UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI DIN CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Alina-Mihaela Aştefănoaei (Baboş)

Reprezentări şi evaluări ale restului în formule de interpolare şi de integrare numerică cu aplicaţii

Rezumatul Tezei de Doctorat

Conducător ştiinţific:
Prof. univ. dr. Petru Blaga

Cluj-Napoca
2012

Cuprins

Cuvinte cheie: interpolare, termen rest, formulă de cuadratură optimală, formulă de cuadratură corectată, teorema lui Peano, inegalitate de tip Ostrowski

Introducere

Am ales această temă de mare complexitate şi dificultate, pornind de la următoarele obiective: studiul termenului rest în formule de interpolare şi de integrare numerică precum şi evaluări ale termenului rest în formule de integrare numerică utilizând inegalităţi de tip Ostrowski.

Suportul metodologic şi teoretico-ştiinţific în domeniul abordat a fost foarte important în abordarea şi tratarea temei tezei de doctorat, fiind bazat pe o documentare teoretică temeinică, care a oferit o imagine clară asupra teoriilor ştiinţifice şi fundamentale în domeniul Analizei numerice.

Precizăm ca Şcoala de Analiză numerică din Cluj are rezultate, cunoscute pe plan internaţional în studiul formulelor de cuadratură. Un număr important de matematicieni, au elaborat o serie de lucrări valoroase relative la cuadraturile şi cubaturile numerice: academician D. D. Stancu, P. Blaga, Gh. Coman, A. Coţiu, I. Gânscă, H. Roşcău, D. Acu, Gh. Micula, I. Gavrea, A. Lupaş, T. Vladislav şi alţii. Şi în prezent mulţi matematicieni, formaţi în jurul Şcolii de Analiză numerică din Cluj-Napoca, continuă cu succes, cercetările ştiinţifice, în domeniul integrării numerice a funcţiilor de una şi mai multe variabile.

Teza de doctorat a fost structurată pe 3 capitole şi o bibliografie conţinând 130 de titluri, dintre care 8 realizate şi de autor.

Capitolul 1 este structurat în 4 secţiuni. În prima secţiune sunt prezentate principalele spaţii de funcţii utilizate. În secţiunea 1.2 este prezentată interpolarea funcţiilor pe un domeniu rectangular. În secţiunea 1.3 este prezentată interpolarea funcţiilor pe un triunghi standard. Începând cu lucrarea lui R. E. Barnhill, G. Birkhoff şi W. J. Gordon [15], operatorii de interpolare pe triunghi sunt studiaţi pe larg ([16], [18], [19], [29], [40], [58], [88], [89], [99]). În secţiunea 1.4 este prezentată interpolarea funcţiilor pe un triunghi cu o latură curbată. Operatori de tip Lagrange, Hermite şi Birkhoff pe acest triunghi au fost obţinuţi de Gh. Coman şi T. Cătinaş în lucrarea [59]. Am obţinut aici noi operatori de interpolare şi reprezentările termenului rest pentru aceştia.

Capitolul 2 este structurat în 3 secţiuni. În secţiunea 2.1 sunt prezentate formulele de cuadratură optimale în sensul lui Sard şi Nikolski. Am obţinut aici estimări ale termenului rest ale unei formule de cuadratură optimale în sensul lui Nikolski de tip deschis în 2 puncte. Rezultate interesante privind formulele de cuadratură optimale în sens Nikolski au fost obţinute de Gh. Coman, G. Micula, în lucrarile [50], [48], [51], [49], [57]. Problema construirii formulelor de cuadratură optimale, pe diferite clase de funcţii a fost studiată în multe articole. Primele rezultate au fost obţinute de A. Sard, L. S. Meyers şi S. M. Nikolski. În secţiunea 2.2 sunt prezentate formulele de cuadratură corectate de tip deschis. Am obţinut aici estimări ale termenului rest ale unor formule de cuadratură optimale în sensul lui Nikolski de tip deschis în 2 puncte iar apoi am derivat formulele perturbate (corectate) ale acestora, dând de asemenea estimările termenului rest. În secţiunea 2.3 sunt prezentate formulele de cuadratură corectate de tip închis. Am obţinut aici estimări ale termenului rest ale unor formule de cuadratură optimale în sensul lui Nikolski de tip închis în 3 puncte, dar şi ale unor formule de cuadratură optimale generale iar apoi am derivat formulele corectate ale acestora, dând de asemenea estimările termenului rest.

Capitolul 3 este structurat în 3 secţiuni. În secţiunea 3.1 sunt prezentate principalele rezultate privind inegalităţile de tip Ostrowski. În ultimii ani inegalităţile lui Ostrowski au ocupat atenţia multori autori ([10], [68], [67], [72], [73], [74], [101], [105], [122],[123], [124]). În secţiunea 3.2 sunt prezentate teoreme de medie folosite pentru obţinerea inegalităţilor de tip Ostrowski. Teoremele de medie au fost aplicate pentru a demonstra acest tip de inegalităţi. D. Pompeiu, S. S. Dragomir, E. C. Popa, J. Pečarić, S. Ungar, B. G. Pachpatte au obţinut importante rezultate ale aplicării teoremelor de medie în obţinerea inegalităţilor de tip Ostrowski în lucrările [106], [69], [108],[105], [103]. Am obţinut aici noi inegalităţi de tip Ostrowski folosind teoremele de medie. În secţiunea 3.2 sunt prezentate aplicaţii ale inegalităţii lui Ostrowski în integrarea numerică. Am dat aici noi estimări ale termenului rest dintr-o formulă de cuadratură.

Rezultatele originale se regăsesc în interiorul secţiunilor 1.4 (Teorema 1.4.3, Teorema 1.4.4, Teorema 1.4.5, Teorema 1.4.6, Teorema 1.4.7, Teorema 1.4.8, Teorema 1.4.9), 2.1 (Teorema 2.1.1, Teorema 2.1.2, Exemplul 2.1.1, Exemplul 2.1.2, Exemplul 2.1.3), 2.2 (Teorema 2.2.1, Observaţia 2.2.1, Teorema 2.2.2, Observaţia 2.2.2, Teorema 2.2.3, Observaţia 2.2.3, Observaţia 2.2.4, Observaţia 2.2.5, Observaţia 2.2.6, Observaţia 2.2.7, Teorema 2.2.4, Teorema 2.2.5, Teorema 2.2.6), 2.3 (Teorema 2.3.2, Observaţia 2.3.1, Observaţia 2.3.2, Teorema 2.3.3, Observaţia 2.3.3, Teorema 2.3.4, Observaţia 2.3.4, Observaţia 2.3.5, Teorema 2.3.5, Teorema 2.3.6, Observaţia 2.3.6, Observaţia 2.3.7, Teorema 2.3.7, Teorema 2.3.8, Teorema 2.3.9, Teorema 2.3.10, Observaţia 2.3.8, Teorema 2.3.11, Teorema 2.3.12, Teorema 2.3.13, Teorema 2.3.14, Observaţia 2.3.9), 3.2 (Teorema 3.2.5, Observaţia 3.2.2, Teorema 3.2.6, Teorema 3.2.7, Teorema 3.2.8, Teorema 3.2.9, Teorema 3.2.10), 3.3 (Teorema 3.3.2, Teorema 3.3.3).

Un motiv foarte important în abordarea problematicii tezei de doctorat o constituie faptul că în calitate de cadru didactic trebuie să fii mereu în actualitate, să posezi informaţii pertinente şi relevante, fundamentate ştiinţific şi să fii mereu implicat în dezvoltarea domeniului ştiinţific în care lucrezi.

Pe această cale doresc să mulţumesc d-lui prof. univ. dr. Petru Blaga, pentru sprijinul de care am beneficiat pe parcursul realizării prezentei lucrări. De asemenea, aduc sincere mulţumiri întregului colectiv al Catedrei de Matematică aplicată de la Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca.

Capitolul 1

Interpolare pentru funcţii de două variabile

În acest capitol este prezentată noţiunea de interpolare pentru funcţii definite: pe un domeniu rectangular, pe un triunghi standard şi pe un triunghi cu o latură curbată. Sunt prezentate noţiunile generale, dar şi principalele rezultate ale interpolării pe domeniile menţionate mai sus.

Pornind de la operatorii definiţi pe un triunghi cu o latură curbată în lucrarea [59], am introdus în ultima secţiune un operator de tip Lagrange care interpolează funcţia pe o catetă, pe latura curbată, dar şi pe o linie interioară triunghiului, considerând cazul în care linia interioară este o mediană. Folosind Teorema lui Peano pentru cazul bidimensional am dat evaluarea termenului rest pentru formula de interpolare corespunzătoare a acestui operator. Am folosit acest operator şi un operator de tip Lagrange definit în [59] şi am contruit operatorii lor produs şi sumă booleană, studiind şi termenele rest pentru formulele lor corespunzătoare. Utilizând apoi operatorul Lagrange construit şi un operator de tip Hermite definit în [59] am construit noi operatori de interpolare folosind produsul şi suma booleană. Am determinat proprietăţile de interpolare şi gradul de exactitate pentru aceşti operatori. De asemenea, au fost studiate formulele de interpolare generate, dând estimări ale termenului rest. Aceste rezultate sunt cuprinse în lucrările [11] şi [12].

1.1 Spaţii de funcţii

1.2 Interpolarea funcţiilor definite pe un domeniu rectangular

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu rectangular; $D = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ şi $\mathcal{F}_n$ o mulţime de funcţii definite pe D. Fie, de asemenea, $\bigwedge^{x_i}$ o mulţime de informaţii despre funcţia f în raport cu variabila $x_i, i = 1, ..., n$.

Numim proiector o transformare liniară P de la un spaţiu vectorial la el însuşi astfel încât $P^2 = P$. Fie $P_i : \mathcal{F}_n \to \mathcal{G}_i$, care interpolează funţia $f \in \mathcal{F}_n$ în raport cu informaţia $\bigwedge^{x_i}$. Deci, $\mathcal{G}_i$ sunt mulţimi de funcţii de $n-1$ variabile independente $(x_i, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$. Presupunând că proiectorii $P_1, ..., P_n$ comută, se notează cu $\mathcal{P}_n$ laticea generată de aceştia în raport cu relaţia de ordine "$\leq$".

Fie P *produsul*, iar S *suma booleană* a tuturor proiectorilor generatori $P_1, ..., P_n$ şi anume $P = P_1, ..., P_n, S = P_1 \oplus ... \oplus P_n$, adică $S = P_1 + ... + P_n - P_1P_2 - ... - P_{n-1}P_n + ... + (-1)^{n-1}P_1...P_n$.

În cartea [121] D. D. Stancu, Gh. Coman şi P. Blaga prezintă următoarele două teoreme:

Teorema 1.2.1. *$P \leq Q \leq S$ pentru orice $Q \in \mathcal{P}_n$.*

Problema care apare se referă la eroarea de aproximare. Altfel spus, Q generează formula de aproximare a funcţiei f:

$$f = Qf + R_Qf.$$

Problema considerată mai sus constă în studiul termenului rest R_Qf sau a operatorului rest R_Q. În acest scop vom nota cu $R_i = I - P_i$, (I fiind operatorul identic) operatorii rest corespunzători operatorilor generatori.

Pentru P şi S, operatorul produs respectiv sumă booleană, operatorii rest corespunzători sunt

$$R_P = R_1 \oplus ... \oplus R_n \tag{1.1}$$

şi

$$R_S = R_1...R_n. \tag{1.2}$$

Deci au loc următoarele descompuneri ale operatorului identic:

$$I = P + R_P \tag{1.3}$$

şi

$$I = S + R_S \tag{1.4}$$

În mulţimea formulelor de interpolare generate de elementele lui $\mathcal{P}_n$ se disting formulele date de elementele P şi S.

Definiţia 1.2.1. *Formula de interpolare*

$$f = Pf + R_Pf \tag{1.5}$$

se numeşte algebric minimală, iar formula

$$f = Sf + R_Sf \tag{1.6}$$

algebric maximală

Observaţia 1.2.1. *Formula (1.5) se mai numeşte şi formulă de interpolare produs tensorial, iar (1.6) formula de interpolare sumă booleană.*

Sub aspectul calităţii aproximării un operator de interpolare este caracterizat de ordinul de aproximare("ord"). Spunem că operatorul $P_i : \mathcal{F}_n \to \mathcal{G}_i$ are ordinul de aproximare m dacă $Ker(P_i) = \mathcal{P}_m^n$, unde $\mathcal{P}_m^n$ este mulţimea polinoamelor în n variabile şi de grad global cel mult m.

Operatorul rest R_p al formulei algebric minimale (1.5) este dat de suma booleană a operatorilor $R_1, ..., R_n$, în timp ce operatorul rest R_S al formulei algebric maximale (1.6) este produsul operatorilor $R_1, ..., R_n$. Rezultă că

$$ord(P) = min\{ord(P_1), ..., ord(P_n)\},$$

iar

$$ord(S) = ord(P_1) + ... + ord(P_n).$$

Observăm că

$$ord(P) \leq ord(Q) \leq ord(S), \; Q \in \mathcal{P}_n.$$

Avem astfel proprietatea remarcabilă a formulei de aproximare algebric maximală:

$$ord(S) = \max_{Q \in \mathcal{P}_n} ord(Q).$$

1.3 Interpolarea funcţiilor definite pe un triunghi T_h

Pentru studiul restului unor astfel de formule de interpolare este nevoie de o teoremă de tip Peano pentru cazul multidimensional, în particular bidimensional, pentru funcţionale definite pe spaţii de tip Sard. Vom prezenta mai întâi două astfel de spaţii.

1. Spaţiul Sard $B_{pq}(a, c), (p, q \in \mathbb{N}, p+q = m)$ al funcţiilor $f : D \to \mathbb{R}, D = [a, b] \times [c, d]$, cu proprietăţile:

1) $f^{(p,q)} \in C(D)$

2) $f^{(m-j,j)} \in C[a, b], j = 0, 1, ..., q - 1$

3) $f^{(i,m-i)} \in C[a, b], i = 0, 1, ..., p - 1.$

Teorema 1.3.1. *Dacă $f \in B_{pq}(a, c)$ atunci*

$$f(x, y) = \sum_{i+j<m} \frac{(x-a)^i}{i!} \frac{(y-c)^j}{j!} f^{(i,j)}(a, c) + (R_m f)(x, y) \tag{1.7}$$

unde

$$\begin{aligned}(R_m f)(x, y) \;&=\; \sum_{j<q} \frac{(y-c)^j}{j!} \int_a^b \frac{(x-s)_+^{m-j-1}}{(m-j-1)!} f^{(m-j,j)}(s, c) ds + \\ &+\; \sum_{i<p} \frac{(x-a)^i}{i!} \int_c^d \frac{(y-t)_+^{m-i-1}}{(m-i-1)!} f^{(i,m-i)}(a, t) dt + \\ &+\; \iint_D \frac{(x-s)_+^{p-1}}{(p-1)!} \frac{(y-t)_+^{q-1}}{(q-1)!} f^{(p,q)}(s, t) ds dt,\end{aligned}$$

iar $z_+ = z$ pentru $z \geq 0$ şi $z_+ = 0$ pentru $z < 0$.

Observaţia 1.3.1. *Formula lui Taylor 1.7 are loc pentru orice domeniu plan Ω cu proprietatea că există un punct $(a, c) \in \Omega$ (în vecinătatea căruia se face dezvoltarea Taylor) astfel încât dreptunghiul $[a, x] \times [c, y] \subseteq \Omega$ oricare ar fi $(x, y) \in \Omega$.*

În acest caz formula (1.7) se scrie sub forma

$$f(x, y) = \sum_{i+j<m} \frac{(x-a)^i}{i!} \frac{(y-c)^j}{j!} f^{(i,j)}(a, c) + (R_m f)(x, y)$$

cu

$$\begin{aligned}(R_m f)(x, y) &= \sum_{j<q} \frac{(y-c)^j}{j!} \int_{I_1} \frac{(x-s)_+^{m-j-1}}{(m-j-1)!} f^{(m-j,j)}(s, c) ds + \\ &+ \sum_{i<p} \frac{(x-a)^i}{i!} \int_{I_2} \frac{(y-t)_+^{m-i-1}}{(m-i-1)!} f^{(i,m-i)}(a, t) dt + \\ &+ \iint_{\Omega} \frac{(x-s)_+^{p-1}}{(p-1)!} \frac{(y-t)_+^{q-1}}{(q-1)!} f^{(p,q)}(s, t) ds dt,\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}I_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = c\} \cap \Omega \\ I_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = a\} \cap \Omega.\end{aligned}$$

Exemple de astfel de domenii sunt triunghiul $T_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq h\}$ cu $(a, c) = (0, 0)$ sau orice cerc cu centrul (a, c).

2. Spaţiul $B_{pq}^r(a, c), (p, q \in \mathbb{N}, p + q = m, r \in \mathbb{R}, r \geq 1)$ al funcţiilor $f : D \to \mathbb{R}, D = [a, b] \times [c, d]$, cu proprietăţile:

1) $f^{(i,j)} \in C(D), i < p, j < q$

2) $f^{(m-j-1,j)}$ este absolut continuă pe $[a, b]$ şi $f^{(m-j,j)} \in L^r[a, b], j < q$

3) $f^{(i,m-i-1)}$ este absolut continuă pe $[c, d]$ şi $f^{(i,m-i)} \in L^r[c, d], i < p$

4) $f^{(p,q)} \in L^r(D)$.

Teorema lui Peano

Teorema 1.3.2. *Fie $L : H^m[a, b] \to R$ o funcţională liniară de forma*

$$L(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \int_a^b f^{(i)}(x) d\mu_i(x),$$

unde μ_i sunt funcţii cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.
Dacă $Ker(L) = P_{m-1}$, atunci

$$L(f) = \int_a^b K_m(t) f^{(m)}(t) dt,$$

unde

$$K_m(t) = L^x\left[\frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!}\right].$$

Funcţia K_m se numeşte *nucleul lui Peano*. Pentru cazul bidimensional avem:

Teorema 1.3.3. *Fie $L : B_{pq}^r(a,c) \to \mathbb{R}$ o funcţională liniară şi $f \in B_{pq}(a,c)$. Dacă $Ker(L) = P_{m-1}^2$, atunci*

$$\begin{aligned} L(f) &= \sum_{j<q}\int_a^b K_{m-j,j}(s) f^{(m-j,j)}(s,c)ds + \\ &+ \sum_{i<p}\int_a^b K_{i,m-i}(t) f^{(i,m-i)}(a,t)dt + \\ &+ \iint_D K_{pq}(s,t) f^{(p,q)}(s,t)dsdt, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} K_{m-j,j}(s) &= L^{(x,y)}\left[\frac{(x-s)_+^{m-j-1}}{(m-j-1)!}\frac{(y-c)^j}{j!}\right], j<q \\ K_{i,m-i}(t) &= L^{(x,y)}\left[\frac{(x-a)^i}{i!}\frac{(y-t)_+^{m-i-1}}{(m-i-1)!}\right], i<p \\ K_{pq}(s,t) &= L^{(x,y)}\left[\frac{(x-s)_+^{p-1}}{(p-1)!}\frac{(y-t)_+^{q-1}}{(q-1)!}\right], \end{aligned}$$

sunt nucleele lui Peano

Fie triunghiul standard

$$\mathbf{T}_h = \{(x,y) \in R^2 | x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq h\},$$

întrucât pentru orice triunghi $\mathbf{T}$ din plan există o transformare afină a lui $\mathbf{T}$ în $\mathbf{T}_h$.

Fie deci $f : \mathbf{T}_h \to \mathbb{R}$.

Fie (x,y) un punct interior triunghiului $\mathbf{T}_h$ (a se vedea Figura 1.1). Fiecare paralelă la una din laturile acestui triunghi şi care trece prin punctul (x,y) intersectează celelalte două laturi în câte două puncte. De exemplu, paralela la cateta de pe axa Ox intersectează cealaltă catetă şi ipotenuza respectiv în punctele $(0,y)$ şi $(h-y,y)$. Notând prin P_1 operatorul de interpolare Lagrange relativ la nodurile 0 şi $h-y$ şi fixând pe y, se obţine

$$(P_1 f)(x,y) = \frac{h-x-y}{h-y} f(0,y) + \frac{x}{h-y} f(h-y,y),$$

unde f este o funcţie definită pe $\mathbf{T}_h$.

Se verifică imediat că

$$(P_1 f)(x,y) = f(0,y)$$

şi

$$(P_1 f)(h-y,y) = f(h-y,y),\ y \in [0,h],$$

adică P_1f interpolează funcţia f pe două dintre laturile triunghiului $\mathbf{T}_h$ (pe ipotenuză şi pe cateta situată pe axa Oy).

În mod analog se construiesc funcţiile

$$(P_2f)(x,y) = \frac{h-x-y}{h-x}f(x,0) + \frac{y}{h-x}f(x,h-x)$$

şi

$$(P_3f)(x,y) = \frac{x}{x+y}f(x+y,0) + \frac{y}{x+y}f(0,x+y),$$

care interpolează funcţia f tot pe două câte două dintre laturile lui $\mathbf{T}_h$.

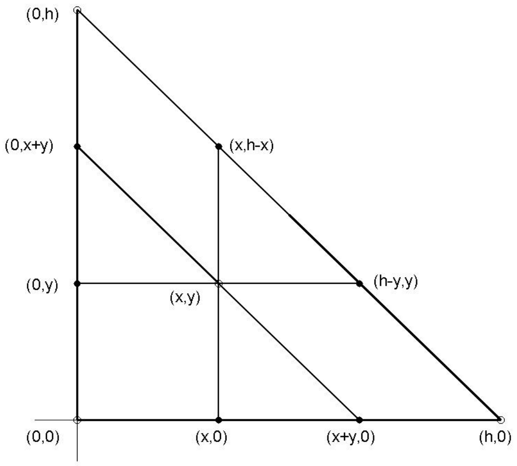

Figura 1.1: Triunghiul standard $\mathbf{T}_h$

Prin urmare, fiecare dintre operatorii P_1, P_2, P_3 generează o funcţie care interpolează funcţia dată f pe două dintre laturile triunghiului $\mathbf{T}_h$.

Începând cu lucrarea lui R. E. Barnhill, G. Birkhoff şi W. J. Gordon [15], operatorii de interpolare pe triunghi sunt studiaţi pe larg ([16], [18], [19], [29], [40], [58], [88], [89], [99]).

1.4 Interpolarea funcţiilor definite pe un triunghi cu o latură curbată

În [59] Gh. Coman şi T. Cătinaş construiesc anumiţi operatori de tip Lagrange, Hermite şi Birkhoff, care interpolează o funcţie dată şi anumite derivate ale sale pe frontiera unui triunghi cu o latură curbată, şi de asemenea construiesc operatorii produs şi sumă booleană a unora dintre ei. Ei studiază de asemenea proprietăţile de interpolare şi gradul de exactitate a operatorilor construiţi, respectiv termenul rest ale formulelor de interpolare corespunzătoare.

Ei consideră un triunghi standard, $\tilde{T}_h$, având vârfurile $V_1 = (h,0), V_2 = (0,h)$ şi $V_3 = (0,0)$, două laturi drepte Γ_1, Γ_2, de-a lungul axelor de coordonate şi a treia latură

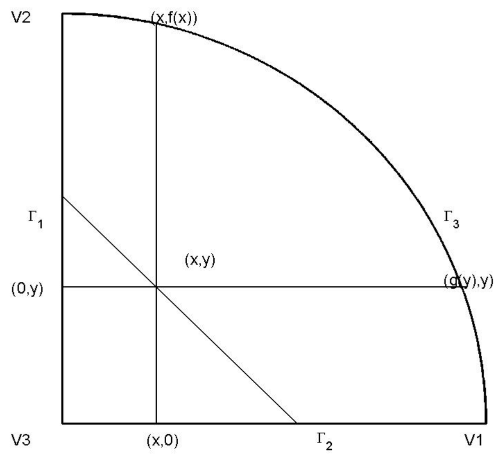

Figura 1.2: Triunghiul standard $\tilde{T}_h$

Γ_3 (opusă vârfului V_3), care este definită de funcţiile f şi g, unde g este inversa funcţiei f, adică $y = f(x)$ şi $x = g(y)$ cu $f(0) = g(0) = h$.(Figura 1.2)

Fie F o funcţie reală definită pe $\tilde{T}_h$.
Fie L_1, L_2 şi L_3 operatorii Lagrange definiţi prin

$$
\begin{aligned}
(L_1F) &= \frac{g(y)-x}{g(y)}F(0,y) + \frac{x}{g(y)}F(g(y),y),\\
(L_2F) &= \frac{f(x)-y}{f(x)}F(x,0) + \frac{y}{f(x)}F(f(x),x),\\
(L_3F) &= \frac{x}{x+y}F(x+y,0) + \frac{y}{x+y}F(0,x+y),
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

(1) Fiecare din operatorii L_1, L_2 şi L_3 interpolează funcţia F de-a lungul a două laturi ale triunghiului $\tilde{T}_h$, adică,

$$
\begin{aligned}
(L_1F)(0,y) &= F(0,y),\ y \in [0,h],\\
(L_1F)(g(y),y) &= F(g(y),y),\ y \in [0,h],\\
(L_2F)(x,0) &= F(x,0),\ x \in [0,h],\\
(L_2F)(x,f(x)) &= F(x,f(x)),\ x \in [0,h],\\
(L_3F)(x+y,0) &= F(x+y,0),\ x,y \in [0,h],\\
(L_3F)(0,x+y) &= F(0,x+y),\ x,y \in [0,h],
\end{aligned}
$$

(2) Gradul de exactitate: $gex(L_i) = 1,\ i = 1,2,3$.

(3) În ce priveşte termenul rest, $R_i^L F, i = 1,2,3$, al formulelor de interpolare

$$F = L_iF + R_i^L F \ i = 1,2,3$$

avem

Teorema 1.4.1. *Dacă* $F \in B_{11}(0,0)$ *atunci*

$$\begin{aligned}(R_1^L F)(x,y) &= \frac{x[x-g(y)]}{2} F^{(2,0)}(\xi,0)\\ &+ \frac{xy[g(y)-x]}{g(y)}\big[F^{(1,1)}(\xi_1,\eta_1) - F^{(1,1)}(\xi_2,\eta_2)\big],\end{aligned}$$

cu $\xi \in [0,h], (\xi_1,\eta_1) \in [0,x] \times [0,y]$ *şi* $(\xi_2,\eta_2) \in [x, g(y)] \times [0,y]$, *respectiv*

$$|(R_1^L F)(x,y)| \leq \frac{h^2}{8}\Big[\|F^{(2,0)}(\cdot,0)\|_\infty + \|F^{(1,1)}\|_\infty\Big], \tag{1.9}$$

unde $\|\cdot\|_\infty$ *este norma lui Cebâşev.*

Consideră apoi operatorii Hermite H_1 şi H_2 definiţi prin

$$\begin{aligned}(H_1F)(x,y) &= \frac{[x-g(y)]^2}{g^2(y)}F(0,y) + \frac{x[2g(y)-x]}{g^2(y)}F(g(y),y)\\ &+ \frac{x[x-g(y)]}{g(y)}F^{(1,0)}(g(y),y),\\ (H_2F)(x,y) &= \frac{[y-f(x)]^2}{f^2(x)}F(x,0) + \frac{y[2f(x)-y]}{f^2(x)}F(x,f(x))\\ &+ \frac{y[y-f(x)]}{f(x)}F^{(0,1)}(x,f(x)).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Formula de interpolare corespunzătoare este

$$F = H_iF + R_i^HF,\ i=1,2,$$

unde $R_i^HF, i=1,2$ este termenul rest, pentru care avem:

Teorema 1.4.2. *Dacă* $F \in B_{12}(0,0)$ *atunci avem următoarele inegalităţi*

$$\begin{aligned}|(R_1^HF)(x,y)| &\leq \frac{x[g(y)-x]^2}{6}\|F^{(3,0)}(\cdot,0)\|_\infty + \frac{xy[g(y)-x]^2}{2g(y)-x}\|F^{(2,1)}(\cdot,0)\|_\infty\\ &+ \frac{xy^2[g(y)-x][3g(y)-2x]}{2g^2(y)}\|F^{(1,2)}(\cdot,\cdot)\|_\infty,\end{aligned} \tag{1.11}$$

şi

$$\begin{aligned}|(R_1^HF)(x,y)| &\leq \frac{2h^3}{81}\|F^{(3,0)}(\cdot,0)\|_\infty + \frac{xy[g(y)-x]^2}{2g(y)-x}\|F^{(2,1)}(\cdot,0)\|_\infty\\ &+ \frac{xy^2[g(y)-x][3g(y)-2x]}{2g^2(y)}\|F^{(1,2)}(\cdot,\cdot)\|_\infty.\end{aligned} \tag{1.12}$$

În [11] am construit un operator de tip Lagrange care interpolează funcţia F pe o catetă, pe latura curbată , dar şi pe o linie interioară a triunghiului $\tilde{T}_h$. Am considerat cazul în care linia interioară este o mediană. Astfel am introdus operatorul L_2^x care interpolează funcţia F în raport cu x în punctele $(0,y)$, $\left(\frac{h-y}{2}, y\right)$ şi $(g(y),y)$:

$$
\begin{aligned}
(L_2^x F)(x,y) \quad &= \quad \frac{(2x-h+y)[x-g(y)]}{(h-y)g(y)} F(0,y) + \frac{4x[x-g(y)]}{(h-y)[h-y-2g(y)]} F\left(\frac{h-y}{2}, y\right) \\
&+ \quad \frac{x(2x-h-y)}{g(y)[2g(y)-h+y]} F(g(y),y). \qquad (1.13)
\end{aligned}
$$

Deci operatorul L_2^x interpolează funcţia F pe cateta V_2V_3, pe latura curbată şi pe mediana V_2M(Figura 1.3)

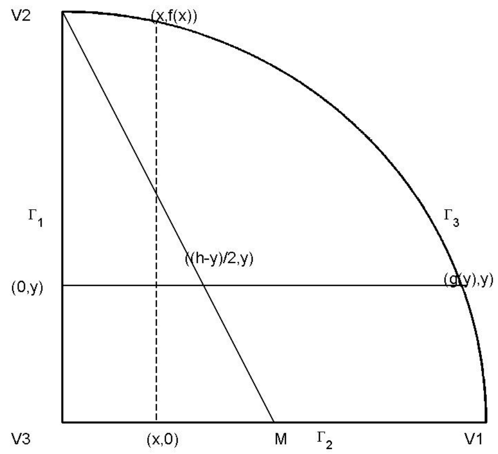

Figura 1.3: Triunghiul standard $\tilde{T}_h$

În ce priveşte termenul rest $R_2^L F$, al formulei de interpolare $F = L_2F + R_2^L F$, avem următoarea teoremă:

Teorema 1.4.3. *Dacă $F \in B_{12}(0,0)$, atunci avem următoarea inegalitate*

$$
\begin{aligned}
|R_2^L F| \;\leq\; & \frac{x(h-y-2x)[4g(y)(h-y)(h-y-x)+(h-y)[-(h-y)^2+3(2g(y)-h+y)]]}{48g(y)(h-y)} \\
& \left\| F^{(3,0)}(\cdot,0) \right\|_\infty + \frac{xy[(h-y)^2-4x^2][g(y)-x]}{(h-y)[h-y-2x+2g(y)]} \left\| F^{(2,1)}(\cdot,0) \right\|_\infty \qquad (1.14) \\
+ \; & \frac{xy^2(h-y-2x)[2(g(y)-x)+h-y]}{2g(y)(h-y)} \left\| F^{(1,2)}(\cdot,\cdot) \right\|_\infty .
\end{aligned}
$$

În continuare am construit operatorul produs. Notăm cu L_1^y operatorul $L_2(1.8)$. Produsul operatorilor L_1^y şi L_2^x este dat de:

$$
\begin{aligned}
(P_{21}^L F)(x,y) &= \frac{(2x-h+y)[x-g(y)]}{(h-y)g(y)}\left[\frac{h-y}{h}F(0,0)+\frac{y}{h}F(0,h)\right]+\frac{4x[x-g(y)]}{(h-y)[h-y-2g(y)]} \\
&\quad \left[\frac{f\left(\frac{h-y}{2}\right)-y}{f\left(\frac{h-y}{2}\right)}F\Big(\frac{h-y}{2},0\Big)+\frac{y}{f\left(\frac{h-y}{2}\right)}F\Big(\frac{h-y}{2},f\Big(\frac{h-y}{2}\Big)\Big)\right] \\
&+ \frac{x(2x-h+y)}{g(y)[2g(y)-h+y]}F(g(y),y).
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

În ce priveşte termenul rest al formulei de interpolare corespunzătoare $F = P_{21}^L F + R_{21}^P F$, avem :

Teorema 1.4.4. *Dacă $F \in B_{11}(0,0)$, atunci avem următoarea inegalitate*

$$
\begin{aligned}
|(R_{21}^L F)(x,y)| &\leq \left\|F^{(2,0)}(\cdot,0)\right\|_\infty \int_0^h |K_{20}(x,y,s)|ds + \left\|F^{(0,2)}(0,\cdot)\right\|_\infty \int_0^h |K_{02}(x,y,t)|dt \\
&+ \left\|F^{(1,1)}(\cdot,\cdot)\right\|_\infty \iint_{\tilde{T}_h} |K_{11}(x,y,s,t)|dsdt.
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

Suma booleană a operatorilor L_1^y şi L_2^x este dată de

$$
\begin{aligned}
&(S_{21}^L F)(x,y) \\
&= \frac{x-g(y)}{h-y}\left[\frac{2x-h+y}{g(y)}F(0,y)+\frac{4x}{h-y-2g(y)}F\Big(\frac{h-y}{2},y\Big)\right] \\
&+ \frac{1}{f(x)}[(f(x)-y)F(x,0)+yF(x,f(x))] \\
&- \frac{(2x-h+y)(x-g(y))}{(h-y)g(y)}\left[\frac{h-y}{h}F(0,0)+\frac{y}{h}F(0,h)\right] \\
&- \frac{4x(x-g(y))}{(h-y)[h-y-2g(y)]}\left[\frac{f\left(\frac{h-y}{2}\right)-y}{f\left(\frac{h-y}{2}\right)}F\Big(\frac{h-y}{2},0\Big)\right. \\
&+ \left.\frac{y}{f\left(\frac{h-y}{2}\right)}F\Big(\frac{h-y}{2},f\Big(\frac{h-y}{2}\Big)\Big)\right].
\end{aligned}
$$

Pentru termenul rest al formulei de interpolare corespunzătoare, $F = S_{21}^L F + R_{21}^S F$, avem

Teorema 1.4.5. *Dacă $F \in B_{11}(0,0)$, atunci avem următoarea inegalitate*

$$
\begin{aligned}
|(R_{21}^S F)(x,y)| &\leq \left\|F^{(0,2)}(0,\cdot)\right\|_\infty \int_0^h |K_{02}(x,y,t)|dt \\
&+ \left\|F^{(1,1)}(\cdot,\cdot)\right\|_\infty \iint_{\tilde{T}_h} |K_{11}(x,y,s,t)|dsdt.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

În [12] am construit noi operatori de interpolare pe triunghiul $\tilde{T}_h$ folosind produsul şi suma booleană şi am determinat proprietăţile lor de interpolare şi gradele de exactitate. Considerăm operatorul Hermite H_2^y dat în (1.10):

$$\begin{aligned}(H_2^yF)(x,y) &= \frac{[y-f(x)]^2}{f^2(x)}F(x,0)+\frac{y[2f(x)-y]}{f^2(x)}F(x,f(x))\\ &+ \frac{y[y-f(x)]}{f(x)}F^{(0,1)}(x,f(x)),\end{aligned}$$

respectiv operatorul Lagrange L_2^x dat în (1.13):

$$\begin{aligned}(L_2^xF)(x,y) &= \frac{(2x-h+y)[x-g(y)]}{(h-y)g(y)}F(0,y)\\ &+ \frac{4x[x-g(y)]}{(h-y)[h-y-2g(y)]}F\Big(\frac{h-y}{2},y\Big)\\ &+ \frac{x(2x-h+y)}{g(y)[2g(y)-h+y]}F(g(y),y).\end{aligned}\tag{1.18}$$

Fie P

$$P := H_2^yL_2^x$$

şi

$$F = PF + R_1\tag{1.19}$$

Teorema 1.4.6. *Fie $F : \tilde{T}_h \to R$. Dacă există $F^{(0,1)}$ pe latura Γ_3 atunci P verifică proprietăţile de interpolare:*

$$\begin{aligned}PF &= F,\ pe\,\Gamma_2\cup\Gamma_3\\ (PF)^{(0,1)} &= F^{(1,0)},\ pe\,\Gamma_3\end{aligned}$$

şi $gex(P) = 2$.

Teorema 1.4.7. *Dacă $F \in B_{1,2}(0,0)$ atunci avem următoarea inegalitate*

$$\begin{aligned}|(R_1F)(x,y)| &\leq \frac{x[y-f(x)]^2(h-2x)(h-x)}{12f^2(x)}\|F^{(3,0)}(\cdot,0)\|_\infty\\ &+ \frac{xy[y-f(x)]^2(2x-h)(x-h)}{f^2(x)(3h-2x)}\|F^{(2,1)}(\cdot,0)\|_\infty\\ &+ \frac{y[y-f(x)]^2}{6}\|F^{(0,3)}(0,\cdot)\|_\infty\\ &+ \frac{xy[f(x)-y]^2}{2f(x)-y}\|F^{(1,2)}(\cdot,\cdot)\|_\infty.\end{aligned}\tag{1.20}$$

Fie S

$$S := H_2^y \oplus L_2^x$$

şi

$$F = SF + R_2F\tag{1.21}$$

formula de aproximare generată de S.

Teorema 1.4.8. *Fie $F : \tilde{T}_h \to \mathbb{R}$ atunci:*

1. $SF = F$, *pe* $\partial\tilde{T}_h$.
2. $gex(S) = 2$.

Teorema 1.4.9. *Dacă* $F \in B_{1,2}(0,0)$ *atunci*

$$
\begin{aligned}
(R_2F)(x,y) &= \int_0^h K_{30}(x,y,s)F^{(3,0)}(s,0)ds + \\
&+ \int_0^h K_{21}(x,y,s)F^{(2,1)}(s,0)ds + \\
&+ \int_0^h K_{03}(x,y,t)F^{(0,3)}(0,t)dt + \\
&+ \iint_{\tilde{T}_h} K_{12}(x,y,s,t)F^{(1,2)}(s,t)dsdt,
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

cu nucleele lui Peano

$$
\begin{aligned}
K_{30}(x,y,s) &= \frac{(x-s)_+^2}{2} - \frac{[y-f(x)]^2}{f^2(x)} \cdot \frac{(x-s)_+^2}{2} \\
&- \frac{4x[x-g(y)]}{(h-y)[h-y-2g(y)]} \cdot \frac{\left(\frac{h-y}{2}-s\right)_+^2}{2} - \frac{x(2x-h-y)}{g(y)[2g(y)-h+y]} \cdot \frac{[g(y)-s]_+^2}{2} \\
&+ \frac{[y-f(x)]^2}{f^2(x)} \cdot \left[-\frac{4x(x-h)}{h^2} \cdot \frac{\left(\frac{h}{2}-s\right)_+^2}{2} + \frac{x(2x-h)}{h^2} \cdot \frac{(h-s)^2}{2} \right] \\
K_{21}(x,y,s) &= y(x-s)_+ - \frac{y[y-f(x)]^2}{f^2(x)}(x-s)_+ \\
&- \frac{4xy[x-g(y)]}{(h-y)[h-y-2g(y)]}\left(\frac{h-y}{2}-s\right)_+ - \frac{xy(2x-h-y)}{g(y)[2g(y)-h+y]}[g(y)-s]_+ \\
&+ \frac{[y-f(x)]^2y}{f^2(x)}\left[-\frac{4x(x-h)}{h^2}\left(\frac{h}{2}-s\right)_+ + \frac{x(2x-h)}{h^2}(h-s) \right] \\
K_{03}(x,y,t) &= 0 \\
K_{12}(x,y,s,t) &= (y-t)_+\left[(x-s)_+^0 - \frac{4x[x-g(y)]}{(h-y)[h-y-2g(y)]}\left(\frac{h-y}{2}-s\right)_+^0 \right. \\
&\left. - \frac{x(2x-h-y)}{g(y)[2g(y)-h-y]}[g(y)-s]_+^0 \right]
\end{aligned}
$$

În plus,

$$
\begin{aligned}
|(R_2F)(x,y)| &\leq \|F^{(3,0)}(\cdot,0)\|_\infty \int_0^h |K_{30}(x,y,s)|ds \\
&+ \|F^{(2,1)}(\cdot,0)\|_\infty \int_0^h |K_{21}(x,y,s)|ds \\
&+ \|F^{(1,2)}(\cdot,\cdot)\|_\infty \iint_{\tilde{T}_h} |K_{12}(x,y,s,t)|dsdt,
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

Capitolul 2

Formule de cuadratură optimale

Acest capitol este dedicat formulelor de cuadratură optimale, fiind astfel prezentate formulele de cudratură optimale în sens Sard şi Nikolski şi formulele corectate corespunzătoare de tip deschis şi închis.

În prima secţiune am obţinut o formulă de cuadratură optimală de tip deschis cu 2 noduri şi am arătat că sunt situaţii când această formulă are o reprezentare a termenului rest mai bună decât bine cunoscuta formulă a lui Gauss cu 2 noduri. În a doua secţiune am obţinut formule de cuadratură optimale în sens Nikolski de tip deschis cu 2 noduri, dând estimări ale termenului rest pentru o varietate de norme care implică derivata a doua. Am construit apoi formulele corectate ale acestor formule optimale. În a treia secţiune am obţinut formule de cuadratură optimale în sens Nikolski cu 3 noduri de tip închis, respectiv a unor formule optimale în sensul Nikolski generale, dând de asemenea estimări ale termenului rest pentru o varietate de norme care implică derivata a doua, construind apoi formulele corectate ale acestor formule optimale. Aceste formule au grad de exactitate mai mare decât cele originale. Am arătat că estimările erorii sunt mai bune în formulele corectate decât în cele originale. Aceste rezultate sunt cuprinse în lucrările [3], [4], [5], [14] şi [13].

2.1 Formule de cuadratură optimale în sens Sard şi Nikolski

Definiţia 2.1.1. *Numim formulă de cuadratură sau formulă de integrare numerică formula*

$$I[f]=\int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda(x)=\sum_{i=0}^{m} A_i\lambda_i[f]+\mathcal{R}_m[f], \tag{2.1}$$

unde $\lambda_i[f]$, $i=\overline{0,m}$ *sunt informaţii punctuale (locale) relative la funcţia* f*, care se integrează în raport cu măsura* $d\lambda$*,* A_i*,* $i=\overline{0,m}$ *se numesc coeficienţii formulei de cuadratură, iar* $\mathcal{R}_m[f]$ *este termenul rest.*

Definiţia 2.1.2. *O formulă de cuadratură are gradul de exactitate* n*, dacă*

$$\mathcal{R}_m[e_0]=0\,,\ \mathcal{R}_m[e_1]=0\,,\ \cdots\,,\ \mathcal{R}_m[e_n]=0,$$

unde $e_j(t) = t^j$. *Dacă în plus,*

$$\mathcal{R}_m[e_{n+1}] \neq 0$$

spunem că formula de cuadratură are gradul de exactitate efectiv egal cu n.

Lema 2.1.1. *Dacă* $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ *şi* w *este o pondere pe* (α, β) *şi*

$$\int_\alpha^\beta f(t)w(t)dt = \sum_{i=0}^m A_i f(x_i) + r_m[f]\,,\ f \in L_w^1(\alpha,\beta),$$

atunci

$$W(x) = w\left(\alpha + (\beta-\alpha)\frac{x-a}{b-a}\right)\,,\ x \in (a,b),\ -\infty < a < b < +\infty,$$

este o pondere pe (a,b) *şi*

$$\int_a^b F(x)W(x)dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha}\sum_{i=0}^m A_i F\left(a + (b-a)\frac{x_i-\alpha}{\beta-\alpha}\right) + \mathcal{R}_m[F],$$

unde $F \in L_w^1(a,b)$ *şi*

$$\mathcal{R}_m[F] = \frac{b-a}{\beta-\alpha} r_m[\tilde{F}],\ \tilde{F}(t) = F\left(a + (b-a)\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\right).$$

Fie formula de cuadratură

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^m A_{m,k} f(a_k) + R_m[f], \tag{2.2}$$

cu gradul de exactitate $n-1$, unde nodurile satisfac inegalităţile $a \le a_0 < a_1 < \cdots < a_m \le b$.

Dacă $f \in H^n[a,b]$, adică $f \in C^{n-1}[a,b]$ şi $f^{(n-1)}$ este absolut continuă pe intervalul $[a,b]$, folosind teorema lui Peano, avem următoarea reprezentare integrală a termenului rest

$$R_m[f] = \int_a^b K_{m,n}(t) f^{(n)}(t)dt, \tag{2.3}$$

unde

$$\begin{aligned} K_{m,n}(t) &= R_m\left[\frac{(x-t)_+^{n-1}}{(n-1)!}\right] \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_a^b (x-t)_+^{n-1}dx - \sum_{k=0}^m A_{m,k}(a_k-t)_+^{n-1}\right], \end{aligned} \tag{2.4}$$

se numeţe *nucleul lui Peano.*

Notăm

$$H^{n,p}[a,b] := \left\{ f \in C^{n-1}[a,b], f^{(n-1)} \text{ absolut continuă },\ \left\|f^{(n)}\right\|_p < \infty \right\}$$

cu

$$\|f\|_p := \left\{ \int_a^b |f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \text{pentru} \;\; 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| .$$

Se pot obţine următoarele evaluări ale termenului rest

$$|R_m[f]| \le M_n^{[\infty]}[f] \int_a^b |K_{m,n}(t)| dt, \quad M_n^{[\infty]}[f] = \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n)}(t)|, \tag{2.5}$$

$$[R_m[f]]^2 \le M_n^{[2]}[f] \int_a^b |K_{m,n}(t)|^2 dt, \quad M_n^{[2]}[f] = \int_a^b [f^{(n)}(t)]^2 dt, \tag{2.6}$$

$$|R_m[f]| \le M_n^{[1]}[f] \sup_{t \in [a,b]} |K_{m,n}(t)| dt, \quad M_n^{[1]}[f] = \int_a^b |f^{(n)}(t)| dt, \tag{2.7}$$

respectiv când $f \in H^{n,\infty}[a,b], f \in H^{n,2}[a,b], f \in H^{n,1}[a,b]$. Optimalitatea formulei de cuadratură va reveni la determinarea acelei formule de cuadratură, adică a coeficienţilor, eventual şi a nodurilor, punând condiţia ca factorul din evaluarea termenului rest ce depinde de nucleul lui Peano să fie minim. Când nodurile sunt fixate se va ajunge la optimalitate în sensul lui Sard, iar în caz contrar la optimalitatea în sensul lui Nikolski.

Să considerăm că în formula (2.2) funcţia integrată f este continuă, cu derivate continue până la ordinul $n-1$, iar derivata de ordin n este la pătrat integrabilă, adică $f \in H^{n,2}[a,b]$. Reprezentarea integrală a termenului rest dată prin teorema lui Peano are loc, precum şi evaluarea (2.6). Presupunem de asemenea că nodurile formulei de cuadratură sunt cunoscute.

Definiţia 2.1.3. *Formula de cuadratură (2.2) este optimală în sensul lui Sard dacă*

$$\int_a^b [K_{m,n}(t)]^2 dt \to minim.$$

Să considerăm că în formula (2.2) funcţia integrată f este continuă, cu derivate continue până la ordinul $n-1$, iar derivata de ordin n este la puterea $p \ge 1$ integrabilă, adică $f \in H^{n,p}[a,b]$. Dacă gradul de exactitate al formulei de cudratură este $n-1$, reprezentarea integrală a termenului rest este dată prin (2.3) şi (2.4) din teorema lui Peano. Mai mult, pentru termenul rest avem evaluarea

$$|R_m[f]| \le \left[M_n^{[p]}[f] \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |K_{m,n}(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}}, \tag{2.8}$$

unde

$$M_n^{[p]}[f] = \int_a^b |f^{(n)}(t)|^p dt, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

cu observaţia că în cazurile $p=1$ şi $p=\infty$ această evaluare devine respectiv

$$|R_m[f]| \le M_n^{[1]}[f] \sup_{t \in [a,b]} |K_{m,n}(t)|, \tag{2.9}$$

$$|R_m[f]| \le M_n^{[\infty]}[f] \int_a^b |K_{m,n}(t)| dt, \tag{2.10}$$

unde

$$M_n^{[1]}[f] = \int_a^b |f^n(t)|dt, M_n^{[\infty]}[f] = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n)}(t)|$$

Vom presupune că nodurile formulei de cuadratură, ca şi coeficienţii, sunt parametri necunoscuţi.

Definiţia 2.1.4. *Formula de cuadratură (2.2) este optimală în sensul lui Nikolski în* $H^{n,p}[a,b]$ *dacă*

$$\int_a^b [K_{m,n}(t)]^q dt \to minim, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Problema construirii formulelor de cuadratură optimale a fost studiată de mulţi autori. Primul rezultat a fost obţinut de A. Sard, L. S. Meyers şi S. M. Nikolski. În ultimii ani un număr de autori au obţinut formule de cuadratură optimale în mai multe moduri diferite ([41], [50], [51], [91], [126], [127]).

În [125], N. Ujević obţine următoarea formulă de cuadratură

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = f(x) + f(y) + R[f], \ f \in H^{2,2}[-1,1] \tag{2.11}$$

unde

$$R[f] = \int_{-1}^1 K(x,y,t)f''(t)dt, \tag{2.12}$$

$$K(x,y,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+1)^2, \ t \in [-1,x], \\ \frac{1}{2}t^2 + x + \frac{1}{2}, \ t \in (x,y) \\ \frac{1}{2}(t-1)^2, \ t \in [x,1]. \end{cases} \tag{2.13}$$

Folosind relaţia $|R[f]| \le ||K(x,y,.)||_2 \, ||f''||_2$ şi punând condiţia ca $||K(x,y,.)||_2^2 \to min$, se obţine $x = \sqrt{6} - 3$, respectiv următoarea formulă de cuadratură:

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = f(\sqrt{6} - 3) + f(-\sqrt{6} + 3) + R[f], \tag{2.14}$$

$$|R[f]| \le \sqrt{\frac{98}{5} - 8\sqrt{6}} \, ||f''||_2 \, . \tag{2.15}$$

N. Ujević compară acest rezultat cu formula lui Gauss cu 2 noduri, adică

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = f\Big(-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) + f\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) + R_1[f], \tag{2.16}$$

$$|R_1[f]| \le \sqrt{-\frac{34}{135} + \frac{4}{27}\sqrt{3}} \, ||f''||_2 \, , \tag{2.17}$$

şi arată că estimarea (2.15) este mai bună decât estimarea (2.17).

În [3] am obţinut o formulă de cuadratură optimală cu 2 noduri de tip deschis.

Teorema 2.1.1. *Dacă* $f \in H^{3,2}[-1,1]$, *atunci avem*

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + R_2[f], \tag{2.18}$$

$$|R_2[f]| \leq \sqrt{-\frac{4}{405}\sqrt{3} + \frac{148}{8505}}\left|\left|f^{(3)}\right|\right|_2. \tag{2.19}$$

Folosind Lema 2.1.1 obţinem formula de cuadratură pe intervalul $[a,b]$:

Teorema 2.1.2. *Dacă* $f \in H^{3,2}[a,b]$, *atunci*

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \frac{b-a}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \tilde{R}_2[f], \tag{2.20}$$

unde

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{b-a}{2},\ x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{b-a}{2}$$

$$\left|\tilde{R}_2[f]\right| \leq \frac{(b-a)^{7/2}}{4\sqrt{2}}\sqrt{-\frac{1}{405}\sqrt{3} + \frac{148}{8505}}\left|\left|f^{(3)}\right|\right|_2. \tag{2.21}$$

Acum arătăm că sunt situaţii când estimarea (2.19) este mai bună decât estimarea (2.15) şi (2.17).

Exemplul 2.1.1. *Dacă* $f(x) = e^x + x$, $x \in [-1,1]$, *atunci*

$$|R[f]| \leq \sqrt{\frac{98}{5} - 8\sqrt{6}}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{\frac{e^4-1}{e^2}} \cong 0,1208 \tag{2.22}$$

$$|R_1[f]| \leq \sqrt{-\frac{34}{135} + \frac{4}{27}\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{\frac{e^4-1}{e^2}} \cong 0,1303 \tag{2.23}$$

$$|R_2[f]| \leq \sqrt{-\frac{4}{405}\sqrt{3} + \frac{148}{8505}}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{\frac{e^4-1}{e^2}} \cong 0,0325 \tag{2.24}$$

Exemplul 2.1.2. *Dacă* $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$, $x \in [-1,1]$, *atunci*

$$|R[f]| \leq \sqrt{\frac{98}{5} - 8\sqrt{6}}.\frac{1}{2000}.\sqrt{39246 + 46875arctg\left(\frac{1}{2}\right)} \cong 0,0079 \tag{2.25}$$

$$|R_1[f]| \leq \sqrt{-\frac{34}{135} + \frac{4}{27}\sqrt{3}}.\frac{1}{2000}.\sqrt{39246 + 46875arctg\left(\frac{1}{2}\right)} \cong 0,0085 \tag{2.26}$$

(2.27)

$$|R_2[f]| \leq \sqrt{-\frac{4}{405}\sqrt{3} + \frac{148}{8505}}.\frac{1}{280000}.\sqrt{1329179460 + 1722656250arctg\left(\frac{1}{2}\right)} \cong 0,0028$$

Exemplul 2.1.3. *Dacă* $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$, $x \in [-1, 1]$, *atunci*

$$|R[f]| \le \sqrt{\frac{98}{5} - 8\sqrt{6}}.\frac{1}{4}.\sqrt{-62e^{-2} + 470e^2} \cong 0,9338 \tag{2.28}$$

$$|R_1[f]| \le \sqrt{-\frac{34}{135} + \frac{4}{27}\sqrt{3}}.\frac{1}{4}.\sqrt{-62e^{-2} + 470e^2} \cong 1,0071 \tag{2.29}$$

$$|R_2[f]| \le \sqrt{-\frac{4}{405} + \frac{148}{8505}}.\frac{1}{4}.\sqrt{-134e^{-2} + 3998e^2} \cong 0,7326. \tag{2.30}$$

2.2 Formule de cuadratură corectate de tip deschis

În ultimii ani mulţi autori au considerat aşa numitele formule de cuadratură perturbate (corectate) (vezi [43], [44], [45], [71], [80], [130]). Prin formulă de cuadratură corectată înţelegem formula care conţine valorile primei derivate în extremităţile intervalului, nu numai valorile funcţiei în anumite puncte. Aceste formule au un grad de exactitate mai mare decât formulele originale. În general estimarea erorii în formule corectate este mai bună decât în formulele originale.

În [14] am derivat o formulă de cuadratură cu 2 noduri care este optimală în sens Nikolski.

Fie

$$\int_0^1 f(x)dx = A_1 f(a_1) + A_2 f(a_2) + \mathcal{R}_2^{[p]}[f], \tag{2.31}$$

o formulă de cuadratură cu gradul de exactitate 1. Vom calcula coeficienţii şi nodurile astfel încât formula de cuadratură să fie optimală, considerând că termenul rest este evaluat în sensul (2.8) în cazurile $p = 1, p = 2$ şi $p = \infty$.

Deoarece formula de cuadratură are gradul de exactitate 1, termenul rest verifică condiţiile $\mathcal{R}_2^{[p]}[e_i] = 0,\ e_i(x) = x^i,\ i = 0, 1,$ şi anume

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ A_1 a_1 + A_2 a_2 = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{2.32}$$

şi folosind teorema lui Peano, termenul rest are următoarea reprezentare integrală

$$\mathcal{R}_2^{[p]}[f] = \int_0^1 K_2(t) f''(t)dt, \text{ unde} \tag{2.33}$$

$$K_2(t) = \mathcal{R}_2^{[p]}[(x-t)_+] = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2, & 0 \le t < a_1, \\ \dfrac{(1-t)^2}{2} + A_2 t - a_2 A_2, & a_1 \le t \le a_2, \\ \dfrac{1}{2}(1-t)^2, & a_2 < t \le 1. \end{cases} \tag{2.34}$$

Teorema 2.2.1. *Pentru $f \in H^{2,\infty}[0,1]$, formula de cuadratură de forma (2.31), optimală în sens Nikolski, este*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{2}\right) + f\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\right)\right] + \mathcal{R}_2^{[\infty]}[f], \tag{2.35}$$

cu

$$\mathcal{R}_2^{[\infty]}[f] = \int_0^1 K_2(t) f''(t)dt, \tag{2.36}$$

unde

$$K_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, \ \ 0 \le t < \frac{2\sqrt{3}-3}{2}, \\ \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{5-2\sqrt{3}}{4}, \ \ \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \le t \le \frac{5-2\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{1}{2}(1-t)^2, \ \ \frac{5-2\sqrt{3}}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Observaţia 2.2.1. *Pentru termenul rest al formulei de cuadratură (2.35) pot fi stabilite următoarele estimări*

$$\left|\mathcal{R}_2^{[\infty]}[f]\right| \le \|f''\|_\infty \int_0^1 |K_2(t)|dt = \frac{7-4\sqrt{3}}{8}\|f''\|_\infty \approx 0.0089\|f''\|_\infty, \ f \in H^{2,\infty}[0,1],$$

$$\left|\mathcal{R}_2^{[\infty]}[f]\right| \le \left[\int_0^1 (K_2(t))^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \|f''\|_2 = \frac{\sqrt{2400\sqrt{3}-4155}}{120}\|f''\|_2 \approx 0.0156\|f''\|_2, \ f \in H^{2,2}[0,1],$$

$$\left|\mathcal{R}_2^{[\infty]}[f]\right| \le \sup_{t\in[0,1]} |K_2(t)| \cdot \|f''\|_1 = \frac{3(7-4\sqrt{3})}{8}\|f''\|_1 \approx 0.0269\|f''\|_1, \ f \in H^{2,1}[0,1].$$

Teorema 2.2.2. *Pentru $f \in H^{2,2}[0,1]$, formula de cuadratură de forma (2.31), optimală în sens Nikolski, este*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right) + f\left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}\right)\right] + \mathcal{R}_2^{[2]}[f], \tag{2.37}$$

cu

$$\mathcal{R}_2^{[2]}[f] = \int_0^1 K_2(t) f''(t)dt, \tag{2.38}$$

unde

$$K_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, \ \ 0 \le t < \frac{\sqrt{6}-2}{2}, \\ \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{4-\sqrt{6}}{4}, \ \ \frac{\sqrt{6}-2}{2} \le t \le \frac{4-\sqrt{6}}{2}, \\ \frac{1}{2}(1-t)^2, \ \ \frac{4-\sqrt{6}}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Observaţia 2.2.2. *Pentru termenul rest al formulei de cuadratură (2.37) pot fi stabilite următoarele estimări*

$$\left|\mathcal{R}_2^{[2]}[f]\right| \leq \left[\int_0^1 (K_2(t))^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \|f''\|_2 = \frac{(5-2\sqrt{6})\sqrt{5}}{20}\|f''\|_2 \approx 0.0113\|f''\|_2,\ f \in H^{2,2}[0,1],$$

$$\left|\mathcal{R}_2^{[2]}[f]\right| \leq \int_0^1 |K_2(t)|dt\|f''\|_\infty = \frac{(1+\sqrt{2})(9\sqrt{6}-22)}{12}\|f''\|_\infty \approx 0.0091\|f''\|_\infty,\ f \in H^{2,\infty}[0,1],$$

$$\left|\mathcal{R}_2^{[2]}[f]\right| \leq \sup_{t\in[0,1]} |K_2(t)| \cdot \|f''\|_1 = \frac{5-2\sqrt{6}}{4}\|f''\|_1 \approx 0.0252\|f''\|_1,\ f \in H^{2,1}[0,1].$$

Teorema 2.2.3. *Pentru $f \in H^{2,1}[0,1]$, formula de cuadratură de forma (2.31), optimală în sens Nikolski, este*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + f\left(\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)\right] + \mathcal{R}_2^{[1]}[f], \tag{2.39}$$

cu

$$\mathcal{R}_2^{[1]}[f] = \int_0^1 K_2(t)f''(t)dt, \tag{2.40}$$

unde

$$K_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2,\ 0 \leq t < \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \\ \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{3-\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}-1}{2} \leq t \leq \frac{3-\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{1}{2}(1-t)^2,\ \frac{3-\sqrt{2}}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Observaţia 2.2.3. *Pentru termenul rest al formulei de cuadratură (2.39) pot fi stabilite următoarele estimări*

$$\left|\mathcal{R}_2^{[1]}[f]\right| \leq \sup_{t\in[0,1]} |K_2(t)| \cdot \|f''\|_1 = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}\|f''\|_1 \approx 0.0214\|f''\|_1,\ f \in H^{2,1}[0,1].$$

$$\left|\mathcal{R}_2^{[1]}[f]\right| \leq \int_0^1 |K_2(t)|dt \cdot \|f''\|_\infty = \frac{32\sqrt{2}-45}{24}\|f''\|_\infty \approx 0.0106\|f''\|_\infty,\ f \in H^{2,\infty}[0,1],$$

$$\left|\mathcal{R}_2^{[1]}[f]\right| \leq \left[\int_0^1 (K_2(t))^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \|f''\|_2 = \frac{\sqrt{4245-3000\sqrt{2}}}{120}\|f''\|_2 \approx 0.0128\|f''\|_2,\ f \in H^{2,2}[0,1].$$

Am construit apoi formulele de cuadratură corectate ale formulelor de cuadratură optimale în sens Nikolski şi am arătat că estimările erorii sunt mai bune în formula corectată decât în formula originală.

Fie

$$\int_0^1 f(x)dx = A_1 f(a_1) + A_2 f(a_2) + A\left[f'(1) - f'(0)\right] + \tilde{\mathcal{R}}_2^{[p]}[f], \tag{2.41}$$

unde

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{[p]}[e_i] = 0,\ i = 0,1,\ \text{şi}\ A = \int_0^1 K_2(t)dt$$

formula de cuadratură corectată a formulei (2.31).

Deoarece termenul rest are gradul de exactitate 1 putem scrie

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{[p]}[f] = \int_0^1 \tilde{K}_2(t)f''(t)dt, \text{ unde} \tag{2.42}$$

$$\tilde{K}_2(t) = \tilde{\mathcal{R}}_2^{[p]}\left[(x-t)_+\right] = K_2(t) - A. \tag{2.43}$$

Din relaţia (2.43) observăm că $\int_0^1 \tilde{K}_2(t)dt = 0$. Dacă considerăm $f(x) = \frac{x^2}{2}$ în formula de cuadratură optimală (2.31), unde $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$, găsim

$$A = \frac{1}{2}a_1a_2 - \frac{1}{12}. \tag{2.44}$$

Folosind relaţiile (2.43) şi (2.44) construim următoarele formule de cuadratură corectate ale formulelor (2.35), (2.37), respectiv (2.39):

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{2}\right) + f\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\right)\right] + \frac{48\sqrt{3}-83}{24}[f'(1)-f'(0)] + \tilde{\mathcal{R}}_2^{[\infty]}[f], \tag{2.45}$$

unde

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{[\infty]}[f] = \int_0^1 \tilde{K}_2(t)f''(t)dt, \tag{2.46}$$

$$\tilde{K}_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{48\sqrt{3}-83}{24}, & 0 \le t < \frac{2\sqrt{3}-3}{2}, \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{65-36\sqrt{3}}{24}, & \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \le t \le \frac{5-2\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{1}{2}(1-t)^2 - \frac{48\sqrt{3}-83}{24}, & \frac{5-2\sqrt{3}}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\Big) + f\Big(\frac{4-\sqrt{6}}{2}\Big)\Big] + \frac{9\sqrt{6}-22}{12}[f'(1)-f'(0)] + \tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f], \tag{2.47}$$

unde

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f] = \int_0^1 \tilde{K}_2(t)f''(t)dt, \tag{2.48}$$

$$\tilde{K}_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{9\sqrt{6}-22}{12}, & 0 \le t < \frac{\sqrt{6}-2}{2}, \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{8-3\sqrt{3}}{6}, & \frac{\sqrt{6}-2}{2} \le t \le \frac{4-\sqrt{6}}{2}, \\ \frac{1}{2}(1-t)^2 - \frac{9\sqrt{6}-22}{12}, & \frac{4-\sqrt{6}}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

respectiv

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\Big)+f\Big(\frac{3-\sqrt{2}}{2}\Big)\Big] + \frac{12\sqrt{2}-17}{24}\,[f'(1)-f'(0)] + \tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f], \tag{2.49}$$

unde

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f] = \int_0^1 \tilde{K}_2(t) f''(t)dt, \tag{2.50}$$

$$\tilde{K}_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{12\sqrt{2}-17}{24}, & 0 \le t < \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{11-6\sqrt{2}}{24}, & \frac{\sqrt{2}-1}{2} \le t \le \frac{3-\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{1}{2}(1-t)^2 - \frac{12\sqrt{2}-17}{24}, & \frac{3-\sqrt{2}}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Observaţia 2.2.4. *Pentru termenul rest al formulei de cuadratură (2.45) pot fi stabilite următoarele estimări*

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[\infty]}[f]\right| \le \|f''\|_\infty \int_0^1 |K_2(t)|dt = \frac{1}{54}\Big[-62\sqrt{108\sqrt{3}-186} + 108\sqrt{36\sqrt{3}-62}$$

$$+144\sqrt{48\sqrt{3}-83} - 83\sqrt{144\sqrt{3}-249}\Big] \|f''\|_\infty \approx 0.0088\|f''\|_\infty,\ f \in H^{2,\infty}[0,1],$$

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[\infty]}[f]\right| \le \left[\int_0^1 (K_2(t))^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \|f''\|_2 = \frac{\sqrt{50400\sqrt{3}-87295}}{60}\|f''\|_2 \approx 0.006\|f''\|_2,\ f \in H^{2,2}[0,1],$$

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[\infty]}[f]\right| \le \sup_{t\in[0,1]} |K_2(t)| \cdot \|f''\|_1 = \frac{73-42\sqrt{3}}{12}\|f''\|_1 \approx 0.0211\|f''\|_1,\ f \in H^{2,1}[0,1].$$

Observaţia 2.2.5. *Pentru termenul rest al formulei de cuadratură (2.47) pot fi stabilite următoarele estimări*

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f]\right| \le \left[\int_0^1 (K_2(t))^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \|f''\|_2 = \frac{\sqrt{9000\sqrt{6}-22045}}{60}\|f''\|_2 \approx 0.0106\|f''\|_2,\ f \in H^{2,2}[0,1],$$

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f]\right| \le \int_0^1 |K_2(t)|dt\|f''\|_\infty = \frac{1}{54}\Big[-29\sqrt{36\sqrt{6}-87} + 36\sqrt{24\sqrt{6}-58}$$

$$+108\sqrt{9\sqrt{6}-22} - 44\sqrt{54\sqrt{6}-132}\Big] \|f''\|_\infty \approx 0.0084\|f''\|_\infty,\ f \in H^{2,\infty}[0,1],$$

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f]\right| \le \sup_{t\in[0,1]} |K_2(t)| \cdot \|f''\|_1 = \frac{37-15\sqrt{6}}{12}\|f''\|_1 \approx 0.0214\|f''\|_1,\ f \in H^{2,1}[0,1].$$

Observaţia 2.2.6. *Pentru termenul rest al formulei de cuadratură (2.49) pot fi stabilite următoarele estimări*

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f]\right| \leq \sup_{t\in[0,1]} |K_2(t)| \cdot \|f''\|_1 = \frac{13-9\sqrt{2}}{12}\|f''\|_1 \approx 0.0226\|f''\|_1,\ f \in H^{2,1}[0,1].$$

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f]\right| \leq \int_0^1 |K_2(t)|dt \cdot \|f''\|_\infty = \frac{2(3-2\sqrt{2})\sqrt{9\sqrt{2}-12}}{27}\|f''\|_\infty \approx 0.0108\|f''\|_\infty,\ f \in H^{2,\infty}[0,1],$$

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f]\right| \leq \left[\int_0^1 (K_2(t))^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \|f''\|_2 = \frac{\sqrt{1800\sqrt{2}-2545}}{60}\|f''\|_2 \approx 0.0097\|f''\|_2,\ f \in H^{2,2}[0,1].$$

Observaţia 2.2.7. *Estimările erorii în formulele corectate (2.45), respectiv (2.47) sunt mai bune decât în formulele originale (2.35), respectiv (2.37).*

Formulele de cuadratură corectate (2.45), (2.47) şi (2.49), au gradul de exactitate 3, care este mai mare decât formula originală, adică pentru $p \in \{\infty, 2, 1\}$, $\tilde{R}_2^{[p]}[e_i] = 0$ şi $\tilde{R}_2^{[p]}[e_4] \neq 0$, unde $e_i(x) = x^i,\ i = \overline{0,4}$. Folosind teorema lui Peano, termenul rest poate fi scris

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{[p]}[f] = \int_0^1 \overline{K}_2(t) f^{(4)}(t),\ \ \overline{K}_2(t) = \tilde{\mathcal{R}}_2^{[p]}\left[\frac{(x-t)_+^3}{3!}\right]. \tag{2.51}$$

În continuare, folosind relaţia (2.51), vom da noi estimări ale termenului rest în formulele de cuadratură (2.45), (2.47), respectiv (2.49).

Teorema 2.2.4. *Dacă $f \in C^4[0,1]$, atunci termenul rest al formulei de cuadratură (2.45) are reprezentarea integrală*

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{[\infty]}[f] = \int_0^1 \overline{K}_2(t) f^{(4)}(t)dt,\ \ \textit{unde}$$

$$\overline{K}_2^{[\infty]}(t) = \begin{cases} \frac{1}{24}t^2\left(t^2 - \frac{48\sqrt{3}-83}{2}\right), 0 \leq t \leq \frac{2\sqrt{3}-3}{2}, \\ \frac{1}{24}(1-t)^4 - \frac{1}{12}\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{2} - t\right)^3 - \frac{48\sqrt{3}-83}{48}(1-t)^2,\ \ \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \leq t \leq \frac{5-2\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{1}{24}(1-t)^2\left[(1-t)^2 - \frac{48\sqrt{3}-83}{2}\right],\ \ \frac{5-2\sqrt{3}}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

şi avem următoarele estimări

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[\infty]}[f]\right| &\le \sqrt{\int_0^1 \left(\overline{K}_2(t)\right)^2 dt}\sqrt{\int_0^1 [f^{(4)}(t)]^2\, dt}\\
&= \frac{\sqrt{2166615360\sqrt{3}-3752687855}}{40320}\|f^{(4)}\|_2 \approx 1.335\times 10^{-4}\|f^{(4)}\|_2,\\
\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[\infty]}[f]\right| &\le \int_0^1 \left|\overline{K}_2(t)\right| dt\cdot \sup_{t\in[0,1]} |f^{(4)}(t)|\\
&= -\frac{9}{4}\sqrt{3}+\frac{22447}{5760}+\sqrt{-62-\sqrt{8397-4848\sqrt{3}}+36\sqrt{3}}\\
&\times \left(-\frac{9727}{720}+\frac{39}{5}\sqrt{3}+\sqrt{8397-4848\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{20}-\frac{31}{360}\right)\right)\cdot\|f^{(4)}\|_\infty\\
&\approx 0.938\times 10^{-4}\cdot\|f^{(4)}\|_\infty,\\
\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[\infty]}[f]\right| &\le \sup_{t\in[0,1]}|\overline{K}_2(t)|\cdot\int_0^1 |f^{(4)}(t)|dt\\
&= \frac{384\sqrt{3}-665}{384}\cdot\|f^{(4)}\|_1 \approx 2.7997\times 10^{-4}\cdot\|f^{(4)}\|_1.
\end{aligned}$$

Teorema 2.2.5. *Dacă $f\in C^4[0,1]$, atunci termenul rest al formulei de cuadratură (2.47) are reprezentarea integrală*

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f] &= \int_0^1 \overline{K}_2(t)f^{(4)}(t)dt,\ \textit{unde}\\
\overline{K}_2(t) &= \begin{cases}
\frac{1}{24}t^2[t^2-(9\sqrt{6}-22)],\ 0\le t\le\frac{\sqrt{6}-2}{2},\\
\frac{1}{24}(1-t)^4-\frac{1}{12}\left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}-t\right)^3-\frac{9\sqrt{6}-22}{24}(1-t)^2,\ \ \frac{\sqrt{6}-2}{2}\le t\le\frac{4-\sqrt{6}}{2},\\
\frac{1}{24}(1-t)^2[(1-t)^2-(9\sqrt{6}-22)],\ \frac{4-\sqrt{6}}{2}<t\le 1.
\end{cases}
\end{aligned}$$

şi avem următoarele estimări

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f]\right| &\leq \sqrt{\int_0^1 \left(\overline{K}_2(t)\right)^2 dt}\sqrt{\int_0^1 \left(f^{(4)}(t)\right)^2 dt}\\
&= \frac{\sqrt{27305005-11147220\sqrt{6}}}{10080}\|f^{(4)}\|_2 \approx 1.972\times 10^{-4}\|f^{(4)}\|_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f]\right| &\leq \int_0^1 \left|\overline{K}_2(t)\right| dt\cdot \sup_{t\in[0,1]}|f^{(4)}(t)|\\
&= \frac{64(485-198\sqrt{6})\sqrt{9\sqrt{6}-22}+630\sqrt{6}-1543}{1440}\cdot\|f^{(4)}\|_\infty \approx 1.337\times 10^{-4}\cdot\|f^{(4)}\|_\infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f]\right| &\leq \sup_{t\in[0,1]}|\overline{K}_2^{[2]}(t)|\cdot\int_0^1 |f^{(4)}(t)|dt\\
&= \frac{96\sqrt{6}-235}{384}\cdot\|f^{(4)}\|_1 \approx 3.993\times 10^{-4}\cdot\|f^{(4)}\|_1.
\end{aligned}$$

Teorema 2.2.6. *Dacă $f\in C^4[0,1]$, atunci termenul rest al formulei de cuadratură (2.49) are reprezentarea integrală*

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f] = \int_0^1 \overline{K}_2(t)f^{(4)}(t)dt, \text{ unde}$$

$$\overline{K}_2(t)=\begin{cases}
\frac{1}{24}t^2\Big(t^2-\frac{12\sqrt{2}-17}{2}\Big), 0\leq t\leq\frac{\sqrt{2}-1}{2},\\
\frac{1}{24}(1-t)^4-\frac{1}{12}\Big(\frac{3-\sqrt{2}}{2}-t\Big)^3-\frac{12\sqrt{2}-17}{48}(1-t)^2, \quad \frac{\sqrt{2}-1}{2}\leq t\leq\frac{3-\sqrt{2}}{2},\\
\frac{1}{24}(1-t)^2\Big[(1-t)^2-\frac{12\sqrt{2}-17}{2}\Big], \quad \frac{3-\sqrt{2}}{2}<t\leq 1,
\end{cases}$$

si avem următoarele estimări

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f]\right| &\leq \sqrt{\int_0^1 \left(\overline{K}_2(t)\right)^2 dt}\sqrt{\int_0^1 \left(f^{(4)}(t)\right)^2 dt}\\
&= \frac{\sqrt{30974545-21902160\sqrt{2}}}{40320}\|f^{(4)}\|_2 \approx 3.622\times 10^{-4}\|f^{(4)}\|_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f]\right| &\leq \int_0^1 \left|\overline{K}_2(t)\right| dt\cdot \sup_{t\in[0,1]}|f^{(4)}(t)|\\
&= \frac{600\sqrt{2}-847}{5760}\cdot\|f^{(4)}\|_\infty \approx 2.653\times 10^{-4}\cdot\|f^{(4)}\|_\infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f]\right| &\leq \sup_{t\in[0,1]}|\overline{K}_2(t)|\cdot\int_0^1 |f^{(4)}(t)|dt\\
&= \left(-\frac{15}{128}+\frac{\sqrt{2}}{12}\right)\cdot\|f^{(4)}\|_1 \approx 6.636\times 10^{-4}\cdot\|f^{(4)}\|_1.
\end{aligned}$$

2.3 Formule de cuadratură corectate de tip închis

În [129], N. Ujević şi L. Mijić construiesc o clasă de formule de cuadratură de tip închis cu 3 noduri. Fie

$$K_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta;t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(t-\alpha)(t-\beta),\ t\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right],\\[2ex] \dfrac{1}{2}(t-\gamma)(t-\delta),\ t\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right],\end{cases}$$

o funcţie care depinde de parametrii $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.
Integrând prin părţi integrala $\displaystyle\int_a^b K_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta;t)f''(t)dt$, şi punând condiţii ca, coeficienţii primelor derivate să fie zero, N. Ujević şi L. Mijić au construit următoarea clasă de formule de cuadratură de tip închis

$$\int_a^b f(t)dt=A_0(\alpha,\beta,\gamma,\delta)f(a)+A_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+A_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)f(b)+\mathcal{R}[f],$$

unde

$$\mathcal{R}[f]=\int_a^b K_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)f''(t)dt.$$

Parametrii $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sunt obţinuţi punând condiţii ca termenul rest care este evaluat în sensul lui (2.10) să fie minim, şi anume $\displaystyle\int_a^b |K_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)|\,dt$ pentru a atinge valoarea minimă.

Principalul rezultat obţinut de N. Ujević şi L. Mijić, utilizând procedura descrisă, este formulat mai jos.

Teorema 2.3.1. *Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval deschis astfel încât $[0,1]\subset I$ şi fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie de două ori diferenţiabilă astfel încât f'' este mărginită şi integrabilă. Atunci avem*

$$\left|\int_0^1 f(t)dt-\frac{\sqrt{2}}{8}f(0)-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{8}f(1)\right|\leq\frac{2-\sqrt{2}}{48}\|f''\|_\infty. \tag{2.52}$$

Motivaţi de acest rezultat, în lucrarea [4] am derivat o formulă de cuadratură de tip închis cu 3 noduri care este optimală în sens Nikolski, şi anume, calculăm coeficienţii A_i, $i=\overline{0,2}$ şi nodul $a_1\in(a,b)$ astfel încât formula de cuadratură

$$\int_a^b f(t)dt=A_0f(a)+A_1f(a_1)+A_2f(b)+\mathcal{R}_2[f],$$

să fie optimală, considerând că termenul rest este evaluat în sensul (2.8) în cazurile $p=1$, $p=2$ şi $p=\infty$.

Pentru simplitate alegem $[a,b]=[0,1]$. Trecerea la intervalul $[a,b]$ se poate face utilizând Lema 2.1.1.

Fie

$$\int_0^1 f(x)dx = A_0 f(0) + A_1 f(a_1) + A_2 f(1) + \mathcal{R}_2[f] \tag{2.53}$$

o formulă de cuadratură cu gradul de exactitate egal 1.

Deoarece formula de cuadratură are gradul de exactitate 1, termenul rest verifică condiţiile $\mathcal{R}_2[e_i] = 0,\ e_i(x) = x^i,\ i = 0, 1$, şi anume

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 1 \\ \\ A_1 a_1 + A_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{2.54}$$

şi folosind teorema lui Peano termenul rest are următoarea reprezentare integrală

$$\mathcal{R}_2[f] = \int_0^1 K_2(t) f''(t)dt, \text{ unde} \tag{2.55}$$

$$K_2(t) = \mathcal{R}_2\left[(x-t)_+\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2 - A_0 t, & 0 \le t \le a_1, \\ \\ \dfrac{1}{2}(1-t)^2 - A_2(1-t), & a_1 < t \le 1. \end{cases} \tag{2.56}$$

Teorema 2.3.2. *Pentru $f \in H^{2,\infty}[0,1]$, formula de cuadratură de forma (2.53), optimală în sens Nikolski, este*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\sqrt{2}}{8} f(0) + \frac{4-\sqrt{2}}{4} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{8} f(1) + \mathcal{R}_2^{[1]}[f], \tag{2.57}$$

cu

$$\mathcal{R}_2^{[1]}[f] = \int_0^1 K_2^{[1]}(t) f''(t)dt,\ K_2^{[1]}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{8}t, & 0 \le t \le \dfrac{1}{2}, \\ \\ \dfrac{1}{2}(1-t)^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{8}(1-t), & \dfrac{1}{2} < t \le 1, \end{cases} \tag{2.58}$$

$$\left|\mathcal{R}_2^{[1]}[f]\right| \le \frac{2-\sqrt{2}}{48} \|f''\|_\infty \approx 0.0122 \|f''\|_\infty.$$

Observaţia 2.3.1. *Formula de cuadratură optimală (2.57) coincide cu formula de cuadratură (2.52)obţinută de N. Ujević şi L. Mijić în [129], dar această formulă de cuadratură a fost obţinută în mod diferit decât în [129]. Acest rezultat ne motivează să căutăm formule de cuadratură de tip (2.53) astfel încât estimarea erorii sale să fie cea mai bună posibilă în norma p pentru $p = 2$ şi $p = 1$.*

Observaţia 2.3.2. *Pentru termenul rest al formulei de cuadratură (2.57) pot fi stabilite următoarele două estimări*

$$\left|\mathcal{R}_2^{[1]}[f]\right| \le \left[\int_0^1 \left(K_2^{[1]}(t)\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \|f''\|_2 = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{22-15\sqrt{2}}{15}} \|f''\|_2 \approx 0.0143 \|f''\|_2,\ f \in H^{2,2}[0,1],$$

$$\left|\mathcal{R}_2^{[1]}[f]\right| \le \sup_{t\in[0,1]} |K_2^{[1]}(t)| \cdot \|f''\|_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{16} \|f''\|_1 \approx 0.0366 \|f''\|_1,\ f \in H^{2,1}[0,1].$$

Teorema 2.3.3. *Pentru $f \in H^{2,2}[0,1]$, formula de cuadratură de forma (2.53), optimală în sens Nikolski, este*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{16}f(0) + \frac{5}{8}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{16}f(1) + \mathcal{R}_2^{[2]}[f], \tag{2.59}$$

cu

$$\mathcal{R}_2^{[2]}[f]=\int_0^1 K_2^{[2]}(t)f''(t)dt, \quad K_2^{[2]}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2-\frac{3}{16}t, & 0\le t\le\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(1-t)^2-\frac{3}{16}(1-t), & \frac{1}{2}<t\le 1, \end{cases} \tag{2.60}$$

şi

$$\left|\mathcal{R}_2^{[2]}[f]\right| \le \frac{\sqrt{5}}{160}\|f''\|_2 \approx 0.0140\|f''\|_2.$$

Observaţia 2.3.3. *Pentru termenul rest al formulei de cuadratură (2.59) pot fi stabilite următoarele două estimări*

$$\left|\mathcal{R}_2^{[2]}[f]\right| \le \int_0^1 |K_2^{[2]}(t)|dt \cdot \|f''\|_\infty = \frac{19}{1536}\|f''\|_\infty \approx 0.0124\|f''\|_\infty, \ f \in H^{2,\infty}[0,1],$$

$$\left|\mathcal{R}_2^{[2]}[f]\right| \le \sup_{t\in[0,1]} |K_2^{[2]}(t)| \cdot \|f''\|_1 = \frac{1}{32}\|f''\|_1 \approx 0.0313\|f''\|_1, \ f \in H^{2,1}[0,1].$$

Teorema 2.3.4. *Pentru $f \in H^{2,1}[0,1]$, formula de cuadratură de forma (2.53), optimală în sens Nikolski, este*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\sqrt{2}-1}{2}f(0) + (2-\sqrt{2})f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}-1}{2}f(1) + \mathcal{R}_2^{[3]}[f], \tag{2.61}$$

cu

$$\mathcal{R}_2^{[3]}[f]=\int_0^1 K_2^{[3]}(t)f''(t)dt, \ K_2^{[3]}(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t^2-\frac{\sqrt{2}-1}{2}t, & 0 \le t\le\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(1-t)^2-\frac{\sqrt{2}-1}{2}(1-t), & \frac{1}{2}<t\le 1, \end{cases} \tag{2.62}$$

şi

$$\left|\mathcal{R}_2^{[3]}[f]\right| \le \frac{3-2\sqrt{2}}{8}\|f''\|_1 \approx 0.0214\|f''\|_1.$$

Observaţia 2.3.4. *Pentru termenul rest al formulei de cuadratură (2.61) poat fi stabilite următoarele două estimări*

$$\left|\mathcal{R}_2^{[3]}[f]\right| \le \int_0^1 |K_2^{[3]}(t)|dt \cdot \|f''\|_\infty = \frac{37\sqrt{2}-52}{24}\|f''\|_\infty \approx 0.0136\|f''\|_\infty, \ f \in H^{2,\infty}[0,1],$$

$$\left|\mathcal{R}_2^{[3]}[f]\right| \le \left[\int_0^1 \left(K_2^{[3]}(t)\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \|f''\|_2 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{78-55\sqrt{2}}{15}}\|f''\|_2 \approx 0.0151\|f''\|_2, \ f \in H^{2,2}[0,1].$$

Observaţia 2.3.5. *Dacă notăm prin* $C_p^{[i]}$ *constantele care apar în estimările de tipul*

$$\left|\mathcal{R}_2^{[i]}[f]\right| \leq C_p^{[i]} \left\|f''\right\|_p,$$

unde $i = 1, 2, 3$, $p = \infty, 2$, *respectiv 1, şi* $f \in H^{2,p}[0, 1]$, *din rezultatele de mai sus obţinem următoarele inegalităţi* $C_\infty^{[1]} \leq C_\infty^{[2]} \leq C_\infty^{[3]}$, $C_2^{[2]} \leq C_2^{[1]} \leq C_2^{[3]}$ *şi* $C_1^{[3]} \leq C_1^{[2]} \leq C_1^{[1]}$. *Prin urmare, putem afirma că rezultatele noastre sunt mai bune decât rezultatele lui Ujević şi Mijić, dacă considerăm norma* 2, *respectiv norma* 1.

În mod similar cu procedeul descris în paragraful anterior, am construit formulele corectate ale formulelor de cuadratură optimale obţinute mai sus. De asemenea am arătat că formula corectată îmbunătăţeşte formula originală. Menţinăm că formula corectată a lui (2.57) este considerată de N. Ujević şi L. Mijić în [129].

Fie

$$\int_0^1 f(x)dx = A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f(1) + A\left[f'(1) - f'(0)\right] + \tilde{\mathcal{R}}_2[f], \tag{2.63}$$

unde

$$\tilde{\mathcal{R}}_2[e_i] = 0,\ i = 0, 1,\ \text{şi}\ A = \int_0^1 K_2(t)dt$$

formula de cuadratură corectată a formulei (2.53).

Deoarece termenul rest are gradul de exactitate 1 putem scrie

$$\tilde{\mathcal{R}}_2[f] = \int_0^1 \tilde{K}_2(t) f''(t)dt,\ \text{unde} \tag{2.64}$$

$$\tilde{K}_2(t) = \tilde{\mathcal{R}}_2\left[(x - t)_+\right] = K_2(t) - A. \tag{2.65}$$

Din relaţia (2.65) observăm că $\int_0^1 \tilde{K}_2(t)dt = 0$. Dacă considerăm $f(x) = \frac{x^2}{2}$ în (2.63) obţinem

$$A = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2. \tag{2.66}$$

Folosind relaţiile (2.65) şi (2.66) construim formula de cuadratură corectată a lui (2.57), (2.59), respectiv(2.61):

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\sqrt{2}}{8} f(0) + \frac{4-\sqrt{2}}{4} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{8} f(1) + \frac{4-3\sqrt{2}}{96}\left[f'(1) - f'(0)\right] + \tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f], \tag{2.67}$$

unde

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f] = \int_0^1 \tilde{K}_2^{[1]}(t) f''(t)dt, \tag{2.68}$$

$$\tilde{K}_2^{[1]}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{\sqrt{2}}{8}t - \frac{4-3\sqrt{2}}{96}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1-t)^2 - \frac{\sqrt{2}}{8}(1-t) - \frac{4-3\sqrt{2}}{96}, & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{16}f(0) + \frac{5}{8}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{16}f(1) - \frac{1}{192}\left[f'(1) - f'(0)\right] + \tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f], \tag{2.69}$$

unde

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f] = \int_0^1 \tilde{K}_2^{[2]}(t) f''(t)dt, \tag{2.70}$$

$$\tilde{K}_2^{[2]}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{16}t + \frac{1}{192}, \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1-t)^2 - \frac{3}{16}(1-t) + \frac{1}{192}, \ \frac{1}{2} < t \le 1, \end{cases}$$

respectiv

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\sqrt{2}-1}{2}f(0) + (2-\sqrt{2})f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}-1}{2}f(1) \tag{2.71}$$

$$+\frac{4-3\sqrt{2}}{24}\left[f'(1) - f'(0)\right] + \tilde{\mathcal{R}}_2^{[3]}[f],$$

unde

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{[3]}[f] = \int_0^1 \tilde{K}_2^{[3]}(t) f''(t)dt, \tag{2.72}$$

$$\tilde{K}_2^{[3]}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{\sqrt{2}-1}{2}t - \frac{4-3\sqrt{2}}{24}, \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1-t)^2 - \frac{\sqrt{2}-1}{2}(1-t) - \frac{4-3\sqrt{2}}{24}, \ \frac{1}{2} < t \le 1, \end{cases}$$

Notând prin $\tilde{C}_p^{[i]}$ constanta care apare în estimările termenului rest ale formulelor de cuadratură corectate, şi anume

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[i]}[f]\right| \le \tilde{C}_p^{[i]} \left\|f''\right\|_p,$$

unde $i = 1, 2, 3$, $p = \infty, 2$, respectiv 1, şi $f \in H^{2,p}[0,1]$. Constantele $\tilde{C}_p^{[i]}$ pot fi calculate într-un mod asemănător cu constantele $C_p^{[i]}$ definite în Observaţia 2.3.5. Din tabelul de mai jos rezultă că pentru $p = \infty$ şi $p = 2$ formula corectată îmbunătăţeşte formula originală.

$\diagdown i$	1	2	3
$C_\infty^{[i]}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{48} \approx 0.0122$	$\frac{19}{1536} \approx 0.0124$	$\frac{37\sqrt{2}-52}{24} \approx 0.0136$
$\tilde{C}_\infty^{[i]}$	$\frac{5}{96}\sqrt{6} - \frac{29}{432}\sqrt{3} \approx 0.0113$	$\frac{19}{13824}\sqrt{57} \approx 0.0104$	$\frac{\sqrt{3(13-9\sqrt{2})^3}}{27} \approx 0.0091$
$C_2^{[i]}$	$\frac{1}{16}\sqrt{\frac{22-15\sqrt{2}}{15}} \approx 0.0143$	$\frac{\sqrt{5}}{160} \approx 0.0140$	$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{78-55\sqrt{2}}{15}} \approx 0.0151$
$\tilde{C}_2^{[i]}$	$\frac{1}{480}\sqrt{470-300\sqrt{2}} \approx 0.0141$	$\frac{\sqrt{155}}{960} \approx 0.0130$	$\left(\frac{1}{90} - \frac{1}{128}\sqrt{2}\right) \approx 0.0112$
$C_1^{[i]}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{16} \approx 0.0366$	$\frac{1}{32} \approx 0.0313$	$\frac{3-2\sqrt{2}}{8} \approx 0.0214$
$\tilde{C}_1^{[i]}$	$\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{32}\sqrt{2}\right) \approx 0.0391$	$\frac{7}{192} \approx 0.0365$	$\left(\frac{5}{24} - \frac{1}{8}\sqrt{2}\right) \approx 0.0316$

Teorema 2.3.5. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie absolut continuă astfel încât $f'' \in L[0,1]$ şi există un număr real $m[f], M[f]$ astfel încât $m[f] \le f''(t) \le M[f]$, $t \in [0,1]$. Atunci*

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f]\right| \le \frac{M[f]-m[f]}{2}\left(\frac{5\sqrt{6}}{96} - \frac{29\sqrt{3}}{432}\right) \approx 11306 \times 10^{-6} \cdot \frac{M[f]-m[f]}{2}, \tag{2.73}$$

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f]\right| \le \frac{M[f]-m[f]}{2} \cdot \frac{19\sqrt{57}}{13824} \approx 10377 \times 10^{-6} \cdot \frac{M[f]-m[f]}{2}, \tag{2.74}$$

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[3]}[f]\right| \le \frac{M[f]-m[f]}{2} \cdot \frac{\sqrt{3(13-9\sqrt{2})^3}}{27} \approx 9104 \times 10^{-6} \cdot \frac{M[f]-m[f]}{2}. \tag{2.75}$$

Dacă există un număr real $m[f]$ astfel încât $m[f] \le f''(t)$, $t \in [0,1]$, atunci

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f]\right| \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)(f'(1)-f'(0)-m[f]) \approx 39139 \times 10^{-6}\,(f'(1)-f'(0)-m[f]), \tag{2.76}$$

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f]\right| \le \frac{7}{192}\,(f'(1)-f'(0)-m[f]) \approx 36458 \times 10^{-6}\,(f'(1)-f'(0)-m[f]), \tag{2.77}$$

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[3]}[f]\right| \le \frac{5-3\sqrt{2}}{24} \cdot (f'(1)-f'(0)-m[f]) \approx 31557 \times 10^{-6}\,(f'(1)-f'(0)-m[f]). \tag{2.78}$$

Dacă există un număr real $M[f]$ astfel încât $f''(t) \le M[f]$, $t \in [0,1]$, atunci

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f]\right| \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)[M[f]-(f'(1)-f'(0))] \approx 39139 \times 10^{-6}[M[f]-(f'(1)-f'(0))],$$

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f]\right| \le \frac{7}{192}\,[M[f]-(f'(1)-f'(0))] \approx 36458 \times 10^{-6}\,[M[f]-(f'(1)-f'(0))],$$

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[3]}[f]\right| \le \frac{5-3\sqrt{2}}{24}\,[M[f]-(f'(1)-f'(0))] \approx 31557 \times 10^{-6}\,[M[f]-(f'(1)-f'(0))].$$

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţii integrabile pe $[a,b]$. Funcţionala

$$T(f,g) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt, \tag{2.79}$$

este bine cunoscută în literatură ca şi funcţionala lui Cebâşev. S-a demonstrat că $T(f,f) \ge 0$ şi $|T(f,g)| \le \sqrt{T(f,f)} \cdot \sqrt{T(g,g)}$. Notăm prin $\sigma(f,a,b) = \sqrt{T(f,f)}$.

Teorema 2.3.6. *Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie absolut continuă astfel încât $f''\in L_2[0,1]$. Atunci*

$$(2.80)\qquad \left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[1]}[f]\right|\le\sqrt{\frac{47}{23040}-\frac{\sqrt{2}}{768}}\cdot\sigma(f'';0,1)\approx 14089\times10^{-6}\sigma(f'';0,1),$$

$$(2.81)\qquad \left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[2]}[f]\right|\le\frac{\sqrt{155}}{960}\cdot\sigma(f'';0,1)\approx 12969\times10^{-6}\sigma(f'';0,1),$$

$$(2.82)\qquad \left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[3]}[f]\right|\le\frac{1}{120}\sqrt{320-225\sqrt{2}}\cdot\sigma(f'';0,1)\approx 11186\times10^{-6}\sigma(f'';0,1).$$

Observaţia 2.3.6. *Inegalităţile (2.80), (2.81) şi respectiv (2.82), sunt exacte, în sens că, constantele* $\sqrt{\frac{47}{23040}-\frac{\sqrt{2}}{768}}$, $\frac{\sqrt{155}}{960}$ *şi respectiv* $\frac{1}{120}\sqrt{320-225\sqrt{2}}$ *, nu pot fi înlocuite cu altele mai mici. Pentru a demonstra aceasta, definim funcţiile*

$$(2.83)\qquad F^{[i]}(x)=\int_0^x\left(\int_0^t K_2^{[i]}(u)du\right)dt,\quad i=1,2,3.$$

Pentru funcţia (2.83) partea dreaptă a inegalităţilor (2.80), (2.81) şi respectiv (2.82), sunt egale cu $T(K_2^{[i]},K_2^{[i]})$, $i=1,2,3$, *şi respectiv partea stângă devine*

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[i]}[f]\right|=\left|\int_0^1\tilde{K}_2^{[i]}(t)\cdot K_2^{[i]}(t)dt\right|=$$

$$\left|\int_0^1\left[K_2^{[i]}(t)-\int_0^1K_2^{[i]}(t)dt\right]K_2^{[i]}(t)dt\right|=T(K_2^{[i]},K_2^{[i]}),\ i=1,2,3.$$

Observaţia 2.3.7. *Notând prin Z_i, $i=1,2,3$, constantele care apar în unul din următoarele tipuri ale estimărilor obţinute în Teorema 2.3.5 şi Teorema 2.3.6, şi anume* $\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[i]}[f]\right|\le Z_i\cdot\frac{M[f]-m[f]}{2}$, $\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[i]}[f]\right|\le Z_i\cdot(f'(1)-f'(0)-m[f])$, $\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[i]}[f]\right|\le Z_i\cdot(M[f]-[f'(1)-f'(0)])$ *sau* $\left|\tilde{\mathcal{R}}_2^{[i]}[f]\right|\le Z_i\cdot\sigma(f'';0,1)$. *Deoarece pentru fiecare $i=1,2,3$ avem $Z_3\le Z_2\le Z_1$, pentru formulele de cuadratură corectate, rezultatele noastre sunt mai bune decât rezultatele lui Ujević şi Mijić obţinute în [129].*

Formulele de cuadratură corectate (2.67), (2.69), respectiv (2.71), au gradul de exactitate 3, care este mai mare decât formula originală, şi anume pentru $j=\overline{1,3}$, $\tilde{R}_2^{[j]}[e_i]=0$ şi $\tilde{R}_2^{[j]}[e_4]\neq0$, unde $e_i(x)=x^i$, $i=\overline{0,4}$. Folosind teorema lui Peano, termenul rest poate fi scris

$$(2.84)\qquad \mathcal{R}_4[f]=\int_0^1K_4(t)f^{(4)}(t),\quad K_4(t)=\mathcal{R}_4\left[\frac{(x-t)_+^3}{3!}\right],$$

unde prin $\mathcal{R}_4$ notăm noua reprezentare integrală a termenului rest a acestor formule de cuadratură.

În continuare, folosind relaţia (2.84), vom da noi estimări ale termenului rest în formulele de cuadratură (2.67), (2.69), şi respectiv (2.71).

Teorema 2.3.7. *Dacă $f \in C^4[0,1]$, atunci termenul rest al formulei de cuadratură (2.67) are reprezentarea integrală*

$$\mathcal{R}_4^{[1]}[f] = \int_0^1 K_4^{[1]}(t) f^{(4)}(t)dt, \text{ unde}$$

$$K_4^{[1]}(t) = \begin{cases} \frac{1}{24}t^2\left(t^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{4-3\sqrt{2}}{8}\right), \ 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \\ \frac{1}{24}(1-t)^2\left((1-t)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t) - \frac{4-3\sqrt{2}}{8}\right), \ \frac{1}{2} < t \le 1, \end{cases}$$

şi se obţin următoarele estimări

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{R}_4^{[1]}[f]\right| &\le \sqrt{\int_0^1 \left(K_4^{[1]}(t)\right)^2 dt}\sqrt{\int_0^1 \left(f^{(4)}(t)\right)^2 dt} \\ &= \frac{\sqrt{23170 - 15645\sqrt{2}}}{80640}\|f^{(4)}\|_2 \approx 4.008 \times 10^{-4}\|f^{(4)}\|_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{R}_4^{[1]}[f]\right| &\le \int_0^1 \left|K_4^{[1]}(t)\right| dt \cdot \sup_{t\in[0,1]} |f^{(4)}(t)| \\ &= \frac{200-171\sqrt{2}-(90-68\sqrt{2})\sqrt{5-3\sqrt{2}}+2(15-8\sqrt{2})\sqrt{43-30\sqrt{2}}}{11520}\cdot\|f^{(4)}\|_\infty \\ &\approx 2.946 \times 10^{-4} \cdot \|f^{(4)}\|_\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{R}_4^{[1]}[f]\right| &\le \sup_{t\in[0,1]} |K_4^{[1]}(t)| \cdot \int_0^1 |f^{(4)}(t)|dt \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{768} \cdot \|f^{(4)}\|_1 \approx 7.627 \times 10^{-4} \cdot \|f^{(4)}\|_1. \end{aligned}$$

Teorema 2.3.8. *Dacă $f \in C^4[0,1]$, atunci termenul rest al formulei de cuadratură (2.69)are reprezentarea integrală*

$$\mathcal{R}_4^{[2]}[f] = \int_0^1 K_4^{[2]}(t) f^{(4)}(t)dt, \text{ unde}$$

$$K_4^{[2]}(t) = \begin{cases} \frac{1}{24}t^2\left(t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{16}\right), \ 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \\ \frac{1}{24}(1-t)^2\left((1-t)^2 - \frac{3}{4}(1-t) + \frac{1}{16}\right), \ \frac{1}{2} < t \le 1, \end{cases}$$

şi se obţin următoarele estimări

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{R}_4^{[2]}[f]\right| &\le \sqrt{\int_0^1 \left(K_4^{[2]}(t)\right)^2 dt}\sqrt{\int_0^1 \left(f^{(4)}(t)\right)^2 dt} \\
&= \frac{\sqrt{2905}}{161280}\|f^{(4)}\|_2 \approx 3.342 \times 10^{-4}\|f^{(4)}\|_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{R}_4^{[2]}[f]\right| &\le \int_0^1 \left|K_4^{[2]}(t)\right| dt \cdot \sup_{t\in[0,1]} |f^{(4)}(t)| \\
&= \frac{125\sqrt{5}-103}{737280} \cdot \|f^{(4)}\|_\infty \approx 2.394 \times 10^{-4} \cdot \|f^{(4)}\|_\infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{R}_4^{[2]}[f]\right| &\le \sup_{t\in[0,1]} |K_4^{[2]}(t)| \cdot \int_0^1 |f^{(4)}(t)|dt \\
&= \frac{1}{1536} \cdot \|f^{(4)}\|_1 \approx 6.51 \times 10^{-4} \cdot \|f^{(4)}\|_1.
\end{aligned}$$

Teorema 2.3.9. *Dacă $f \in C^4[0,1]$, atunci termenul rest al formulei de cuadratură (2.71)are reprezentarea integrală*

$$\mathcal{R}_4^{[3]}[f] = \int_0^1 K_4^{[3]}(t) f^{(4)}(t)dt, \text{ unde}$$

$$K_4^{[3]}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{24}t^2\left(t^2 - 2(\sqrt{2}-1)t - \dfrac{4-3\sqrt{2}}{2}\right), \ 0 \le t \le \dfrac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{1}{24}(1-t)^2\left((1-t)^2 - 2(\sqrt{2}-1)(1-t) - \dfrac{4-3\sqrt{2}}{2}\right), \ \dfrac{1}{2} < t \le 1, \end{cases}$$

şi se obţin următoarele estimări

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{R}_4^{[3]}[f]\right| &\le \sqrt{\int_0^1 \left(K_4^{[3]}(t)\right)^2 dt}\sqrt{\int_0^1 \left(f^{(4)}(t)\right)^2 dt} \\
&= \frac{\sqrt{68530-48405\sqrt{2}}}{40320}\|f^{(4)}\|_2 \approx 2.148 \times 10^{-4}\|f^{(4)}\|_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{R}_4^{[3]}[f]\right| &\le \int_0^1 \left|K_4^{[3]}(t)\right| dt \cdot \sup_{t\in[0,1]} |f^{(4)}(t)| \\
&= \frac{78470-55487\sqrt{2}-32(550-389\sqrt{2})\sqrt{10-7\sqrt{2}}}{5760} \cdot \|f^{(4)}\|_\infty \\
&\approx 1.461 \times 10^{-4} \cdot \|f^{(4)}\|_\infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{R}_4^{[3]}[f]\right| &\le \sup_{t\in[0,1]} |K_4^{[3]}(t)| \cdot \int_0^1 |f^{(4)}(t)|dt \\
&= \frac{3-2\sqrt{2}}{384} \cdot \|f^{(4)}\|_1 \approx 4.468 \times 10^{-4} \cdot \|f^{(4)}\|_1.
\end{aligned}$$

Problema construirii formulelor de cuadratură se poate generaliza pentru mai mult de 3 noduri. De exemplu în lucrarea [121] au fost construite formule de cuadratură de tip deschis, optimale în sens Nikolski pentru m ($m \in N$) noduri. În [5] am tratat cazul formulelor de cuadratură de tip închis, optimale în sens Nikolski , construind formulele corectate ale acestora.

Vom calcula coeficienţii A_i, $i = \overline{0,m}$ şi nodurile a_i, $i = \overline{1,m-1}$ astfel încât următoarea formulă de cuadratură cu gradul de exactitate 1

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^{m} A_i f(a_i) + \mathcal{R}[f], \text{ unde } 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = 1, \tag{2.85}$$

să fie optimală, considerând că termenul rest este evaluat în sensul (2.10).

Teorema 2.3.10. *Pentru $f \in H^{2,\infty}[0,1]$ formula de cuadratură de forma (2.85), optimală în sens Nikolski are următoarele noduri şi coeficienţi*

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sqrt{3(2+\sqrt{2})}}{2}h,\ a_{m-1} = 1 - \frac{\sqrt{3(2+\sqrt{2})}}{2}h, \\ a_k &= 1 - \frac{4(m-k-1)+\sqrt{3(2+\sqrt{2})}}{2}h,\ k = \overline{2,m-2}, \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned} A_0 = A_m &= \frac{\sqrt{6(2+\sqrt{2})}}{8}h,\ A_k = 2h,\ k = \overline{2,m-2} \\ A_1 = A_{m-1} &= \frac{(4-\sqrt{2})\sqrt{3(2+\sqrt{2})}+8}{8}h,\ \textit{unde}\, h = \frac{1}{2(m-2)+\sqrt{3(2+\sqrt{2})}}. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Termenul rest are următoarea evaluare $|\mathcal{R}[f]| \leq \dfrac{h^2}{8}\|f''\|_\infty$.

În mod similar cu raţionamentul utilizat in secţiunile anterioare putem construi formula de cuadratură corectată a formulei (2.85) în felul următor

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^{m} A_i f(a_i) + A\left(f'(1) - f'(0)\right) + \tilde{\mathcal{R}}[f], \tag{2.88}$$

unde nodurile a_i, respectiv coeficienţii A_i, $i = \overline{0,m}$ sunt daţi în relaţiile (2.86), respectiv (2.87) şi

$$A = \int_0^1 K(t)dt = \int_0^1 \tilde{K}(u)du = \frac{h^3}{48}\left[4(m-2) + 3(1-\sqrt{2})\sqrt{3(2+\sqrt{2})}\right].$$

Observaţia 2.3.8. *Dacă considerăm în Teorema 2.3.10 cazul particular m=2 obţinem următoarea formulă de cuadratură optimală de tip închis cu 3 puncte*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\sqrt{2}}{8}f(0) + \frac{4-\sqrt{2}}{4}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{8}f(1) + \mathcal{R}[f], \tag{2.89}$$

şi formula de cuadratură corectată a acestei formule de cuadratură este dată de

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\sqrt{2}}{8}f(0) + \frac{4-\sqrt{2}}{4}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{8}f(1) + \frac{4-3\sqrt{2}}{96}\left[f'(1)-f'(0)\right] + \tilde{\mathcal{R}}[f]. \tag{2.90}$$

Formula de cuadratură optimală (2.89)şi formula corectată (2.90) au fost obţinute de N. Ujević şi L. Mijić în [129].

În continuare considerăm o versiune corectată a formulei de cuadratură optimale cu 4 noduri şi arătăm că această formulă are o mai bună aproximare decât formula originală.

Considerând $m = 3$ în Teorema 2.3.10 avem următoarea formulă de cuadrătură optimală

$$\int_0^1 f(x)dx = A_0 f(0) + A_1 f(a_1) + A_2 f(a_2) + A_3 f(1) + \mathcal{R}[f], \text{ unde} \tag{2.91}$$

$$A_0 = A_3 = \frac{\sqrt{6(2+\sqrt{2})}}{8}h, \; A_1 = A_2 = \frac{(4-\sqrt{2})\sqrt{3(2+\sqrt{2})}+8}{8}h,$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{3(2+\sqrt{2})}}{2}h, \; a_2 = 1 - a_1, \; h = \frac{1}{2+\sqrt{3(2+\sqrt{2})}}.$$

Termenul rest are următoarea reprezentare $\mathcal{R}[f] = \int_0^1 K(t)f''(t)dt$, unde

$$K(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - A_0 t, \; 0 \le t \le a_1, \\ \frac{1}{2}t^2 - (A_0 + A_1)t + A_1 a_1, \; a_1 \le t \le a_2, \\ \frac{1}{2}(1-t)^2 - A_3(1-t), \; a_2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Folosind (2.88) obţinem următoarea formulă de cuadratură corectată a formulei (2.91)

$$\int_0^1 f(x)dx = A_0 f(0) + A_1 f(a_1) + A_2 f(a_2) + A_3 f(1) + A\left(f'(1) - f'(0)\right) + \tilde{\mathcal{R}}[f], \tag{2.92}$$

unde $A = \frac{h^3}{48}\left[4 + 3(1-\sqrt{2})\sqrt{3(2+\sqrt{2})}\right]$ şi

$$\tilde{\mathcal{R}}[f] = \int_0^1 \tilde{K}(t)f''(t)dt, \text{ with } \tilde{K}(t) = K(t) - A.$$

Teorema 2.3.11. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie absolut continuă astfel încât $f'' \in L[0,1]$ şi există numerele reale $m[f], M[f]$ astfel încât $m[f] \le f''(t) \le M[f]$, $t \in [0,1]$. Atunci*

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}[f]\right| \le 0.00462291793614 \cdot \frac{M[f] - m[f]}{2}.$$

Teorema 2.3.12. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie absolut continuă astfel încât $f'' \in L[0,1]$. Dacă există un număr real $m[f]$ astfel încât $m[f] \leq f''(t)$, $t \in [0,1]$, atunci*

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}[f]\right| \leq \frac{1}{48}\frac{32 + (15 + 3\sqrt{2})\sqrt{6 + 3\sqrt{2}}}{(2 + \sqrt{6 + 3\sqrt{2}})^3} \cdot (f'(1) - f'(0) - m[f]).$$

Teorema 2.3.13. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie absolut continuă astfel încât $f'' \in L[0,1]$. Dacă există un număr real $M[f]$ astfel încât $f''(t) \leq M[f]$, $t \in [0,1]$, atunci*

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}[f]\right| \leq \frac{1}{48}\frac{32 + (15 + 3\sqrt{2})\sqrt{6 + 3\sqrt{2}}}{(2 + \sqrt{6 + 3\sqrt{2}})^3} \cdot (M[f] - f'(1) + f'(0)).$$

Teorema 2.3.14. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie absolut continuă astfel încât $f'' \in L_2[0,1]$. Atunci*

$$\left|\tilde{\mathcal{R}}[f]\right| \leq C \cdot \sigma(f''; 0, 1) \text{ unde} \tag{2.93}$$

$$C = \left(\frac{1}{11520} \cdot \frac{2374 + (12\sqrt{2} + 1080)\sqrt{6 + 3\sqrt{2}} + 783\sqrt{2}}{(2 + \sqrt{6 + 3\sqrt{2}})^6}\right)^{1/2}.$$

Inegalitatea (2.93) este exactă în sensul că, constanta C nu poate fi înlocuită cu una mai mică.

Observaţia 2.3.9. *Considerând că termenul rest al formulei originale, respectiv al formulei de cuadratură corectate este evaluată în sensul (2.8) cu $p \in \{1,2\}$ obţinem următoarele inegalităţi*

$$|\mathcal{R}[f]| \leq \|K\|_\infty \cdot \|f''\|_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(2 + \sqrt{6 + 3\sqrt{2}})^2} \cdot \|f''\|_1 \approx 0.01386614276036 \cdot \|f''\|_1,$$

$$\begin{aligned}\left|\tilde{\mathcal{R}}[f]\right| \leq \|\tilde{K}\|_\infty \cdot \|f''\|_1 &= \frac{1}{48} \cdot \frac{32 + (15 + 3\sqrt{2})\sqrt{6 + 3\sqrt{2}}}{(2 + \sqrt{6 + 3\sqrt{2}})^3} \cdot \|f''\|_1 \\ &\approx 0.01386273025465 \cdot \|f''\|_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}[f]| \leq \|K\|_2 \cdot \|f''\|_2 &= \left(-\frac{1}{1920} \cdot \frac{-92 + (9\sqrt{2} - 54)\sqrt{6 + 3\sqrt{2}}}{(2 + \sqrt{6 + 3\sqrt{2}})^5}\right)^{1/2} \cdot \|f''\|_2 \\ &\approx 0.00553941461773 \cdot \|f''\|_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\tilde{\mathcal{R}}[f]\right| \leq \|\tilde{K}\|_2 \cdot \|f''\|_2 &= \left(\frac{1}{11520} \cdot \frac{2374 + (12\sqrt{2} + 1080)\sqrt{6 + 3\sqrt{2}} + 783\sqrt{2}}{(2 + \sqrt{6 + 3\sqrt{2}})^6}\right)^{1/2} \cdot \|f''\|_2 \\ &\approx 0.00553941356661 \cdot \|f''\|_2.\end{aligned}$$

Putem observa că estimările termenului rest în formula corectată sunt mai bune decât în formula de cuadratură originală.

Capitolul 3

Evaluări ale restului în formule de integrare numerică utilizând inegalităţi de tip Ostrowski

În acest capitol sunt prezentate inegalităţile de tip Ostrowski, teoremele de medie folosite pentru obţinerea acestor inegalităţi şi aplicaţii în integrarea numerică, mai precis evaluări ale temenului rest în formulele de integrare numerică folosind inegalităţi de tip Ostrowski.

În a doua secţiune am dat o generalizare a teoremei de medie a lui D. Pompeiu ([106]). Utilizând această teoremă de medie am obţinut inegalităţi de tip Ostrowski în norma p, pentru $p = 2, \infty$ şi 1. În ultima parte a acestei secţiuni am considerat cazul ponderat al inegalităţii de tip Ostrowski. În a treia secţiune, în acelaşi mod cu raţionamentul folosit de S. S. Dragomir şi E. C. Popa în [69] şi [108], am dat noi estimări ale termenului rest în formula de cuadratură obţinută de E. C. Popa. Rezultatele sunt cuprinse în lucrarea [6].

3.1 Inegalităţi de tip Ostrowski

Următorul rezultat este cunoscut în literatură ca inegalitatea lui Ostrowski ([101]).

$$\left|\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(y)dy - f(x)\right| \leq \left(\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right)\cdot(b-a)\cdot\|f'\|_\infty\,, \tag{3.1}$$

unde $f \in C^1[a,b], x \in [a,b]$. Constanta $\dfrac{1}{4}$ este cea mai bună posibilă. Se poate remarca foarte uşor că

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right)\cdot(b-a) = \frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2\cdot(b-a)} \tag{3.2}$$

În ultimii ani inegalităţile lui Ostrowski au ocupat atenţia multor autori.

3.2 Teoreme de medie în obţinerea inegalităţilor de tip Ostrowski

În acest paragraf am prezentat câteva inegalităţi de tip Ostrowski obţinute utilizând teoreme de medie. În 1946, D. Pompeiu ([106]) obţine o variantă a teoremei de medie a lui Lagrange, folosită mai târziu de către S. S. Dragomir ([69]) în obţinea unei inegalităţi de tip Ostrowski.

Teorema 3.2.1. *Pentru orice funcţie cu valori reale f, diferenţiabilă pe un interval $[a, b]$ care nu conţine 0 şi pentru orice pereche $x_1 \neq x_2$ în $[a, b]$, există un punct ξ în (x_1, x_2) astfel încât*

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(\xi) - \xi f'(\xi). \tag{3.3}$$

Teorema 3.2.2. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ şi diferenţiabilă pe (a, b) cu $[a, b]$ care nu conţine 0. Atunci, pentru orice $x \in [a, b]$, avem inegalitatea*

$$\left| \frac{a+b}{2} \cdot \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{b-a}{|x|} \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 \right] \cdot \|f - lf'\|_\infty, \tag{3.4}$$

unde $l(t) = t$, $t \in [a, b]$.

În [108], E. C. Popa folosind o teoremă medie a obţinut o generalizare a rezultatului lui S. S. Dragomir.

Teorema 3.2.3. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ şi diferenţiabilă pe (a, b). Atunci, pentru orice $x \in [a, b]$ avem inegalitatea*

$$\left| \left[\frac{a+b}{2} - \alpha \right] f(x) + \frac{\alpha - x}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 \right] \cdot (b-a) \cdot \|f - lf'\|_\infty, \tag{3.5}$$

unde $\alpha \notin [a, b]$ şi $l(t) = t - \alpha$, $t \in [a, b]$.

De asemenea, în [105] J. Pečarić şi S. Ungar au demonstrat o estimare generală cu norma p, $1 \leq p \leq \infty$, care pentru $p = \infty$ dă rezultatul lui Dragomir .

Teorema 3.2.4. *Fie funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ şi diferenţiabilă pe (a, b) cu $0 < a < b$. Atunci pentru $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, cu $1 \leq p, q \leq \infty$, şi $x \in [a, b]$, avem următoarea inegalitate:*

$$\left| \frac{a+b}{2} \cdot \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq PU(x, p) \cdot \|f - lf'\|_p, \tag{3.6}$$

unde $l(t) = t$, $t \in [a, b]$, şi

$$\begin{aligned} PU(x,p) &= (b-a)^{\frac{1}{p}-1} \cdot \left[\left(\frac{a^{2-q} - x^{2-q}}{(1-2q)(2-q)} + \frac{x^{2-q} - a^{1+q}x^{1-2q}}{(1-2q)(1+q)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &+ \left. \left(\frac{b^{2-q} - x^{2-q}}{(1-2q)(2-q)} + \frac{x^{2-q} - b^{1+q}x^{1-2q}}{(1-2q)(1+q)} \right)^{\frac{1}{q}} \right]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

În cazurile $(p,q)=(1,\infty)$, $(\infty,1)$ şi $(2,2)$ constanta $PU(x,p)$ trebuie să fie luată ca limită $p\to 1,\infty$, respectiv 2.

În [6] am obţinut noi inegalităţi de tip Ostrowski folosind teoremele de medie, generalizând anumite rezultate a lui S. S. Dragomir, J. Pečarić, S. Ungar şi E. C. Popa (vezi [69], [105], [108]). Inegalităţile pentru norma p sunt de asemenea date şi cazul ponderat este luat în considerare.

Următorul rezultat este o generalizare a teoremei de medie a lui Pompeiu ([6]).

Teorema 3.2.5. *Pentru orice funcţie cu valori reale f, diferenţiabilă pe un interval $[a,b]$ care nu conţine 0 şi pentru orice $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1\neq x_2$, există un punct ξ în (x_1,x_2) astfel încât*

$$\frac{(x_1-\alpha)f(x_2)-(x_2-\alpha)f(x_1)}{x_1-x_2}=f(\xi)-(\xi-\alpha)f'(\xi), \tag{3.8}$$

unde $\alpha\notin[a,b]$.

Observaţia 3.2.1. *Dacă alegem $\alpha=0$ obţinem teorema de medie a lui Pompeiu*

Observaţia 3.2.2. *Din relaţia (3.8) obţinem*

$$|(x_1-\alpha)f(x_2)-(x_2-\alpha)f(x_1)|\leq\sup_{\xi\in[a,b]}|f(\xi)-(\xi-\alpha)f'(\xi)|\cdot|x_1-x_2|. \tag{3.9}$$

Integrând (3.9) în raport cu $x_1\in[a,b]$ obţinem inegalitatea lui Ostrowski (3.5) obţinută de E.C. Popa în [106].

În lucrarea [6] am obţinut inegalităţie de tip Ostrowski în norma p. Pentru început vom considera cazurile particulare $p=2,\infty$, respectiv 1.

Teorema 3.2.6. *Fie funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$ şi diferenţiabilă pe (a,b) cu $0<a<b$. Atunci pentru orice $x\in[a,b]$ avem următoarea inegalitate*

$$\left|(b-a)\left(\frac{a+b}{2}-\alpha\right)\frac{f(x)}{x-\alpha}-\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{(b-a)^{\frac12}}{3}\|f-lf'\|_2\cdot\left[\Phi(a,\alpha,x)^{\frac12}+\Phi(b,\alpha,x)^{\frac12}\right],$$

unde $\alpha\notin[a,b]$, $l(t)=t-\alpha$, $t\in[a,b]$ şi

$$\Phi(s,\alpha,x)=\ln\left(\frac{x-\alpha}{s-\alpha}\right)^3+\left(\frac{s-\alpha}{x-\alpha}\right)^3-1,\ s\in[a,b].$$

Teorema 3.2.7. *Fie funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$ şi diferenţiabilă pe (a,b) cu $0<a<b$. Atunci, pentru orice $x\in[a,b]$ avem următoarea inegalitate*

$$\left|(b-a)\left(\frac{a+b}{2}-\alpha\right)\frac{f(x)}{x-\alpha}-\int_a^b f(t)dt\right|\leq \begin{cases}\|f-lf'\|_\infty\cdot\Psi(a,b,\alpha,x),\ \textit{pentru}\ \alpha<a,\\ -\|f-lf'\|_\infty\cdot\Psi(a,b,\alpha,x),\ \textit{pentru}\ \alpha>b,\end{cases} \tag{3.10}$$

unde $\alpha\notin[a,b]$, $l(t)=t-\alpha$, $t\in[a,b]$ şi

$$\Psi(a,b,\alpha,x)=\frac{1}{2(x-\alpha)}\left[(b-x)^2+(x-a)^2\right].$$

Observaţia 3.2.3. *Inegalitatea (3.10) coincide cu inegalitatea de tip Ostrowski (3.5) obţinută de E. C. Popa în [108]. Demonstraţia inegalităţii (3.5) a fost făcută în mod diferit decât în [108].*

Teorema 3.2.8. *Fie funcţia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continuă pe* $[a, b]$ *şi diferenţiabilă pe* (a, b) *cu* $0 < a < b$. *Atunci, pentru orice* $x \in [a, b]$ *avem următoarea inegalitate*

$$\left|(b-a)\left(\frac{a+b}{2}-\alpha\right)\frac{f(x)}{x-\alpha}-\int_a^b f(t)dt\right| \le (b-a)\|f-lf'\|_1\Omega(a,b,\alpha,x), \tag{3.11}$$

unde $\alpha \notin [a, b]$, $l(t) = t - \alpha$, $t \in [a, b]$ *şi*

$$\Omega(a,b,\alpha,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a-\alpha} + \dfrac{b-\alpha}{(x-\alpha)^2}, & \text{pentru } \alpha < a, \\[2ex] \dfrac{\alpha-a}{(\alpha-x)^2} + \dfrac{1}{\alpha-b}, & \text{pentru } \alpha > b. \end{cases}$$

Teorema 3.2.9. *Fie funcţia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continuă pe* $[a, b]$ *şi diferenţiabilă pe* (a, b) *cu* $0 < a < b$. *Atunci pentru* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *cu* $1 < p, q < \infty$, $p, q \neq 2$ *şi oricare* $x \in [a, b]$ *avem următoarea inegalitate*

$$\left|(b-a)\left(\frac{a+b}{2}-\alpha\right)\frac{f(x)}{x-\alpha}-\int_a^b f(t)dt\right| \le \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} (b-a)^{\frac{1}{p}}\|f-lf'\|_p\left[\Theta(a,x,\alpha)^{\frac{1}{q}}+\Theta(b,x,\alpha)^{\frac{1}{q}}\right], & \text{pentru } \alpha < a, \\[2ex] -(b-a)^{\frac{1}{p}}\|f-lf'\|_p\left[\Theta(a,x,\alpha)^{\frac{1}{q}}+\Theta(b,x,\alpha)^{\frac{1}{q}}\right], & \text{pentru } \alpha > b, \end{cases}$$

unde $\alpha \notin [a, b]$, $l(t) = t - \alpha$, $t \in [a, b]$ *şi*

$$\Theta(s,x,\alpha) = \frac{1}{1-2q}\left\{\frac{(x-\alpha)^{2-q}}{q+1}+\frac{(x-\alpha)^{2-q}}{q-2}-\frac{(x-\alpha)^{1-2q}(s-\alpha)^{q+1}}{q+1}-\frac{(s-\alpha)^{2-q}}{q-2}\right\},\ s \in [a,b].$$

Teorema 3.2.10. *Fie funcţia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continuă pe* $[a, b]$ *şi diferenţiabilă* (a, b) *cu* $0 < a < b$, *şi fie* $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie nenegativă integrabilă . Atunci pentru* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *cu* $1 \le p, q \le \infty$, *şi pentru oricare* $x \in [a, b]$ *avem următoarea inegalitate*

$$\left|\frac{f(x)}{x-\alpha}\int_a^b (t-\alpha)w(t)dt - \int_a^b f(t)w(t)dt\right| \le (b-a)^{\frac{1}{p}}\|f-lf'\|_p\Lambda(a,b,\alpha,x), \tag{3.13}$$

unde $\alpha \notin [a, b]$, $l(t) = t - \alpha$, $t \in [a, b]$ *şi*

$$\Lambda(a,b,\alpha,x) = \left[\int_a^x\left(\int_t^x \frac{|t-\alpha|^q w(t)^q}{(u-\alpha)^{2q}}du\right)dt\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\int_x^b\left(\int_x^t \frac{|t-\alpha|^q w(t)^q}{(u-\alpha)^{2q}}du\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}.$$

3.3 Aplicaţii în integrarea numerică

În acest paragraf vom prezenta câteva aplicaţii ale inegalităţilor de tip Ostrowski în integrarea numerică.

Folosind ideea lui S. S. Dragomir din [69], E. C. Popa consideră în [108] diviziunea intervalului $[a, b]$ dată de

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

şi (ξ_i) un sistem de puncte intermediare $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$ şi $h_i = x_{i+1} - x_i$. Defineşte formula de cuadratura

$$\int_a^b f(t)dt = S_\Delta(f, \xi_i) + R_\Delta(f, \xi_i), \text{ unde}$$

$$S_\Delta(f, \xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(\xi_i)}{\xi_i - \alpha} \left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} - \alpha \right) h_i,$$

şi obţine următoarea estimare a termenului rest $\mathcal{R}_\Delta(f, \xi_i)$ ([108]):

Teorema 3.3.1. *Presupunem că $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$ şi diferenţiabilă pe (a, b). Atunci avem*

$$|R_\Delta(f, \xi_i)| \leq \frac{1}{2h} \|f + lf'\|_\infty \cdot \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2,$$

unde $h = \min\{|a - \alpha|, |b - \alpha|\}$ şi $l(t) = t - \alpha$, $t \in [a, b]$.

În [6], în acelaşi mod cu raţionamentul folosit în [69] şi [108] am dat noi estimări ale termenului rest $R_\Delta(f, \xi_i)$ în formula de cuadratură construită de E. C. Popa în [108]. :

Teorema 3.3.2. *Presupunem că $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$ şi diferenţiabilă pe (a, b). Atunci avem*

$$|\mathcal{R}_\Delta(f, \xi_i)| \leq \frac{2}{3} \mathbb{K}(a, b, \alpha) \cdot \|f - lf'\|_2 \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{\frac{1}{2}}, \tag{3.14}$$

unde $\mathbb{K}(a, b, \alpha) = \left[\ln \left(\frac{b - \alpha}{a - \alpha} \right)^3 + \left(\frac{b - \alpha}{a - \alpha} \right)^3 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$ *şi $l(t) = t - \alpha$, $t \in [a, b]$.*

Teorema 3.3.3. *Presupunem că $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$ şi diferenţiabilă pe (a, b). Atunci avem*

$$|\mathcal{R}_\Delta(f, \xi_i)| \leq \tilde{\Omega}(a, b, \alpha) \|f - lf'\|_1 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} h_i, \tag{3.15}$$

unde $l(t) = t - \alpha$, $t \in [a, b]$, şi $\tilde{\Omega}(a, b, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{a + b - 2\alpha}{(a - \alpha)^2}, & \text{pentru } \alpha < a, \\ \dfrac{2\alpha - a - b}{(\alpha - b)^2}, & \text{pentru } \alpha > b. \end{cases}$

Bibliografie

[1] A. M. Acu, *Optimal quadrature formulas in the sense of Nikolski* , General Mathematics, Vol.14, Nr.2 (2006), 109-119.

[2] A. M. Acu, *Some new quadrature rules of close type* , Advances in Applied Mathematical Analysis, India, Vol.1, Nr.2 (2006).

[3] A. M. Acu, **A. Baboş**, *An error analysis for a quadrature formula*, The 14th International Conference The Knowledge - Based Organization, Physics, Mathematics and Chemistry, Conference Proceedings 8, Sibiu, 2008, 290-298.

[4] A. M. Acu, **A. Baboş**, P. Blaga, *Some corrected optimal quadrature formulas*, Studia Univ. Babeş Bolyai, Vol. LVII, Nr.4, 2012 (va apare).

[5] A. M. Acu, **A. Baboş**, *Some optimal quadrature formulas and error bounds*, Appl. Math. Inf. Sci. Vol. 6 No. 3, 2012, 429-437(revistă ISI).

[6] A. M. Acu, **A. Baboş**, F. Sofonea, *The mean value theorems and inequalities of Ostrowski type*, Scientific Studies and Research, Series Mathematics and Informatics, Vol. 21, No.1, 2011, 1-11.

[7] D. Acu, *The use of quadrature formulae in obtaining inequalities*, Studia Univ. Babeş - Bolyai, Mathematica, XXXV, 1990, 25 - 33.

[8] D. Acu, *New inequalities obtained by means of the quadrature formulae*, General Mathematics, Vol. 10, No.3-4, 2002, 63-68.

[9] R. Agarval, P. J. Y. Wong, *Error Inequalities in Polynomial Interpolation and their Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[10] G. M. Anastassiou, *Ostrowski Type Inequalities*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.123, No. 12(Dec.,1995), 3775-3781.

[11] **A. Baboş**, *Some interpolation operators on triangle*, The 16th International Conference The Knowledge - Based Organization, Applied Technical Sciences and Advanced Military Technologies, Conference Proceedings 3, Sibiu, 2010,28-34(indexată ISI).

[12] **A. Baboş**, *Some interpolation schemes on a triangle with one curved side*, General Mathematics (acceptat pentru publicare).

[13] **A. Baboş**, A. M. Acu, *Some corrected optimal quadrature formulas in sense Nikolski and error bounds*, General Mathematics, Vol.20, No.5, 2012, Special Issue, 3-11 (va apare).

[14] **A. Baboş**, A. M. Acu, *About the corrected optimal quadrature formulas in sense Nikolski* (trimisă spre publicare).

[15] R. E. Barnhil, G. Birkhoff, W. J. Gordon, *Smooth interpolation in triangle*, J. Approx. Theory, 8, 1973, 114-128.

[16] R. E. Barnhil, J. A. Gregory, *Polynomial interpolation to boundary data on triangles*, Math. Comput., 29, 1975, 726-735.

[17] R. E. Barnhil, J. A. Gregory, *Compatible smooth interpolation in triangles*, J. Approx. Theory, 15, 1975, 214-225.

[18] R. E. Barnhil, L. Mansfield, *Error bounds for smooth interpolation in triangles*, J. Approx. Theory, 11, 1974, 306-308.

[19] R. E. Barnhil, L. Mansfield, *Sard kernel theorems on triangular and rectangular domains with extensions and applications to finite element error*, Technical Report 11, Departament of Mathematics, Brunel Univ, 1972.

[20] P. Blaga, *Quadrature formuals of product type with a high degree of exactness*, Studia Univ. Babeş Bolyai, Mathematica, 24, 2, 1979, 64-71.

[21] P. Blaga, *Optimal quadrature formula of intreval type*, Studia Univ. Babeş Bolyai, Mathematica, 28, 1983, 22-26.

[22] P. Blaga, *On bivariate linear approximation*, University of Cluj-Napoca, Faculty of Mathematics, Preprint No 4, 1985,3-22.

[23] P. Blaga, *A class of multiple nonproduct quadrature formulas*, Analysis, Functional Equations, Approximation and Convexity, Carpatica, Cluj-Napoca, 1999, 33-39.

[24] P. Blaga, *A general class of nonproduct quadrature formulas*, Studia Univ. Babeş Bolyai, Informatica, 44, 1999, 23-36.

[25] P. Blaga, *A new class of multiple nonproduct quadrature formulas*, Research Seminars. Seminar of Numerical ans Statistical Calculus, Babeş Bolyai University, Cluj-Napoca, 1999, 23-32.

[26] P. Blaga, Gh. Coman, *Interpolation formulas of Birkhoff type for functions of two variables*, Itinerant Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, 1980, 15-20.

[27] P. Blaga, Gh. Coman, *Some problems on optimal quadrature*, Studia Univ. Babeş Bolyai,Mathematica, 52, 4, 2007, 21-44.

[28] P. Blaga, Gh. Coman, *Multivariate interpolation formulas of Birkhoff type*, Studia Univ. Babeş Bolyai,XXVI, 2, 1981, 14-22.

[29] K. Böhmer, Gh. Coman, *Blending interpolation schemes in triangles with error bounds*, Lectures Notes in Mathematics, 571, 1977, 14-37.

[30] K. Böhmer, Gh. Coman, *Smooth interpolation schemes in triangles with error bounds*, Mathematica-Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation, 22(45), 1980, 231-235.

[31] K. Böhmer, Gh. Coman, *On some approximation schemes on triangle*, Mathematica-Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation, 18(41), 1976, 15-27.

[32] B. Bojanov, Y. Xu, *On a Hermite interpolation by polynomials of two variables*, Siam J. Numer. Anal. 39, 5, 2001, 1780-1793.

[33] B. Bojanov,Y. Xu, *On polynomial interpolation of two varibles*, J. Approx. Theory, 120, 2003, 267-282.

[34] C. Boor, *Computational aspects of multivariate polynomial interpolation: indexing the coefficients. Multivariate polynomial interpolation*, Adv. Comput. Math., 12, 4, 2000, 289-301.

[35] C. Boor, A. Ron, *On multivariate polynomial interpolation*, Constr. Approx. 6, 1990, 287-302.

[36] C. Boor, A. Ron, *Computational aspects of polynomial interpolation in several variables*, Math. Comp. 58,198, 1992, 705-727.

[37] C. Brezinski, *Historical Perspective on Interpolation, Approximation and Quadrature*, Handbook of Numerical Analysis, Vol.III, North-Holland, 1994.

[38] J. M. Carnicier, M. Gasca, *Bivariate Hermite-Birkhoff polynomial interpolation with asymptotic conditions*, J. Comput. Appl. Math. 119, 2000, 69-79.

[39] T. Cătinaş, *Interpolating of some nodes of a given triangle*, Studia Univ. Babeş Bolyai, Mathematica, 48, 4, 2003, 3-8.

[40] T. Cătinaş, Gh. Coman *Some interpolation operators on a simplex domain*, Studia Univ. Babeş Bolyai, LII, 3, 2007, 25-34.

[41] T. Cătinaş , Gh. Coman, *Optimal Quadrature Formulas Based on the φ-function Method*, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Mathematica, Volume LI, Number 1, 2006, 49-64.

[42] X. L. Cheng, *Improvement of some Ostrowski-Grüss'type inequalities*, Compu. Math. Appl. 42 (2001), 109-114

[43] P. Cerone, S. S. Dragomir, *Midpoint-type rules from an inequalities point of view*, Handbook of Analytic-Computational Methods in Applied Mathematics, Editor: G. Anastassiou, CRC Press, New York, (2000), 135–200.

[44] P. Cerone, S. S. Dragomir, *Trapezoidal-type rules from an inequalities Ppoint of view*, Handbook of Analytic-Computational Methods in Applied Mathematics, Editor: G. Anastassiou, CRC Press, New York, (2000), 65–134.

[45] P. Cerone, *Three point rules in numerical integration*, J. Non-linear Analysis, 47, (2001), 2341-2352.

[46] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, McGray-Hill Book Company, New York, 1996.

[47] E. W. Cheney, *Multivariate Approximation Theory*, Selected Topics, CBMS51, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1986.

[48] Gh. Coman, *Asupra unor formule optimale de cuadratură*, Studia Universitatis Babe's-Bolyai, Ser. Math.-Mech., 2 (1970), 39-54.

[49] Gh. Coman, *Formule de cuadratură de tip Sard*, Studia Univ. Babe's-Bolyai, Series Math.-Mech., Fasciculus 2, 1972, 73-77.

[50] Gh. Coman, *Monosplines and optimal quadrature formulae*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., Tome XVII, No.9, Bucharest, 1972, 1323-1327.

[51] Gh. Coman, *Monosplines and optimal quadrature formulae in L_p*, Rendiconti di Matematica (3), Vol. 5, Serie VI, 1972, 567-577.

[52] Gh. Coman, *Multivariate approximation schemes and the approximation of linear functionals*, Mathematica 15 (39), 1974, 229-249.

[53] Gh. Coman, *The approximation of multivariate functions*, Techincal Summary Report 1254, Mathematics Research Center, Univ.of Wisconsin, 1974.

[54] Gh. Coman, *Analiză numerică*, Ed. Libris, Cluj-Napoca, 1995.

[55] Gh. Coman, L. Ţâmbulea, *Bivariate Birkhoff interpolation of scattered data* Studia Univ. Babeş Bolyai, Mathematica 35, 2, 1991, 77-86.

[56] Gh. Coman, Gh. Micula, *Optimal cubature formulae*, Rendiconti di Matematica ser. 6,4, (2), 1971, 1-9.

[57] Gh. Coman, Gh. Micula, *Optimal cubature formulae*, Rendiconti di Matematica ser. 6,4, (2), 1971, 1-9.

[58] Gh. Coman, P. Blaga, *Interpolation operators with applications (1)*, Scientae Mathematicae Japonicae, 68, No.3(2008), 383-416.

[59] Gh. Coman, T. Cătinaş, *Interpolation operators on triangle with one curved side*, BIT Numer.Math., XLVIII, 2010, 57-62.

[60] Gh. Coman, I. Pop, *Some interpolation schemes on triangle*, Studia Univ. Babeş Bolyai, XLVIII, 3, 2003, 57-62.

[61] E. Constantinescu, *A quadrature formula for a linear positive functional*, Octogon, Vol.8, No.1, 2000, 29-33.

[62] I. Cuculescu, *Analiză numerică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1967.

[63] P. J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Blaisdell, New York, 1963.

[64] P. J. Davis, P. Rabinowitz, *Numerical Integration*, Blaisdell Waltham, Massachusetts, 1967.

[65] M. Dehghan, M. R. Eslahchi, M. Masjed-Jamei, *The first kind Chebyshev-Newton-Cotes quadrature rules (closed type) and its numerical improvement*, Applied Mathematics and Computation 168 (2005), 479-495.

[66] P. Dicu, *An intermediate point property in some of classical generalized formulas of quadrature*, General Mathematics, Vol. 12, No. 1, 2004, 61-70.

[67] S. S. Dragomir, *On the Ostrowski integral inequality for Lipschitzian mappings and applications*, Comput. Math. Appl., 38(1999), 33-37.

[68] S. S. Dragomir, *On the Ostrowski's integral inequality for mappings with bounded variation and applications*, Math. Inequal. Appl., Vol. 4, 1, 2001, 55-66.

[69] S. S. Dragomir, *An inequality of Ostrowski type via Pompeiu's mean value theorem*, J. Inequal. Pure and Appl.Math, 6(3), art.83, 2003.

[70] S. S. Dragomir, S. Wang, *Applications of Ostrowski's inequaliy to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules*, Appl.Math.Lett. Vol 11, No.1, 1998,105-109.

[71] S. S. Dragomir, R. P. Agarwal, P. Cerone, *On Simpson' s inequality and applications*, J. Inequal. Appl., 5 (2000), 533-579.

[72] S. S. Dragomir, S. Wang, *An Inequalitiy of Ostrowski-Grüss'type and its applications to the etimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules* Comput. Math. Appl., 33(11)(1997), 15-20.

[73] S. S. Dragomir, S. Wang, *A new inequality of Ostrowski's type in L_1-norm an applications to some special means and to some numerical quadrature rules* Tamkang J. of Math., 28 (1997),239-244.

[74] S. S. Dragomir, S. Wang, *A new inequality of Ostrowski's type in L_p-norm an applications to some special means and to some numerical quadrature rules*, Indian Journal of Mathematics,40(3), (1998), 299-304.

[75] S. S. Dragomir, S. Wang, *Applications of Ostrowski's inequality to the estimations of error bounds for some special means and some numerical quadrature rules* , Appl. Math.Lett, 11 (1998), 105-109.

[76] S. S. Dragomir, P. Cerone, J. Roumeliotis şi S. Wang, *A weighted version of Ostrowski inequality for mappings of Hölder type and applications in numerical analysis*, Bull. Math.Soc.Sc.Math.Roumanie, 42(90)(4) (1992), 301-304.

[77] S. S. Dragomir, T. M. Rassias, *Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[78] S. Elhay, *Optimal quadrature*, Bull. Austral. Math. Soc., 1, 1965, 81-108.

[79] H. Engels, *Numerical quadrature and cubature*, Academic Press, 1980.

[80] I. Franjić, J. Pečarić, *On corrected Bullen-Simpson' s 3/8 inequality*, Tamkang Journal of Mathematics, **37**(2), (2006), 135–148.

[81] M. Gasca, *Multivariate polynomial interpolation*, Computation of Curves and Surfaces, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C, Math. Phys. Sci, 307, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990, 215-236.

[82] M. Gasca, Th. Sauer, *On bivariate Hermite interpolation with minimal degree polynomials* , Siam J. Numer. Anal., 1999.

[83] M. Gasca, Th. Sauer, *On the history of multivariate polynomial interpolation*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 122, 2000, 23-35.

[84] M. Gasca, Th. Sauer *Multivariate polynomial interpolation*, Adv. Comput. Math. 12, 2000, 377-410.

[85] A. Ghizetti, A. Ossicini, *Quadrature Formulae*, Akad. Verlag Berlin, 1957.

[86] J. A. Gregory, *Interpolation to boundary data on the simplex*, Computer Aided Geometric Design, 2, 1985, 43-52.

[87] W. J. Gordon, *Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximaton*, SIAM J. Numer. Anal. 8, 1971, 158-177

[88] C. A. Hall, *Bicubic interpolation over triangles*, J. Math. Mech, 19, 1969, 1-11.

[89] B. L. Hulme, *A new bicubic interpolation over right triangle*, J.Approx.Theory, 5,1972, 66-73.

[90] D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957.

[91] F. Lanzara, On optimal quadrature formulae, J. of Inequal. & Appl., 2000, Vol. 5, 201-225.

[92] G. G. Lorentz, *Approximation of Functions*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., USA, 1996.

[93] G. G. Lorentz, *Multivariate Hermite interpolation by algebric polynomials: A survey*, J. Comp. Appl. Math. 122, 2000, 167-201.

[94] A. Lupaş, C. Manole, *Capitole de Analiză Numerică*, Colecţia Facultăţii de Ştiinţe, Seria Matematică 3, Sibiu 1994.

[95] L. E. Mansfield, *On the optimal approximation of linear functionals in spaces of bivariate functions*, SIAM J. Numer. Anal. 8, 1971, 115-126.

[96] G. Marinescu, *Analiză numerică*,Ed. Acad. RSR, Bucureşti, 1974.

[97] D. H. McLain, *Two dimensional interpolation from random data*, Comp. J. 19, 1976, 178-181.

[98] M. *Müler*, M. Felten, D. Mache, *Approximation Theory*, Mathematical Research, Vol.86, Akademie Verlag, 1995.

[99] G. M. Nielson, D. H. Thomas, D. H. Wixon, *Interpolation in triangles*, Bull. Austral. Math. Soc., 20, 1979, 115-130.

[100] S. M. Nikolski, *Formule de cuadratură*, Editura Tehnică, Bucuresti, 1964.

[101] A. Ostrowski, *Über die asolutabweichung einer differencienbaren functionen von ihren integral mittelwert*, Comment. Math. Hel, 10, 1938, 226–227.

[102] B. G. Pachpatte, *A note on Ostrowski like inequalities*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 6(2005), article 114.

[103] B. G. Pachpatte, *New Ostrowski type inequalities via mean value theorems*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 7(2006), article 137.

[104] C. E. M. Pearce, J. Pečarić, N. Ujević, S. Varošanec, *Generalizations of some inequalities of Ostrowski-Grüss type*, Math. Inequal. Appl., 3(1), (2000), 25-34.

[105] J. Pečarić, S. Ungar, *On an inequality of Ostrowski type*, JIPAM, Volume 7, Issue 4, Article 151, 2006.

[106] D. Pompeiu, *Sur une proposition analogue au théorème des accroissements finis*, Mathematica, 22 (1946), 143-146.

[107] E. C. Popa, *Asupra unei teoreme de medie*, Gaz. Mat., anul XCIV, nr 4, 1989, 113-114

[108] E. C. Popa, *An inequality of Ostrowski type via a mean value theorem*,General Mathematics Vol.15, No.1(2007), 93-100

[109] A. Sard, *Best approximate integration formulas; best approximate formulas*, Amer. J. Math, 71, 1949, 80-91.

[110] A. Sard, *Linear approximation*, AMS, 1963.

[111] T. Sauer, *Computational aspect of multivariate polynomial interpolation*, Adv. Comput. Math. 3, 1995, 219-237.

[112] T. Sauer, *Algebric aspects of polynomial interpolation in several variables*, Approximation Theory IX, Vol I, Innov. Appl.Math., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 1998, 287-294

[113] T. Sauer, Y. Xu, *On multivariate Lagrange interpolation*, Math. Comput. 64, 1995, 1147-1170.

[114] T. Sauer, Y. Xu, *On multivariate Hermite interpolation*, Adv. Comput. Math. 4, 1995, 207-259.

[115] D. D. Stancu, *O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înalt de exactitate*, Comunic. Acad. R. P. Rom. 8(1958), 349-358.

[116] D. D. Stancu, *Analiză numerică- Curs şi culegere de probleme*, Cluj-Napoca, 1977(litografiat).

[117] D. D. Stancu, *The remaider of certain linear approximation formulas in two variables*, J. SIAM Numer., Anal., ser. B, 1, 1964, 137-163.

[118] D. D. Stancu, *A new class of uniform approximating polynomial operators in two and several variables*, Proceed. of the Conferebce on Constructive Theory of Functions, Budapest, 1969, 31-45.

[119] D. D. Stancu, *Approximation properties of a class of linear positive operators*, Studia Univ. Babeş Bolyai, 15, 2, 1970, 33-38.

[120] D. D. Stancu, *Approximation of functions by means of some new classes of positive linear operators*, Proceed.Conf.Oberwolfach (1971),"Numerische Methoden der Approximation Theorie", Bd.1, ISNN 16, 1972, 187-203.

[121] D. D. Stancu, G. Coman, P. Blaga, *Analiză numerică şi Teoria aproximării*, Vol II, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2001.

[122] N. Ujević, *Inequalities of Ostrowski-Grüss type and applications*, Appl. Math., 29(4), (2002), 465-479.

[123] N. Ujević, *A generalization of Ostrowski's inequality and applications in numerical integration*, Appl. Math. Lett., 17(2), (2004), 133-137.

[124] N. Ujević, *New bounds for the first inequality of Ostrowski-Grüss type and applications*, Comput. Math. Appl., 46, (2003), 421-427.

[125] N. Ujević, *Error inequalities for a generalized quadrature Rule*, General Mathematics, Vol. 13, No.4(2005), 51-64.

[126] N. Ujević, *Error inequalities for a quadrature formula and applications*, Comput. Math. Appl., 48, 10-12 (2004), 1531-1540.

[127] N. Ujević, *An optimal quadrature formula of open type*, Yokohama Math. J. 50 (2003), 59-70.

[128] N. Ujević, *Inequalities of Ostrowski type and applications in numerical integration*, Applied Mathematics E-Notes, 3(2003), 71-79.

[129] N. Ujević, L. Mijić, *An optimal 3-point quadrature formula of closed type and error bounds*, Revista Colombiana de Matemáticas, **42**(2008), 209-220.

[130] N. Ujević, A. J. Roberts, *A corrected quadrature formula and applications*, ANZIAM J. 45 (2004), 41–56.