability analysis. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 42:79–88, 2003. 8
- [99] R. Schreiber and H. B. Keller. Driven cavity flows by efficient numerical techniques. *J. Comput. Phys.*, 49(2):310 – 333, 1983. 8
- [100] Z. Shen. Resolvent estimates in L^p for the Stokes operator in Lipschitz domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 205, 08 2012. 6, 23, 25, 29
- [101] Z. W. Shen. A note on the Dirichlet problem for the Stokes system in Lipschitz domains. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123, 03 1995. 4
- [102] M. Sofonea and F. Pătrulescu. Analysis of a history-dependent frictionless contact problem. *Math. Mech. Solids*, 18(4):409–430, 2013. 65
- [103] M. Sofonea, F. Pătrulescu, and A. Farcaş. A viscoplastic contact problem with normal compliance, unilateral constraint and memory term. *Appl. Math. Optim.*, 69(2):175–198, 2014. 65
- [104] A. Tartaglione. On the Stokes and Oseen problems with singular data. *J. Math. Fluid Mech.*, 16(2):407–417, 2014. 54
- [105] A. E. Taylor. *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley, New York, 1967. 45
- [106] J. L. Taylor, K. A. Ott, and R. M. Brown. The mixed problem in Lipschitz domains with general decompositions of the boundary. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 365, 12 2012. 4
- [107] M. Taylor. *Partial Differential Equations I*, volume 1. Springer-Verlag New York, 1996. 45, 46
- [108] R. Temam and S.H. Wang. Inertial forms of Navier-Stokes equations on the sphere. *J. Funct. Anal.*, 117(1):215 – 242, 1993. 7, 51
- [109] R. Temam and M. Ziane. Navier-Stokes equations in thin spherical domains. in: Optimization methods in partial differential equations. Contemporary mathematics. *Amer. Math. Soc., Providence*, 209(19):281–314, 1997. 4, 7, 51
- [110] H. Triebel. *Theory of Function Spaces*. Birkhäuser, Basel, 1938. 11, 43, 45
- [111] W. Varnhorn. *The Stokes Equations*. Akademie Verlag, Berlin, 1994. 20
- [112] R. Wang and Y. Chen. *An Introduction to Differential Geometry and Topology in Mathematical Physics*. World Scientific, 1998. 44
- [113] J.T. Wloka, B. Rowley, and B. Lawruk. *Boundary Value Problems for Elliptic Systems*. Cambridge University Press, 1995. 11, 13, 14, 43, 44