UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI, CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

CONTRIBUŢII LA APROXIMAREA DE TIP KOROVKIN

Rezumatul tezei de doctorat

Autor,
Saddika Tarabie

Îndrumător ştiinţific,
PhD Professor Octavian Agratini

Cluj-Napoca
2012

Introducere

1. *Despre aproximarea de tip Korovkin*

Prezentăm noţiunea de *schemă de aproximare*. Fie (X, d) un spaţiu metric. O metodă (schemă) de aproximare presupune o mulţime $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \subset X$, de funcţii de aproximare. Pentru un element oarecare $f \in X$, metoda va selecta elementul e_f din $\mathcal{F}$ care va reprezenta aproximanta lui f. Pentru a stabili cât de bună este metoda aleasă, e_f se compară cu cea mai bună aproximare a lui f în mulţimea $\mathcal{F}$. Elementul de cea mai bună aproximare, fie acesta $e^* \in \mathcal{F}$, verifică

$$d(f, e^*) = \inf\{d(f, e) : \ e \in \mathcal{F}\} := \mathrm{dist}(f, \mathcal{F}).$$

Condiţii de existenţă, unicitate şi de caracterizare a celei mai bune aproximări în cazul în care $\mathcal{F}$ este un spaţiu Hilbert se pot găsi în [27, *Section 1.4*].

Astfel, un obiectiv important este de a determina ce fel de funcţii folosim pentru aproximare. Una din direcţiile Teoriei Aproximării este dată de utilizarea operatorilor liniari şi pozitivi. Această direcţie este una relativ nouă fondată în anii '50 de T. Popoviciu, H. Bohman şi P.P. Korovkin. Faimoasa teoremă Popoviciu-Bohman-Korovkin caracterizează şirurile de operatori liniari şi pozitivi care converg spre operatorul identitate.

Următoarele trei aspecte sunt esenţiale în această direcţie: construcţia acestor procese liniare, studiul erorii de aproximare, studiul abilităţilor de a moşteni proprietăţi calitative ale funcţiei ce se aproximează, ca de exemplu monotonia şi convexitatea.

După o operă de pionierat desfăşurată de matematicienii menţionaţi, o nouă teorie s-a născut pe care o putem numi teoria aproximării de tip Korovkin (Korovkin-type Approximation Theory), pe scurt KAT. Dezvoltarea acestei teorii în spaţiile $C(X)$ a fost îmbogăţită de Wulbert [103], Berens şi Lorentz [19], [20], Bauer şi Donner [17]. KAT s-a dezvoltat de asemenea în cadrul laticilor Banach. Pentru documentarea în această direcţie, am utilizat ca sursă primară monografia lui Altomare şi Campiti [11]. Toate informaţiile fundamentale le-am structurat în Capitolul 1 al tezei.

Printre numeroasele abordări ale domeniului KAT, un filon recent descoperit este analiza proceselor de aproximare utilizând convergenţa statistică şi metode de sumabilitate. Primii paşi au fost făcuţi în 2002 de Gadjiev şi Orhan [45]. Direcţia s-a dovedit extrem de fertilă, dovadă stând numeroasele lucrări elaborate în ultimul deceniu.

Prezenta teză are ca scop această direcţie de investigaţie. Ţinta noastră este de a construi diferite clase de operatori liniari pozitivi de tip discret şi integral precum şi de a studia proprietăţile lor de aproximare statistică. Studiul nostru relativ la convergenţa statistică vizează atât operatori clasici cât şi operatori nou creaţi care depind de parametri. Lucrarea promovează cercetările personale, majoritatea dintre acestea fiind deja publicate în perioada stagiului doctoral.

2. *Arhitectura tezei*

Teza este structurată în trei capitole.

Capitolul 1 conţine o colecţie de rezultate semnificative din aria KAT. Aici am inclus definiţii, exemple, teoreme clasice de tip Korovkin, rezultate asupra vitezei de convergenţă a şirurilor de operatori liniari pozitivi. Toate entităţile matematice implicate sunt pe deplin explicate. Într-o secţiune distinctă am detaliat conceptul de convergenţă statistică şi utilizarea acestuia în KAT. De asemenea elemente de q-Calculus sunt reamintite. Formulele din q-Calculus vor fi utilizate în studiul q-aproximării proceselor liniare.

Capitolul 2 tratează clase de operatori modificaţi. Ne referim la operatori care reproduc monomul de gradul al doilea. După un popas asupra operatorilor King, studiem o familie de operatori discreţi care conservă anumite polinoame. Ultima secţiune este dedicată proprietăţilor de aproximare ale unei noi clase de q-operatori Szász-Mirakjan. Rezultatele asupra erorii de aproximare sunt stabilite utilizând diverse module de netezime.

Capitolul 3 debutează prin prezentarea unor teoreme recente de tip Korovkin utile în studiul A-convergenţei statistice a operatorilor liniari pozitivi. Rezultatele originale sunt evidenţiate în trei secţiuni distincte şi ele se referă relativ la următoarele: o extensie bidimensională a operatorilor Stancu, studiul aproximării statistice relativ la operatorii Lupaş şi la o clasă de tip Kantorovich, investigarea unor operatori integrali de sumare de tip mixt generaţi de operatorii Jain de tip discret. Menţionăm că praguri superioare ale erorilor de aproximare (uniformă, A-statistică, în norma L_p) sunt date explicit.

În elaborarea acestei lucrări am încercat să includem în primul rând rezultatele personale. Deşi tentaţia a fost mare, nu am dorit să prezentăm o gamă largă de rezultate existente în acest domeniu. Am fi obţinut o lucrare de sinteză care nu este primul deziderat al unei teze de doctorat. Fideli acestei linii, am inserat numai rezultatele utilizate efectiv în lucrările noastre publicate.

Rezultatele originale au fost publicate în lucrări în care autoarea tezei este unic autor sau co-autor alături de Octavian Agratini, Tudor Andrica, Cristina Radu, Andreea Veţeleanu. Până în prezent au fost publicate 6 articole.

3. *Rezultate originale*

Rezultatele noastre sunt diseminate în Capitolele 2 şi 3 după cum urmează.

Secţiunea 2.2: Teorema 2.2.1, Lema 2.2.2, Teorema 2.2.6, Lema 2.2.7, Teorema 2.2.8, Lema 2.2.10, Teorema 2.2.11 publicate în [9].

Secţiunea 2.3: Lema 2.3.2, Teorema 2.3.3, Teorema 2.3.4, Teorema 2.3.5, Corolarul 2.3.6 publicate în [86].

Secţiunea 2.4.: Teorema 2.4.7, Corolarul 2.4.8 publicate în [10].

Secţiunea 3.2: Teorema 3.2.1, Teorema 3.2.3, Teorema 3.2.5, Teorema 3.2.7 publicate în [10].

Secţiunea 3.3: Teorema 3.3.1, Teorema 3.3.2 publicate în [96].

Secţiunea 3.4: Lema 3.4.1, Lema 3.4.2, Teorema 3.4.3, Teorema 3.4.4, Teorema 3.4.5, Teorema 3.4.6 publicate în [95].

De asemenea, rezultate prezentate în Lema 2.4.10, Teorema 2.4.11, Teorema 3.1.9, Lema 3.2.8 şi Teorema 3.4.8 sunt până în prezent nepublicate.

Observaţie. Menţionăm că în acest rezumat numerotarea teoremelor, lemelor precum şi a tuturor relaţiilor este identică cu ceea ce apare în teză.

Capitolul 1. Preliminarii

În cele trei secţiuni colectăm notaţii, formule şi rezultate remarcabile care vor fi utilizate în prezentarea realizărilor noastre.

1.1. Procese pozitive de aproximare. Abordare clasică

În această secţiune vom evidenţia elementele fundamentale ale teoriei aproximării de tip Korovkin.

Deoarece scopul nostru este de a studia proprietăţile de aproximare ale operatorilor liniari pozitivi, se naşte o întrebare. Dacă $(L_n)_{n\geq 1}$ este un astfel de şir, care sunt condiţiile suficiente ce garantează că $(L_n f)_{n\geq 1}$ converge uniform spre f pentru orice funcţie continuă f? H. Bohman [23] şi P.P. Korovkin [65] au găsit răspunsul dând un criteriu foarte simplu cu scopul de a decide convergenţa unui şir dat de operatori liniari pozitivi spre operatorul identitate. Subliniem că rezultatul a fost independent stabilit de Tiberiu Popoviciu [82] a cărui contribuţie a rămas necunoscută pentru un timp îndelungat.

Notăm e_j, $j \in \mathbb{N}_0$, monomul de grad j, unde $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Teorema 1.1.6 (Popoviciu-Bohman-Korovkin). *Fie $(L_n)_{n\geq 1}$ un şir de operatori liniari pozitivi definiţi pe $C([a,b])$ cu valori în acelaşi spaţiu. Presupunem că $(L_n e_j)_{n\geq 1}$ converge uniform spre e_j pentru $j \in \{0,1,2\}$.*

Atunci $(L_n f)_{n\geq 1}$ converge uniform spre f pe $[a,b]$ pentru toate funcţiile f din $C([a,b])$.

Usual, e_0, e_1, e_2 sunt numite *funcţii test* ale spaţiului $C([a,b])$ în raport cu teorema Popoviciu-Bohman-Korovkin.

1.2. Conceptul de convergenţă statistică

Cu 60 de ani în urmă, noţiunea de convergenţă statistică a fost introdusă de H. Fast [40]. În lucrarea menţionată, autorul recunoaşte meritele lui H. Steinhaus care, în 18 februarie 1949 în cadrul Societăţii Matematice Poloneze (Wroclaw), a prezentat prima demonstraţie a afirmaţiei: pentru şiruri de funcţii măsurabile convergenţa statistică şi convergenţa asimptotic statistică sunt echivalente. Conceptul de convergenţă statistică se bazează pe noţiunea de densitate asimptotică a submulţimilor lui $\mathbb{N}$.

Chiar dacă noţiunea de convergenţă statistică a fost introdusă cu mult timp în urmă, aplicarea acesteia la studiul operatorilor liniari pozitivi a fost promovată doar în anul 2002. A.D. Gadjiev şi C. Orhan [45] au obţinut teoreme de tip Korovkin via convergenţa statistică. Rezultatul principal este următorul.

Teorema 1.2.14 [45, *Teorema 1*] *Dacă şirul de operatori liniari pozitivi* $L_n : C([a,b]) \to B([a,b])$ *satisface condiţiile*

$$st - \lim_n \|L_n e_j - e_j\| = 0, \ j = 0, 1, 2, \tag{1.2.7}$$

atunci, pentru orice funcţie $f \in C([a,b])$*, are loc*

$$st - \lim_n \|L_n f - f\| = 0. \tag{1.2.8}$$

1.3. Elemente de q-Calculus

Quantum Calculus este echivalent cu calculul infinitezimal tradiţional fără implicarea noţiunii de limită. Acesta defineşte *q-Calculus* şi *h-Calculus*.

h-Calculus este chiar calculul cu diferenţe finite care au fost studiate pentru prima dată de George Boole (1815-1864).

q-Calculus, deşi datează din perioada lui Leonhard Euler (1707-1783) şi Carl Gustav Jacobi (1804-1851), şi-a găsit doar mai recent utilitatea în mecanica cuantică. Pe lângă această utilitate are aplicaţii în diferite domenii matematice, ca de pildă, teoria numerelor, combinatorică, polinoame ortogonale, funcţii hipergeometrice.

Scopul acestei secţiuni este de a prezenta definiţii, notaţii şi rezultate de bază referitoare la q-Calculus. Pentru această sinteză ne-am documentat din cartea lui Kac şi Cheung [59, *pp. 7-13*].

Capitolul 2. Clase de operatori modificaţi

Acest capitol este axat pe operatori liniari pozitivi având ordinul de exactitate nul şi reproducând monomul de gradul al doilea. Punctul de plecare îl constituie lucrarea lui J.P. King [61]. În primul paragraf trecem în revistă rezultate obţinute în ultimii 5 ani relativ la aceşti operatori. În celelalte paragrafe introducem şi studiem diferite clase noi de operatori urmând tehnica creată de King.

2.1. Asupra operatorilor King

Se ştie, dacă un operator liniar pozitiv reproduce toate cele trei funcţii test ale criteriului Popoviciu-Bohman-Korovkin, atunci el este operatorul identitate al spaţiului.

Apare o întrebare: ce se cunoaşte despre operatorii care reproduc monoamele e_0 şi e_2?

J.P. King [61] a fost primul care a prezentat un exemplu de operatori ce se bucură de această proprietate.

2.2. Asupra unei familii de operatori de tip King care reproduc anumite polinoame

Această secţiune conţine rezultate publicate de autorul tezei în [9].

Scopul urmărit este de a introduce o clasă generală de operatori de tip discret ce reproduc funcţiile e_0 şi $e_2 + \alpha e_1$. Această familie este definită pe anumite subspaţii ale lui $C(J)$, $J \subset \mathbb{R}$. Vom considera două tipuri de intervale: $J = [0, 1]$ şi $J = \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$. În primul caz, prin utilizarea clasicului modul ω_f asociat unei funcţii $f \in C([0, 1])$ stabilim viteza de convergenţă locală şi globală. În al doilea caz, proprietăţile de aproximare ale clasei noastre sunt date în spaţii de funcţii cu creştere polinomială. Aceste spaţii sunt definite utilizându-se anumite ponderi. Mai precis, pentru $p \geq 2$, considerăm ponderea w_p, $w_p(x) = (1 + x^p)^{-1}$, $x \geq 0$, şi spaţiul corespunzător

$$C_p(\mathbb{R}_+) = \{f \in C(\mathbb{R}_+) : \ w_p(x)f(x) \text{ este convergent când } x \text{ tinde la infinit}\} \tag{2.2.1}$$

înzestrat cu norma $\| \cdot \|_{C_p}$, $\|f\|_{C_p} = \sup\limits_{x \geq 0} w_p(x)|f(x)|$.

Deoarece $p \geq 2$, funcţiile test e_j, $j \in \{0, 1, 2\}$ aparţin spaţiului $C_p(\mathbb{R}_+)$. În continuare detaliem construcţia familiei de operatori anunţată aşa cum a fost indicată în [9].

Pentru fiecare $n \geq 2$, fie $\Delta_n = (x_{n,k})_{k \in I_n}$ o reţea pe intervalul J, unde $I_n \subset \mathbb{N}$ este o mulţime consistentă de indici în raport cu J, aceasta însemnând $\{x_{n,k} : \ k \in I_n\} \subset J$. Considerăm operatorii L_n de forma

$$(L_n f)(x) = \sum_{k \in I_n} u_{n,k}(x) f(x_{n,k}), \quad x \in J, \tag{2.2.2}$$

unde $u_{n,k} \in C(J)$, $u_{n,k} \geq 0$, pentru orice $(n, k) \in \{2, 3, \ldots\} \times I_n$ şi

$$f \in \mathcal{F}(J) := \{g \in C(J) : \ \text{seria din (2.2.2) este convergentă}\}.$$

În continuare presupunem că următoarele identităţi

$$(L_n e_0)(x) = 1, \quad (L_n e_1)(x) = x, \quad (L_n e_2)(x) = a_n x^2 + b_n x, \quad x \in J, \tag{2.2.3}$$

sunt îndeplinite pentru fiecare $n \geq 2$. Mai mult, presupunem

$$a_n > 0, \quad b_n > 0, \quad \lim_n a_n = 1, \quad \lim_n b_n = 0. \tag{2.2.4}$$

Fie $\alpha \geq 0$ fixat. Pentru fiecare $n = 2, 3, \ldots$ notând

$$c_{n,\alpha} = \frac{b_n + \alpha}{2a_n},$$

definim funcţiile $v_{n,\alpha} : J \to \mathbb{R}_+$,

$$v_{n,\alpha}(x) = -c_{n,\alpha} + \sqrt{c_{n,\alpha}^2 + \frac{x^2 + \alpha x}{a_n}}, \quad x \in J. \tag{2.2.5}$$

Clar, $v_{n,\alpha} \in C(J)$. Având în vedere (2.2.2), considerăm operatorii liniari pozitivi

$$(L^*_{n,\alpha} f)(x) = \sum_{k \in I_n} u_{n,k}(v_{n,\alpha}(x)) f(x_{n,k}), \quad x \in J, \tag{2.2.6}$$

unde $f \in \mathcal{F}(J)$.

Teorema 2.2.1 *Fie operatorii $L^*_{n,\alpha}$, $n = 2, 3, \ldots$, definiţi prin (2.2.6). Au loc următoarele relaţii.*

(i) $L^*_{n,\alpha} e_0 = e_0$, $L^*_{n,\alpha} e_1 = v_{n,\alpha}$, $L^*_{n,\alpha}(e_2 + \alpha e_1) = e_2 + \alpha e_1$.

(ii) $(L^*_{n,\alpha} \varphi_x^2)(x) = (2x + \alpha)(x - v_{n,\alpha}(x))$, $x \in J$, unde $\varphi_x : J \to \mathbb{R}_+$ este definit prin $\varphi_x(t) = |t - x|$.

Lema 2.2.2 *Fie funcţiile $v_{n,\alpha}$, $n = 2, 3, \ldots$ definite prin (2.2.5). Pentru fiecare $x \in J$ au loc relaţiile*

(i) $0 \le v_{n,\alpha}(x) \le x$,

(ii) $\lim_n v_{n,\alpha}(x) = x$.

Teorema 2.2.6 *Fie operatorii $L^*_{n,\alpha}$, $n = 2, 3, \ldots$, definiţi prin (2.2.6), unde $J = [0, 1]$. Pentru fiecare $f \in C([0, 1])$ are loc*

$$\lim_n \|L^*_{n,\alpha} f - f\| = 0.$$

În investigarea vitezei de convergenţă a operatorilor $L^*_{n,\alpha}$ ($n \ge 2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$) avem nevoie de următorul rezultat.

Lema 2.2.7 *Fie funcţiile $v_{n,\alpha}$, $n = 2, 3, \ldots$, definite prin (2.2.5).*

(i) Pentru $\alpha > 0$, are loc $x - v_{n,\alpha}(x) \le \dfrac{(a_n - 1)x^2 + b_n x}{b_n + \alpha}$.

(ii) Pentru $\alpha = 0$, are loc $x - v_{n,\alpha}(x) \le \dfrac{|a_n - 1|}{\sqrt{a_n}} x + \dfrac{b_n}{2a_n}$.

Teorema 2.2.8 *Fie operatorii $L^*_{n,\alpha}$, $n = 2, 3, \ldots$, definiţi prin (2.2.6), unde $J = [0, 1]$. Presupunem că şirul $((a_n - 1)/b_n)_{n \ge 2}$ este mărginit. Fie f aparţinând spaţiului $C([0, 1])$.*

(i) Pentru $\alpha > 0$, are loc

$$|(L^*_{n,\alpha} f)(x) - f(x)| \le \left(1 + (2x + \alpha)x \frac{(a_n - 1)x + b_n}{b_n(b_n + \alpha)}\right) \omega_1(f; \sqrt{b_n}). \tag{2.2.10}$$

(ii) Pentru $\alpha = 0$, are loc

$$|(L^*_{n,0} f)(x) - f(x)| \le \left(1 + \frac{x}{a_n}\left(1 + 2\sqrt{a_n} \frac{|a_n - 1|}{b_n} x\right)\right) \omega_1(f; \sqrt{b_n}). \tag{2.2.11}$$

Lema 2.2.10 *Fie operatorii $L^*_{n,\alpha}$, $n = 2, 3, \ldots$, definiţi prin (2.2.6), unde $J = \mathbb{R}_+$.*

(i) Pentru orice $p \ge 2$ are loc

$$\frac{|(L^*_{n,\alpha} e_1)(x) - x|}{1 + x^p} \le \left|1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right| + \frac{|b_n(\sqrt{a_n} + 1) - \alpha(\sqrt{a_n} - 1)|}{\sqrt{a_n}(b_n + \alpha)}, \quad x \ge 0; \tag{2.2.12}$$

(ii) $\lim_n \|L^*_{n,\alpha}e_1 - e_1\|_{C_p} = 0.$

În acest moment arătăm că şirul $(L^*_{n,\alpha})_{n\geq 2}$ ne furnizează un nou proces tare de aproximare în spaţiul ponderat $C_p(\mathbb{R}_+)$, $p \geq 2$.

Teorema 2.2.11 *Fie operatorii* $L^*_{n,\alpha}$, $n = 2, 3, \ldots$, *definiţi prin (2.2.6), unde* $J = \mathbb{R}_+$. *Pentru orice funcţie* $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+) \cap C_p(\mathbb{R}_+)$, $p \geq 2$, *are loc următoarea identitate*

$$\lim_{n\to\infty} \|L^*_{n,\alpha}f - f\|_{C_p} = 0. \tag{2.2.13}$$

2.3. Proprietăţile de aproximare ale unei clase noi de q-operatori de tip Szász-Mirakjan

Scopul nostru de a prezenta o q-generalizare a operatorilor Szász-Mirakjan şi de a investiga viteza lor de convergenţă. Principalul instrument de lucru este un anume modul ponderat de netezime.

Rezultatele stabilite relativ la acest şir de operatori reprezintă rodul activităţii desfăşurate între 2008-2009 pe parcursul programului doctoral de stagiu alături de studentele doctorande Cristina Radu şi Andreea Veţeleanu. Ulterior aceste rezultate au fost completate şi în primăvara anului 2011 au fost publicate în revista *Studia Universitatis Babeş-Bolyai* [86].

Pe parcursul întregului paragraf considerăm $q \in (0, 1)$.

În [15] A. Aral a introdus un prim q-analog al clasicului operator Szász-Mirakjan.

Motivaţi de această lucrare, pentru $q \in (0, 1)$ prezentăm un alt q-analog al aceleiaşi clase de operatori definit după cum urmează

$$S_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{([n]_q x)^k}{[k]_q!} q^{k(k-1)} E_q(-[n]_q q^k x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q q^{k-1}}\right), \tag{2.3.1}$$

$x \geq 0$ şi $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+) = \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$ seriea în (2.3.1) este convergentă$\}$.

Pentru $q \to 1^-$ aceşti operatori se reduc la operatorii clasici Szász-Mirakjan. În acest caz funcţia aproximantă $S_{n,q}f$ este definită pe $\mathbb{R}_+$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pentru a fi mai uşor de investigat această construcţie, vom utiliza următorul q-operator de diferenţiere

$$\Delta^0_q f_{k,s} = f_{k,s}, \tag{2.3.2}$$

$$\Delta^{r+1}_q f_{k,s} = q^r \Delta^r_q f_{k+1,s} - \Delta^r_q f_{k,s-1}, \quad r \in \mathbb{N}_0, \tag{2.3.3}$$

unde $f_{k,s} = f(x_{k,s})$ şi $x_{k,s} = \dfrac{[k]_q}{q^s [n]_q}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{Z}$.

În mod uzual, $[t_0, t_1, \ldots, t_n; f]$ indică diferenţa divizată a funcţiei f pe punctele distincte $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Reamintim, aceasta se defineşte recursiv

$$[t_0; f] = f(t_0) \text{ şi } [t_0, t_1, \ldots, t_n; f] = \frac{[t_1, \ldots, t_n; f] - [t_0, \ldots, t_{n-1}; f]}{t_n - t_0}.$$

Conform lucrării lui Ivan [56, *p. 20*], termenul de *diferenţă divizată* a fost introdus în matematică de Augustus de Morgan (1842).

Lema 2.3.2 *Pentru orice $k, r \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{Z}$, are loc*

$$[x_{k,s-1}, \ldots, x_{k+r,s+r-1}; f] = \frac{q^{r(r+2s-1)/2}[n]_q^r}{[r]_q!} \Delta_q^r f_{k,r+s-1}, \tag{2.3.5}$$

unde nodurile sunt indicate la (2.3.3).

Teorema 2.3.3 *Fie $q \in (0,1)$ şi operatorii $S_{n,q}$, $n \in \mathbb{N}$, definiţi prin (2.3.1). Pentru orice funcţie $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ are loc*

$$S_{n,q}(f;x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{([n]_q x)^r}{[r]_q!} q^{r(r-1)/2} \Delta_q^r f_{0,r-1}, \quad x \geq 0. \tag{2.3.6}$$

În continuare considerăm un şir $(q_n)_n$, $0 < q_n < 1$, satisfăcând condiţia

$$\lim_n [n]_{q_n} = \infty. \tag{2.3.13}$$

Teorema 2.3.4 *Fie $(q_n)_n$ un şir satisfăcând (2.3.13) şi fie operatorii S_{n,q_n}, $n \in \mathbb{N}$, definiţi prin (2.3.1). Pentru orice compact $J \subset \mathbb{R}_+$ şi orice funcţie $f \in C(\mathbb{R}_+)$ are loc*

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,q_n}(f;x) = f(x), \text{ uniform în raport cu } x \in J.$$

Teorema 2.3.5 *Fie $(q_n)_n$ un şir satisfăcând (2.3.13) şi fie operatorii S_{n,q_n}, $n \in \mathbb{N}$, definiţi prin (2.3.1). Fie $q_0 = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} q_n$ şi $\alpha \geq 2$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice funcţie $f \in B_\alpha(\mathbb{R}_+)$ are loc*

$$|S_{n,q_n}(f;x) - f(x)| \leq C_{\alpha,q_0}(1 + x^{\alpha+1})\Omega_\alpha(f; \sqrt{1/[n]_{q_n}}), \quad x \geq 0, \tag{2.3.16}$$

unde C_{α,q_0} este o constantă pozitivă independentă de f şi n.

Această teoremă conduce la următoarea estimare globală.

Corolarul 2.3.6 *În ipotezele Teoremei 2.3.5 are loc*

$$\|S_{n,q_n} f - f\|_{B_{\alpha+1}} \leq C_{\alpha,q_0} \Omega_\alpha(f; \sqrt{1/[n]_{q_n}}),$$

unde C_{α,q_0} este o constantă pozitivă independentă de f şi n.

2.4. Asupra unui şir de operatori integrali de sumare

Această secţiune vizează studiul unor operatori micşti de sumare de tip integral liniari şi pozitivi care aproximează anumite funcţii definite pe $\mathbb{R}_+$. Vom deduce viteza de convergenţă punctuală. În cadrul acestei clase generale de operatori am evidenţiat cazuri particulare deja studiate în literatură. Materialul expus se bazează pe articolul [13].

În continuare dăm exemple de operatori micşti care utilizează diferite baze de funcţii.

Notând

$$s_{n,k}(x) = e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}, \quad v_{n,k}(x) = \frac{1}{(1+x)^n}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k, \tag{2.4.3}$$

$k \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}_+$, şi

$$C_\gamma(\mathbb{R}_+) = \{g \in C(\mathbb{R}_+) : \ |g(t)| \le Me^{\gamma t} \text{ pentru un anume } M > 0\},$$

$\gamma > 0$ fixat, următoarele exemple sunt evidenţiate.

Exemplul 2.4.1 *Operatori de tip Szász-Durrmeyer cu baza Baskakov*

$$(L_n f)(x) = n\sum_{\nu=0}^{\infty} v_{n,\nu}(x)\int_0^\infty s_{n,\nu}(t)f(t)dt,$$

$n \in \mathbb{N}$, $x \ge 0$, pentru $f \in L_p(\mathbb{R}_+)$, $p \ge 1$, vezi Gupta şi Srivastava [51].

Exemplul 2.4.2 *Operatori de tip Baskakov-Durrmeyer cu baza Szász*

$$(L_n f)(x) = (n-1)\sum_{\nu=1}^{\infty} s_{n,\nu}(x)\int_0^\infty v_{n,\nu-1}f(t)dt + e^{-nx}f(0), \tag{2.4.4}$$

$n \ge 2$, $x \in \mathbb{R}_+$, unde $f \in C_\gamma(\mathbb{R}_+)$, vezi [52, *Eq. (1.1)*].

Exemplul 2.4.3 *Operatori de tip Szász-Durrmeyer cu baza Beta*

$$(L_n f)(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{n,\nu}(x)\int_0^\infty s_{n,\nu-1}(t)f(t)dt + (1+x)^{-n-1}f(0), \tag{2.4.5}$$

$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+$, unde $f \in C_\gamma(\mathbb{R}_+)$, vezi [53, *Section 4*] şi [54]. Aici ponderile $\beta_{n,\nu}$ sunt date de funcţia Beta după cum urmează

$$\beta_{n,\nu}(x) = \frac{1}{B(n,\nu+1)}\,\frac{x^\nu}{(1+x)^{n+\nu+1}}, \quad \nu \ge 1. \tag{2.4.6}$$

Inspirându-ne din construcţiile anterioare, în ceea ce urmează vom introduce o clasă generală de operatori integrali hibrizi.

Fie $(a_{n,k})_{k\ge0}$, $(b_{n,k})_{k\ge0}$ două şiruri de funcţii continue şi pozitive definite pe $\mathbb{R}_+$ astfel încât următoarele relaţii au loc

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \mathbf{1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k} = \mathbf{1}, \quad \int_0^\infty b_{n,k}(t)dt := c_{n,k} < \infty, \tag{2.4.7}$$

unde $\mathbf{1}$ indică funcţia constantă pe $\mathbb{R}_+$ având valoarea constantei 1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim operatorul

$$(V_n f)(x) = f(0)a_{n,0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{n,k}(x)}{c_{n,k}}\int_0^\infty b_{n,k}(t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{2.4.8}$$

unde $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$, acest spaţiu reprezentând toate funcţiile cu valori reale definite pe $\mathbb{R}_+$ cu următoarele două proprietăţi: $b_{n,k}f$ aparţine spaţiului Lebesgue $L_1(\mathbb{R}_+)$ pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ şi seria din membrul drept al relaţiei (2.4.8) este convergentă.

Referitor la operatorii noştri V_n, $n \in \mathbb{N}$, impunem ca polinoamele de gradul întâi şi al doilea să fie transformate în polinoame de acelaşi grad care se anulează în origine. În acest sens considerăm

$$(V_n e_1)(x) = (1+\alpha_n)x \quad \text{şi} \quad (V_n e_2)(x) = (1+\beta_n)x^2 + \gamma_n x, \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{2.4.10}$$

Teorema 2.4.7 *Fie $\tau > 0$ fixat. Fie V_n, $n \in \mathbb{N}$, operatorii definiţi prin (2.4.8) astfel încât (2.4.10) are loc Pentru orice funcţie $f \in C_2(\mathbb{R}_+)$ următoarea inegalitate are loc*

$$|(V_n f)(x) - f(x)| \le M_{f,\tau}\delta_n^2(x) + 2\omega(f;\delta_n(x))_{[0,\tau+1]} \tag{2.4.17}$$

unde

$$\delta_n(x) = \sqrt{(\beta_n - 2\alpha_n)x^2 + \gamma_n x}, \quad x \in [0,\tau], \tag{2.4.18}$$

şi $M_{f,\tau}$ este o constantă depinzând numai de f şi τ.
Corolarul 2.4.8 *În ipotezele Teoremei 2.4.7 are loc*

$$\|V_n f - f\|_{[0,\tau]} \le M_{f,\tau}\|\delta_n^2\|_{[0,\tau]} + 2\omega(f;\|\delta_n\|_{[0,\tau]})_{[0,\tau+1]}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.4.19}$$

unde δ_n este definit prin (2.4.18).

În partea finală vom studia convergenţa statistică a şirului $(V_n)_{n\ge1}$.
Lema 2.4.10 *Fie $(\alpha_n)_{n\ge1}$, $(\beta_n)_{n\ge1}$, $(\gamma_n)_{n\ge1}$ şiruri de numere reale. Dacă*

$$st - \lim_n(\alpha_n - 2\beta_n) = 0, \quad st - \lim_n \gamma_n = 0, \tag{2.4.20}$$

atunci

$$st - \lim_n \|\delta_n^2\|_{[0,\tau]} = 0 \quad \text{şi} \quad st - \lim_n \omega(f;\|\delta_n\|_{[0,\tau]}) = 0, \tag{2.4.21}$$

unde cantităţile δ_n, $n \in \mathbb{N}$, sunt date prin (2.4.18).
Teorema 2.4.11 *Fie $\tau > 0$ fixat. Fie V_n, $n \in \mathbb{N}$, operatorii definiţi prin (2.4.8) astfel încât (2.4.10) are loc.*

Dacă se realizează condiţiile (2.4.20), atunci

$$st - \lim_n \|V_n f - f\|_{[0,\tau]} = 0, \quad f \in C_2(\mathbb{R}_+).$$

Capitolul 3. Convergenţa statistică a unor clase de operatori liniari

La început prezentăm rezultate care au ca punct de plecare Teorema 1.2.14, relevând realizările notabile în teoria aproximării prin utilizarea convergenţei statistice. În continuare investigăm alte clase de operatori liniari pozitivi. Rezultatele noastre originale sunt incluse în trei secţiuni distincte ale acestui capitol şi acestea se referă la studiul convergenţei statistice a operatorilor Stancu, Lupaş şi Jain. Rezultatele au fost publicate respectiv în lucrările [10], [96], [95].

3.1. Teoreme de tip Korovkin via convergenţa statistică

Prezentăm o nouă aplicaţie care se referă la operatorii Lupaş introduşi prin utilizarea elementelor de q-Calculus [69].

Pentru $q \in (0,1]$, aceşti operatori se definesc astfel

$$B_n^q : C([0,1]) \to C([0,1]),$$

$$(B_n^q f)(x) = \frac{1}{v_n(x;q)} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right), \tag{3.1.14}$$

unde $v_n(x;q) = \prod_{k=1}^{n} (1 - x + xq^{k-1})$, $x \in [0,1]$.

Teorema 3.1.9 *Fie $0 < q_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$, şi fie A o matrice regulară de sumabilitate nenegativă. Fie şirul $(B_n^{q_n})_{n\geq 1}$ definit în sensul relaţiei (3.1.14).*

Dacă $st_A - \lim_n [n]_{q_n} = \infty$, atunci pentru toate funcţiile $f \in C([0,1])$, are loc

$$st_A - \lim_n \|B_n^{q_n} f - f\| = 0. \tag{3.1.17}$$

3.2. O extensie bidimensională a operatorilor Stancu

Plecând de la schema probabilistică Markov-Pólya, D.D. Stancu [92] a introdus şi investigat un operator liniar $P_n^{\langle\alpha\rangle}$ care transformă spaţiul $C([0,1])$ în el însuşi şi este definit prin

$$(P_n^{\langle\alpha\rangle} f)(x) = \sum_{k=0}^{n} w_{n,k}(x;\alpha) f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{3.2.1}$$

unde

$$w_{n,k}(x;\alpha) = \binom{n}{k} \frac{\prod_{\nu=0}^{k-1}(x+\nu\alpha) \prod_{\mu=0}^{n-k-1}(1-x+\mu\alpha)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\dots(1+\overline{n-1}\alpha)}, \tag{3.2.2}$$

α fiind un parametru ce poate depinde numai de numărul natural n. Dacă α este nenegativ, atunci aceşti operatori conservă pozitivitatea funcţiei f.

Recent, G. Nowak [77] a introdus un q-analog al operatorilor Stancu. De asemenea noi am introdus [10] o extensie a acestei clase acţionând pe spaţiul funcţiilor cu valori reale definite pe un domeniu rectangular. Pentru $f \in C([0,1])$, $\alpha \geq 0$ şi fiecare $n \in \mathbb{N}$, în [77] s-au definit operatorii

$$(B_n^{q,\alpha} f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}^{q,\alpha}(x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right), \quad x \in [0,1], \tag{3.2.3}$$

unde

$$p_{n,k}^{q,\alpha}(x) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(x+\alpha[i]_q)\prod_{s=0}^{n-1-k}(1-q^s x+\alpha[s]_q)}{\prod_{i=0}^{n-1}(1+\alpha[i]_q)}, \quad 0 \le k \le n. \tag{3.2.4}$$

Această clasă conţine ca şi cazuri speciale următoarele trei şiruri binecunoscute.

i) Pentru $\alpha = 0$, $B_n^{q,0} \equiv B_n^q$ reprezintă operatorul q-Bernstein introdus de Phillips [80].

ii) Pentru $\alpha = 0$ şi $q = 1$, $B_n^{1,0} \equiv B_n$ este clasicul operator Bernstein.

iii) Pentru $q = 1$, $p_{n,k}^{1,\alpha}$ devin polinoamele fundamentale Stancu $w_{n,k}(\cdot;\alpha)$, $k = \overline{0,n}$, vezi (3.2.2), şi $B_n^{1,\alpha} \equiv P_n^{\langle\alpha\rangle}$ devine operatorul Stancu definit prin (3.2.1).

Teorema 3.2.1 *Fie şirurile* $(q_n)_n$, $(\alpha_n)_n$ *astfel încât* $0 < q_n < 1$ *şi* $\alpha_n \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Fie operatorii* $B_n^{q_n,\alpha_n}$, $n \in \mathbb{N}$, *definiţi în sensul relaţiei (3.2.3). Dacă*

$$st - \lim_n [n]_{q_n} = \infty \quad \text{şi} \quad st - \lim_n \alpha_n = 0, \tag{3.2.7}$$

atunci, pentru orice funcţie $f \in C([0,1])$, *are loc*

$$st - \lim_n \|B_n^{q_n,\alpha_n} f - f\| = 0. \tag{3.2.8}$$

Teorema 3.2.3 *Fie şirurile* $(q_n)_n$, $(\alpha_n)_n$ $(0 < q_n < 1,\ \alpha_n > 0,\ n \in \mathbb{N})$ *date astfel încât relaţia (3.2.7) are loc şi sunt satisfăcute următoarele condiţii*

$$k\Delta q_{k+1} \ge -c_1, \quad k\Delta\alpha_{k+1} \ge -c_2, \tag{3.2.9}$$

pentru anumiţi $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *şi pentru orice* $k \in \mathbb{N}$.

Dacă operatorii $B_n^{q_n,\alpha_n}$, $n \in \mathbb{N}$, *sunt definiţi în sensul relaţiei (3.2.3), atunci şirul* $(B_n^{q_n,\alpha_n})_n$ *converge uniform pe* $C([0,1])$ *spre operatorul identitate.*

Urmând [10], notăm $K = [0,1] \times [0,1]$ pătratul unitate şi fie vectorul $q(q_1,q_2)$ aparţinând interiorului lui K. Considerăm parametrul $\alpha(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Pentru orice $(n_1,n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definim operatorul utilizând o reţea grilă de tip cartezian şi acţionând pe spaţiul $C(K)$ după cum urmează

$$(B_{n_1,n_2}^{(q,\alpha)} f)(x_1,x_2) = \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} f(\lambda_{n_1,k_1,q_1},\lambda_{n_2,k_2,q_2}) p_{n_1,k_1}^{q_1,\alpha_1}(x_1) p_{n_2,k_2}^{q_2,\alpha_2}(x_2), \tag{3.2.10}$$

$(x_1,x_2) \in K$, unde $\lambda_{n_j,k_j,q_j} = [k_j]_{q_j}/[n_j]_{q_j}$ şi $p_{n_j,k_j}^{q_j,\alpha_j}$, $0 \le k_j \le n_j$, sunt definite prin (3.2.4), $j = 0,1$.

Teorema 3.2.5 *Fie* $q(q_1,q_2) \in (0,1)\times(0,1)$ *şi* $\alpha(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. *Operatorii* $B_{n_1,n_2}^{(q,\alpha)}$, $(n_1,n_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, *definiţi prin (3.2.10) verifică următoarele identităţi:*

$$B_{n_1,n_2}^{(q,\alpha)} e_{i,j} = e_{i,j},\ (i,j) \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\},$$
$$(B_{n_1,n_2}^{(q,\alpha)} e_{2,0})(x_1,x_2) = (B_{n_1}^{q_1,\alpha_1} e_2)(x_1),$$
$$(B_{n_1,n_2}^{(q,\alpha)} e_{0,2})(x_1,x_2) = (B_{n_2}^{q_2,\alpha_2} e_2)(x_2),$$

pentru orice $(x_1, x_2) \in K$.
Teorema 3.2.7 *Pentru orice* $n(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *în (3.2.10) substituim* α *prin* $\alpha_n(\alpha_{1,n_1}, \alpha_{2,n_2})$, $\alpha_{j,n_j} \geq 0$, *şi* q *prin* $q_n(q_{1,n_1}, q_{2,n_2})$, $0 < q_{j,n_j} < 1$, *unde* $j = 0, 1$. *Dacă*

$$st - \lim_{n_j}(1/[n_j]_{q_j,n_j}) = st - \lim_{n_j} \alpha_{j,n_j} = 0, \quad j = 0, 1, \tag{3.2.11}$$

atunci, pentru fiecare funcţie $f \in C(K)$, *are loc*

$$st - \lim_{n_1,n_2} \|B_{n_1,n_2}^{(q_n,\alpha_n)} f - f\| = 0.$$

Dacă în (3.2.11) înlocuim limita statistică prin limita clasică, atunci obţinem convergenţa uniformă a şirului $(B_{n_1,n_2}^{(q_n,\alpha_n)})_n$ spre operatorul identitate.

Revenind la cazul unidimensional şi examinând relaţia (3.2.7) apare o întrebare: ce condiţii suficiente pot fi impuse şirului numeric $(q_n)_{n\geq1}$ astfel încât să aibă loc $st - \lim_n [n]_{q_n} = \infty$?

Un posibil răspuns este dat de următoarea lemă.

Lema 3.2.8 *Fie* $(q_n)_{n\geq1}$ *un şir real astfel încât* $0 < q_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Dacă*

$$st - \lim_n q_n = 1 \text{ şi } st - \lim_n [n]_{q_n} \text{ există},$$

atunci are loc $st - \lim_n [n]_{q_n} = \infty$.

3.3. Asupra aproximării A-statistice a operatorilor de tip Lupaş şi Kantorovich

În această secţiune suntem preocupaţi de convergenţa A-statistică a două şiruri de operatori liniari pozitivi. Primul este de tip discret şi al doilea de tip integral. Rezultatele au fost publicate în [96].

În [70] Lupaş a propus studiul următorului şir de operatori liniari şi pozitivi

$$(\Lambda_n f)(x) = 2^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)_k}{2^k k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \; x \geq 0, \; f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \tag{3.3.1}$$

unde $(nx)_0 = 1$ şi $(nx)_k = nx(nx+1)\ldots(nx+k-1)$, $k \geq 1$, indică *factorialul crescător*. În [3] s-a prezentat o extensie integrală în sens Kantorovich a acestor operatori definită astfel

$$(K_n f)(x) = n2^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)_k}{q^k k!} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt, \quad x \geq 0, \tag{3.3.2}$$

unde f aparţine clasei de funcţii local integrabile pe $\mathbb{R}_+$.

Scopul nostru este de a studia convergenţa A-statistică a şirurilor $(\Lambda_n)_{n\geq1}$ şi $(K_n)_{n\geq1}$. Ne situăm în spaţiile ponderate $B_\rho(I)$ şi $C_\rho(I)$.

Pentru stabilirea rezultatelor noastre folosim următoarele ponderi

$$\rho_1(x) = 1 + x^2, \quad \rho_2(x) = 1 + x^{2\lambda}, \quad \lambda > 1,\ x \in \mathbb{R}_+. \tag{3.3.5}$$

Teorema 3.3.1 *Fie $A = (a_{j,n})$ o matrice regulară de sumabilitate nenegativă şi fie ρ_1, ρ_2 funcţii pondere introduse prin (3.3.5). Operatorii Λ_n, $n \in \mathbb{N}$, definiţi prin (3.3.1) satisfac următoarea identitate*

$$st_A - \lim_n \|\Lambda_n f - f\|_{\rho_2} = 0 \text{ pentru orice } f \in C_{\rho_1}(\mathbb{R}_+). \tag{3.3.6}$$

Teorema 3.3.2 *Fie $A = (a_{j,n})$ o matrice regulară de sumabilitate nenegativă şi fie ρ_1, ρ_2 funcţii pondere introduse prin (3.3.5). Operatorii K_n, $n \in \mathbb{N}$, definiţi prin (3.3.2) satisfac următoarea identitate*

$$st_A - \lim_n \|K_n f - f\|_{\rho_2} = 0 \text{ pentru orice } f \in C_{\rho_1}(\mathbb{R}_+). \tag{3.3.8}$$

3.4. Asupra operatorilor liniari Jain-Beta

Plecând de la un şir de operatori liniari pozitivi introduşi de G.C. Jain [58], prezentăm o versiune integrală a acestora. Proprietăţile de aproximare şi eroarea de aproximare sunt investigate în lucrarea [95]. De asemenea, este dată o extensie pentru funcţii netede.

Prezentăm construcţia operatorului mixt de sumare de tip integral. Lucrăm în spaţiul $C_{\rho_\lambda}(\mathbb{R}_+)$, unde ponderea $\rho_\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ este dată prin $\rho_\lambda(x) = 1 + x^{2+\lambda}$, $\lambda \geq 0$. Introducem un şir de operatori numindu-i Jain-Beta, după cum urmează

$$(J_n^{[\beta]} f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_\beta(k; nx)}{B(n+1, k)} \int_0^\infty f(t) \frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} dt + e^{-nx} f(0), \quad x \geq 0, \tag{3.4.4}$$

unde $n \geq 2$, $f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}_+)$ şi $w_\beta(k; nx)$ este distribuţia de tip Poisson dată prin

$$w_\beta(k; \alpha) = \frac{\alpha}{k!} (\alpha + k\beta)^{k-1} e^{-(\alpha + k\beta)}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Lema 3.4.1 *Operatorii $J_n^{[\beta]}$, $n \geq 2$, definiţi prin (3.4.4) satisfac relaţiile*

$$\begin{cases} J_n^{[\beta]} e_0 = e_0, \quad J_n^{[\beta]} e_1 = \dfrac{e_1}{1-\beta}, \\[2ex] J_n^{[\beta]} e_2 = \dfrac{n}{(n-1)(1-\beta)^2} \left(e_2 + \dfrac{1 + (1-\beta)^2}{n(1-\beta)} e_1 \right). \end{cases} \tag{3.4.6}$$

Lema 3.4.2 *Momentele centrale de ordinul întâi şi al doilea corespunzătoare operatorilor $J_n^{[\beta]}$, $n \geq 2$, sunt date de următoarele identităţi*

$$\begin{aligned} (J_n^{[\beta]} \varphi_x)(x) &= \frac{\beta}{1-\beta} x, \\ (J_n^{[\beta]} \varphi_x^2)(x) &= \left(\frac{n}{(n-1)(1-\beta)^2} - \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) x^2 + \frac{1 + (1-\beta)^2}{(n-1)(1-\beta)^3} x. \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Teorema 3.4.3 *Fie operatorii $J_n^{[\beta]}$, $n \geq 2$, definiţi prin (3.4.4). Pentru orice funcţie f aparţinând spaţiului $C_{\rho_0}(\mathbb{R}_+)$ are loc*

$$|(J_n^{[\beta]}f)(x) - f(x)| \leq (1 + \sqrt{x(x+1)})\omega(f; \sqrt{\delta_{n,\beta}})_{[0,a]}, \quad x \in [0, a],$$

unde $\delta_{n,\beta} = \dfrac{n+2}{(n-1)(1-\beta)^3} - \dfrac{1}{1-\beta}$.

Examinând relaţia (3.4.6) şi bazându-ne pe criteriul Popoviciu-Bohman-Korovkin, este clar că $(J_n^{[\beta]})_{n\geq 2}$ nu formează un proces de aproximare. În etapa următoare îl vom transforma pentru a se bucura de această proprietate. Pentru fiecare $n \geq 2$, constanta β va fi înlocuită printr-un număr $\beta_n \in [0, 1)$. Dacă

$$\lim_n \beta_n = 0, \tag{3.4.10}$$

atunci Lema 3.4.1 asigură $\lim_n (J_n^{[\beta_n]} e_j)(x) = x^j$, $j = 0, 1, 2$, uniform pe orice interval compact $K \subset \mathbb{R}_+$. În consecinţă, putem enunţa

Teorema 3.4.4 *Fie operatorii $J_n^{[\beta_n]}$, $n \geq 2$, definiţi în sensul relaţiei (3.4.4), unde $(\beta_n)_{n\geq 2}$ satisface (3.4.10). Pentru orice compact $K \subset \mathbb{R}_+$ şi pentru orice funcţie $f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}_+)$ are loc*

$$\lim_n (J_n^{[\beta_n]} f)(x) = f(x), \text{ uniform în raport cu } x \in K.$$

În continuare studiem convergenţa statistică a şirului de operatori Jain-Beta.

Teorema 3.4.5 *Fie $A = (a_{n,k})$ o matrice regulară de sumabilitate nenegativă şi fie $\lambda > 0$ fixat. Fie operatorii $J_n^{[\beta_n]}$, $n \geq 2$, definiţi în sensul relaţiei (3.4.4), unde $(\beta_n)_{n\geq 2}$, $0 \leq \beta_n < 1$, satisface*

$$st_A - \lim_n \beta_n = 0. \tag{3.4.11}$$

Are loc

$$st_A - \lim_n \|J_n^{[\beta_n]} f - f\|_{\rho_\lambda} = 0, \quad f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}_+). \tag{3.4.12}$$

Pentru a creşte viteza de convergenţă putem înlocui $J_n^{[\beta]}$ prin generalizarea sa de ordinul r, vezi [6]. Evidenţiem detaliile acestei idei. Dezavantajul şirurilor liniar pozitive de aproximare este categoric determinat de faptul că ele nu îşi îmbunătăţesc performanţele atunci când sunt utilizate clase de funcţii mai netede. Pentru a depăşi acest neajuns G. Kirov şi L. Popova [63] au propus o generalizare de ordinul r, $r \in \mathbb{N}$, în sensul următor. Pentru un operator liniar pozitiv dat, această generalizare se obţine prin acţiunea operatorului nu direct asupra semnalului f, ci asupra polinomului Taylor de gradul r asociat lui f. Noul operator păstrează proprietatea de liniaritate dar pierde pozitivitatea. În ceea ce urmează aplicăm tehnica lui Kirov şi Popova operatorilor Jain-Beta. Fie $f \in C^r(\mathbb{R}_+)$ astfel încât $e_s f^{(s)} \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}_+)$ pentru $s = 0, 1, \ldots, r$, şi fie $T_r f(x; \cdot)$ polinomul Taylor de gradul r asociat lui f în punctul

$x \in \mathbb{R}_+$. Pentru $n \geq 2$ şi orice $x \geq 0$ definim operatorii liniari

$$\begin{aligned}(J_{n,r}^{[\beta_n]}f)(x) &= J_n^{[\beta_n]}(T_r f; x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_{\beta_n}(k; nx)}{B(n+1,k)} \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{s!} \int_0^{\infty} f^{(s)}(t) \frac{(x-t)^s t^{k-1}}{(1+t)^{n+k+1}} dt \\ &+ e^{-nx} f(0).\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Teorema 3.4.6 *Fie A o matrice regulară de sumabilitate nenegativă. Fie $r \in \mathbb{N}$ fixat, $\alpha \in (0,1]$ şi $M > 0$. Fie operatorii $J_n^{[\beta_n]}$ şi $J_{n,r}^{[\beta_n]}$, $n \geq 2$, definiţi respectiv prin (3.4.4) şi (3.4.13). Presupunem $st_A - \lim_n \beta_n = 0$.*

Dacă $x \geq 0$ şi $\varphi_x^{r+\alpha} \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}_+)$ astfel încât

$$st_A - \lim_n (J_n^{[\beta_n]} \varphi_x^{r+\alpha})(x) = 0, \tag{3.4.14}$$

atunci are loc

$$st_A - \lim_n |(J_{n,r}^{[\beta_n]} f)(x) - f(x)| = 0 \tag{3.4.15}$$

pentru orice funcţie $f \in C^r(\mathbb{R}_+) \cap C_{\rho_0}(\mathbb{R}_+)$ cu proprietăţile $e_s f^{(s)} \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}_+)$, $s = 0, 1, \ldots, r$ şi $f^{(r)} \in Lip_M \alpha$.

Aici φ_x este dat prin relaţia $\varphi_x(t) = t - x$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Menţionăm că o generalizare a operatorilor Jain de tip Kantorovich a fost obţinută în [99].

Aceşti operatori integrali au următoarea construcţie

$$(K_n^{[\beta]} f)(x) = n \sum_{k=0}^{\infty} w_\beta(k; nx) \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt, \tag{3.4.16}$$

unde funcţia f aparţine spaţiului Lebesgue $L_1(\mathbb{R}_+)$.

Teorema 3.4.8 *Fie A o matrice regulară de sumabilitate nenegativă şi fie $\lambda > 0$ fixat. Fie operatorii $K_n^{[\beta_n]}$, $n \geq 1$, definiţi în sensul relaţiei (3.4.16), unde $(\beta_n)_{n \geq 1}$, $0 \leq \beta_n < 1$, satisface relaţia (3.4.11). Are loc identitatea*

$$st_A - \lim_n \|K_n^{[\beta_n]} f - f\|_{\rho_\lambda} = 0, \quad f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}_+).$$

Comparând acest rezultat cu Teorema 3.4.5 observăm că ambele generalizări integrale ale operatorilor Jain se bucură de aceeaşi proprietate de aproximare A-statistică.

Aşa cum s-a văzut, operatorii Jain sunt introduşi prin utilizarea unei distribuţii de tip Poisson.

Operatori liniari pozitivi de aproximare pot fi obţinuţi plecând de la alte tipuri de distribuţii. Ne referim aici la distribuţii compuse, vezi de exemplu, V. Preda [83] sau, aşa cum s-a investigat în [84], utilizând densitatea unei combinaţii liniare de variabile aleatoare date.

Bibliografie selectivă

[3] Agratini, O., *On the rate of convergence of a positive approximation process*, Nihonkai Mathematical Journal, **11**(2000), No. 1, 47-56.

[6] Agratini, O., *A-statistical convergence of a class of integral operators*, Applied Mathematics & Information Sciences, **6**(2012), No. 2, 325-328.

[9] Agratini, O., Tarabie, S., *On approximating operators preserving certain polynomials*, Automation Computers Applied Mathematics, **17**(2008), No. 2, 191-199.

[10] Agratini, O., Tarabie, S., *On some linear positive operators: statistical approximation and q-generalizations*, In: Proceedings of the First International Conference on Modelling and Development of Intelligent Systems, Sibiu, România, October 22-25, 2009 (Ed. Dana Simian), pp. 7-13, Lucian Blaga University Press, Sibiu, 2009.

[11] Altomare, F., Campiti, M., *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, de Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[13] Andrica, T., Tarabie, S., *On a class of summation integral type operators*, Acta Universitatis Apulensis, Mathematics-Informatics, **30**(2012), 95-100.

[15] Aral, A., *A generalization of Szász-Mirakjan operators based on q-integers*, Math. Comput. Model., **47**(2008), 1052-1062.

[17] Bauer, H., Donner, K., *Korovkin approximation in* $\mathcal{C}_0(X)$, Math. Ann., **236**(1978), No. 3, 225-237.

[19] Berens, H., Lorentz, G.G., *Geometric theory of Korovkin sets*, J. Approx. Theory, **15**(1975), No. 3, 161-189.

[20] Berens, H., Lorentz, G.G., *Convergence of positive operators*, J. Approx. Theory, **17**(1976), No. 4, 307-314.

[23] Bohman, H., *On approximation of continuous and of analytic functions*, Ark. Mat., **2**(1952-54), 43-56.

[27] Coman, Gh., Chiorean, I., Cătinaş, T., *Numerical Analysis, An Advanced Course*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2007.

[45] Gadjiev, A.D., Orhan, C., *Some approximation theorems via statistical convergence*, Rocky Mountain J. Math., **32**(2002), 129-138.

[51] Gupta, V., Srivastava, G.S., *Simultaneous approximation by Baskakov-Szász type operators*, Bull. Math. Sci. Math. Roumaine, **37**(**85**)(1993), 73-85.

[52] Gupta, V., Erkuş, E., *On a hybrid family of summation integral type operators*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, **7**(2006), Issue 1, Article 23, pp. 11.

[53] Gupta, V., Gupta, M.K., *Rate of convergence for certain families of summation-integral type operators*, J. Math. Anal. Appl., **296**(2004), 608-618.

[54] Gupta, V., Lupaş, A., *Direct results for mixed Beta-Szász type operators*, General Mathematics, **13**(2005), 83-94.

[56] Ivan, M., *Elements of Interpolation Theory*, Mediamira Science Publisher, Cluj-Napoca, 2004.

[58] Jain, G.C., *Approximation of functions by a new class of linear operators*, J. Australian Math. Soc., **13**(1972), No. 3, 271-276.

[59] Kac, V., Cheung, P., *Quantum Calculus*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.

[61] King, J.P., *Positive linear operators which preserve* x^2, Acta Math. Hungar., **99**(2003), f. 3, 203-208.

[63] Kirov, G., Popova, L., *A generalization of the linear positive operators*, Mathematica Balkanica, N.S., **7**(1993), fasc. 2, 149-162.

[65] Korovkin, P.P., *On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **90**(1953), 961-964 (in Russian).

[69] Lupaş, A., *A q-analogue of the Bernstein operator*, University of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus, Preprint **9**(1987), 85-92.

[70] Lupaş, A., *The approximation by some positive linear operators*, In: Proceedings of the International Dortmund Meeting on Approximation Theory - IDoMAT95 (Eds. M.W. Müller, M. Felten, D.H. Mache), Mathematical Research, Vol. **86**, 201-229, Akademie Verlag, Berlin, 1995.

[77] Nowak, G., *Approximation properties for generalized q-Bernstein polynomials*, J. Math. Anal. Appl., **350**(2009), 50-55.

[80] Phillips, G.M., *Bernstein polynomials based on q-integers*, Ann. Numer. Math., **4**(1997), 511-518.

[82] Popoviciu, T., *Asupra demonstraţiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare*, Lucrările Sesiunii Gen. Şt. Acad. Române, 2-12 iunie 1950, Editura Academiei RPR, 1951, pp. 1664-1667. [Translated in English by Daniela Kacsó: *On the proof of Weierstrass' theorem using interpolation polynomials*, East Journal on Approximations, **4**(1998), f. 1, 107-110.]

[83] Preda, V., *A mixed family of probability distributions*, Analele Univ. Bucureşti, Matematică, **44**(1995), 69-79.

[84] Preda, V., *Expressions for the density of a linear combination of N independent random variables*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **42**(1997), fasc. 7-8, 649-657.

[86] Radu, C., Tarabie, S., Veţeleanu, A., *On the rate of convergence of a new q-Szász-Mirakjan operator*, Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Mathematica, **56**(2011), No. 2, 527-535.

[92] Stancu, D.D., *Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **13**(1968), No. 8, 1173-1194.

[95] Tarabie, S., *On Jain-Beta linear operators*, Applied Mathematics & Information Sciences, **6**(2012), No. 2, 213-216.

[96] Tarabie, S., *On some A-statistical approximation processess*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, **76**(2012), No. 3, 327-332.

[99] Umar, S., Razi, Q., *Approximation of functions by a generalized Szász operators*, Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara, Serie A: Mathematique, **34**(1985), 45-52.

[103] Wulbert, D.E., *Convergence of operators and Korovkin's theorem*, J. Approx. Theory, **1**(1968), 381-390.

2010 MSC:
41Axx
41A10, 41A20, 41A25, 41A35, 41A36, 41A58, 41A60, 41A63

Cuvinte cheie: operator liniar şi pozitiv, teoremă de tip Korovkin, module de netezime, spaţiu ponderat, convergenţă statistică, A-convergenţă statistică, diferenţă divizată, condiţie tauberiană, q-întreg, q-calcul

CUPRINSUL TEZEI