Teoreme de compresie-extensie de tip Krasnoselskii şi aplicaţii (Rezumatul tezei de doctorat)

Sorin Monel Budişan

Coordonator ştiinţific: Prof. dr. Radu Precup

Cuprins

Cuvinte cheie: con, coroană conică, punct fix, ecuaţie diferenţială, sistem diferenţial, problemă cu valori pe frontieră, p-Laplacian, teoreme de compresie-extensie.

Introducere

Teoremele de compresie-extensie de tip Krasnoselskii reprezintă un instrument principal în studiul problemelor neliniare pentru ecuaţii şi siteme de ecuaţii integrale, diferenţiale sau cu derivate parţiale. Ele sunt folosite nu doar pentru a asigura existenţa soluţiilor, ci şi pentru a localiza soluţiile într-o coroană conică sau în alte domenii de acest tip. Aceasta permite, în particular, să obţinem soluţii multiple ale problemelor neliniare când neliniarităţile sunt oscilante. În ultimele trei decenii, a fost produsă o bogată literatură pe acest subiect, atât în teorie cât şi în aplicaţii.

Din punct de vedere teoretic, sunt cunoscute două mari tendinţe de abordare a subiectului: prima se desfăşoară în cadrul teoriei punctului fix şi foloseşte în principal teorema de punct fix a lui Schauder şi generalizările sale, în timp ce a doua foloseşte teoria gradului topologic.

Rezultatul originar datorat lui Krasnoselskii a fost obţinut folosind prima abordare, iar această teză urmează acelaşi drum. Deci, toate rezultatele noastre teoretice sunt bazate pe teoria puntului fix.

Prezentăm în continuare teoremele de compresie-extensie ale lui Krasnoselskii, în forma dată de acesta.

Teorema 1 *(M. A. Krasnoselskii [36]) Fie X un spaţiu Banach real şi fie $K \subset X$ un con. Fie N un operator pozitiv şi complet continuu cu $N\theta = \theta$. Dacă există numerele reale $r, R > 0$ astfel ca*

$$\left\{ \begin{array}{c} Nx \not\leq x \text{ pentru orice } x \in K \text{ cu } | x | \leq r, x \neq \theta \\ \text{şi pentru orice } \varepsilon > 0 \\ Nx \not\geq (1+\varepsilon)x \text{ pentru orice } x \in K \text{ cu } | x | \geq R, \end{array} \right. \tag{1}$$

atunci operatorul N are cel puţin un punct fix nenul în K.

Teorema 2 *(M. A. Krasnoselskii [36])Fie X un spaţiu Banach real şi fie $K \subset X$ un con. Fie N un operator pozitiv şi complet continuu cu $N\theta = \theta$. Dacă există numerele reale $r, R > 0$ astfel ca pentru orice $\varepsilon > 0$*

$$\left\{ \begin{array}{c} Nx \not\geq (1+\varepsilon)x \text{ pentru orice } x \in K \text{ cu } | x | \leq r, x \neq \theta \\ \text{şi} \\ Nx \not\leq x \text{ pentru orice } x \in K \text{ cu } | x | \geq R, \end{array} \right. \tag{2}$$

atunci operatorul N are cel puţin un punct fix nenul în K.

În literatură, pentru $r < R$, condiţiile de compresie din Teorema 1 sunt în majoritatea cazurilor înlocuite de condiţiile:

$$\begin{cases} \| Nu \| \geq \| u \|, \text{ dacă } \| u \| = r, \\ \| Nu \| \leq \| u \|, \text{ dacă } \| u \| = R. \end{cases} \tag{3}$$

Asemănător, condiţiile de extensie din Teorema 2 sunt înlocuite de:

$$\begin{cases} \| Nu \| \leq \| u \|, \text{ dacă } \| u \| = r, \\ \| Nu \| \geq \| u \|, \text{ dacă } \| u \| = R. \end{cases} \tag{4}$$

În această teză obţinem mai multe generalizări ale teoremelor de punct fix în conuri ale lui Krasnoselskii, unde punctul fix e localizat într-o coroană conică generalizată având una din formele:

$$K_{r,R} := \{u \in K : r \leq \varphi(u) \leq \psi(u) \leq R\}, \tag{5}$$

$$K_{r,R} := \{u \in K : r \leq \psi(u), \varphi(u) \leq R\}, \tag{6}$$

unde $\varphi \leq \psi$ pe K,

$$K_{r,R} := \{x \in K : r \leq \delta(x) \leq R\} \tag{7}$$

Condiţiile de compresie (1) şi (3), precum şi condiţiile de extensie (2) şi (4) vor fi generalizate folosind funcţionalele φ, ψ şi δ, ca mai jos:

$$\begin{cases} \varphi(u) \leq \varphi(Nu) \text{ dacă } \varphi(u) = r, \\ \psi(u) \geq \psi(Nu) \text{ dacă } \psi(u) = R, \end{cases} \quad \text{(condiţii de compresie)}$$

$$\begin{cases} \varphi(u) \geq \varphi(Nu) \text{ dacă } \varphi(u) = r, \\ \psi(u) \leq \psi(Nu) \text{ dacă } \psi(u) = R, \end{cases} \quad \text{(condiţii de extensie).}$$

pentru formele (5), (6) ale coroanei conice, şi

$$\begin{cases} \varphi(u) \leq \varphi(Nu) \text{ dacă } \delta(u) = r \\ \psi(u) \geq \psi(Nu) \text{ dacă } \delta(u) = R, \end{cases} \quad \text{(condiţii de compresie),}$$

$$\begin{cases} \varphi(u) \geq \varphi(Nu) \text{ dacă } \delta(u) = r \\ \psi(u) \leq \psi(Nu) \text{ dacă } \delta(u) = R, \end{cases} \quad \text{(condiţii de extensie),}$$

pentru forma (7) a coroanei conice.

Comparând cu literatura existentă, rezultatele noastre completează, extind şi generalizează în mai multe direcţii rezultatele obţinute de R. Legget, L. Williams [38], R. Avery, J. Henderson, D. O'Regan [4], [5], R. Precup [58], [59] şi alţii. Astfel de extensii folosind folosind funcţionalele φ, ψ şi δ au fost motivate de aplicaţii concrete unde acest tip de funcţionale apar într-un mod natural. De exemplu, putem considera funcţionalele(see Section 3.5):

$$\begin{aligned} \varphi(u) &:= \min_{t \in I} u(t), \\ \psi(u) &:= \max_{t \in [0,1]} u(t), \\ \delta(u) &:= \begin{cases} \frac{(\min_{t \in I} u(t))^2}{\max_{t \in [0,1]} u((t)}, & \text{dacă } u \text{ nu e identic zero,} \\ 0, & \text{dacă } u \equiv 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Subliniem faptul că funcţionala δ e folosită în această teză pentru prima dată.

O parte consistentă a tezei este dedicată aplicaţiilor teoremelor de compresie-extensie la mai multe clase de probleme: probleme bilocale pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul doi, ecuaţii funcţional-diferenţiale, sisteme de ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii cu p-Laplacian.

Rezultatele noastre privind aplicaţiile completează şi extind unele rezultate date de L.H. Erbe, H. Wang [14], D. O'Regan, R. Precup [54], R. Avery, J. Henderson, D. O'Regan [4] şi alţii.

Această teză se bazează pe lucrările noastre S. Budisan [8], [9], [11], [12] şi S. Budisan, R. Precup [10].

Teza este structurată pe trei capitole, o parte introductivă şi o listă bibliografică.

Capitolul 1

Generalizări ale teoremei de punct fix în conuri a lui Krasnoselskii

Acest capitol conţine principalele contribuţii teoretice ale acestei teze. Acestea conţin condiţiile de compresie-extensie exprimate în termenii unor diferite funcţionale care înlocuiesc total sau doar parţial norma spaţiului. Acest capitol se bazează pe lucrările S. Budisan [11], [12].

1.1 Teoreme de punct fix într-o coroană conică obişnuită.

Prezentarea din această secţiune este bazată pe lucrarea S. Budisan [11]. În această secţiune obţinem mai multe generalizări ale teoremelor de punct fix ale lui Krasnoselskii în conul K, unde punctul fix este localizat în coroana conică

$$K_{r,R} := \{u \in K : r \leq\mid u \mid\leq R\}.$$

Condiţiile de compresie-extensie sunt exprimate cu două funcţionale, anume:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(u) \leq \varphi\left(Nu\right) \text{ dacă } \mid u \mid= r \\ \psi\left(u\right) \geq \psi\left(Nu\right) \text{ dacă } \mid u \mid= R, \end{array} \right. \text{(condiţii de compresie)}$$

respectiv

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(u) \geq \varphi\left(Nu\right) \text{ dacă } \mid u \mid= r \\ \psi\left(u\right) \leq \psi\left(Nu\right) \text{ dacă } \mid u \mid= R. \end{array} \right. \text{(condiţii de extensie)}$$

De-a lungul acestei secţiuni considerăm că $(X, \mid\ .\ \mid)$ este un spaţiu liniar normat, $K \subset X$ este un con pozitiv, "$\preceq$" este relaţia de ordine indusă de K,

"$\prec$" este relaţia de ordine strictă indusă de K şi $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$.Dintre rezultatele din această secţiune, prezentăm aici Teorema 2.1 şi Observaţia2.2.

Teorema 3 *(S. Budisan [11]) Fie $r, R \in \mathbf{R}_+$ astfel încât $0 < r < R$. Presupunem că $N : K_{r,R} \to K$ este un operator complet continuu şi fie $\varphi : K \to \mathbf{R}_+$,$\psi : K \to \mathbf{R}$. De asemenea, presupunem că sunt satisfăcute următoarele condiţii:*

$$(i1) \begin{cases} \varphi(0) = 0 \text{ şi există } h \in K - \{0\} \text{ astfel ca} \\ \varphi(\lambda h) > 0, \text{ pentru orice } \lambda \in (0,1], \\ \varphi(\lambda h) > 0, \text{pentru orice } \lambda \in (0,1], \\ \varphi(x+y) \geq \varphi(x) + \varphi(y) \text{ pentru orice } x, y \in K, \end{cases}$$

$(i2)$ $\psi(\alpha x) > \psi(x)$ pentru orice $\alpha > 1$ şi pentru orice $x \in K$ cu $| x |= R$,

$$(i3) \begin{cases} \varphi(u) \leq \varphi(Nu) \text{ dacă } | u |= r \\ \psi(u) \geq \psi(Nu) \text{ dacă } | u |= R. \end{cases}$$

Atunci N are un punct fix în $K_{r,R}$.

Observatia 4 *(S. Budisan [11]) (1) Dacă $X := C[0,1], \eta > 0, I \subset [0,1]$, $I \neq [0,1]$, $\| x \| := \max_{t \in [0,1]} x(t)$ şi $K := \{x \in C[0,1] : x \geq 0$ pe $[0,1], x(t) \geq \eta \| x \|$ pentru orice $t \in I\}$, o funcţională ce satisface (i1) este*

$$\varphi(x) := \min_{t \in I} x(t).$$

Într-adevăr, $\varphi(0) = 0$, există $h \in K - \{0\}$ astfel ca $\varphi(\lambda h) > 0$, pentru orice $\lambda \in (0,1]$ şi

$$\varphi(x+y) = \min_{t \in I}[x(t) + y(t)] \geq \min_{t \in I} x(t) + \min_{t \in I} y(t) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

(2) Norma este un exemplu de funcţională ce satisface (i2).

Alte rezultate obţinute în această secţiune sunt: Teorema 2.3, Observaţia 2.4, Teorema 2.5.

1.2 Teoreme de punct fix într-o coroană conică definită prin una sau două funcţionale

Prezentarea din această secţiune e bazată pe lucrarea S. Budisan [12]. În această secţiune obţinem mai multe generalizări ale teoremelor de punct fix ale lui Krasnoselskii în conul K, unde punctul fix este localizat într-o coroană conică generalizată de una din formele:

$$K_{r,R} := \{u \in K : r \leq \varphi(u) \leq R\},$$

$$K_{r,R} := \{u \in K : r \leq \varphi(u) \leq \psi(u) \leq R\}, \text{ unde } \varphi \leq \psi \text{ pe } K,$$

sau

$$K_{r,R} := \{u \in K : r \leq \psi(u), \varphi(u) \leq R\}, \text{ unde } \varphi \leq \psi \text{ pe } K.$$

Atât condiţiile de compresie-extensie, cât şi condiţiile pe frontieră sunt exprimate folosind aceleaşi funcţionale φ and ψ, anume:

$$\begin{cases} \varphi(u) \leq \varphi(Nu) \text{ dacă } \varphi(u) = r \\ \psi(u) \geq \psi(Nu) \text{ dacă } \psi(u) = R, \end{cases} \quad \text{(condiţii de compresie)}$$

or

$$\begin{cases} \varphi(u) \geq \varphi(Nu) \text{ dacă } \varphi(u) = r \\ \psi(u) \leq \psi(Nu) \text{ dacă } \psi(u) = R, \end{cases} \quad \text{(condiţii de extensie).}$$

De-a lungul acestei secţiuni considerăm că $(X, | \ . \ |)$ este un spaţiu liniar normat, $K \subset X$ este un con pozitiv, "$\preceq$" este relaţia de ordine indusă de K, "$\prec$" este relaţia de ordine strictă indusă de K şi $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$.Dintre rezultatele din această secţiune, prezentăm aici Teorema 2.8, Teorema 2.10 şi Observaţia 2.9.

Teorema 5 *(S. Budisan [12]) Fie* $K_{r,R} = \{x \in K : r \leq \varphi(x) \leq R\}$ *o mulţime*

nevidă, unde $r, R \in \mathbf{R}_+^*$, $r < R$ *şi fie* $\varphi, \psi : K \to \mathbf{R}_+$ *funcţionale continue. Presupunem că* $N : K_{r,R} \to K$ *este un operator continuu cu* $N(K_{r,R})$ *relativ compact,* $\varphi(0) = 0$ *şi* $h \in K \setminus \varphi^{-1}(0)$ *astfel încât* $\varphi(\lambda h) > 0$ *pentru orice* $\lambda > 0$. *De asemenea, presupunem că următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

(i) $\psi \geq \varphi$ *pe* K,
(ii) $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$ *pentru orice* $x \in K$ *şi* $\alpha \in (0, \infty)$,
(iii) $\varphi(x + y) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$, *pentru orice* $x, y \in K$,
(iv) $\psi(\alpha x) = \alpha \psi(x)$ *pentru orice* $x \in K$ *şi* $\alpha > 0$,
(v) $N(\varphi^{-1}(r))$ *este mărginită,*
(vi)

$$\varphi(x) \leq \varphi(Nx) \text{ dacă } \varphi(x) = r,$$
$$\psi(x) \geq \psi(Nx) \text{ dacă } \psi(x) \geq R.$$

Atunci N *are un punct fix* $u^* \in K_{r,R}$.

Observatia 6 *(S. Budisan [12]) Dacă* $X := C([0,1], \mathbf{R}_+), I \subset [0,1], I \neq [0,1], \eta > 0, \| x \| := \max_{t \in [0,1]} x(t)$, $K := \{x \in X : x(t) \geq \eta \| x \|$ *pentru orice* $t \in I\}$ *atunci* $\varphi(x) := \min_{t \in I} x(t)$ *şi* $\psi(x) := \max_{t \in [0,1]} x(t)$ *sunt funcţionale ce satisfac ipotezele Teoremei 5.*

Teorema 7 *(S. Budisan [12]) Fie* $\varphi, \psi : K \to \mathbf{R}_+$ *funcţionale continue,* $\varphi(0) = 0$ *şi* $h \in K \setminus \varphi^{-1}(0)$ *astfel ca* $\varphi(\lambda h) > 0$ *pentru orice* $\lambda > 0$. *Presupunem că* $\psi \geq \varphi$ *pe* K *şi fie* $K_{r,R} := \{x \in K : r \leq \varphi(x) \leq \psi(x) \leq R\}$ *o mulţime nevidă, unde* $r, R \in \mathbf{R}_+^*$, $r < R$. *De asemenea, presupunem că* $N : K_{r,R} \to K$ *este un operator continuu cu* $N(K_{r,R})$ *relativ compactă . Presupunem că următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

(i) $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$ *pentru orice* $x \in K$ *şi* $\alpha \in (1, \infty)$,
(ii) $\varphi(x + y) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$, *pentru orice* $x, y \in K$,

(iii) $\psi(\alpha x) = \alpha\psi(x)$ *pentru orice* $x \in K$ *şi* $\alpha \geq 0$*,*
(iv) $R\varphi(x) \geq r\psi(x)$ *pentru orice* $x \in K$*,*
(v) $N(\varphi^{-1}(r))$ *este mărginită,*
(vi)

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\leq \varphi(Nx) \ \text{ dacă } \varphi(x) = r, \\ \psi(x) &\geq \psi(Nx) \ \text{ dacă } \psi(x) = R. \end{aligned}$$

Atunci N *are un punct fix* $u^* \in K_{r,R}$*.*

Alte rezultate obţinute în această secţiune sunt: Teorema 2.6, Observaţia 2.7, Teorema 2.11, Observaţia 2.11.

1.3 Teoreme de punct fix de tip Krasnoselskii în raport cu trei funcţionale

Prezentarea din această secţiune este bazată pe lucrarea S. Budisan [12]. În această secţiune obţinem mai multe generalizări ale teoremelor de punct fix ale lui Krasnoselskii în conul K, unde punctul fix este localizat într-o coroană conică generalizată de forma

$$K_{r,R} := \{x \in K : r \leq \delta(x) \leq R\},$$

prin intermediul unei funcţionale δ, iar condiţiile de compresie-extensie sunt date în termenii a două funcţionale φ şi ψ, în timp ce condiţiile pe frontieră sunt date folosind aceleaşi funcţionale ca în definiţia coroanei conice, anume:

$$\begin{cases} \varphi(u) \leq \varphi(Nu) \ \text{ dacă } \delta(u) = r \\ \psi(u) \geq \psi(Nu) \ \text{ dacă } \delta(u) = R, \end{cases} \quad \text{(condiţii de compresie)},$$

respectiv

$$\begin{cases} \varphi(u) \geq \varphi(Nu) \ \text{ dacă } \delta(u) = r \\ \psi(u) \leq \psi(Nu) \ \text{ dacă } \ \delta(u) = R, \end{cases} \quad \text{(condiţii de extensie)}.$$

De-a lungul acestei secţiuni considerăm că $(X, |\ .\ |)$ este un spaţiu liniar normat, $K \subset X$ este un con pozitiv, "$\preceq$" este relaţia de ordine indusă de K, "$\prec$" este relaţia de ordine strictă indusă de K şi $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$.Dintre rezultatele din această secţiune prezentăm aici Teorema 2.13.

Teorema 8 *(S. Budisan [12]) Fie* $\varphi, \psi, \delta : K \to \mathbf{R}_+$ *funcţionale continue,* $\delta(0) = 0$ *şi* $h \in K \setminus \delta^{-1}(0)$ *astfel ca* $\varphi(\lambda h) > 0$ *pentru orice* $\lambda > 0$*. Fie* $K_{r,R} := \{x \in K : r \leq \delta(x) \leq R\}$ *o mulţime nevidă, unde* $r, R \in \mathbf{R}_+^*$*,* $r < R$*. Presupunem că* $N : K_{r,R} \to K$ *este un operator continuu cu* $N(K_{r,R})$ *relativ compactă . Presupunem că următoarele condiţii sunt satisfăcute:*
(i) $\delta(\alpha x) = \alpha\delta(x)$ *pentru orice* $x \in K$ *şi* $\alpha \geq 0$*,*
(ii) $\varphi(x + y) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$*, pentru orice* $x, y \in K$*,*

(iii) $\psi(\alpha x) \geq \alpha\psi(x)$ *pentru orice* $x \in K$ *cu* $\delta(x) = R$ *pentru orice* $\alpha \in (1, \infty)$,
(iv) $\psi(x) > 0$ *pentru orice* $x \in K$ *cu* $\delta(x) = R$,
(v) $N(\delta^{-1}(r))$ *este mărginită,*
(vi)

$$\varphi(x) \leq \varphi(Nx) \text{ dacă } \delta(x) = r,$$
$$\psi(x) \geq \psi(Nx) \text{ dacă } \delta(x) = R.$$

Atunci N *are un punct fix* $u^* \in K_{r,R}$.

Un rezultat similar din această secţiune este Teorema 2.14.

1.4 O teoremă de tip Krasnoselskii pentru ecuaţia de coincidenţă

În această secţiune obţinem o teoremă abstractă de tip Krasnoselskii pentru următoarea ecuaţie de coincidenţă:

$$Lx = Nx$$

Rezultatul din această secţiune este Teorema 2.16.

Capitolul 2

Aplicaţii

Acest capitol conţine aplicaţiile principale ale tezei. Acestea se referă la existenţa şi localizarea soluţiilor mai multor clase de probleme, cum ar fi ecuaţii şi sisteme diferenţiale sau ecuaţii cu derivate parţiale cu p-Laplacian. Capitolul se bazează pe lucrările S. Budisan [8], [9], [12] şi S. Budisan, R. Precup [10].

2.1 Aplicaţii ale teoremei de punct fix în conuri a lui Krasnoselskii la ecuaţii diferenţiale de întârziere

Rezultateledin această secţiune au fost stabilite în lucrarea S. Budisan [8]. Rezultatele din această secţiune se referă la următoarea problemă bilocală:

$$\begin{cases} u''(t) + a(t)\ f(u(g(t))) = 0, \ \ 0 < t < 1 \\ \alpha\, u(0) - \beta\, u'(0) = 0, \\ \gamma\, u(1) + \delta u'(1) = 0, \\ u(t) = k, \ -\theta \le t < 0. \end{cases}$$

Acestea sunt: Lema 3.1, Teorema 3.2, Observaţia 3.3 şi Observaţia 3.4.

2.2 Aplicaţii la ecuaţii cu p-Laplacian

Conţinutul acestei secţiuni se bazează pe lucrarea [9], iar dintre rezultatele existente prezentăm mai jos unele idei şi rezultate. În această secţiune obţinem mai multe aplicaţii ale teoremei de punct fix în conuri a lui Krasnoselskii la următoarea problemă cu valori pe frontieră pentru un sistem de ecuaţii cu p-Laplacian($p \ge 2$):

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mid \nabla u \mid_s^{p-2} \nabla u) = f(u) & \text{pentru } \mid x \mid < T, \\ u > 0 & \text{pentru } 0 < \mid x \mid < T, \\ u = 0 & \text{pentru } x = 0, \\ \nabla u = 0 & \text{pentru } \mid x \mid = T. \end{cases}$$

Rezultatele din această secţiune sunt: Teorema 3.6, Observaţia 3.7, Observaţia 3.8, Teorema 3.9, Teorema 3.10, Observaţia 3.11,

2.3 Aplicaţii ale versiunii vectoriale a teoremei de punct fix a lui Krasnoselskii

Această secţiune se bazează pe lucrarea S. Budisan, R. Precup [10]. Prezentăm o aplicaţie a teoremei de punct fix în conuri a lui Krasnoselskii la sistemul funcţional-diferenţial de ordinul doi:

$$\begin{cases} u_1''(t) + a_1(t) f_1(u_1(g(t)), u_2(g(t))) = 0, \\ u_2''(t) + a_2(t) f_2(u_1(g(t)), u_2(g(t))) = 0 \end{cases}$$

$(0 < t < 1)$ cu condiţiile pe frontieră

$$\begin{cases} \alpha_i u_i(0) - \beta_i u_i'(0) = 0, \\ \gamma_i u_i(1) + \delta_i u_i'(1) = 0, \\ u_i(t) = k_i \quad \text{pentru } -\theta \le t < 0 \quad (i = 1, 2). \end{cases}$$

Rezultatele din această secţiune sunt: Observaţia 3.12, Lema 3.13, Teorema 3.14, Observaţia 3.15.

2.4 Existenţa soluţiilor periodice pozitive ale sistemelor diferenţiale

În această secţiune completăm rezultatele din lucrarea R. Precup [57] prin furnizarea de condiţii suficiente ce asigură ipotezele Teoremei 3.1 din lucrarea R. Precup [57].

Autorul lucrării R. Precup [57] obţine condiţii suficiente în trei cazuri, iar obiectivul nostru este să găsim condiţii suficiente în alte două cazuri.

Aceste condiţii garantează existenţa şi localizarea soluţiilor periodice pozitive ale sistemului diferenţial neliniar:

$$\begin{cases} u_1'(t) = -a_1(t) u_1(t) + \varepsilon_1 f_1(t, u_1(t), u_2(t)) \\ u_2'(t) = -a_2(t) u_2(t) + \varepsilon_2 f_2(t, u_1(t), u_2(t)), \end{cases}$$

unde pentru $i \in \{1, 2\} : a_i \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $\int_0^\omega a_i(t) dt \neq 0$, $\varepsilon_i = sign \int_0^\omega a_i(t) dt$, $f_i \in C(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^2, \mathbf{R}_+)$, şi a_i, $f_i(., u_1, u_2)$ sunt funcţii ω-periodice pentru un anumit $\omega > 0$.

Rezultatele din această secţiune sunt: Teorema 3.17, Observaţia 3.18, Teorema 3.19, Observaţia 3.20.

2.5 Aplicaţii ale generalizărilor teoremei de punct fix a lui Krasnoselskii

În această secţiune obţinem aplicaţii ale teoremelor abstracte din Capitolul 2. Prezentarea din această secţiune se bazează pe lucrarea S. Budisan [12]. Studiem în continuare existenţa cel puţin unei soluţii a următoarei probleme bilocale:

$$u^{''}(t) + f(t, u(t)) = 0, \ 0 \leq t \leq 1, \tag{3.1}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{3.2}$$

unde $f : [0,1] \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ este continuă. Căutăm soluţii $u \in C^2[0,1]$ ale (3.1)-(3.2), care sunt nenegative şi concave pe $[0,1]$. Vom aplica teoremele din precedentul capitol la un operator complet continuu al cărui nucleu este funcţia lui Green, funcţia $G(t,s)$, a ecuaţiei

$$u^{''} = 0,$$

supusă condiţiilor pe frontieră (3.2).

Dintre rezultatele din această secţiune menţionăm umătorul rezultat de multiplicitate a soluţiilor(Corolarul 3.29):

Corolarul 9 *(S. Budisan [12]) Presupunem că există numerele pozitive r_1, r_2, R_1 şi R_2 astfel ca $0 < 16r_1 < R_1 \leq \frac{11r_2}{1024}$, $16r_2 < R_2$, iar f satisface următoarele condiţii:*

(i) $f(s,x) \leq 6r_1$ pentru orice $s \in [0,1]$, pentru orice $x \in [0, 16r_1]$,

(ii) $f(s,x) \geq \frac{6144}{11} R_1$ pentru orice $s \in I$, pentru orice $x \in [R_1, 16R_1]$,

(iii) $f(s,x) \leq 6r_2$ pentru orice $s \in [0,1]$, pentru orice $x \in [0, 16r_2]$,

(iv) $f(s,x) \geq \frac{6144}{11} R_2$ pentru orice $s \in I$, pentru orice $x \in [R_2, 16R_2]$,

Atunci (3.1)-(3.2) are cel puţin două soluţii u_1şi u_2 cu

$$r_1 \leq \min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} u_1 \leq 4R_1,$$

$$r_1 \leq \max_{t \in [0,1]} u_1 \leq 16R_1,$$

şi

$$r_2 \leq \min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} u_2 \leq 4R_2,$$

$$r_2 \leq \max_{t \in [0,1]} u_2 \leq 16R_2.$$

Alte rezultate obţinute în această secţiune sunt: Teorema 3.21, Observaţia 3.22, Teorema 3.23, Observaţia 3.24, Teorema 3.25, Observaţia 3.26, Teorema 3.27, Obsevaţia 3.28, Observaţia 3.30, Teorema 3.31, Observaţia 3.32.

Bibiliografia

[1] R. P. Agarwal, D. O'Regan, A generalization of the Petryshyn-Legget-Williams fixed point theorem with applications to integral inclusions, Appl. Math. Comput. 123 (2001), 263-274.

[2] R. P. Agarwal, D. O'Regan, S. Staněk, Positive solutions for Dirichlet problems of singular nonlinear fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 371 (2010), 57–68.

[3] D. R. Anderson, R. I. Avery, Fixed point theorem of cone expansion and compression of functional type, *J. Difference Equ. Appl.*, 2002, vol. 8 (11), pp. 1073-1083.

[4] R. Avery, J. Henderson, D. O'Regan, Functional compression-expansion fixed point theorem, *Electron. J. Differential Equations*, Vol. 2008(2008), No. 22, pp. 1-12.

[5] R. Avery, J. Henderson, D. O'Regan, A dual of the compression-expansion fixed point theorems, *Fixed Point Theory Appl.*, Vol. 2007, Article ID 90715, 11 pages.

[6] C. Bai, , D. Xie, Y. Liu, C. Wang, Positive solutions for second-order four-point boundary value problems with alternating coefficient, *Nonlinear Analysis* 70 (2009), 2014–2023.

[7] J. V. Baxley, P. T. Caroll, Nonlinear boundary value problems with multiple positive solutions, *Proc. of the fourth international conference on dynamical systems and differential equations*, May 24-27, 2002, Wilmington, NC, USA, pp. 83-90.

[8] **S. Budisan**, Positive solutions of functional differential equations, *Carpathian J. Math.*, 22 (2006), 13-19.

[9] **S. Budisan**, Positive weak radial solutions of nonlinear systems with p-Laplacian, *Differ. Equ. Appl.*, 3 (2011), 209-224.

[10] **S. Budisan**, R. Precup, Positive solutions of functional-differential systems via the vector version of Krasnoselskii's fixed point theorem in cones, *Carpathian J. Math.*, 27 (2011), No. 2, 165-172.

[11] **S. Budisan**, Generalizations of Krasnoselskii's fixed point theorem in cones, *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math.* 56 (2011), No. 4, 165-171.

[12] **S. Budisan**, Generalizations of Krasnoselskii's fixed point theorem in cones and applications, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, accepted, to appear.

[13] J. Chu, M. Li, Positive periodic solutions of Hill's equations with singular nonlinear perturbations, *Nonlinear Anal.* 69 (2008), 276–286.

[14] L.H. Erbe, H. Wang, On the existence of positive solutions of ordinary differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120 (1994), 743-748.

[15] W. Feng, Solutions and positive solutions for some three-point boundary value problems, *Proc. of the fourth international conference on dynamical systems and differential equations*, May 24-27, 2002, Wilmington, NC, USA, pp. 263-272.

[16] H. Feng, W. Ge, M. Jiang, Multiple positive solutions for m-point boundary-value problems with a one-dimensional p-Laplacian, *Nonlinear Anal.* 68 (2008), 2269–2279.

[17] H. Feng, H. Pang, W. Ge, Multiplicity of symmetric positive solutions for a multipoint boundary value problem with a one-dimensional p-Laplacian, *Nonlinear Anal.* 69 (2008), 3050–3059.

[18] C. S. Goodrich, Positive solutions to boundary value problems with nonlinear boundary conditions, *Nonlinear Anal.* 75 (2012), 417–432.

[19] J. R. Graef , L. Kong, Necessary and sufficient conditions for the existence of symmetric positive solutions of multi-point boundary value problems, *Nonlinear Anal.* 68 (2008), 1529–1552.

[20] L. J. Guo, J. P. Sun , Y. H. Zhao**,** Existence of positive solutions for nonlinear third-order three-point boundary value problems, *Nonlinear Anal.* 68 (2008), 3151–3158.

[21] Y. Guo, C. Yu , J. Wang, Existence of three positive solutions for m-point boundary value problems on infinite intervals, *Nonlinear Anal.* 71 (2009) 717-722.

[22] X. Han, Positive solutions for a three-point boundary value problem at resonance, *J. Math. Anal. Appl.* 336 (2007), 556–568.

[23] X. Han, S. Ji, Z. Ma, On the existence and multiplicity of positive periodic solutions for first-order vector differential equation, *J. Math. Anal. Appl.* 329 (2007), 977–986.

[24] Z. C. Hao, J. Liang, T. J. Xiao, Positive solutions of operator equations on half-line, *J. Math. Anal. Appl.* 314 (2006), 423–435.

[25] Z. He , Z. Long, Three positive solutions of three-point boundary value problems for p-Laplacian dynamic equations on time scales, *Nonlinear Anal.* 69 (2008), 569–578.

[26] C. H. Hong, F. H. Wong, C. C. Yeh, Existence of positive solutions for higher-order functional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 297 (2004), 14–23.

[27] L. Hu, L. Wang, Multiple positive solutions of boundary value problems for systems of nonlinear second-order differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 335 (2007), 1052–1060.

[28] G. Infante, M. Zima, Positive solutions of multi-point boundary value problems at resonance, *Nonlinear Anal.* 69 (2008), 2458–2465.

[29] D. Ji, Y. Tian, W. Ge, Positive solutions for one-dimensional p-Laplacian boundary value problems with sign changing nonlinearity, *Nonlinear Anal.* 71 (2009), 5406-5416.

[30] C. Jin, J. Yin, Positive solutions for the boundary value problems of one-dimensional p-Laplacian with delay, *J. Math. Anal. Appl.* 330 (2007), 1238–1248.

[31] D. Jiang, J. Chu, M. Zhang, Multiplicity of positive periodic solutions to superlinear repulsive singular equations, *J. Differential Equations* 211 (2005), 282 – 302.

[32] W. Jiang, , J. Zhang, Positive solutions for $(k, n-k)$ conjugate boundary value problems in Banach spaces, *Nonlinear Anal.* 71 (2009), 723-729.

[33] D. Jiang, C. Yuan, The positive properties of the Green function for Dirichlet-type boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and its application, *Nonlinear Anal.* 72 (2010), 710-719.

[34] P. Kang, , J. Xu, Z. Wei, Positive solutions for $2p$-order and $2q$-order systems of singular boundary value problems with integral boundary conditions, *Nonlinear Anal.* 72 (2010), 2767- 2786.

[35] S. G. Kang, G. Zhang, B. Shi, Existence of three periodic positive solutions for a class of integral equations with parameters, *J. Math. Anal. Appl.* 323 (2006), 654–665.

[36] M. A. Krasnoselskii, *Positive Solutions of Operator Equations*, P. Noordhoff Ltd. Groningen, 1964.

[37] M. K. Kwong, On Krasnoselskii's cone fixed point theorem, *Fixed Point Theory Appl.*, Volume 2008, Article ID 164537, 18 pages.

[38] R. Legget, L. Williams, Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, *Indiana Univ. Math. J.*, Vol. 28, No. 4 (1979).

[39] S. Li, Positive solutions of nonlinear singular third-order two-point boundary value problem, *J. Math. Anal. Appl.* 323 (2006), 413–425.

[40] H. Lian, W. Ge, Existence of positive solutions for Sturm–Liouville boundary value problems on the half-line, *J. Math. Anal. Appl.* 321 (2006), 781–792.

[41] H. Lian, W. Ge, Positive solutions for a four-point boundary value problem with the p-Laplacian, *Nonlinear Anal.* 68 (2008), 3493–3503.

[42] S. Liang, L. Mu, Multiplicity of positive solutions for singular three-point boundary value problems at resonance, *Nonlinear Anal.* 71 (2009), 2497-2505.

[43] R. Liang, J. Peng, J. Shen, Double positive solutions for a nonlinear four-point boundary value problem with a p-Laplacian operator, *Nonlinear Anal.* 68 (2008), 1881–1889.

[44] S. Liang, J. Zhang, The existence of countably many positive solutions for some nonlinear three-point boundary problems on the half-line, *Nonlinear Anal.* 70 (2009), 3127–3139.

[45] S. Liang, J. Zhang, The existence of countably many positive solutions for some nonlinear singular three-point impulsive boundary value problems, *Nonlinear Anal.* 71 (2009), 4588- 4597.

[46] L. Liu, P. Kang, Y. Wu, B. Wiwatanapataphee, Positive solutions of singular boundary value problems for systems of nonlinear fourth order differential equations, *Nonlinear Anal.* 68 (2008), 485–498.

[47] Y. Liu, W. Ge, Twin positive solutions of boundary value problems for finite difference equations with p-Laplacian operator, *J. Math. Anal. Appl.* 278 (2003), 551–561.

[48] Z. Liu, J. S. Ume, D. R. Anderson, S. M. Kang, Twin monotone positive solutions to a singular nonlinear third-order differential equation, *J. Math. Anal. Appl.* 334 (2007), 299–313.

[49] J. M. do Ó, S. Lorca, P. Ubilla, Local superlinearity for elliptic systems involving parameters, *J. Differential Equations* 211 (2005), 1–19.

[50] J.M. do Ó, S. Lorca, J. Sánchez, P. Ubilla, Positive solutions for a class of multiparameter ordinary elliptic systems, *J. Math. Anal. Appl.* 332 (2007), 1249–1266.

[51] R. Ma, H. Wang, Positive solutions of nonlinear three-point boundary-value problems, J. Math. Anal. Appl. 279 (2003), 216–227.

[52] K. G. Mavridis, P. Ch. Tsamatos, Conditions for the existence of positive solutions covering a class of boundary value problems in a uniform way, *Nonlinear Analysis* 75 (2012), 4104–4113.

[53] D.O'Regan, R. Precup, Compression-expansion fixed point theorem in two norms and applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 309(2005), 383-391.

[54] D. O'Regan,R. Precup, Positive solutions of nonlinear system with p-Laplacian on finite and semi-infinite intervals, *Positivity* 11(2007), 537-548.

[55] A. P. Palamides, G. Smyrlis, Positive solutions to a singular third-order three-point boundary value problem with an indefinitely signed Green's function, *Nonlinear Analysis* 68 (2008), 2104–2118.

[56] H. Pang, H. Feng, W. Ge, Multiple positive solutions of quasi-linear boundary value problems for finite difference equations, *Appl. Math. Comput.* 197 (2008), 451–456.

[57] R. Precup, A vector version of Krasnoselskii's fixed point theorem in cones and positive periodic solutions of nonlinear systems, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2 (2007), 141-151.

[58] R. Precup, Componentwise compression-expansion conditions for systems of nonlinear operator equations and applications, in *AIP Conference Proceedings* Volume 1124, 2009, Eds: A. Cabada, E. Liz, J.J. Nieto, 284-293.

[59] R. Precup, Compression-expansion fixed point theorems in two norms, *Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Eq. Approx. Convexity*, 3 (2005), 157-163.

[60] R. Precup, Existence, localization and multiplicity results for positive radial solutions of semilinear elliptic systems, *J. Math. Anal. Appl.* 352 (2009), 48–56.

[61] Y. H. Su, W. T. Li, Triple positive solutions of m-point BVPs for p-Laplacian dynamic equations on time scales, *Nonlinear Anal.* 69 (2008), 3811–3820.

[62] Y. H. Su, W. T. Li, H. R. Sun, Triple positive pseudo-symmetric solutions of three-point BVPs for p-Laplacian dynamic equations on time scales, *Nonlinear Anal.* 68 (2008), 1442–1452.

[63] H. Su, , L. Liu, Y. Wu, Positive solutions for a nonlinear second-order semipositone boundary value system, *Nonlinear Anal.* 71 (2009), 3240-3248.

[64] H. Su, Z. Wei, F. Xu, The existence of countably many positive solutions for a system of nonlinear singular boundary value problems with the p-Laplacian operator, *J. Math. Anal. Appl.* 325 (2007), 319–332.

[65] Y. Sun, Existence and multiplicity of symmetric positive solutions for three-point boundary value problem, *J. Math. Anal. Appl.* 329 (2007), 998–1009.

[66] Y. Sun, Y. J. Cho, D. O'Regan, Positive solutions for singular second order Neumann boundary value problems via a cone fixed point theorem, *Appl. Math. Comput.* 210 (2009), 80–86.

[67] H. R. Sun, W.T. Li, Existence theory for positive solutions to one-dimensional p-Laplacian boundary value problems on time scales, *J. Differential Equations* 240 (2007), 217–248.

[68] P. J. Torres, Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem, *J. Differential Equations* 190 (2003), 643–662.

[69] H. Wang, Positive periodic solutions of functional differential equations, *J. Differential Equations* 202 (2004), 354–366.

[70] H. Wang, Positive periodic solutions of singular systems with a parameter, *J. Differential Equations*, 249 (2010), 2986-3002.

[71] H. Wang, Periodic solutions to non-autonomous second-order systems, *Nonlinear Anal.* 71 (2009), 1271-1275.

[72] F. Wang, Y. An, Doubly periodic solutions to a coupled telegraph system, *Nonlinear Anal.* 75 (2012), 1887–1894.

[73] F. Wang, Y. An, Positive solutions for a second-order differential system, *J. Math. Anal. Appl.* 373 (2011), 370–375.

[74] Y. Wang, L. Liu, Y. Wu, Positive solutions of singular boundary value problems on the half-line, *Appl. Math. Comput.* 197 (2008), 789–796.

[75] J.R.L. Webb, Positive solutions of some three point boundary value problems via fixed point index theory, *Nonlinear Anal.*, 46 (2001), 4319-4332.

[76] G. Weigao., X. Chunyan, Some fixed point theorems and existence of positive solutions of two-point boundary-value problems, *Nonlinear Anal.* 70 (2009), 16–31.

[77] Y. Wu, Existence of positive periodic solutions for a functional differential equation with a parameter, *Nonlinear Anal.* 68 (2008), 1954–1962.

[78] X. Xu, D. Jiang, C. Yuan, Multiple positive solutions for the boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation, *Nonlinear Anal.* 71 (2009), 4676-4688.

[79] F. Xu, L. Liu, Y. Wu, Multiple positive solutions of four-point nonlinear boundary value problems for a higher-order p-Laplacian operator with all derivatives, *Nonlinear Anal.* 71 (2009), 4309-4319.

[80] L. Yang, X. Liu, M. Jia, Multiplicity results for second-order m-point boundary value problem, *J. Math. Anal. Appl.* 324 (2006), 532–542.

[81] J. Yang, Z. Wei, Existence of positive solutions for fourth-order m-point boundary value problems with a one-dimensional p-Laplacian operator, *Nonlinear Anal.* 71 (2009), 2985-2996.

[82] J. Yang, Z. Wei, K. Liu, Existence of symmetric positive solutions for a class of Sturm–Liouville-like boundary value problems, *Appl. Math. Comput.* 214 (2009), 424–432.

[83] Q. Yao, Existence and multiplicity of positive solutions to a singular elastic beam equation rigidly fixed at both ends, *Nonlinear Anal.* 69 (2008), 2683–2694.

[84] Q. Yao, Local existence of multiple positive solutions to a singular cantilever beam equation, *J. Math. Anal. Appl.* 363 (2010), 138–154.

[85] X. Zhang, M. Feng, W. Ge, Existence and nonexistence of positive solutions for a class of nth-order three-point boundary value problems in Banach spaces, *Nonlinear Anal.* 70 (2009), 584–597.

[86] B. Zhang, X. Liu, Existence of multiple symmetric positive solutions of higher order Lidstone problems, *J. Math. Anal. Appl.* 284 (2003), 672–689.

[87] X. Zhang, L. Liu, Y. Wu, Positive solutions of nonresonance semipositone singular Dirichlet boundary value problems, *Nonlinear Anal.* 68 (2008), 97–108.

[88] G. Zhang, J. Sun, A generalization of the cone expansion and compression fixed point theorem and applications, *Nonlinear Anal.* 67 (2007), 579-586.

[89] X. Zhang, , Y. Xu , Multiple positive solutions of singularly perturbed differential systems with different orders, *Nonlinear Anal.* 72 (2010), 2645-2657.

[90] J. Zhao, , L. Wang, W. Ge, Necessary and sufficient conditions for the existence of positive solutions of fourth order multi-point boundary value problems, *Nonlinear Anal.* 72 (2010), 822- 835.

[91] M. Zima, Fixed point theorem of Leggett–Williams type and its application, *J. Math. Anal. Appl.* 299 (2004), 254–260.