Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, Romania

Şcoala Doctorală de Matematică şi Informatică

Teză de Doctorat - Rezumat

CONTRIBUŢII LA TEORIA PUNCTULUI FIX PENTRU OPERATORI UNIVOCI ŞI MULTIVOCI DEFINIŢI PE SPAŢII METRICE GENERALIZATE

Coordonator Ştiinţific

Prof. Dr. Adrian-Olimpiu Petruşel

Student Doctorand

Cristian-Daniel Alecsa

Cluj-Napoca, Romania

2019

Cuprins

Introducere **4**

1 Preliminarii **10**

1.1 Noţiuni calitative pentru operatori univoci şi multivoci . . . 10
1.2 Operatori de tip Presić . . . 15
1.3 Spaţii metrice b-rectangulare . . . 19
1.4 Spaţii metrice de tip con peste algebre Banach . . . 20
1.5 Spaţii metrice convexe . . . 23

2 Rezultate de punct fix pentru contracţii univoce în spaţii metrice generalizate **27**

2.1 Rezultate pentru operatori pentru operatori univoci de tip Istrăţescu-Presić şi Presić definţi prin intermediul funcţiilor de simulare . . . 27
2.2 Contracţii generalizate, puncte fixe şi spaţii b-rectangulare . . . 35
2.3 Şiruri de contracţii în spaţii metrice de tip con peste algebre Banach. Aplicaţii la sisteme neliniare de ecuaţii şi la sisteme de ecuaţii diferenţiale. . . . 40

3 Rezultate de punct fix pentru contracţii multivoce generalizate **48**

3.1 Rezultate de punct fix pentru operatori multivoci. Tehnica distanţelor de alterare. . . . 48
3.2 Principii extinse de punct fix pentru contracţii multivoce de tip Ćirić . . . 52

4 Scheme iterative pentru contracţii generalizate în spaţii metrice complete **55**

4.1 Analiză de punct fix pentru contracţii generalizate, prin intermediul schemei iterative de tip Ishikawa . . . 55
4.2 Proprietăţi calitative şi rezultate de stabilitate pentru algoritmul Mann pentru operatori multivoci . . . 58
4.3 Rezultate de convergenţă pentru scheme iterative în contextul spaţiilor metrice convexe . . . 62

Bibliografie **66**

<u>Cuvinte cheie</u>: rezultate de punct fix, spaţii metrice convexe, iteraţia Picard, iteraţia Mann, operatori Ćirić, operatori Presić, contracţii convexe, perturbaţii admisibile, dependenţă de date, operatori multivoci.

Introducere

Teoria punctului fix poate fi considerată ca unul dintre cele mai dinamice domenii de cercetare ale matematicii, care are multe aplicaţii în diferite domenii ştiinţifice, precum fizica, economia, ingineria, informatica etc. Teoria operatorilor univoci şi multivoci poate fi considerată ca o parte a domeniului matematic al analizei neliniare, aceasta din urmă fiind un domeniu de activitate rodnic, cu o dezvoltare foarte dinamică. Reamintim mai întâi o scurtă descriere a câtorva idei principale ale teoriei punctului fix, care sunt legate de această teză de doctorat:

Stefan Banach, în [30], a demonstrat că orice contracţie pe un spaţiu metric complet admite un punct fix unic, adică există şi este unic $x^* \in X$, astfel încât $f(x^*) = x^*$. Principiul contracţiei al lui Banach a fost extins pentru prima dată în [126] de către S.B. Presić pentru operatorii definiţi pe un produs cartezian de mulţimi. În [103], M. Păcurar a obţinut un rezultat de convergenţă în ceea ce priveşte operatorii Kannan Presić, care reprezintă o generalizare interesantă a contracţiilor de tip Presić. În acelaşi timp, I.A. Rus [140] şi M. Păcurar [104] au prezentat câteva rezultate de punct fix şi punct fix comun printr-o metodă iterativă multi-pas. În acest fel, domeniul teoriei punctului fix a fost conectat la cel aparţinând analizei numerice.

Interesant, în [38], A. Branciari a introdus o nouă funcţională de tip metric, în care inegalitatea triunghiului este înlocuită de o inegalitate care implică patru elemente diferite. Acesta se numeşte spaţiu metric rectangular sau spaţiu metric generalizat. Totodată (a se vedea [67]) s-a dovedit că şirurile convergente şi şirurile Cauchy pot fi introduse într-un mod similar precum în spaţiile metrice obişnuite. Acest tip de spaţii topologice sunt decisive datorită faptului că generalizează spaţiile metrice. În cele din urmă, acest lucru a condus la o creştere a cercetării privind rezultatele de punct fix în stabilirea diferitelor tipuri de spaţii metrice generalizate.

Acum, ne îndreptăm atenţia asupra lucrărilor lui F.F. Bonsall [35] şi S.B. Nadler Jr. [97], care au studiat unele rezultate de stabilitate în ceea ce priveşte şirurile de contracţii, care sunt definite pe un spaţiu metric (X, d). O extensie interesantă a rezultatelor anterioare a fost făcută de M. Păcurar [105], care a elaborat rezultate de convergenţă punctuale şi uniforme, pentru şirurile de puncte fixe ale aşa numitelor 'aproape contracţii'. Pe de altă parte, L. Barbet şi K. Nachi [31] au considerat câteva rezultate de convergenţă pentru punctele fixe ale funcţiilor de tip contracţie într-un spaţiu metric (X, d), dar pentru operatori definiţi pe submulţimi şi nu pe întreg spaţiul metric (X, d).

Nu în ultimul rând, încheiem această introducere cu lucrarea lui W. Takahashi (a se vedea [157]), care a introdus un nou concept de convexitate iîn spaţii metrice şi a dovedit că toate spaţiile convexe normate şi submulţimile lor convexe sunt tot spaţii metrice convexe. Mai departe, el a oferit câteva exemple de spaţii metrice convexe. În acelaşi timp, au fost studiate diferite tipuri de contracţii în cadrul spaţiilor metrice convexe.

Teza de doctorat este împarţită în patru capitole, fiecare din acestea conţinand câteva secţiuni şi subsecţiuni principale.

Capitolul 1 : **Preliminarii**.

Scopul acestui capitol este de a aminti căteva concepte importante care vor fi utilizate pe parcursul tezei. Terminologia utilizată se referă la noţiunile de bază ale operatorilor univoci de tip Presić, spaţii metrice convexe, spaţii metrice b-rectangulare, spaţii metrice de tip con peste algebre Banach şi noţiuni calitative privind operatori univoci şi, de asemenea, operatori multivoci. Acest capitol conţine următoarele secţiuni:

• *Noţiuni calitative pentru operatori univoci şi multivoci*:

În această secţiune reamintim cele mai importante concepte referitoare la punctele fixe şi la punctele fixe stricte ale operatorilor univoci, ale stabilităţii Ulam-Hyers, bine punerea problemei şi concepte referitoare la

convergenţa iteraţiilor de punct fix. Articolele de bază referitoare la aceste concepte sunt următoarele:[32], [53], [79], [80], [96], [112], [115], [116], [117], [120], [138], [139].
• *Operatori de tip Presić*:
În această secţiune prezentăm câteva noţiuni referitoare la contracţiile generalizate de tip Presić, introduse printr-o abordare de tip metric. Teoria din spatele acestei abordări se bazează pe convergenţa unei scheme iterative cu k paşi şi pe dependenţa de date a punctelor fixe ale operatorilor Presić. Cele mai importante referinţe sunt următoarele: [76], [37], [148], [140], [104], [47].
• *Spaţii metrice b-rectangulare*:
În această secţiune descriem contracţiile generalizate definite în cadrul spaţiilor metrice b-rectangulare, împreună cu unele proprietăţi topologice şi metrice ale acestor spaţii. De asemenea, amintim pe scurt ideea spaţiilor b metrice şi a spaţiilor metrice rectangulare. Cele mai importante lucrări referitoare la aceste spaţii metrice generalizate sunt următoarele: [52], [67], [136].
• *Spaţii metrice de tip con peste algebre Banach*: Această secţiune priveşte convergenţa punctuală şi convergenţa uniformă pentru o familie de funcţii definite pe submulţimi ale unor spaţii metrice de tip con peste algebre Banach. De asemenea, prezentăm ideea echicontinuităţii unei familii de funcţii peste aceste spaţii generalizate de tip metric. Cele mai importante referinţe utilizate sunt următoarele: [35], [97], [105].
• *Spaţii metrice convexe*: Această secţiune conţine căteva rezultate de punct fix peste spaţii metrice convexe pentru contracţii generalizate univoce. Tot în această secţiune, vom prezenta câteva proprietăţi de bază ale spaţiilor metrice convexe ¸ Unele articole ce au fost folosite în această secţiune sunt următoarele: [34], [51], [55], [91], [92], [93], [159].

Capitolul 2: **Rezultate de punct fix pentru contracţii univoce în spaţii metrice generalizate**. Scopul acestui capitol este de a prezenta unele teoreme pentru existenţa şi unicitatea punctelor fixe, respectiv rezultate ale dependenţei de date pentru contracţii generalizate de tip Presić pe spaţii metrice complete. De asemenea, oferim câteva rezultate de punct fix pentru funcţii de tip contracţie generalizată în spaţii metrice b-rectangulare. Totodată, prezentăm ideea convergenţei şirurilor de puncte fixe ale contracţiilor definite pe spaţii metrice de tip con peste algebre Banach. În cele din urmă, oferim câteva aplicaţii referitoare la sisteme de neliniare de ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale. Secţiunile acestui capitol sunt:
• *Rezultate pentru operatori pentru operatori univoci de tip Istrăţescu-Presić şi Presić definiţi prin intermediul funcţiilor de simulare* :
În această secţiune, prezentăm câteva rezultate de punct fix pentru operatori univoci de tip Presić. Vom introduce noi tipuri de operatori care generalizează bine-cunoscutele contracţii Presić şi contracţii convexe de ordinul doi de tip Istrăţescu. Contribuţiile noastre originale ale acestei secţiuni sunt următoarele:
- [Definiţia 2.1.1] şi [Definiţia 2.1.2] în care introducem noi tipuri de operatori Presić, şi anume contracţii convexe Presić de speţa întâi şi, respectiv, de speţa a doua.
- [Teorema 2.1.4], care este un rezultat de existenţă şi unicitate ale punctului fix pentru contracţii convexe de tip Presić de prima speţă, respectiv de a doua speţă.
- [Corolarul 2.1.5], care este o consecinţă a unui rezultat de existenţă şi unicitate pentru contracţii convexe de ordinul doi de tip Presić.
- [Teorema 2.1.7], care este un rezultat al dependenţei de date, privitor la punctul fix al unei contracţii convexe de tip Presić şi un punct fix al unei funcţii definite pe un produs cartezian al unui spaţiu metric complet.
- [Exemplul 2.1.9], [Exemplul 2.1.10], [Exemplul 2.1.11] în care prezentăm câteva exemple netriviale de tip Presić, contracţii convexe de primul şi, respectiv, al doilea tip.
- [Definiţia 2.1.12] în care introducem ideea unei funcţii de k-simulare.
- [Exemplul 2.1.13], [Exemplul 2.1.14], [Exemplul 2.1.15], [Exemplul 2.1.16], [Exemplul 2.1.17], [Exemplul 2.1.18] în care oferim câteva exemple de funcţii de k-simulare, ce vor fi utilizate în pe parcursul tezei.
- [Definiţia 2.1.19], [Definiţia 2.1.20], [Definiţia 2.1.21], [Definiţia 2.1.22] în care introducem operatori univoci Presić, care se bazează pe ideea unei funcţii de k-simulare.
- [Teorema 2.1.23] care este principalul rezultat al celei de-a doua părţi a acestei secţiuni în care prezentăm un rezultat de existenţă şi unicitate pentru $P-(\mathcal{Z}, g)$ -contracţii.
- [Corolarul 2.1.25], [Corolarul 2.1.26], [Corolarul 2.1.27], [Corolarul 2.1.28], [Corolarul 2.1.29], [Corolarul 2.1.30] care sunt unele consecinţe ale rezultatului principal.
- [Exemplul 2.1.32], [Exemplul 2.1.33], [Exemplul 2.1.34] care validează corolarele deja menţionate mai sus.
• *Contracţii generalizate, puncte fixe şi spaţii b-rectangulare*:

În această secţiune prezentăm unele rezultate de existenţă şi unicitate pentru funcţii generalizate de tip contracţie în cadrul unui spaţiu b-metric rectangular complet, acesta din urmă fiind o generalizare naturală a spaţiilor binecunoscute b-metrice şi metrice rectangulare. Contribuţiile noastre originale din această secţiune sunt următoarele:
- [Teorema 2.2.1] care este un rezultat de existenţă al punctelor fixe ale unor contracţii generalizate.
- [Exemplul 2.2.3], în care este prezentat un exemplu de funcţie de tip contracţie generalizată într-un spaţiu b rectangular complet.
- [Exemplul 2.2.4] în care construim un exemplu de spaţiu metric b-rectangular care va fi utilizat în întreaga secţiune.
- [Exemplul 2.2.5], care este, de asemenea, un exemplu de funcţie de tip contracţie generalizată definită pe un spaţiu metric complet b-rectangular.
- [Lemma 2.2.7], care este un rezultat ce va fi utilizat în analiza funcţiilor expansive.
- [Teorema 2.2.9] care este al doilea rezultat de bază al acestei secţiuni, în care studiem existenţa unor puncte fixe privind funcţiile expansive.
- [Exemplul 2.2.10] care este un exemplu al cărui rol este să valideze teorema menţionată anterior.
- [Teorema 2.2.13] în care este prezentată existenţa unor puncte fixe pentru operatori de tip expansiv, în ipoteze adecvate privind contracţiile generalizate.
- [Exemplul 2.2.15] în care este prezentat un exemplu de funcţie expansivă definită pe un spaţiu b metric rectangular.

• *Siruri de contracţii în spaţii metrice de tip con peste algebre Banach. Aplicaţii la sisteme neliniare de ecuaţii şi la sisteme de ecuaţii diferenţiale*:
În această secţiune extindem conceptele de convergenţă de tip (G) şi (H) şi proprietăţi de continuitate ale funcţiilor care sunt definite pe un spaţiu metric de tip con peste o algebră Banach dată. Aici, ne validăm rezultatele teoretice prin unele aplicaţii legate de soluţiile sistemelor neliniare de ecuaţii şi de soluţiile sistemelor de ecuaţii diferenţiale. Principalele noastre contribuţii sunt următoarele rezultate:
- [Definiţia 2.3.1] în care extindem ideea de convergenţă punctuală a unui şir de operatori la cadrul spaţiilor metrice de tip con peste algebre Banach.
- [Definiţia 2.3.2] în care extindem ideea de convergenţă uniformă a unui şir de operatori la cadrul spaţiilor metrice de tip con peste algebre Banach.
- [Definiţia 2.3.3] şi [Definiţia 2.3.4] în care extindem ideea echicontinuităţii punctuale şi uniforme pentru o familie de funcţii definite pe spaţii metrice de tip con peste algebre Banach.
- [Exemplul 2.3.5] care este un exemplu de spaţiu metric complet de tip con peste o algebră Banach.
- [Exemplul 2.3.6] în care prezentăm un exemplu de şir de funcţii care converg uniform în spaţii metrice de tip con peste algebre Banach.
- [Exemplul 2.3.8] în care prezentăm un exemplu de şir de funcţii care sunt dotate cu convergenţă punctuală pe spaţii metrice de tip con peste algebre Banach.
- [Teorema 2.3.9] care este principalul rezultat al acestei secţiuni în care prezentăm convergenţa unui şir de puncte fixe în cadrul spaţiilor metrice de tip con, sub presupunerea că aceste elemente sunt puncte fixe pentru unii operatori care sunt înzestraţi cu convergenţă uniformă.
- [Teorema 2.3.10] în care prezentăm convergenţa unui şir de puncte fixe în cadrul spaţiilor metrice de tip con, sub ipoteza că aceste elemente sunt puncte fixe pentru unii operatori care sunt înzestraţi cu convergenţa punctuală .
- [Definiţia 2.3.11] şi [Definiţia 2.3.12] în care extindem conceptele de convergenţă (G) şi (H) la funcţii definite pe spaţii metrice de tip con peste algebre Banach.
- [Propoziţia 2.3.14] şi [Teorema 2.3.15] sunt legate de existenţa şi unicitatea limitei (G) - a unei familii de operatori.
- [Teorema 2.3.16] şi [Corolar 2.3.18] în care ne preocupă convergenţa unui şir de puncte fixe care aparţin unei familii de operatori care este înzestrată cu proprietatea (G).
- [Teorema 2.3.19] în care ne preocupă relaţia dintre convergenţa punctuală a unui şir de funcţii în contextul unui spaţiu metric de tip con şi echicontinuitatea familiei de funcţii.
- [Teorema 2.3.20], [Teorema 2.3.21], [Teorema 2.3.22] în care prezentăm câteva rezultate teoretice cu privire la limitele (H) şi (G) ale unei familii de operatori.
- [Teorema 2.3.24] în care prezentăm o aplicaţie pentru sisteme neliniare de ecuaţii.
- [Teorema 2.3.25] şi [Teorema 2.3.26] în care prezentăm o aplicaţie la sisteme de ecuaţii diferenţiale.

Capitolul 3: **Rezultate de punct fix pentru contracţii multivoce generalizate**.
Scopul acestui capitol este de a prezenta câteva rezultate de punct fix pentru operatori multivoci folosind ideea de alterare a distanţelor. În plus, prezentăm câteva principii extinse de punct fix şi pentru operatori Ćirić multivoci. Acest capitol conţine următoarele secţiuni:
• *Rezultate de punct fix pentru operatori multivoci. Tehnica distanţelor de alterare*:
În această secţiune avem în vedere unele rezultate de existenţă şi unicitate pentru punctele fixe ale operatorilor multivoci, care sunt introduse prin tehnica modificării distanţelor. Contribuţiile noastre originale sunt următoarele:
- [Teorema 3.1.1] în care avem în vedere câteva rezultate fixe pentru operatorii multivoci, care sunt înzestrate cu o condiţie metrică, aceasta din urmă fiind bazată pe o funcţie de tip comparaţie.
- [Observaţia 3.1.3] şi [Observaţia 3.1.4] în care avem câteva observaţii cu privire la funcţia de comparare care este utilizată în rezultatul principal al acestei secţiuni.
- [Teorema 3.1.5] care este al doilea rezultat teoretic al acestei secţiuni, care diferă de prima teoremă în presupunerile pe care le impunem asupra operatorilor generalizaţi.
• *Principii extinse de punct fix pentru contractii multivoce de tip Ćirić*:
În această secţiune prezentăm câteva principii extinse de punct fix şi principii extinse de punct fix strict pentru contracţii de tip Ćirić. Contribuţiile noastre originale sunt :
- [Teorema 3.2.1] în care considerăm un principiu de punct fix pentru operatorii multivoci Ćirić. Prezentăm câteva concepte de punct fix, cum ar fi: stabilitatea Ulam-Hyers, bine punerea problemei, rezultate de selecţie, dependenţa de date, compactitatea mulţimii punctelor fixe.
- [Teorema 3.2.2] care este cel de-al doilea rezultat al prezentei secţiuni, în care considerăm rezultate metrice şi topologice pentru punctele fixe stricte ale contracţiilor multivoce Ćirić.

Capitolul 4: **Scheme iterative pentru contracţii generalizate în spaţii metrice complete**.
În acest capitol prezentăm căteva rezultate teoretice pentru punctele fixe ale contracţiilor generalizate univoce în contextul spaţiilor metrice convexe. De asemenea, în cadrul particular al spaţiilor hiperbolice, avem în vedere analiza punctelor fixe pentru iteraţia Mann, relativ la funcţii multivoce. Nu în ultimul rând, prezentăm câteva rezultate în care comparăm rata de convergenţă a diferitelor scheme iterative. Contribuţiile originale din acest capitol se găsesc în următoarele secţiuni:
• *Analiză de punct fix pentru contracţii generalizate, prin intermediul schemei iterative de tip Ishikawa*:
În această secţiune prezentăm câteva rezultate pentru puncte fixe pentru unele funcţii generalizate de tip contracţie în cadrul spaţiilor metrice convexe. Rezultatele noastre originale sunt următoarele:
- [Teorema 4.1.1], care este primul rezultat important în ceea ce priveşte convergenţa şirului Picard de aproximaţii succesive pentru operatori care satisfac o condiţie metrică de tip contracţie generalizată.
- [Corolarul 4.1.3], care este o consecinţă a rezultatului anterior, pentru iteratele funcţiei respective.
- [Exemplul 4.1.4], care validează rezultatul nostru teoretic, în privinţa contracţiilor generalizate.
• *Proprietăţi calitative şi rezultate de stabilitate pentru algoritmul Mann privind operatorii multivoci*:
Prezenta secţiune constă în câteva rezultate teoretice privitoare la convergenţa schemei iterative Mann în contextul operatorilor multivoci, introduşi prin perturbaţii admisibile. Contribuţiile originale din această secţiune sunt următoarele:
- [Definiţia 4.2.3] în care considerăm conceptul de convergenţă al algoritmului Mann dat de ideea de perturbaţii admisibile pentru operatorii de tip multivoc.
- [Teorema 4.2.5], care este un rezultat al dependenţei de date pentru algoritmul iterativ Mann, pentru operatori multivoci.
- [Teorema 4.2.7] care reprezintă o lemă ce va fi utilă în demonstrarea T-stabilităţii a şirului iterativ Mann.
- [Teorema 4.2.10] în care avem de-a face cu dependenţa de date a iteraţiei Mann în cadrul spaţiilor metrice hiperbolice complete.
• *Rezultate de convergenţă pentru scheme iterative în contextul spaţiilor metrice convexe*:
Ultima secţiune a acestui capitol se bazează pe rata de convergenţă a unor noi scheme iterative introduse de noi. Aceste rezultate se bazează pe ideea unui spaţiu metric convex. De asemenea, contribuţiile noastre originale sunt:
- [Teorema 4.2.12] tratează proprietatea stabilităţii Ulam în ceea ce priveşte iteraţia Mann.
- [Teorema 4.2.13] în care arătăm convergenţa unui şir de contracţii în raport cu iteraţia Mann.
- [Teorema 4.2.14] care se ocupă de bine punerea problemei de punct fix prin intermediul schemei iterative

Mann.
- [Teorema 4.2.15] în care considerăm proprietatea de umbrire la limită în raport cu iteraţia Mann pentru contracţii multivoce.
- [Teorema 4.3.1], [Teorema 4.3.3], [Teorema 4.3.4], în care considerăm convergenţa schemelor iterative recent introduse la punctul fix al o contracţie cu valoare unică în setarea unui spaţiu metric convex complet.

Contribuţiile autorului tezei de doctorat care sunt incluse în cadrul bibliografiei au fost publicate în următoarele jurnale ştiinţifice :

- C.D. Alecsa, *Common fixed points of Presić operators via simulation functions*, J. Nonlinear Convex Anal. **20** (2019), no. 3, 1-15.
- C.D. Alecsa, *Approximating fixed points for nonlinear generalized mappings using Ishikawa iteration*, Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. **68** (2019), no. 1, 163-191.
- C.D. Alecsa, *Fixed point theorems for generalized contraction mappings on b-rectangular metric spaces*, Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica **62** (2017), no. 4, 495-520.
- C.D. Alecsa, *Some fixed point results linked to $\alpha - \beta$ rational contractions and modified multivalued Hardy-Rogers operators*, J. Fixed Point Theory, 2018:3 (2018), Article ID 3, 1-22.
- C.D. Alecsa, *Sequences of contractions on cone metric spaces over Banach algebras and applications to nonlinear systems of equations and systems of differential equations*, arXiv:1906.06261, 26 pages, (*submitted*).
- C.D. Alecsa, A. Petruşel, *Some variants of Ćirić's multi-valued contraction principle*, Anal. Univ. de Vest Timisoara Ser. Mat. Inf., vol. 1, 2019, (*accepted*).
- C.D. Alecsa, *Stability results and qualitative properties for Mann's algorithm via admissible perturbations technique*, Applied Anal. Optim. **1** (2017), no. 2, 327-344.
- C. Alecsa, *On new faster fixed point iterative schemes for contraction operators and comparison of their rate of convergence in convex metric spaces*, Int. J. Nonlin. Anal. Appl. **8** (2017), no. 1, 353-388, doi:10.22075/IJNAA.2017.11144.1543.
- C.D. Alecsa, A. Petruşel, *On some fixed point theorems for multi-valued operators by altering distance technique*, J. Nonlin. Var. Anal. **1** (2017), 237-251.
- C.D. Alecsa, *Some fixed point results regarding convex contractions of Presić type*, J. Fixed Point Theory and Appl. 20:**20** (2018), no. 1, doi:10.1007/s11784-018-0488-7.

O parte importantă a rezultatelor originale din teza de doctorat a fost prezentată la următoarele conferinţe ştiinţifice:

- Conferinţa interdisciplinară pentru doctoranzi, Baru Mare, Hunedoara, 3-5 iunie 2016
- Sesiunea ştiinţifică a studenţilor doctoranzi, Cluj-Napoca, 31 mai 2016
- Sesiunea ştiinţifică a studenţilor doctoranzi, Cluj-Napoca, 6 iunie 2017
- Analiză numerică, Aproximare şi Modelare (Simpozion), Cluj-Napoca, 14 iunie 2017
- Sesiunea Naţională de Comunicări Ştiinţifice de Matematică, Iaşi, 6-9 iulie 2017
- Analiză numerică, Aproximare şi Modelare (Simpozion), Cluj-Napoca, 16 aprilie 2019

Mulţumiri :

În memoria tatălui meu,

Vreau să exprim sincere recunoştinţe faţă de coordonatorul prezentei teze de doctorat, Prof. Dr. **Adrian Olimpiu Petruşel** pentru îndrumarea şi pentru sugestiile sale valoroase de-a lungul tezei de doctorat. De asemenea, teza de doctorat nu ar fi fost realizată fără sprijinul ştiinţific al membrilor grupului de cercetare **Operatori Neliniari şi Ecuaţii Diferenţiale** din **Universitatea Babeş-Bolyai**.
O mulţumire specială este adresată Conf. Dr. **Szilard Csaba László**, de la **Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca**, Lector Dr. **Adrian Viorel** de la **Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca** şi Prof. Dr. **Radu Boţ** de la **Universitatea din Viena** pentru contribuţiile lor importante la gândirea mea ştiinţifică în timpul participării ca cercetător la grantul naţional PN-III-P1-1.1-TE-2016- 0266.
Mai departe, doresc să mulţumesc matematicienilor din cadrul **Institutului de analiză numerică Tiberiu Popoviciu**, în special CS I **Nicolae Suciu**, care mi-au ghidat atenţia către conexiunea dintre domeniul teoriei punctului fix şi aplicaţiile din analiza numerică şi calcul ştiinţific.
Nu în ultimul rând, doresc să îmi exprim recunoştinţa tuturor membrilor grupului de **Matematică Aplicată** din cadrul Universităţii **Babeş-Bolyai**, în special Conf. Dr. **Teodor Groşan**, Prof. Dr. **Mirela Kohr** and Prof. Dr. **Gabriela Kohr** de la catedra de **Mecanică şi Astronomie** care m-au încurajat pe parcursul doctoratului şi care au subliniat ideea din spatele scopului matematicii aplicate.
Mai presus de toate, nu am suficiente cuvinte pentru a mulţumi întregii mele familii care m-a sprijinit necondiţionat pe toată perioada programului de doctorat.

Capitolul 1

Preliminarii

1.1 Noțiuni calitative pentru operatori univoci și multivoci

În această secţiune, reamintim câteva noţiuni generale în cadrul teoriei analizei univoce şi multivoce. De asemenea, pentru următoarele noţiuni şi lemne preliminare (cum ar fi: operatorii slab Picard, dependenţa de date a mulţimii punctelor fixe, proprietăţile metrice ale distanţei Haussdorf), trimitem cititorul la [112], [141] şi [142]. De asemenea, î cadrul prezentei teze, vom folosi conceptele şi noţiunile din [116].Fie (X, d) un spaţiu metric. În primul rând, amintim câteva funcţionale importante utilizate în teoria punctului fix pentru operatori multivoci, care depind de metrica d a spaţiului X. Simplificăm notaţiile evitând evitând indicele d, de exemplu, folosim H în loc de H_d dacă nu este confuzie.
Functţionala de tip 'gap' generalizată :

$$D : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, \quad D(A, B) := inf\{d(a, b)/a \in A, b \in B\}.$$

Funcţionala diametru generalizată :

$$\delta : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, \quad \delta(A, B) := sup\{d(a, b)/a \in A, b \in B\}.$$

Funcţionala exces generalizată :

$$\rho : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, \quad \rho(A, B) := sup\{D(a, B)/a \in A\}.$$

Funcţionala generalizată Pompeiu-Hausdorff :

$$H : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, \quad H(A, B) := max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}.$$

Considerăm următoarele clase de mulţimi :

$$\mathcal{P}(X) := \{Y/Y \subset X\}, \quad P(X) := \{Y \subset \mathcal{P}(X)/Y \neq \emptyset\}.$$

Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P(X)$ un operator multivoc. Pe parcursul acestei teze vom folosi notaţia

$$F_T := \{x \in X/x \in Tx\} \text{ şi } (SF)_T := \{x \in X/\{x\} = Tx\}$$

mulţimea punctelor fixe a operatorului T, respectiv mulţimea punctelor strict fixe a lui T. Totodată, considerăm

$$Graph(T) := \{(x, y) \in X \times X/y \in Tx\}$$

ce reprezintă graficul operatorului multivoc T.
Pe de altă parte, vom introduce şi următoarele notaţii :

$$P_b(X) := \{Y \in P(X)/Y \text{ marginită}\}, \quad P_{cl}(X) := \{Y \in P(X)/Y \text{ închisă}\},$$
$$P_{cp}(X) := \{Y \in P(X)/Y \text{ compactă}\}, \quad P_{b,cl}(X) := P_b(X) \cap P_{cl}(X).$$

Pe de altă parte, dacă $T : X \to P(X)$, atunci prin

$$T^0 := 1_X, \; T^1 := T, \; ..., \; T^{n+1} := T \circ T^n,$$

pentru $n \in \mathbb{N}$ înţelegem iteratele operatorului T, unde

$$T(A) := \bigcup_{a \in A} Ta,$$

pentru $A \subset X$. Totodată, $\overline{B}(x_0, r)$ reprezintă închiderea în (X, d) a bilei deschise $B(x_0, r)$, unde

$$B(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$$

este bila deschisă de rază $r > 0$ şi centru $x_0 \in X$. Prin

$$\widetilde{B}(x_0; r) := \{x \in X | d(x_0, x) \leq r\}$$

înţelegem bila închisă x_0 de rază r.
Din lucrarea [143], reamintim că mulţimea

$$V^0(Y; \varepsilon) := \{x \in X \ / \ D(x, Y) < \varepsilon\}$$

este denumită ε-vecinătate a lui $Y \in P(X)$.
Acum vom reaminti câteva rezultate importante referitoare la metrica generalizată Pompeiu-Hausdorff H(a se vedea [116]).

Lema 1.1.1. *1) Fie (X, d) un spaţiu metric, $A, B \in P(X)$ şi $q > 1$. Atunci, pentru orice $a \in A$, există $b \in B$ astfel încât*

$$d(a, b) \leq qH(A, B).$$

2) Fie (X, d) un spaţiu metric, $A, B \in P(X)$ şi $\varepsilon > 0$. Atunci, pentru $a \in A$, există $b \in B$ astfel încât

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon.$$

Lema 1.1.2. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A, B \in P(X)$.*
Presupunem că există $\eta > 0$ astfel încât :

$$\begin{aligned} &(i) \quad \text{pentru orice } a \in A, \ \text{există } b \in B \text{ astfel încât } d(a, b) \leq \eta, \\ &(ii) \quad \text{pentru orice } b \in B, \ \text{există } a \in A \text{ astfel încât } d(a, b) \leq \eta. \end{aligned}$$

Atunci, are loc :

$$H(A, B) \leq \eta.$$

Lema 1.1.3. *Fie $A \in P(X)$ şi $x \in X$. Atunci*

$$x \in \overline{A} \text{ dacă şi numai dacă } D(x, A) = 0.$$

Definiţia 1.1.4. *Fie (X, d) un spaţiu metric. $T : X \to P(X)$ un operator multivoc slab Picard, pe scurt MWP, dacă pentru orice $x \in X$ şi pentru orice $y \in Tx$, există un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din X, astfel încât :*

$$\begin{aligned} &(i) \ x_0 = x \text{ şi } x_1 = y, \\ &(ii) \ x_{n+1} \in Tx_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, \\ &(iii) \ \text{şirul } (x_n) \text{ este convergent la un element } x^*(x, y) \in F_T. \end{aligned}$$

Observaţia 1.1.5. Acum vom reaminti câteva observaţii pe care le vom folosi pe parcursul acestei teze:

(1) şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit mai sus de (i) şi (ii) este numit şirul aproximaţiilor succesive şir al lui T pornind din punctul $(x, y) \in Graph(T)$.
(2) If $T : X \to P(X)$ este un operator MWP, atunci putem sa definim operatorul multivoc $T^\infty : Graph(T) \to P(F_T)$, prin $T^\infty(x, y) = \{z \in F_T$ / există un şir de aproximaţii a succesive al lui T pornind din (x, y) ce converge la $z\}$, pentru orice $(x, y) \in Graph(T)$.

Definiţia 1.1.6. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P(X)$ un MWP. Atunci T se numeşte ψ-MWP dacă şi numai dacă satisface :*

$$(i)\ \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ crescătoare, continuă în 0, satisfăcând } \psi(0) = 0,$$
$$(ii) \text{ există } t^\infty \text{ o selecţie a lui } T^\infty,$$

astfel ca $d\left(x, t^\infty(x, y)\right) \leq \psi\left(d(x, y)\right)$, pentru orice $(x, y) \in Graph(T)$.

Un caz particular important este atunci când ψ are o reprezentare liniară, adică există $c > 0$ astfel încât $\psi(t) = ct$, pentru fiecare $t \in \mathbb{R}_+$. În acest caz, T se numeşte c-MWP.

Din cartea [116] reamintim noţiunile de operatori multivoci de tip contracţie şi operatori multivoci de tip Lipschitz.

Definiţia 1.1.7. *Fie (X, d) şi (Y, d') două spaţii metrice şi $T : X \to P(Y)$. Atunci T se numeşte :*

$$(a)\ \alpha - \text{Lipschitz, dacă } \alpha \geq 0 \text{ şi } H_{d'}\left(Tx_1, Tx_2\right) \leq \alpha d(x_1, x_2), \text{ pentru orice } x_1, x_2 \in X;$$
$$(b)\ \alpha - \text{contracţie, dacă } T \text{ este } \alpha - \text{Lipschitz cu constanta } \alpha < 1.$$

Observaţia 1.1.8. Fie (X, d) un spaţiu metric complet. Dacă $T : X \to P_{cl}(X)$ este o α-contracţie, atunci T este $\dfrac{1}{1-\alpha}$-MWP.

Pentru exemple şi rezultate din teoria operatorilor de tip MWP, a se vedea [112].

Vom folosi conceptele din [32], [53] şi [115]. Mai mult decât atât, din motive exhaustive, vom prezenta unele dintre ele aici. Pe de altă parte, considerăm (X, d) un spaţiu metric, $T : X \to P(X)$ un operator multivoc şi ne referim la incluziunea de punct fix $x \in Tx$. De asemenea, reamintim conceptele de bază pentru proprietăţile calitative ale incluziunii punctelor fixe şi a iteraţiei punctului fix. Primele două definiţii sunt legate de bine punerea problemei punctului fix. Pentru conceptul de bine punere a problemei, lăsăm cititorul să urmărească [80] şi [120].

Definiţia 1.1.9 (T-stabilitate)**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc. Pentru $x_0 \in X$, considerăm*

$$x_{n+1} \in f(T, x_n), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N} \tag{1.1.0.1}$$

reprezintă un algoritm iterativ. Fie şirul (x_n) convergent la un punct fix p al lui T. Totodată, fie (y_n) un şir în X. Vom considera

$$\varepsilon_n = H\left(y_{n+1}, f\left(T, y_n\right)\right).$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ implică faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = p$, atunci schema iterativă definită în (1.1.0.1) se numeşte T-stabilă sau stabilă referitor la operatorul T.

Observaţia 1.1.10. Din definiţia de mai sus, se poate observa că schema iterativă generalizată $f\left(T, x_n\right)$ poate fi reprezentată ca o perturbaţie admisibilă $T_{G_n}(x_n)$.

Definiţia 1.1.11 (Stabilitatea Ulam-Hyers referitoare la incluziunea de punct fix $x \in Tx$)**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P(X)$. Prin definiţie, incluziunea de punct fix*

$$x \in Tx \tag{1.1.0.2}$$

se numeşte stabilă Ulam-Hyers în mod generalizat dacă şi numai dacă există o funcţie crescătoare şi continuă în 0, $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, cu $\psi(0) = 0$, astfel încât : pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $y^* \in X$ pentru care are loc $D(y^*, Ty^*) \leq \varepsilon$, există o soluţie x^* a incluziunii de punct fix 1.1.0.2, pentru care

$$d(y^*, x^*) \leq \psi(\varepsilon).$$

Definiţia 1.1.12. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : Y \to P(X)$. Prin definiţie, incluziunea de punct stric fix*

$$\{x\} = Tx \tag{1.1.0.3}$$

se numeşte stabilă Ulam-Hyers în mod generalizat dacă şi numai dacă există o funcţie continuă în 0 şi crescătoare $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, cu $\psi(0) = 0$, astfel încât :
pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $y^* \in X$ pentru care $H(y^*, Ty^*) \leq \varepsilon$, există o soluţie x^* a incluziunii de punct strict fix 1.1.0.3, astfel încât

$$d(y^*, x^*) \leq \psi(\varepsilon).$$

în final, din lucrările [56], [61] şi [125], vom reaminti ultimele concepte utile în cadrul acestei subsecţiuni.

Definiţia 1.1.13. *Fie $X \neq \emptyset$ şi $T : X \to P(X)$ un operator multivoc. Prin definiţie, T are proprietatea de aproximare de punct final dacă*

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in Tx} d(x, y) = 0.$$

Pentru studiul stabilităţii generalizate de tip Ulam-Hyers, facem referire la [110].

Observaţia 1.1.14. În ipotezele de mai sus , dacă T este o contracţie multivocă, atunci incluziunea de punct fix $x \in Tx$ este stabilă Ulam-Hyers, cu $\psi(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{1-\alpha}$.

Definiţia 1.1.15 (Bine punerea problemei de punct fix referitor la D)**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P(X)$ un operator multivoc. Considerăm incluziunea de punct fix $x \in Tx$.*
Incluziunea de punct fix este bine pusă referitor la D dacă următoarea implicaţie are loc :
Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ este un şir ce satisface

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n, Tx_n) = 0,$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Definiţia 1.1.16. *Fie (X, d) un spaţiu, $Y \in P(X)$ şi fie operatorul multivoc $T : Y \to P_{cl}(X)$. Atunci problema de punct fix este bine pusă în sens generalizat (respectiv bine pusă) pentru T relativă la funcţionala de tip 'gap' D dacă şi numai dacă :*

$$\begin{aligned}&(i)\ F_T \neq \emptyset (\text{respectiv } F_T = \{x^*\}),\\ &(ii)\ \text{dacă } (x_n) \text{ este un şir în } Y \text{ astfel încât } D(x_n, Tx_n) \to 0, \text{ atunci există un subşir}\\ &(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ al lui } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ astfel încât } x_{n_k} \to x^* \in F_T (\text{respectiv } x_n \to x^* \in F_T).\end{aligned}$$

Definiţia 1.1.17 (Proprietatea de umbrire la limită a operatorului multivoc)**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P(X)$ un operator multivoc. Considerăm incluziunea de punct fix $x \in Tx$. Problema de punct fix are proprietatea de umbrire la limită dacă are loc următoarea implicaţie :*
Dacă $\{y_n\} \in X$ este un şir ce satisface

$$\lim_{n\to\infty} D(y_{n+1}, Ty_n) = 0,$$

atunci există $\{x_n\}$ un şir de aproximaţii succesive astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Totdată vom considera câteva leme ce au un rol important în privinţa T-stabilităţii şi în proprietatea de umbrire la limită. Pentru detalii, a se vedea [58] şi [119] :

Lema 1.1.18 (Harder & Hicks)**.** *Fie $c \in \mathbb{R}$, cu $0 < |c| < 1$.*
Considerăm $(b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir, astfel încât $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$. Atunci, vom avea

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c^{n-k} b_k \right) = 0$$

Într-un context mai general avem :

Lema 1.1.19 (Lema lui Cauchy)**.** *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două şiruri astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ *şi* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$*. Atunci, avem*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\right) = 0$$

În continuare, vom prezenta câteva concepte şi definiţii noi cu privire la stabilitatea Ulam-Hyers, proprietatea de umbrire la limită şi a bine punerii operatorului multivoc folosind o funcţie iterativă generală de forma $f(T, x_n)$. Pentru aceasta, considerăm X să fie o mulţime nevidă. Pentru un operator multivoc $T : X \to P(X)$, în următoarea continuare considerăm un operator asociat $f_T : X \to P(X)$, în ceea ce priveşte operatorul T. Pentru concizie, notăm $f_T(x)$ ca $f(T, x)$ pentru fiecare $x \in X$. Mai mult, $f(T, \cdot)$ va fi utilizat ca notaţie pentru $f_T(\cdot)$.

Definiţia 1.1.20 (Stabilitatea Ulam Hyers a incluziunii $x \in f(T, x)$)**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric,* $T : X \to P(X)$ *şi* $f(T, \cdot) \in P(X)$*.*
Fie $\varepsilon > 0$ *şi* $x \in X$*, astfel încât*

$$D(x, f(T, x)) \leq \varepsilon.$$

Dacă există $x^* \in F_T$*, astfel încât*

$$d(x, x^*) \leq \psi(\varepsilon),$$

şi o funcţie $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *crescătoare, continuă în 0, satisfăcând* $\psi(0) = 0$*, atunci incluziunea de punct fix* $x \in T(x)$ *se numeşte stabilă Ulam-Hyers în mod generalizat referitor la incluziunea* $x \in f(T, x)$*.*

Definiţia 1.1.21 (Bine punerea problemei de punct fix referitor la D şi la iteraţia $f(T, x_n)$)**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric,* $T : X \to P(X)$ *şi* $f(T, \cdot) \in P(X)$*.*
Problema de punct fix $x \in f(T, x)$ *se numeşte bine pusă dacă următoarea implicaţie are loc :*
Dacă $\{x_n\} \in X$ *este un şir ce satisface*

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n, f(T, x_n)) = 0,$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$*.*

Definiţia 1.1.22 (Proprietatea de umbrire la limită referitoare la iteraţia $f(T, x_n)$)**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric,* $T : X \to P(X)$*. Vom spune că problema de punct fix* $x \in f(T, x)$ *are proprietatea de umbrire la limită dacă următoarea implicaţie are loc :*
Dacă $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ *este un şir ce satisface*

$$\lim_{n\to\infty} D(y_{n+1}, f(T, y_n)) = 0,$$

atunci există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ce satisface* $x_{n+1} \in f(T, x_n)$ *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Definiţia 1.1.23. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric,* $Y \in P(X)$ *şi fie* $T : Y \to P_{cl}(X)$ *un operator multivoc. Atunci problema de punct fix este bine pusă în sens generalizat (respectiv bine pusă) pentru* T *referitor la funcţionala Pompeiu-Hausdorff* H *dacă şi numai dacă :*

(i) $(SF)_T \neq \emptyset$*(respectiv* $(SF)_T = \{x^*\}$*),*
(ii) *Dacă* (x_n) *este un şir în* Y *astfel încât* $H(x_n, Tx_n) \to 0$*, atunci există un subşir* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *al lui* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, ce satisface* $x_{n_k} \to x^* \in (SF)_T$*(respectiv* $x_n \to x^* \in (SF)_T$*).*

Acum, un alt rezultat important ce are legătură cu problema de punct fix este proprietatea lui Ostrowski, care poate fi găsită în [80] şi [79].

Definiţia 1.1.24 (Proprietatea lui Ostrowski)**.** *Fie (X,d) un spaţiu metric şi $T : X \to P(X)$ un operator multivoc. Prin definiţie, operatorul multivoc T are proprietatea lui Ostrowski, dacă*

$$F_T = \{x^*\}$$

şi pentru orice şir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, ce satisface

$$D(y_{n+1}, Ty_n) \to 0,$$

are loc

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x^*, \text{ când } n \to \infty.$$

1.2 Operatori de tip Presić

Scopul acestei secţiuni este de a cerceta existenţa şi unicitatea punctelor de coincidenţă şi a punctelor fixe comune pentru unii operatori Presić în cadrul spaţiilor metrice înzestrate cu o ordine parţială. întrucât scopul nostru este să introducem ideea funcţiei de simulare pentru operatori de tip Presić, vom aminti mai întâi conceptul de funcţie de simulare. De asemenea, vom aminti unele generalizări ale acestei noţiuni care au dus la unele rezultate de punct fix în acest domeniu relativ nou al teoriei punctului fix.
În [76], Khojasteh et.al., au introdus ideea funcţiei de simulare.

Definiţia 1.2.1. *Fie $\zeta : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie dată, atunci ζ se numeşte funcţie de simulare dacă satisface următoarele condiţii :*
(ζ_1) $\zeta(0,0) = 0$;
(ζ_2) $\zeta(t,s) < s - t$, *pentru orice* $t, s > 0$*;*
(ζ_3) *dacă* $(t_n), (s_n)$ *sunt şiruri în* $(0,\infty)$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n > 0$, *atunci*

$$\limsup_{n\to\infty} \zeta(t_n, s_n) < 0.$$

Mai mult, mulţimea tuturor funcţiilor de simulare este notată cu $\mathcal{Z}$ sau cu $\mathcal{Z}_d$ daca lucrăm în contextul unui spaţiu înzestrat cu o distanţă d. De asemenea, autorii articolului [76] au studiat existenţa şi unicitatea punctelor fixe pentru funcţii cu denumirea de $\mathcal{Z}-$ contracţii, care sunt definite mai jos.

Definiţia 1.2.2. *Fie (X,d) un spaţiu metric, $T : X \to X$ un operator şi $\zeta \in \mathcal{Z}$. Atunci T se numeşte $\mathcal{Z}-$contracţie relativă la ζ dacă următoarea condiţie este satisfăcută*

$$\zeta(d(Tx,Ty), d(x,y)) \geq 0, \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

De asemenea, un articol interesant a fost cel al lui Roldán-López-de-Hierro et. al., [135], în care autorii au studiat existenţa şi unicitatea punctelor de coincidenţă pentru funcţii modificate prin funcţii de simulare. În [Definiţia 3.2] din acelaşi articol, autorii au relaxat condiţia (ζ_3) şi au redefinit condiţia din definiţia unei funcţii de simulare.

Definiţia 1.2.3. *Fie $\zeta : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie dată, atunci ζ se numeşte o funcţie de simulare dacă satisface următoarele condiţii :*
(ζ_1) $\zeta(0,0) = 0$;
(ζ_2) $\zeta(t,s) < s - t$, *pentru orice* $t, s > 0$
(ζ_3) *dacă* $(t_n), (s_n)$ *sunt şiruri în* $(0,\infty)$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n > 0$ *şi* $t_n < s_n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, *atunci*

$$\limsup_{n\to\infty} \zeta(t_n, s_n) < 0.$$

Mai mult, folosind cadrul unui spaţiu metric (X,d), au luat în considerare câteva rezultate de punct fix pentru contracţiile de tip $(\mathcal{Z}_d, g)$. De asemenea, vom reaminti aici acest tip de contracţie.

Definiţia 1.2.4. *Fie (X,d) un spaţiu metric. Considerăm $T, g : X \to X$ operatori daţi. Spunem că T este o $(\mathcal{Z}_d, g)$-contracţie dacă există $\zeta \in \mathcal{Z}$ astfel încât*

$$\zeta(d(Tx,Ty), d(gx,gy)) \geq 0, \text{ pentru orice } x, y \in X, \text{ astfel încât } gx \neq gy.$$

În [26], Ansari et. al., au generalizat noţiunea de funcţie de simulare dezvoltată de Khojasteh, Shukla şi Radenovic în [76]. De dragul completitudinii, o amintim aici.

Definiţia 1.2.5. *O funcţie $G : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă $\mathcal{C}$ dacă este continuă şi satisface următoarele condiţii :*
(i_1) $G(s,t) \leq s$;
(i_2) $G(s,t) = s$ implică faptul că $s = 0$ sau $t = 0$, pentru orice $t, s \geq 0$.

Definiţia 1.2.6. *O funcţie $G : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ admite proprietatea C_G, dacă există $C_G \geq 0$, astfel ca*
(i_3) $G(s,t) > C_G$ implică faptul că $s > t$;
(i_4) $G(t,t) \leq C_G$, pentru orice $t \geq 0$.

Definiţia 1.2.7. *O funcţie de simulare de tip C_G- este o funcţie $\zeta : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ ce satisface următoarele : (i_5) $\zeta(t,s) < G(s,t)$, pentru orice $t, s > 0$, unde G este o funcţie de clasă $\mathcal{C}$;*
(i_6) dacă $(t_n), (s_n)$ sunt şiruri în $(0,\infty)$, astfel încât $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n > 0$ şi $t_n < s_n$, atunci

$$\limsup_{n\to\infty} \zeta(t_n, s_n) < C_G.$$

Mai mult, Radenović şi Chandok în [127] au considerat o pereche de operatori (f,g) definiţi pe un spaţiu metric, astfel încât să satisfacă

$$\zeta(d(fx,fy), d(gx,gy)) \geq C_G, \text{ pentru toate } x,y \in X \text{ cu } gx \neq gy.$$

Autorii au numit funcţia f o contracţie de tip $(\mathcal{Z}_G, g)$ şi au studiat existenţa şi unicitatea punctelor fixe comune şi de coincidenţă pentru perechea (f,g). De asemenea, pentru cazul în care $C_G = 0$ şi $G(s,t) = s-t$, Radenović et. al. în [128] a prezentat o abordare mai uşoară a studiului punctelor fixe comune pentru operatori modificaţi prin funcţii de simulare în spaţii metrice complete.
Mai mult, în [84] şi [108], autorii acestor articole au generalizat rezultatele principale din [127], şi anume se pot găsi câteva rezultate de punct fix interesante cu privire la Ćirić şi Ćirić -Suzuki printr-o funcţie de simulare C_G-
Pe de altă parte, pentru studiul punctelor fixe ale unei funcţii înzestrată cu proprietatea de α -admisibilitate în cadrul funcţiilor de simulare, ne referim la [21] şi la [71].
În cele din urmă, pentru studiul punctelor fixe ale unor funcţii definite pe alte tipuri de spaţii înzestrate cu unele distanţe generalizate, cum ar fi spaţiile b-metrice, spaţiile cvasimetrice şi spaţiile metrice $0-\sigma$, lăsăm cititorul să urmărească [21], [23], [50] şi [162].

În [126], S.B.Presić a extins binecunoscutul principiu de contracţie al lui Banach la operatorii care au mai mult de o variabilă. Din motive de completitudine, amintim rezultatul principal din [126].

Teorema 1.2.8. *Fie (X,d) un spaţiu metric complet, k un număr natural şi $f : X^k \to X$ o funcţie ce satisface următoarea condiţie de tip contracţie :*

$$d(f(x_1,...,x_k), f(x_2,...,x_{k+1})) \leq \sum_{i=1}^{k} q_i d(x_i, x_{i+1}),$$

pentru orice $x_1,...,x_{k+1} \in X$, unde $q_1,...,q_k$ sunt constante pozitive astfel încât $q_1 + ... + q_k < 1$. Atunci există un unic element $x \in X$ pentru care $f(x,...,x) = x$. Pe de altă parte, dacă $x_1,...,x_k$ sunt elemente arbitrare din X şi pentru $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+k} = f(x_n,...,x_{n+k-1})$, atunci şirul (x_n) este convergent şi satisface $\lim x_n = f(\lim x_n,...,\lim x_n)$.

Din acest moment, pentru o funcţie dată $f : X^k \to X$, cu k un număr natural fixat, considerăm şirul cu un pas (x_n), definit prin

$$x_{n+1} = f(x_n,...,x_n), \tag{1.2.0.1}$$

şi şirul cu k paşi (x_n), definit astfel :

$$x_{n+k} = f(x_n,...,x_{n+k-1}),\ n = 1,2,\ldots \tag{1.2.0.2}$$

Acum, reamintim că [103], M. Păcurar a obţinut un rezultat de convergenţă legat de operatorii de tip Kannan-Presić.

Teorema 1.2.9. *Fie (X,d) un spaţiu metric complet, k un număr natural şi $f : X^k \to X$ o funcţie dată. Presupunem că există $a \in \mathbb{R}$ ce satisface $0 < ak(k+1) < 1$ astfel încât*

$$d(f(x_1,...,x_k), f(x_2,...,x_{k+1})) \leq a \sum_{i=1}^{k+1} d(x_i, f(x_i,...,x_i)),$$

pentru orice $(x_1,...,x_{k+1}) \in X^{k+1}$. Atunci,
(i) f are un unic punct fix $x^* \in X$;
(ii) pentru orice elemente arbitrare $x_1,...,x_k \in X$, şirul (x_n) definit prin (1.2.0.2) converge la x^*.

Pe de altă parte, pornind de la articolul [37] al lui Boyd şi Wong, Shukla şi Radenović in [148] au arătat câteva rezultate de convergenţă pentru operatorii de tip Presić-Boyd-Wong pentru cazul spaţiilor metrice complete înzestrate cu o ordine parţială, notate cu $(X, \preceq, d)$. În articolul lor, unele puncte fixe comune şi de coincidenţă au fost studiate pentru o pereche (f,g), unde $f : X^k \to X$ şi $g : X \to X$ îndeplinesc unele condiţii cu privire la ordine parţială '$\preceq$' şi, de asemenea, următoarea inegalitate de tip metric

$$d(f(x_1,...,x_k), f(x_2,...,x_{k+1})) \leq \psi(d(gx_1,gx_2),...,d(gx_k,gx_{k+1})), \tag{1.2.0.3}$$

unde funcţia $\psi : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ satisface următoarele condiţii :

$$\begin{aligned} &(\psi_1) \text{ pentru } t_n \in \mathbb{R}_+ \text{ şi } t_n \downarrow t \geq 0 \text{ implică faptul că } \limsup_{n\to\infty} \psi(t_n,...,t_n) \leq \psi(t,...,t);\\ &(\psi_2)\ \psi(t,...,t) < t, \text{ pentru fiecare } t > 0;\\ &(\psi_3)\ \psi(t,0,...,0) + \ldots + \psi(0,...,0,t) \leq \psi(t,...,t), \text{ pentru fiecare } t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.2.0.4}$$

Mai mult, referitor la [Corolarul 6] din acelaşi articol [148], observăm că atunci când $g = I_X$ este funcţia identitate, atunci şirul definit de (1.2.0.1) converge la punctul fix al operatorului f.
Acum, îndreptându-ne atenţia asupra lucrărilor lui I.A. Rus [140] şi M. Păcurar [104], unele puncte fixe, respectiv puncte fixe comune, au fost studiate prin schema iterativă multi-pas (1.2.0.2) (sau o generalizare dacă ne referim la studiul coincidenţei şi a punctelor fixe comune pentru o pereche de funcţii de tip Presić). Operatorii satisfac

$$d(f(x_1,...,x_k), f(x_2,...,x_{k+1})) \leq \varphi(d(x_1,x_2),...,d(x_k,x_{k+1})), \tag{1.2.0.5}$$

sau

$$d(f(x_1,...,x_k), f(x_2,...,x_{k+1})) \leq \varphi(d(gx_1,gx_2),...,d(gx_k,gx_{k+1})), \tag{1.2.0.6}$$

admite un unic punct fix (punct de coincidenţă în cel de-al doilea caz). Funcţia $\varphi : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ satisface următoarea condiţie :

$$\begin{aligned} &(\varphi_1)\ \varphi(r) \leq \varphi(s), \text{ pentru } r,s \in \mathbb{R}_+^k, \text{ cu } r \leq s;\\ &(\varphi_2)\ \psi(r,...,r) < r, \text{ pentru orice } r \in \mathbb{R}_+, r > 0;\\ &(\varphi_3)\ \psi(r,0,...,0) + \ldots + \psi(0,...,0,r) \leq \psi(r,...,r), \text{ pentru fiecare } r \in \mathbb{R}_+;\\ &(\varphi_4)\ \varphi \text{ este continuă ;}\\ &(\varphi_5)\ \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i(r) < \infty. \end{aligned} \tag{1.2.0.7}$$

Acum, observăm că ipotezele $(\varphi_1) - (\varphi_5)$ sunt mai puternice decât condiţiile $(\psi_1) - (\psi_3)$. Totodată, condiţiile anterioare au fost necesare pentru convergenţa şirului (1.2.0.2). în acelaşi timp, condiţiile $(\psi_1) - (\psi_3)$ au fost mai relaxate, deoarece în [148] a fost prezentat doar un rezultat de convergenţă în ceea ce priveşte şirul (1.2.0.1).
În cele din urmă, pentru alte rezultate importante privind operatorii univoci de tip Presić, lăsăm cititorul să urmărească [102] şi pentru un studiu exhaustiv privind rezultatele de punct fixe pentru funcţii definite pe produsul cartezian al unui spaţiu metric complet, ne referim la [145].

Pe de altă parte, trebuie sa menţionăm că şirul iterativ cu k paşi dat de relaţia 1.2.0.2 poate fi considerat ca o ecuaţie neliniară de diferenţe. Mai mult, dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, atunci limita acestuia este

un punct fix al funcţiei f.
Acum, menţionăm că foarte mulţi autori au generalizat condiţia contractivă dată de Presić. Una dintre primele generalizări a fost făcută de către Presić şi Ćirić în [44]. Reamintim teorema dată de autorii menţionaţi mai sus.

Teorema 1.2.10. *Fie (X, d) un spaţiu metric complet. Considerăm $f : X^k \to X$ o funcţie ce satisface următoarea condiţie contractivă :*

$$d(f(x_0, ..., x_{k-1}), f(x_1, ..., x_k)) \leq \lambda \max\{d(x_i, x_{i+1}) : 0 \leq i \leq k-1\}, \tag{1.2.0.8}$$

unde $\lambda \in (0, 1)$ and $x_0, ..., x_k$ sunt elemente arbitrare ale lui X.
Atunci, există un element $x^* \in X$ pentru care $f(x^*, ..., x^*) = x^*$.
Totodată, dacă $x_0, ..., x_{k-1}$ sunt elemente arbitrare din X, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin

$$x_{n+k} = f\left(x_n, ..., x_{n+k-1}\right) \tag{1.2.0.9}$$

este convergent şi satisface $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n, ..., \lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$.
Pe de altă parte, dacă pe mulţimea de elemente diagonale $\Delta \subset X^k$, avem că

$$d(f(u, ..., u), f(v, ..., v)) < d(u, v), \tag{1.2.0.10}$$

pentru orice $u, v \in X$, cu $u \neq v$, atunci x^* este un unic punct fix în X.

De asemenea, în 1981, I. A. Rus [140] a generalizat [Teorema 1.2.8] şi a arătat existenţa şi unicitatea unui punct fix în X, adică un punct x^* care satisface $x^* = f(x^*, ..., x^*)$, pentru o funcţie $f : X^k \to X$, îndeplinind următoarea condiţie

$$d(f(x_0, ..., x_{k-1}), f(x_1, .., x_k)) \leq \varphi\left(d(x_0, x_1), ..., d(x_{k-1}, x_k)\right), \tag{1.2.0.11}$$

unde funcţia φ satisface

$$\begin{cases} \varphi(r) \leq \varphi(s), \text{ unde } r \leq s, \text{ cu } r, s \in \mathbb{R}_+^k, \\ \varphi \text{ este continuă}, \\ \varphi(t, ..., t) < t, \text{ pentru orice } t \in \mathbb{R}_+, \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varphi^i(r) < +\infty, \text{ pentru orice } r \in \mathbb{R}_+^k, \\ \varphi(t, 0, ..., 0) + \varphi(0, t, 0, ..., 0) + ... + \varphi(0, ..., 0, t) \leq \varphi(t, ..., t), \forall t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Mai mult, menţionăm că în [104], M. Păcurar a dat o generalizare pentru teorema dezvoltată de I. A. Rus şi a studiat existenţa punctelor fixe comune şi punctelor fixe de coincidenţă pentru o pereche de funcţii (f, g), unde $f : X^k \to X$ şi $g : X \to X$, astfel încât

$$d(f(x_0, ..., x_{k-1}), f(x_1, ..., x_k)) \leq \varphi\left(d(g(x_0), g(x_1)), ..., d(g(x_{k-1}), g(x_k))\right), \tag{1.2.0.12}$$

unde $\varphi : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+^k$ este înzestrată cu proprietăţile de mai sus.
Unele generalizări ale operatorilor de tip Presić au fost făcute de Shukla, Radenovic et.al. Aceştia au studiat existenţa şi unicitatea punctelor fixe ale funcţiilor definite pe spaţii metrice complete şi în spaţii metrice complete ordonate. Pentru acestea, lăsăm cititorul să urmărească [149], [150] şi [151]. Cea mai generală dintre aceste tipuri de funcţii, adică Presić-Hardy-Rogers, are următoarea formă

$$d(f(x_0, ..., x_{k-1}), f(x_1, ..., x_k)) \leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) + \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} \beta_{i,j} d(x_i, f(x_j, ..., x_j)). \tag{1.2.0.13}$$

De asemenea, au fost studiate existenţa şi unicitatea punctelor fixe pentru diverse funcţii de tip Presić. Lăsăm cititorul să urmărească [3], [75] şi [100]. Mai mult, amintim că autorii menţionaţi au dat exemple în spaţii metrice şi spaţii b-metrice. De asemenea, în [100] au fost prezentate aplicaţii la ecuaţii matriceale.
În cele din urmă, întrucât scopul nostru este să studiem existenţa şi unicitatea punctelor fixe pentru unele tipuri noi de funcţii $f : X^k \to X$, pentru mai multe lucrări de cercetare privind operatorii de tip Presić, lăsăm cititorul să urmărească [33], [102], [107] şi [126].

Deoarece scopul nostru este de a extinde conceptul de contracţii convexe la cazul operatorilor Presić, reamintim definiţia contracţiei convexe de ordinul doi, dată de Istrăţescu în [63].

Definiţia 1.2.11. *Fie (X,d) un spaţiu metric. Considerăm o funcţie continuă $f : X \to X$. Funcţia f se numeşte o contracţie convexă de ordinul 2 dacă există $a, b \in (0,1)$, astfel încât pentru fiecare $x, y \in X$*

$$d(f^2x, f^2y) \leq ad(fx, fy) + bd(x,y), \tag{1.2.0.14}$$

unde $a + b < 1$.

Totdată, în aceeaşi lucrare, Istrăţescu a introdus contracţiile convexe de ordinul n, în modul următor.

Definiţia 1.2.12. *Fie (X,d) un spaţiu metric. Considerăm o funcţie continuă $f : X \to X$. Funcţia f se numeşte o contracţie convexă de ordinul n dacă există $a_0, ..., a_{n-1} \in (0,1)$, astfel încât pentru fiecare $x, y \in X$*

$$\begin{aligned} d(f^n x, f^n y) \leq a_0 d(x,y) + a_1 d(fx, fy) + ... \\ + a_{n-1} d(f^{n-1}x, f^{n-1}y), \end{aligned} \tag{1.2.0.15}$$

unde $a_0 + ... + a_{n-1} < 1$.

Chiar dacă în definiţiile date de Istrăţescu, în cazul contracţiilor convexe din ordinul 2, coeficienţii a, b sunt în (0,1) şi în cazul contracţiilor convexe de ordinul $n \geq 2$, coeficienţii $a_0, \ldots, a_{n-1}$ se află în intervalul (0,1), vom folosi faptul că aceşti coeficienţi pot fi chiar în $[0,1)$ precum în [144]. Această modificare va fi foarte utilă pentru exemplele ce le vom da.
De asemenea, Istr u a c tescu a studiat alte tipuri de funcţii continue în [62] şi în [64] şi Satry, Rao et.al. în [144] a studiat principii de existenţă şi unicitate pentru contracţii convexe de ordinul $m \geq 2$. Mai mult, amintim că V. Mureşan şi A.S. Mureşan în [95] au dat teoreme privind dependenţa de date şi anumite proprietăţi calitative pentru contracţii convexe de ordinul 2.
În cele din urmă, alţi autori au studiat proprietăţi calitative şi au dezvoltat teoreme de existenţă şi unicitate pentru contracţii convexe de ordinul 2 şi pentru alte tipuri de operatori, cum ar fi contracţiile convexe cu diametre descrescătoare. Lăsăm cititorul să urmărească [20], [22] şi [88].

1.3 Spaţii metrice b-rectangulare

În această secţiune vom prezenta câteva lemne şi definiţii utile privind spaţiile metrice rectangulare şi b-rectangulare. De asemenea, vom prezenta câteva rezultate recente din cadrul domeniului teoriei punctului fix privind operatori de tip contracţie expansivă şi unele generalizări.
În [38], A. Branciari a introdus un nou tip de spaţiu metric, în care inegalitatea triunghiului este înlocuită cu o inegalitate care implică patru elemente distincte. Acesta se numeşte spaţiu metric rectangular sau spaţiu metric generalizat (g.m.s.)

Definiţia 1.3.1 (Spaţii rectangulare)**.** *Fie $X \neq \emptyset$, $d : X \times X \to [0,\infty)$, astfel încât pentru fiecare $x, y \in X$ şi $u, v \in X$ (elemente diferite de x şi y), avem că*

$$\begin{aligned} &(1)\ d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y, \\ &(2)\ d(x,y) = d(y,x), \\ &(3)\ d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,v) + d(u,y). \end{aligned}$$

Din lucrarea [67] menţionăm că şirurile convergente şi şirurile Cauchy pot fi introduse precum în spaţiile metrice.
Totodată, din aceeaşi lucrare, ştim că dacă (X,d) este un spaţiu rectangular şi (x_n) este un şir b-rectangular Cauchy cu proprietatea că $x_n \neq x_m$, pentru fiecare $n \neq m$, atunci (x_n) converge la cel mult un punct, adică proprietatea ca (X,d) este Hausdorff devine redundantă.
În acelaşi timp, din [47], [52], [136], reamintim definiţia spaţiilor b-rectangulare (sau spaţii metrice b-rectangulare generalizate), adică b-g.m.s.

Definiţia 1.3.2 (b-g.m.s.)**.** *Fie $X \neq \emptyset$, $s \geq 1$ un număr real dat şi $d : X \times X \to [0,\infty)$, astfel încât pentru fiecare $x, y \in X$ şi $u, v \in X$ (elemente diferite de x şi y), avem că*

$$\begin{aligned} &(1)\ d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y, \\ &(2)\ d(x,y) = d(y,x), \\ &(3)\ d(x,y) \leq s\left[d(x,u) + d(u,v) + d(u,y)\right]. \end{aligned}$$

Precum în cazul spaţiilor metrice complete, reamintim principalele noţiuni legate de şiruri în b-g.m.s :

Definiţia 1.3.3. *Fie* (X, d) *un b-g.m.s,* $x \in X$ *şi* $(x_n) \subset X$ *un şir dat. Atunci*
(a) (x_n) *este convergent în* (X, d) *la un element* $x \in X$*, dacă pentru fiecare* $\varepsilon > 0$*, există* $n_0 \in \mathbb{N}$*, astfel ca* $d(x_n, x) < \varepsilon$*, pentru orice* $n > n_0$*. Vom nota astfel :* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*.*
(b) (x_n) *este Cauchy în* (X, d) *(sau b-rectangular Cauchy, mai simplu b-g.m.s.), dacă pentru fiecare* $\varepsilon > 0$*, există* $n_0 \in \mathbb{N}$*, astfel încât* $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$*, pentru fiecare* $n > n_0$ *şi pentru orice* $p > 0$*. Vom nota în următorul mod :* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0$*, pentru fiecare* $p > 0$*.*
(c) (X, d) *se numeşte un b-g.m.s complet, dacă fiecare şir Cauchy converge la un element din* X*.*

Reamintim următoarea observaţie importantă din lucrarea [47] :

Observaţia 1.3.4. (1) Orice spaţiu metric şi orice spaţiu metric rectangular (g.m.s) is b-g.m.s.
(2) Limita unui şir într-un spaţiu b-rectangular nu este unică.
(3) Orice şir convergent într-un spaţiu de tip b-g.m.s nu este neapărat un şir Cauchy de tip b-g.m.s.

Pentru aceasta, vom reaminti o lemă importantă apărută în lucrarea [47], mai exact [Lema 1.3.5], când un şir b-rectangular Cauchy nu poate avea două puncte limită într-un b-g.m.s.

Lema 1.3.5. *Fie* (X, d) *un spaţiu b-rectangular, cu coeficientul* $s \geq 1$*. Considerăm* (x_n) *un şir b-rectangular Cauchy în* X*, astfel încât* $x_n \neq x_m$*, pentru fiecare* $n \neq m$*. Atunci* (x_n) *converge la cel mult un punct.*

Totodată, din lucrarea [69] şi din [47] reamintim următoarea lemă.

Lema 1.3.6. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric b-rectangular, având coeficientul* $s \geq 1$*. Considerăm* (x_n) *un şir ce satisface* $x_n \neq x_m$*, pentru fiecare* $n \neq m$*, cu* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$*.*
Dacă (x_n) *nu este un şir b-rectangular Cauchy, atunci există* $\varepsilon > 0$ *şi* $(m(k))_{k\in\mathbb{N}}$*,* $(n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ *două siruri de numere naturale, astfel încât*

$$\begin{aligned}
&d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \varepsilon, \\
&\frac{\varepsilon}{s} \leq \limsup_{k\to\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)-2}) \leq \varepsilon \text{ şi} \\
&\frac{\varepsilon}{s} \leq \limsup_{k\to\infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)-1}).
\end{aligned}$$

În [136], a fost prezentată o altă lemă importantă, legată de şirurile din spaţiile metrice b-rectangulare. O vom prezenta mai jos.

Lema 1.3.7. *Fie* (X, d) *un b-g.m.s., cu coeficientul* $s \geq 1$*.*
(a) Considerăm două şiruri (x_n) *şi* (y_n)*, astfel încât* x_n *converge la* $x \in X$ *şi* y_n *converge la* $y \in X$*, cu* $x \neq y$*. Totodată, presupunem că pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}$*,* $x_n \neq x$ *şi* $y_n \neq y$*. Atunci*

$$\frac{1}{s} d(x, y) \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq s d(x, y).$$

(b) Considerăm un element $y \in X$ *şi un şir b-rectangular Cauchy* (x_n)*, astfel încât* $x_n \neq x_m$*, pentru fiecare* $n \neq m$*. În acelaşi timp presupunem că şirul* (x_n) *converge la un element* $x \neq y$*. Atunci*

$$\frac{1}{s} d(x, y) \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_n, y) \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_n, y) \leq s d(x, y).$$

1.4 Spaţii metrice de tip con peste algebre Banach

În secţiunea de faţă încercăm să abordăm convergenţa şirurilor de contracţii definite pe spaţii metrice de tip con peste algebre Banach. în primul rând trebuie să reamintim că F.F. Bonsall [35] şi S.B. Nadler Jr. [97] au studiat câteva rezultate de stabilitate în ceea ce priveşte şirurile de contracţii definite pe un spaţiu metric (X, d). Mai mult, o extindere interesantă a rezultatelor anterioare a fost făcută de M. Păcurar [105], care a dezvoltat câteva rezultate de punct fix pentru convergenţa şirului de puncte fixe pentru aşa numitele aproape contracţii. M. Păcurar a prezentat două teoreme interesante, prima referitoare la convergenţa punctuală şi a doua referitoare la convergenţa uniformă a unui şir de contracţii ce au aceiaşi coeficienţi. Acum, cel de-al doilea obiectiv al acestei secţiuni este să amintim câteva noţiuni matematice care sunt bine stabilite în domeniul analizei neliniare. Pentru mai multe informaţii cu privire la aceste concepte, ne referim la [35] şi [105]. Prezentăm mai întâi ideea de convergenţă punctuală.

Definiţia 1.4.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Considerăm $T : X \to X$ şi $T_n : X \to X$ operatori daţi pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. Spunem că şirul $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge punctual la T în X, adică $T_n \xrightarrow{p} T$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $x \in X$, există $N = N(\varepsilon, x) > 0$, astfel încât pentru fiecare $n \geq N$, are loc $d(T_n x, Tx) < \varepsilon$.*

Observăm cu uşurinţă că în [Definiţia 1.4.1], se poate înlocui inegalitatea strictă $d(T_n x, Tx) < \varepsilon$ cu inegalitatea nestrictă, fără a schimba ideea din spatele conceptului de convergenţă punctuală.
În mod similar, noţiunea particulară de convergenţă uniformă a unui şir de funcţii este dată după cum urmează.

Definiţia 1.4.2. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Considerăm $T : X \to X$ şi $T_n : X \to X$ operatori daţi pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. Spunem că şirul $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform la T în X, adică $T_n \xrightarrow{u} T$, dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există $N = N(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru fiecare $n \geq N$ şi pentru orice $x \in X$, are loc : $d(T_n x, Tx) < \varepsilon$.*

De asemenea, pentru o familie de funcţii putem aminti pe scurt noţiunile fundamentale de echicontinuitate şi respectiv uniform echicontinuitate.

Definiţia 1.4.3. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T_n : X \to X$ operatori daţi, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. Familia $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte echicontinuă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $x \in X$, există $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, astfel încât pentru fiecare $y \in X$ ce satisface $d(x, y) < \delta$, are loc $d(T_n x, T_n y) < \varepsilon$.*

Acum, în ceea ce priveşte echicontinuitatea uniformă a unei familii de operatori, folosim următoarea definiţie.

Definiţia 1.4.4. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T_n : X \to X$ operatori daţi, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. Familia $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte uniform echicontinuă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru fiecare x şi y din X, ce satisfac $d(x, y) < \delta$, are loc că $d(T_n x, T_n y) < \varepsilon$.*

Ca şi până acum, se poate înlocui cu uşurinţă inegalitatea strictă cu una nestrictă, astfel încât cele două definiţii să fie echivalente între ele.
Acum, este timpul să reamintim că punctul de plecare al acestei subsecţiuni este articol de cercetare al lui L. Barbet şi K. Nachi. Conform [31], autorii au luat în considerare câteva rezultate de punct fix cu privire la convergenţa punctelor fixe ale unor funcţii de tip contracţie în contextul unui spaţiu metric (X, d). Noutatea lucrării menţionate deja constă în redefinirea convergenţei în punctuale şi a convergenţei uniforme, dar pentru operatori definiţi pe submulţimile întregului spaţiu şi nu pe întregul spaţiu metric (X, d). Convergenţa punctuală a fost generalizată de convergenţa G şi convergenţa uniformă a fost extinsă ca şi convergenţa H. Din motive de completitudine, amintim aici aceste două noţiuni.

Definiţia 1.4.5. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi X_n o submulţime nevidă a lui X, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. Considerăm $T_n : X_n \to X$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ şi $T_\infty : X_\infty \to X$ funcţii date. Spunem că T_∞ este G-funcţia limită a şirului $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, atunci când $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface proprietatea (G), adică*

$$(G) : \forall x \in X_\infty,\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n,\ \text{a.î. } x_n \to x \text{ şi } T_n x_n \to T_\infty x.$$

În ceea ce priveşte generalizarea convergenţei uniforme pentru funcţii care nu sunt definite pe întreg spaţiul metric, amintim următorul concept din [31].

Definiţia 1.4.6. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi X_n o submulţime nevidă a lui X, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. Considerăm $T_n : X_n \to X$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ şi $T_\infty : X_\infty \to X$ operatori daţi. Spunem că T_∞ este H-funcţia limită a şirului $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, atunci când $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface proprietatea (H), adică*

$$(H) : \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X_\infty,\ \text{a.î. } d(x_n, y_n) \to 0 \text{ şi } d(T_n x_n, T_\infty y_n) \to 0.$$

Acum, considerând $\mathcal{A}$ o algebră Banach cu elementul nul $\theta \in \mathcal{A}$ şi cu elementul unitate $e \in \mathcal{A}$, amintim noţiunea de con din lucrarea [83].

Definiţia 1.4.7. *O submulţime închisă şi nevidă P din $\mathcal{A}$ se numeşte con dacă următoarele afirmaţii au loc :*

$$\begin{aligned} &(P1) \quad \theta \text{ şi } e \text{ sunt în } P, \\ &(P2) \quad \alpha P + \beta P \subset P, \text{ pentru fiecare } \alpha, \beta \geq 0, \\ &(P3) \quad P^2 \subseteq P, \\ &(P4) \quad P \cap (-P) = \{\theta\}. \end{aligned}$$

Mai mult, amintim că P se numeşte con solid dacă $int(P) \neq \emptyset$, unde $int(P)$ reprezintă interiorul topologic al mulţimii P. Acum, precum în [59], se poate defini o ordine parţială $\preceq$ în raport cu conul P, astfel : dacă x şi y sunt în $\mathcal{A}$, atunci $x \preceq y$ dacă şi numai dacă $y - x \in P$. De asemenea, vom scrie $x \prec y$ pentru a specifica faptul că $x \neq y$ şi $x \preceq y$. În acelaşi timp, pentru $x, y \in \mathcal{A}$, notăm cu $x \ll y$ faptul că $y - x \in int(P)$, pe baza ideii că întotdeauna vom putea presupune că P este un con solid.
Din [Definiţia 1.6] din [83] şi din [Definiţia 1.1] din [85], introducem binecunoscutele distanţe de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$ şi prezentăm câteva terminologii utile.

Definiţia 1.4.8. *Fie X o mulţime nevidă şi $d : X \times X \to \mathcal{A}$ o funcţie care satisface următoarele condiţii :*

$$\begin{aligned} &(D1) \quad \theta \preceq d(x,y), \text{ pentru fiecare } x, y \in X, \text{ şi } d(x,y) = \theta \text{ dacă şi numai dacă } x = y, \\ &(D2) \quad d(x,y) = d(y,x), \text{ pentru fiecare } x, y \in X, \\ &(D3) \quad d(x,y) \preceq d(x,z) + d(z,y), \text{ pentru orice } x, y, z \in X. \end{aligned}$$

Atunci, (X,d) un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$.

Din lucrarea [160], reamintim următoarele concepte.

Definiţia 1.4.9. *Fie (X,d) un spaţiu metric complet de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$. În acelaşi timp, fie x un element din X şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ un şir dat. Atunci, avem următoarele :*

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la x, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, dacă pentru orice $c \gg \theta, \exists N = N(c) > 0$, astfel încât $d(x_n, x) \ll c$, $\forall n \geq N$.

(ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy , dacă pentru orice $c \gg \theta, \exists N = N(c) > 0$, astfel încât $d(x_n, x_m) \ll c$, $\forall n, m \geq N$.

(iii) (X,d) este complet dacă orice şir Cauchy este convergent.

În [Definiţia 1.4.9], $c \gg \theta$ reprezintă o notaţie utilă pentru $\theta \ll c$, deci nu este nicio confuzie în restul acestei secţiuni. Acum, urmând cartea lui Rudin de Analiză Funcţională [137], din motive de completitudine, amintim ideea razei spectrale a unui element din algebra Banach $\mathcal{A}$.

Lema 1.4.10. *Fie $k \in \mathcal{A}$ un element arbitrar dat. Atunci, prin definiţie raza spectrală a lui k este definită prin:*

$$\rho(k) = \lim_{n\to\infty} \|k^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \|k^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ şi $\rho(k) < |\lambda|$, atunci elementul $\lambda e - k$ este inversabil. Totodată, are loc şi

$$(\lambda e - k)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i}{\lambda^{i+1}}.$$

Acum, din [83], prezentăm câteva proprietăţi importante cu privire la raza spectrală a unui element al algebrei Banach $\mathcal{A}$ şi a unor noţiuni referitoare la ideea unui c-şir.

Definiţia 1.4.11. *Un şir $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dintr-o algebră Banach $\mathcal{A}$ înzestrată cu un con solid P se numeşte c-şir dacă şi numai dacă pentru orice $c \gg \theta$, există $N = N(c) \in \mathbb{N}$, pentru care $d_n \ll c$, pentru orice $n > N$.*

În mod alternativ, este uşor de observat că nu restrângem generalizarea dacă luăm $n \geq N$ în definiţia de mai sus. Mai mult, se poate utiliza, ca în cazul unui spaţiu metric obişnuit, definiţii alternative, cum ar fi Propoziţia 3.2 din [160] când şirul $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este din P. De asemenea, reamintim faptul că definiţia şirurilor convergente şi respectiv definiţia şirurilor Cauchy se pot scrie folosind [Definiţia 1.4.11] şi [Definiţia 1.8] din [83].
Mai mult, avem următoarele proprietăţi care pot fi reunite într-o singură lemă. În privinţa acestor proprietăţi, se pot urmări [59], [66], [83] şi [160].

Lema 1.4.12. *Considerăm $\mathcal{A}$ o algebră Banach. Atunci, următoarele afirmaţii sunt valide :*

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \textit{dacă } u \preceq v \ll w \textit{ sau } u \ll v \preceq w, \textit{ atunci } u \ll w,\\
&(2) \quad \textit{dacă } \theta \preceq u \ll c, \textit{ pentru orice } c \gg \theta, \textit{ atunci } u = \theta,\\
&(3) \quad \textit{dacă } P \textit{ este un con, } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ sunt două } c\textit{-şiruri în } \mathcal{A} \textit{ şi}\\
&\alpha, \beta \textit{ sunt în } P, \textit{ atunci } (\alpha u_n + \beta v_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ este tot un } c\textit{-şir},\\
&(4) \quad \textit{dacă } P \textit{ este un con şi } k \in P \textit{ cu } \rho(k) < 1, \textit{ atunci } ((k)^n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ este un } c\textit{-şir},\\
&(5) \quad \textit{dacă } k \in P, k \succeq \theta, \textit{ cu } \rho(k) < 1, \textit{ atunci } (e-k)^{-1} \succeq \theta.
\end{aligned}
$$

Pe de altă parte, încheiem această secţiune amintindu-le cititorilor că pentru exemple interesante de spaţii metrice complete de tip con peste algebre Banach şi pentru aplicaţii utile referitoare la ecuaţii funcţionale şi integrale, ne referim la [59], [60], [83] şi [163]. Nu în ultimul rând, dacă T este un operator, atunci cu F_T notăm muţimea de puncte fixe ale lui T.
În cele din urmă, având în vedere că scopul nostru este să folosim tehnici de punct fix pentru a dezvolta aplicaţii care au o conexiune semnificativă cu sisteme neliniare de ecuaţii şi cu sisteme de ecuaţii diferenţiale, facem referire la [59] şi [83] pentru unele aplicaţii importante la probleme diferenţiale neliniare prin intermediul rezultatelor de punct fix.

1.5 Spaţii metrice convexe

În [157], W. Takahashi a introdus un nou concept de convexitate în spaţii metrice şi a arătat că toate spaţiile normate şi submulţimile lor convexe sunt spaţii metrice convexe. Mai mult, el a oferit câteva exemple de spaţii metrice convexe. Reamintim definiţiile de bază şi proprietăţile spaţiilor metrice convexe. Pentru detalii, lăsăm cititorul să urmărească [5], [51], [147] şi [157]. De asemenea, pentru noţiuni de bază şi pentru rezultate referitoare la teoria spaţiilor metrice convexe ale lui Takahashi vom considera lucrările [77], [157]. În această secţiune vom reaminti unele dintre ele.

Definiţia 1.5.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Dacă există o funcţie $W : X \times X \times [0, 1] \to X$ ce satisface*

$$d\left(u, W\left(x, y, \lambda\right)\right) \leq \lambda d(u, x) + (1-\lambda)d(u, y), \textit{ pentru fiecare } u, x, y \in X,$$

atunci W se numeşte structură de convexitate, iar (X, d) se numeşte $W-$spaţiu metric convex sau spaţiu Takahashi metric convex, pe scurt TCS.

Fie X un spaţiu metric convex. Takahashi a arătat că bilele deschise şi bilele închise sunt submulţimi convexe ale lui X. Dacă $\{K_\alpha\}_{\alpha\in J}$ este o familie de submuţimi convexe a lui X, atunci intersecţia $\bigcap_{\alpha\in J} K_\alpha$ este o submulţime convexă din X.
În cazul spaţiilor metrice convexe, pentru rezultatele originale obţinute vom folosi deseori următoarele proprietăţi (vezi [51] şi [122]).

Observaţia 1.5.2. Pentru orice $x, y, z \in X$ şi $\lambda \in [0, 1]$, avem că

$$d\left(z, W\left(x, y, \lambda\right)\right) \geq (1-\lambda)d(z, y) - \lambda d(z, x).$$

Totodată, din [91], [92], [93] şi [159], reamintim câteva leme importante legate de ideea de spaţiu metric convex.

Lema 1.5.3. *Fie (X, d, W) un spaţiu metric convex. Atunci următoarele afirmaţii au loc :*

(i) $d(x, y) = d\left(x, W\left(x, y, \lambda\right)\right) + d\left(y, W\left(x, y, \lambda\right)\right)$, *pentru orice* $(x, y) \in X \times X$ *şi* $\lambda \in [0, 1]$.
(ii) $d\left(x, W\left(x, y, \lambda\right)\right) = (1-\lambda)d(x, y)$, *pentru orice* $x, y \in X$.
(iii) $d\left(y, W\left(x, y, \lambda\right)\right) = \lambda d(x, y)$, *pentru orice* $x, y \in X$.

Lema 1.5.4. *Fie (X, d, W) un spaţiu metric convex. Atunci :*

$$d\left(x, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) = d\left(y, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}d(x, y),$$

pentru orice $x, y \in X$.

Observăm că, dacă (X, d) este un TCS, atunci pentru fiecare $x, y \in X$ şi $\lambda \in [0, 1]$, avem câteva proprietăţi de bază :

Lema 1.5.5.

$$\begin{aligned}&(1)\ W(x, y, 1) = x \text{ şi } W(x, y, 0) = y;\\&(2)\ W(x, x, \lambda) = x;\end{aligned}$$

Acum vom da definiţia de spaţii hiperbolice care sunt cazuri particulare de spaţii metrice convexe. Conceptul de spaţii metrice hiperbolice va fi utilizat pentru studiul iteraţiei Mann în ceea ce priveşte operatorii multivoci.

Definiţia 1.5.6. *Un spaţiu hiperbolic (X, d, W) este un spaţiu metric (X, d) înzestrat cu o structură de convexitate $W : X \times X \times [0, 1] \to X$, ce satisface:*

$$\begin{aligned}&(W1)\ d(z, W(x, y, \lambda)) \leq (1-\lambda)d(z, x) + \lambda d(z, y);\\&(W2)\ d(W(x, y, \lambda_1), W(x, y, \lambda_2)) \leq |\lambda_1 - \lambda_2| d(x, y);\\&(W3)\ W(x, y, \lambda) = W(y, x, 1-\lambda);\\&(W4)\ d(W(x, z, \lambda), W(y, w, \lambda)) \leq (1-\lambda)d(x, y) + \lambda d(z, w);\end{aligned}$$

pentru orice $x, y, z, w \in X$ şi $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$.

Observaţia 1.5.7. Din proprietatea (W1) a [Definiţiei 1.5.6] , luând $x = z = y$, avem că

$$d(x, W(x, x, \lambda)) \leq \lambda d(x, x) = 0,$$

deci, are loc

$$x = W(x, x, \lambda),$$

pentru orice $\lambda \in [0, 1]$. Proprietatea (2) din [Lema 1.5.5] a unui TCS rămâne validă şi în spaţii hiperbolice.

Evident, fiecare spaţiu hiperbolic este un spaţiu metric convex Takahashi, dar, în general, reciproca nu este adevărată.

În continuare, vă prezentăm o lemă utilă în ceea ce priveşte spaţiile metrice hiperbolice. Din cauza faptului că definiţia spaţiilor metrice convexe Takahashi şi proprietatea (W1) a spaţiilor hiperbolice diferă, următoarea lemă va fi distinctă de [Lema 1.5.3].

Lema 1.5.8. *Fie (X, d, W) un spaţiu hiperbolic. Atunci :*

$$d(x, W(x, y, \lambda)) = \lambda d(x, y) \text{ şi } d(y, W(x, y, \lambda)) = (1-\lambda)d(x, y),$$

pentru orice $x, y \in X$ şi $\lambda \in [0, 1]$.

În întreaga literatură de specialitate, există o mulţime de scheme iterative clasice definite pe spaţii liniare normate şi pe spaţii metrice înzestrate cu o structură de convexitate. Din [51] şi [41], vom reaminti unele dintre ele, dar cu observaţia că, în articolul [41], autorii folosesc o versiune modificată a spaţiului metric convex, adică un spaţiu hiperbolic în sensul lui Goebel şi Kirk. Astfel, în ultima secţiune a tezei noastre, vom folosi schemele iterative definite cu ordinea inversă a celor doi termeni din şir care apar în structura de convexitate W. Mai mult, fie C o mulţime convexă a spaţiului convex metric (X, d, W) şi $T : C \to C$ o contracţie. Mai mult, considerăm $\alpha_n, b_n\ a_n$ şiruri în $(0, 1)$. Mai mult decât atât, din motive de completitudine, amintim procesele iterative clasice, cum ar fi Krasnoselskii, Mann şi Ishikawa în spaţii metrice convexe etc.

$$x_n = W(x_{n-1}, Tx_{n-1}, \lambda),$$

cu $\lambda \in [0,1]$.

Totodată, iteraţia Mann este definită în următorul fel :

$$x_n = W\left(x_{n-1}, Tx_{n-1}, \alpha_n\right),$$

cu $\alpha_n \in [0,1]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Bine-cunoscuta iteraţie Ishikawa este definită astfel :

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(x_n, Ty_n, \alpha_n\right) \\ y_n = W\left(x_n, Tx_n, \beta_n\right) \end{cases}, \tag{1.5.0.1}$$

cu $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Acum, facem următoarea observaţie importantă : deşi Berinde, Assadi şi Moosaei au folosit aceeaşi definiţie a spaţiilor metrice convexe, în [51], Berinde a definit iteraţia de tip Mann ca fiind

$$x_n = W\left(Tx_{n-1}, x_{n-1}, \alpha_n\right),$$

cu $\alpha_n \in [0,1]$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$.
Datorită faptului că mulţi autori folosesc proprietatea că $W(x,y,\lambda) = W(y,x,1-\lambda)$, cele două forme alternative ale iteraţiei de tip Mann pot fi transformate una în cealaltă, astfel încât nu există nicio confuzie. Astfel, în unele părţi din ultimul capitol ale prezentei teze de doctorat, vom folosi schemele iterative clasice bazate pe observaţia deja menţionată. Aşa cum am spus anterior, acest lucru nu duce la nicio confuzie, deoarece o schemă iterativă poate fi transformată într-o formă similară prin structura de convexitate a spaţiului de bază. Aceasta înseamnă că, în mai multe secţiuni ale tezei noastre, folosim o condiţie din spaţiile hiperbolice, care este satisfăcută în spaţiile normate liniare, adică: $W(x,y,\lambda) = W(y,x,1-\lambda)$, pentru fiecare $x, y \in X$ şi $\lambda \in [0,1]$. Aceste condiţii nu sunt deloc restrictive şi prezintă avantajul că termenii principali ai iteraţiei din structura de convexitate W pot fi schimbaţi unul cu altul şi acest lucru nu afectează convergenţa iteraţiei de punct fix.
Pe de altă parte, amintim că iteraţia Noor clasică poate fi scrisă ca

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(Ty_n, x_n, \alpha_n\right) \\ y_n = W\left(Tz_n, x_n, b_n\right) \\ z_n = W\left(Tx_n, x_n, a_n\right). \end{cases} \tag{1.5.0.2}$$

Punând $a_n = 0$ avem că $z_n = x_n$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, obţinem bine-cunoscuta iteraţia Ishikawa în spaţii metrice convexe :

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(Ty_n, x_n, \alpha_n\right) \\ y_n = W\left(Tx_n, x_n, b_n\right). \end{cases} \tag{1.5.0.3}$$

Iteraţia Ishikawa 1.5.0.3 diferă de varianta alternativă 1.5.0.1 precum am specificat în observaţia făcută anterior.
Punând $a_n = b_n = 0$, atunci $y_n = z_n = x_n$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, obţinem iteraţia Mann :

$$x_{n+1} = W\left(Tx_n, x_n, \alpha_n\right), \tag{1.5.0.4}$$

care diferă de forma alternativă prezentată mai sus, ca în cazul iteraţiei Ishikawa.
În acelaşi timp, reamintim schemea iterativă de tip Picard care apare în contextul principiului contracţiei al lui Banach :

$$x_{n+1} = Tx_n, \text{pentru orice n } \in \mathbb{N} \tag{1.5.0.5}$$

Alte scheme iterative importante sunt cele implicite. Din [41], reamintim :
Iteraţia implicită de tip Noor este definită astfel :

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(Tx_{n+1}, y_n, \alpha_n\right) \\ y_n = W\left(Ty_n, z_n, b_n\right) \\ z_n = W\left(Tz_n, x_n, a_n\right). \end{cases} \tag{1.5.0.6}$$

Făcând $a_n = 0$, atunci $z_n = x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi astfel obţinem iteraţia implicită Ishikawa în contextul spaţiilor metric convexe :

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(Tx_{n+1}, y_n, \alpha_n\right) \\ y_n = W\left(Ty_n, x_n, b_n\right). \end{cases} \tag{1.5.0.7}$$

În plus, punând $a_n = b_n = 0$ şi astfel obţinem că $y_n = z_n = x_n$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. În acest mod găsim iteraţia implicită de tip Mann :

$$x_{n+1} = W\left(Tx_{n+1}, x_n, \alpha_n\right). \tag{1.5.0.8}$$

Acum reamintim condiţii suficiente pentru convergenţa iteraţiei Noor, respectiv a iteraţiei Noor implicite, la punctul fix al unei contracţii.

Observaţia 1.5.9. Întrucât iteraţia Noor este mai generală decât iteraţiile Ishikawa şi Mann, amintim că, iteraţia Noor 1.5.0.2 este convergentă la punctul fix p al unei contracţii T, dacă $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$. Într-un mod similar, întrucât iteraţia implicită Noor este mai generală decât iteraţia Mann implicită şi decât iteraţia Ishikawa implicită, amintim că algoritmul implicit Noor 1.5.0.6 este convergent atunci când $\sum_{k=0}^{\infty}(1-\alpha_k) = \infty$.

Capitolul 2

Rezultate de punct fix pentru contracţii univoce în spaţii metrice generalizate

2.1 Rezultate pentru operatori pentru operatori univoci de tip Istrăţescu-Presić şi Presić definiţi prin intermediul funcţiilor de simulare

În această secţiune prezentăm noi tipuri de operatori Presić univoci, care sunt generalizări ale contracţiilor convexe de ordinul doi. Scopul nostru este să prezentăm câteva rezultate de punct fix pentru acest tip de operatori. De asemenea, oferim o teoremă a dependenţei de date. Mai departem subliniem că rezultatele noastre conţin cazul particular când $k = 1$, unde k este dimensiunea produsului cartezian al unui spaţiu metric complet dat. În primul rând, introducem noi tipuri de operatori de tip Presić care vor fi utilizaţi frecvent pe parcursul tezei.

Definiţia 2.1.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Considerăm $x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_k$ elemente arbitrare din X. Fie $\alpha_i \in [0, 1)$, cu $i = \overline{0, k-1}$ şi $\beta_{ij} \in [0, 1)$, cu $i, j = \overline{0, k}$.*
O funcţie $f : X^k \to X$ care satisface inegalitatea de mai jos

$$d\left(f\left(f\left(x_0, ..., x_0\right), ..., f\left(x_{k-1}, ..., x_{k-1}\right)\right), f\left(f\left(x_1, ..., x_1\right), ..., f\left(x_k, ..., x_k\right)\right)\right)$$
$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i d(x_i, x_{i+1}) + \sum_{i,j=0}^{k} \beta_{ij} d\left(f\left(x_i, ..., x_i\right), f\left(x_j, ..., x_j\right)\right)$$

se numeşte ***contracţie convexă de speţa întâi de tip Presić.***

Cel de-al doilea tip de operatori de tip Presić sunt prezentaţi mai jos.

Definiţia 2.1.2. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Considerăm $x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_k$ elemente arbitrare din X. Fie $\alpha_i \in [0, 1)$, cu $i = \overline{0, k-1}$ şi $\beta_{ij} \in [0, 1)$, cu $i, j = \overline{0, k}$.*
O funcţie $f : X^k \to X$ ce satisface inegalitatea de mai jos

$$d\left(f\left(f\left(x_0, ..., x_{k-1}\right), ..., f\left(x_0, ..., x_{k-1}\right)\right), f\left(f\left(x_1, ..., x_k\right), ..., f\left(x_1, ..., x_k\right)\right)\right)$$
$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i d(x_i, x_{i+1}) + \sum_{i,j=0}^{k} \beta_{ij} d\left(f\left(x_i, ..., x_i\right), f\left(x_j, ..., x_j\right)\right)$$

se numeşte ***contracţie convexă de speţa a doua de tip Presić.***

Definiţia 2.1.3. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $f : X^k \to X$ o funcţie dată. Atunci, operatorul $F : X \to X$, definit prin $F(x) = f(x, ..., x)$, pentru fiecare $x \in X$ se numeşte operatorul asociat al lui f.*

Primul nostru rezultat al prezentei secţiuni se referă la existenţa şi unicitatea punctului fix al unei funcţii f, adică elementul $x^* \in X$ care satisface $x^* = f(x^*, \dots, x^*)$. Mai precis, vom reda o teoremă care implică punctul fix al operatorului asociat F, adică $x^* \in X$ care satisface $x^* = F(x^*)$ pentru contracţiile convexe Presić de prima speţă şi pentru punctul fix al operatorului asociat contracţiilor convexe de tip Presić de a doua speţă.

Teorema 2.1.4. *Fie (X,d) un spaţiu metric complet. Considerăm următoarele ipoteze : (i) Fie $f : X^k \to X$ o contracţie convexă continuă de speţa întâi de tip Presić. Presupunem că coeficienţii funcţiei f din [Definiţia 2.1.1] satisfac*

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i + 2\sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{i=0}^{k-p}\sum_{j=k-p+1}^{k}\beta_{ij}\right) \in (0,1). \tag{2.1.0.1}$$

Atunci f admite un unic punct fix x^*, iar şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin 1.2.0.1, este convergent la x^*.
(ii) Fie $f : X^k \to X$ o contracţie convexă continuă de speţa a doua de tip Presić. Presupunem că coeficienţii din [Definiţia 2.1.2] satisfac condiţia anterioară, adică 2.1.0.1.
Atunci, precum în cazul precedent, f admite un unic punct fix x^*, iar şirul definit de relaţia 1.2.0.1 este convergent la x^*.

Pe baza rezultatelor noastre anterioare, considerăm cazul particular când $k = 1$. Aceasta înseamnă că concluziile rezultatelor de punct fix sunt valabile şi pentru contracţiile convexe continue de ordinul doi.

Corolarul 2.1.5. *Pentru $k = 1$, operatorul contracţie convexă de tip Presić de speţa întâi şi operatorul contracţie convexă de tip Presić de speţa a doua satisfac următoarea inegalitate metrică*

$$d(f^2x_0, f^2x_1) \le \alpha_0 d(x_0,x_1) + [\beta_{01} + \beta_{10}]\, d(fx_0, fx_1),$$

cu $\alpha_0 + [\beta_{10} + \beta_{01}] \in [0,1)$ for each x_0 şi x_1 elemente arbitrare din X. Aceasta înseamnă că operatorii Presić introduşi de noi sunt generalizări ale contracţiilor convexe de ordinul doi.

Pe de altă parte, din moment ce am folosit operatorul asociat, vom prezenta două forme în care acesta poate fi calculat:

Observaţia 2.1.6. Pentru operatorul asociat F al lui f, iteraţia de ordinul doi poate fi calculată în două moduri :
a) $F^2(x) = F(Fx) = f(Fx,...,Fx) = f\left(f(x,...,x),...,f(x,...,x)\right)$,
b) $F^2(x) = F\left(f(x,...,x)\right) = F(y)$, cu $y = f(x,...,x)$, unde $F(y) = f(y,...,y)$. So $F^2(x) = f(y,...,y) = f\left(f(x,...,x),...,f(x,...,x)\right)$.

În [Corolarul 2.1.5] am arătat că operatorii noştri nou-introduşi pot fi consideraţi ca operatori generalizaţi de contracţii convexe de ordinul doi în spaţii metrice de dimensiuni mari. Mai mult, este uşor de observat că operatorii de tip contracţie convexă Presić de prima speţă sunt, de asemenea, generalizări pentru binecunoscutele contracţii Presić. Până acum, am prezentat câteva observaţii şi un rezultat de punct fix pentru operatori Presić de prima şi de a doua speţă. Aceşti operatori de tip metric sunt importanţi datorită faptului că generalizează contracţiile convexe de ordinul doi date de Istrăţescu şi, de asemenea, contracţiile Presić. Acum, o altă proprietate importantă în ceea ce priveşte punctele fixe ale contracţiilor de tip generalizat este ideea dependenţei de date a punctelor fixe (a se vedea [95]), care va fi prezentată mai jos.

Teorema 2.1.7. *Fie (X,d) un spaţiu metric complet. Totodată, să considerăm $g : X^k \to X$ o funcţie arbitrară cu cel puţin un punct fix $x_g^* \in X$. Presupunem că au loc următoarele ipoteze :*
(i) Fie $f : X^k \to X$ o contracţie convexă continuă de tip Presić de speţa întâi, satisfăcând condiţia (i) din [Teorema 2.1.4].
Pe de altă parte, să presupunem că au loc următoarele : (a) există $\eta_1 > 0$, astfel încât $d(f(x,...,x), g(x,...,x)) \le \eta_1$, pentru fiecare $x \in X$,
(b) există $\eta_2 > 0$, astfel încât pentru fiecare $x \in X$, avem că

$$d(f(f(x,...,x),...,f(x,...,x)), g(g(x,...,x),...,g(x,...,x))) \le \eta_2\ .$$

Dacă x_f^* reprezintă unicul punct fix al lui f, rezultă că

$$d(x_f^*, x_g^*) \le \frac{\eta_2 + 2\sum\limits_{p=1}^{k}\sum\limits_{i=0}^{k-p}\left(\sum\limits_{j=k-p+1}^{k}\beta_{ij}\right)\cdot\eta_1}{1 - \left[\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1}\alpha_i\right) + 2\sum\limits_{p=1}^{k}\sum\limits_{i=0}^{k-p}\left(\sum\limits_{j=k-p+1}^{k}\beta_{ij}\right)\right]}\ ,$$

unde x_f^* este unicul punct al lui f.
(ii) Să considerăm $f : X^k \to X$ o contracţie convexă continuă de tip Presić de speţa a doua satisfăcând condiţia (ii) din [Teorema 2.1.4].
Într-un mod similar, presupunem că f and g satisface condiţiile anterioare (a) şi (b). Atunci, $d(x_f^*, x_g^*)$ admite aceeaşi margine superioară ca în cazul precedent.

Mai jos vom prezenta cazul particular când dimensiunea produsului cartezian al spaţiului metric X este 1. Aşadar, dependenţa de date a punctelor fixe între două funcţii, unde una dintre ele este un operator Presić, este considerată după cum urmează.

Corolarul 2.1.8. *Luând $k = 1$ in teorema anterioară, obţinem că $2\sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{i=0}^{k-p}\sum_{j=k-p+1}^{k}\beta_{ij}\right) = 2\beta_{1,0} = \beta_{1,0} + \beta_{0,1}$. Atunci rezultatul dependenţei de date este valid şi în cazul când $k = 1$, ca în [95], unde $d(x_f^*, x_g^*) \leq \dfrac{\eta_2 + \delta \cdot \eta_1}{1 - (\alpha + \delta)}$, cu $\delta := 2\beta_{10}$ and $\alpha := \alpha_0$.*

În ceea ce priveşte operatorii cu o anumită regularitate de tip Presić, în literatura de specialitate sunt date foarte puţine exemple netriviale. în cadrul unui spaţiu metric complet (X, d), în general, sunt prezentate câteva exemple clasice de funcţii $f : X^2 \to X$, unde f este fie liniară, fie o funcţie pe ramuri. în continuare, construim câteva exemple netriviale definite pe un produs cartezian cu un interval notat cu $[0, r]$, unde $r > 0$. Prezentăm şi câteva situaţii utile în care unele exemple particulare de operatori nu sunt de tip Presić. Mai mult, în construcţiile noastre, vom modifica nişte coeficienţi, astfel încât operatorii de tip Presić, daţi în [Definiţia 2.1.1] şi în [Definiţia 2.1.2] sunt de asemenea contracţii Presić.

Exemplul 2.1.9. Fie $f : [0, r]^2 \to [0, r]$, cu $r > 0$, definită astfel : $f(x, y) = \dfrac{(xy)^2}{a}$, with $a > 0$.
Pentru $r = 2$ and $a = 12$, f este o contracţie convexă de tip Presić de prima speţă, dar nu este un operator Presić. Totodată, pentru $r = 2$ şi $a = 34$, f este o contracţie convexă de tip Presić de prima speţă, care este simultan şi un operator Presić.

În următorul exemplu ne referim la o construcţie asociată unui alt tip de operator, ce satisface condiţia (ii) din [Teorema 2.1.4].

Exemplul 2.1.10. Considerăm funcţia $f : [0, r]^2 \to [0, r]$, definită prin $f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$, unde $r, \alpha, \beta > 0$. Pentru $r = 2$, $\beta = 0.27$ şi $\alpha = 0.03$, f este o contracţie convexă de tip Presić de speţa a doua, care nu este un operator Presić. Pe de altă parte, pentru $r = 3$, $\beta = \dfrac{1}{7}$ şi $\alpha = \dfrac{1}{47}$, f este o contracţie convexă de tip Presić de speţa a doua, care este simultan şi un operator Presić.

În ultimul nostru rezultat din această secţiune, prezentăm un caz de contracţie convexă Presić de speţa întâi, urmând condiţia (i) din [Teorema 2.1.4].

Exemplul 2.1.11. Fie funcţia f, definită prin $f(x, y) = (\tau_1 x - \tau_2 y)^2$, unde $f : X^2 \to X$, cu $X = [0, r]$, unde $r > 0$ şi $\tau_1, \tau_2 > 0, \tau_1 \neq \tau_2$. Pentru $r = 2$, $\tau_2 = 0.8$ şi $\tau_1 = 0.6$, f este o contracţie convexă de tip Presić de prima speţă care nu este un operator Presić. Pe de altă parte, pentru $r = 2$, $\tau_2 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ şi $\tau_1 - 0.45$, f este o contracţie convexă de tip Presić de speţa întâi, care este simultan şi un operator Presić.

Până acum, am prezentat câteva tipuri noi de operatori Presić, care extind celebrele contracţii convexe de ordinul doi şi, respectiv, contracţiile Presić. Destul de surprinzător, contracţiile Banach au fost generalizate prin ideea funcţiilor de simulare. Al doilea scop al prezentei secţiuni este de a introduce un concept adecvat prin intermediul noţiunii de funcţie de simulare, pentru a generaliza rezultatele de punct fix pentru operatorii univoci de tip Presić. Toată analiza de faţă se bazează pe lucrarea de cercetare asupra funcţiilor Boyd-Wong-Presić care au fost considerate în [148]. Vom da o definiţie intuitivă a unei funcţii de simulare, care este necesară pentru operatorii definiţi pe un produs cartezian de submulţimi nevide, înzestrate cu o metrică şi cu o relaţie de ordine parţială. Acest nou concept ne va permite să afirmăm că operatorii Boyd-Wong-Presić pot fi priviţi ca şi cazuri particulare ale noilor noştri operatori, daţi prin aşa-numitele funcţii de k-simulare.

Definiţia 2.1.12. *Fie* $\zeta : [0,\infty) \times [0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ *o funcţie dată. Spunem că* ζ *este o funcţie de* k*-simulare dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute :*
(I.) Dacă $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n = L > 0$, *unde* $s_n \downarrow L$ *şi* $t_n < s_n$, *pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}$, *atunci*

$$\limsup_{n\to\infty} \zeta(t_n, s_n, \ldots, s_n) < 0;$$

(II.) Dacă $t, s > 0$, *atunci* $\zeta(t, s, \ldots, s) < s - t$*;*
(III.) Dacă $s \geq 0$ *şi* $t_1, \ldots, t_k > 0$, *atunci funcţia* ζ *are proprietatea că*

$$\zeta(t_1, s, 0, \ldots, 0) + \zeta(t_2, 0, s, \ldots, 0) + \ldots \zeta(t_k, 0, \ldots, 0, s) \leq \zeta(t_1 + t_2 + \ldots t_k, s, \ldots, s).$$

Acum, urmând exemplele din [71], [76], [127], [135] şi [162] legate de funcţiile de simulare, primul nostru obiectiv este extinderea unor exemple adecvate pentru funcţiile de k-simulare, unde k este un număr natural dat. Deci, de acum încolo, vom lua în considerare un număr natural k.
Primul exemplu din această secţiune constă în alegerea funcţiei de simulare ca instrument necesar pentru cazul în care operatorul nostru Presić este de tip Boyd-Wong.

Exemplul 2.1.13. Fie $\zeta : [0,\infty) \times [0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ o funcţie definită prin

$$\zeta(t, s_1, \ldots, s_k) = \psi(s_1, \ldots, s_k) - t, \text{ unde } t \geq 0 \text{ şi } s_1, \ldots, s_k \geq 0,$$

unde funcţia $\psi : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$ satisface următoarele condiţii :

$$\psi(t, \ldots, t) < t, \text{ pentru fiecare } t > 0;$$
$$\psi(t, 0, \ldots, 0) + \psi(0, t, 0, \ldots, 0) + \ldots + \psi(0, 0, \ldots, 0, t) \leq \psi(t, \ldots, t), \text{ pentru orice } t \geq 0;$$
$$\limsup_{n\to\infty} \psi(s_n, \ldots, s_n) \leq \psi(L, \ldots, L), \text{ cu } s_n \downarrow L > 0, \text{ adică } \psi \text{ superior semincontinuă la dreapta.}$$

Exemplul 2.1.14. Fie $\zeta : [0,\infty) \times [0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ o funcţie definită prin

$$\zeta(t, s_1, \ldots, s_k) = \phi_1(s_1, \ldots, s_k) - \phi_2(t), \text{ unde } t \geq 0 \text{ şi } s_1, \ldots, s_k \geq 0,$$

unde funcţiile $\phi_1 : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$ şi $\phi_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ satisfac următoarele condiţii :

$$\phi_1(s, \ldots, s) < s, \text{ pentru orice } s > 0;$$
$$\phi_2(t) \geq t, \text{ pentru orice } t > 0;$$
$$\phi_1(s, 0, \ldots, 0) + \phi_1(0, s, 0, \ldots, 0) + \ldots + \phi_1(0, 0, \ldots, 0, s) \leq \phi_1(s, \ldots, s), \text{ pentru orice } s \geq 0;$$
$$\phi_2(t_1 + \ldots + t_k) \leq \phi_2(t_1) + \ldots \phi_2(t_k), \text{ pentru fiecare } t_1, \ldots, t_k > 0;$$
$$\phi_2 \text{ este inferior semincontinuă}$$
$$\limsup_{n\to\infty} \phi_1(s_n, \ldots, s_n) \leq \phi_1(L, \ldots, L), \text{ unde } s_n \downarrow L > 0.$$

Exemplul 2.1.15. Fie $\zeta : [0,\infty) \times [0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ o funcţie definită prin

$$\zeta(t, s_1, \ldots, s_k) = \left(\frac{s_1 + \ldots + s_k}{k}\right) \phi(s_1, \ldots, s_k) - t, \text{ unde } t \geq 0 \text{ şi } s_1, \ldots, s_k \geq 0,$$

unde funcţia $\phi : \mathbb{R}_+^k \to [0, 1)$ satisface următoarele condiţii :

$$\phi(s, 0, \ldots, 0) + \phi(0, s, 0, \ldots, 0) + \ldots + \phi(0, 0, \ldots, 0, s) \leq k\phi(s, \ldots, s), \text{ pentru fiecare } s \geq 0;$$
$$\limsup_{s\to r^+} \phi(s, \ldots, s) < 1, \text{ pentru orice } r > 0.$$

Exemplul 2.1.16. Fie $\zeta : [0,\infty) \times [0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ o funcţie definită prin

$$\zeta(t, s_1, \ldots, s_k) = s_1\phi_1(s_1) + \ldots + s_k\phi_k(s_k) - t, \text{ unde } t \geq 0 \text{ şi } s_1, \ldots, s_k \geq 0,$$

unde funcţiile $\phi_1, \ldots, \phi_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ satisfac următoarele condiţii :

$$\phi_1(s) + \phi_2(s) + \ldots + \phi_k(s) < 1, \text{ pentru orice } s > 0;$$
$$\phi_1, \ldots, \phi_k \text{ sunt superior semincontinue la dreapta.}$$

Acum, ultimele două exemple pe care le considerăm sunt legate de tipuri de funcţii mai concrete care apar în alegerea funcţiilor de k-simulare. Deoarece sunt cruciale pentru unele exemple particulare de operatori de tip Presić, le prezentăm aici în detaliu.

Exemplul 2.1.17. Fie $\zeta : [0,\infty) \times [0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ o funcţie definită prin

$$\zeta(t, s_1, \ldots, s_k) = \frac{s_1 + \ldots + s_k}{k} - \frac{t+2}{t+1}t, \text{ unde } t \geq 0 \text{ şi } s_1, \ldots, s_k \geq 0,$$

Acum, luând $\phi_1(t) = \ldots = \phi_k(t) = \dfrac{1}{k(t+1)}$, pentru fiecare $t \geq 0$ din [Exemplul 2.1.16], vom avea următorul exemplu ca şi caz particular.

Exemplul 2.1.18. Fie $\zeta : [0,\infty) \times [0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ o funcţie definită prin

$$\zeta(t, s_1, \ldots, s_k) = \frac{1}{k}\left[\frac{s_1}{s_1+1} + \ldots + \frac{s_k}{s_k+1}\right] - t, \text{ unde } t \geq 0 \text{ şi } s_1, \ldots, s_k \geq 0,$$

Acum, folosind [Definiţia 2.1.12] din secţiunea anterioară, introducem câţiva operatori care satisfac o inegalitate generalizată de tip Presić contracţie prin conceptul deja dat de funcţie de $k-$simulare.

Definiţia 2.1.19. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X^k \to X$ un operator dat. Atunci, T se numeşte Presić-$\mathcal{Z}$-contracţie (pe scurt $P - \mathcal{Z}-$contracţie), dacă satisface următoarea inegalitate :*

$$\zeta\left(d\left(T(z_1, \ldots, z_k), T(z_2, \ldots, z_{k+1})\right), d(z_1, z_2), \ldots, d(z_k, z_{k+1})\right) \geq 0,$$

pentru orice $z_1, \ldots, z_{k+1}$ elemente arbitrare din X.

Acum, folosind o funcţie adiţională $g : X \to X$, putem extinde definiţia precedentă.

Definiţia 2.1.20. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Totodată, fie $T : X^k \to X$ şi $g : X \to X$ doi operatori daţi. Atunci T se numeşte Presić-$(\mathcal{Z}, g)$-contracţie (pe scurt $P - (\mathcal{Z}, g)-$contracţie), dacă satisface următoarea inegalitate :*

$$\zeta\left(d\left(T(z_1, \ldots, z_k), T(z_2, \ldots, z_{k+1})\right), d(gz_1, gz_2), \ldots, d(gz_k, gz_{k+1})\right) \geq 0,$$

pentru orice $z_1, \ldots, z_{k+1}$ elemente arbitrare din X.

Definiţia 2.1.21. *Fie $(X, \preceq, d)$ un spaţiu metric ordonat, unde " $\preceq$ " este o ordine parţială pe X. Considerăm k un număr natural şi $T : X^k \to X$ un operator dat. Atunci T se numeşte Presić$-\mathcal{Z}$-contracţie ordonată (pe scurt $P - \mathcal{Z}$-contracţie ordonată), dacă satisface următoarea condiţie :*

$$\zeta\left(d(T(z_1, \ldots, z_k), T(z_2, \ldots, z_{k+1})), d(z_1, z_2), \ldots, d(z_k, z_{k+1})\right) \geq 0,$$

pentru orice elemente arbitrare $z_1, \ldots, z_{k+1} \in X$, astfel încât $z_1 \preceq z_2 \preceq \ldots \preceq z_k \preceq z_{k+1}$.

Definiţia 2.1.22. *Fie $(X, \preceq, d)$ un spaţiu metric ordonat, unde " $\preceq$ " este o ordine parţială pe X. Considerăm k un număr natural şi $T : X^k \to X$, $g : X \to X$ doi operatori. Atunci T se numeşte Presić-$(\mathcal{Z}, g)$-contracţie ordonată (pe scurt $P - (\mathcal{Z}, g)$-contracţie ordonată), dacă satisface următoarea condiţie :*

$$\zeta\left(d(T(z_1, \ldots, z_k), T(z_2, \ldots, z_{k+1})), d(gz_1, gz_2), \ldots, d(gz_k, gz_{k+1})\right) \geq 0,$$

pentru orice elemente arbitrare $z_1, \ldots, z_{k+1} \in X$, astfel încât $gz_1 \preceq gz_2 \preceq \ldots \preceq gz_k \preceq gz_{k+1}$.

Având definiţiile 2.1.19, 2.1.20, 2.1.21 şi 2.1.22, suntem gata să prezentăm rezultatul principal cu privire la operatori de tipul Presić, definiţi prin intermediul funcţiilor de k-simulare. în contextul unui spaţiu metric complet cu o ordine parţială, prezentăm un rezultat de punct fix pentru funcţii de o singură valoare. Pentru mai multe detalii despre spaţiile metrice înzestrate cu ordine parţială, lăsăm cititorul să urmărească [148]. Mai mult, pentru terminologia legată de puncte de coincidenţă şi puncte fixe comune, mulţimi bine ordonate şi funcţii slab compatibile, subliniem faptul că, în teorema următoare, folosim aceleaşi concepte ca în [104] şi [148].

Teorema 2.1.23. *Fie $(X, \preceq, d)$ un spaţiu metric ordonat complet şi $k \geq 1$ un număr natural fixat. Considerăm $T : X^k \to X$ şi $g : X \to X$ doi operatori, astfel încât $T(X^k) \subset g(X)$ and $g(X)$ este un subspaţiu închis al lui X. Presupunem că următoarele condiţii sunt satisfăcute :*

(H1) Operator T este $P-(\mathcal{Z}, g)$-contracţie ordonată,

(H2) Există $x_1 \in X,$ astfel încât $gx_1 \preceq T(x_1, \ldots, x_1)$,

(H3) Operatorul T este g-crescător,

(H4) Dacă $(gx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir crescător ce converge la $gu \in X$, atunci $gx_n \preceq gu$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi $gu \preceq ggu$.

Pe baza acestor ipoteze au loc următoarele concluzii : 1.) T şi g au cel puţin un punct de coincidenţă,
2.) Dacă T şi g sunt slab compatibile, atunci funcţiile au un punct fix comun,
3.) Mulţimea punctelor fixe comune pentru perechea (T, g) este $g-$bine ordonată este echivalent cu faptul că operatorii T şi g admit un unic punct fix comun.

în următoarea observaţie, prezentăm o conexiune directă între contracţiile $P-\mathcal{Z}$ şi operatorii de tip Presić, care sunt definite de o inegalitate strictă. Ideea din spatele acesteia este să alegem o pereche arbitrară $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ de elemente ale mulţimii nevide X dintr-o altă pereche $(z_1, \ldots, z_{k+1})$, în condiţiile în care

$$d(x_1, x_2) = \ldots = d(x_k, x_{k+1}) > 0$$

Această remarcă se bazează pe [Definiţia 2.1.19] şi pe [Observaţia 1.2] din articolul lui E. Karapinar [71].

Observaţia 2.1.24. Dacă $T : X^k \to X$ este o $P-\mathcal{Z}$-contracţie, atunci

$$d(T(x_1, \ldots, x_k), T(x_2, \ldots, x_{k+1})) < d(x_i, x_{i+1}), \text{ cu } i = \overline{1, k}, \tag{2.1.0.2}$$

unde $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ este perechea amintită înaintea acestei observaţii.
Dovedim acest lucrum prin presupunerea că $d(x_i, x_{i+1}) > 0$, pentru orice $i = \overline{1, k}$. Atunci, dacă $T(x_1, \ldots, x_k) = T(x_2, \ldots, x_{k+1})$, concluzia este validă. Pe de altă parte, putem presupune că $d(T(x_1, \ldots, x_k), T(x_2, \ldots, x_{k+1})) > 0$. Aplicând proprietatea $(II.)$ funcţiilor de simulare perechii $(x_1, \ldots, x_{k+1})$, avem că

$$\begin{aligned} 0 &\leq \zeta(d(T(x_1, \ldots, x_k), T(x_2, \ldots, x_{k+1})), d(x_i, x_{i+1}), \ldots, d(x_i, x_{i+1})) \\ &< d(x_i, x_{i+1}) - d(T(x_1, \ldots, x_k), T(x_2, \ldots, x_{k+1})), \ i = \overline{1, k}, \end{aligned}$$

atunci 2.1.0.2 are loc.

Acum, ca aplicaţii, prezentăm câteva consecinţe directe cu privire la [Teorema 2.1.23]. De asemenea, deducem câteva observaţii cu privire la aplicaţii în spaţii metrice complete, cu ordinea parţială obişnuită. în cele din urmă, sunt prezentate câteva exemple cu privire la corolariile menţionate deja în contextul punctelor fixe comune şi de coincidenţă ale operatorilor de tip Presić, introduse de noi prin conceptul de funcţie de $k-$simulare.
După [Exemplul 2.1.13] şi [Teorema 2.1.23], avem următoarea consecinţă, adică rezultatul principal din [148] este un caz particular al [Teoremei 2.1.23], unde avem o teoremă de punct fix pentru operatorii Boyd-Wong-Presić.

Corolarul 2.1.25. *Fie $(X, \preceq, d)$ un spaţiu metric complet ordonat şi $k \geq 1$ un număr întreg fixat. Fie $T : X^k \to X$ şi $g : X \to X$ două funcţii, astfel încât $T(X^k) \subset g(X)$, iar $g(X)$ este un subspaţiu închis al lui X. În plus, să presupunem că este îndeplinită următoarea condiţie:*

$$d\left(T(z_1, \ldots, z_k), T(z_2, \ldots, z_{k+1})\right) \leq \psi(d(gz_1, gz_2), \ldots, d(gz_k, gz_{k+1})),$$

pentru fiecare punct arbitrar $z_1, \ldots, z_{k+1} \in X$, astfel încât $gz_1 \preceq gz_2 \preceq \ldots \preceq gz_k \preceq gz_{k+1}$, unde funcţia ψ este cea din [Exemplul 2.1.13]. Mai mult, să presupunem că operatorul T este înzestrat cu proprietăţile $(H2)$, $(H3)$ şi $(H4)$ din [Teorema 2.1.23]. În aceste condiţii, concluziile 1.), 2.) şi 3.) din [Teorema 2.1.23] sunt valide.

Acum, folosind celelalte exemple din secÈŽiunea a doua, avem urmĂČtoarele rezultate.

Corolarul 2.1.26. *Fie* $(X, \preceq, d)$ *un spaţiu metric complet ordonat şi* $k \geq 1$ *un număr întreg fixat. Fie* $T : X^k \to X$ *şi* $g : X \to X$ *două funcţii, astfel încât* $T(X^k) \subset g(X)$*, iar* $g(X)$ *este un subspaţiu închis al lui* X*. În plus, să presupunem că este îndeplinită următoarea condiţie:*

$$\phi_2(d\,(T(z_1, \ldots, z_k), T(z_2, \ldots, z_{k+1}))) \leq \phi_1(d(gz_1, gz_2), \ldots, d(gz_k, gz_{k+1})),$$

pentru fiecare punct arbitrar $z_1, \ldots, z_{k+1} \in X$*, astfel încât* $gz_1 \preceq gz_2 \preceq \ldots \preceq gz_k \preceq gz_{k+1}$*, unde funcţiile* ϕ_1 *şi* ϕ_2 *sunt cele din [Exemplul 2.1.14]. Mai mult, să presupunem că operatorul* T *este înzestrat cu proprietăţile* $(H2)$*,* $(H3)$ *şi* $(H4)$ *din [Teorema 2.1.23]. În aceste condiţii, concluziile 1.), 2.) şi 3.) din [Teorema 2.1.23] sunt valide.*

Corolarul 2.1.27. *Fie* $(X, \preceq, d)$ *un spaţiu metric complet ordonat şi* $k \geq 1$ *un număr întreg fixat. Fie* $T : X^k \to X$ *şi* $g : X \to X$ *două funcţii, astfel încât* $T(X^k) \subset g(X)$*, iar* $g(X)$ *este un subspaţiu închis al lui* X*. În plus, să presupunem că este îndeplinită următoarea condiţie:*

$$d\,(T(z_1, \ldots, z_k), T(z_2, \ldots, z_{k+1})) \leq \frac{d(gz_1, gz_2) + \ldots + d(gz_k, gz_{k+1})}{k} \cdot \phi(d(gz_1, gz_2), \ldots, d(gz_k, gz_{k+1})),$$

pentru fiecare punct arbitrar $z_1, \ldots, z_{k+1} \in X$*, astfel încât* $gz_1 \preceq gz_2 \preceq \ldots \preceq gz_k \preceq gz_{k+1}$*, unde funcţia* ϕ *este cea din [Exemplul 2.1.15]. Mai mult, să presupunem că operatorul* T *este înzestrat cu proprietăţile* $(H2)$*,* $(H3)$ *şi* $(H4)$ *din [Teorema 2.1.23]. În aceste condiţii, concluziile 1.), 2.) şi 3.) din [Teorema 2.1.23] sunt valide.*

Corolarul 2.1.28. *Fie* $(X, \preceq, d)$ *un spaţiu metric complet ordonat şi* $k \geq 1$ *un număr întreg fixat. Fie* $T : X^k\ toX$ *şi* $g : X \to X$ *două funcţii, astfel încât* $T(X^k) \subset g(X)$*, iar* $g(X)$ *este un subspaţiu închis al lui* X*. În plus, să presupunem că este îndeplinită următoarea condiţie:*

$$d\,(T(z_1, \ldots, z_k), T(z_2, \ldots, z_{k+1})) \leq d(gz_1, gz_2)\phi_1(d(gz_1, gz_2)) + \ldots + d(gz_k, gz_{k+1})\phi_k(d(gz_k, gz_{k+1})),$$

pentru fiecare punct arbitrar $z_1, \ldots, z_{k+1} \in X$*, astfel încât* $gz_1 \preceq gz_2 \preceq \ldots \preceq gz_k \preceq gz_{k+1}$*, unde funcţiile* $\phi_1, \ldots, \phi_k$ *sunt preluate din [Exemplul 2.1.16]. Mai mult, să presupunem că operatorul* T *este înzestrat cu proprietăţile* $(H2)$*,* $(H3)$ *şi* $(H4)$ *din [Teorema 2.1.23]. În aceste condiţii, concluziile 1.), 2.) şi 3.) din [Teorema 2.1.23] sunt valide.*

Din alegerea funcţiei de $k-$simulare din [Exemplul 2.1.17], avem următoarea consecinţă a rezultatului nostru principal.

Corolarul 2.1.29. *Fie* $(X, \preceq, d)$ *un spaţiu metric complet ordonat şi* $k \geq 1$ *un număr întreg fixat. Fie* $T : X^k \to X$ *şi* $g : X \to X$ *două funcţii, astfel încât* $T(X^k) \subset g(X)$*, iar* $g(X)$ *este un subspaţiu închis al lui* X*.În plus, să presupunem că este îndeplinită următoarea condiţie:*

$$\frac{d\,(T(z_1, \ldots, z_k), T(z_2, \ldots, z_{k+1})) + 2}{d\,(T(z_1, \ldots, z_k), T(z_2, \ldots, z_{k+1})) + 1} d\,(T(z_1, \ldots, z_k), T(z_2, \ldots, z_{k+1})) \leq \frac{d(gz_1, gz_2) + \ldots + d(gz_k, gz_{k+1})}{k},$$

pentru fiecare punct arbitrar $z_1, \ldots, z_{k+1} \in X$*, astfel încât* $gz_1 \preceq gz_2 \preceq \ldots \preceq gz_k \preceq gz_{k+1}$*. Mai mult, să presupunem că operatorul* T *este înzestrat cu proprietăţile* $(H2)$*,* $(H3)$ *şi* $(H4)$ *din [Teorema 2.1.23]. În aceste condiţii, concluziile 1.), 2.) şi 3.) din [Teorema 2.1.23] sunt valide.*

Acum, ultimul corolar constă în alegerea funcţiei de k-simulare, folosind [Exemplul 2.1.18].

Corolarul 2.1.30. *Fie* $(X, \preceq, d)$ *un spaţiu metric complet ordonat şi* $k \geq 1$ *un număr natural. Fie* $T : X^k \to X$ *şi* $g : X \to X$ *două funcţii, astfel încât* $T(X^k) \subset g(X)$ *şi* $g(X)$ *este un subspaţiu închis al lui* X*. Presupunem că următoarea condiţie e satisfăcută :*

$$d\,(T(z_1, \ldots, z_k), T(z_2, \ldots, z_{k+1})) \leq \frac{1}{k}\left[\frac{d(gz_1, gz_2)}{d(gz_1, gz_2) + 1} + \ldots + \frac{d(gz_k, gz_{k+1})}{d(gz_k, gz_{k+1}) + 1}\right],$$

pentru fiecare punct arbitrar $z_1, \ldots, z_{k+1} \in X$*, astfel încât* $gz_1 \preceq gz_2 \preceq \ldots \preceq gz_k \preceq gz_{k+1}$*. Mai mult, să presupunem că operatorul* T *este înzestrat cu proprietăţile* $(H2)$*,* $(H3)$ *şi* $(H4)$ *din [Teorema 2.1.23]. În aceste condiţii, concluziile 1.), 2.) şi 3.) din [Teorema 2.1.23] sunt valide.*

Ca şi în [Teorema 7] şi [Corolarul 6] din [148] şi urmând rezultatul nostru principal şi din consecinţele obţinute mai sus, încheiem această secţiune reamintind că aceleaşi rezultate de punct fix sunt valabile chiar şi în cazul spaţiilor metrice complete. .

Observaţia 2.1.31. Pentru cazul în care X este o mulţime nevidă înzestrată doar cu o metrică completă d, concluziile din [Teorema 2.1.23] şi din toate consecinţele acestei secţiuni rămân valabile, unde inegalităţile de tip metric au loc pentru orice puncte arbitrare $z_1, \ldots, z_{k+1} \in X$. Pe de altă parte, putem lua funcţia g ca fiind funcţia identitate 1_X pentru a obţine câteva rezultate de punct fix doar pentru operatorul $T : X^k \to X$.

Acum, scopul nostru este să validăm [Corolarul 2.1.25], [Corolarul 2.1.29] şi [Corolarul 2.1.30], pe baza [Observaţiei 2.1.31], în cadrul spaţiilor metrice complete înzestrate cu ordinea parţială obişnuită. Mai mult, pe baza rezultatului nostru principal, şi anume [Teorema 2.1.23], vom extinde şi generaliza în mod natural unele exemple de tip Boyd-Wong şi câteva exemple când $k = 1$, care pot fi găsite în [76], [127] şi, respectiv, [148]. Pe baza [Exemplului 3] din [148], considerăm un exemplu de operator definit pe X^2 cu valori în X, astfel încât nu este o contracţie Presić, dar este de tip Boyd-Wong. Mai mult, aceste exemple justifică rezultatele legate de punct fixe de coincidenţă şi de puncte fixe comune obţinute de noi în [Corolarul 2.1.25].

Exemplul 2.1.32. Fie $X = [0, \infty)$,$T : X^2 \to X$ şi $g : X \to X$ funcţii definite în felul următor :

$$T(x_1, x_2) = \frac{p(x_1 + x_2) + 2x_1x_2}{(x_1 + x_2)(q + 1) + x_1x_2(q + 2) + qp^2} \text{ şi } g(x) = \frac{x}{p},$$

unde $p \geq 1$ şi $q \geq 3$. Mai departe, considerăm funcţia $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definită astfel :

$$\psi(t_1, t_2) = \frac{t_1 + t_2 + 2t_1t_2}{3t_1t_2 + 3t_1 + 3t_2 + 3 + |t_1 - t_2|}.$$

Operatorii T şi g comută în punctul lor fix unic şi, prin urmare, sunt slab compatibili, iar funcţia ψ este continuă, cu $\psi(t, t) = \dfrac{2}{3}\dfrac{t}{t + 1} < t$ şi $\psi(0, t) + \psi(t, 0) = \dfrac{2t}{3(t + 1) + t} \leq \psi(t, t)$, deci această funcţie are proprietăţile din [Corolarul 2.1.25].

Acum, inspirându-ne din [76] şi [127], oferim acum două exemple de funcţii care satisfac [Corolarul 2.1.29] şi, respectiv, [Corolarul 2.1.30], într-un context general, adică pentru un operator $T : X^k \to X$, unde k este un număr natural arbitrar fixat. Cel de-al doilea exemplu se referă la [Corolarul 2.1.29], iar ultimul exemplu este legat de [Corolarul 2.1.30].

Exemplul 2.1.33. Fie $X = [1, \infty)$, $T : X^k \to X$ şi $g : X \to X$ nişte funcţii, definite în felul următor :

$$T(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1 + \left(\dfrac{x_1^2 + \ldots + x_k^2}{k}\right)}{2} = \frac{k + (x_1^2 + \ldots + x_k^2)}{2k},$$
$$g(x) = x^2.$$

Perechea (T, g) este slab compatibilă şi singurul punct fix comun este $x = 1$.
Mai mult, se poate observa că operatorul T nu este o contracţie Presić. Pe de altă parte, se poate arăta că inegalitatea din [Corolarul 2.1.29] este valabilă.

În final, ultimul exemplu se referă la [Corolarul 2.1.30].

Exemplul 2.1.34. Fie $X = [0, 1]$, $k \geq 1$ şi $p \geq 2$ un număr natural. Definim funcţiile $T : X^k \to X$, respectiv $g : X \to X$, în modul următor :

$$T(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{k}\left[\frac{x_1}{x_1 + p} + \ldots + \frac{x_k}{x_k + p}\right],$$
$$g(x) = \frac{x}{p}.$$

Operatorii T şi g comută în unicul lor punct fix comun, $x = 0$. Totodată, condiţia de contracţie din [Corolarul 2.1.30] se verifică imediat.

2.2 Contracţii generalizate, puncte fixe şi spaţii b-rectangulare

În primul rând, amintim câteva rezultate importante privind spaţiile metrice b-rectangulare care vor fi utilizate în toată această secţiune. În [52], George et.al. au studiat funcţii contractive în spaţii metrice rectangulare, cum ar fi operatorii Kannan, adică :

$$d(Tx,Ty) \le \lambda \left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right], \text{ cu } \lambda \in \left[0, \frac{1}{s+1}\right].$$

În [47], Radenovic et.al. au extins aceste rezultate la funcţii care satisfac

$$d(fx,gy) \le ad(gx,gy) + b\left[d(gx,fx)+d(gy,fy)\right],$$

pentru fiecare $x, y \in X$ şi au studiat rezultate legate de puncte fixe comune şi de puncte de coincidenţă pentru perechea de operatori (f, g), atunci când îndeplinesc anumite condiţii.
De asemenea, pentru mai multe rezultate în spaţii metrice b-rectangulare şi pentru o analiză consistentă pe diferite spaţii metrice generalizate, recomandăm [68] şi [69].

în ceea ce priveşte funcţiile de tip contracţie generalizată, amintim câteva progrese recente în acest subdomeniu al teoriei punctului fix.
În [72], Karapinar a studiat rezultate legate de unicul punctul fix pentru unele contracţii generalizate definite pe spaţiile Banach înzestrate cu o metrică de tip con care îndeplinesc următoarele condiţii contractive.

$$d(x,Tx)+d(y,Ty) \le pd(x,y),$$

unde $p \in [0, 2)$ şi

$$ad(Tx,Ty) + b\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right] \le sd(x,y),$$

cu $0 \le s + |a| - 2b < 2(a + b)$.
Mai mult, în 2009, Kumar [78] a prezentat câteva teoreme pentru două funcţii care satisfac următoarea condiţie

$$d(fx,fy) \ge qd(gx,gy),$$

cu $q > 1$, unde f este surjectivă iar g este injectivă.
Moosaei, Azizi, Asadi şi Wang au generalizat rezultatele lui Karapinar astfel:
În [91], Moosaei a folosit iteraţia lui Krasnoselskii definită în spaţii metrice convexe, pentru următoarele funcţii, care satisfac

$$d(Tx,Ty)+d(x,Tx)+d(y,Ty) \le rd(x,y),$$

unde $r \in [2, 5)$, respectiv

$$ad(x,fx)+bd(y,fy)+cd(fx,fy) \le kd(x,y),$$

cu $2b - |c| \le k < 2(a + b + c) - |c|$.
În [93], Moosaei şi Azizi au extins rezultatele la operatori generalizaţi de tip de contracţie, studiind puncte de coincidenţă pentru diverse funcţii, precum

$$ad(Sx,Tx)+bd(Sy,Ty)+cd(Tx,Ty) \le ed(x,y),$$

unde $T(K) \subset S(K)$, K şi $S(K)$ sunt submulţimi închise şi convexe ale unui spaţiu metric convex, iar coeficienţii satisfac $2b - |c| \le e < 2(a + b + c) - |c|$.
Cu toate acestea, în 2014, Moosaei [92] a studiat o pereche mai generalizată de contracţii (S, T), unde

$$\alpha d(Tx,Ty) + \beta\left[d(Sx,Tx)+d(Sy,Ty)\right] + \gamma\left[d(Sx,Ty)+d(Sy,Tx)\right] \le \eta d(Sx,Sy),$$

cu unele ipoteze privind coeficienţii contractivi, şi anume

$$2\beta + \gamma - |\gamma| - \alpha \le \eta < \alpha + 2\beta + 3\gamma - |\gamma| \text{ şi } \beta + \gamma \le 0.$$

Asadi în [28], folosind aceeaşi iteraţie (Krasnoselskii) pe spaţii metrice convexe, a studiat punctele fixe pentru operatori generalizaţi de tip Hardy-Rogers, după cum urmează

$$ad(x,Tx)+bd(y,Ty)+cd(Tx,Ty)+ed(Ty,x)+fd(y,Tx) \le kd(x,y),$$

unde

$$\frac{b+e-|f|(1-\lambda)-|c|\lambda}{1-\lambda} \leq k < \frac{a+b+c+e+f-|c|\lambda-|f|(1-\lambda)}{1-\lambda},$$

unde $\lambda \in [0,1]$ este coeficientul din iteraţia Krasnoselskii.
Mai mult, Wang şi Zhang, în [159], au extins rezultatele de mai sus pentru perechi de contracţii generalizate de tip Hardy-Rogers.
Acum, funcţiile de tip expansiv şi expansiv generalizat pot fi considerate un caz particular al contracţiilor generalizate. În ceea ce priveşte cele anterioare, amintim unele progrese recente în studiul acestui tip de operatori.
În 2011, Aage [1] a considerat funcţii expansive în spaţii metrice înzestrate cu o metrică de tip con. Forma mai generală a acestor funcţii, având în prealabil unele condiţii, sunt

$$d(Tx,Ty) \geq kd(x,y) + ld(x,Tx) + pd(y,Ty),$$

unde T satisface

$$K \geq -1,\ p < 1,\ l > 1 \text{ şi } k+l+p > 1.$$

Aydi et.al. au studiat în [29] unele teoreme de punct fix pentru perechi de funcţii expansive în spaţii înzestrate cu aşa numitele c distanţe. Le reamintim folosind notaţiile standard pentru spaţiile metrice, adică

$$d(Tx,Ty) \geq ad(fx,fy) + bd(Tx,fx) + cd(Ty,fy),$$

cu $b < 1$, $a \neq 0$, $f(X) \subseteq T(X)$ şi $(T(X),d) \subset (X,d)$ complet.
De asemenea, în spaţiile metrice rectangulare de tip con, au fost studiate unele teoreme de punct fix. De exemplu, în [101], o pereche de funcţii ce satisface

$$d(fx,fy) \geq \alpha d(gx,gy) + \beta d(fx,gx) + \gamma d(fy,gy)$$

a fost studiată, cu unele ipoteze privind coeficienţii α, β şi γ şi pe codomeniul funcţiilor g şi f.
Aceste perechi de funcţii generalizate au fost extinse de Olaoluwa şi Olaleru în [98], dar în cadrul spaţiilor b-metrice şi pentru o pereche de patru operatori, după cum urmează

$$d(fx,gy) \geq a_1 d(Sx,Ty) + a_2 d(fx,Sx) + a_3 d(gy,Ty) + a_4 d(fx,Ty) + a_5 d(gy,Sx).$$

De asemenea, reamintim alte studii efectuate în spaţii de tip metric şi pentru operatori de tip expansiv, după cum urmează: în [164] au fost studiate funcţii generalizate pe spaţii metrice rectangulare cu metrică de tip con, folosind ideea de scalarizare, din [129], funcţii care satisfac

$$d(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y))$$

Totodată, aceste tipuri de funcţii au fost studiate pe spaţii metrice rectangulare de tip con şi în [99]. S-au dezvoltat teoreme de punct fix pentru un tip general de operatori expansivi, ce satisfac

$$\phi(d(S^2x,TSy)) \geq \frac{1}{3}\left[d(Sx,S^2x) + d(TSy,Sy) + d(Sx,Sy)\right],$$

unde ϕ este o funcţională ce satisface anumite condiţii metrice.
De asemenea, în contextul spaţiilor metrice dislocate, Daheriya et.al. [45] au studiat operatori expansivi de tip raţional, iar în [19] Alghamdi a studiat rezultate de punct fix pentru funcţii expansive generalizate în spaţii similare spaţiilor b-metrice.
Primul nostru scop este acela de a reaminti anumite noţiuni ce se vor dovedi utile în extinderea unor rezultate de punct fix pentru o clasă hibridă de funcţii generalizate de tip contractiv şi pentru unii operatori de tip expansiv în contextul spaţiilor metrice b-rectangulare.
În [91], Moosaei a prezentat câteva teoreme de punct fix pentru contracţii generalizate folosind schema iterativă a lui Krasnoselskii în contextul spaţiilor metrice convexe complete. Cu toate acestea, aceste rezultate sunt valabile chiar şi pentru schema iterativă Picard. Scopul nostru este de a extinde aceste rezultate teoretice pentru şirul de aproximare succesivă în cadrul spaţiilor metrice complete b-rectangulare. De asemenea, se poate observa că anumite rezultate se pot extinde, precum cele din Aage [1], de la spaţiile metrice de tip con la spaţiile metrice rectangulare şi b -rectangulare. Mai mult, ne propunem să generalizăm rezultatele

de punct fix ale lui Patil din [101]. Pentru a ne valida teoremele, folosim exemple similare celor prezentate în [1], [69] şi respectiv [101]. Operatorii generalizaţi de tip contractiv pe care îi vom lua în considerare în această secţiune sunt funcţii $f : X \to X$ definite pe un spaţiu metric $b-$rectangular, care îndeplinesc următoarea condiţie:

$$ad(x, fx) + bd(y, fy) + cd(fx, fy) \leq kd(x, y).$$

Vom analiza două cazuri separate: când $c > 0$ şi când $c < 0$. De asemenea, pentru funcţiile de tip expansiv, adică atunci când $c < 0$, considerăm două tipuri de şiruri, şi anume iteraţia clasică Picard $x_{n+1} = fx_n$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ şi iteraţia Picard âĂđinversăâĂİ, adică $x_n = fx_{n+1}$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, atunci când operatorul f este surjectiv. Primul nostru rezultat este o teoremă pentru existenţa şi unicitatea punctului fix al unei funcţii care satisface condiţia contractivă de mai sus. Tehnica pe care o vom folosi se bazează pe [Lema 1.3.6].

Teorema 2.2.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric complet b-rectangular (b-gms), având coeficientul $s > 1$. Considerăm o funcţie $f : X \to X$, satisfăcând următoarea condiţie de tip contracţie generalizată :*

$$ad(x, fx) + bd(y, fy) + cd(fx, fy) \leq kd(x, y),$$

unde $0 \leq k - b < \dfrac{a + c}{s}$. Totodată, presupunem că următoarele condiţii sunt verificate :

$$\begin{aligned}
&(A)\ \textit{Dacă } c > 0 \textit{ şi } k \geq 0, \ \textit{atunci } \frac{k}{c} < \frac{1}{s},\\
&(B)\ \textit{Dacă } c > 0 \textit{ şi } k \leq 0, \ \textit{atunci nu vom avea alte condiţii auxiliare},\\
&(C)\ \textit{Dacă } c < 0 \textit{ şi } k < 0, \ \textit{atunci } \frac{k}{c} > s^2.
\end{aligned}$$

Apoi, şirul Picard (x_n), definit prin $x_{n+1} = fx_n$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ converge la un punct fix al funcţiei f.

Referitor la [Teorema 2.2.1], dăm două exemple care validează cazurile (A) şi (C):
Din [69], reamintim un exemplu de spaţiu metric rectangular complet.

Exemplul 2.2.2. Fie $X = A \cup B$, unde $A = \left\{1/n \middle| n = \overline{2, 5}\right\}$ şi $B = [1, 2]$. Considerăm $d : X \times X \to [0, \infty)$, astfel încât $d(x, y) = d(y, x)$ şi :

$$\begin{aligned}
&d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = d\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{100},\\
&d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) = d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{100},\\
&d\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) = d\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{100},\\
&d(x, y) = (x - y)^2, \ \text{în cazul contrar.}
\end{aligned}$$

Atunci (X, d) este un spaţiu metric complet b-rectangular având coeficientul $s = 3$. În plus, (X, d) nu este nici spaţiu metric şi nici spaţiu metric rectangular.

Dăm următorul exemplu de funcţie f care satisface ipotezele din cazul (A) al [Teoremei 2.2.1].

Exemplul 2.2.3. Fie (X, d) spaţiul metric b-rectangular definit mai sus, cu $s = 3$.
Totodată, definim funcţia $f : X \to X$ în modul următor :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & x \in A \\ \\ \dfrac{1}{5}, & x \in B \end{cases}$$

Observăm că f admite unicul punct fix $1/3$. şi satisface

$$1 \cdot d(fx, fy) \leq \frac{1}{52} d(x, y) + \frac{1}{4} d(x, fx) + \frac{23}{100} d(y, fy),$$

pentru orice $x, y \in X$.

Acum vom prezenta un exemplu de spaţiu metric complet b-rectangular, care va fi utilizat în rezultatele ce vor urma.

Exemplul 2.2.4. Fie $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Considerăm $d : X \times X \to [0, \infty)$, ce satisface

$$\begin{aligned} d(1,2) &= d(2,1) = \frac{6}{10} \\ d(1,3) &= d(3,1) = \frac{1}{10} \\ d(2,3) &= d(3,2) = \frac{1}{10} \\ d(1,4) &= d(4,1) = d(2,4) = d(4,2) = d(3,4) = d(4,3) = \frac{2}{10} \end{aligned}$$

Atunci (X, d) este un spaţiu metric b-rectangular având coeficientul $s = 3/2$, dar nu este un spaţiu metric rectangular.

Acum, dăm un exemplu de o funcţie f care satisface ipotezele din cazul (C) al [Teoremei 2.2.1].

Exemplul 2.2.5. Considerăm $X = \{1, 2, 3, 4\}$ a fi spaţiul metric rectangular definit mai sus, cu coeficientul $s = \dfrac{3}{2}$.

$$\text{Let } f(x) = \begin{cases} 3, & x \neq 4 \\ 1, & x = 4 \end{cases} \text{ o funcţie definită pe X.}$$

Atunci f satiface inegalitatea

$$d(fx, fy) \geq (-3)d(x,y) - 5d(x, fx) + 3d(y, fy)$$

şi condiţiile din *cazul (C)* al [Teoremei 2.2.1].

Observaţia 2.2.6. Observăm că inegalitatea contractivă când $c > 0$, poate fi scrisă ca :

$$d(fx, fy) \leq \frac{k}{c} d(x,y) - \frac{a}{c} d(x, fx) - \frac{b}{c} d(y, fy),$$

pentru orice $x, y \in X$.
Luând $k > 0, a < 0$ şi $b < 0$, rezultă că operatorul f este de tip Reich, deci teorema anterioară (când $k > 0$) este similară rezultatelor din [47].

Acum, prezentăm o lemă utilă pentru funcţii de tip expansiv în spaţii metrice b-rectangulare, folosind tehnica din [98].

Lema 2.2.7. *Fie (X, d) un spaţiu metric b-rectangular. Totodată, considerăm $\lambda \in \mathbb{R}$ şi x, y, z, w elemente arbitrare diferite între ele din X. Atunci*

$$\begin{aligned} \lambda d(x,z) \geq & \left[\frac{1+s^2}{2s}\lambda + \frac{1-s^2}{2s}|\lambda| \right] d(x,y) + \left[\frac{s-1}{2}\lambda - \frac{s+1}{2}|\lambda| \right] d(z,w) \\ & + \left[\frac{s-1}{2}\lambda - \frac{s+1}{2}|\lambda| \right] d(w,y). \end{aligned}$$

Pentru funcţiile de tip expansiv, când $c < 0$, facem următoarea observaţie importantă.

Observaţia 2.2.8. Am studiat funcţiile de tip contractiv care satisfac :

$$\begin{aligned} ad(x, fx) + bd(y, fy) + cd(fx, fy) &\leq kd(x,y) \\ cd(fx, fy) &\leq kd(x,y) - ad(x, fx) - bd(y, fy) \\ d(fx, fy) &\geq \frac{k}{c} d(x,y) - \frac{a}{c} d(x, fx) - \frac{b}{c} d(y, fy) \end{aligned}$$

Prin anumite substituţii simple, putem face ca funcţia f să satisfacă

$$d(fx,fy) \geq \alpha d(x,y) + \beta d(x,fx) + \gamma d(y,fy)$$

unde

$$\begin{cases} \alpha = k/c \\ \beta = -a/c \\ \gamma = -b/c \end{cases}$$

Vom analiza cazurile când $\alpha \leq 0$ şi $\alpha \geq 0$, deci când $k \geq 0, c < 0$, respectiv $k \leq 0, c < 0$.

Al doilea rezultat important al prezentei secţiuni implică studiul convergenţei pentru schema iterativă Picard privind funcţiile de tip expansiv în cadrul spaţiilor b-gms.

Teorema 2.2.9. *Fie (X,d) un spaţiu metric complet b-rectangular având coeficientul $s \geq 1$. Totodată, considerăm $f : X \to X$ ce satisface*

$$d(fx,fy) \geq \alpha d(x,y) + \beta d(x,fx) + \gamma d(y,fy),$$

pentru orice $x,y \in X$. Pe de altă parte, presupunem că următoarele condiţii sunt satisfăcute :

$$(i) \beta < 1-s,\ \gamma > s,\ \alpha+\gamma < \frac{1-\beta}{s},$$

$$(ii)\ \text{Dacă } \alpha > \gamma,\ \text{atunci avem o condiţie adiţională, anume } \alpha + 1 < \gamma\left(1+\frac{1}{s}\right).$$

În plus, dacă $\alpha < \gamma$, atunci avem următoarele condiţii :

$$\alpha > 1 \text{ şi } 1-\alpha < \left(\frac{1}{s}-1\right).$$

Atunci, funcţia f admite un punct fix.

în ceea ce priveşte [Teorema 2.2.9], suntem gata să prezentăm un exemplu care să justifice rezultatul nostru teoretic.

Exemplul 2.2.10. Fie (X,d), cu $X = \{1,2,3,4\}$ spaţiul metric b-rectangular înzestrat cu metrica generalizată din [Exemplul 2.2.2]. Considerăm f, definit astfel : $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$ şi $f(4) = 4$. Se observă că f are un unic punct fix, anume $4 \in X$. Atunci, f satisface

$$d(fx,fy) \geq \alpha d(x,y) + \beta d(x,fx) + \gamma d(y,fy)\ ,$$

cu

$$\alpha = \frac{9}{50}, \beta = -\frac{101}{5} \text{ şi } \gamma = \frac{17}{100}.$$

Reamintim acum [Lema 2] din [33], care este crucială privind inegalităţile cu diferenţe.

Lema 2.2.11. *Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri de numere nenegative, astfel încât*

$$a_{n+1} \leq \alpha_1 a_n + \alpha_2 a_{n-1} + ... + \alpha_k a_{n-k+1} + b_n,$$

unde $n \geq k-1$. Dacă $\alpha_1, ..., \alpha_k \in [0,1)$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i < 1$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci avem că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Observaţia 2.2.12. În demonstraţia rezultatului anterior, s-a arătat că următoarea estimare este validă

$$d_n^* = d(x_{n+2},x_n) \leq a_2^n d_0^* + \frac{\delta^n - a_2^n}{\delta - a_2} a_1 D_0.$$

Deci, pe baza acestei leme, oferim o abordare non-constructivă pentru evaluarea lui (x_n) ca şir Cauchy Luăm $k = 1$ în lema anterioară. Atunci avem că $a_{n+1} \leq \alpha_1 a_n + b_n$, cu $\alpha_1 \in [0,1)$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Deci, am arătat că

$$d_n^* \leq a_2 d_{n-1}^* + a_1 \delta^{n-1} D_0.$$

în cele ce urmează, considerăm $\alpha_1 := a_2$ şi $b_n := a_1 D_0 \delta^{n-1}$. Datorită faptului că $\delta < \frac{1}{s} < 1$ şi $a_2 \in [0,1)$, aplicând [Lema 2] din [33] în cazul particular când $k = 1$, obţinem că $\lim_{n\to\infty} d_n^* = 0$.

Acum, oferim un rezultat teoretic pentru funcţii expansive, sub noua presupunere că f este surjectivă şi vom folosi procesul iterativ 'invers' Picard.

Teorema 2.2.13. *Fie (X,d) un spaţiu metric b-rectangular complet şi $f : X \to X$ o funcţie ce satisface*

$$d(fx,fy) \geq \alpha d(x,y) + \beta d(x,fx) + \gamma d(y,fy) \ .$$

Presupunem că f este continuă şi surjectivă. Totodată, presupunem că au loc :

$$(i)\beta < 1,\ \alpha+\gamma > 0 \text{ şi } 1-\beta < \frac{\alpha+\gamma}{s}.$$

în acelaşi timp, considerăm următoarele ipoteze : Cazul (E1), când $\alpha > 0$: Presupunem că următoarele sunt satisfăcute :

$$(ii)\alpha > 1$$

Cazul (E2), când $\alpha < 0$: Presupunem că următoarele condiţii sunt satisfăcute :

$$\begin{cases} (ii)\alpha < -1,\ \gamma > 0 \\ (iii)s\left(1-\dfrac{\alpha}{\gamma}\right) < 1 + \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$$

Atunci, funcţia f admite un punct fix în X.

Următorul exemplu pe care îl vom lua în considerare este cel al unui b-gms complet. În acest mod, validăm [Teorema 2.2.13] printr-un alt exemplu, arătând că presupunerile din rezultatul nostru teoretic sunt uşor îndeplinite.

Exemplul 2.2.14. Fie $X = [0,\infty)$, înzestrat cu $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, astfel încât $d(x,y) = (x-y)^2$, pentru orice $x,y \in X$. Atunci (X,d) este un spaţiu metric complet, având coeficientul $s = 2$. Astfel este şi un spaţiu metric b-rectangular, cu $s = 4$.

Exemplul 2.2.15. Fie $X = [0,\infty)$, unde d este metrica b-rectangulară de mai sus, cu $s = 4$.
Considerăm $f : X \to X$ astfel încât $f(x) = \dfrac{x+\delta_1}{\delta_2}$, cu $\delta_1, \delta_2 \geq 0$. Observăm că f este continuă. Totodată, pentru orice $y \in X$, există $x = y\delta_2 - \delta_1 \geq 0$, deoarece δ_1 şi δ_2 sunt termeni pozitivi, deci f este surjectivă. Pe de altă parte, avem că :

$$d(fx,fy) = (fx-fy)^2 = \left|\frac{x+\delta_1}{\delta_2} - \frac{y+\delta_1}{\delta_2}\right| = \frac{1}{\delta_2}|x-y|^2 = \frac{1}{\delta_2}d(x,y).$$

Fie $\beta = 0$, $\gamma = 0$ şi $\alpha = 10$. Considerăm $\delta < \dfrac{1}{s}$, adică $\delta_2 < \dfrac{1}{4}$. De exemplu : $\delta_2 = \dfrac{1}{10}$ şi $\delta_1 = 1$. Atunci f satisface $d(fx,fy) \geq 10d(x,y)$, pentru fiecare $x,y \in X$.

2.3 Şiruri de contracţii în spaţii metrice de tip con peste algebre Banach. Aplicaţii la sisteme neliniare de ecuaţii şi la sisteme de ecuaţii diferenţiale.

În această secţiune avem în vedere şirurile de contracţii în ceea ce priveşte rezultate de punct fix în contextul spaţiilor metrice de tip con peste algebre Banach. În primul rând, extindem câteva concepte cu privire la proprietăţi de continuitate, echicontinuitatea unei familii de funcţii, convergenţa (H) şi convergenţa (G) la cadrul spaţiilor metrice de tip con peste algebre Banach. În cele din urmă, validăm semnificaţia teoretică a acestor noi concepte prin aplicaţii interesante pentru sisteme de ecuaţii neliniare şi sisteme de ecuaţii diferenţiale, care sunt în legătură profundă cu ideea şirurilor de contracţii.
De acum înainte, cu $\mathcal{A}$ vom indica o algebră Banach. De asemenea, P va reprezenta un con considerat peste algebra $\mathcal{A}$. Mai mult, primul pas este extinderea definiţiei echicontinuităţii unei familii de operatori, respectiv a convergenţelor punctuale şi uniforme. Mai întâi introducem conceptul de convergenţă punctuală în cadrul unui spaţiu metric de tip con peste $\mathcal{A}$.

Acum, din moment ce am reamintit conceptele de bază ce vor fi utilizate în analiza rezultatelor de punct fix, facem următoarea observaţie că în Teorema 2 din [31] şi în Teorema 1 din [97], autorii au considerat contracţii definit pe un spaţiu metric şi, respectiv, pe o submulţime al unui spaţiu metric. Mai mult, ei au presupus că aceste contracţii au cel puţin un punct fix. Pe de altă parte, M. Păcurar în [105] a considerat că aşa numitele aproape contracţii au fost definite pe un spaţiu metric complet şi, în acest caz, fiecare dintre ele admite un punct fix unic. Acest lucru înseamnă că, în cazul nostru, nu are nicio importanţă dacă luăm în considerare sau nu completitudinea spaţiului metric de tip con peste algebra Banach dată. În mod similar, în [Teorema 2] a articolului lui Nadler, autorul a considerat convergenţa punctuală a unui şir de puncte fixe, în ipoteza că contracţiile sunt definite pe un spaţiu metric compact (X, d). În plus, în [105], M. Păcurar a extins acest rezultat pentru cazul funcţiilor numite aproape contracţii care sunt definite pe un spaţiu metric complet. Totodată, deoarece aceste funcţii nu sunt neapărat continue, nu este corect să vorbim despre echicontinuitatea unei familie de aproape contracţii. Pentru aceasta, vezi observaţia făcută de M. Păcurar înainte de Teorema 2.6 din [105]. Deci, în cadrul unui spaţiu metric de tip con peste o algebră Banach, putem folosi analiza lui M. Păcurar atunci când avem de-a face cu completitudinea unui astfel de spaţiu. În cele din urmă, pentru alte rezultate interesante privind stabilitatea punctelor fixe în spaţii $2-$metrice, stabilitatea punctelor fixe pentru şiruri de (ψ, ϕ) - funcţii şi funcţii slab contractive definite pe un spaţiu metric obişnuit, lăsăm cititorul să urmăreasca [89], [90] şi, respectiv, [154].
Acum este timpul să ne concentrăm asupra unor articole referitoare la rezultate de punct fix în contextul spaţiilor metrice de tip con peste algebre Banach. H. Liu şi S. Xu [85] au introdus conceptul de spaţii metrice de tip con peste algebre Banach pentru a studia rezultate de punct fix, înlocuind spaţiile Banach cu algebre Banach. Mai mult decât atât, S. Xu şi S. Radenović [160] au considerat funcţii definite pe spaţii metrice de tip con peste algebre Banach, cu un con solid, fără asumarea proprietăţii de normalitate a conului. O generalizare interesantă a fost făcută de H. Huang şi S. Radenović [59], având în vedere spaţiile de tip con b -metrice peste algebre Banach. Au studiat puncte fixe comune ale operatorilor Lipschitz generalizaţi. De asemenea, P. Yan et. al. [163] au dezvoltat teoreme de puncte fixe cuplate pentru funcţii generalizate în contextul spaţiilor metrice conice. În cele din urmă, ideea de a înlocui spaţiul Banach cu o algebră Banach a fost motivată de [66] şi [73] în care au fost date unele observaţii referitoare la conexiunea dintre teoremele de punct fix pentru diferite funcţii în contextul conurilor normale obişnuite ale algebrelor Banach şi contextul spaţiilor metrice obişnuite.
Acum, suntem pregătiţi să revizuim câteva concepte şi teoreme necesare cu privire la spaţiile metrice de tip con peste algebre Banach.

Definiţia 2.3.1. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach* $\mathcal{A}$. *Totodată, considerăm* $T : X \to X$ *şi* $T_n : X \to X$ *funcţii definite pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}$. *Spunem că şirul* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge punctula la* T *în* X, *pe scurt* $T_n \xrightarrow{p} T$, *dacă pentru orice* $c \gg \theta$, $c \in \mathcal{A}$ *şi pentru orice* $x \in (X, d)$, *există* $N > 0$ *care depinde de* c *şi de* x, *astfel încât pentru fiecare* $n \geq N$, *are loc* $d(T_n x, Tx) \ll c$.

Într-un mod similar, noţiunea particulară de convergenţă uniformă a unui şir de funcţii poate fi prezentată în următorul fel :

Definiţia 2.3.2. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach* $\mathcal{A}$. *Totodată, considerăm* $T : X \to X$ *şi* $T_n : X \to X$ *funcţii definite pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}$. *Spunem că şirul* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniform la* T *în* X, *pe scurt* $T_n \xrightarrow{u} T$, *dacă pentru orice* $c \gg \theta$, $c \in \mathcal{A}$, *există* $N > 0$ *care depinde doar de* c, *astfel încât pentru fiecare* $n \geq N$ *şi pentru orice* $x \in (X, d)$, *are loc :* $d(T_n x, Tx) \ll c$.

În acelaşi timp, pentru o anumită familie de operatori, definim conceptele de echicontinuitate şi echicontinuitate uniformă pe un spaţiu metric de tip con peste o algebră Banach dată $\mathcal{A}$.

Definiţia 2.3.3. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach* $\mathcal{A}$ *and* $T_n : X \to X$ *funcţii definite pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}$. *Familia* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se numeşte echicontinuă dacă şi numai dacă pentru fiecare* $c_1 \gg \theta$, $c_1 \in \mathcal{A}$ *şi pentru fiecare* $x \in (X, d)$, *există* $c_2 \gg \theta$, $c_2 \in \mathcal{A}$ *care depinde de* c_1 *şi de* x, *astfel încât pentru orice* $y \in (X, d)$ *satisfying* $d(x, y) \ll c_2$, *are loc :* $d(T_n x, T_n y) \ll c_1$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Definiţia 2.3.4. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach* $\mathcal{A}$ *şi* $T_n : X \to X$ *funcţii definite pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}$. *Familia* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se numeşte uniform echicontinuă dacă şi numai dacă pentru fiecare* $c_1 \gg \theta$, $c_1 \in \mathcal{A}$, *există* $c_2 \gg \theta$, $c_2 \in \mathcal{A}$ *care depinde doar de* c_1, *astfel încât pentru fiecare* x *şi* y *din* (X, d) *satisfăcând* $d(x, y) \ll c_2$, *are loc :* $d(T_n x, T_n y) \ll c_1$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Pe baza [Exemplului 2.17] din [59] în care autorii au dat exemplu de un spaţiu b -metric complet de tip con peste o algebră Banach cu coeficientul $s = 2$, suntem gata să prezentăm o versiune modificată a acestui exemplu, referindu-ne la un spaţiu metric complet peste o algebră Banach.

Exemplul 2.3.5. Fie $\mathcal{A}$ mulţimea tuturor matricelor de forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, unde α şi β sunt din $\mathbb{R}$. Pe $\mathcal{A}$ vom defini o normă $\|\cdot\|$, astfel încât pentru fiecare matrice din $\mathcal{A}$, are loc $\left\| \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right\| = |\alpha| + |\beta|$. În acelaşi timp, pe $\mathcal{A}$ considerăm înmulţirea uzuală dintre matrice. Observăm că $P = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} / \alpha, \beta \geq 0 \right\}$ este un con nevid şi solid din $\mathcal{A}$. În final, se poate demonstra uşor că $\mathcal{A}$ este o algebră Banach.

Acum, pe baza [Exemplului 2.3.5], vom prezenta şi un exemplu în care avem convergenţa uniformă a unui şir de funcţii definite pe un spaţiu metric de tip con (X, d) peste algebra Banach $\mathcal{A}$ dată mai sus. Mai mult, de acum înainte vom folosi notaţia $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\mathcal{A})}} x_n = \theta$ care va reprezenta convergenţa sub algebra Banach $\mathcal{A}$, adică $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un c-şir. În plus, pentru un şir real dat $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care converge la un număr real y, vom folosi notaţia $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\mathbb{R})}} y_n = y$. În cele din urmă, facem observaţia că, dacă lucrăm cu şiruri de funcţii, convergenţa prezentată mai sus poate fi înţeleasă punctual sau uniform, în funcţie de contextul dat.

Exemplul 2.3.6. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, fie $f_n : [0,1] \to [0,1]$, definite prin $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, pentru orice $x \in [0,1]$. Atunci, $f_n \xrightarrow{u} f$ relativ la metrica de tip con d din [Exemplul 2.3.5].

Din [83], amintim un exemplu de spaţiu metric de tip con peste o algebră Banach, ce va fi utilizat în continuare în această secţiune.

Exemplul 2.3.7. Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$. Atunci, se poate arăta uşor că $\mathcal{A}$ este o algebră Banach, cu norma dată prin $\|(u_1, u_2)\| = |u_1| + |u_2|$, pentru orice element arbitrar (u_1, u_2) din $\mathcal{A}$. Totodată, cea de-a doua operaţie, anume înmulţirea este dată prin $u \cdot v = (u_1v_1, u_1v_2 + u_2v_1)$, unde $u = (u_1, u_2)$ şi $v = (v_1, v_2)$ sunt două elemente arbitrare. În plus, $P = \{u = (u_1, u_2) / u_1, u_2 \geq 0\}$ este un con solid peste $\mathbb{R}^2$. Luând $\tilde{X} = \mathbb{R}^2$, putem defini operatorul $d : \tilde{X} \times \tilde{X} \to \mathcal{A}$, astfel : $d(x, y) = (|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$, unde $x = (x_1, x_2)$ şi $y = (y_1, y_2)$. Atunci, avem că $(\tilde{X}, d)$ este un spaţiu metric de tip con peste $\mathbb{R}^2$.

Menţionăm că dacă luăm $X = [0,1) \times [0,1) \subset \tilde{X}$, atunci este uşor de observat că (X, d) este un spaţiu metric de tip con peste $\mathbb{R}^2$, unde d este definit în [Exemplul 2.3.7]. De asemenea, pe baza exemplului precedent, vom prezenta un şir de funcţii care converge punctual, dar care nu converge uniform către funcţia nulă, în raport cu metrica conului d.

Exemplul 2.3.8. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, considerăm operatorii $T_n : [0,1)\times[0,1) \to [0,1)\times[0,1)$, definiţi prin $T_n(x) = (x_1^{n^2}, x_2^n)$, unde $x = (x_1, x_2) \in [0,1)^2$. Totodată, definim şi operatorul nul T, dat prin $T(x) = (0,0)$, unde $x \in [0,1)^2$ şi $T : [0,1) \times [0,1) \to \{0\} \times \{0\} \subset [0,1) \times [0,1)$. Atunci, $T_n \xrightarrow{p} T$, dar $T_n \overset{u}{\nrightarrow} T$.

Prezentăm rezultatul nostru principal al acestei secţiuni care constă în convergenţa unui şir de operatori în contextul unui spaţiu metric de tip con al unei algebre Banach date $\mathcal{A}$. Rezultatul teoretic pe care îl vom prezenta se referă atât la convergenţă punctuală cât şi la convergenţa uniformă.

Teorema 2.3.9. *Fie (X, d) un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$. Considerăm operatorii $T_n, T : X \to X$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ astfel încât :*

(i) pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, T_n$ admite cel puţin un punct fix, adică există $x_n \in T_n x_n$,

(ii) operatorul T este o $\alpha -$ o contracţie relativ la metrica de tip con d, adică există $\alpha \in P$, cu $\rho(\alpha) < 1$, astfel încât $d(Tx, Ty) \preceq \alpha d(x, y)$, pentru orice $x, y \in X$,

$(iii) T_n \xrightarrow{u} T$ când $n \to \infty$, relativa la metrica de tip con,

$(iv)(X, d)$ este un con complet peste algebra Banach $\mathcal{A}$.

Atunci, utilizând faptul că x^* este unicul punct fix al operatorului T, rezultă că $(d(x_n, x^*))_{n\in\mathbb{N}}$ este un c-şir.

Acum suntem gata să prezentăm cel de-al doilea rezultat referitor la convergenţa punctuală a unui şir de operatori în raport cu o algebră Banach dată $\mathcal{A}$.

Teorema 2.3.10. *Fie (X, d) un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$. Considerăm operatorii $T_n, T : X \to X$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ astfel încât :*

$$\begin{aligned}
&(i)\ \ \textit{operatorul } T_n \textit{ este o } \alpha - \textit{contracţie relativ la metrica de tip con } d, \textit{ adică există } \alpha \in P,\\
&\ \textit{cu } \rho(\alpha) < 1, \textit{ astfel încât } d(T_n x, T_n y) \preceq \alpha d(x, y), \textit{ pentru orice } x, y \in (X, d) \textit{ şi } n \in \mathbb{N},\\
&(ii)\ \ \textit{operatorul } T \textit{ este o } \alpha_0 - \textit{contracţie relativ la metrica de tip con } d, \textit{ adică există } \alpha_0 \in P\\
&\ \textit{cu } \rho(\alpha_0) < 1, \textit{ astfel încât } d(Tx, Ty) \preceq \alpha_0 d(x, y), \textit{ pentru orice } x, y \in X,\\
&(iii) T_n \xrightarrow{p} T \textit{ când } n \to \infty,\\
&(iv)(X, d) \textit{ este un con complet peste algebra Banach } \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Atunci, utilizând faptul că x_n^* sunt unicele puncte fixe ale operatorilor T_n, rezultă că $(d(x_n^*, x^*))_{n\in\mathbb{N}}$ este un c-şir.

Acum, ca şi în [Teorema 2.3.9], se poate observa că putem folosi o definiţie echivalentă a convergenţei punctuale folosind inegalităţi nestricte, iar acest lucru nu va influenţa rezultatele obţinute.

Scopul nostru suplimentar al acestei secţiuni este extinderea conceptelor de (G)-convergenţă şi de (H)-convergenţă din [31] în contextul spaţiilor metrice de tip con peste algebre Banach. De asemenea, extindem aceste noţiuni în cazul şirurilor operatorilor care admit domenii diferite. în primul rând, considerăm ideea de convergenţă punctuală pentru operatorii care nu au acelaşi domeniu de definiţie.

Definiţia 2.3.11. *Fie X_n, X_∞ submulţimi ale lui X, unde (X, d) un spaţiu metric de tip con (nu neapărat complet) peste algebra Banach $\mathcal{A}$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ considerăm operatorii $T_n : X_n \to X$ and $T_\infty : X_\infty \to X$. Spunem că T_∞ este o limită (G) a şirului $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, când familia de operatori $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface următoarea proprietate :*

$$\begin{aligned}
&(G):\ \textit{pentru fiecare } x \in X_\infty, \textit{ există un şir } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \textit{ cu } x_n \in X_n\ (n \in \mathbb{N}), \textit{ astfel încât :}\\
&\quad (d(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ este un c-şir şi } (d(T_n x_n, T_\infty x))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ este tot un c-şir.}
\end{aligned}$$

Acum, a doua definiţie a prezentei secţiuni se referă la o generalizare a convergenţei uniforme, dar pentru funcţii care nu au acelaşi domeniu.

Definiţia 2.3.12. *Fie X_n, X_∞ submulţimi ale lui X, unde (X, d) un spaţiu metric de tip con (nu neapărat complet) peste algebra Banach $\mathcal{A}$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ considerăm operatorii $T_n : X_n \to X$ şi $T_\infty : X_\infty \to X$. Spunem că T_∞ este o limită (H) a şirului $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, când familia de operatori $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface următoarea proprietate :*

$$\begin{aligned}
&(H):\ \textit{pentru fiecare şir } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \textit{ cu } x_n \in X_n, \textit{ pentru orice } n \in \mathbb{N},\\
&\qquad \textit{există un şir } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X_\infty, \textit{ astfel încât are loc :}\\
&\qquad (d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ este un c-şir şi } (d(T_n x_n, T_\infty y_n))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ este tot un c-şir.}
\end{aligned}$$

Mai departe, arătăm că limita (H) a unui şir de operatori este, de asemenea, şi o limită (G) în circumstanţe adecvate. Mai mult, având în vedere că vom folosi noţiunea de continuitate a unui operator, putem utiliza două definiţii: o extindere a definiţiei continuităţii de la cazul spaţiilor metrice la cazul spaţiilor metrice de tip con peste algebre Banach şi a doua este chiar ideea secvenţială de continuitate (pentru aceasta a se vedea (iii) din Definiţia 2.1 din [83]). Acestea sunt date după cum urmează.

Observaţia 2.3.13. Dacă (X, d) un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$, atunci :
a) Un operator T este continuu în $x_0 \in (X, d)$ dacă şi numai dacă pentru fiecare $c \gg \theta$, $c \in \mathcal{A}$, există $\bar{c} \in P$ care depinde de c, astfel încât pentru orice $x \in (X, d)$, ce satisface $d(x, x_0) \ll \bar{c}$, are loc $d(Tx, Tx_0) \ll c$. Totodată, operatorul T este continuu dacă este continuu în fiecare punct al domeniului de definiţie.
b) Un operator T este secvenţial continuu dacă pentru orice şir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la $x \in X$, adică satisfăcând $(d(y_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ este un c-şir, atunci $(d(Ty_n, Tx))_{n\in\mathbb{N}}$ este tot un c-şir.

Propziţia 2.3.14. *Fie (X, d) un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$. Considerăm $n \in \mathbb{N}$, respectiv fie X_n o submulţime nevidă a lui X. Totodată, fie o altă submulţime nevidă a lui X, şi anume X_∞. Presupunem că următoarele ipoteze sunt satisfăcute :*

$$\begin{aligned}&(i) \ \text{dacă } x \in X_\infty, \text{ există } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ cu } x_n \in X_n \text{ pentru fiecare } n \in \mathbb{N},\\ &\ \text{astfel încât } (d(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ este un c-şir,}\\ &(ii)\ T_\infty : X_\infty \to X \text{ este secvenţial continuu,}\\ &(iii)\ T_\infty \text{ este o limită (H) a familiei } (T_n).\end{aligned}$$

Atunci, T_∞ este o limită (G) a familiei (T_n).

Următorul rezultat se bazează pe întrebarea: în ce condiţii limita (G) a unui şir de operatori este unică? Vom da un răspuns în teorema de mai jos.

Teorema 2.3.15. *Fie (X, d) un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$. Considerăm X_n (pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$), respectiv X_∞ o submulţime nevidă a lui X. Presupunem că următoarele ipoteze sunt satisfăcute :*

$$\begin{aligned}&(i)\ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, \text{ fie } T_n \text{ operator k-Lipschitz în raport cu algebra Banach } \mathcal{A}, \text{ adică există } k \in P,\\ &\ \text{astfel încât } d(T_n(x), T_n(y)) \preceq k \cdot d(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X_n\\ &(ii)\ T_\infty : X_\infty \to X \text{ este o limită (G) pentru familia } (T_n).\end{aligned}$$

Atunci, T_∞ este unica limită (G) pe X_∞.

Al treilea rezultat pe care îl vom prezenta în această secţiune se referă la convergenţa unui şir de puncte fixe dintr-o familie de funcţii care are proprietate (G), în raport cu o algebră Banach dată.

Teorema 2.3.16. *Fie (X, d) un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$. Considerăm X_n (for $n \in \mathbb{N}$) şi X_∞ submulţimi nevide a lui X. Fie operatorii $T_n : X_n \to X$, respectiv $T_\infty : X_\infty \to X$ care satisfac următoarele :*

$$\begin{aligned}&(i)\ \text{pentru fiecare } n \in \mathbb{N},\ T_n \text{ este o k-contracţie, adică există } k \in P \text{ cu } \rho(k) < 1,\\ &\ \text{astfel încât } d(T_n(x), T_n(y)) \preceq k \cdot d(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X_n,\\ &(ii)\ \text{familia } (T_n) \text{ are proprietatea (G),}\\ &(iii)\ \text{există } x_\infty \in F_{T_\infty}, \text{ adică } x_\infty \text{ este un punct fix al lui } T_\infty.\end{aligned}$$

Atunci, $(d(x_n, x_\infty))_{n\in\mathbb{N}}$ este un c-şir.

Observaţia 2.3.17. În [Teorema 2.3.16] am presupus că există într-adevăr $x_n \in F_{T_n}$. O modalitate alternativă este să presupunem că (X, d) este un spaţiu metric complet de tip con peste $\mathcal{A}$ şi după aceea se poate stabili o variantă locală de existenţă şi unicitate a punctelor fixe ale funcţiilor T_n , deoarece acestea sunt contracţii în raport cu metrica de tip con, dar nu pe întreg spaţiul.

Vom prezenta o consecinţă a [Teoremei 2.3.16] în care ne referim la conexiunea dintre convergenţa punctuală a unui şir de operatori şi proprietatea (G) a aceluiaşi şir.

Corolarul 2.3.18. *Fie (X, d) un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$. În plus, considerăm $T_n, T_\infty : X \to X$ operatori daţi. Presupunem următoarele ipoteze :*

$$\begin{aligned}&(i)\ T_n \xrightarrow{p} T_\infty \text{ când } n \to \infty,\\ &(ii)\ T_n \text{ este o k-contracţie relativ la metrica de tip con, pentru orice } n \in \mathbb{N},\\ &(iii)\ \text{există } x_n \in F_{T_n} \text{ şi } x_\infty \in F_{T_\infty}.\end{aligned}$$

Atunci, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are proprietatea (G), unde limita (G) este operatorul T_∞.

Acum vom prezenta o teoremă în care suntem preocupaţi de relaţia dintre convergenţa punctuală a unui şir de funcţii în contextul spaţiilor metrice de tip con şi echicontinuitatea familiei de operatori.

Teorema 2.3.19. *Fie (X, d) un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$ şi M o submulţime nevidă a lui X. Considerăm $T_n : M \to X$ un operator definit astfel încât familia (T_n) admite proprietatea (G) cu limita (G) T_∞. În plus, presupunem că au loc următoarele :*

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \ \textit{familia } (T_n) \textit{ este echicontinuă pe } M,\\
&(ii)\ \textit{există } x_n \in F_{T_n},\ \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N} \textit{ şi } x_\infty \in F_{T_\infty}.
\end{aligned}
$$

Atunci $T_n \xrightarrow{p} T_\infty$.

Următoarea teoremă a acestei secţiuni este un rezultat al existenţei punctelor fixe ale funcţiei (G), care reprezintă limita unui şir de contracţii în raport cu spaţiul metric de tip con definit peste o algebră Banach dată.

Teorema 2.3.20. *Fie (X, d) un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$. Considerăm X_n şi X_∞ submulţimi nevide ale lui X. Fie $T_n : X_n \to X$, respectiv $T_\infty : X_\infty \to X$ operatori care satisfac :*

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \ \textit{familia } (T_n) \textit{ are proprietatea (G) cu limta (G) } T_\infty,\\
&(ii)\ T_n \textit{ sunt k-contracţii în sensul metricii de tip con},\\
&(iii)\ \ \textit{există } x_n \in F_{T_n}.
\end{aligned}
$$

Atunci există $x_\infty \in F_{T_\infty}$ dacă şi numai dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent în spaţiul X_∞ în sensul algebrei Banach (adică există $y \in X_\infty$ astfel încât $(d(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}$ este un c-şir).

Acum suntem pregătiţi să prezentăm ultimele noastre două rezultate din secţiunea de faţă privind legătura dintre convergenţa uniformă în raport cu metrica de tip con şi proprietatea (H) a unui şir de operatori.

Teorema 2.3.21. *Fie (X, d) un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$. Considerăm $M \subset X$ o submulţime nevidă. Fie $T_n, T_\infty : M \to X$ operatori daţi.*
a) Dacă $T_n \xrightarrow{u} T_\infty$, atunci T_∞ este limita (H) a familiei (T_n).
b) Dacă T_∞ este limita (H) a familiei (T_n) şi dacă T_∞ este uniform continuă pe M, atunci $T_n \xrightarrow{u} T_\infty$.

Acum, ultima noastră teoremă a acestei secţiuni se referă la convergenţa unui şir de puncte fixe dintr-o familie de funcţii la punctul fix al funcţiei limită (H) al aceleiaşi familii de operatori.

Teorema 2.3.22. *Fie (X, d) un spaţiu metric de tip con peste algebra Banach $\mathcal{A}$. Considerăm X_n pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, respectiv fie X_∞ o submulţime nevidă a lui X. Totodată, fie $T_n : X_n \to X$ şi $T_\infty : X_\infty \to X$ operatori care satisfac următoarele condiţii :*

$$
\begin{aligned}
&(i)\ x_n \in F_{T_n},\\
&(ii)\ (T_n) \textit{ are proprietatea (H) cu limita (H) funcţia } T_\infty,\\
&(iii)\ T_\infty \textit{ este o } k_\infty - \textit{contracţie relativă la metrica de tip con } d,\\
&(iv)\ \ \textit{există şi este unic } x_\infty \in F_{T_\infty}.
\end{aligned}
$$

Atunci $(d(x_n, x_\infty))_{n\in\mathbb{N}}$ este un c-şir.

Acum, suntem pregătiţi să dăm o observaţie importantă cu privire la ipoteza (iv) din [Teorema 2.3.22].

Observaţia 2.3.23. Condiţia (iv) din teorema anterioară se poate omite, în cazul în care presupunem că (X, d) este un con complet peste algebra Banach $\mathcal{A}$. Cu această presupunere, deoarece T_∞ este o contracţie pe o submulţime a spaţiului în sensul metricii de tip con d, atunci se poate demonstra un principiu de variantă locală în care operatorul admite un unic punct fix.

În ceea ce urmează, vom justifica toate rezultatele teoretice obtinuţe anterior prin unele aplicaţii cu privire la ecuaţiile cuplate, respectiv, sistemele de ecuaţii diferenţiale. De asemenea, arătăm că unele dintre rezultatele de punct fix reprezintă un instrument foarte puternic pentru a studia convergenţa soluţiei unice a diferitelor tipuri de şiruri privind familiile de operatori pentru ecuaţii funcţionale şi diferenţiale. Prin intermediul [Teoremei 3.1] din [59], vom prezenta convergenţa soluţiilor unor ecuaţii cuplate, bazate pe ideea unui spaţiu metric de tip con peste o algebră Banach aleasă în mod corespunzător.

Teorema 2.3.24. *Fie $F_n, G_n, \tilde{F}, \tilde{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operatori (pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$). Pe de altă parte, vom considera următorul sistem de ecuaţii cuplate :*

$$\begin{cases} F_n(x,y) = 0 \\ G_n(x,y) = 0 \end{cases} , \quad cu\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 , \tag{2.3.0.1}$$

şi

$$\begin{cases} \tilde{F}(x,y) = 0 \\ \tilde{G}(x,y) = 0 \end{cases} , \quad cu\ (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.3.0.2}$$

Presupunem că funcţiile F_n, G_n, $\tilde{F}$ şi $\tilde{G}$ satisfac următoarele ipoteze :
(1) Există $M > 0$, astfel încât pentru $n \in \mathbb{N}$, există $L_n > 0$ satisfăcând $\max\limits_{n\geq 1} L_n \leq M < 1$, pentru care are loc

$$\begin{cases} |F_n(x_1,y_1) - F_n(x_2,y_2) + x_1 - x_2| \leq L_n|x_1 - x_2| \\ |G_n(x_1,y_1) - G_n(x_2,y_2) + y_1 - y_2| \leq L_n|y_1 - y_2| \end{cases}$$

unde (x_1, x_2) şi (y_1, y_2) sunt din mulţimea $\mathbb{R}^2$.
(2) Există $\tilde{L} \in (0,1)$, astfel încât

$$\begin{cases} |\tilde{F}(x_1,y_1) - \tilde{F}(x_2,y_2) + x_1 - x_2| \leq \tilde{L}|x_1 - x_2| \\ |\tilde{G}(x_1,y_1) - \tilde{G}(x_2,y_2) + y_1 - y_2| \leq \tilde{L}|y_1 - y_2| \end{cases}$$

unde (x_1, x_2) and (y_1, y_2) sunt din $\mathbb{R}^2$.
(3) Şirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge punctual la $\tilde{F}$, iar $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge tot punctual la $\tilde{G}$ în sensul uzual, adică

$$\begin{cases} F_n \xrightarrow{p} \tilde{F} \\ G_n \xrightarrow{p} \tilde{G} \end{cases}, \ adică \ \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = \tilde{F}(x) \\ \lim\limits_{n\to\infty} G_n(x) = \tilde{G}(x) \end{cases}, \quad pentru\ fiecare\ x \in \mathbb{R}^2.$$

Atunci x_n converge la $\tilde{x}$ şi y_n converge la $\tilde{y}$, unde (x_n, y_n) este unica soluţie a 2.3.0.1, respectiv $(\tilde{x}, \tilde{y})$ este unica soluţie pentru 2.3.0.2.

Acum, următorul nostru rezultat este legat de o aplicaţie la sisteme de ecuaţii diferenţiale. De fapt, folosind rezultatele precedente în contextul unei algebre Banach, reamintim bine-cunoscuta teoremă de existenţă şi unicitate pentru soluţia unui sistem neliniar de ecuaţii diferenţiale, bazată pe o demonstraţie alternativă făcută de către noi.

Teorema 2.3.25. *Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ şi $(\alpha, \beta, \gamma) \in D$. În plus, vom considera $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ şi $\bar{\gamma}$ suficient de mic astfel încât mulţimea compactă $\Delta := \{(x,y,z)\ /\ |x - a| \leq \bar{a},\ |y - \beta| \leq \bar{\beta},\ |z - \gamma| \leq \bar{\gamma}\}$ este o submulţime a lui D. Considerăm următorul sistem neliniar de ecuaţii diferenţiale :*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), z(x)) \\ z'(x) = g(x, y(x), z(x)) \\ y(a) = \beta \\ z(a) = \gamma \end{cases} , \quad unde\ x \in I := [a - \bar{a}, a + \bar{a}]. \tag{2.3.0.3}$$

În plus, presupunem că sunt îndeplinite şi următoarele condiţii :

$$\begin{aligned} &(1) \quad funcţiile\ f\ şi\ g\ sunt\ continue\ pe\ D, \\ &(2) \quad există\ L_1, L_2 > 0,\ astfel\ încât \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |f(x,y,z) - f(x,\bar{y},\bar{z})| \leq L_1|y - \bar{y}| \\ |g(x,y,z) - g(x,\bar{y},\bar{z})| \leq L_2|z - \bar{z}| \end{cases} , \quad pentru\ fiecare\ (x,y,z),\ respectiv\ (x,\bar{y},\bar{z}) \in D.$$

Atunci, există o unică soluţie a sistemului neliniar de ecuaţii diferenţiale 2.3.0.3 pe $I = [a - \bar{a}, a + \bar{a}]$.

În cele din urmă, vom prezenta ultimul nostru rezultat al acestei secţiuni cu privire la convergenţa unui şir de soluţii pentru o familie de sisteme de ecuaţii diferenţiale neliniare. Mai mult, următoarea teoremă este crucială, în sensul că extindem aplicaţia dată de S.B. Nadler Jr. în [97].

Teorema 2.3.26. *Fie D, Δ şi I precum în [Teorema 2.3.25]. Considerăm următorul sistem de ecuaţii diferenţiale :*

$$\begin{cases} y'(x) = f_n(x, y(x), z(x)) \\ z'(x) = g_n(x, y(x), z(x)) \\ y(a) = \beta \\ z(a) = \gamma \end{cases}, \quad \textit{pentru fiecare } n \geq 1, \textit{ respectiv } x \in I. \tag{2.3.0.4}$$

Totodată, considerăm un alt sistem de ecuaţii diferenţiale, şi anume

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), z(x)) \\ z'(x) = g(x, y(x), z(x)) \\ y(a) = \beta \\ z(a) = \gamma \end{cases}, \tag{2.3.0.5}$$

unde funcţiile f_n, g_n, f şi g sunt continue pe D. În plus, presupunem că următoarele condiţii sunt satisfăcute:

(1) *există $M \in (0, 1)$, astfel încât pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ există $k_n, h_n, k, h \geq 0$, pentru care au loc :*

$$\begin{cases} |f_n(x, y, z) - f_n(x, \bar{y}, \bar{z})| \leq k_n |y - \bar{y}| \\ |g_n(x, y, z) - g_n(x, \bar{y}, \bar{z})| \leq h_n |z - \bar{z}| \end{cases}, \textit{ pentru orice } (x, y, z) \textit{ şi } (x, \bar{y}, \bar{z}) \textit{ din } D.$$

(2) $$\begin{cases} |f(x, y, z) - f(x, \bar{y}, \bar{z})| \leq k |y - \bar{y}| \\ |g(x, y, z) - g(x, \bar{y}, \bar{z})| \leq h |z - \bar{z}| \end{cases}, \textit{ pentru fiecare } (x, y, z) \textit{ şi } (x, \bar{y}, \bar{z}) \textit{ din } D,$$

cu $k_n, h_n, k, h > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, satisfăcând $\max\{k_n, h_n, k, h\} \leq M < 1$.

(3) *Convergenţa punctuală a familiilor (f_n) şi (g_n), adică*

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{p} f \\ g_n \xrightarrow{p} g \end{cases}, \textit{ adică } \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x, y, z) = f(x, y, z) \\ \lim\limits_{n \to \infty} g_n(x, y, z) = g(x, y, z) \end{cases}, \textit{ pentru orice } (x, y, z) \in D.$$

(4) *Dacă funcţiile f_n şi g_n sunt mărginite, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ by M_n şi $\tilde{M}_n$ respectiv, atunci există $M_f, M_g \geq 0$, astfel încât $M_n \leq M_f$ şi $\tilde{M}_n \leq M_g$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$.*

Dacă (y_n, z_n) este unica soluţie a 2.3.0.4, iar (y, z) este unica soluţie pentru 2.3.0.5, atunci

$$\begin{cases} y_n \xrightarrow{u} y \\ z_n \xrightarrow{u} z \end{cases}, \textit{ adică } \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} \|y_n - y\|_{B,\tau_1} = 0 \\ \lim\limits_{n \to \infty} \|z_n - z\|_{B,\tau_2} = 0 \end{cases}.$$

Capitolul 3

Rezultate de punct fix pentru contracţii multivoce generalizate

3.1 Rezultate de punct fix pentru operatori multivoci. Tehnica distanțelor de alterare.

În această secţiune vom prezenta câteva noţiuni preliminare şi rezultate de punct fix pentru funcţii univoce, care satisfac unele condiţii metrice introduse prin intermediul distanţelor de alterare, într-un spaţiu metric complet.
În [74], Khan a dat condiţii suficiente pentru ca un operator să aibă un punct fix unic, în următoarele condiţii metrice :

$$\psi(d(Tx,Ty)) \leq k\psi(d(x,y)) \ ,\forall x,y \in X \ ,$$

unde (X,d) este un spaţiu metric complet şi $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ este o funcţie înzestrată cu următoarele proprietăţi :

$$\begin{aligned} &\psi(t) = 0 \text{ dacă şi numai dacă } t = 0, \\ &\psi \text{ este continuă şi crescătoare.} \end{aligned}$$

Pe de altă parte, Alber şi Guerre-Delabriere în [8] au introdus o altă generalizare pentru funcţii satisfăcând

$$\begin{aligned} &d(Tx,Ty) \leq d(x,y) - \varphi(d(x,y)), \text{ unde} \\ &\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty) \text{ este continuă şi crescătoare} \\ &\varphi(t) = 0 \text{ dacă şi numai dacă } t = 0, \\ &\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty. \end{aligned}$$

În [133], Rhoades a arătat că ultima presupunere nu este necesară pentru existenţa şi unicitatea punctelor fixe ale funcţiilor definite mai sus. Generalizări pentru acest tip de operatori au fost făcute de Dutta et. al. în [49] pentru funcţii f definite pe un spaţiu metric complet (X,d), satisfăcând

$$\begin{aligned} &\psi(d(Tx,Ty)) \leq \psi(d(x,y)) - \varphi(d(x,y)), \text{ unde} \\ &\psi, \varphi : [0,\infty) \to [0,\infty) \text{ sunt amândouă funcţii continue şi crescătoare,} \\ &\psi(t) = \varphi(t) = 0 \text{ dacă şi numai dacă } t = 0. \end{aligned}$$

O abordare foarte interesantă a fost făcută de Amini-Harandi şi A. Petruşel în [24], unde autorii au studiat condiţii suficiente pentru existenţa şi unicitatea punctului fix al unui operator T, satisfăcând următoarea condiţie :

$$u(d(Tx,Ty)) \leq v(d(x,y)),$$

în cazul în care funcţiile u şi v definite pe $[0,\infty)$ satisfac unele condiţii destul de nerestrictive. Autorii au oferit, de asemenea, câteva consecinţe interesante care arată că teorema lor este o adevărată generalizare a tipului de funcţii care a fost prezentat mai sus.

Mai mult, în ceea ce priveşte condiţia slab contractivă pentru operatori univoci, Rhoades et. al. [134] a prezentat alte tipuri de generalizări în cadrul spaţiilor metrice parţial ordonate. Referitor la un exemplu pentru acest tip de funcţii, presupunem că

$$d(fx, fy) \le \varphi(d(x,y)) - \psi(d(x,y))$$

unde funcţiile ψ, φ admit următoarele proprietăţi :

$$\begin{aligned}
&i)\ \varphi, \psi \text{ sunt amândouă pozitive pe } (0,\infty) \text{ cu } \psi(0) = \varphi(0),\\
&ii)\ \varphi(t) - \psi(t) < t,\\
&iii)\ \varphi \text{ superior semincontinuă şi crescătoare,}\\
&iv)\ \psi \text{ inferior semincontinuă şi descrescătoare.}
\end{aligned}$$

Nu în ultimul rând, pentru rezultatele de punct fix care implică alte generalizări ale condiţiei slab contractive pentru funcţii univoce, facem referire la [94], [123] şi [161].

În ceea ce priveşte cazul operatorilor multivoci, T. Lazăr et. al. [80] au prezentat un studiu exhaustiv al unor proprietăţi calitative privind operatorii multivoci de tip Reich. Mai mult, V. Lazăr [79] a extins rezultatele referitoare la cazul contracţiilor multivoce de tip φ.
T.P. Petru şi M. Boriceanu [109] au dat câteva rezultate de punct fix pentru contracţiile φ pe o mulţime înzestrată cu două metrici.
În toate articolele [80], [79] şi [109], funcţia de comparaţie φ folosită în cazul contraţiilor de tip φ satisface următoarele proprietăţi:

$$\begin{aligned}
&i)\ \varphi(0) = 0,\\
&ii)\ \varphi(t) > 0 \text{ pentru } t > 0,\\
&iii) \varphi^k(t) \to 0, \text{ pentru orice } t > 0 \text{ pentru } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Observăm că φ nu este neapărat continuă pe $[0,\infty)$, dar în [109] a fost presupusă continuitatea funcţiei. Mai mult, o proprietate importantă a funcţiilor de comparaţie este faptul că $\varphi(t) < t,$ pentru fiecare $t > 0$.

Ca o concluzie, există două clase distincte de funcţii implicate în generalizările operatorilor de tip contractiv. Pe de o parte există funcţii de comparare, în multe cazuri notate cu φ, iar pe de altă parte, este cazul funcţiilor definite prin intermediul distanţelor de alterare pentru care cele mai importante condiţii sunt proprietăţile de continuitate sau semicontinuitate şi un anumit tip de monotonie. Observăm, de asemenea, că funcţiile slab contractive utilizate în [134] sunt o combinaţie a acestor tipuri de operatori.

În ceea ce priveşte cazul operatorilor multivoci, în 2011, Kamran şi Kiran [70] au prezentat câteva funcţii care implică distanţele de alterare. În acest articol, mai precis, în [Teorema 4.2] din [70], a fost utilizat un tip special de funcţie de alterare a distanţei notat cu θ. Această funcţie îndeplineşte următoarele condiţii pe un interval $[0, A)$, unde A este un număr real strict mai mare decât 0, adică,

$$\begin{aligned}
&(i)\ \theta \text{ este crescătoare pe } [0, A),\\
&(ii)\ \theta(t) > 0, \text{ pentru fiecare } t \in (0, A),\\
&(iii)\ \theta \text{ subaditivă pe } (0, A) \text{ şi}\\
&(iv)\ \theta(at) \le a\theta(t), \text{ pentru orice } a > 0 \text{ şi } t \in [0, A).
\end{aligned}$$

De asemenea, în 2012, Liu et. al. [86] au dat o teoremă similară, şi anume [Teorema 2.3], unde funcţionala φ este similară cu funcţionala α din [70]. Din acelaşi articol observăm că sunt impuse condiţii asupra distanţei de alterare θ oarecum diferite. Din motive de completitudine, le reamintim aici

$$\begin{aligned}
&(a)\ \theta \text{ este crescătoare pe } \mathbb{R}^+,\\
&(b)\ \theta(t) > 0, \text{ când } t \in (0,\infty),\\
&(c)\ \theta \text{ este subaditivă pe } (0,\infty),\\
&(d)\ \theta(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+ \text{ şi}\\
&(e)\ \theta \text{ este strict inversă pe } \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

În cele din urmă, în ceea ce priveşte operatorii multivoci de tip slab contractivi $(\varphi - \psi)$, G. Petruşel et.al. în [118] au prezentat un rezultat de punct fix pentru acest tip de operatori în contextul spaţiilor b-metrice complete înzestrate cu coeficientul $s \geq 1$, împreună cu unele teoreme care implică puncte fixe cuplate. Din [Teorema 2.2] din [118], a fost definit un operator multivoc $T : X \to P_{cl}(X)$ de o inegalitate de tip contractiv, adică:

$$\varphi(H(Tx, Ty)) \leq \varphi(d(x, y)) - \psi(d(x, y))$$

şi au fost studiate condiţii suficiente pentru existenţa punctelor fixe pentru acest tip de operatori. Aici, funcţia de alterare a distanţei $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ satisface următoarele

$$\begin{aligned}
&(i_\varphi)\ \varphi \text{ continuă şi strict crescătoare,}\\
&(ii_\varphi)\ \varphi(t) < t,\ \text{pentru orice } t > 0,\\
&(iii_\varphi)\ \varphi(a + b) \leq \varphi(a) + b,\ \text{pentru } a, b \in [0, \infty),\\
&(iv_\varphi)\ \varphi(st) \leq s\varphi(t),\ \text{pentru orice } t \in [0, \infty).
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, cealaltă funcţie de alterare $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ satisface

$$\begin{aligned}
&(i_\psi)\ \limsup_{t\to r} \psi(t) > 0,\ \text{pentru orice } r > 0 \text{ şi}\\
&(ii_\psi)\ \lim_{t\to 0^+} \psi(t) = 0.
\end{aligned}$$

Mai mult, observăm că, spre deosebire de utilizarea iniţială a funcţiilor de alterare (precum în [49]), condiţiile din [118] impuse pe ψ au fost relaxate şi condiţiile de pe funcţia φ au fost mai restrictive, deoarece condiţia (ii_φ) este o condiţie de tip comparaţie. Deci, în acest sens, aceste funcţii slab contractive sunt o combinaţie dintre alterarea distanţelor şi funcţii de comparaţie, aşa cum sunt definite de operatorii din [134].
În cele din urmă, în [46], autorii au prezentat câteva teoreme de punct fix pentru operatorii multivoci şi în [124] Popescu et.al. au extins aceste tipuri de operatori multivoci fundamentaţi pe baza funcţiilor de comparaţie, adică $T : X \to P_{b,cl}(X)$, astfel încât $H(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))$, pentru fiecare x, y din spaţiul metric complet (X, d). Aici, φ satisface următoarele ipoteze

$$\begin{aligned}
&(1)\ \varphi(x) \leq x,\ \text{pentru orice } x \in [0, \infty),\\
&(2)\ \varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y),\ \text{pentru orice } x, y \in [0, \infty),\\
&(3)\ \varphi(x) = 0 \text{ dacă şi numai dacă } x = 0 \text{ şi}\\
&(4)\ \text{pentru fiecare } \varepsilon > 0,\ \text{există } \delta > \varepsilon \text{ astfel încât } \varepsilon < t < \delta \text{ implică } \varphi(t) \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Mai mult, condiţia (4) definită pentru funcţia de mai sus φ poate fi considerată ca o funcţie de comparaţie locală. De asemenea, autorii din [124] au extins rezultatele din [46] de la cazul spaţiilor metrice hiperconvexe la spaţiile metrice obişnuite. În plus, din moment ce au lucrat într-un cadru mai puţin restrictiv, au impus o presupunere importantă în ceea ce priveşte funcţionala diametru şi astfel au folosit condiţia ca operatorul multivoc să aibă valori mărginite.

În secţiunea de faţă, vom lua în considerare câteva rezultate de punct fix pentru operatori multivoci $(\varphi - \psi)$, folosind tehnica de alterare a distanţei. Punctul de plecare este articolul lui G. Petruşel et. al. [118], în cazul în care autorii au luat în considerare câteva rezultate teoretice pentru un tip abstract de operatori multivoci în spaţii complete b-metrice. Ideea principală din spatele acestui articol a fost construirea unui şir de aproximaţii succesive, care se dovedeşte a fi convergent la un punct fix al operatorului multivoc. Pe de altă parte, demonstraţia [Teoremei 2.2] din [118] conţine o anumită eroare. Autorii consideră un $\tilde{\varepsilon}$ la fiecare pas, apoi, folosind argumentul reducerii la absurd, au ales $\tilde{\varepsilon}$, astfel încât $\tilde{\varepsilon} < \lim_{n\to\infty} \psi(\delta_n)$. Deoarece $\tilde{\varepsilon}$ a fost deja construit la fiecare pas (ca $\tilde{\varepsilon_n}$) şi şirul δ_n nu a fost definit, concluzionăm că această tehnică nu este validă. Mai mult, încercând să arate că şirul (x_n) este Cauchy, autorii au folosit faptul că $d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq H(T(x_{m(k)}), T(x_{n(k)})) + \tilde{\varepsilon}$, ceea ce, prin cunoscuta lemă a lui Nadler, nu este neapărat adevărat. În acest fel, scopul nostru este să prezentăm o corecţie privind aceste argumente, impunând o ipoteză suplimentară asupra iteratelor operatorului multivoc. Această presupunere este inspirată de articolele [46] şi [124]. În sfârşit, cel de-al doilea scop este de a impune condiţii de continuitate mai relaxate asupra funcţiei de alterare a distanţei şi de a scăpa de proprietatea care este folosită frecvent în cadrul funcţiile de tip comparaţie.

Teorema 3.1.1. *Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi $T: X \to P_{b,cl}(X)$ un operator multivoc ce satisface*

$$\varphi(H(Tx,Ty)) \leq \varphi(d(x,y)) - \psi(d(x,y)), \text{ pentru orice } x,y \in X,$$

unde funcţiile φ şi ψ satisfac

$$\begin{cases} (H1) \ \varphi, \psi : [0,\infty) \to [0,\infty) \\ (H2) \ \varphi \text{ este superior semicontinuă şi } \psi \text{ este inferior semicontinuă} \\ (H3) \ \varphi(0) = \psi(0) = 0 \text{ şi } \varphi(t), \psi(t) > 0, \text{ pentru orice } t > 0 \\ (H4) \ \varphi \text{ este (strict) crescătoare} \\ (H5) \ \varphi(a+b) \leq \varphi(a) + b, \text{ pentru orice } a > 0 \text{ şi } b \geq 0 \end{cases}$$

Totodată, presupunem că

$$\delta(T^n x) \to 0 \text{ când } n \to \infty, \text{ pentru fiecare } x \in X.$$

Atunci, operatorul multivoc T admite cel puţin un punct fix $x^* \in F_T$.
În plus, dacă $(SF)_T \neq \emptyset$, atunci $F_T = (SF)_T = \{x^*\}$.

Observaţia 3.1.2. În [70], autorii au folosit faptul că $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ este crescătoare, deci funcţionala φ este strict invers izotonă pe $[0,\infty)$, adică

$$\varphi(t_1) < \varphi(t_2) \Rightarrow t_1 < t_2, \text{ unde } t_1, t_2 \in [0,\infty).$$

în cazul nostru, funcţia este (strict) crescătoare. Aceasta înseamnă că φ este într-adevăr strict crescătoare, deci $t_1 < t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) < \varphi(t_2)$. Prin transpoziţie logică, rezultă că

$$\varphi(t_2) \leq \varphi(t_1) \Rightarrow t_2 \leq t_1$$

Am utilizat în demonstraţia rezultatului anterior că pentru $\varphi(t_1) < \varphi(t_2) \Rightarrow t_1 \leq t_2$. Acest lucru este echivalent cu următorul fapt: dacă $t_1 > t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) \geq \varphi(t_2)$. Prin faptul că φ este strict crescătoare, obţinem că ultima inegalitate este un caz particular, adică o inegalitate strictă.
De asemenea, în unele părţi din demonstraţia rezultatului de mai sus, s-a folosit faptul că φ este crescătoare. Acum, din moment ce φ este strict crescătoare, atunci această funcţională este injectivă, deci $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$. Combinând acest lucru cu faptul că φ este strict crescătoare, am simplificat demonstraţia luând

$$\varphi(t_1) \leq \varphi(t_2) \Rightarrow t_1 \leq t_2.$$

De asemenea, întrucât φ este strict crescătoare, obţinem că $t_1 < t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) < \varphi(t_2)$. Mai mult, pentru $t_1 = t_2$, rezultă că $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ din definiţia funcţiei. Combinând ambele, rezultă că $t_1 \leq t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$.

Observaţia 3.1.3. O observaţie importantă este că în ipoteza (H5) din teorema anterioară avem că $\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + b$, pentru fiecare $b \geq 0$ şi $a > 0$. Dacă presupunerea ar fi fost definită pentru fiecare $a \geq 0$, atunci luând $a = 0$, rezultă că $\varphi(a) \leq a$. Deci, obţinem chiar proprietatea funcţiilor de comparaţie. În acest caz, dacă (H5) pare o condiţie restrictivă, atunci se poate folosi observaţia anterioară.

Al doilea rezultat teoretic al acestei secţiuni se referă la o teoremă de punct fix pentru operatori multivoci de tipul $(\varphi - \psi)$. Următoarea teoremă este o îmbunătăţire a celei anterioare, unde se impune o condiţie care implică funcţionala diametru δ. După [124], vom relaxa presupunerile primului rezultat. În anumite circumstanţe, obţinem şi unicitatea punctului fix pentru operatorul multivoc considerat. În primul rând, prezentăm o observaţie pe care o vom folosi de acum încolo.

Observaţia 3.1.4. Fie φ o funcţională ce are proprietăţile (H1),(H3),(H4) şi (H5) din teorema anterioară. Totodată, fie şirul $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, astfel încât $d_n \geq d$ şi cu $\lim_{n\to\infty} d_n = d$. Atunci, $d_n - d \geq 0$. Rezultă că

$$\varphi(d_n) = \varphi(d + d_n - d) \leq \varphi(d) + [d_n - d],$$

ceea ce este adevărat din cauza faptului că $d > 0$ şi $d_n - d \geq 0$. Rezultă că

$$\varphi(d_n) \leq \varphi(d) + (d_n - d).$$

Luând limita superioară, obţinem că

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi(d_n) \leq \varphi(d).$$

Observăm că dacă φ este superior semicontinuă, atunci

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi(d_n) \leq \varphi(d).$$

Deci, din cauza presupunerilor impuse pe φ, rezultă că proprietatea de mai sus este mai relaxată, în sensul că funcţionala φ trebuie să satisfacă condiţia de superior semincontinuitate doar pentru cazul în care $d_n \geq d$.

Al doilea rezultat de punct fix este următorul.

Teorema 3.1.5. *Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to P_{b,cl}(X)$ un operator multivoc ce satisface:*

$$\varphi(H(Tx,Ty)) \leq \varphi(d(x,y)) - \psi(d(x,y)), \text{ pentru orice } x,y \in X,$$

unde funcţiile φ şi ψ satisfac

$$\begin{cases} (H1)\ \varphi,\psi : [0,\infty) \to [0,\infty) \\ (H2)\ \varphi \text{ este superior semicontinuă în 0 şi } \psi \text{ este inferior semicontinuă în } 0 \\ (H3)\ \varphi(0) = \psi(0) = 0 \text{ şi } \varphi(t),\psi(t) > 0, \text{ pentru orice } t > 0 \\ (H4)\ \varphi \text{ este (strict) crescătoare} \\ (H5)\ \varphi(a+b) \leq \varphi(a) + b, \text{ pentru orice } a > 0 \text{ şi } b \geq 0\ . \end{cases}$$

Totodată, presupunem că

$$\delta(T^n x) \to 0 \text{ când } n \to \infty, \text{ pentru orice } x \in X.$$

Atunci, operator multivoc T admite un unic punct fix.

Bazându-ne pe [118] şi [124], am prezentat două teoreme privind rezultate de punct fix pentru operatori multivoci $(\varphi - \psi)$. Ipotezele suplimentare bazate pe funcţionala diametru δ au reprezentat o ipoteză importantă, astfel încât operatorul multivoc să admită un punct fix. De asemenea, a doua teoremă este o îmbunătăţire a primei. Cele două rezultate principale au fost create pentru a corecta unele argumente folosite în [118] pentru acest tip de operatori. Mai mult, condiţia restrictivă pentru δ duce la situaţia în care operatorii multivoci admit un unic punct fix.

3.2 Principii extinse de punct fix pentru contracţii multivoce de tip Ćirić

Scopul acestei secţiuni este de a prezenta un studiu asupra operatorilor multivoci de tip Ćirić. Mai mult de atât, punctul de plecare a cercetării de faţă este articolul lui A. Petruşel [113], în care autorul a studiat câteva rezultate de punct fix saturate, respectiv rezultate de punct fix strict pentru contracţii multivoce în sensul lui Nadler [96]. În [131] Reich a considerat unele teoreme de punct fix pentru operatori multivoci, iar Hardy şi Rogers [57] au generalizat acele teoreme de punct fix. Mai mult, C. Chifu şi G. Petruşel in [40] au studiat proprietăţi calitative referitoare la operatorii multivoci Hardy-Rogers în cadrul spaţiilor b-metrice. Un studiu complet asupra operatorilor Reich a fost realizat în [80] de T. Lazăr et. al. De asemenea, proprietăţi calitative, şi anume dependenţa de date, stabilitatea Ulam-Hyers etc., au fost studiate în cazul contracţiilor multivoce φ de V.L. Lazăr în [79] şi extinse de T.P. Petru şi M. Boriceanu în [109] în cazul operatorilor multivoci definiţi pe o mulţime înzestrată cu două metrici distincte. De asemenea, în [36], M. Boriceanu a studiat existenţa şi unicitatea punctului fix şi a dependenţei de date pentru operatorii de tip Ćirić multivoci în contextul spaţiilor b-metrice.
În acelaşi timp, operatorii multivoci Ćirić au fost studiaţi pe larg în [36], [42], [82], [111] şi [120]. Acum, în ceea ce priveşte terminologia şi conceptele de bază pentru problemele de punct fix pentru operatorii multivoci, în special pentru contracţiile multivoce Nadler, vom urma articolele [25], [65], [119] şi [130]. Mai mult, pentru aproximarea punctelor fixe stricte (numite şi puncte finale) a funcţiilor multivoce, ne referim la [56], [61] şi [125].
În cele din urmă, în ceea ce priveşte dependenţa de date, operatori de fractali multivoci, selecţii şi proprietăţi

calitative pentru incluziuni de punct fix, ne vom referi la [48], [81] şi [121].
Nu în ultimul rând, interesul cade pe câteva rezultate teoretice în care unele principii extinse de punct fix ale operatorilor multivoci Ćirić . Punctul de plecare este articolul lui A. Petruşel [113], în care autorul a studiat câteva principii extinse pentru probleme de punct fix, relative la contracţii multivoce în sensul lui Nadler. Rezultatele noastre principale constau în principii extinse de punct fix, respectiv principii extinse de punct fix strict ale operatorilor multivoci Ćirić .

Teorema 3.2.1 (Un principiu extins de punct fix pentru operatori multivoci Ćirić)**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $T : X \to P_{cl}(X)$ *un operator multivoc* α*-Ćirić, adică există* $\alpha \in (0, 1)$*, pentru care*

$$H(Tx, Ty) \leq \alpha \cdot M(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X,$$

unde

$$M(x, y) := \max\{d(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), \frac{1}{2}[D(x, Ty) + D(y, Tx)]\}.$$

Atunci au loc următoarele concluzii :
(a) există $x^* \in F_T$*;*
(b) pentru fiecare $(x, y) \in Graph(T)$*, există un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de aproximaţii succesive pentru* T *având ca punct iniţial* (x, y)*, ce converge la un punct fix al lui* T*;*
(c) există o selecţie $t^\infty : Graph(T) \to F_T$ *a lui* T^∞*, astfel încât*

$$d(x, t^\infty(x, y)) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x, y), \forall (x, y) \in Graph(T);$$

(d) F_T *este închisă în* (X, d)*;*
(e) dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de aproximaţii succesive a lui* T*, având ca punct iniţial* $(x, y) \in Graph(T)$*, ce converge la un punct fix* $x^*(x, y)$ *a lui* T*, atunci*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x, y), \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

(f) dacă $G : X \to P_{cl}(X)$ *este un operator multivoc de tip Ćirić, cu coeficientul* β*, şi există* $\eta > 0$*, astfel încât*

$$H(Tx, Gx) \leq \eta, \forall x \in X,$$

atunci $H(F_T, F_G) \leq \eta \cdot \max\left\{\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\beta}\right\}$*;*
(g) dacă $T_n : X \to P_{cl}(X)$ *este un şir de operatori multivoci* α*-Ćirić, cu* $T_n x \overset{H}{\to} Tx$ *când* $n \to \infty$*, uniform relativ la* $x \in X$*, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} H(F_{T_n}, F_T) = 0;$$

(h) dacă există $x_0 \in X$ *şi* $r > 0$*, astfel încât* $D(x_0, Tx_0) < (1 - \alpha)r$*, atunci există* $x^* \in F_T \cap B(x_0, r)$*;*
(i) dacă există $x_0 \in X$ *şi* $r > 0$ *pentru care* $\delta(x_0, Tx_0) < (1 - \alpha)r$*, atunci*

$$T : \tilde{B}(x_0, r) \to P\left(\tilde{B}\left(x_0, \frac{1}{1-\alpha} r\right)\right)$$

şi există $x^* \in F_T \cap B(x_0, r)$*;*
(j) dacă X *este tot un spaţiu Banach,* U *o submulţime deschisă a lui* X *şi* $T : U \to P_{cl}(X)$ *este un operator multivoc Ćirić, atunci aşa numitul câmp multivoc asociat* $G : U \to P(X)$*, definit prin* $Gx := x - Tx$ *este un operator deschis;*
(k) există o selecţie Caristi a lui T*;*
(m) dacă, în plus, $T : X \to P_{cp}(X)$*, incluziunea de punct fix* $x \in Tx$ *asociată operatorului multivoc Ćirić* T *este stabilă Ulam-Hyers în sens generalizat;*
(n) operatorul multivoc T *are proprietatea de aproximare de punct final, adică* $\inf_{x\in X} D(x, Tx) = 0$*;*
(o) dacă operatorul multivoc T *este inferior semincontinuu, atunci are proprietatea aproximată de punct final dacă şi numai dacă are un unic punct fix strict;*

(p) dacă $T : X \to P_{cp}(X)$ este α Ćirić cu coeficientu $\alpha < \frac{1}{2}$, atunci mulţimea punctelor fixe F_T este compactă.
(q) dacă $T : X \to P_{cl,bd}(X)$ este un operator multivoc de tip Ćirić, atunci pentru orice $p > 0$, are loc

$$H(F_p^*, F_T) \leq \frac{p}{1-\alpha}, \text{ unde } F_p^* := \{x \in X \mid D(x, Tx) < p\}.$$

Al doilea rezultat teoretic pe care îl vom prezenta în această secţiune este un principiu saturat de punct fix pentru operatorii de tip Ćirić multivoci. Folosim concluziile din [Teorema 3.2.1] care sunt valabile pentru cazul particular atunci când $(SF)_T$ este nevidă. Deci, în următoarea noastră teoremă prezentăm doar concluziile metrice care aduc o anumită noutate în raport cu teorema anterioară.

Teorema 3.2.2 (Un principiu extins de punct fix strict pentru operatori multivoci Ćirić)**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc α-Ćirić, adică există $\alpha \in (0, 1)$, pentru care*

$$H(Tx, Ty) \leq \alpha \cdot M(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X,$$

unde

$$M(x, y) := \max\{d(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), \frac{1}{2}[D(x, Ty) + D(y, Tx)]\}.$$

În plus, presupunem că au loc $(SF)_T \neq \emptyset$. Atunci, au loc următoarele concluzii :
(a) $(SF)_T = F_T = \{x^*\}$;
(b) dacă $\alpha < \frac{1}{2}$, atunci operatorul multivoc T are proprietatea lui Ostrowski;
(c) incluziunea de punct fix $x \in Tx$ asociată operatorului multivoc Ćirić T este Ulam-Hyers stabilă în sens generalizat;
(d) incluziunea de punct strict fix $\{x\} = Tx$ asociată operatorului multivoc Ćirić T este stabilă Ulam-Hyers în sens generalizat;
(e) problema de punct fix este bine pusă pentru T, în raport cu funcţionala de tip 'gap' D, respectiv H;
(f) $H(Tx, x^*) \leq \alpha d(x, x^*)$, pentru orice $x \in X$;
(g) $d(x, x^*) \leq \frac{1}{1-\alpha} H(x, Tx)$, pentru orice $x \in X$;
(h) dacă $G : X \to P(X)$ este un operator multivoc ce satisface $F_G \neq \emptyset$, şi există $\eta > 0$, pentru care

$$H(Tx, Gx) \leq \eta, \forall x \in X,$$

atunci $H(F_T, F_G) \leq \eta \cdot \frac{1}{1-\alpha}$.

Capitolul 4

Scheme iterative pentru contracţii generalizate în spaţii metrice complete

4.1 Analiză de punct fix pentru contracții generalizate, prin intermediul schemei iterative de tip Ishikawa

În prezenta secţiune, obiectivul nostru este de a studia rezultate privind existenţa şi unicitatea punctelor fixe pentru funcţii de tip contracţie generalizată. Contextul se referă la operatorii de tip contracţie, în sensul următor :

$$cd(Tx, Ty) + a\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right] \leq kd(x, y)\ .$$

În plus, facem observaţia că tehnicile noastre sunt valabile şi pentru tipuri mai complexe de contracţii generalizate. Karapinar, Moosaei şi alţi autori au folosit schema iterativă Krasnoselskii în cazul particular atunci când parametrul auxiliar λ este egal cu $1/2$.
Acum, deoarece lucrăm cu tipuri de operatori de tip contractiv, reamintim o generalizare a principiului contracţiei în spaţii metrice convexe.
În [72] Karapinar a demonstrat teoreme de existenţă şi unicitate pentru funcţii care îndeplinesc anumite condiţii contractive în spaţiile Banach, de tip con cum ar fi

$$\begin{aligned}
&d(Tx, Ty) \geq ad(x, y),\\
&d(x, Tx) + d(y, Ty) \leq pd(x, y),\\
&ad(Tx, Ty) + b\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right] \leq sd(x, y).
\end{aligned}$$

Karapinar a folosit următoarele condiţii pentru aceşti operatori de tip contractiv, cum ar fi:
$a > 1$, $p \in [0, 2)$, respectiv $0 \leq s + |a| - 2b < 2(a + b)$.
În [28], Asadi a generalizat condiţiile de mai sus pentru funcţii înzestrate cu mai mulţi coeficienţi, adică:

$$ad(x, Tx) + bd(y, Ty) + cd(Tx, Ty) + ed(x, Ty) + fd(y, Tx) \leq kd(x, y).$$

Asadi a studiad existenţa şi unicitatea punctului fix pentru contracţiile de mai sus, folosind condiţia:

$$\frac{b + e - |f|(1 - \lambda) - |c|\lambda}{1 - \lambda} \leq k < \frac{a + b + c + e + f - |c|\lambda - |f|(1 - \lambda)}{1 - \lambda}$$

În mod independent, în [159] Wang şi Zhang au demonstrat o teoremă pentru existenţa punctelor fixe ale unei perechi de funcţii de tip contracţii generalizate, cum ar fi

$$kd(Tx, Sy) \leq ad(x, y) + b\left[d(x, Tx) + d(y, Sy)\right] + c\left[d(x, Sy) + d(y, Tx)\right],$$

folosind o schemă iterativă de tip Jungk-Krasnoselskii, adică satisfăcând

$$\begin{cases} x_{2n+1} = W\left(x_{2n}, Tx_{2n}, \lambda\right) \\ x_{2n+2} = W\left(x_{2n+1}, Tx_{2n+1}, \lambda\right) \end{cases}, \tag{4.1.0.1}$$

şi au dat un exemplu de funcţie pe ramuri care să satisfacă condiţia anterioară.
De asemenea, Wang şi Zhang au impus condiţiile $a + 2c < k$ şi $(k, a, b, c) \in \Gamma_\rho$, cu $\rho \in \{1, 2, 3, 4\}$, unde Γ_ρ

au fost definite în termenii coeficienţilor a, b, c şi k.
În [91] Moosaei a prezentat o teoremă pentru o pereche de operatori de tip Banach (f, g) satisfăcând

$$ad(gx, fx) + bd(gy, fy) + cd(fx, fy) \leq kd(gx, gy),$$

cu $2b - |c| \leq k < 2(a+b+c) - |c|$ şi în [93] acelaşi autor a prezentat o teoremă pentru existenţa şi unicitatea unui punct fix comun al unei perechi de operatori (S, T), unde (S, T) este o pereche slab compatibilă, adică:

$$ad(Sx, Tx) + bd(Sy, Ty) + cd(Tx, Ty) \leq ed(Sx, Sy).$$

Într-un mod similar, în [92], Moosaei a prezentat condiţii suficiente pentru existenţa unui punct de coincidenţă al unei perechi de contracţii generalizate (S, T), după cum urmează

$$\alpha d(Tx, Ty) + \beta\left[d(Sx, Ty) + d(Sy, Tx)\right] + \gamma\left[d(Sx, Ty) + d(Sy, Tx)\right] \leq \eta d(Sx, Sy),$$

folosind ca Wang şi Zhang un proces iterativ Jungk-Krasnoselskii.
În [2], Abbas et. al. au prezentat anumite idei privind simplitatea schemei iterative modificate de tip Krasnoselskii

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda T^n x_n,$$

unde $\lambda \in (0, 1)$ iar operatorul T este definit pe o submulţime convexă, închisă şi nevidă a unui spaţiu Banach convex uniform. Mai mult, această schemă iterativă se poate extinde cu uşurinţă în cazul spaţiilor metrice convexe în sensul lui Takahashi. Abbas, Khan şi Rhoades au sugerat că o multitudine de scheme iterative de punct fix pot fi rezolvate folosind schema iterativă de mai sus, care este mult mai simplă decât iteraţia Ishikawa. Cu toate acestea, acest principi de simplificare nu se aplică în mod direct la cercetarea noastră, deoarece avem de-a face cu un tip generalizat de contracţii neliniare, în contrast cu cazul în care operatorul T este definit prin intermediul iteratelor sale, de exemplu, atunci când T este o funcţie asimptotic neexpansivă. În acest caz, operatorul îndeplineşte următoarea condiţie: există un şir $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [1, \infty)$, cu $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (k_n - 1) < \infty$, astfel încât

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|.$$

Deci, în cazul de mai sus, condiţia ar acţiona asupra iteratelor operatorului T, contrar cazului în care T este o funcţie neliniară generalizată de tip contracţie. În cazul nostru, întrucât nu presupunem o condiţie asimptotică pentru operatorul neliniar, în special din punct de vedere al complexităţii computaţionale, procesul iterativ Krasnoselskii modificat ar fi mai puţin rentabil decât binecunoscuta schemă iterativă Ishikawa. Cauza acestui lucru se bazează pe faptul că iteraţia Krasnoselskii modificată necesită calcularea lui T^n la fiecare pas.
Scopul nostru este să oferim o nouă metodă de demonstraţie pentru schema iterativă Ishikawa mai complexă. în cele din urmă, acest lucru va fi validat printr-un exemplu.

Teorema 4.1.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric convex complet.*
Fie K o submulţime nevidă, închisă şi convexă a lui X şi $T : K \to K$ o funcţie ce satisface următoare condiţie de tip contracţie generalizată :

$$cd(Tx, Ty) + a\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right] \leq kd(x, y),$$

pentru fiecare $x, y \in K$.
Fie (α_n) şi (β_n) două şiruri în $(0, 1)$ şi fie $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1]$, astfel încât $\alpha_n \in [a_1, a_2] \subset [0, 1)$ şi $\beta_n \in [b_1, b_2] \subset [0, 1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Considerăm :

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \; w_1 := \begin{cases} \dfrac{a}{1 - a_2}, & a \geq 0 \\[2ex] \dfrac{2a}{3(1 - a_1)}, & a < 0 \end{cases}, \; w_2 := \begin{cases} \dfrac{a(1 + b_2)}{1 - b_2}, & a \geq 0 \\[2ex] \dfrac{a(1 + b_1)}{1 - b_1}, & a < 0 \end{cases}$$

$$w_3 := \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}(a+c) - |a|(1+b_2)}{1-b_1}, & k > 0 \\ \\ \dfrac{\frac{1}{2}(a+c) - |a|(1+b_2)}{1-b_2}, & k < 0 \end{cases}, \quad \tau := \begin{cases} \frac{1}{3}, & a_2 < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{a_2}{1-a_2}, & a_1 > \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$s := \begin{cases} \dfrac{3(1-a_1)}{2(a+c)}, & a \geq 0 \text{ şi } c \geq 0, \\ \\ \dfrac{a}{2(1-a_1)} + \dfrac{c}{\varepsilon}\dfrac{(1+b_2)}{(1-a_2)(1-b_2)}, & a \geq 0 \text{ şi } c < 0, \\ \\ \dfrac{a}{\varepsilon}\dfrac{(1+b_2)}{(1-a_2)(1-b_2)} + \dfrac{c}{2(1-a_1)}, & a < 0 \text{ şi } c \geq 0 \end{cases}$$

Presupunem că au loc următoarele :

$$\begin{cases} (1) & c \neq 0, \\ (2) & a + c > 0, \\ (3) & k \geq w_1, \\ (4) & k \geq w_2, \\ (5) & k < w_3, \\ (6) & s > 0, \\ (7) & |c|\tau < s - k - \dfrac{|a|}{\varepsilon}\dfrac{(1+b_2)}{(1-a_2)(1-b_2)}. \end{cases}$$

Atunci, operatorul T admite un punct fix.
În plus, dacă $k < c$, acest punct fix este unic.

Observaţia 4.1.2. Relativ la demonstraţia [Teoremei 4.1.1], facem următoarea observaţie : dacă $a \geq 0$, atunci $k \geq 0$.

Ca urmare a rezultatului de mai sus, putem obţine o teoremă de punct fix pentru o anumită iterată al unui operator dat într-un spaţiu metric convex complet.

Corolarul 4.1.3. *Fie (X, d) un spaţiu metric convex complet. Fie K o submulţime nevidă, închisă şi convexă a lui X, iar $T : K \to K$ un operator dat. Presupunem că există $p > 1$, pentru care T satisface :*

$$cd(T^p x, T^p y) + a\left[d(x, T^p x) + d(y, T^p y)\right] \leq kd(x, y),$$

pentru orice $x, y \in K$. În plus, presupunem că operatorul $T^p : K \to K$ satisface condiţiile (1)-(8) din [Teorema 4.1.1]. Atunci, T admite un punct fix. Totodată, dacă $k < c$ atunci acest punct fix este unic.

În cele din urmă, oferim un exemplu care validează principalul nostru rezultat al acestei secţiuni.

Exemplul 4.1.4. Fie $X := [0, \infty)$ şi $T : X \to X$, astfel încât :

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{194}, & x \in [0, x_0) \\ \frac{x}{250}, & x \in [x_0, \infty) \end{cases},$$

unde x_0 poate fi orice punct din mulţimea $[0, \infty)$. Observăm că, deoarece x_0 este un punct de discontinuitate pentru T, atunci T nu este o contracţie. În acelaşi timp, T satisface inegalitatea:

$$1800d(Tx, Ty) + \frac{1}{2}d(x, y) \leq 10\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right].$$

De asemenea, T admite un unic punct fix, adică $0 \in X$.
În plus, şirurile (α_n) şi (β_n) din schema iterativă Ishikawa sunt:

$$\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{1}{n+7} + \dfrac{1}{4}, \\ \\ \beta_n = \dfrac{1}{n+3} + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

4.2 Proprietăţi calitative şi rezultate de stabilitate pentru algoritmul Mann pentru operatori multivoci

Scopul acestei secţiuni este de a investiga anumite rezultate privind umbrirea la limită, stabilitatea Ulam-Hyers, T-stabilitatea şi bine punerea problemei de punct fix, implicând operatori multivoci de tip contractie. Definiţiile originale au la bază iteraţia Picard, adică $x_{n+1} \in Tx_n$, cu $x_0 \in X$ un element arbitrar. Aici vom modifica definiţiile originale pentru a fi potrivite contextului schemei iterative Mann. În primul rând, vom oferi câteva rezultate teoretice în ceea ce priveşte dependenţa de date a punctului fix, relativă la algoritmul lui Mann, introdus prin aşa numitele perturbaţii admisibile.

Definiţia 4.2.1. *Fie X o mulţime nevidă, $T : X \to P(X)$ un operator multivoc şi $G : X \times X \to X$ un operator ce satisface următoarele condiţii :*

$$(A1)\ G(x,x) = x,\ \text{pentru fiecare } x \in X,$$
$$(A2)\ \text{pentru orice } x, y \in X \text{ cu } G(x,y) = x,\ \text{avem că } x = y.$$

Fie $T_G : X \to P(X)$ un operator multivoc, definit prin

$$T_G x := G\,(x, Tx) := \{G(x,u)/u \in Tx\}.$$

Atunci, spunem că T_G se numeşte perturbaţie admisibilă a lui T corespunzătoare lui G.

Lema 4.2.2. *$F_{T_G} = F_T$ şi $(SF)_{T_G} = (SF)_T$.*

Pentru mai multe tipuri de exemple, a se vedea [Exemplul 5.3] - [Exemplul 5.6] din lucrarea [114].

Acum vom prezenta algoritmul iterativ al lui Mann prin intermediul perturbaţiilor admisibile, care vor fi utilizate în continuare în această secţiune.

Definiţia 4.2.3 (Algoritmul Mann)**.** *Fie (X,d) un spaţiu metric, $T : X \to P(X)$ şi $G_n : X \times X \to X$ astfel încât $T_{G_n} : X \to P(X)$ este perturbaţia admisibilă asociată lui T corespunzătoare lui G_n, pentru $n \in \mathbb{N}$. Algoritmul Mann sau pe scurt algoritmul GM, corespunzător familiei de operatori $G := (G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este definit în felul următor :*

$$x_0 \in X \text{ arbitrar şi } x_{n+1} \in G_n\,(x_n, Tx_n) = T_{G_n} x_n,\ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Prin definiţie, algoritmul GM este convergent dacă $\forall x \in X$ şi $y \in G_0\,(x, Tx) = T_{G_0}x$, există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din X, pentru care

$$(i)\ x_0 = x \text{ şi } x_1 = y,$$
$$(ii)\ x_{n+1} \in G_n\,(x_n, Tx_n) = T_{G_n} x_n,$$
$$(iii)\ \text{şirul } (x_n) \text{ este convergent la un element } x^*(x,y) \in F_T,$$
$$(iv)\ x^*(x,x) = x,\ \text{pentru orice } x \in F_T.$$

În termenii operatorilor multivoci slab Picard, avem că dacă GM este convergent, atunci operatorul T_{G_n} este MWP, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. În cazul convergenţei, putem defini operatorul univoc $t^\infty : Graph(T_{G_0}) \to X$, prin

$$t^\infty(x,y) := x^*(x,y),$$

pentru orice $(x,y) \in Graph(T_{G_0})$.

Definiţia 4.2.4 (Algoritmul Mann)**.** *Fie (X,d) un spaţiu metric. Considerăm operatorii $G_n : X \times X \to X$ astfel încât T_{G_n} este perturbaţia admisibilă a lui T corespunzătoare lui G_n, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Algoritmul GM satisface condiţia (ψ) relativă la operatorul multivoc $T : X \to P(X)$ dacă următoarele ipoteze sunt adevărate :*

$$(i)\ \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ este crescătoare, continuă în 0 şi } \psi(0) = 0,$$
$$(ii)\ \text{algoritmul GM este convergent},$$
$$(iii)\ d\,(x, t^\infty(x,y)) \le \psi\,(d(x,y)),\ \text{pentru orice } (x,y) \in Graph(T_{G_0}).$$

Primul nostru rezultat priveşte problema dependenţei de date pentru algoritmul GM. Teorema noastră este legată de Teorema 7.2 din [114] cu o presupunere suplimentară care este necesară pentru demonstraţia noastră.

Teorema 4.2.5 (Algoritmul GM)**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric, $T, S : X \to P(X)$ doi operatori multivoci şi $G := (G_n)$, unde $G_n : X \times X \to X$ operatori ce satisface condiţiile $(A1)$ şi $(A2)$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că au loc:*

(i) algoritmul GM satisface condiţia (ψ) relativă la T şi S,

(ii) există $l_{G_0} > 0$ astfel încât $d\left(G_0(x, y), G_0(x, z)\right) \leq l_{G_0} d(y, z)$, pentru orice $x, y, z \in X$,

(iii) există $\eta > 0$ astfel încât $H\left(Tx, Sx\right) \leq \eta$, pentru orice $x \in X$,

(iv) dacă $q > 1$, atunci $\psi(qt) \leq q\psi(t)$, pentru fiecare $t \in \mathbb{R}_+$.

Atunci,

$$H\left(F_T, F_S\right) \leq \psi(l_{G_0}\eta).$$

Observaţia 4.2.6. Dacă în [Teorema 4.2.5], avem că dacă algoritmul GM satisface condiţia (ψ_1) relativ la T şi condiţia (ψ_2) referitoare la S, rezultă că :
Pentru $x \in F_S$, avem că

$$d\left(x, t^{\infty}\left(x, G_0\left(x, Tx\right)\right)\right) \leq q\psi_1(l_{G_0}\eta).$$

Într-un mod similar, pentru $z \in F_T$, avem că

$$d\left(z, s^{\infty}\left(z, G_0\left(z, Sz\right)\right)\right) \leq q\psi_2(l_{G_0}\eta).$$

Utilizând definiţia lui H şi lăsând $q \searrow 1$, concluzia este că

$$H\left(F_T, F_S\right) \leq max\{\psi_1(l_{G_0}\eta), \psi_2(l_{G_0}\eta)\}.$$

Următorul nostru scop este să studiem proprietatea de dependenţă de date pentru schema iterativă Mann. Vom folosi aceeaşi tehnică ca în [143]. De asemenea, pentru convergenţa acestor algoritmi în diferite tipuri de spaţii, cum ar fi spaţii metrice complete, spaţii hiperbolice şi spaţii Banach, lăsăm cititorul să urmeze [41], [43] şi [146].
Mai mult, pentru utilizarea ulterioară a spaţiilor hiperbolice, observăm că dacă $G(x, y) := W(x, y, \lambda)$, for $\lambda \in [0, 1]$ fixat şi $x, y \in X$, avem că $W(x, x, \lambda) = x$, pentru fiecare $x \in X$, din [Observaţia 1.5.7], deci presupunerea $(A1)$ este satisfăcută şi dacă, pentru fiecare $x, y \in X$, $W(x, y, \lambda) = x$, apoi prin [Lema 1.5.8], obţinem că

$$0 = d\left(W(x, y, \lambda), x\right) = \lambda d(x, y)\ ,$$

deci $x = y$ pentru $\lambda \in (0, 1)$. Prin urmare, presupunerea $(A2)$ este de asemenea satisfăcută.
Mai mult, obiectivul nostru este să exemplificăm dependenţa de date pentru algoritmul iterativ al lui Mann în cazul contracţiilor Nadler multivoce.

De acum încolo, prin (X, d, W) vom nota un spaţiu hiperbolic X, înzestrat cu o metrică d. De asemenea, vom lucra numai în contextul spaţiilor metrice hiperbolice.

În această secţiune, vom folosi următoarea notaţie :

$$W\left(A, B, \lambda\right) := \{W\left(a, b, \lambda\right)/a \in A \text{ şi } b \in B\}.$$

În demonstraţia următoarei teoreme se foloseşte proprietatea $(W4)$ a spaţiilor hiperbolice.Mai mult, următoarea noastră teoremă va fi utilizată în cadrul [Teoremei 4.2.10] şi [Observaţiei 4.2.11] şi în contextul proprietăţilor calitative ale problemei de punct fix, de fapt în [Teorema 4.2.15], privind T-stabilitatea.

Teorema 4.2.7. *Fie (X, d, W) un spaţiu hiperbolic şi Y_1, Y_2, Z_1 şi Z_2 din $P(X)$. Atunci, avem că*

$$H\left(W\left(Y_1, Y_2, \lambda\right), W\left(Z_1, Z_2, \lambda\right)\right) \leq (1 - \lambda)H(Y_1, Z_1) + \lambda H(Y_2, Z_2).$$

Observaţia 4.2.8. Utilizând definiţia lui H, dacă avem structură liniară, atunci se poate arăta că

$$H(\lambda A, \lambda B) \leq \lambda H(A, B),$$

pentru fiecare $\lambda \geq 0$ şi $A, B \in P(X)$.

Corolarul 4.2.9. *Se poate demonstra foarte uşor că*

$$H(W(A, B, \lambda), W(A, C, \lambda)) \leq \lambda H(B, C),$$

pentru fiecare $\lambda \geq 0$ *şi pentru orice* $A, B, C \in P(X)$.

Al doilea rezultat este dependenţa de date a punctului fix pentru contracţii multivoce, folosind schema iterativă a lui Mann.

Teorema 4.2.10 (Dependenţa de date)**.** *Fie* (X, d, W) *un spaţiu metric hiperbolic complet şi* $T, S : X \to P_{cl}(X)$ *două contracţii multivoce, adică*
- *există* $\alpha_T \in (0, 1)$ *astfel încât* $H(Tx, Ty) \leq \alpha_T d(x, y)$*, pentru fiecare* $x \in X$ *şi*
- *există* $\alpha_S \in (0, 1)$ *astfel încât* $H(Sx, Sy) \leq \alpha_S d(x, y)$*, pentru orice* $x \in X$*.*

Pentru un şir $\alpha_n \in [a, 1-a] \subset (0, 1)$*, considerăm perturbaţia admisibilă a lui* T*, respectiv* S *corespunzătoare lui* W *:*

$$\begin{aligned} T_{\alpha_n}x &:= W(x, Tx, \alpha_n) = \{W(x, u, \alpha_n)/u \in Tx\}, \\ S_{\alpha_n}x &:= W(x, Sx, \alpha_n) = \{W(x, u, \alpha_n)/u \in Sx\}. \end{aligned}$$

În plus, presupunem că următoarele sunt satisfăcute :
(1) există $\eta > 0$ *, astfel încât* $H(Tx, Sx) \leq \eta$*, pentru fiecare* $x \in X$*,*
(2) Marginea inferioară a pentru şirul (α_n) *satisface :*

$$a \in \left(\frac{\alpha_S - 2 + \sqrt{8 + \alpha_S^2}}{2(1 + \alpha_S)}, \frac{1}{2} \right) \text{ şi } a \in \left(\frac{\alpha_T - 2 + \sqrt{8 + \alpha_T^2}}{2(1 + \alpha_T)}, \frac{1}{2} \right).$$

Atunci,

$$H(F_T, F_S) \leq \alpha_0 \eta \cdot \max \left\{ \frac{a}{(3a-1) - a(1-a)(1+\alpha_S)}, \frac{a}{(3a-1) - a(1-a)(1+\alpha_T)} \right\}.$$

Observaţia 4.2.11. a) Utilizând proprietatea $(W4)$ a spaţiilor hiperbolice şi datorită faptului că $G_0(x, y)$ este $W(x, y, \alpha_0)$ pentru $\alpha_0 \in (0, 1]$ fixat, avem că

$$d(G_0(x, y), G_0(x, z)) = d(W(x, y, \alpha_0), W(x, z, \alpha_0)) \leq \alpha_0 d(y, z).$$

Atunci l_{G_0} poate fi considerat $\alpha_0 > 0$. Mai departe vom aplica [Teorema 4.2.5] la cazul operatorilor multivoci de tip contracţie din teorema precedentă:
Am arătat că

$$d(x_0, x^*) \leq q\alpha_0\eta \cdot \frac{a}{(3a-1) - a(1-a)(1+q\alpha_T)},$$

pentru $x_0 \in F_S$ şi, din [Teorema 4.2.5] şi din [Observaţia 4.2.6], luând $q \searrow 1$ şi $d(x_0, x^*) \leq \psi_1(\alpha_0\eta)$, toate acestea implică faptul că

$$\psi_1(t) = c_1 t,$$

cu $t = \alpha_0\eta$ şi $c_1 = \dfrac{a}{(3a-1) - a(1-a)(1+\alpha_T)} > 0$.
Pentru $y_0 \in F_T$ şi ψ_2 avem o observaţie similară, adică

$$d(y_0, y^*) \leq q\alpha_0\eta \cdot \frac{a}{(3a-1) - a(1-a)(1+q\alpha_S)},$$

pentru $y_0 \in F_T$, din [Teorema 4.2.5] şi din [Observaţia 4.2.6], avem că

$$d(y_0, y^*) \leq \psi_2(\alpha_0\eta).$$

Aceasta implică faptul că $\psi_2(t) = c_2 t$, cu $t = \alpha_0 \eta$ şi

$$c_2 = \frac{a}{(3a-1) - a(1-a)(1+\alpha_S)} > 0.$$

b) Dacă (X,d) este complet şi $T, S : X \to P_{cl}(X)$, dacă algoritmul GM este convergent şi datorită faptului că T_{α_n} şi S_{α_n} sunt contracţii multivoce cu coeficienţii $(1-a)(1+\alpha_S)$, respectiv $(1-a)(1+\alpha_T)$, deducem că T_{α_n} şi S_{α_n} sunt într-adevăr ψ_1-MWP şi ψ_2-MWP, din [Observaţia 1.1.8], unde $\psi_1(t) = \dfrac{t}{\alpha_n(1-\alpha_T)}$ şi $\psi_2(t) = \dfrac{t}{\alpha_n(1-\alpha_S)}$, pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$.

Următorul nostru rezultat se referă la stabilitatea Ulam-Hyers a incluziunii de punct fix, folosind schema iterativă Mann.

Teorema 4.2.12 (Stabilitatea Ulam relativă la schema iterativă Mann)**.** *Fie (X,d,W) un spaţiu metric hiperbolic complet şi $T : X \to P(X)$ un operator multivoc, astfel încât $T_{\alpha_0} : X \to P_{cp}(X)$.*
Fie $\alpha_n \in [a, 1-a] \subset (0,1)$.
Presupunem că au loc următoarele ipoteze :

> (a) *există $\alpha_T \in (0,1)$ pentru care $H(Tx, Ty) \leq \alpha_T d(x,y)$, pentru orice $x, y \in X$,*
>
> (b) $a \in \left(\dfrac{\alpha_T - 2 + \sqrt{8 + \alpha_T^2}}{2(1+\alpha_T)}, \dfrac{1}{2} \right)$.

Fie $\varepsilon > 0$ şi $x \in X$, astfel încât

$$D(x, T_{\alpha_0} x) \leq \varepsilon.$$

Atunci există $x^* \in F_T$, astfel încât

$$d(x, x^*) \leq \varepsilon \cdot \frac{a}{(3a-1) - a(1-a)(1+\alpha_T)}.$$

Teorema 4.2.13 (şiruri de contracţii privind schema iterativă Mann)**.** *Fie (X,d,W) un spaţiu metric hiperbolic complet şi $T : X \to P_{cl}(X)$ o α_T contracţie relativ la funcţionala H. Fie $T_n : X \to P_{cl}(X)$, $n \in \mathbb{N}$ un şir de α_T-contracţii multivoce relative la metrica Pompeiu-Hausdorff H, astfel încât $T_n x \stackrel{H}{\to} Tx$ când $n \to +\infty$, uniform relativ la $x \in X$. Atunci,*

$$F_{T_n} \stackrel{H}{\to} F_T \text{ când } n \to +\infty.$$

Teorema 4.2.14 (Bine punerea problemei relativă la D şi la schema iterativă Mann)**.** *Fie (X,d,W) un spaţiu metric hiperbolic complet şi $T : X \to P_{cl}(X)$, cu $(SF)_T \neq \emptyset$ şi $x^* \in (SF)_T$.*
Fie $\alpha_n \subset (0,1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi T_{α_n} perturbaţia admisibilă relativă la operatorul multivoc T, care este o α_T-contracţie .
Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din X, astfel încât

$$D(x_n, T_{\alpha_n} x_n) \to 0 \text{ când } n \to +\infty.$$

Totodată, presupunem că există $a > 0$, astfel încât $\alpha_n \geq a$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci,

$$x_n \stackrel{d}{\to} x^* \text{ când } n \to +\infty.$$

Teorema 4.2.15 (T-stabilitatea relativă la schema iterativă Mann)**.** *Fie (X,d,W) un spaţiu metric hiperbolic complet şi $T : X \to P_{cl}(X)$ o α_T-contracţie. Fie $x_0 \in X$ şi $x_{n+1} \in T_{\alpha_n} x_n$, cu $\{\alpha_n\} \in [a, 1-a] \subset (0,1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că marginea inferioară a şirului $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, adică a satisface condiţia din [Teorema 4.2.10]. Totodată, considerăm $\{y_n\}$ un şir. Fie*

$$\varepsilon_n := H(y_{n+1}, T_{\alpha_n} y_n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. În plus, definim $x^* \in F_T$. Dacă Tx^* este o mulţime cu un singur element, rezultă că

$$y_n \to x^* \text{ când } n \to +\infty \text{ dacă şi numai dacă } \varepsilon_n \to 0 \text{ as } n \to +\infty.$$

Teorema 4.2.16 (Proprietatea de umbrire la limită referitoare la schema iterativă Mann)**.** *Fie (X, d, W) un spaţiu metric hiperbolic complet. Fie şi $T : X \to P_{cl}(X)$ o α_T-contracţie. Considerăm $x_0 \in X$ şi $x_{n+1} \in T_{\alpha_n} x_n$, cu $(\alpha_n) \in [a, 1-a] \subset (0,1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că marginea inferioară a şirului $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, adică a satisface condiţia din [Teorema 4.2.10].*
Fie (y_n) un şir. Totodată, considerăm şi

$$D\left(y_{n+1}, T_{\alpha_n} y_n\right) \to 0, \text{ când } n \to \infty.$$

Considerăm $x^* \in F_T$. Atunci, dacă Tx^* este o mulţime cu un singur element, avem că

$$d(y_n, x_n) \to 0 \text{ când } n \to \infty$$

4.3 Rezultate de convergenţă pentru scheme iterative în contextul spaţiilor metrice convexe

Majoritatea problemelor din lumea reală care provin din ştiinţele aplicate sunt, în general, ecuaţii funcţionale. Aceste tipuri de ecuaţii pot fi rescrise ca ecuaţii de punct fix. Este necesar ca să se dezvolte o schemă iterativă având o rată bună de convergenţă care aproximează soluţia acestor tipuri de ecuaţii. Multe rezultate din domeniul teoriei punctului fix privind existenţa şi unicitatea punctelor fixe ale contracţiilor au fost dezvoltate folosind algoritmi iterativi de bază, cum ar fi: iteraţia Picard, Krasnoselksii, Mann şi Ishikawa. De-a lungul anilor, interesul cu privire la viteza, respectiv rata de convergenţă a unor astfel de scheme iterative a crescut exponenţial. De exemplu, mulţi autori au luat în considerare numeroase procese iterative şi au studiat rata lor de convergenţă. Pentru aceasta, consultaţi [4], [34], [51], [55], [41] şi [156]. Unele scheme iterative au fost introduse pentru a studia proprietăţile punctelor fixe ale contracţiilor. De asemenea, altele [132] au fost introduse pentru studiul funcţiilor neexpansive. Mai mult, unii autori [51] au comparat rata de convergenţă pentru unii algoritmi iterativi pentru operatori de tip cvasi-contracţii. În cele din urmă, având în vedere faptul că clasa de spaţii metrice convexe este mai generală decât clasa binecunoscută de spaţii normate liniare, vom lucra în contextul spaţiilor metrice convexe introduse de W. Takahashi.
Scopul nostru este de a introduce noi procese iterative şi de a demonstra că acestea sunt convergente în circumstanţe adecvate. În prezenta secţiune, lucrăm pe un domeniu neliniar, mai explicit pe un spaţiu metric convex. De asemenea, reamintim două exemple de bază importante de spaţii metrice convexe: spaţiile $CAT(0)$ şi spaţiile normate liniare. Pentru detalii, lăsăm cititorul să urmărească [39] şi [157]. Alte exemple importante sunt: spaţiile hiperbolice introduse de Goebel şi Kirk şi spaţiile hiperbolice în sensul lui Reich şi Safrir. Pentru detalii, a se vedea : [54] şi [132].
Pentru a simplifica unele procese iterative existente în literatura de specialitate, reamintim definiţia lui Machado din [87] de combinaţii convexe generale definite pe spaţii metrice convexe:
Pentru $a_1, ..., a_n \in X$ şi $\varphi_1, ..., \varphi_n \in [0,1]$ cu $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$, definim noţiunea de combinaţie convexă multiplă a elementelor $a_1, ..., a_n$

$$W\left(a_1, ..., a_n; \varphi_1, ..., \varphi_n\right) = W\left(W\left(a_1, ..., a_{n-1}; \frac{\varphi_1}{1-\varphi_n}, ..., \frac{\varphi_{n-1}}{1-\varphi_n}\right), a_n; 1-\varphi_n\right),$$

dacă

$$\varphi_n \neq 1$$

şi

$$W\left(a_1, ..., a_n; 0, ..., 1\right) = a_n,$$

dacă $\varphi_n = 1$.
Vom trata cazul când $n = 2$ şi $n = 3$. Vom considera $\varphi_n \neq 1$. Celălalt caz este trivial şi rezultă chiar din definiţie.
Vom face convenţia că, pentru $n = 2$, avem :

$$\begin{aligned} W\left(a_1, a_2; \varphi_1, \varphi_2\right) &= W\left(W\left(a_1, a_1; \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\right), a_2; 1-\varphi_2\right) \\ &= W\left(a_1, a_2; 1-\varphi_2\right) \\ &= W(a_1, a_2, \varphi_1), \end{aligned}$$

unde $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$.
Reamintim că am folosit o proprietate a spaţiilor metrice convexe, anume $W(x, x, \lambda) = x$, $\forall x \in X$ şi $\lambda \in [0, 1]$.
Pentru $n = 3$, avem că

$$\begin{aligned} W(a_1, a_2, a_3; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) &= W\left(W\left(a_1, a_2; \frac{\varphi_1}{1-\varphi_3}, \frac{\varphi_2}{1-\varphi_3}\right), a_3; 1-\varphi_3\right) \\ &= W(b_3, a_3; 1-\varphi_3), \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} b_3 &= W\left(a_1, a_2; \frac{\varphi_1}{1-\varphi_3}, \frac{\varphi_2}{1-\varphi_3}\right) \\ &= W\left(a_1, a_2; 1 - \frac{\varphi_2}{1-\varphi_3}\right), \end{aligned}$$

precum în cazul când $n = 2$. Totodată, avem că $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 1$. Pe de altă parte, fie C o mulţime nevidă şi convexă a unui spaţiu normat E şi $T : C \to C$ a δ-o contracţie. În 2005 Suantai [156] a introdus iteraţia modificată Noor, cu şirurile auxiliare
$(\alpha_n), (\beta_n), (a_n), (b_n), (c_n) \subseteq [0, 1]$, $x_1 = x \in C$ şi

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n T y_n + \beta_n T z_n + (1 - \alpha_n - \beta_n) x_n, \; n \geq 1 \\ y_n = b_n T z_n + c_n T x_n + (1 - b_n - c_n) x_n \\ z_n = a_n T x_n + (1 - a_n) x_n. \end{cases} \tag{4.3.0.1}$$

În cazul în care C este o submulţime nevidă şi convexă a unui spaţiu metric convex E, Berinde a modificat schema iterativă de mai sus cu ajutorul structurii de convexitate W şi a definit acest proces iterativ în felul următor :

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(Ty_n, W\left(Tz_n, x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), \alpha_n\right) \\ y_n = W\left(Tz_n, W\left(Tx_n, x_n, \frac{c_n}{1-b_n}\right), b_n\right) \\ z_n = W(Tx_n, x_n, a_n). \end{cases} \tag{4.3.0.2}$$

Totodată, în [6], Agarwal et al. au definit o nouă schemă iterativă pe o mulţime nevidă şi convexă C dintr-un spaţiu normat, care poate fi adaptată foarte simplu la spaţiile normate. Această schemă iterativă este definită de $x_1 = x \in C$, respectiv

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n T y_n + (1 - \alpha_n) T x_n \\ y_n = b_n T x_n + (1 - b_n) x_n. \end{cases} \tag{4.3.0.3}$$

În contextul unei submulţimi nevide şi convexe C a unui spaţiu convex metric, procesul iterativ de mai sus este definit de $x_1 = x \in C$ şi de

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(Ty_n, Tx_n, \alpha_n) \\ y_n = W(Tx_n, x_n, b_n). \end{cases} \tag{4.3.0.4}$$

În [4], Abbas şi Nazir au îmbunătăţit schema iterativă de mai sus transformând-o printr-o schemă cu 3 paşi. O vom prezenta în contextul spaţiilor metrice convexe :

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(Tz_n, Ty_n, \alpha_n) \\ y_n = W(Tz_n, Tx_n, b_n) \\ z_n = W(Tx_n, x_n, a_n). \end{cases} \tag{4.3.0.5}$$

În întreaga literatură de punct fix putem găsi şi alte procese iterative importante. Utilizând lucrarea [55], le vom reaminti în contextul spaţiilor metrice convexe
schema iterativă SP, cu $x_0 = x \in C$ şi

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(Ty_n, y_n, \alpha_n) \\ y_n = W(Tz_n, z_n, b_n) \\ z_n = W(Tx_n, x_n, a_n). \end{cases} \tag{4.3.0.6}$$

schema iterativă S, cu $x_0 = x \in C$ şi

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(Ty_n, Tx_n, \alpha_n\right) \\ y_n = W\left(Tx_n, x_n, b_n\right). \end{cases} \tag{4.3.0.7}$$

schema iterativă CR, cu $x_0 = x \in C$ şi

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(Ty_n, y_n, \alpha_n\right) \\ y_n = W\left(Tz_n, Tx_n, b_n\right) \\ z_n = W\left(Tx_n, x_n, a_n\right). \end{cases} \tag{4.3.0.8}$$

Pe de altă parte, în [55] Gursoy şi Karakaya au introdus o variantă modificată a schemei iterative hibride Picard-S.

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = W\left(Tz_n, Tx_n, b_n\right) \\ z_n = W\left(Tx_n, x_n, a_n\right). \end{cases} \tag{4.3.0.9}$$

Totodată, relativ la problemele deschise din Agarwal, Sintunavarat şi Pitea, în [155] au introdus un nou proces iterativ care din punct de vedere calitativ e mai bun decât cel al lui Agarwal şi decât şirul Picard. Acesta are următoarea formă :
schema iterativă S_n, cu $x_0 = x \in C$ şi

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(Ty_n, Tz_n, \alpha_n\right) \\ y_n = W\left(Tx_n, x_n, b_n\right) \\ z_n = W\left(y_n, x_n, a_n\right). \end{cases} \tag{4.3.0.10}$$

Chiar dacă lucrăm în contextul unui spaţiu metric convex, vom folosi o proprietate suplimentară ce apare în cadrul spaţiilor hiperbolice în sensul lui Goebel şi Kirk, adică $W(x, y, \lambda) = W(y, x, 1 - \lambda)$, pentru fiecare $x, y \in X$ şi $\lambda \in [0, 1]$. Această proprietate este uşor satisfăcută într-un spaţiu normat liniar.
Primul rezultat principal al acestei secţiuni îmbunătăţeşte schema iterativă a lui Suantai 4.3.0.2 pe spaţii metrice convexe. Următorul proces iterativ este un algoritm implicit realizat prin intermediul combinaţiilor convexe multiple. Îl vom numi *schema iterativă implicită Suantai*

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(y_n, Ty_n, Tx_{n+1}; 1 - \alpha_n - \beta_n, \beta_n, \alpha_n) \\ y_n = W(z_n, Tz_n, Ty_n; 1 - b_n - c_n, c_n, b_n) \\ z_n = W(Tz_n, x_n, a_n). \end{cases}$$

Prin intermediul combinaţiilor convexe simple, schema iterativă devine

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(Tx_{n+1}, W\left(Ty_n, y_n, \dfrac{\beta_n}{1 - \alpha_n}\right); \alpha_n\right) \\ y_n = W\left(Ty_n, W\left(Tz_n, z_n, \dfrac{c_n}{1 - b_n}\right); b_n\right) \\ z_n = W(Tz_n, x_n, a_n). \end{cases} \tag{4.3.0.11}$$

Primul nostru rezultat al acestei secţiuni se referă la următoarea chestiune: ce condiţie trebuie impusă asupra şirului 4.3.0.11, astfel încât să fie convergent la unicul punct fix unei $\delta-$contracţii.

Teorema 4.3.1. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu metric convex complet X. Fie $T : C \to C$ o δ-contracţie. Considerăm (a_n), (b_n), (c_n), (α_n), (β_n), $(b_n + c_n)$ şi $(\alpha_n + \beta_n)$ şiruri în $[0, 1]$ astfel încât $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k + \beta_k) = \infty$. Atunci (x_n) din 4.3.0.11 este convergent la unicul punct fix p al lui T.*

Ca şi cazuri particulare ale procesului iterativ 4.3.0.11 obţinem scheme iterative clasice, cum ar fi schema implicită Noor, respectiv schema implicită Ishikawa.

Observaţia 4.3.2. În 4.3.0.11, luând $\beta_n = c_n = 0$, obţinem *schema iterativă implicită Noor* 1.5.0.6. Totodată, luând $\beta_n = c_n = a_n = 0$, obţinem *schema iterativă implicită Ishikawa* 1.5.0.7.

În cele din urmă vom studia două procese iterative, anume şiruri iterative de tipul Noor II modificate implicit prin combinaţii convexe multiple.
Primul şir îl vom numi *Schema iterativă implicită Noor II prin intermediul combinaţiilor convexe multiple* sau, pur şi simplu, *IN II m.c.c.* Aceasta este definită prin intermediul combinaţiilor convexe multiple, în felul următor :

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(Ty_n, Tz_n, Tx_{n+1}; 1 - \alpha_n - \beta_n, \beta_n, \alpha_n) \\ y_n = W(Tz_n, Tx_n, Ty_n; 1 - b_n - c_n, c_n, b_n) \\ z_n = W(Tz_n, x_n, a_n). \end{cases}$$

Prin intermediul combinaţiilor convexe simple, schema iterativă devine

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(Tx_{n+1}, W\left(Tz_n, Ty_n; \dfrac{\beta_n}{1 - \alpha_n}\right); \alpha_n\right) \\ y_n = W\left(Ty_n, W\left(Tx_n, Tz_n; \dfrac{c_n}{1 - b_n}\right); b_n\right) \\ z_n = W(Tz_n, x_n, a_n). \end{cases} \tag{4.3.0.12}$$

În ceea ce priveşte convergenţa schemei iterative 4.3.0.12, avem următoarea teoremă.

Teorema 4.3.3. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu metric convex complet X. Fie $T : C \to C$ o δ-contracţie. Considerăm (a_n), (b_n), (α_n) ,$(b_n + c_n)$, $(\alpha_n + \beta_n)$ şiruri în $(0, 1)$. Atunci (x_n) din 4.3.0.12 este convergent la unicul punct fix p al lui T.*

Acum vom prezenta ultima schemă iterativă. O vom numi *Schema iterativă Noor II dublu implicită cu mai multe combinaţii convexe* sau, pur şi simplu, *DIN II m.c.c.* Aceasta este definită prin intermediul combinaţiilor convexe multiple în felul următor:

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(Ty_n, Tx_{n+1}, Tx_{n+1}; 1 - \alpha_n - \beta_n, \beta_n, \alpha_n) \\ y_n = W(Tz_n, Ty_n, Ty_n; 1 - b_n - c_n, c_n, b_n) \\ z_n = W(Tz_n, x_n, a_n). \end{cases}$$

Prin intermediul combinaţiilor convexe simple, schema iterativă devine

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(Tx_{n+1}, W\left(Tx_{n+1}, Ty_n; \dfrac{\beta_n}{1 - \alpha_n}\right); \alpha_n\right) \\ y_n = W\left(Ty_n, W\left(Ty_n, Tz_n; \dfrac{c_n}{1 - b_n}\right); b_n\right) \\ z_n = W(Tz_n, x_n, a_n). \end{cases} \tag{4.3.0.13}$$

În ultima noastră teoremă a acestei secţiuni sunt prezentate condiţii suficiente pentru convergenţa procesului iterativ 4.3.0.13.

Teorema 4.3.4. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu metric convex complet X. Fie $T : C \to C$ o δ-contracţie. Fie (a_n), (b_n), (α_n) ,$(b_n + c_n)$, $(\alpha_n + \beta_n)$ şiruri în $(0, 1)$. Atunci (x_n) din 4.3.0.13 este convergent la unicul punct fix p al lui T.*

Bibliografie

[1] C.T. Aage, J.N. Salunke, *Some fixed point theorems for expansion onto mappings on cone metric spaces*, Acta Mathematica Sinica, English Series **27** (2011), no. 6, 1101-1106, doi:10.1007/s10114-011-9606-9.

[2] M. Abbas, S.H. Khan, B.E. Rhoades, *Simpler is also better in approximating fixed points*, Appl. Math. Comput. **205** (2008), no. 1, 428-431.

[3] M. Abbas, D. Ilić and T. Nazir, *Iterative approximation of fixed points of generalized weak Presic type k-step iterative method for a class of operators*, Filomat **29** (2015), no. 4, 713-724.

[4] M. Abbas and T. Nazir,*A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems*, Matematicki Vesnik **66:2** (2014), 223-234.

[5] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, *Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications*, Series : Topological Fixed Point Theory and Its Applications, **6**, Springe, New York (2009).

[6] R. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, *Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis **8** (2007), no. 1, 61-79.

[7] S. Akbulut and M. Ozdemir, *Picard iteration converges faster than Noor iteration for a class of quasi-contractive operators*, Chiang Mai J.Sci. **39** (2012), no. 4, 688-692.

[8] Y. I. Alber, S. Guerre-Delabriere, *Principle of weakly contractive maps in Hilbert spaces*, New results in operator theory and its applications: the Israel M. Glazman memorial volume, ser. Oper. Theory, Adv. Appl., I. Gohberg, Ed. Basel: Birkhauser, 1997, vol. 98, 7-22.

[9] **C.D. Alecsa**, *Common fixed points of Prešić operators via simulation functions*, J. Nonlinear Convex Anal. **20** (2019), no. 3, 1-15.

[10] **C.D. Alecsa**, *Approximating fixed points for nonlinear generalized mappings using Ishikawa iteration*, Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. **68** (2019), no. 1, 163-191.

[11] **C.D. Alecsa**, *Fixed point theorems for generalized contraction mappings on b-rectangular metric spaces*, Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica **62** (2017), no. 4, 495-520.

[12] **C.D. Alecsa**, *Some fixed point results linked To $\alpha-\beta$ rational contractions and modified multivalued Hardy-Rogers operators*, J. Fixed Point Theory, 2018:3 (2018), Article ID 3, 1-22.

[13] **C.D. Alecsa**, *Sequences of contractions on cone metric spaces over Banach algebras and applications to nonlinear systems of equations and systems of differential equations*, arXiv:1906.06261, 26 pages, *(submitted)*.

[14] **C.D. Alecsa, A. Petruşel**, *Some variants of Ćirić's multi-valued contraction principle*, Anal. Univ. de Vest Timişoara Ser. Mat. Inf. , vol. 1, 2019, (*accepted*).

[15] **C.D. Alecsa**, *Stability results and qualitative properties for Mann's algorithm via admissible perturbations technique*, Applied Anal. Optim. **1** (2017), no. 2, 327-344.

[16] **C. Alecsa**, *On new faster fixed point iterative schemes for contraction operators and comparison of their rate of convergence in convex metric spaces*, Int. Journal of Nonlinear Anal. and Appl. **8** (2017), no. 1, 353-388, doi:10.22075/IJNAA.2017.11144.1543.

[17] **C.D. Alecsa, A. Petruşel**, *On some fixed point theorems for multi-valued operators by altering distance technique*, J. Nonlinear Var. Anal. **1** (2017), 237-251.

[18] **C.D. Alecsa**, *Some fixed point results regarding convex contractions of Presić type*, J. Fixed Point Theory and Appl. 20:**20** (2018), no. 1, doi:10.1007/s11784-018-0488-7.

[19] M.A. Alghamdi, N. Hussain, P. Salimi, *Fixed point and coupled fixed point theorems on b-metric-like spaces*, J. Ineq. Appl. (2013), 2013:**402**, doi:10.1186/1029-242X-2013-402.

[20] M.A. Alghamdi, S.H. Alnafei, S. Radenovic and N. Shahzad, *Fixed point theorem for convex contraction mappings on cone metric spaces*, Math. Comput. Model. **54** (2011), 2020-2026.

[21] A.S.S. Alharbi, H.H. Alsulami, E. Karapinar, *On the power of simulation and admissible functions in metric fixed point theory*, J. Funct. Spaces, https://www.hindawi.com/journals/jfs/aip/2068163.

[22] S.H. Alnafei, S. Radenovic and N. Shahzad, *Fixed point theorems for mappings with convex diminishing diameters on cone metric spaces*, Appl. Math. Lett. **24** (2011), 2162-2166.

[23] H.H. Alsulami, E. Karapinar, F. Khojasteh, A.F. Roldán-López-de-Hierro, *A proposal to the study of contractions in quasi-metric spaces*, Discrete Dyn. Nat. Soc. (2014), Article ID 269286, 10 pages, doi:10.1155/2014/269286.

[24] A. Amini-Harandi, A. Petruşel, *A fixed point theorem by altering distance technique in complete metric spaces*, Miskolc Math. Notes, **14** (2013), no. 1, 11-17.

[25] J. Andres, L. Górniewicz, *On The Banach Contraction Principle For Multivalued Mappings*, Approximation, Optimization and Mathematical Economics (M. Lassonde ed.), 23 pages.

[26] A.H. Ansari, H. Işik, S. Radenović, *Coupled fixed point theorems for contractive mappings involving new function classes and applications*, Filomat **31** (2017), no. 7, 1893-1907.

[27] H. Argoubi, B. Samet, C. Vetro, *Nonlinear contractions involving simulation functions in a metric space with a partial order*, J. Nonlinear Sci. Appl. **8** (2015), 1082-1094.

[28] M. Asadi, *Some results of fixed point theorems in convex metric spaces*, Nonlinear Func. Anal. Appl. **19** (2014), no. 2, 171-175.

[29] H. Aydi, E. Karapinar, S. Moradi, *Coincidence points for expansive mappings under c-distance in cone metric spaces*, Int. Journal of Math. and Math. Sci., vol. 2012, Article ID 308921, doi:10.1155/2012/308921.

[30] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales*, Fund. Math. **3** (1922), 133-181.

[31] L. Barbet, K. Nachi, *Sequences of contractions and convergence of fixed points*, Monografias del Seminario Matemático García de Galdeano **33** (2006), 51-58.

[32] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[33] V. Berinde, M. Păcurar, *Stability of k-step fixed point iterative methods for some Presic type contractive mappings*, J. Inequal. Appl. 2014:**149** (2014), doi:10.1186/1029-242X-2014-149.

[34] V. Berinde, *Picard iteration converges faster than Man iteration for a class of quasi-contractive operators*, Fixed Point Theory Appl. **1** (2004), 1-9.

[35] F.F. Bonsall, *Lectures on Some Fixed Point Theorems of Functional Analysis*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1962.

[36] M. Boriceanu, *Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b-metrics*, Stud. Univ.Babeş-Bolyai **54** (2009), no. 3.

[37] D.W. Boyd, J.S. Wong, *On nonlinear contractions*, Proc. Am. Math. Soc. **20** (1969), 458C464.

[38] A. Branciari, *A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces*, Publ. Math. Debrecen **57** (2000), 31-37.

[39] M.R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.

[40] C. Chifu, G. Petruşel, *Fixed point results for multivalued Hardy-Rogers Contractions in b-metric spaces*, Filomat **31** (2017), no. 8, 2499-2507.

[41] R. Chugh, P. Malik, V. Kumar, *On a new faster implicit fixed point iterative scheme in convex metric spaces*, J. Function Spaces, Article ID 905834 (2015), 149-154.

[42] L. Ćirić, *Fixed points for generalized multi-valued contractions*, Mat. Vesnik, **9** (1972), 265-272.

[43] L.B. Ciric, N.T. Nikolic, *Convergence of the Ishikawa iterates for multi-valued mappings in metric spaces of hyperbolic type*, Matematicki Vesnik, **60** (2008), 149-154.

[44] L.B. Ćirić and L.B. Prešić, *On Presic type generalisation of Banach contraction mapping principle*, Acta Math. Univ. Comenian **76** (2007), no. 2, 143-147.

[45] R.D. Daheriya, R. Jain, M. Ughade, *Some fixed point theorem for expansive type mapping in dislocated metric spaces*, Internat. Sch. Research Network, ISRN Math. Analysis, vol. 2012, Article ID 376832, 5 pages, doi:10.5402/2012/376832.

[46] S. Dhompongsa, H. Yingtaweesittikul, *Diametrically contractive multivalued mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2007), Article ID 19745.

[47] H.S. Ding, V. Ozturk, S. Radenovic, *On some new fixed point results in b-rectangular metric spaces*, J. Nonlinear Sci. Appl. **8** (2015), 378-386.

[48] N.V. Dung, A. Petruşel, *On iterated functions systems consisting of Kannan maps, Reich maps, Chatterjea type maps, and related results*, J. Fixed Point Theory Appl. (2017), doi:10.1007/s11784-017-0419-z.

[49] P. N. Dutta, B. S. Choudhury, *A generalisation of contraction principle in metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., vol. 2008, (2008), 8 pages.

[50] Z.M. Fadail, A.G.B. Ahmad, A.H. Ansari, S. Radenović, M. Rajović, *Some common fixed point results of mappings in* $0-\sigma-$*complete metric-like spaces via new function*, Appl. Math. Sci. **9** (2015), no. 83, 4109-4127.

[51] H. Fukhar-ud-din and V. Berinde, *Iterative methods for the class of quasi-contractive type operators and comparsion of their rate of convergence in convex metric spaces*, Filomat **30** (2016), no. 1, 223-230.

[52] R. George, S. Radenovic, K.P. Reshma, S. Shukla, *Rectangular b-metric space and contraction principles*, J. Nonlinear Sci. Appl. **8** (2015), 1005-1013.

[53] V. Glăvan, V. Guţu, *On the dynamics of contracting relations*, Analysis and Optimization of Differential Systems (Barbu V., Lasiecka I., Tiba D., Varsan C. eds.), Kluwer Acad. Publ. (2003), 179-188.

[54] K. Goebel and W. Kirk, *Iteration processes for nonexpansive mappings*, Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis, Contemporary Mathematics **21** (1983), Amer. Math. Soc. Providence, 115-123.

[55] F. Gursoy and V.Karakaya, *A Picard-S hybrid type iteration method for solving a differential equation with retarded argument*, http://arxiv.org/abs/1403.2546.

[56] A.A. Harandi, *Endpoints of set-valued contractions in metric spaces*, Nonlinear Anal. **72** (2010), 132-134.

[57] G.E. Hardy, A.D. Rogers, *A generalisation of fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull. **16** (1973), 201-208.

[58] A.M. Harder, T.L. Hicks, *Stability results for fixed point iteration procedures*, Math. Japon. **33** (1988), 693-706.

[59] H. Huang, S. Radenović, *Common fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings in cone b-metric spaces over Banach algebras and applications*, J. Nonlinear Sci. Appl. **8** (2015), 787-799.

[60] H. Huang, S. Hu, B.Z. Popović, S. Radenović, *Common fixed point theorems for four mappings on cone b-metric spaces over Banach algebras*, J. Nonlinear Sci. Appl. **9** (2016), 3655-3671.

[61] N. Hussain, A.A. Harandi, Y.J. Cho, *Approximate endpoints for set-valued contractions in metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., vol. 2010, 13 pages, doi:10.1155/2010/614867.

[62] V. Istrăţescu, *Some fixed point theorems for convex contraction mappings and convex nonexpansive mappings (I)*, Lib. Math. **1** (1981), 151-164.

[63] V. Istrăţescu, *Some fixed point theorems for convex contraction mappings and mappings with convex diminishing diameters - I*, Ann. Mat. Pura Appl. **130** (1982), 89-104.

[64] V. Istrăţescu, *Some fixed point theorems for convex contraction mappings and mappings with convex diminishing diameters, II*, Ann. Mat. Pura Appl. **134** (1983), 327-362.

[65] J.R. Jachymski, *Caristi's fixed point theorem and selections of set-valued contractions*, J. Math. Anal. Appl. **227** (1998), 55-67.

[66] S. Janković, Z. Kadelburg, S. Radenović, *On cone metric spaces : A survey*, Nonlinear Anal. **74** (2011), no. 7, 2591-2601.

[67] Z. Kadelburg, S. Radenovic, *Fixed point results in generalized metric spaces without Hausdorff property*, Math Sci. **125** (2014), no. 8, doi:10.1007/s40096-014-0125-6.

[68] Z. Kadelburg, S. Radenovic, *On generalized metric spaces : A survey*, TWMS J. Pure Appl. Math. **5** (2014), no. 1, 3-13.

[69] Z. Kadelburg, S. Radenovic, *Pata-type common fixed point results in b-metric and b-rectangular metric spaces*, J. Nonlinear Sci. Appl. **8** (2015), 944-954.

[70] T. Kamran, Q. Kiran, *Fixed point theorems for multi-valued mappings obtained by altering distances*, Math. and Comp. Modell., **54** (2011), 2772-2777.

[71] E. Karapinar, *Fixed points results via simulation functions*, Filomat **30** (2016), no. 8, 2343-2350.

[72] E. Karapinar, *Fixed point theorems in cone Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2009), Article ID 609281, doi:10.1155/2009/609281.

[73] A. Khamsi, *Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2010), Article ID 2010:315398, 7 pages.

[74] M. S. Khan, M. Swaleh, S. Sessa, *Fixed point theorems by altering distances between the points*, Bull. Aust. Math. Soc. **30** (1984), 1-9.

[75] M.S. Khan, M. Berzig and B. Samet, *Some convergence results for iterative sequences of Prešić type and applications*, Adv. Difference. Equ. vol. 2012 (2012), Article 38.

[76] F. Khojasteh, S. Shukla, S. Radenović, *A new approach to the study of fixed point theory for simulation functions*, Filomat **29** (2015), no. 6, 1189-1194.

[77] U. Kohlenbach, *Some logical metatheorems with applications in functional analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 1, 89-128.

[78] S. Kumar, S.K. Garg, *Expansion mapping theorems in metric spaces*, Int. J. Contemp. Math. Sciences **4** (2009), no. 36, 1749 - 1758.

[79] V. L. Lazăr, *Fixed point theory for multivalued φ-contractions*, Fixed Point Theory and Appl. 2011:**50** (2011).

[80] T. Lazăr, G. Moţ, G. Petruşel, S. Szentesi, *The theory of Reich's fixed point theorem for multivalued operators*, Fixed Point Theory and Appl., vol. 2010, Article ID 178421, 10 pages, doi:10.1155/2010/178421.

[81] T. A. Lazăr, A. Petruşel, N. Shahzad, *Fixed points for non-self operators and domain invariance theorems*, Nonlinear Anal. **70** (2009), 117-125.

[82] T. Lazăr, D. O'Regan, A. Petruşel, *Fixed points and homotopy results for Ćirić-type multivalued operators on a set with two metrics*, Bull. Korean Math. Soc. **45** (2008), no. 1, 67-73.

[83] B. Li, H. Huang, *Fixed point results for weak φ-contractions in cone metric spaces over Banach algebras and applications*, Journal of Function Spaces (2017), Article ID 5054603, 6 pages.

[84] X.L. Liu, A.H. Ansari, S. Chandok, S. Radenović, *On some results in metric spaces using auxiliary simulation functions via new functions*, J. Comput. Anal. Appl. **24** (2018), 1103-1114.

[85] H. Liu, S. Xu, *Cone metric spaces with Banach algebras and fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings*, Fixed Point Theory and Appl. (2013), Article ID 2013:320, 1-10.

[86] Z. Liu, Z. Wu, S.M. Kang, S. Lee, *Some fixed point theorems for nonlinear set-valued contractive mappings*, J. of Appl. Math., volume 2012, Article ID 786061, 13 pages, doi:10.1155/2012/786061.

[87] H.V. Machado, *A characterization of convex subsets of normed spaces*, Kodai Math. Sem. Rep. **25** (1973), 307-320.

[88] R. Miculescu and A. Mihail, *A generalization of Matkowski's fixed point theorem and Istrăţescu's fixed point theorem concerning convex contractions*, J. Fixed Point Theory Appl. (2017).

[89] S.N. Mishra, R. Pant, R. Panicker, *Sequences of (ψ, ϕ)-weakly contractive mappings and stability of fixed points*, Int. Journal of Math. Analysis **7** (2013), no. 22, 1085-1096.

[90] S.N. Mishra, S.L. Singh, R. Pant, *Some new results on stability of fixed points*, Chaos, Solitons & Fractals **45** (2012), 1012-1016.

[91] M. Moosaei, *Fixed point theorems in convex metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. 2012:**164** (2012), doi:10.1186/1687-1812-2012-164.

[92] M. Moosaei, *Common fixed points for some generalized contraction pairs in convex metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. 2014:**98** (2014), doi:10.1186/1687-1812-2014-98.

[93] M. Moosaei, A. Azizi, *On coincidence points of generalized contractive pair mappings in convex metric spaces*, J. of Hyperstructures **2** (2015), no. 4, 136-141.

[94] S. Moradi, A. Farajzadeh, *On the fixed point of $(\psi - \varphi)$-weak and generalized $(\psi - \varphi)$-weak contraction mappings*, Appl. Math. Lett. **25** (2012), 1257-1262.

[95] V. Mureşan and A.S. Mureşan, *On the theory of fixed point theorems for convex contraction mappings*, Carpatian J. Math. **31** (2015), no. 3, 365-371.

[96] S.B. Nadler Jr., *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math. **30** (1969), 475-488.

[97] S.B. Nadler Jr., *Sequences of contractions and fixed points*, Pacific J. Math. **27** (1968), 579-585.

[98] H. Olaoluwa, J.O. Olaleru, *A hybrid class of expansive-contractive mappings in cone b-metric spaces*, Afr. Mat., doi:10.1007/s13370-015-0381-0.

[99] H.K. Pathak, *Some fixed points of expansion mappings*, Internat. J. Math & Math. Sci. **19** (1996), no. 1, 97-102.

[100] H.K. Pathak, R. George, H.A. Nabwey, M. S. El-Paoumy and K. P. Reshma, *Some generalized fixed point results in b-metric space and application to matrix equations*, Fixed Point Theory Appl. **101** (2015).

[101] S.R. Patil, J.N. Salunke, *Fixed point theorems for expansion mappings in cone rectangular metric spaces*, Gen. Math. Notes **29** (2015), no. 1, 30-39.

[102] M. Păcurar, *Approximating common fixed points of Presić-Kannan type operators by a multi-step iterative method*, An. Stiint. Univ. Ovidius Constanţa Ser. Mat. **17** (2009), no. 1, 153-168.

[103] M. Păcurar, *A multi-step iterative method for approximating fixed points of Prešić-Kannan operators*, Acta Math. Univ. Comenianae **79** (2010), no. 1, 77-88.

[104] M. Păcurar, *A multi-step iterative method for approximating common fixed points of Presić-Rus type operators on metric spaces*, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Math. **LV** (2010), no. 1, 149-162.

[105] M. Păcurar, *Sequences of almost contractions and fixed points*, Carpathian J. Math. **24** (2008), no. 2, 101-109.

[106] M. Păcurar, *A multi-step method for approximating common fixed points of Presić-Rus type operators on metric spaces.* Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., vol. LV (2010), no. 1, 149-162.

[107] M. Păcurar, *Fixed points of almost Presić operators by a k-step iterative method*, An. Ştiinţ. Univ. AI.I. Cuza Iaşi Mat. **57** (2011).

[108] D.K. Patel, P.R. Patle, L. Budhia, D. Gopal, *Coincidence point results involving a generalized class of simulation functions*, arXiv:1708.05693.

[109] T.P. Petru, M. Boriceanu, *Fixed point results for generalized φ-contraction on a set with two metrics*, Top. Methods Nonlin. Anal. **33** (2009), 315-326.

[110] T.P. Petru, A. Petruşel, J.C. Yao, *Ulam-Hyers stability of operatorial equations and inclusions via nonself operators*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), no. 5, 2195-2212.

[111] A. Petruşel, *Ćirić type fixed point theorems*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai, **59** (2014), no. 2, 233-245.

[112] A. Petruşel, *Multivalued weakly Picard operators and applications*, Sci. Math. Jpn. **59** (2004), 169-202.

[113] A. Petruşel, *Some variants of the contraction principle for multi-valued operators, generalizations and applications*, preprint.

[114] A. Petruşel, I.A. Rus, *An abstract point of view on iterative approximation schemes of fixed points for multivalued operators*, J. Nonlinear Sci. Appl. **6** (2013), 97-107.

[115] A. Petruşel, I.A. Rus, *Well-posedness of the fixed point problem for multivalued operators*, Applied Analysis and Differential Equations (Cârjă, O., Vrabie I.I. eds.), World Scientific (2007), 295-306.

[116] A. Petruşel, *Operatorial Inclusions*, House of the Book of Science, Cluj-Napoca, Romania, 2002.

[117] A. Petruşel, I.A. Rus, *Multivalued Picard and weakly Picard operators*, Fixed Point Theory and Appl. (J. Garcia Falset, E. Llorens Fuster, B. Sims eds.), Yokohama Publisher (2004), 207-226.

[118] G. Petrusel, T. Lazar, V.L. Lazar, *Fixed points and coupled fixed points for multi-valued $(\psi - \varphi)$-contractions in b-metric spaces*, Applied Analysis and Optimization **1** (2017), no. 1, 99-112.

[119] A. Petruşel, I.A. Rus, *The theory of a metric fixed point theorem for multivalued operators*, Proc. Ninth International Conference on Fixed Point Theory and Applications, Changhua, Taiwan, July 16-22 (2009), (L.J. Lin, A. Petruşel, H.K. Xu - eds.), Yokohama Publ. 2010, 161-175.

[120] A. Petruşel, I.A. Rus, J.C. Yao, *Well-posedness in the generalized sense of the fixed point problems for multivalued operators*, Taiwanese J. Math. **11** (2007), no. 3, 903-914.

[121] A. Petruşel, G. Petruşel, *Selection theorems for multivalued generalized contractions*, Math. Morav. **9** (2005), 43-52.

[122] W. Phuengrattana and S. Suantai, *Comparison of the rate of convergence of various iterative methods for the class of weak contractions in Banach Spaces*, Thai J. Math. **11** (2013), no. 11, 217-226.

[123] O. Popescu, *Fixed points for $(\psi - \varphi)$-weak contractions*, Appl. Math. Letters, **24** (2011), 1-4.

[124] O. Popescu, G. Stan, *A generalization of Nadler's fixed point theorem*, Results Math. (2017), doi:10.1007/s00025-017-0694-4.

[125] B. Prasad, R. Sahni, *Endpoints of multivalued contraction operators*, vol. 2013, 7 pages, doi:10.1155/2013/542302.

[126] S.B. Prešić, *Sur une classe d'inéquations aux differences finies et sur la convergence de certain suites*, Pub. de l'Inst. Math. Belgrade **5** (1965), no. 19, 75-78.

[127] S. Radenović, S. Chandok, *Simulation type functions and coincidence point results*, Filomat, *to appear.*

[128] S. Radenović, F. Vetro, J. Vujaković, *An alternative and easy approach to fixed point results via simulation functions*, Demonstr. Math. **50** (2017), 223-230, https://doi.org/10.1515/dema-2017-0022.

[129] R.A. Rashwan, *Some fixed point theorems in cone rectangular metric spaces*, Math. Aeterna, **2** (2012), no. 6, 573-587.

[130] J.S. Raymond, *Multivalued contractions*, Set-Valued Analysis **2** (1994), 559-571.

[131] S. Reich, *Fixed points of contractive functions*, Bolletino U.M.I. **4** (1972), no. 5, 26-42.

[132] S. Reich and I. Safrir, *Nonexpansive iteration in hyperbolic spaces*, Nonlinear. Anal. **15** (1990), 537-558.

[133] B. E. Rhoades, *Some theorems on weakly contractive maps*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **47** (2001), no. 4, 2683-2693.

[134] B. E. Rhoades, H.K. Pathak, S.N. Mishra, *Some weakly contractive mappings theorems in partially ordered spaces and applications*, Demonstratio Mathematica, vol. XLV (2012), no. 3.

[135] A.F. Roldán-López-de-Hierro, E. Karapinar, C. Roldán-López-de-Hierro, J. Martínez-Moreno, *Coincidence point theorems on metric spaces via simulation functions*, J. Comput. Appl. Math. **275** (2015), 345-355.

[136] J.R. Roshan, N. Hussain, V. Parvaneh, Z. Kadelburg, *New fixed point results in rectangular b-metric spaces*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control **21** (2016), no. 5, 614-634, doi:10.15388/NA.2016.5.4.

[137] W. Rudin, *Functional Analysis (second edition)*, McGraw-Hill, New York, 1991.

[138] I.A. Rus, *Generalized Contractions and Applications*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001.

[139] I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, Romania, 2008.

[140] I.A. Rus, *An iterative method for the solution of the equation $x = f(x, ..., x)$*, Rev. Anal. Numer. Theor. Approx. **10** (1981), no. 1, 95-100.

[141] I. A. Rus, *Picard operators and applications*, Sci. Math. Jpn. **58** (2003), 191-219.

[142] I.A. Rus, A. Petruşel, A. Sîntămărian, *Data dependence of the fixed point set of some multivalued weakly Picard operators*, Nonlinear Anal. **52** (2003), no.8, 1947-1959 .

[143] I.A. Rus, A. Petruşel, A. Sîntămărian, *Data dependence of the fixed point set of multivalued weakly Picard operators*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **46** (2001), no. 2, 111-121.

[144] K.P.R. Sastry, Ch. S. Rao, C. Sekhar and M. Balaiah, A *Fixed Point Theorem for Cone Convex Contractions of Order $m \geq 2$*, Int. J. Math. Sci. Eng. Appl. **6**, no. 1, 263-271.

[145] M.A. Şerban, *The Fixed Point Theory for the Operators on Cartesian Product*, (Romanian), Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2002.

[146] N. Shahzad, H. Zegeye, *On Mann and Ishikawa iteration schemes for multi-valued maps in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 838-844.

[147] T. Shimizu, W. Takahashi, *Fixed point theorems in certain convex metric spaces*, Math. Japon., **37** (1992), 855-859.

[148] S. Shukla, S. Radenović, *Prešić-Boyd-Wong type results in ordered metric spaces*, Int. J. Anal. Appl. **5** (2014), no. 2, 154-166.

[149] S. Shukla and S. Radenovic, *Presić-Maya type theorems in ordered metric spaces*, Gulf J. Math. **2** (2014), no. 2, 73-82.

[150] S. Shukla, S. Radenovic and S. Pantelić, *Some fixed point theorems for Prešić-Hardy-Rogers type contractions in metric spaces*, J.Math. (2013), doi:10.1155/2013/295093.

[151] S. Shukla and S. Radenovic, *Some generalizations of Prešić type mappings and applications.* An. Ştiinţ. Univ. AI.I. Cuza Iaşi Mat., doi:10.1515/aicu-2015-0026.

[152] S.L. Singh, V. Chada, *Round-off stability of iterations for multivalued operators*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. **17** (1995), no. 5, 187-192.

[153] S.L. Singh, S.N. Mishra, S. Jain, *Round-off stability for multivalued mappings*, Fixed Point Th. Appl. **12** (2012), doi:10.1186/1687-1812-2012-12.

[154] S.P. Singh, W. Russell, *A note on a sequence of contraction mappings*, Can. Math. Bull. **12** (1969), 513-516.

[155] W. Sintunavarat and A. Pitea, *On a new iteration scheme for numerical reckoning fixed points of Berinde mappings with convergence analysis*, J. Nonlinear Science Appl. **9** (2016), 2553-2562.

[156] S. Suantai, *Weak and strong convergence criteria of Noor iterations for asymptotically nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **311** (2005), 506-517.

[157] W. Takahashi, *A convexity in metric spaces and nonexpansive mappings I*, Kodai. Math. Sem. Rep. **22** (1970), 142-149.

[158] L.A. Talman, *Fixed points for condensing multifunctions in metric spaces with convex structure*, Kodai Math. Sem. Rep. **29** (1977), 62-70.

[159] C. Wang, T. Zhang, *Approximating common fixed points for a pair of generalized nonlinear mappings in convex metric spaces*, J. Nonlinear. Sci. Appl. **9** (2016), 1-7.

[160] S. Xu, S. Radenović, *Fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings on cone metric spaces over Banach algebras without assumption of normality*, Fixed Point Theory and Appl. (2014), Article ID 2014:102, 1-12.

[161] Z. Xue, *Fixed points theorems for generalized weakly contractive mappings*, Bull. Aust. Math. Soc. **93** (2016), 321-329, doi:10.1017/S0004972715001069.

[162] O. Yamaod, W. Sintunavarat, *An approach to the existence and uniqueness of fixed point results in $b-$metric spaces via $s-$simulation functions*, J. Fixed Point Theory Appl. (2017), doi:10.1007/s11784-017-0453-x.

[163] P. Yan, J. Yin, Q. Leng, *Some coupled fixed point results on cone metric spaces over Banach algebras and applications*, J. Nonlinear Sci. Appl. **9** (2016), 5661-5671.

[164] P. Zangenehmehr, A.P. Farajzadeh, R. Lashkaripour, Ar. Karamian, *On fixed point theory for generalized contractions in cone rectangular metric spaces via scalarizing*, Thai Journal of Math., vol. XLV (2012), no. 3, 717-724.