Ecuaţii Diferenţiale Ordinare şi Probleme de Contact: Modelare, Analiză şi Metode Numerice

Teză doctorat-Rezumat

Coordonatori Ştiinţifici
Profesor Dr. Octavian Agratini
Profesor Dr. Mircea Sofonea

Doctorand
Flavius-Olimpiu Pătrulescu

Cluj-Napoca
2012

Cuprins

Introducere

Cuvinte cheie: lege constitutivă elastică, proces quasistatic, lege constitutivă vîscoelastică, metodă numerică, problemă Cauchy, complianţă normală, metodă Runge-Kutta, termen memorie, metodă Steffensen, restricţie unilaterală, ordin de convergenţă, eroare locală de trunchiere, inegalitate variaţională, zero-stabilitate.

Materialul din această teză este structurat în două părţi. **Partea** I conţine capitolele 1–3 şi are legătură cu metodele numerice pentru probleme cu valori iniţiale pentru ecuaţii diferenţiale ordinare. În redactarea acestei părţi s-au folosit în mod special lucrările: [17], [23], [54], [36]. **Partea** II conţine capitolele 4–8 şi are legătură cu modelarea şi analiza problemelor de contact pentru materiale elastice sau vâscoelastice. În redactarea acestei părţi s-au folosit în mod special lucrările: [39], [89], [95].

Contribuţia originală în prima parte a tezei constă în analiza unor metode numerice pentru probleme Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi. Astfel,

în Capitolul 2 este studiată o combinaţie între o metodă de tip Steffensen şi metoda trapezului pentru aproximarea soluţiilor unei probleme cu valori iniţiale scalare pentru ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin întâi (Secţiunea 2.4). Sunt date condiţii astfel încât să se obţină aproximaţii bilaterale ale soluţiei (teoremele I.2.22– I.2.25). Aceste rezultate au fost publicate în [70].

în Capitolul 3 este folosită o formulă de interpolare pentru a introduce o clasă de metode numerice pentru aproximarea soluţiei unei probleme cu valori iniţiale scalare pentru ecuaţii diferenţiale ordinare. Aceste metode pot fi identificate ca metode Runge-Kutta explicite. Sunt determinate margini pentru eroarea locală de trunchiere, ordinele de convergenţă şi regiunile de absolut stabilitate şi sunt comparate cu cele pentru metode Runge-Kutta explicite care au ordinul de convergenţă egal cu numărul de stagii (Secţiunea 3.2, Secţiunea 3.3). Materialul din acest capitol a fost publicat în [71] şi [72].

Contribuţia originală în a doua parte a tezei constă în modelarea şi analiza unor probleme de contact noi. Astfel,

în Capitolul 6 este analizată o extindere a unui rezultat prezentat în [95], unde se consideră o problemă statică cu contact Signorini pentru materiale elastice neliniare. Originalitatea rezultatului constă în faptul că această condiţie Signorini este înlocuită cu o condiţie cu complianţă normală şi restricţie unilaterală. Este arătat că această nouă problemă conduce la o inegalitate variaţională eliptică pentru câmpul deplasare (Secţiunea 6.1). Este demonstrat un rezultat de existenţă şi unicitate pentru soluţia slabă a modelului (Teorema II.6.1) şi acest rezultat este obţinut şi folosind o metodă de penalizare (Teorema II.6.2). Pentru aceasta este considerată o problemă cu complianţă normală şi fără restricţii unilaterale (Secţiunea 6.3). Materialul din acest capitol va face obiectul articolului [8].

în Capitolul 7 este studiată o nouă problemă de contact quasistatic, fără frecare pentru materiale elastice neliniare. Noutatea constă în faptul că pentru componenta normală a contactului se foloseşte o condiţie cu complianţă normală şi termen memorie. Se determină o fomulare variaţională a problemei sub forma unei ecuaţii variaţionale dependentă de memorie pentru câmpul deplasare (Secţiunea 7.1). De asemenea, este demonstrată solvabilitatea slabă (Teorema II.7.1) şi dependenţa continuă de date a soluţiei (Teorema II.7.2). Aceste rezultate vor fi publicate în [74], iar rezultatele numerice au fost incluse în [11].

în Capitolul 8 este analizată o nouă problemă de contact. Comportamentul materialului este modelat folosind o lege constitutivă vâscoelastică cu memorie lungă şi contactul este modelat cu complianţă normală, termen memorie şi restricţie unilaterală. Se obţine o formulare variaţională a problemei sub forma unei inegalităţi variaţionale dependentă de memorie pentru câmpul deplasărilor care include doi termeni integrali de tip Volterra (Secţiunea 8.1). Se demonstrează solvabilitatea slabă (Teorema II.8.1) şi două rezultate de convergenţă. Primul rezultat arată dependenţa continuă de date a soluţiei (Teorema II.8.2), iar cel de-al doilea arată că soluţia slabă a problemei reprezintă limita soluţiei slabe a unei probleme cu complianţă normală şi termen memorie atunci când coeficientul de rigiditate al fundaţiei tinde la infinit (Teorema II.8.3). Materialul prezentat în acest capitol a fost publicat în [97].

Partea I

Metode numerice pentru ecuaţii diferenţiale ordinare

Capitolul 1

Preliminarii

1.1 Ecuaţii diferenţiale ordinare

În această secţiune sunt introduse noţiuni despre ecuaţiile diferenţiale ordinare. Pentru început este definită noţiunea de ecuaţie diferenţială de ordinul întâi şi în legătură cu aceasta este prezentată forma unei probleme cu valori iniţiale şi anume

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \quad x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval mărginit sau nemărginit, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ şi $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie dată. De asemenea, este analizat cazul ecuaţiilor autonome, i.e. $f = f(y)$, şi cazul ecuaţiilor de ordin superior. Secţiunea se încheie cu o scurtă descriere a cazului particular de ecuaţii diferenţiale liniare şi cu referinţe pentru alte cazuri particulare şi exemple clasice.

Noţiunile menţionate aici sunt standard şi pot fi găsite în lucrări ca: [3], [13], [38], [40], [62], [101].

1.2 Existenţa şi unicitatea soluţiei

În această secţiune sunt menţionate noţiuni ca *funcţie Lipschitz* sau funcţie *one-sided-Lipschitz*. Folosind aceste concepte sunt prezentate teoreme referitoare la existenţa şi unicitatea soluţiei problemei (1.1) (Teorema Cauchy-Peano, Teorema Cauchy-Lipschitz) sau dependenţa de date a soluţiei. Mai multe informaţii despre materialul prezentat în această secţiune pot fi găsite în lucrări ca: [12], [23], [38], [62], [81], [101].

Capitolul 2

Metode numerice pentru probleme Cauchy

2.1 Noţiuni introductive

În această secţiune este definită forma generală, folosită pe parcursul tezei, a unei metode numerice pentru aproximarea soluţiei unei probleme cu valori iniţiale pentru ecuaţii diferenţiale ordinare. În legătură cu aceasta sunt introduse noţiuni ca: zero-stabilitate, consistenţă, convergenţă, eroare locală de trunchiere, ordin de convergenţă, precum şi caracterizări ale acestora. De asemenea sunt prezentate condiţii necesare şi suficiente pentru ca o metodă să fie convergentă, i.e. să verifice condiţiile de zero-stabilitate şi consistenţă. În redactarea acestei părţi s-au folosit în special: [17], [36], [42] şi [54].

În partea a doua a secţiunii sunt introduse noţiuni legate de metodele numerice pentru aproximarea soluţiei unei ecuaţii algebrice neliniare. Astfel sunt prezentate metode ca: *metoda aproximaţiilor succesive*, *metoda Newton*, *metode de tip Steffensen*. În redactarea acestei părţi s-au folosit în special: [19], [25], [26].

2.2 Metode liniare multipas

În această secţiune este analizat un caz particular de metode numerice pentru problemele cu valori iniţiale şi anume *metodele liniare multipas*. Pentru aceste metode sunt studiate noţiuni ca ordin de convergenţă, polinom de stabilitate, regiune de absolut stabilitate. Mai mult, sunt enunţate *barierele lui Dahlquist*. În redactarea acestei secţiuni s-au folosit în special: [24], [54], [55].

2.3 Metode Runge-Kutta

În această secţiune este analizat un caz particular de metode numerice pentru problemele cu valori iniţiale şi anume *metodele Runke-Kutta*. Ca şi în secţiunea anterioară pentru aceste metode sunt studiate noţiuni ca ordin de convergenţă, funcţie de stabilitate, regiune de absolut stabilitate. În redactarea acestei secţiuni s-au folosit în special: [17], [54].

2.4 Aplicaţii ale metodei Steffensen pentru regula trapezului

În această secţiune este analizată o combinaţie între metoda trapezului şi o metodă de tip Steffensen pentru aproximarea soluţiei unei probleme cu valori iniţiale scalară şi autonomă. Se obţin condiţii pentru care această metodă generează aproximaţii bilaterale ale soluţiei.

2.5 Exemplu numeric

Capitolul se încheie cu simulări numerice care exemplifică rezultatele din secţiunea anterioară. Materialul prezentat în aceste ultime două secţiuni face obiectul articolului [70].

Capitolul 3

O clasă specială de metode Runge-Kutta

3.1 O formulă de aproximare

În această secţiune sunt prezentate noţiuni legate de o formulă de aproximare a funcţiilor analizată în [78]. Aceasta reprezintă o generalizare a unei formule de interpolare definită în [103] şi este folosită pe parcursul acestui capitol pentru a defini o clasă de metode numerice pentru problemele cu valori iniţiale scalare pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Pentru început este considerată o funcţie $h : I \to \mathbb{R}$ derivabilă de $(2q+1)$ ori, $q \in \mathbb{N}$, unde intervalul I este mărginit şi are forma $I = [x_0,\, x_0+T]$, $T > 0$. De asemenea, se defineşte clasa de funcţii G prin:

$$
\begin{aligned}
G = \{g : g(x) \quad &= \quad h(x_0) + (x - x_0)\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h'(x_0 + \beta_i(x - x_0)), \\
&\qquad \alpha_i,\, \beta_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1,\, q}, \quad x \in I\}.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Este considerată problema:
Să se determine funcţia $\overline{g} \in G$ astfel încât

$$
h^{(i)}(x_0) = \overline{g}^{(i)}(x_0), \quad i = \overline{1,\, m}, \tag{3.2}
$$

unde $m \in \mathbb{N}^*$.

Valorile luate de coeficienţii β_i sunt rădăcinile polinomului Legendre w_q de grad q, i.e. soluţiile ecuaţiei

$$
w_q(x) := \frac{q!}{(2q)!}\frac{d^q}{dx^q}[x^q(x-1)^q] = 0, \tag{3.3}
$$

iar coeficienţii α_i sunt definiţi prin

$$
\alpha_i = \frac{(q!)^4}{[(2q)!]^2 \beta_i (1 - \beta_i)[w_q'(\beta_i)]^2}, \quad i = \overline{1,\, q}. \tag{3.4}
$$

Este enunţată următoarea teoremă, demonstrată în [78], care arată că problema anterioară are o soluţie unică pentru $m = 2q$ şi stabileşte în acest caz forma coeficienţilor α_i şi β_i.

Teorema 3.1. *Dacă $h : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă de $(2q+1)$-ori pe I atunci există o funcţie unică $\overline{g} \in G$ care satisface condiţiile (3.2) pentru $m = 2q$. Mai mult, coeficienţii $\{\alpha_i\}_{i=1}^q$ sunt definiţi de formula (3.4) şi $\{\beta_i\}_{i=1}^q$ sunt rădăcinile ecuaţiei (3.3).*

Secţiunea se încheie cu estimarea

$$|r[h]| \leq \frac{M_{2q+1}}{(2q+1)!} \frac{2[(2q)!]^2 - [q!]^4}{[(2q)!]^2} |x - x_0|^{2q+1} \tag{3.5}$$

pentru restul dat de

$$h(x) = \overline{g}(x) + r[h], \tag{3.6}$$

unde

$$M_{2q+1} = \sup_{x \in I} |h^{(2q+1)}(x)|. \tag{3.7}$$

3.2 Cazul particular $q = 1$

Se foloseşte metoda anterioară pentru cazul $q = 1$ şi se obţin $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = 1$, iar funcţia $\overline{g}$ are forma

$$\overline{g}(x) = h(x_0) + (x - x_0)h'(x_0 + \tfrac{1}{2}(x - x_0)) \tag{3.8}$$

şi verifică:

$$h^{(i)}(x_0) = \overline{g}^{(i)}(x_0), \quad i = \overline{0, 2} \tag{3.9}$$

şi

$$|h(x) - \overline{g}(x)| \leq \tfrac{7}{24} M_3 |x - x_0|^3, \tag{3.10}$$

unde $M_3 = \sup_{x \in I} |h'''(x)|$.

Folosind (3.8) se obţine o clasă de metode numerice pentru probleme Cauchy scalare şi autonome de forma:

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(y_i + \tfrac{1}{2} h_i f(y_i + \tfrac{1}{2^2} h_i f(y_i + \ldots + \tfrac{1}{2^{p_0 - 1}} h_i f(y_i)) \ldots), \tag{3.11}$$

unde $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, N-1$ reprezintă lungimea pasului. Se arată că această metodă este convergentă şi că este echivalentă cu o clasă de metode Runge-Kutta. De asemenea, se determină ordinul de convergenţă, funcţia de stabilitate şi regiunea de absolut stabilitate. Materialul din această secţiune face obiectul articolului [71].

3.3 Cazul particular $q = 2$

Se foloseşte metoda anterioară pentru cazul $q = 2$ şi se obţin

$$\beta_1 = \tfrac{3-\sqrt{3}}{6},\ \beta_2 = \tfrac{3+\sqrt{3}}{6},\ \alpha_1 = \alpha_2 = \tfrac{1}{2}, \tag{3.12}$$

iar funcţia $\overline{g}$ are forma

$$\overline{g}(x) = h(x_0) + \tfrac{1}{2}\big[h'(x_0 + \tfrac{3-\sqrt{3}}{6}(x-x_0)) + h'(x_0 + \tfrac{3+\sqrt{3}}{6}(x-x_0))\big] \tag{3.13}$$

şi verifică:

$$h^{(i)}(x_0) = \overline{g}^{(i)}(x_0), \quad i = \overline{0,\, 4} \tag{3.14}$$

şi

$$|h(x) - \overline{g}(x)| \le \tfrac{71}{4320} M_5 |x - x_0|^5, \tag{3.15}$$

unde $M_5 = \sup\limits_{x \in I} |h^{(5)}(x)|$.

Folosind (3.8) şi pentru fiecare x_i, $i = \overline{1,\, N}$ notaţia

$$u^i_{qr} = y_i + \tfrac{1}{2}\beta_1^q \beta_2^r h_i [f(u^i_{q+1r}) + f(u^i_{qr+1})],$$

se obţine o clasă de metode numerice pentru probleme Cauchy scalare şi autonome de forma:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \tfrac{1}{2} h_i [f(u^i_{10}) + f(u^i_{01})], \\ u^i_{k-jj} &= y_i + \tfrac{1}{2}\beta_1^{k-j}\beta_2^j h_i [f(u^i_{k-j+1j}) + f(u^i_{k-jj+1})], \\ &\qquad j = \overline{0,\, k}, \quad k = \overline{1, p_0 - 1}, \\ u^i_{p_0-jj} &= y_i, \quad j = \overline{0,\, p_0}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

unde $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, N-1$ reprezintă lungimea pasului. Se arată că această metodă este convergentă şi că este echivalentă cu o clasă de metode Runge-Kutta. De asemenea, se determină ordinul de convergenţă, funcţia de stabilitate şi regiunea de absolut stabilitate pentru diverse cazuri particulare ale parametrului p_0.
Materialul din această secţiune face obiectul articolului [72].

3.4 Exemple numerice

Capitolul se încheie cu simulări numerice care exemplifică rezultatele din secţile anterioare.

Partea II

Modelarea şi analiza problemelor de contact

Capitolul 4

Preliminarii de analiză funcţională

Acest capitol conţine preliminarii şi rezultate de bază de analiză funcţională care sunt folosite în capitolele următoare.

4.1 Spaţii Banach şi spaţii Hilbert

În această secţiune sunt prezentate definiţii şi proprietăţi ale spaţiilor normate, incluzând rezultate pentru spaţii Banach şi Hilbert. Astfel este menţionată *Teorema lui Banach* pentru spaţii Banach, este definită noţiunea de proiecţie pe o mulţime convexă şi închisă şi sunt prezentate caracterizări ale acesteia. De asemenea, este amintită *Teorema lui Riesz.*

Secţiunea se încheie cu un caz particular al *Eberlein-Smulyan.* Materialul prezentat este standard şi poate fi găsit, de exemplu, în [5], [16].

4.2 Operatori monotoni

În această secţiune sunt introduse câteva rezultate despre operatori monotoni care vor fi utilizate în studiul inegalităţiilor variaţionale. Astfel sunt definite noţiunile de operatori *montoni, strict monotoni, monotoni tari, non-expansivi, Lipschitz continui, hemi-continui, continui, pseudo-monotoni.* De asemenea, este demonstrat un rezultat care arată că un operator monoton şi hemi-continuu este pseudo-monoton. În final este prezentat următorul rezultat de existenţă şi unicitate.

Teorema 4.1. *Fie X un spaţiu Hilbert şi fie $A : X \to X$ un operator monoton tare şi Lipschitz continuu. Atunci pentru fiecare $f \in X$ există un unic element $u \in X$ astfel încât $Au = f$.*

Ca şi referinţe pentru rezultate de existenţă, unicitate şi regularitate pentru ecuaţii neliniare cu operatori monotoni în spaţii Hilbert sunt date [14], [15].

4.3 Inegalităţi variaţionale eliptice

În această secţiune este determinată o extindere a rezultatului de existenţă şi unicitate din Teorema 4.1. Pentru început se consideră problema determinării unui element u astfel încât

$$u \in K, \quad (Au, v-u)_X \geq (f, v-u)_X \quad \forall\, v \in K, \tag{4.1}$$

unde X este un spaţiu Hilbert, $A : X \to X$ este un operator, $K \subset X$ şi $f \in X$. Este demonstrat următorul rezultat care asigură existenţa şi unicitatea soluţiei pentru *inegalitatea variaţională eliptică de primul tip* (4.1).

Teorema 4.2. *Fie X un spaţiu Hilbert şi fie $K \subset X$ o submulţime nevidă, convexă şi închisă. Dacă $A : K \to X$ este un operator monoton tare şi Lipschitz continuu atunci pentru fiecare $f \in X$ inegalitatea variaţională* (4.1) *are o soluţie unică.*

4.4 Inegalităţi variaţionale cu memorie

În această secţiune este extins rezultatul din Teorema 4.2 la o clasă specială de inegalităţi variaţionale dependente de timp. Este introdus conceptul de *inegalitate quasi-variaţională dependentă de memorie* pentru care este demonstrat un rezultat de existenţă şi unicitate. Ca şi în secţiunea anterioară se consideră problema determinării unei funcţii $u \in C([0,T]; X)$ astfel încât pentru orice $t \in [0,T]$ să aibă loc inegalitatea de mai jos

$$\begin{aligned} u(t) \in K, \quad & (Au(t), v - u(t))_X + (\mathcal{S}u(t), v - u(t))_X \\ & \geq (f(t), v - u(t))_X \qquad \forall\, v \in K, \end{aligned} \tag{4.2}$$

unde

$$K \text{ este o submulţime nevidă convexă închisă a lui } X \tag{4.3}$$

$A : X \to X$ este un operator monoton tare şi Lipschitz continuu, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Există } m > 0 \text{ cu proprietatea} \\ \qquad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m\, \|u_1 - u_2\|_X^2 \\ \qquad\qquad \forall\, u_1,\, u_2 \in X. \\ \text{(b) Există } M > 0 \text{ cu proprietatea} \\ \qquad \|Au_1 - Au_2\|_X \leq M\, \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall\, u_1,\, u_2 \in X. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

$\mathcal{S} : C([0,T]; X) \to C([0,T]; X)$ satisface

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Există } \ L_S > 0 \text{ cu proprietatea} \\ \quad \|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_X \leq L_S \displaystyle\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X \, ds \\ \qquad \forall\, u_1,\, u_2 \in C([0,T]; X),\ \forall\, t \in [0,T] \end{array} \right. \tag{4.5}$$

şi

$$f \in C([0,T];X). \tag{4.6}$$

Sunt demonstrate următoarele rezultate care asigură existenţa şi unicitatea soluţiei pentru inegalitatea quasi-variaţională dependentă de memorie (4.2).

Teorema 4.3. *Fie X un spaţiu Hilbert şi se presupune că au loc* (4.3)–(4.6). *Atunci* (4.2) *are o soluţie unică $u \in C([0,T];K)$.*

Corolar 4.4. *Fie X un spaţiu Hilbert şi se presupune că au loc* (4.4)-(4.6). *Atunci există o unică funcţie $u \in C([0,T];X)$ astfel încât*

$$(Au(t),v)_X + (\mathcal{S}u(t),v)_X = (f(t),v)_X \quad \forall\, v \in X, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{4.7}$$

Ca şi referinţe în ceea ce priveşte inegalităţile variaţionale sunt date [6], [48], [50], [58], [64], [68], [95].

Capitolul 5

Modelarea problemelor de contact

Acest capitol conţine material preliminar necesar pentru a introduce modelele matematice analizate în Capitolele 6–8

5.1 Spaţii de funcţii în mecanica de contact

În această secţiune se determină spaţiile de funcţii, cu proprietăţile lor de bază, în care sunt definite datele şi necunoscutele. Se notează cu $\mathbb{R}^d$ spaţiul liniar real d-dimensional şi cu $\mathbb{S}^d$ spaţiul tensorilor simetrici de ordin doi pe $\mathbb{R}^d$ sau, echivalent, spaţiul matricilor simetrice de ordin d. Produsele scalare şi normele corespunzătoare pe $\mathbb{R}^d$ şi $\mathbb{S}^d$ sunt definite prin

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_i v_i, \quad \|\boldsymbol{v}\| = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})^{1/2} \quad \forall\, \boldsymbol{u} = (u_i),\, \boldsymbol{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^d, \\ &\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij}\tau_{ij}, \quad \|\boldsymbol{\tau}\| = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{1/2} \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}),\, \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

De asemenea, se notează cu $\boldsymbol{I}_d$ operatorul identic pe $\mathbb{R}^d$ sau, echivalent, matricea unitate de ordin d şi cu $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$, $\mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}$ elementele nule din $\mathbb{R}^d$ şi $\mathbb{S}^d$.

Se consideră o mulţime $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ deschisă, conexă, mărginită a cărei frontieră Γ este Lipschitz continuă şi se descompune în trei părţi cu interioarele disjuncte $\bar{\Gamma}_1$, $\bar{\Gamma}_2$ şi $\bar{\Gamma}_3$ astfel încât meas$\,(\Gamma_1) > 0$.

Sunt introduse următoarele spaţii:

$C^m(\overline{\Omega})$ – spaţiul funcţiilor derivabile şi cu derivatele continue pe $\overline{\Omega}$ până la ordinul m inclusiv;

$C^\infty(\overline{\Omega})$ – spaţiul funcţiilor infinit diferenţiabile pe $\overline{\Omega}$;

$C_0^\infty(\Omega)$ – spaţiul funcţiilor infinit diferenţiabile cu suportul compact Ω;

$L^p(\Omega)$ – spaţiul Lebesgue al funcţiilor p-integrabile pe Ω, cu modificarea uzuală dacă $p = \infty$;

$L^p(\Gamma)$ – spaţiul Lebesgue al funcţiilor p-integrabile pe Γ, cu modificarea uzuală dacă $p = \infty$;

$L^p(\Gamma_2)$ – spaţiul Lebesgue al funcţiilor p-integrabile pe Γ_2, cu modificarea uzuală dacă $p = \infty$;

$L^p(\Gamma_3)$ – spaţiul Lebesgue al funcţiilor p-integrabile pe Γ_3, cu modificarea uzuală dacă $p = \infty$;

$L^1_{loc}(\Omega)$ – spaţiul funcţiilor local integrabile pe Ω;

$W^{m,p}(\Omega)$ – spaţiul Sobolev al funcţiilor ale căror derivate slabe până la ordinul m sunt p-integrabile pe Ω;

$H^m(\Omega) \equiv W^{m,2}(\Omega)$, pentru m întreg şi pozitiv.

De asemenea, dacă X reprezintă unul dintre spaţiile anterioare sunt folosite notaţiile X^d şi $X_s^{d\times d}$ pentru spaţiile

$$X^d = \left\{\ \boldsymbol{x} = (x_i)\ :\ x_i \in X,\ 1 \le i \le d\ \right\},$$
$$X_s^{d\times d} = \left\{\ \boldsymbol{x} = (x_{ij})\ :\ x_{ij} = x_{ji} \in X,\ 1 \le i,\, j \le d\ \right\}$$

şi în particular sunt folosite spaţiile

$$L^2(\Omega)^d = \left\{ \boldsymbol{v} = (v_i)\ :\ v_i \in L^2(\Omega),\ 1 \le i \le d \right\}, \tag{5.1}$$
$$Q = L^2(\Omega)_s^{d\times d} = \left\{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega),\ 1 \le i,\, j \le d \right\}. \tag{5.2}$$

Acestea sunt spaţii Hilbert cu produsele scalare

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)^d} = \int_\Omega u_i\, v_i\, dx = \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\, dx,$$
$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q = \int_\Omega \sigma_{ij}\, \tau_{ij}\, dx = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dx,$$

şi normele asociate notate cu $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)^d}$ şi $\|\cdot\|_Q$.

Este definit *operatorul de deformare* $\boldsymbol{\varepsilon} : H^1(\Omega)^d \to Q$ prin

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = (\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \tfrac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

cantitatea $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ reprezentând *tensorul deformare liniarizat* asociat deplasării $\boldsymbol{u}$.

Pe lângă aceste spaţii de funcţii sunt introduse şi spaţii de funcţii speciale pentru câmpul deplasărilor şi câmpul tensiunilor. Deplasările sunt căutate în spaţiul

$$H^1(\Omega)^d = \left\{ \boldsymbol{v} = (v_i) : v_i \in H^1(\Omega),\ 1 \le i \le d \right\}$$

sau în submulţimi sau subspaţii ale acestuia în funcţie de condiţiile pe frontieră. Spaţiul $H^1(\Omega)^d$ este un spaţiu Hilbert cu produsul scalar

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{H^1(\Omega)^d} = \int_\Omega (u_i v_i + u_{i,j} v_{i,j})\ dx,$$

şi norma corespunzătoare

$$\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega)^d} = \Big(\int_\Omega (v_i\, v_i + v_{i,j}\, v_{i,j})\ dx \Big)^{1/2}. \tag{5.3}$$

Pentru un element $\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^d$ se definesc *urma* pe frontiera Γ, $\gamma : H^1(\Omega)^d \to L^2(\Gamma)^d$, şi componentele *normală* şi *tangenţială*. Astfel,

$$v_\nu = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}. \tag{5.4}$$

Pentru studiul problemelor de contact din Capitolele 6–8 este utilizat în mod frecvent subspaţiul V al lui $H^1(\Omega)^d$ definit prin

$$V = \{\, \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^d : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1 \,\}, \tag{5.5}$$

condiţia ‘ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ a.p.t. pe Γ_1” fiind înţeleasă în sensul *urmei*, i.e. $\gamma \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ a.p.t. pe Γ_1. Pe V se defineşte produsul scalar $(\cdot\,,\cdot)_V$ prin

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q \tag{5.6}$$

şi norma indusă de acesta

$$\|\boldsymbol{v}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_Q. \tag{5.7}$$

Se arată că există o constantă pozitivă c_0 care depinde de Ω, Γ_1 şi Γ_3 astfel încât

$$\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \le c_0 \, \|\boldsymbol{v}\|_V \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V. \tag{5.8}$$

Pentru a defini un spaţiu de funcţii pentru câmpul tensiunilor este extinsă definiţia noţiunii de *divergenţă* pentru un câmp tensorial regular. Astfel este introdus în mod direct conceptul de *divergenţă slabă.*

Definiţia 5.1. *Fie $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ şi $\boldsymbol{w} = (w_i)$ astfel încât $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $w_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pentru orice $1 \le i, j \le d$. Atunci $\boldsymbol{w}$ se numeşte* divergenţă slabă *a lui $\boldsymbol{\sigma}$ dacă*

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \varphi_{i,j} \, dx = - \int_\Omega w_i \, \varphi_i \, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_i) \in C_0^\infty(\Omega)^d.$$

Se defineşte spaţiul

$$Q_1 = \{\, \boldsymbol{\tau} \in Q : \operatorname{Div} \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega)^d \,\}, \tag{5.9}$$

care este un spaţiu Hilbert cu produsul scalar

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{Q_1} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q + (\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}, \operatorname{Div} \boldsymbol{\tau})_{L^2(\Omega)^d}$$

şi norma asociată $\|\cdot\|_{Q_1}$.

Secţiunea se încheie cu definirea componentei normale şi tangenţiale pentru câmpul tensiune $\boldsymbol{\sigma}$ pe frontiera Γ

$$\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu} \tag{5.10}$$

şi cu enunţarea formulei lui Green

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \, dx + \int_\Omega \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v} \, dx = \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{v} \, da \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^d. \tag{5.11}$$

5.2 Geometria problemei şi legi constitutive

În această secţiune este descrisă configuraţia geometrică a modelului folosit pentru problemele din capitolele următoare. Se presupune că un corp deformabil ocupă, în configuraţia de referinţă, o mulţime conexă, deschisă şi mărginită $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ cu frontiera Γ compusă din trei părţi $\bar{\Gamma}_1$, $\bar{\Gamma}_2$ şi $\bar{\Gamma}_3$ cu interioarele disjuncte. Corpul este fixat pe Γ_1, forţe externe de suprafaţă cu densitatea $\boldsymbol{f}_2$ acţionează pe Γ_2 şi forţe interne cu densitatea $\boldsymbol{f}_0$ acţionează în Ω. În configuraţia de referinţă corpul este în contact pe Γ_3 cu un obstacol, numit *fundaţie*.

Sunt prezentate modele care descriu echilibrul mecanic al corpului, în cadrul deformărilor mici. Se vor folosi notaţiile $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$ şi $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ pentru vectorul deplasare, vectorul tensiune, respectiv vectorul deformare liniarizat. Acestea sunt funcţii care depind de variabila spaţială $\boldsymbol{x}$ şi eventual de variabila temporală t.

Este considerată legea constitutivă elastică

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \tag{5.12}$$

unde $\mathcal{F}$ este o funcţie neliniară dată. Se presupune că *operatorul de elasticitate* $\mathcal{F}$ verifică următoarele condiţii

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \\
\text{(b) Există } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ astfel încât} \\
\quad \|\mathcal{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\
\qquad \forall\, \boldsymbol{\varepsilon}_1,\, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ a. p. t. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \\
\text{(c) Există } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ astfel încât} \\
\quad (\mathcal{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{F}}\, \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\
\qquad \forall\, \boldsymbol{\varepsilon}_1,\, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ a. p. t. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \\
\text{(d) Aplicaţia } \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ este măsurabilă pe } \Omega, \\
\quad \text{pentru orice } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\
\text{(e) Aplicaţia } \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{F}(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ aparţine lui } Q.
\end{array}\right. \tag{5.13}$$

Sunt enumerate şi câteva cazuri particulare pentru legea (5.12) în cazul când $d = 3$.

Este considerată legea constitutivă vâscoelastică cu memorie lungă

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{R}(t - s,\, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)))\, ds, \tag{5.14}$$

unde operatorul de elasticitate $\mathcal{F}$ verifică (5.13), iar operatorul de relaxare $\mathcal{R}$ satisface condiţiile

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) } \mathcal{R}\colon \Omega \times [0, T] \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \\
\text{(b) } \mathcal{R}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{\varepsilon}) = (r_{ijkl}(\boldsymbol{x}, t)\varepsilon_{kl}) \text{ pentru orice } \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \\
\qquad t \in [0, T], \text{ a.p.t. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \\
\text{(c) } r_{ijkl} = r_{jikl} = r_{klij} \in C([0, T]; L^\infty(\Omega)), \\
\qquad 1 \leq i, j, k, l \leq d.
\end{array}\right. \tag{5.15}$$

Folosind (5.15) legea constitutivă (5.14) este scrisă sub forma

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))\,ds. \tag{5.16}$$

Ca şi referinţe pentru legile constitutive elastice şi vâscoelastice sunt date [21, 27, 28, 34, 39, 59, 80, 89, 93, 102].

5.3 Condiţii de contact

În ultima secţiune a capitolului sunt introduse condiţiile pe frontieră şi ecuaţia de echilibru. Se presupune că forţele interne şi forţele de tracţiune se modifică încet în timp astfel încât inerţia sistemului mecanic este neglijabilă. În aceste condiţii câmpul tensiune verifică ecuaţia de echilibru

$$\operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{0} \text{ în } \Omega. \tag{5.17}$$

Deoarece corpul este fixat pe Γ_1 se impune condiţia

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ pe } \Gamma_1. \tag{5.18}$$

Condiţia de tracţiune pe frontieră

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \boldsymbol{f}_2 \text{ pe } \Gamma_2 \tag{5.19}$$

defineşte vectorul tensiune $\boldsymbol{\sigma\nu}$ pe Γ_2.

La sfârşitul acestei secţiuni sunt prezentate o serie de condiţii de contact pe Γ_3 cum ar fi *condiţia Signorini*

$$u_\nu \le 0, \quad \sigma_\nu \le 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \tag{5.20}$$

sau *condiţia cu complianţă normală şi restricţie unilaterală*

$$\begin{cases} u_\nu \le g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \le 0, \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0. \end{cases} \tag{5.21}$$

În direcţia tangenţială se presupune că nu au loc frecări, adică

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{0}. \tag{5.22}$$

Ca şi referinţe pentru acestă secţiune sunt date [39], [49, 51, 52, 60], [89], [93], [95].

Capitolul 6

Analiza unei probleme de contact statică

În acest capitol este studiată o problemă de contact pentru materiale elastice neliniare fără frecare. Procesul este static şi se foloseşte o lege constitutivă de forma (5.12). Problema prezentată este o generalizare a unei probleme de contact din [95]. Diferenţa constă în faptul că în acest caz se foloseşte o condiţie de contact cu complianţă normală şi restricţie unilaterală de forma (5.21), spre deosbire de problema analizată în [95] unde se utilizează o condiţie de contact Signorini de forma (5.20).

6.1 Formularea problemei

Capitolul începe cu formularea clasică a problemei şi ipotezele asupra datelor.

Problema $\mathcal{P}$. *Să se determine câmpul deplasărilor* $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *şi câmpul tensiunilor* $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \to \mathbb{S}^d$ *astfel încât*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{6.1}$$

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{0} \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{6.2}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{pe} \quad \Gamma_1, \tag{6.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \boldsymbol{f}_2 \quad \text{pe} \quad \Gamma_2, \tag{6.4}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_\nu \le g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \le 0 \\ (\sigma_\nu + p(u_\nu))(u_\nu - g) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{0} \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \tag{6.6}$$

unde $\mathcal{F}$ verifică (5.13), forţele interne şi forţele de tracţiune pe frontieră satisfac

$$\boldsymbol{f}_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad \boldsymbol{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d \tag{6.7}$$

şi funcţia complianţă normală p are proprietăţile

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(a) } p:\Gamma_3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+.\\ \text{(b) Există } L_p>0 \text{ a. î.}\\ \qquad |p(\boldsymbol{x},r_1)-p(\boldsymbol{x},r_2)|\le L_p\,|r_1-r_2|\\ \qquad\quad \forall\, r_1,\, r_2\in\mathbb{R},\ \text{a.p.t. } \boldsymbol{x}\in\Gamma_3.\\ \text{(c) } (p(\boldsymbol{x},r_1)-p(\boldsymbol{x},r_2))(r_1-r_2)\ge 0\\ \qquad\quad \forall\, r_1,\, r_2\in\mathbb{R},\ \text{a.p.t. } \boldsymbol{x}\in\Gamma_3.\\ \text{(d) Aplicaţia } \boldsymbol{x}\mapsto p(\boldsymbol{x},r) \text{ este măsurabilă pe } \Gamma_3,\\ \qquad \text{pentru orice } r\in\mathbb{R}.\\ \text{(e) } p(\boldsymbol{x},r)=0 \text{ pentru orice } r\le 0,\ \text{a.p.t. } \boldsymbol{x}\in\Gamma_3.\end{array}\right. \tag{6.8}$$

Folosind formula lui Green (5.11), condiţiile pe frontieră (6.3)–(6.5) şi Teorema lui Riesz pentru a defini elementul $\boldsymbol{f}\in V$ prin

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})_V=\int_\Omega \boldsymbol{f}_0\cdot\boldsymbol{v}\,dx+\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{v}\,da\quad \forall\,\boldsymbol{v}\in V \tag{6.9}$$

şi operatorul $P:V\to V$ prin

$$(P\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_V=\int_{\Gamma_3} p(u_\nu)v_\nu da\quad \forall\,\boldsymbol{v}\in V \tag{6.10}$$

se obţine următoarea formă variaţională pentru Problema $\mathcal{P}$.
Problema $\mathcal{P}^V$. *Să se determine câmpul deplasărilor $\boldsymbol{u}\in U$ astfel încât*

$$(\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))_Q+(P\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_V\ge(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_V\quad\forall\,\boldsymbol{v}\in U. \tag{6.11}$$

Aceasta constă într-o inegalitate variaţională de primul tip pentru câmpul deplasărilor $\boldsymbol{u}\in U$, unde U reprezintă mulţimea deplasărilor admisibile definită prin

$$U=\{\,\boldsymbol{v}\in V:\ v_\nu\le g\ \ \text{a.p.t }\Gamma_3\,\}. \tag{6.12}$$

6.2 Existenţă şi unicitate

În această secţiune este demonstrat un rezultat de existenţă şi unicitate care arată solvabilitatea unică a inegalităţii (6.11).

Teorema 6.1. *Dacă au loc* (5.13), (6.7) *şi* (6.8) *atunci Problema $\mathcal{P}^V$ are o soluţie unică $\boldsymbol{u}\in U$.*

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe noţiuni legate de inegalităţile variaţionale eliptice. Înlocuind $\boldsymbol{u}\in U$, dat de (6.12), în (6.1) se obţine un element $\boldsymbol{\sigma}\in Q$ care verifică (6.2). Folosind ipoteza asupra forţelor interne, (6.7), se deduce că $\boldsymbol{\sigma}\in Q_1$. Perechea ($\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{\sigma}$) se numeşte *soluţie slabă* a problemei $\mathcal{P}$.

6.3 Penalizare

În această secţiune solvabilitatea slabă a problemei $\mathcal{P}$ este demonstrată folosind o metodă de penalizare pentru funcţia complianţă normală . Pentru început se consideră cazul omogen, i.e. se presupune că funcţia complianţă normală nu depinde de poziţia punctului $\boldsymbol{x} \in \Gamma_3$ şi în acest caz (6.8) devine

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \\ \text{(b) Există } L_p > 0 \text{ cu proprietatea} \\ \qquad |p(r_1) - p(r_2)| \le L_p |r_1 - r_2|, \quad \forall\, r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}, \\ \text{(c) } (p(r_1) - p(r_2))(r_1 - r_2) \ge 0, \quad \forall\, r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}, \\ \text{(d) } p(r) = 0 \ \text{ pentru orice } r < 0. \end{array}\right. \tag{6.13}$$

De asemenea, se definesc funcţia q cu proprietăţile

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) } q :\, [g, +\infty] \to \mathbb{R}_+, \\ \text{(b) Există } L_q > 0 \text{ cu proprietatea} \\ \qquad |q(r_1) - q(r_2)| \le L_q |r_1 - r_2|, \quad \forall\, r_1,\, r_2 \ge g, \\ \text{(c) } (q(r_1) - q(r_2))(r_1 - r_2) > 0, \quad \forall\, r_1,\, r_2 \ge g, \quad r_1 \ne r_2, \\ \text{(d) } q(g) = 0 \end{array}\right. \tag{6.14}$$

şi funcţia $p_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin

$$p_\mu(r) = \left\{\begin{array}{ccc} p(r) & \text{dacă} & r \le g, \\ \frac{1}{\mu}\, q(r) + p(g) & \text{dacă} & r > g, \end{array}\right. \tag{6.15}$$

pentru orice $\mu > 0$. Folosind (6.13) şi (6.14) se deduce că p_μ satisface

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) } p_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \\ \text{(b) Există } L_\mu > 0 \text{ cu proprietatea} \\ \qquad |p_\mu(r_1) - p_\mu(r_2)| \le L_\mu |r_1 - r_2| \quad \forall\, r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}, \\ \text{(c) } (p_\mu(r_1) - p_\mu(r_2))(r_1 - r_2) \ge 0 \quad \forall\, r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}, \\ \text{(d) } p_\mu(r) = 0 \ \text{ pentru orice } r < 0. \end{array}\right. \tag{6.16}$$

Ţinând cont de notaţiile anterioare se consideră următoarea problemă penalizată.

Problema $\mathcal{P}_\mu$. *Să se determine câmpul deplasărilor* $\boldsymbol{u}_\mu : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *şi câmpul tensiunilor* $\boldsymbol{\sigma}_\mu : \Omega \to \mathbb{S}^d$ *astfel încât*

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\mu) \qquad \text{în } \Omega, \tag{6.17}$$

$$\mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}_\mu + \boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{0} \qquad \text{în } \Omega, \tag{6.18}$$

$$\boldsymbol{u}_\mu = \boldsymbol{0} \qquad \text{pe } \Gamma_1, \tag{6.19}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_2 \qquad \text{pe } \Gamma_2, \tag{6.20}$$

$$-\sigma_{\mu\nu} = p_\mu(u_{\mu\nu}) \qquad \text{pe } \Gamma_3, \tag{6.21}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mu\tau} = \boldsymbol{0} \qquad \text{pe } \Gamma_3. \tag{6.22}$$

Diferenţa dintre problemele $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{P}_\mu$ constă în faptul că se înlocuieşte condiţia de contact cu complianţă normală şi restricţie unilaterală (6.5) cu condiţia de contact cu complianţă normală (6.21). În această condiţie μ reprezintă un parametru de penalizare care poate fi interpretat ca deformabilitatea fundaţiei, iar $\frac{1}{\mu}$ reprezintă coeficientul de rigiditate al suprafeţei.

Folosind aceleaşi argumente ca şi în cazul problemei $\mathcal{P}$ se obţine următoarea formă variaţională a problemei $\mathcal{P}_\mu$.

Problema $\mathcal{P}_\mu^V$. *Să se determine câmpul deplasărilor* $\boldsymbol{u}_\mu \in V$ *astfel încât*

$$(\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\mu), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q + (P_\mu \boldsymbol{u}_\mu, \boldsymbol{v})_V = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_V \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V. \tag{6.23}$$

Operatorul $P_\mu : V \to V$ este definit prin

$$(P_\mu \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = \int_{\Gamma_3} p_\mu(u_\nu) v_\nu \, da \quad \forall\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \in V. \tag{6.24}$$

Capitolul se încheie cu demonstrarea următorului rezultat de convergenţă tare.

Teorema 6.2. *Se presupune că au loc* (5.13), (6.7) *şi* (6.16). *Atunci*

1) *Pentru orice* $\mu > 0$ *există un unic element* $\boldsymbol{u}_\mu \in V$ *soluţie a problemei* $\mathcal{P}_\mu^V$.
2) *Există un unic element* $\boldsymbol{u} \in U$ *soluţie a problemei* $\mathcal{P}^V$.
3) *Are loc următorul rezultat de convergenţă tare*

$$\boldsymbol{u}_\mu \to \boldsymbol{u} \quad \text{în} \quad V \quad \text{pentru} \quad \mu \to 0. \tag{6.25}$$

Demonstraţia Teoremei 6.2 se efectuează în mai multe etape pe baza unor argumente similare folosite şi în [95] pentru problema cu contact Signorini. Contribuţia originală în această demonstraţie constă în a trata termenul nonliniar ce implică operatorul P, acest lucru conducând la noi dificultăţi matematice.

Rezultatul de convergenţă din Teorema 6.2 este extins la soluţia slabă corespunzătoare problemelor $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{P}_\mu$. Astfel, este arătat că:

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\mu - \boldsymbol{\sigma}\|_{Q_1} \to 0 \qquad \text{pentru} \quad \mu \to 0. \tag{6.26}$$

Pe lângă interesul matematic, rezultatele de convergenţă (6.25) şi (6.26) au şi un rol important din punct de vedere mecanic, deoarece se arată că soluţia slabă a problemei de contact elastic cu complianţă normală şi restricţie unilaterală poate fi aproximată oricât de bine cu soluţia problemei de contact elastic cu complianţă normală cu un coeficient de deformabilitate suficient de mic.

6.4 Soluţii numerice

În această secţiune este prezentată o analiză numerică a problemei $\mathcal{P}$.

6.5 Exemplu numeric

Capitolul se încheie cu un exemplu numeric care validează rezultatele descrise în metoda de penalizare.
Conţinutul acestui capitol va face obiectul articolului [8].

Capitolul 7

Analiza unei probleme de contact quasistatică

În acest capitol este studiată o problemă de contact quasistatic fără frecare pentru materiale elastice neliniare. În contrast cu problema din Capitolul 6 procesul este quasistatic şi contactul este modelat cu complianţă normală şi termen memorie.

7.1 Formularea problemei

În această secţiune este prezentată formularea clasică a problemei şi sunt definite ipotezele asupra datelor. Astfel, este considerată următoarea problemă.

Problema $\mathcal{Q}$. *Să se determine câmpul deplasărilor* $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ *şi câmpul tensiunilor* $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{S}^d$ *astfel încât pentru fiecare* $t \in [0, T]$, *au loc*

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{7.1}$$

$$\mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{7.2}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{pe} \quad \Gamma_1, \tag{7.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_2(t) \quad \text{pe} \quad \Gamma_2, \tag{7.4}$$

$$\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s)ds = 0 \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \tag{7.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \tag{7.6}$$

unde operatorul de elasticitate $\mathcal{F}$ satisface (5.13), forţele interne şi tracţiunile de suprafaţă au regularitatea

$$\boldsymbol{f}_0 \in C([0, T]; L^2(\Omega)^d), \quad \boldsymbol{f}_2 \in C([0, T]; L^2(\Gamma_2)^d), \tag{7.7}$$

funcţia complianţă normală p verifică (6.8) şi funcţia memorie b are proprietatea

$$b \in C([0, T]; L^\infty(\Gamma_3)). \tag{7.8}$$

Noutatea acestei probleme constă în folosirea condiţiei de contact (7.5) care arată că are loc un contact cu complianţă normală şi termen memorie. La momentul t, reacţia fundaţiei depinde atât de valoarea curentă a contactului (reprezentată de termenul $p(u_\nu(t))$) cât şi de cele anterioare (reprezentate de termenul integral).

Ca şi în Capitolul 6 este obţinută o formă variaţională a problemei $\mathcal{Q}$.

Problema $\mathcal{Q}^V$. *Să se determine câmpul deplasărilor $\boldsymbol{u} : [0,T] \to V$ astfel încât pentru orice $t \in [0,T]$ are loc egalitatea de mai jos*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}(t) \in V, \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q + (p(u_\nu(t)), v_\nu)_{L^2(\Gamma_3)} \\ &+\Big(\int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s)\,ds, v_\nu\Big)_{L^2(\Gamma_3)} \\ &= (\boldsymbol{f}_0(t), \boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)^d} + (\boldsymbol{f}_2(t), \boldsymbol{v})_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall \boldsymbol{v} \in V \end{aligned} \tag{7.9}$$

Această egalitate reprezintă o ecuaţie variaţională neliniară cu termen integral Volterra pentru câmpul deplasărilor.

7.2 Un rezultat de existenţă şi unicitate

În studiul problemei $\mathcal{Q}^V$ este prezentat următorul rezultat de existenţă şi unicitate.

Teorema 7.1. *Dacă au loc* (5.13), (6.8), (7.7) *şi* (7.8) *atunci Problema $\mathcal{Q}^V$ are o soluţie unică cu proprietatea $\boldsymbol{u} \in C([0,T];V)$.*

Teorema anterioară arată unicitatea solvabilităţii slabe a problemei $\mathcal{Q}$. Mai mult, au loc $\boldsymbol{u} \in C([0,T];V)$ şi $\boldsymbol{\sigma} \in C([0,T];Q_1)$.

7.3 Dependenţa continuă de date

În această secţiune este studiată dependenţa de date a soluţiei şi este demonstrat un rezultat de convergenţă. Pentru fiecare $\rho > 0$ se definesc p_ρ, b_ρ, $\boldsymbol{f}_{0\rho}$ şi $\boldsymbol{f}_{2\rho}$ perturbaţii ale lui p, b, $\boldsymbol{f}_0$ şi $\boldsymbol{f}_2$ care satisfac condiţiile (6.8), (7.8),(7.7).

Se consideră următoarea problemă variaţională.

Problema $\mathcal{Q}^V_\rho$. *Să se determine câmpul deplasărilor $\boldsymbol{u}_\rho : [0,T] \to V$ astfel încât pentru orice $t \in [0,T]$ are loc egalitatea de mai jos:*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_\rho(t) \in V, \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\rho(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q + (p_\rho(u_{\rho\nu}(t)), v_\nu)_{L^2(\Gamma_3)} \\ &+\Big(\int_0^t b_\rho(t-s)u_{\rho\nu}^+(s)\,ds, v_\nu\Big)_{L^2(\Gamma_3)} \\ &= (\boldsymbol{f}_{0\rho}(t), \boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)^d} + (\boldsymbol{f}_{2\rho}(t), \boldsymbol{v})_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \end{aligned} \tag{7.10}$$

unde $u_{\rho\nu}$ reprezintă componenta normală a funcţiei $\boldsymbol{u}_\rho$.

De asemenea, sunt presupuse următoarele ipoteze asupra datelor

$$b_\rho \to b \quad \text{în} \;\; C([0,T];L^\infty(\Gamma_3)) \quad \text{pentru} \quad \rho \to 0, \tag{7.11}$$

$$\boldsymbol{f}_{0\rho} \to \boldsymbol{f}_0 \quad \text{în} \;\; C([0,T];L^2(\Omega)^d) \quad \text{pentru} \quad \rho \to 0, \tag{7.12}$$

$$\boldsymbol{f}_{2\rho} \to \boldsymbol{f}_2 \quad \text{în} \;\; C([0,T];L^2(\Gamma_2)^d) \quad \text{pentru} \quad \rho \to 0. \tag{7.13}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Există } G:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ şi } \beta \in \mathbb{R}_+ \text{ astfel încât} \\ \;\;\text{(a) } |p_\rho(\boldsymbol{x},r) - p(\boldsymbol{x},r)| \le G(\rho)(|r|+\beta) \\ \qquad \forall\, r \in \mathbb{R}, \text{ a.p.t. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3, \text{ pentru orice } \rho > 0, \\ \;\;\text{(b) } \lim\limits_{\rho\to 0} G(\rho) = 0. \end{array}\right. \tag{7.14}$$

Este demonstrat următorul rezultat de convergenţă.

Teorema 7.2. *Dacă au loc* (7.11)–(7.14) *atunci soluţia* $\boldsymbol{u}_\rho$ *a problemei* $\mathcal{Q}_\rho^V$ *converge către soluţia* $\boldsymbol{u}$ *a problemei* $\mathcal{Q}^V$*, i.e.*

$$\boldsymbol{u}_\rho \to \boldsymbol{u} \quad \textit{în} \quad C([0,T];V) \quad \textit{pentru} \quad \rho \to 0. \tag{7.15}$$

Rezultatul de convergenţă din Teorema 7.2 este extins şi la funcţia de tensiune corespunzătoare, i.e.

$$\boldsymbol{\sigma}_\rho \to \boldsymbol{\sigma} \quad \text{în} \quad C([0,T];Q_1) \quad \text{pentru } \rho \to 0. \tag{7.16}$$

Pe lângă interesul matematic, rezultatele de convergenţă (7.15) şi (7.16) au şi un rol important din punct de vedere mecanic, deoarece se arată că soluţia slabă a problemei (7.1)–(7.6) depinde continuu de funcţia complianţă normală, de funcţia memorie, de forţele interne şi de forţele de tracţiune pe frontieră.

7.4 Exemple numerice

Capitolul se încheie cu simulări numerice care validează rezultatele de convergenţă obţinute în Teorema 7.2
Conţinutul acestui capitol va face obiectul articolului [74].

Capitolul 8

Analiza unei probleme de contact vîscoelastică

În ultimul capitol al tezei este studiată o problemă de contact fără frecare pentru materiale vâscoelastice neliniare. În contrast cu problemele studiate în Capitolul 6 şi Capitolul 7 procesul este quasistatic şi comportamentul materialului este descris folosind o lege constitutivă vâscoelastică cu memorie lungă. De asemenea, contactul este modelat folosind o condiţie cu complianţă normală, termen memorie şi restricţie unilaterală.

8.1 Formularea problemei

Capitolul începe cu formularea clasică a problemei şi ipotezele asupra datelor.

Problema $\mathcal{M}$. *Să se determine câmpul deplasărilor* $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ *şi câmpul tensiunilor* $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$ *astfel încât pentru orice* $t \in [0,T]$ *au loc:*

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))\,ds \qquad \text{în} \quad \Omega, \tag{8.1}$$

$$\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \boldsymbol{0} \qquad \text{în} \quad \Omega, \tag{8.2}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0} \qquad \text{pe} \quad \Gamma_1, \tag{8.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_2(t) \qquad \text{pe} \quad \Gamma_2, \tag{8.4}$$

$$\left.\begin{array}{c} u_\nu(t) \le g, \\ \sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \displaystyle\int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s)ds \le 0, \\ (u_\nu(t) - g)\Big(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) \\ + \displaystyle\int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s)ds\Big) = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{pe} \quad \Gamma_3, \tag{8.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \boldsymbol{0} \qquad \text{pe} \quad \Gamma_3, \tag{8.6}$$

unde operatorul de elasticitate $\mathcal{F}$ verifică (5.13), operatorul de relaxare $\mathcal{R}$ satisface (5.15), $g > 0$ este o restricţie dată pentru deplasarea normală, funcţia memorie b satisface (7.8), funcţia complianţă normală p verifică

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \\ \text{(b) Există } L_p > 0 \text{ cu proprietatea} \\ \qquad |p(r_1) - p(r_2)| \le L_p |r_1 - r_2| \quad \forall\, r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}, \\ \text{(c) } (p(r_1) - p(r_2))(r_1 - r_2) \ge 0 \quad \forall\, r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}, \\ \text{(d) } p(r) = 0 \ \text{ pentru orice } r < 0. \end{array}\right. \tag{8.7}$$

şi forţele interne şi tracţiunile de suprafaţă au regularitatea (7.7).

Folosind argumente similare ca în Capitolul 6 şi Capitolul 7 se obţine următoarea formă variaţională a problemei $\mathcal{M}$.

Problema $\mathcal{M}^V$. *Să se determine câmpul deplasărilor* $\boldsymbol{u} : [0,T] \to V$ *astfel încât pentru orice* $t \in [0,T]$ *are loc următoarea inegalitate:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t) \in U, \quad & (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)))_Q \\ & + \Big(\int_0^t \mathcal{R}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))\, ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) \Big)_Q \\ & + (p(u_\nu(t)), v_\nu - u_\nu(t))_{L^2(\Gamma_3)} \\ & + \Big(\int_0^t b(t-s) u_\nu^+(s)\, ds, v_\nu - u_\nu(t) \Big)_{L^2(\Gamma_3)} \\ & \ge (\boldsymbol{f}_0(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_{L^2(\Omega)^d} \\ & \quad + (\boldsymbol{f}_2(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in U. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Inegalitatea anterioară reprezintă o inegalitate variaţională pentru câmpul deplasărilor cu doi termeni integrali Volterra.

8.2 Existenţa şi unicitatea

În studiul problemei $\mathcal{M}$ este demonstrat următorul rezultat de existenţă şi unicitate.

Teorema 8.1. *Dacă au loc* (5.13), (5.15), (7.7), (7.8) *şi* (8.7) *atunci Problema* $\mathcal{M}^V$ *are o soluţie unică cu proprietatea* $\boldsymbol{u} \in C([0,T];V)$.

Teorema 8.1 arată solvabilitatea slabă a problemei $\mathcal{M}$. Mai mult, regularitatea soluţiei slabe este dată de $\boldsymbol{u} \in C([0,T];V)$, $\boldsymbol{\sigma} \in C([0,T];Q_1)$.

8.3 Un prim rezultat de convergenţă

În această secţiune este studiată dependenţa de date a soluţiei şi este demonstrat un rezultat de convergenţă. Este considerată următoarea problemă variaţională.

Problema $\mathcal{M}_\rho^V$. *Să se determine câmpul deplasărilor $\boldsymbol{u}_\rho : [0,T] \to V$ astfel încât pentru orice $t \in [0,T]$ are loc inegalitatea de mai jos:*

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_\rho(t) \in U, \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\rho(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\rho(t)))_Q \\
&\quad + \Big(\int_0^t \mathcal{R}_\rho(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\rho(s))\, ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\rho(t)) \Big)_Q \\
&\quad + (p_\rho(u_{\rho\nu}(t)), v_\nu - u_{\rho\nu}(t))_{L^2(\Gamma_3)} \\
&\quad + \Big(\int_0^t b_\rho(t-s) u_{\rho\nu}^+(s)\, ds, v_\nu - u_{\rho\nu}(t) \Big)_{L^2(\Gamma_3)} \\
&\quad \geq (\boldsymbol{f}_{0\rho}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_\rho(t))_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + (\boldsymbol{f}_{2\rho}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_\rho(t))_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in U,
\end{aligned} \tag{8.9}
$$

În inegalitatea anterioară pentru fiecare $\rho > 0$, $\mathcal{R}_\rho$, p_ρ, b_ρ, $\boldsymbol{f}_{0\rho}$ şi $\boldsymbol{f}_{2\rho}$ sunt perturbaţii ale lui $\mathcal{R}$, p, b, $\boldsymbol{f}_0$ şi $\boldsymbol{f}_2$ care verifică (5.15), (8.7), (7.8) şi (7.7).

Se fac următoarele presupuneri asupra datelor

$$\mathcal{R}_\rho \to \mathcal{R} \quad \text{în } C([0,T]; \mathbf{Q}_\infty) \quad \text{pentru} \quad \rho \to 0, \tag{8.10}$$

$$b_\rho \to b \quad \text{în } C([0,T]; L^\infty(\Gamma_3)) \quad \text{pentru} \quad \rho \to 0, \tag{8.11}$$

$$\boldsymbol{f}_{0\rho} \to \boldsymbol{f}_0 \quad \text{în } C([0,T]; L^2(\Omega)^d) \quad \text{pentru} \quad \rho \to 0, \tag{8.12}$$

$$\boldsymbol{f}_{2\rho} \to \boldsymbol{f}_2 \quad \text{în } C([0,T]; L^2(\Gamma_2)^d) \quad \text{pentru} \quad \rho \to 0, \tag{8.13}$$

funcţiile p_ρ şi p verifică (7.14). Este demonstrat următorul rezultat de convergenţă.

Teorema 8.2. *Dacă au loc* (7.14), (8.10)–(8.13) *atunci soluţia $\boldsymbol{u}_\rho$ a Problemei $\mathcal{M}_\rho^V$ converge către soluţia $\boldsymbol{u}$ a Problemei $\mathcal{M}^V$, i.e.*

$$\boldsymbol{u}_\rho \to \boldsymbol{u} \quad \text{în} \quad C([0,T]; V) \quad \text{pentru} \quad \rho \to 0. \tag{8.14}$$

Rezultatul de convergenţă din Teorema 8.2 este extins şi la funcţia tensiune corespunzătoare, i.e.

$$\boldsymbol{\sigma}_\rho \to \boldsymbol{\sigma} \text{ în } C([0,T]; Q_1) \text{ pentru } \rho \to 0. \tag{8.15}$$

Pe lângă interesul matematic, rezultatele de convergenţă (8.14) şi (8.15) au şi un rol important din punct de vedere mecanic, deoarece se arată că soluţia slabă a problemei (8.1)–(8.6) depinde continuu de operatorul de relaxare, de funcţia complianţă normală, de funcţia memorie, de forţele interne şi de forţele de tracţiune pe frontieră.

8.4 Al doilea rezultat de convergenţă

În această secţiune este demonstrat un rezultat de convergenţă în studiul Problemei $\mathcal{M}$ folosind penalizarea restricţiei. Este considerată următoarea problemă de contact.

Problema $\mathcal{M}_\mu$. *Să se determine câmpul deplasărilor* $\boldsymbol{u}_\mu : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ *şi câmpul tensiunilor* $\boldsymbol{\sigma}_\mu : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$ *astfel încât pentru orice* $t \in [0,T]$ *au loc*:

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\mu(t)) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\mu(s))\,ds \qquad \text{în} \quad \Omega, \tag{8.16}$$

$$\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\sigma}_\mu(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \boldsymbol{0} \qquad \text{în} \quad \Omega, \tag{8.17}$$

$$\boldsymbol{u}_\mu(t) = \boldsymbol{0} \qquad \text{pe} \quad \Gamma_1, \tag{8.18}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_2(t) \qquad \text{pe} \quad \Gamma_2, \tag{8.19}$$

$$-\sigma_{\mu\nu}(t) = p_\mu(u_{\mu\nu}(t)) + \int_0^t b(t-s)\,u_{\mu\nu}^+(s)\,ds \qquad \text{pe} \quad \Gamma_3, \tag{8.20}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mu\tau}(t) = \boldsymbol{0} \qquad \text{pe} \quad \Gamma_3, \tag{8.21}$$

unde $p_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin (6.15) şi satisface condiţia (6.16).

Diferenţa dintre problemele $\mathcal{M}$ şi $\mathcal{M}_\mu$ constă în faptul că se înlocuieşte condiţia de contact cu complianţă normală, termen memorie şi restricţie unilaterală (8.5) cu condiţia de contact cu complianţă normală şi termen memorie (8.20). În această condiţie μ reprezintă un parametru de penalizare care poate fi interpretat ca şi în Capitolul 6.

Folosind argumente similare ca şi în studiul problemei $\mathcal{M}$ se determină următoarea formă variaţională a problemei $\mathcal{M}_\mu$.

Problema $\mathcal{M}_\mu^V$. *Să se determine câmpul deplasărilor* $\boldsymbol{u}_\mu : [0,T] \to V$ *astfel încât pentru orice* $t \in [0,T]$ *are loc inegalitatea de mai jos*:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\mu(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q + \Big(\int_0^t \mathcal{R}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\mu(s))\,ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\Big)_Q \\
&+(p_\mu(u_{\mu\nu}(t)), v_\nu)_{L^2(\Gamma_3)} + \Big(\int_0^t b(t-s)u_{\mu\nu}^+(s)\,ds, v_\nu\Big)_{L^2(\Gamma_3)} \\
&= (\boldsymbol{f}_0(t), \boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)^d} + (\boldsymbol{f}_2(t), \boldsymbol{v})_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V.
\end{aligned} \tag{8.22}$$

Este demonstrat următorul rezultat de existenţă, unicitate şi convergenţă.

Teorema 8.3. *Dacă au loc* (5.13), (5.15), (7.8), (7.7), (8.7) *şi* (6.14) *atunci:*

1) *Pentru orice* $\mu > 0$ *Problema* $\mathcal{M}_\mu^V$ *are o soluţie unică care verifică* $\boldsymbol{u}_\mu \in C([0,T];V)$.

2) *Soluţia* $\boldsymbol{u}_\mu$ *a problemei* $\mathcal{M}_\mu^V$ *converge către soluţia* $\boldsymbol{u}$ *a problemei* $\mathcal{M}^V$*, adică:*

$$\|\boldsymbol{u}_\mu(t) - \boldsymbol{u}(t)\|_V \to 0 \tag{8.23}$$

pentru $\mu \to 0$*, oricare ar fi* $t \in [0,T]$.

Rezultatul de convergenţă din Teorema 8.3 este extins la soluţia slabă a problemelor de contact corespunzătoare $\mathcal{M}$ şi $\mathcal{M}_\mu$. Astfel, este arătat că:

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\mu(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)\|_{Q_1} \to 0 \qquad \text{pentru} \quad \mu \to 0. \tag{8.24}$$

Pe lângă interesul matematic, rezultatele de convergenţă (8.23) şi (8.24) au şi un rol important din punct de vedere mecanic, deoarece se arată că soluţia slabă a problemei de contact vâscoelastic cu complianţă normală, termen memorie şi restricţie unilaterală poate fi aproximată oricât de bine cu soluţia problemei de contact vâscoelastic cu complianţă normală şi termen memorie cu un coeficient de deformabilitate suficient de mic.

8.5 Exemplu numeric

Capitolul se încheie cu simulări numerice care validează rezultatele de convergenţă obţinute în Teorema 8.2 şi Teorema 8.3.

Materialul prezentat în acest capitol este original şi a fost publicat în [97]. Ca şi referinţe pentru problemele de contact vâscoelastice cu memorie lungă sunt enumerate [85, 86, 87].

Bibliografie

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] P. Alart and A. Curnier, A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **92** (1991), 353–375.

[3] O. Agratini, I. Chiorean, Gh. Coman, R. Trîmbiţas, *Numerical Analysis and Approximation Theory*, Vol. III, Presa Universitară Clujeană, 2002 (in Romanian).

[4] U. Ascher, L. R. Petzold, *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, 1997.

[5] K. Atkinson, W. Han, *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*, Texts in Applied Mathematics **39**, Springer, New York, 2001.

[6] C. Baiocchi, A. Capelo, *Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free-Boundary Problems*, John Wiley, Chichester, 1984.

[7] M. Barboteu, A. Matei, M. Sofonea, Analysis of quasistatic viscoplastic contact problems with normal compliance, *Quarterly Jnl. of Mechanics and App. Maths.*, submitted.

[8] M. Barboteu, **F. Pătrulescu**, M. Sofonea, Analysis of an elastic contact problem with normal compliance and unilateral constraint (in preparation).

[9] M. Barboteu, **F. Pătrulescu**, A. Ramadan, M. Sofonea, On the behavior of the solution to a viscoplastic contact problem, *Proceedings of the 7th Congress of Romanian Mathematicians*, Braşov, 2011.

[10] M. Barboteu, **F. Pătrulescu**, A. Ramadan, M. Sofonea, History-dependent contact models for viscoplastic materials, *The IMA Journal of Applied Mathematics* (submitted).

[11] M. Barboteu, A. Ramadan, M. Sofonea, **F. Pătrulescu**, An elastic contact problem with normal compliance and memory term, *Machine Dynamics Research* (accepted for publication).

[12] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Editura Academiei, Bucuresti, 1976.

[13] F. Brauer, H. Nohel, *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York, 1989.

[14] H. Brézis, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier* **18** (1968), 115–175.

[15] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Mathematics Studies, North Holland, Amsterdam, 1973.

[16] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle–Théorie et applications*, Masson, Paris, 1987.

[17] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equation* Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2008.

[18] M. Calvo, D. J. Higham, J. I. Montijano, L. Rández, Stepsize selection for tolerance proportionality in explicit Runge-Kutta codes, *Advances in Computational Mathematics*, **7** (1997), 361–382.

[19] E. Cătinaş, *Methods of Newton and Newton-Krylov Type*, Risoprint, Cluj-Napoca, 2007.

[20] E. Cătinaş, On some iterative methods for solving nonlinear equations, *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.*, **23**, no. 1 (1994), 47–53.

[21] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Volume I: Three Dimensional Elasticity*, Studies in Mathematics and its Applications **20**, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[22] Gh. Coman, *Analiză Numerică*, Libris, Cluj-Napoca, 1995.

[23] M. Crouzeix, A. L. Mignot, *Analyse numérique des equations différentielles*, Masson, Paris, 1989.

[24] G. Dahlquist, Aspecial stability problem for linear multistep methods, *BIT*, **3** (1963), 27–43.

[25] G. Dahlquist, A. Björk, *Numerical Methods*, Dover Publication, Inc., New-York, 2003.

[26] J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, 1996.

[27] I. Doghri, *Mechanics of Deformable Solids*, Springer, Berlin, 2000.

[28] A.D. Drozdov, *Finite Elasticity and Viscoelasticity—A Course in the Nonlinear Mechanics of Solids*, World Scientific, Singapore, 1996.

[29] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[30] C. Eck, J. Jarušek, M. Krbeč, *Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems*, Pure and Applied Mathematics **270**, Chapman/CRC Press, New York, 2005.

[31] A. Farcaş, **F. Pătrulescu**, M. Sofonea, A history-dependent contact problem with unilateral constraint, *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.* **4**, no. 1 (2012), 90–96.

[32] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambique condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol. VII, Sez. I*, **5** (1964) 91–140.

[33] C. W. Gear, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Inc., New-Jersey, 1971.

[34] P. Germain, P. Muller, *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1980.

[35] C. I. Gheorghiu, *Numerical Methods for Dynamical Systems*, Scientific Book Publishing House, Cluj-Napoca, 2004 (in Romanian).

[36] E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff Problems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

[37] E. Hairer, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations* II Stiff and Differential–Algebraic Problems, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.

[38] A. Halanay, *Differential Equations: Stability, Oscilations, Time Lags*, Academic Press, New-York and London, 1966.

[39] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, American Mathematical Society–International Press, 2002.

[40] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., 1964.

[41] J. Haslinger, I. Hlaváček, J. Nečas, Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics, *Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV*, P.G. Ciarlet and J.-L. Lions, North-Holland, Amsterdam, 1996, 313–485.

[42] P. Henrici, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New-York, 1962.

[43] I.R. Ionescu, M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[44] E. Isaacson, H. B. Keller, *Analysis of numerical methods*, Dover Publications, Inc., New-York, 1993.

[45] J. Jarušek, M. Sofonea, On the solvability of dynamic elastic-visco-plastic contact problems, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (*ZAMM*) **88** (2008), 3–22.

[46] H. B. Khenous, P. Laborde, Y. Renard, On the discretization of contact problems in elastodynamics, *Lecture Notes in Applied Computational Mechanics* **27** (2006), 31–38.

[47] H. B. Khenous, J. Pommier, Y. Renard, Hybrid discretization of the Signorini problem with Coulomb friction. Theoretical aspects and comparison of some numerical solvers, *Applied Numerical Mathematics* **56** (2006), 163–192.

[48] N. Kikuchi, J.T. Oden, Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media, *Int. J. Engng. Sci.* **18** (1980), 1173–1284.

[49] N. Kikuchi, J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.

[50] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Classics in Applied Mathematics **31**, SIAM, Philadelphia, 2000.

[51] A. Klarbring, A. Mikelič, M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, *Int. J. Engng. Sci.* **26** (1988), 811–832.

[52] A. Klarbring, A. Mikelič, M. Shillor, On friction problems with normal compliance, *Nonlinear Analysis* **13** (1989), 935–955.

[53] A.J. Kurdila, M. Zabarankin, *Convex Functional Analysis*, Birkhäuser, Basel, 2005.

[54] J. D. Lambert, *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems-The Initial Value Problem*, John Wiley & Sons, Inc., 1990.

[55] J. D. Lambert, On the local error and local truncation error of linear multistep methods, *BIT*, **30** (1990), 673–681.

[56] T. Laursen, *Computational Contact and Impact Mechanics*, Springer, Berlin, 2002.

[57] J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non-homogènes I*, Dunod, Paris, 1968.

[58] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Gauthiers-Villars, Paris, 1969.

[59] L.E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*, Princeton-Hall, Inc, New Jersey, 1969.

[60] J.A.C. Martins, J.T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, *Nonlinear Analysis TMA* **11** (1987), 407–428.

[61] J.A.C. Martins, M.D.P. Monteiro Marques, eds., *Contact Mechanics*, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[62] R. Matheij, J. Molenaar, *Ordinary Differential Equations in Theory and Practice*, SIAM, 2002.

[63] S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Analysis of lumped models with contact and friction, *Journal of Applied Mathematics and Physics* (*ZAMP*) **62** (2011), 99–113.

[64] U. Mosco, Nonlinear operators and the calculus of variations, *Lecture Notes of Mathematics* **543**, (1975), 83-156.

[65] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Academia, Praha, 1967.

[66] J. Nečas, I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies: An Introduction*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1981.

[67] J.T. Oden, J.A.C. Martins, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **52** (1985), 527–634.

[68] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[69] P. D. Panagiotopoulos, *Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[70] **F. Pătrulescu**, Steffensen type methods for approximating solutions of differential equations, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, **56**, no. 2 (2011), 505–513.

[71] **F. Pătrulescu**, A numerical method for the solution of an autonomous initial value problem, *Carpathian J. Math.*, **28** (2012), 289–296.

[72] **F. Pătrulescu**, A class of numerical methods for autonomous initial value problems, *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.* (accepted for publication).

[73] **F. Pătrulescu**, A. Farcaş, M. Sofonea, A viscoplastic contact problem with normal compliance, unilateral constraint and memory term, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics* (submitted).

[74] **F. Pătrulescu**, A. Ramadan, Converge Results for Contact Problems with Short Memory (in preparation).

[75] I. Păvăloiu, On the monotonicity of the sequences of approximations obtained by Steffensen's method, *Mathematica*, **35(58)**, no. 1 (1993), 71–76.

[76] I. Păvăloiu, Bilateral approximation for the solution of scalar equations, *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.*, **23**, no. 1 (1994), 95–101.

[77] I. Păvăloiu, Approximation of the roots of equations by Aitken-Steffensen-type monotonic sequences, *Calcolo*, **32** (1995), 69–82.

[78] I. Păvăloiu, On an approxiation formula, *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.*, **26**, no. 1-2 (1997), 179–183.

[79] I. Păvăloiu, Aitken-Steffensen type methods for nonsmooth functions (III), *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.*, **32**, no. 1 (2003), 73–77.

[80] A. C. Pipkin. *Lectures in Viscoelasticity Theory*, Applied Mathematical Sciences **7**, George Allen & Unwin Ltd., London, Springer-Verlag, New York, 1972.

[81] R. Precup, *Differential Equations*, Risoprint, Cluj, 2011. (in Romanian)

[82] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[83] A. Ralston, Runge-Kutta methods with minimum error bounds, *Math. Comp.*, **16**, no. 80 (1962), 431–437.

[84] M. Raous, M. Jean, J.J. Moreau, eds., *Contact Mechanics*, Plenum Press, New York, 1995.

[85] A. D. Rodríguez–Aros, M. Sofonea, J. M. Viaño, A class of evolutionary variational inequalities with Volterra-type integral term, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **14** (2004), 555–577.

[86] A. D. Rodríguez–Aros, M. Sofonea, J. M. Viaño, Numerical approximation of a viscoelastic frictional contact problem, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II Méc.* **334** (2006), 279–284.

[87] A. D. Rodríguez–Aros, M. Sofonea, J. M. Viaño, Numerical analysis of a frictional contact problem for viscoelastic materials with long-term memory, *Numerische Mathematik* **198** (2007), 327–358.

[88] M. Shillor, ed., Recent advances in contact mechanics, Special issue of *Math. Comput. Modelling* **28** (4–8) (1998).

[89] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics **655**, Springer, Berlin, 2004.

[90] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.

[91] M. Sofonea, C. Avramescu, A. Matei, A fixed point result with applications in the study of viscoplastic frictionless contact problems, *Communications on Pure and Applied Analysis* **7** (2008), 645–658.

[92] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics **276**, Chapman-Hall/CRC Press, New York, 2006.

[93] M. Sofonea, A. Matei, *Variational Inequalities with Applications. A Study of Antiplane Frictional Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics **18**, Springer, New York, 2009.

[94] M. Sofonea, A. Matei, History-dependent quasivariational inequalities arising in Contact Mechanics, *European Journal of Applied Mathematics* **22** (2011), 471–491.

[95] M. Sofonea, A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Notes, Cambridge University Press **398**, Cambridge, 2012.

[96] M. Sofonea, Y. Ouafik, A piezoelectric contact problem with normal compliance, *Applicaciones Mathematicae* **32** (2005), 425–442.

[97] M. Sofonea, **F. Pătrulescu**, Analysis of a history-dependent frictionless contact problem, *Mathematics and Mechanics of Solids*, DOI: 10.1177/1081286512440004.

[98] M. Sofonea, A. D. Rodríguez–Aros, J. M. Viaño, A class of integro-differential variational inequalities with applications to viscoelastic contact, *Mathematical and Computer Modelling* **41** (2005), 1355–1369.

[99] D. D. Stancu, Gh. Coman, O. Agratini, R. Trîmbiţas, *Analiză numerică şi teoria aproximării*, Vol. I, Presa universitară Clujeană, 2001 (in Romanian).

[100] D. D. Stancu, Gh. Coman, P. Blaga, *Analiză numerică şi teoria aproximării*, Vol. II, Presa universitară Clujeană, 2002 (in Romanian).

[101] M. Şerban, *Differential Equations and Systems of Differential Equations*, Cluj University Press, 2009. (in Romanian)

[102] R. Temam, A. Miranville, *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[103] J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[104] P. Wriggers, P.D. Panagiotopoulos, eds., *New Developments in Contact Problems*, Springer-Verlag, Wien, New York, 1999.

[105] P. Wriggers, Computational Contact Mechanics, Wiley, Chichester, 2002.

[106] P. Wriggers, U. Nackenhorst, eds., *Analysis and Simulation of Contact Problems*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics **27**, Springer, Berlin, 2006.