Contents

Introducere şi descrierea conţinutului

În optimizarea liniară, unul din cei mai imporanţi paşi au fost reprezentaţi de metoda simplex, publicată de Dantzig in 1947, şi de teorema de dualitate, dată de Gale, Kuhn şi Tucker in 1951 (vezi [51]). Apoi , Fenchel [50], Brøndsted [30], Moreau [68, 69] şi Rockafellar [74, 75] au investigat in lucrările lor teoria funcţiilor convexe, funcţii conjugate şi dualitatea in optimizarea convexă. Analiza convexă în spaţii finit-dimensionale a fost studiată de Borwein şi Lewis [9], Hiriart-Urruty şi Lemaréchal [54, 55, 56] şi Rockafellar [73], în timp ce cazul infinit-dimensional a fost studiat de Ekeland şi Temam [47], Rockafellar [72] şi Zălinescu [82].

Pentru a rezolva o problema de optimizare acesteia i se poate ataşa o problemă duala. Cele mai importante si cunoscute duale din literatură sunt dulalele Fenchel şi Lagrange. Pentru perechea de probleme primala-duala întotdeauna are loc *dualitatea slabă*, ceea ce înseamna că valoarea optimă a dualei este mai mică sau egală cu valoarea optimă a primalei. În teoria dualităţii o importantă problemă o reprezintă găsirea condiţiilor de regularitate pentru a asigura *dualitatea tare*. Dualitatea tare este cazul în care valorile optime ale celor doua probleme sunt egale iar duala are o solutie optimă.

În această lucrare am încercat si reuşit extinderea şi generalizarea rezultatelor existente din literatură dând noi condiţii de regularitate folosind epigrafice si ε-subdiferenţiale.

În primul capitol se prezintă cateva noţiuni şi rezultate preliminare, care vor fi folosite pe parcursul lucrării.

În capitolul al doilea se prezintă diferite condiţii de regularitate care caracterizează diferite situaţii de tip "ε-duality gap" (cu $\varepsilon \geq 0$) pentru probleme de optimizare cu restricţii şi dualele lor de tip Lagrange, Fenchel si Fenchel-Lagrange in spaţii local convexe separate. Între o problemă primală (P) si duala ei (D) există întotdeauna *dualitate slabă*, adică, $v(P) \geq v(D)$. Când $v(P) = v(D)$ se spune ca există "*zero duality gap*" între (P) şi (D) şi dacă (D) are, în plus, soluţie optimă, situaţia este denumită *dualitate tare*. Dacă $v(P) - v(D) \leq \varepsilon$, cu $\varepsilon \geq 0$, se spune ca avem "*ε-duality gap*" pentru (P) şi (D). Dacă una din aceste situatii are loc pentru (P_{x^*}) şi (D_{x^*}) pentru orice $x^* \in X^*$, ea se va numii *stabilă*. Condiţiile de regularitate care asigură situatiile de tip "*ε-duality gap*" sunt formulate cu ajutorul epigraficelor şi ε-subdiferenţialelor. Când $\varepsilon = 0$ sunt redescoperite rezultate recente referitoare la dualitatea tare si totală şi "zero duality gap" din literatură.

Motivaţi de rezultatele recente referitoare la dualitatea tare si totală pentru probleme de optimizare cu restricţii din [19, 18, 49, 48, 62] şi de cele referitoare la "zero duality gap" din [60, 61] introducem în acest capitol câteva condiţii de regularitate care caracterizează situaţiile de tip "ε-duality gap" (cu $\varepsilon \geq 0$) pentru o problemă de optimizare cu restricţii şi dualele ei de tip Lagrange, Fenchel si Fenchel-Lagrange. Se extind multe rezultate din lucrarile menţionate, care se regăsesc ca şi cazuri speciale pentru $\varepsilon = 0$. Mai mult de atât, unele rezultate din [19, 18, 12, 60, 61], care apar din rezultatele noastre în cazul special $\varepsilon = 0$, sunt extinse prin înlăturarea ipotezelor topologice si de convexitate, în timp ce, diferite rezultate din [60, 61] sunt obţinute lucrând în spaţii local convexe în loc de spaţii Banach şi înlaturând ipotezele de continuitate si interior al domeniului de definiţie nevid al functiilor considerate. De asemenea, în acest capitol sunt prezentate rezultate referitoare la condiţii de ε-optim şi de tip ε-Farkaş. Contribuţiile autorului sunt prezentate în urmatoarele teoreme: 2.1.4, 2.1.10, 2.1.12, 2.1.15, 2.1.16, 2.1.19, 2.1.21, 2.1.22, 2.1.27, 2.1.29, 2.1.31, 2.1.32, 2.1.36, 2.1.40, 2.1.42, 2.1.43, 2.1.49, 2.1.52, 2.1.54, 2.2.1, 2.2.4, 2.2.8, 2.2.9, 2.2.10, 2.2.12, 2.2.14, 2.2.15, 2.2.19, 2.2.22, 2.2.23, 2.2.27, 2.2.29, 2.2.30, 2.2.34, 2.2.38, 2.2.41; corolare: 2.1.6, 2.1.8, 2.1.11, 2.1.13, 2.1.18, 2.1.20, 2.1.25, 2.1.28, 2.1.30, 2.1.34, 2.1.37, 2.1.41, 2.1.45, 2.1.46, 2.1.47, 2.1.50, 2.1.51, 2.1.53, 2.2.7, 2.2.37; remarci: 2.1.5, 2.1.9, 2.1.14, 2.1.17, 2.1.23, 2.1.24, 2.1.33, 2.1.38, 2.1.44, 2.2.2, 2.2.5, 2.2.6, 2.2.11, 2.2.13, 2.2.16, 2.2.17, 2.2.20, 2.2.21, 2.2.24, 2.2.25, 2.2.28, 2.2.31, 2.2.32, 2.2.35, 2.2.36, 2.2.39, 2.2.40, 2.2.42 si Lema 2.1.3. Unele din aceste rezultate pot fi gasite in [7].

În al treilea capitol sunt prezentate diferite condiţii de regularitate care caracterizeaza situaţii de tip "ε-duality gap" pentru probleme de optimizare în care funcţia de scop este suma dintre o funcţie şi o compunere dintre o funcţie con-crescătoare şi o funcţie vectorială. Rezultate de tip Farkaş pentru sisteme de inegalităţi ce conţin funcţii convexe folosind aproximări bazate pe dualitatea conjugată au fost date in [26, 27]. Apoi, aceste rezultate au fost extinse la probleme convexe în care sunt implicate compuneri de funcţii convexe (vezi [22]). Condiţiile de regularitate date in aceasta parte a lucrării sunt formulate folosind epigrafice si ε-subdiferenţiale. Când $\varepsilon = 0$ sunt redescoperite rezultate recente referitoare la dualitatea tare şi "zero duality gap" din literatura. De asemenea, sunt date rezultate referitoare la condiţii de ε-optim şi de tip ε-Farkaş folosind rezultate obţinute pe parcursul intregului capitol. Pentru a caracteriza soluţiile unei probleme de optimizare în care sunt prezente compuneri de funcţii convexe, este important a asigura o formula in care apar (ε)-subdiferenţiale (a se vedea [11, 22, 24, 34, 35, 36, 66]). Contribuţiile autorului sunt prezentate în următoarele teoreme: 3.1.2, 3.1.8, 3.1.15, 3.1.19, 3.1.24, 3.1.25, 3.1.27, 3.1.29, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6, 3.3.1, 3.3.6, 3.3.8, 3.3.13, 3.4.1, 3.4.2, 3.4.5, 3.4.6, 3.4.8, 3.4.9, 3.4.10, 3.4.11; corolare: 3.1.4, 3.1.6, 3.1.10, 3.1.12, 3.1.17, 3.1.18, 3.1.20, 3.1.21, 3.3.2, 3.3.9; remarci: 3.1.3, 3.1.7, 3.1.9, 3.1.13, 3.1.14, 3.1.16, 3.1.22, 3.1.23, 3.1.26, 3.1.28, 3.3.3, 3.3.4, 3.3.5, 3.3.7, 3.3.10, 3.3.11, 3.3.12, 3.3.14, 3.3.15, 3.4.3, 3.4.4, 3.4.7. Unele din aceste rezultate pot fi găsite in [6].

În al patrulea capitol lucrăm cu o arie mai nouă de cercetare, şi anume, optimizarea cu entropii, care are mai multe sfere de lucru: printre matematicieni, fizicieni, ingineri, etc. Au fost date generalizări pentru anumite probleme existente referitoare la optimizarea cu entropii analizând cinci cazuri. Pentru fiecare problema din fiecare caz au fost atasate dualele de tip Lagrange si Fenchel-Lagrange, apoi s-au dat conditii de regularitate pentru a asigura dualitatea tare. De asemenea, au fost prezentate rezultate referitoare la conditii de optim pentru fiecare caz. Contribuţiile autorului sunt prezentate în urmatoarele teoreme: 4.2.1, 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5, 4.2.7, 4.2.8, 4.2.9, 4.2.11, 4.2.12, 4.2.13, 4.2.15, 4.2.16, 4.2.17, 4.2.19, 4.2.20; corolare: 4.2.2, 4.2.6, 4.2.10, 4.2.14, 4.2.18 si Propoziţia 4.1.1. Aceste rezultate pot fi găsite în [8].

Inspiraţi de [1, 2, 3], in al cincilea capitol, unei probleme de optimizare i se ataşează o *η-problema aproximanta* si sunt obtinute rezultate referitoare la relatiile dintre soluţiile celor doua probleme. Probleme de acest fel au fost studiate printre alţii de (vezi [65, 73]). Au fost introduse diferite clase de functii convexe generalizate. Un astfel de exemplu il reprezinta functiile invexe, introduse prima data de Hanson [53] si Craven [37]. Folosind functiile invexe, Antczak a dat o noua metoda de rezolvare a problemelor de optimizare. Aceasta constă in construcţia unei *probleme* η*-aproximanta* prin modificarea atât a funcţiei obiectiv cât şi a funcţiei restrictie a problemei primale. De asemenea, în acest capitol au fost obţinute rezultate referitoare la relaţiile dintre soluţiile problemelor menţionate şi punctele şa ale funcţiilor lui Lagrange ataşate acestor probleme. Contribuţiile autorului sunt prezentate in următoarele teoreme: 5.2.1, 5.2.6, 5.2.7, 5.2.8, 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3, 5.3.4; exemple: 5.2.2, 5.2.3, 5.2.5 si Remarca 5.2.4. Majoritatea acestor rezultate pot fi găsite in [5].

Cuvinte cheie

Problemă de optimizare, funcţii conjugate, dualitate conjugată, ε-duality gap, condiţii de regularitate, duala Lagrange, duala Fenchel, duala Fenchel-Lagrange, condiţii optimale, rezultate de tip ε-Farkaş, compunere de funcţii convexe, optimizare cu entropii, soluţii optimale, punct şa, (ε, η)-punct şa, problema de optimizare $(1, 2)$-η-aproximantă.

Chapter 1

Noţiuni şi rezultate preliminare

În acest capitol se prezintă noţiuni si rezultate de bază din analiza convexă, referitoare la mulţimi şi funcţii, care vor fi utilizate in această lucrare.

Chapter 2

Caracterizări pentru "ε-duality gap" în cazul problemelor de optimizare cu restricţii

Pentru aceasta parte se considera doua spatii vectoriale local convexe separate X si Y si spaţiile lor duale X^* and Y^*, înzestrate cu topologia slabă $w(X^*, X)$, respectiv, $w(Y^*, Y)$. Fie conul nevid închis convex $C \subseteq Y$ şi conul său dual C^*.

Fie U o submulţime nevidă a lui X si $h : X \to Y^\bullet$ o funcţie proprie vectorială. Notăm cu $\mathcal{A} = \{x \in U : h(x) \in -C\}$ şi o presupunem nevidă. Pentru o funcţie proprie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ cu $\mathcal{A} \cap dom(f) \neq \emptyset$ considerăm problema de optimizare

$$\inf_{x \in \mathcal{A}} f(x). \tag{P}$$

Se notează cu $v(P)$ valoarea optimă a problemei de optimizare (P). În cele ce urmează se va scrie min(max) în loc de inf(sup) când infimumul (supremumul) este atins.

Pentru $x^* \in X^*$ se consideră problema de optimizare perturbată linear

$$\inf_{x \in \mathcal{A}} \left[f(x) + \langle x^*, x \rangle \right]. \tag{P_{x^*}}$$

Problema duala de tip Fenchel pentru problema (P_{x^*}) este

$$\sup_{\beta \in X^*} \left\{ -f^*(\beta) - \sigma_U(-x^* - \beta) \right\}. \tag{$D^F_{x^*}$}$$

Problemei (P_{x^*}) i se poate atasa problema duala de tip Lagrange

$$\sup_{\lambda\in C^*}\inf_{x\in U}[f(x)+\langle x^*,x\rangle+(\lambda h)(x)], \qquad (D^L_{x^*})$$

care poate fi scrisă şi sub forma

$$\sup_{\lambda\in C^*} -(f+(\lambda h))^*_U(-x^*). \qquad (D^L_{x^*})$$

Pentru un $\lambda\in C^*$, problema de minimizare care apare sub supremum în $(D^L_{x^*})$ poate fi rescrisă astfel

$$\inf_{x\in X}[f(x)+\langle x^*,x\rangle+\delta_U(x)+(\lambda h)(x)].$$

Acestei probleme i se pot ataşa diferite tipuri de duale de tip Fenchel. Numele de Fenchel-Lagrange este dat urmatoarelor duale deoarece ele sunt “combinaţii” ale clasicelor duale Fenchel si Lagrange.

Păstrând împreună δ_U şi (λh) se obţine următoarea duală de tip Fenchel-Lagrange pentru (P_{x^*})

$$\sup_{\substack{\lambda\in C^*,\\ \beta\in X^*}}\left\{-f^*(\beta)-(\lambda h)^*_U(-x^*-\beta)\right\}. \qquad (\overline{D}_{x^*})$$

Când f şi δ_U sunt luate impreună, se obţine

$$\sup_{\substack{\lambda\in C^*,\\ \beta\in X^*}}\left\{-f^*_U(\beta)-(\lambda h)^*(-x^*-\beta)\right\}. \qquad (\widetilde{D}_{x^*})$$

Când f, (λh) şi δ_U sunt luate separat, este obţinută următoarea duală de tip Fenchel-Lagrange pentru (P_{x^*})

$$\sup_{\substack{\lambda\in C^*,\\ \beta,\alpha\in X^*}}\left\{-f^*(\beta)-(\lambda h)^*(\alpha)-\sigma_U(-x^*-\alpha-\beta)\right\}. \qquad (D_{x^*})$$

Când $x^*=0$ aceste duale pentru problema (P) sunt notate simplu $(D^L),(D^F)(\overline{D}),(\widetilde{D})$ şi, respectiv, (D).

2.1 Situaţii de tip "$\varepsilon-$duality gap" obţinute cu ajutorul epigraficelor pentru dualitatea Lagrange, Fenchel şi Fenchel-Lagrange

Inspiraţi de caracterizările pentru dualitatea tare stabilă din [18, 19], în această secţiune se dau câteva reprezentări echivalente pentru diferite situaţii de "ε-duality gap" pentru problema (P) şi dualele ei cu ajutorul epigraficelor. Inspiraţi de [60, 61] se dau, de asemenea, condiţii de regularitate care caracterizează situaţii de tip "ε-duality gap" pentru (P) şi dualele ei cu ajutorul funcţiilor $h^\diamond$ si $h_U^\diamond$ definite astfel $h^\diamond, h_U^\diamond : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ prin $h^\diamond(x^*) = \inf\limits_{\lambda \in C^*} (\lambda h)^*(x^*)$ si $h_U^\diamond(x^*) = \inf\limits_{\lambda \in C^*} (\lambda h)_U^*(x^*)$, pentru $x^* \in X^*$. În plus, în această secţiune, se dau rezultate de tip ε-Farkas obţinute din condiţiile de regularitate prezentate.

2.1.1 Dualitate Lagrange

În această subsectiune se prezintă rezultate referitoare la dualitatea Lagrange.

Teorema 2.1.4 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ si $\varepsilon \geq 0$. Condiţia*

$$epi\,(f + \delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq \bigcup_{\lambda \in C^*} epi(f + (\lambda h))_U^* - (0, \varepsilon) \qquad (RCE^L)$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ există $\overline{\lambda} \in C^*$ astfel incât

$$v(P_{x^*}) \leq -\left(f + (\overline{\lambda} h)\right)_U^* (-x^*) + \varepsilon. \qquad (2.1.1)$$

Remarca 2.1.5 *Cantitatea din dreapta relaţiei* (2.1.1) *nu este neapărat $v(D_{x^*}^L) + \varepsilon$, deoarece supremumul din $(D_{x^*}^L)$ nu se atinge neapărat in $\overline{\lambda}$. Totuşi,* (2.1.1) *implică $v(P_{x^*}) \leq v(D_{x^*}^L) + \varepsilon$.*

Dacă luăm $\varepsilon = 0$ in Teorema 2.1.4 se obţine următorul rezultat.

Corolarul 2.1.6 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$. Condiţia*

$$epi\,(f + \delta_{\mathcal{A}})^* = \bigcup_{\lambda \in C^*} epi(f + (\lambda h))_U^*$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ există $\overline{\lambda} \in C^*$ astfel încât

$$v(P_{x^*}) = -\left(f + (\overline{\lambda} h)\right)_U^* (-x^*).$$

Dacă se alege $f(x) = 0$ pentru orice $x \in X$, (RCE^L) devine

$$epi(\sigma_{\mathcal{A}}) \subseteq \bigcup_{\lambda \in C^*} epi(\lambda h)^*_U - (0, \varepsilon) \qquad (RCE^L_0)$$

Corolarul 2.1.8 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ si $\varepsilon \geq 0$. Condiţia (RCE^L_0) are loc dacă şi numai dacă pentru fiecare $x^* \in X^*$ exita $\overline{\lambda} \in C^*$ astfel incât*

$$\inf_{x \in \mathcal{A}} \langle x^*, x \rangle \leq -(\lambda h)^*_U(-x^*) + \varepsilon. \qquad (2.1.2)$$

Remarca 2.1.9 *Dacă se alege $\varepsilon = 0$ in Corolarul 2.1.8 obţinem egalitate in condiţia (RCE^L_0) şi in relaţia* (2.1.2).

Teorema 2.1.10 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ si $\varepsilon \geq 0$. Condiţia*

$$epi(f + \delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq epi \inf_{\lambda \in C^*} (f + \lambda h)^*_U - (0, \varepsilon) \qquad (RCI^L)$$

are loc dacă şi numai dacă există o situatie "$\varepsilon-$duality gap" stabilă pentru problemele (P) si (D^L), adica, avem "ε-duality gap" pentru perechea de probleme (P_{x^*}) şi $(D^L_{x^*})$ pentru orice $x^* \in X^*$.

Considerăm urmatoarea conditie de regularitate pentru f si $\mathcal{A}$:

$$epi(f + \delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq epi(f^* \Box h^\diamond_U) - (0, \varepsilon). \qquad (\overline{RCI})$$

Teorema 2.1.12 *Fie $\varepsilon \geq 0$. Considerăm condiţia $0 \in sqri(dom(f) - dom(h) \cap U)$ îndeplinită. Mulţimea A si funcţia f satisfac condiţia $(\overline{RCI})$ dacă şi numai dacă există o "$\varepsilon-$duality gap" stabilă pentru problemele (P) şi (D^L), adică, avem "ε-duality gap" pentru perechea de probleme (P_{x^*}) şi $(D^L_{x^*})$, pentru orice $x^* \in X^*$.*

Folosind conditia (RCE^L) se poate obţine următorul rezultat de tip ε-Farkaş.

Teorema 2.1.15 *(i) Presupunem ca (RCE^L) are loc. Dacă $f(x) + \langle x^*, x \rangle \geq \varepsilon/2$ pentru orice $x \in X$ atunci există $\overline{\lambda} \in C^*$ astfel încât $\left(f + (\overline{\lambda} h)\right)^*_U (-x^*) \leq \varepsilon/2$,*

(ii) Dacă există $\overline{\lambda} \in C^*$ astfel încât $\left(f + (\overline{\lambda} h)\right)^*_U (-x^*) \leq -\varepsilon/2$, atunci $f(x) + \langle x^*, x \rangle \geq \varepsilon/2$, pentru orice $x \in X$.

2.1.2 Dualitate Fenchel

Asemanator rezultatelor obtinute pentru dualitatea Lagrange, prezentam in continuare rezultate obţinute pentru dualitatea Fenchel.

Teorema 2.1.16 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ şi $\varepsilon \geq 0$. Condiţia*

$$epi\,(f+\delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq epi(f^*) + epi(\sigma_U) - (0,\varepsilon) \qquad (RCE^F)$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ exista $\overline{\beta} \in X^*$ astfel încât

$$v(P_{x^*}) \leq -f^*(\overline{\beta}) - \sigma_U(-x^* - \overline{\beta}) + \varepsilon. \qquad (2.1.3)$$

Considerăm următoarea condiţie de regularitate pentru f şi $\mathcal{A}$:

$$epi(f+\delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq epi(f^* \Box \sigma_U) - (0,\varepsilon). \qquad (RCI^F)$$

Teorema 2.1.19 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ şi $\varepsilon \geq 0$. Condiţia (RCI^F) are loc dacă şi numai dacă există o "$\varepsilon-$duality gap" stabilă pentru problemele (P) şi (D^F), adică, avem "ε-duality gap" pentru perechea de probleme (P_{x^*}) şi $(D^F_{x^*})$ pentru orice $x^* \in X^*$.*

Folosind (RCE^F) putem obţine urmatorul rezultat de tip ε-Farkaş.

Teorema 2.1.21 *(i) Presupunem ca (RCE^F) are loc. Dacă $f(x) + \langle x^*, x\rangle \geq \varepsilon/2$ pentru orice $x \in X$ atunci există $\overline{\beta} \in X^*$ astfel încât $f^*(\overline{\beta}) + \sigma_U(-x^* - \overline{\beta}) \leq \varepsilon/2$.*

(ii) Dacă există $\overline{\beta} \in X^*$ astfel incât $f^*(\overline{\beta}) + \sigma_U(-x^* - \overline{\beta}) \leq -\varepsilon/2$, atunci $f(x) + \langle x^*, x\rangle \geq \varepsilon/2$ pentru orice $x \in X$.

2.1.3 Dualitate Fenchel-Lagrange

În această subsecţiune se dau condiţii de regularitate, folosind epigraficele, pentru toate cele trei tipuri de duale Fenchel-Lagrange.

Duala Fenchel-Lagrange de tipul I $(\overline{D}_{x^*})$

Începem prin a da rezultate pentru primul tip de duală Fenchel-Lagrange.

Teorema 2.1.22 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ şi $\varepsilon \geq 0$. Condiţia*

$$epi\,(f+\delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq \bigcup_{\lambda \in C^*} (epi(f^*) + epi(\lambda h)^*_U) - (0,\varepsilon) \qquad (\overline{RCE})$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ există $\overline{\lambda} \in C^*$ şi $\overline{\beta} \in X^*$ astfel încât

$$v(P_{x^*}) \leq -f^*(\overline{\beta}) - (\overline{\lambda} h)^*_U(-x^* - \overline{\beta}) + \varepsilon. \qquad (2.1.4)$$

Remarca 2.1.24 *Dacă alegem* $f(x) = 0$, *condiţia* $(\overline{RCE})$ *devine* (RCE_0^L) *şi redescoperim Corolarul 2.1.8.*

Teorema 2.1.27 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *proprie, îndeplinind* $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ *şi* $\varepsilon \geq 0$. *Condiţia*

$$epi(f + \delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq epi(f^* \Box h_U^\diamond) - (0, \varepsilon) \qquad (\overline{RCI})$$

are loc dacă şi numai dacă există o "$\varepsilon-$*duality gap" stabilă pentru problemele* (P) *şi* $(\overline{D})$, *adică, avem "*ε*-duality gap" pentru perechea de probleme* (P_{x^*}) *şi* $(\overline{D}_{x^*})$ *pentru orice* $x^* \in X^*$.

Teorema 2.1.29 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *proprie, indeplinind* $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ *si* $\varepsilon \geq 0$. *Condiţia*

$$epi\,(f + \delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq epi(f^*) + epi(h_U^\diamond) - (0, \varepsilon) \qquad (\overline{RCP})$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ *există* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel încât*

$$v(P_{x^*}) \leq \sup_{\lambda \in C^*} \left\{ -f^*(\overline{\beta}) - (\lambda h)_U^*(-x^* - \overline{\beta}) \right\} + \varepsilon.$$

Cu ajutorul condiţiei $(\overline{RCE})$ se poate obţine următorul rezultat de tip ε-Farkaş.

Teorema 2.1.31 *(i) Presupunem că* $(\overline{RCE})$ *are loc. Dacă* $f(x) + \langle x^*, x\rangle \geq \varepsilon/2$ *pentru orice* $x \in X$ *atunci există* $\overline{\lambda} \in C^*$ *şi* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel incât* $f^*(\overline{\beta}) + (\overline{\lambda} h)_U^*(-x^* - \overline{\beta}) \leq \varepsilon/2$.

(ii) Daca există $\overline{\lambda} \in C^*$ *şi* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel incât* $f^*(\overline{\beta}) + (\overline{\lambda} h)_U^*(-x^* - \overline{\beta}) \leq -\varepsilon/2$, *atunci* $f(x) + \langle x^*, x\rangle \geq \varepsilon/2$ *pentru orice* $x \in X$.

Duala Fenchel-Lagrange de tipul II $(\widetilde{D}_{x^*})$

În continuare se dau rezultate privind al doilea tip de duală Fenchel-Lagrange.

Teorema 2.1.32 *Fie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *proprie, îndeplinind* $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ *si* $\varepsilon \geq 0$. *Condiţia*

$$epi\,(f + \delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq \bigcup_{\lambda \in C^*} (epi(f_U^*) + epi(\lambda h)^*) - (0, \varepsilon) \qquad (\widetilde{RCE})$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ *exista* $\overline{\lambda} \in C^*$ *si* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel incât*

$$v(P_{x^*}) \leq -f_U^*(\overline{\beta}) - (\overline{\lambda} h)^*(-x^* - \overline{\beta}) + \varepsilon. \qquad (2.1.5)$$

Teorema 2.1.36 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, indeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ si $\varepsilon \geq 0$. Conditia*

$$epi(f + \delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq epi(f_U^* \Box h^\diamond) - (0, \varepsilon) \qquad (\widetilde{RCI})$$

are loc dacă şi numai dacă exista o "$\varepsilon-$duality gap" stabilă pentru problemele (P) şi $(\widetilde{D})$, adică, avem "ε-duality gap" pentru perechea de probleme (P_{x^*}) şi $(\widetilde{D}_{x^*})$ pentru orice $x^* \in X^*$.

Teorema 2.1.40 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ şi $\varepsilon \geq 0$. Condiţia*

$$epi\,(f + \delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq epi(f_U^*) + epi(h^\diamond) - (0, \varepsilon) \qquad (\widetilde{RCP})$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ există $\overline{\beta} \in X^*$ astfel incât

$$v(P_{x^*}) \leq \sup_{\lambda \in C^*} \left\{ -f_U^*(\overline{\beta}) - (\lambda h)^*(-x^* - \overline{\beta}) \right\} + \varepsilon.$$

Cu ajutorul relatiei $(\widetilde{RCE})$ se poate obţine urmatorul rezultat de tip ε-Farkaş.

Teorema 2.1.42 *(i) Presupunem ca $(\widetilde{RCE})$ are loc. Daca $f(x) + \langle x^*, x\rangle \geq \varepsilon/2$ pentru orice $x \in X$ atunci există $\overline{\lambda} \in C^*$ şi $\overline{\beta} \in X^*$ astfel incât $f_U^*(\overline{\beta}) + (\overline{\lambda} h)^*(-x^* - \overline{\beta}) \leq \varepsilon/2$.*

(ii) Dacă există $\overline{\lambda} \in C^*$ si $\overline{\beta} \in X^*$ astfel încât $f_U^*(\overline{\beta}) + (\overline{\lambda} h)^*(-x^* - \overline{\beta}) \leq -\varepsilon/2$, atunci $f(x) + \langle x^*, x\rangle \geq \varepsilon/2$ pentru orice $x \in X$.

Duala Fenchel-Lagrange de tipul III (D_{x^*})

Prezentăm in continuare rezultate referitoare la al treilea tip de duala Fenchel-Lagrange.

Teorema 2.1.43 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ şi $\varepsilon \geq 0$. Condiţia*

$$epi\,(f + \delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq \bigcup_{\lambda \in C^*} (epi(f^*) + epi(\lambda h)^* + epi(\sigma_U)) - (0, \varepsilon) \qquad (RCE)$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ exista $\overline{\lambda} \in C^*$ si $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta} \in X^*$ astfel încât

$$v(P_{x^*}) \leq -f^*(\overline{\beta}) - (\overline{\lambda} h)^*(\overline{\alpha}) - \sigma_U(-x^* - \overline{\beta} - \overline{\alpha}) + \varepsilon. \qquad (2.1.6)$$

Teorema 2.1.49 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, indeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ si $\varepsilon \geq 0$. Condiţia*

$$epi(f + \delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq epi(f^* \Box h^\diamond \Box \sigma_U) - (0, \varepsilon) \qquad (RCI)$$

are loc dacă şi numai dacă există o "$\varepsilon-$duality gap" stabila pentru problemele (P) şi (D), adică, avem "ε-duality gap" pentru perechea de probleme (P_{x^*}) şi (D_{x^*}) pentru orice $x^* \in X^*$.

Teorema 2.1.52 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ si $\varepsilon \geq 0$. Condiţia*

$$epi\,(f + \delta_{\mathcal{A}})^* \subseteq epi(f^*) + epi(h^\diamond) + epi(\sigma_U) - (0, \varepsilon) \qquad (RCP)$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ există $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta} \in X^*$ astfel încât

$$v(P_{x^*}) \leq \sup_{\lambda \in C^*} \left\{ -f^*(\overline{\beta}) - (\lambda h)^*(\overline{\alpha}) - \sigma_U(-x^* - \overline{\beta} - \overline{\alpha}) \right\} + \varepsilon.$$

Cu ajutorul condiţiei (RCE) se poate obţine următorul rezultat de tip ε-Farkaş.

Teorema 2.1.54 *(i) Presupunem că (RCE) are loc. Dacă $f(x) + \langle x^*, x \rangle \geq \varepsilon/2$ pentru orice $x \in X$ atunci există $\overline{\lambda} \in C^*$ si $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in X^*$ astfel incât $f^*(\overline{\beta}) + (\overline{\lambda} h)^*(\overline{\alpha}) + \sigma_U(-x^* - \overline{\beta} - \overline{\alpha}) \leq \varepsilon/2$.*

(ii) Dacă există $\overline{\lambda} \in C^*$ si $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in X^*$ astfel incât $f^*(\overline{\beta}) + (\overline{\lambda} h)^*(\overline{\alpha}) + \sigma_U(-x^* - \overline{\beta} - \overline{\alpha}) \leq -\varepsilon/2$, atunci $f(x) + \langle x^*, x \rangle \geq \varepsilon/2$ pentru orice $x \in X$.

2.2 Situaţii de tip "$\varepsilon-$duality gap" obţinute cu ajutorul $\varepsilon-$subdiferenţialelor pentru dualitatea Lagrange, Fenchel şi Fenchel-Lagrange

În această secţiune se introduc condiţii de regularitate pentru a caracteriza situaţii de tip "ε-duality gap" folosind ε-subdiferentiale, in condiţiile în care se presupune ca exista o ε-solutie optimă pentru problema primală. Reamintim ca, pentru $x^* \in X^*$, $\overline{x} \in \mathcal{A} \cap dom(f)$ este o *ε-soluţie optimă pentru* (P_{x^*}) daca si numai daca $0 \in \partial_\varepsilon(f + x^* + \delta_{\mathcal{A}})(\overline{x})$, ceea ce este echivalent cu $-x^* \in \partial_\varepsilon(f + \delta_{\mathcal{A}})(\overline{x})$. Din rezultatele prezentate in aceasta sectiune si in cea anterioară se pot obţine rezultate referitoare la condiţii ε-optime.

2.2.1 Dualitate Lagrange

Prezentam rezultate referitoare la dualitatea Lagrange.

Teorema 2.2.1 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ şi $\varepsilon \geq 0$. Condiţia*

$$\partial_\varepsilon(f + \delta_{\mathcal{A}})(\overline{x}) = \bigcup_{\lambda \in C^*} \partial_{\varepsilon+(\lambda h)(\overline{x})}(f + \delta_U + (\lambda h))(\overline{x}) \qquad (RCL^L)$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ pentru care $\overline{x}$ este o ε-solutie optimă pentru (P_{x^*}) există $\overline{\lambda} \in C^*$ astfel incât

$$f(\overline{x}) + \langle x^*, \overline{x}\rangle \leq -(f + (\overline{\lambda}h))^*_U(-x^*) + \varepsilon. \qquad (2.2.1)$$

Remarca 2.2.2 *Cantitatea din partea stângă a relaţiei* (2.2.1) *nu este neapărat $v(P_{x^*})$, in timp ce, în partea dreaptă avem ceva mai mic decât $v(D^L_{x^*})+\varepsilon$. Oricum,* (2.2.1) *implică $v(P_{x^*}) \leq v(D^L_{x^*}) + \varepsilon$.*

Teorema 2.2.4 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ şi $\varepsilon \geq 0$. Condiţia*

$$\partial_\varepsilon(f + \delta_{\mathcal{A}})(\overline{x}) = \bigcap_{\eta > 0} \bigcup_{\lambda \in C^*} \partial_{\varepsilon+\eta+(\lambda h)(\overline{x})}(f + \delta_U + (\lambda h))(\overline{x}) \qquad (RCS^L)$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ pentru care $\overline{x}$ este o ε-solutie optimă pentru (P_{x^*}) are loc

$$f(\overline{x}) + \langle x^*, \overline{x}\rangle \leq \sup_{\lambda \in C^*} \inf_{x \in U} [f(x) + \langle x^*, x\rangle + (\lambda h)(x)] + \varepsilon. \qquad (2.2.2)$$

Remarca 2.2.5 *Relaţia* (2.2.2) *implică $v(P_{x^*}) \leq v(D^L_{x^*})+\varepsilon$, fără a exista, in general, o implicaţie reciprocă.*

În continuare prezentăm un rezultat referitor la condiţii de ε-optim.

Teorema 2.2.9 *Presupunem ca este îndeplinită condiţia (RCI^L).*

(a) Fie $\varepsilon, \eta \geq 0$. Daca $\overline{x}$ este o ε-solutie optimă a problemei (P), atunci există $\overline{\lambda} \in C^*$ astfel încât

$$(f + (\overline{\lambda}h))^*_U(0) + (f + (\overline{\lambda}h))_U(\overline{x}) \leq \varepsilon + \eta + (\overline{\lambda}h)(\overline{x}). \qquad (2.2.3)$$

În plus, $\overline{\lambda}$ este o $(\varepsilon + \eta)$-soluţie optimă a problemei (D^L).

(b) Daca exista $\overline{\lambda} \in C^*$ astfel incat relatia (2.2.3) *are loc pentru $\overline{x} \in X$ si $\overline{\lambda} \in C^*$ atunci $\overline{x}$ este o ε-solution optimala a problemei (P). In plus, $\overline{\lambda}$ este o $(\varepsilon + \eta)$-solutie optimă a problemei (D^L).*

2.2.2 Dualitate Fenchel

In continuare prezentăm rezultate referitoare la dualitatea Fenchel.

Teorema 2.2.10 *Fie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *proprie, indeplinind* $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ *si* $\varepsilon \geq 0$. *Condiţia*

$$\partial_\varepsilon(f + \delta_{\mathcal{A}})(\overline{x}) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_i \geq 0, i=1,2 \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon}} (\partial_{\varepsilon_1} f(\overline{x}) + \partial_{\varepsilon_2}\delta_U(\overline{x})) \qquad (RCL^F)$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ *pentru care* $\overline{x}$ *este o* ε*-solutie optimă pentru* (P_{x^*}) *există* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel incât*

$$f(\overline{x}) + \langle x^*, \overline{x}\rangle \leq -f^*(\overline{\beta}) - \sigma_U(-x^* - \overline{\beta}) + \varepsilon. \qquad (2.2.4)$$

Teorema 2.2.12 *Fie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *proprie, îndeplinind* $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ *şi* $\varepsilon \geq 0$. *Condiţia*

$$\partial_\varepsilon(f + \delta_{\mathcal{A}})(\overline{x}) = \bigcap_{\eta>0} \bigcup_{\substack{\varepsilon_i \geq 0, i=1,2 \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon+\eta}} (\partial_{\varepsilon_1} f(\overline{x}) + \partial_{\varepsilon_2}\delta_U(\overline{x})) \qquad (RCS^F)$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ *pentru care* $\overline{x}$ *este o* ε*-solutie optimă pentru* (P_{x^*}) *are loc*

$$f(\overline{x}) + \langle x^*, \overline{x}\rangle \leq \sup_{\beta \in X^*} \{-f^*(\beta) - \sigma_U(-x^* - \beta)\} + \varepsilon. \qquad (2.2.5)$$

Acum, prezentam un rezultat referitor la condiţii de ε-optim.

Teorema 2.2.14 *Presupunem ca este indeplinita conditia* (RCI^F).

(a) Fie $\varepsilon, \eta \geq 0$. *Daca* $\overline{x}$ *este o* ε*-solutie optimă a problemei* (P)*, atunci exista* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel incat*

(i) $f(\overline{x}) + f^*(\overline{\beta}) \leq \left\langle \overline{\beta}, \overline{x} \right\rangle + \varepsilon_1$,

(ii) $\sigma_U(-\overline{\beta}) + \delta_U(\overline{x}) \leq \left\langle -\overline{\beta}, \overline{x} \right\rangle + \varepsilon_2$,

(iii) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon + \eta$.

In plus, $\overline{\beta}$ *este o* $(\varepsilon + \eta)$*-solutie optimala a problemei* (D^F).

(b) Daca exista $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ *si* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel incat relatiile (i)-(iii) au loc pentru* $\overline{x} \in X$ *si* $\overline{\beta} \in X^*$ *atunci* $\overline{x}$ *este o* ε*-solutie optimă a problemei* (P)*. In plus,* $\overline{\beta}$ *este o* $(\varepsilon + \eta)$*-solutie optimă a problemei* (D^F).

2.2.3 Dualitate Fenchel-Lagrange

În această subsectiune se prezintă condiţii de regularitate, folosind ε-subdiferenţiale, pentru toate cele trei tipuri de duale Fenchel-Lagrange.

Duala Fenchel-Lagrange de tipul I ($\overline{D}_{x^*}$)

Începem prin a prezenta rezultate pentru primul tip de duală Fenchel-Lagrange.

Teorema 2.2.15 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ si $\varepsilon \geq 0$. Condiţia*

$$\partial_\varepsilon(f + \delta_\mathcal{A})(\overline{x}) = \bigcup_{\substack{\lambda \in C^* \\ \varepsilon_i \geq 0,\ i=1,2 \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon+(\lambda h)(\overline{x})}} (\partial_{\varepsilon_1} f(\overline{x}) + \partial_{\varepsilon_2}(\delta_U + (\lambda h))(\overline{x})) \qquad (\overline{RCL})$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ pentru care $\overline{x}$ este o ε-solutie optimă pentru (P_{x^*}) există $\overline{\lambda} \in C^*$ si $\overline{\beta} \in X^*$ astfel încât

$$f(\overline{x}) + \langle x^*, \overline{x} \rangle \leq -f^*(\overline{\beta}) - (\overline{\lambda} h)^*_U(-x^* - \overline{\beta}) + \varepsilon. \qquad (2.2.6)$$

Teorema 2.2.19 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ proprie, îndeplinind $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ si $\varepsilon \geq 0$. Condiţia*

$$\partial_\varepsilon(f + \delta_\mathcal{A})(\overline{x}) = \bigcap_{\eta > 0} \bigcup_{\substack{\lambda \in C^* \\ \varepsilon_i \geq 0,\ i=1,2 \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon+\eta+(\lambda h)(\overline{x})}} \left(\partial_{\varepsilon_1} f(\overline{x}) + \partial_{\varepsilon_2} \left(\delta_U + (\lambda h)\right)(\overline{x})\right) \qquad (\overline{RCS})$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ pentru care $\overline{x}$ este o ε-solutie optimă pentru (P_{x^*}) are loc

$$f(\overline{x}) + \langle x^*, \overline{x} \rangle \leq \sup_{\substack{\lambda \in C^*, \\ \beta \in X^*}} \{-f^*(\beta) - (\lambda h)^*_U(-x^* - \beta)\} + \varepsilon. \qquad (2.2.7)$$

In continuare dăm un rezultat referitor la condiţii de ε-optim.

Teorema 2.2.22 *Presupunem ca este îndeplinită condiţia ($\overline{RCI}$).*

(a) Fie $\varepsilon, \eta \geq 0$. Dacă $\overline{x}$ este o ε-solutie optimă a problemei (P), atunci există $\overline{\lambda} \in C^*$ si $\overline{\beta} \in X^*$ astfel incât

(i) $f(\overline{x}) + f^*(\overline{\beta}) \leq \left\langle \overline{\beta}, \overline{x} \right\rangle + \varepsilon_1$,

(ii) $(\overline{\lambda} h)^*_U(-\overline{\beta}) + (\overline{\lambda} h)_U(\overline{x}) \leq \langle -\overline{\beta}, \overline{x} \rangle + \varepsilon_2.$,

(iii) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon + \eta + (\overline{\lambda} h)(\overline{x})$.

În plus, $(\overline{\lambda}, \overline{\beta})$ *este o* $(\varepsilon + \eta)$*-solutie optimă a problemei* $(\overline{D})$.

(b) Dacă există $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$, $\overline{\lambda} \in C^*$ *si* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel incât relaţiile (i)-(iii) au loc pentru* $\overline{x} \in X$, $\overline{\lambda} \in C^*$ *si* $\overline{\beta} \in X^*$ *atunci* $\overline{x}$ *este o* ε*-solutie optimă a problemei* (P)*. În plus,* $(\overline{\lambda}, \overline{\beta})$ *este o* $(\varepsilon + \eta)$*-solutie optimă a problemei* $(\overline{D})$.

Duala Fenchel-Lagrange de tipul II $(\widetilde{D}_{x^*})$

Prezentăm in continuare resultate referitoare la al doilea tip de duală Fenchel-Lagrange.

Teorema 2.2.23 *Fie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *proprie, îndeplinind* $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ *şi* $\varepsilon \geq 0$*. Condiţia*

$$\partial_\varepsilon (f + \delta_{\mathcal{A}})(\overline{x}) = \bigcup_{\substack{\lambda \in C^* \\ \varepsilon_i \geq 0,\ i=1,2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon + (\lambda h)(\overline{x})}} (\partial_{\varepsilon_1} f_U(\overline{x}) + \partial_{\varepsilon_2}(\lambda h)(\overline{x})) \qquad (\widetilde{RCL})$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ *pentru care* $\overline{x}$ *este o* ε*-solutie optimă pentru* (P_{x^*}) *există* $\overline{\lambda} \in C^*$ *şi* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel încât*

$$f(\overline{x}) + \langle x^*, \overline{x} \rangle \leq -f_U^*(\overline{\beta}) - (\overline{\lambda} h)^*(-x^* - \overline{\beta}) + \varepsilon. \qquad (2.2.8)$$

Teorema 2.2.27 *Fie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *proprie, îndeplinind* $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ *si* $\varepsilon \geq 0$*. Condiţia*

$$\partial_\varepsilon (f + \delta_{\mathcal{A}})(\overline{x}) = \bigcap_{\eta > 0} \bigcup_{\substack{\lambda \in C^* \\ \varepsilon_i \geq 0,\ i=1,2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon + \eta + (\lambda h)(\overline{x})}} (\partial_{\varepsilon_1} f_U(\overline{x}) + \partial_{\varepsilon_2}(\lambda h)(\overline{x})) \qquad (\widetilde{RCS})$$

are loc daca si numai daca pentru orice $x^* \in X^*$ *pentru care* $\overline{x}$ *este o* ε*-solutie optimă pentru* (P_{x^*}) *are loc*

$$f(\overline{x}) + \langle x^*, \overline{x} \rangle \leq \sup_{\substack{\lambda \in C^*, \\ \beta \in X^*}} \{-f_U^*(\beta) - (\lambda h)^*(-x^* - \beta)\} + \varepsilon. \qquad (2.2.9)$$

In continuare dam un rezultat referitor la condiţii de ε-optim.

Teorema 2.2.29 *Presupunem ca este indeplinită condiţia* $(\widetilde{RCI})$.

(a) Let $\varepsilon, \eta \geq 0$*. Dacă* $\overline{x}$ *este o* ε*-solutie optimă a problemei* (P)*, atunci există* $\overline{\lambda} \in C^*$ *si* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel încât*

(i) $f_U(\overline{x}) + f_U^*(\overline{\beta}) \leq \langle \overline{\beta}, \overline{x} \rangle + \varepsilon_1$,

(ii) $(\overline{\lambda} h)^*(-\overline{\beta}) + (\overline{\lambda} h)(\overline{x}) \leq \langle -\overline{\beta}, \overline{x} \rangle + \varepsilon_2$.,

(iii) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon + \eta + (\overline{\lambda}h)(\overline{x})$.

În plus, $(\overline{\lambda}, \overline{\beta})$ *este o* $(\varepsilon + \eta)$*-soluţie optimă a problemei* $(\widetilde{D})$.

(b) Dacă există $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$, $\overline{\lambda} \in C^*$ *şi* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel încât relaţiile (i)-(iii) au loc pentru* $\overline{x} \in X$, $\overline{\lambda} \in C^*$ *şi* $\overline{\beta} \in X^*$ *atunci* $\overline{x}$ *este o* ε*-solutie optimă a problemei* (P)*. In plus,* $(\overline{\lambda}, \overline{\beta})$ *este o* $(\varepsilon + \eta)$*-solutie optimala a problemei* $(\widetilde{D})$.

Duala Fenchel-Lagrange de tipul III (D_{x^*})

Urmează rezultate referitoare la al treilea tip de duală Fenchel-Lagrange.

Teorema 2.2.30 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *proprie, îndeplinind* $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ *si* $\varepsilon \geq 0$*. Condiţia*

$$\partial_\varepsilon(f + \delta_{\mathcal{A}})(\overline{x}) = \bigcup_{\substack{\lambda \in C^* \\ \varepsilon_i \geq 0,\ i=1,2,3 \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon+(\lambda h)(\overline{x})}} (\partial_{\varepsilon_1} f(\overline{x}) + N_U^{\varepsilon_2}(\overline{x}) + \partial_{\varepsilon_3}(\lambda h)(\overline{x})) \qquad (RCL)$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ *pentru care* $\overline{x}$ *este o* ε*-solutie optimă pentru* (P_{x^*}) *există* $\overline{\lambda} \in C^*$ *si* $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in X^*$ *astfel încât*

$$f(\overline{x}) + \langle x^*, \overline{x} \rangle \leq -f^*(\overline{\beta}) - (\overline{\lambda}h)^*(\overline{\alpha}) - \sigma_U(-x^* - \overline{\beta} - \overline{\alpha}) + \varepsilon. \qquad (2.2.10)$$

Remarca 2.2.31 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Cantitatea din stânga relaţiei* (2.2.10) *nu este neapărat* $v(P)$*, în timp ce, în partea dreaptă avem ceva mai mic decât* $v(D_{x^*}) + \varepsilon$*. Oricum,* (2.2.10) *implică* $v(P_{x^*}) \leq v(D_{x^*}) + \varepsilon$.

Teorema 2.2.34 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [7]) Fie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *proprie, îndeplinind* $A \cap dom(f) \neq \emptyset$ *şi* $\varepsilon \geq 0$*. Condiţia*

$$\partial_\varepsilon(f + \delta_{\mathcal{A}})(\overline{x}) = \bigcap_{\eta > 0} \bigcup_{\substack{\lambda \in C^* \\ \varepsilon_i \geq 0,\ i=1,2,3 \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon+\eta+(\lambda h)(\overline{x})}} (\partial_{\varepsilon_1} f(\overline{x}) + N_U^{\varepsilon_2}(\overline{x}) + \partial_{\varepsilon_3}(\lambda h)(\overline{x})) \qquad (RCS)$$

are loc dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ *pentru care* $\overline{x}$ *este o* ε*-solutie optimă pentru* (P_{x^*}) *are loc*

$$f(\overline{x}) + \langle x^*, \overline{x} \rangle \leq \sup_{\substack{\lambda \in C^*, \\ \alpha, \beta \in X^*}} \{-f^*(\beta) - \sigma_U(-x^* - \beta - \alpha) - (\lambda h)^*(\alpha)\} + \varepsilon. \qquad (2.2.11)$$

Dam acum un rezultat referitor la condiţii de ε-optim.

Teorema 2.2.41 *Presupunem ca este îndeplinita condiţia* (RCI).

(a) Fie $\varepsilon, \eta \geq 0$. Dacă $\overline{x}$ este o ε-solutie optimă a problemei (P), atunci există $\overline{\lambda} \in C^*$ si $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in X^*$ astfel încât

(i) $f(\overline{x}) + f^*(\overline{\beta}) \leq \langle \overline{\beta}, \overline{x} \rangle + \varepsilon_1$,

(ii) $(\overline{\lambda}h)(\overline{x}) + (\overline{\lambda}h)^*(\overline{\alpha}) \leq \langle \overline{\alpha}, \overline{x} \rangle + \varepsilon_2$,

(iii) $\delta_U(\overline{x}) + \sigma_U(-\overline{\alpha} - \overline{\beta}) \leq \langle -\overline{\alpha} - \overline{\beta}, \overline{x} \rangle + \varepsilon_3$,

(iv) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon + \eta + (\overline{\lambda}h)(\overline{x})$.

În plus, $(\overline{\lambda}, \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ este o $(\varepsilon + \eta)$-solutie optimă a problemei (D).

(b) Dacă există $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq 0$, $\overline{\lambda} \in C^*$ şi $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in X^*$ astfel încât relaţiile (i)-(iv) au loc pentru $\overline{x} \in X$, $\overline{\lambda} \in C^*$ şi $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in X^*$ atunci $\overline{x}$ este o ε-solutie optimă a problemei (P). In plus, $(\overline{\lambda}, \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ este o $(\varepsilon + \eta)$-soluţie optimă a problemei (D).

Remarca 2.2.42 *Rezultate similare referitoare la condiţii de ε-optim pentru (P) si dualele ei considerate, au fost obţinute si in [18, 19]. Rezultatele referitoare la condiţii de ε-optim prezentate in acest capitol extind rezultatele obţinute lucrările mentionate.*

Chapter 3

Caracterizări pentru "ε-duality gap" in cazul problemelor de optimizare compuse

Considerăm două spaţii vectoriale local convexe separate X si Y şi spaţiile lor duale X^* and Y^*, înzestrate cu topologia slabă $w(X^*, X)$, respectiv, $w(Y^*, Y)$. Fie conul nevid închis convex $C \subseteq Y$ si conul său dual C^*. Pe Y se consideră ordinea parţială "$\leqq_C$" indusă de conul convex C.

Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie si C-crescătoare si $h : X \to Y^\bullet$ o funcţie proprie vectorială îndeplinind $domg \cap (h(domf) + C) \neq \emptyset$. Considerăm problema de optimizare

$$\inf_{x \in X} [f(x) + (g \circ h)(x)]. \qquad (P^C)$$

Pentru $x^* \in X^*$ se consideră problema de optimizare perturbată linear

$$\inf_{x \in X} \left[f(x) + (g \circ h)(x) - \langle x^*, x \rangle \right]. \qquad (P^C_{x^*})$$

Acestei probleme i se pot ataşa diferite duale de tip Fenchel-Lagrange. Dacă f şi (λh) sunt luate impreună se obţine urmatoarea duala pentru problema $(P^C_{x^*})$

$$\sup_{\lambda \in C^*} \{-g^*(\lambda) - (f + (\lambda h))^*(x^*)\}. \qquad (D^C_{x^*})$$

Când f si (λh) sunt separate, se obţine următoarea duală

$$\sup_{\substack{\lambda\in C^*,\\ \beta\in X^*}} \{-g^*(\lambda) - f^*(\beta) - (\lambda h)^*(x^* - \beta)\}. \tag{$\overline{D^C_{x^*}}$}$$

Se notează cu $v(P^C)$ valoarea optimă a problemei (P^C). Se poate observa ca $v(\overline{D^C_{x^*}}) \leq v(D^C_{x^*}) \leq v(P^C_{x^*})$ pentru orice $x^* \in X^*$. Când $x^* = 0$ aceste duale sunt notate simplu cu (D^C), respectiv cu, $(\overline{D^C})$.

Între (P^C) si dualele ei există întotdeauna *dualitate slabă*, adică, $v(P^C) \geq v(D^C)$, respectiv, $v(P^C) \geq v(\overline{D^C})$. Când $v(P^C) = v(D^C)$ se spune că avem "*zero duality gap*" între (P^C) şi (D^C) şi, dacă, (D^C) are soluţie optimă, situaţia se numeste *dualitate tare*. Daca $v(P^C) - v(D^C) \leq \varepsilon$, cu $\varepsilon \geq 0$, se spune ca avem o "ε-*duality gap*" pentru (P^C) si (D^C). Dacă una din aceste situaţii are loc pentru $(P^C_{x^*})$ şi $(D^C_{x^*})$ pentru orice $x^* \in X^*$, se va numi *stabilă*.

3.1 Situaţii de tip "$\varepsilon-$duality gap" obţinute cu ajutorul epigraficelor

Fie $\varepsilon \geq 0$. Considerăm urmatoarele condiţii de regularitate

$$\left|\begin{array}{l} \{(x^*,0,r) : (x^*,r) \in epi(f + g\circ h)^*\} \subseteq [\{0\}\times epi(g^*) + \bigcup\limits_{\lambda\in C^*} \{(a,-\lambda,r) : \\ (a,r) \in epi((f + (\lambda h))^*)\}] \cap (X^* \times \{0\} \times \mathbb{R}) - (0,0,\varepsilon) \end{array}\right. \tag{RC}$$

şi

$$\left|\begin{array}{l} \{(x^*,0,r) : (x^*,r) \in epi(f + g\circ h)^*\} \subseteq [\{0\}\times epi(g^*) + \{(x^*,0,r) : \\ (x^*,r) \in epi(f^*)\} + \bigcup\limits_{\lambda\in C^*} \{(a,-\lambda,r) : (a,r) \in epi((\lambda h)^*)\}] \cap \\ (X^* \times \{0\} \times \mathbb{R}) - (0,0,\varepsilon) \end{array}\right. \tag{$\overline{RC}$}$$

Ele sunt inspirate condiţii de regularitate de tip închidere din [11], dar spre deosebire de acestea, noi nu folosim ipoteze topologice sau de convexitate.

Teorema 3.1.2 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) Condiţia (RC) este indeplinită dacă si numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$ există un $\overline{\lambda} \in C^*$ astfel încât*

$$(f + g\circ h)^*(x^*) \geq g^*(\overline{\lambda}) + (f + (\overline{\lambda}h))^*(x^*) - \varepsilon. \tag{3.1.1}$$

Remarca 3.1.3 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) În partea stangă a relaţiei* (3.1.1) *se poate recunoaşte* $-v(P^C_{x^*})$. *Cantitatea din partea dreaptă din relaţia* (3.1.1) *nu este neapărat* $-v(D^C_{x^*})-\varepsilon$, *deoarece supremumul din* $(D^C_{x^*})$ *nu se atinge neapărat in* $\overline{\lambda}$. *Totuşi,* (3.1.1) *implică* $v(P^C_{x^*}) \leq v(D^C_{x^*})+\varepsilon$, *ceea ce inseamnă că pentru perechea de probleme* $(P^C_{x^*})$ *şi* $(D^C_{x^*})$ *există o "*ε*-duality gap". Astfel,* (RC) *conduce la o "*ε*-duality gap" stabilă pentru* (P^C) *si* (D^C). *Observăm că* $\overline{\lambda} \in C^*$ *obţinut in Teorema 3.1.2 este o* ε*-solutie optimă a problemei* $(D^C_{x^*})$.

Rezultate similare pot fi obţinute si pentru $(\overline{D^C})$ folosind condiţia $(\overline{RC})$.

Teorema 3.1.8 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) Condiţia* $(\overline{RC})$ *este îndeplinită dacă şi numai dacă pentru orice* $x^* \in X^*$ *există* $\overline{\lambda} \in C^*$ *şi* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel încât*

$$(f + g \circ h)^*(x^*) \geq g^*(\overline{\lambda}) + f^*(\overline{\beta}) + (\overline{\lambda}h)^*(x^* - \overline{\beta}) - \varepsilon. \tag{3.1.2}$$

Pentru a obţine formulări similare cu (3.1.1) şi (3.1.2), unde apar valorile optime a problemelor (D^C) si $(\overline{D^C})$, considerăm urmatoarele condiţii de regularitate

$$epi(f + g \circ h)^* \subseteq epi \inf_{\lambda \in C^*} [g^*(\lambda) + (f + (\lambda h))^*(\cdot)] - (0, \varepsilon) \tag{RCI}$$

si

$$epi(f + g \circ h)^* \subseteq epi \inf_{\substack{\lambda \in C^* \\ \beta \in X^*}} [g^*(\lambda) + f^*(\beta) + (\lambda h)^*(\cdot - \beta)] - (0, \varepsilon). \tag{$\overline{RCI}$}$$

Teorema 3.1.5 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) Condiţia* (RCI) *este îndeplinită dacă şi numai dacă pentru orice* $x^* \in X^*$ *avem*

$$(f + g \circ h)^*(x^*) \geq \inf_{\lambda \in C^*} [g^*(\lambda) + (f + (\lambda h))^*(x^*)] - \varepsilon. \tag{3.1.3}$$

Remarca 3.1.16 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) Relaţia* (3.1.3) *înseamnă de fapt* $v(P^C_{x^*}) \leq v(D^C_{x^*}) + \varepsilon$, *adică, avem "*$\varepsilon$*-duality gap" stabilă pentru* (P^C) *şi* (D^C).

Teorema 3.1.19 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) Condiţia* $(\overline{RCI})$ *este îndeplinită dacă şi numai dacă pentru orice* $x^* \in X^*$ *avem*

$$(f + g \circ h)^*(x^*) \geq \inf_{\substack{\lambda \in C^* \\ \beta \in X^*}} [g^*(\lambda) + f^*(\beta) + (\lambda h)^*(x^* - \beta)] - \varepsilon. \tag{3.1.4}$$

Remarca 3.1.22 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) Luând în considerare Teorema 3.1.2, Teorema 3.1.8, Teorema 3.1.15 si Teorema 3.1.19 obţinem următoarele implicaţii:* $(\overline{RC}) \Rightarrow (RC) \Rightarrow (RCI)$ *and* $(\overline{RC}) \Rightarrow (\overline{RCI}) \Rightarrow (RCI)$.

3.2 Cazuri speciale

Rezultatele pe care le-am prezentat pentru funcţii compuse pot fii particularizate pentru combinaţii de funcţii care apar atât in probleme teoretice cât şi practice.

3.3 Situaţii de tip "$\varepsilon-$duality gap" obţinute cu ajutorul $\varepsilon-$subdiferenţialelor

În această secţiune arătăm ca relaţiile $(3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4)$ pot fi caracterizate şi cu condiţii de regularitate folosind subdiferenţiale, respectiv, $\varepsilon-$subdiferenţiale.

Teorema 3.3.1 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) Avem*

$$\partial(f+g\circ h)(x) \subseteq \bigcap_{\eta>0} \bigcup_{\substack{\varepsilon_{1,2}\geq 0 \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon+\eta \\ \lambda\in C^*\cap\partial_{\varepsilon_2}g(h(x))}} \partial_{\varepsilon_1}(f+(\lambda h))(x) \tag{$RCSC$}$$

pentru orice $x \in X$ dacă şi numai dacă $(3.1.3)$ *are loc pentru orice $x^* \in R(\partial(f+g\circ h))$.*

Teorema 3.3.6 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) Avem*

$$\partial(f+g\circ h)(x) \subseteq \bigcup_{\substack{\varepsilon_{1,2}\geq 0 \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon \\ \lambda\in C^*\cap\partial_{\varepsilon_2}g(h(x))}} \partial_{\varepsilon_1}(f+(\lambda h))(x) \tag{$RCLC$}$$

pentru orice $x \in X$ dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in R(\partial(f+g\circ h))$, există $\overline{\lambda} \in C^*$ astfel încât $(3.1.1)$ *are loc.*

Teorema 3.3.8 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) Avem*

$$\partial(f+g\circ h)(x) \subseteq \bigcap_{\eta>0} \bigcup_{\substack{\varepsilon_{1,2}\geq 0 \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon+\eta \\ \lambda\in C^*\cap\partial_{\varepsilon_3}g(h(x))}} \partial_{\varepsilon_1}f(x)+\partial_{\varepsilon_2}(\lambda h)(x) \tag{$\overline{RCSC}$}$$

pentru orice $x \in X$ dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in R(\partial(f+g\circ h))$, $(3.1.4)$ *are loc.*

Teorema 3.3.13 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) Avem*

$$\partial(f+g\circ h)(x) \subseteq \bigcup_{\substack{\varepsilon_{1,2}\geq 0 \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon+\eta \\ \lambda\in C^*\cap\partial_{\varepsilon_3}g(h(x))}} \partial_{\varepsilon_1}f(x)+\partial_{\varepsilon_2}(\lambda h)(x) \tag{$\overline{RCLC}$}$$

pentru orice $x \in X$ dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in R(\partial(f+g\circ h))$, există $\overline{\lambda} \in C^*$ si $\overline{\beta} \in X^*$ astfel încât $(3.1.2)$ *are loc.*

Remarca 3.3.15 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) Privind condiţiile* (RC) *si* $(RCLC)$ *se poate observa că* (RC) *implică* (3.1.1) *pentru orice* $x^* \in X^*$ *si* $(RCLC)$ *implică* (3.1.1) *pentru orice* $x^* \in R(\partial(f + g \circ h))$, *ceea ce inseamnă că* (RC) *implică* $(RCLC)$. *Analog,* $(\overline{RC})$ *implică* (3.1.2) *pentru orice* $x^* \in X^*$ *şi* $(\overline{RCLC})$ *implică* (3.1.2) *pentru orice* $x^* \in R(\partial(f + g \circ h))$, *ceea ce inseamnă că* $(\overline{RC})$ *implică* $(\overline{RCLC})$.

3.4 Rezultate referitoare la condiţii de ε-optim, rezultate de tip ε-Farkaş şi (ε, η)-puncte şa

Din rezultatele prezentate in secţiunile precedente se pot obţine rezultate referitoare la condiţii de ε-optim, rezultate de tip ε-Farkaş şi caracterizări pentru (ε, η)-puncte şa.

Considerăm urmatoarele condiţii

$$(epi(f+g\circ h)^*)\cap(\{0\}\times\mathbb{R}) \subseteq (epi \inf_{\lambda\in C^*}[g^*(\lambda)+(f+(\lambda h))^*(\cdot)])\cap(\{0\}\times\mathbb{R})-(0,\varepsilon), \quad (RCI^0)$$

$$\left|\begin{array}{l} (epi(f + g \circ h)^*) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) \subseteq (epi \inf\limits_{\substack{\lambda\in C^*\\ \beta\in X^*}}[g^*(\lambda) + f^*(\beta) + (\lambda h)^*(\cdot - \beta)]) \\ \cap(\{0\} \times \mathbb{R}) - (0, \varepsilon). \end{array}\right. \qquad (\overline{RCI}^0)$$

Teorema 3.4.1 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) (a) Fie* $\varepsilon, \eta \geq 0$. *Presupunem condiţia* (RCI^0) *îndeplinită. Dacă* $\overline{x}$ *este o* ε*-solutie optimă a problemei* (P^C), *atunci există* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$, *şi* $\overline{\lambda} \in C^*$ *astfel încât*

(i) $g^*(\overline{\lambda}) + g(h(\overline{x})) \leq (\overline{\lambda}h)(\overline{x}) + \varepsilon_2$,

(ii) $(f + (\overline{\lambda}h))^*(0) + (f + (\overline{\lambda}h))(\overline{x}) \leq \varepsilon_1$,

(iii) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon + \eta$.

În plus, $\overline{\lambda}$ *este o* $(\varepsilon + \eta)$*-soluţie optimă a problemei* (D^C).

(b) Dacă există $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ *şi* $\overline{\lambda} \in C^*$ *astfel incât relaţiile (i)-(iii) au loc pentru* $\overline{x} \in X$ *si* $\overline{\lambda} \in C^*$ *atunci* $\overline{x}$ *este o* $(\varepsilon + \eta)$*-solutie optimă a problemei* (P^C). *În plus,* $\overline{\lambda}$ *este o* $(\varepsilon + \eta)$*-solutie optimă a problemei* (D^C).

Teorema 3.4.2 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) (a) Fie* $\varepsilon, \eta \geq 0$. *Presupunem condiţia* $(\overline{RCI}^0)$ *îndeplinită. Dacă* $\overline{x}$ *este o* ε*-solutie optimă a problemei* (P^C), *atunci există* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq 0$, $\overline{\lambda} \in C^*$ *si* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel încât*

(i) $g^*(\overline{\lambda}) + g(h(\overline{x})) \leq (\overline{\lambda}h)(\overline{x}) + \varepsilon_3$,

(ii) $f^*(\overline{\beta}) + f(\overline{x}) \leq \langle \overline{\beta}, \overline{x} \rangle + \varepsilon_1$,

(iii) $(\overline{\lambda}h)^*(-\overline{\beta}) + (\overline{\lambda}h)(\overline{x}) \leq \langle -\overline{\beta}, \overline{x} \rangle + \varepsilon_2$,

(iv) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon + \eta$.

În plus, $(\overline{\lambda}, \overline{\beta})$ *este o* $(\varepsilon + \eta)$*-soluţie optimă a problemei* $(\overline{D^C})$.

(b) Dacă există $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq 0$, $\overline{\lambda} \in C^*$ *si* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel încât relaţiile (i)-(iv) au loc pentru* $\overline{x} \in X$, $\overline{\lambda} \in C^*$ *şi* $\overline{\beta} \in X^*$ *atunci* $\overline{x}$ *este o* $(\varepsilon+\eta)$*-soluţie optimă a problemei* (P^C). *În plus,* $(\overline{\lambda}, \overline{\beta})$ *este o* $(\varepsilon + \eta)$*-solutie optimă a problemei* $(\overline{D^C})$.

În continuare dăm rezultate de tip ε-Farkaş pentru (P^C) şi dualele ei. Considerăm urmatoarele condiţii de regularitate

$$\left| \begin{array}{l} \{(0,0,r) : (0,r) \in epi(f + g \circ h)^*\} \subseteq [\{0\} \times epi(g^*) + \bigcup\limits_{\lambda \in C^*} \{(a, -\lambda, r) : \\ (a,r) \in epi((f + (\lambda h))^*)\}] \cap (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) - (0,0,\varepsilon), \end{array} \right. \qquad (RC^0)$$

$$\left| \begin{array}{l} \{(0,0,r) : (0,r) \in epi(f + g \circ h)^*\} \subseteq [\{0\} \times epi(g^*) + \{(0,0,r) : \\ (0,r) \in epi(f^*)\} + \bigcup\limits_{\lambda \in C^*} \{(a, -\lambda, r) : (a,r) \in epi((\lambda h)^*)\}] \cap \\ (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) - (0,0,\varepsilon). \end{array} \right. \qquad (\overline{RC}^0)$$

Teorema 3.4.5 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) (i) Presupunem că* (RC^0) *are loc. Dacă* $f(x) + (g \circ h)(x) \geq \varepsilon/2$ *pentru orice* $x \in X$ *atunci există* $\overline{\lambda} \in C^*$ *astfel încât* $g^*(\overline{\lambda}) + (f + \overline{\lambda}h)^*(0) \leq \varepsilon/2$.

(ii) Dacă există $\overline{\lambda} \in C^*$ *astfel încât* $g^*(\overline{\lambda}) + (f + \overline{\lambda}h)^*(0) \leq -\varepsilon/2$, *atunci* $f(x) + (g \circ h)(x) \geq \varepsilon/2$ *pentru orice* $x \in X$.

Teorema 3.4.6 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) (i) Presupunem că* $(\overline{RC}^0)$ *are loc. Dacă* $f(x) + (g \circ h)(x) \geq \varepsilon/2$ *pentru orice* $x \in X$ *atunci există* $\overline{\lambda} \in C^*$ *si* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel încât* $f^*(\overline{\beta}) + g^*(\overline{\lambda}) + (\overline{\lambda}h)^*(-\overline{\beta}) \leq \varepsilon/2$.

(ii) Dacă există $\overline{\lambda} \in C^*$ *si* $\overline{\beta} \in X^*$ *astfel încât* $f^*(\overline{\beta}) + g^*(\overline{\lambda}) + (\overline{\lambda}h)^*(-\overline{\beta}) \leq -\varepsilon/2$, *atunci* $f(x) + (g \circ h)(x) \geq \varepsilon/2$ *pentru orice* $x \in X$.

Prezentăm acum rezultate referitoare la puncte şa generalizate.

Lagrangianul ataşat perechii $(P^C) - (D^C)$ este $L^C : X \times Y^* \to \overline{\mathbb{R}}$, definit de (cf. [12])

$$L^C(x,\lambda) = \begin{cases} f(x) + (\lambda h)(x) - g^*(\lambda), & \text{daca } \lambda \in C^* \\ -\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Fie $\eta \geq 0$. Spunem că $(\overline{x}, \overline{\lambda}) \in X \times Y^*$ este (η, ε)-*punct şa* pentru L^C dacă

$$L^C(\overline{x}, \lambda) - \eta \leq L^C(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leq L^C(x, \overline{\lambda}) + \varepsilon, \text{ pentru orice } (x, \lambda) \in X \times Y^*.$$

Teorema 3.4.10 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) Presupunem ca g este o functie convexă şi inferior semicontinuă cu $g(y) > -\infty$ pentru orice $y \in Y$. Dacă $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ este un (η, ε)-punct şa pentru L^C atunci $\overline{x} \in X$ este o $(\varepsilon + \eta)$-solutie optimă a problemei (P^C), $\overline{\lambda} \in C^*$ este o $(\varepsilon + \eta)$-solutie optimă a problemei (D^C) şi există o "$(\varepsilon + \eta)$-duality gap" pentru perechea de probleme (P^C) si (D^C), adică, $v(P^C) \leq (D^C) + \varepsilon + \eta$.*

Un rezultat analog cu Teorema 3.4.10 poate fi dat pentru perechea de probleme (P^C) si $(\overline{D^C})$ cu Lagrangianul corespunzător, dat in (cf. [12]), $\overline{L^C} : X \times X^* \times Y^* \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\overline{L^C}(x, \beta, \lambda) = \begin{cases} \langle \beta, x \rangle + (\lambda h)(x) - f^*(\beta) - g^*(\lambda), \text{ dacă } \lambda \in C^* \\ -\infty, \text{ altfel.} \end{cases}$$

Teorema 3.4.11 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [6]) Presupunem că g este o funcţie convexă si inferior semicontinuă cu $g(y) > -\infty$ pentru orice $y \in Y$. Dacă $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ este un (η, ε)-punct şa pentru $\overline{L^C}$ atunci $\overline{x} \in X$ este o $(\varepsilon + \eta)$-solutie optimă a problemei (P^C), $\overline{\lambda} \in C^*$ este o $(\varepsilon + \eta)$-soluţie optimă a problemei $(\overline{D^C})$ şi există o "$(\varepsilon + \eta)$-duality gap" pentru perechea de probleme (P^C) si $(\overline{D^C})$, adică, $v(P^C) \leq (\overline{D^C}) + \varepsilon + \eta$.*

Chapter 4

Probleme de optimizare convexă cu funcţia obiectiv de tip entropie

4.1 Condiţii de regularitate pentru dualitatea tare când problema primală are funcţia obiectiv de tip entropie

Considerăm mulţimea convexă nevidă $X \subseteq \mathbb{R}^n$ şi problema

$$\inf_{\substack{x \in X \\ h(x) \leqq 0}} \left\{ \sum_{j=1}^{k} g_j(x) \Phi_j \left(\frac{f_j(x)}{g_j(x)} \right) \right\}, \tag{P^Φ}$$

unde $f = (f_1, \ldots, f_k)^T : X \to \mathbb{R}^k$, $g = (g_1, \ldots, g_k)^T : X \to \mathbb{R}^k$, $h = (h_1, \ldots, h_m)^T : X \to \mathbb{R}^m$, $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k) : \mathbb{R}_+ \to (\mathbb{R}^k)^\bullet$, îndeplinesc $f_j(x) \geq 0$ şi $g_j(x) > 0$ pentru orice $x \in X$ astfel încât $h(x) \leq 0$.

Pentru a lucra mai uşor cu problema (P^Φ), din punctul de vedere al dualităţii, o scriem sub forma

$$\inf_{(x,s,t) \in \mathcal{A}} \left\{ \sum_{j=1}^{k} t_j \Phi_j \left(\frac{s_j}{t_j} \right) \right\}, \tag{P'}$$

unde

$$\mathcal{A} = \{(x, s, t) \in X \times \mathbb{R}^k_+ \times int(\mathbb{R}^k_+) : h(x) \leqq 0, \Psi(f(x), s) = 0,$$

$$\Omega(g(x), t) = 0\}.$$

Funcţiile $\Psi : \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}^k$ si $\Omega : int(\mathbb{R}^k_+) \times int(\mathbb{R}^k_+) \to \mathbb{R}^k$ sunt introduse pentru a asigura convexitatea problemei (P') si pentru a obţine egalitatea

$$\inf(P^\Phi) = \inf(P').$$

După ce dăm câteva proprietăţi de convexitate sau concavitate pentru f şi g, determinăm problemele duale de tip Lagrange şi Fenchel-Lagrange. Deoarece rezultatele de dualitate tare pe care le folosim necesită convexitatea problemei primale, considerăm în continuare funcţiile $h_j, j = 1, \ldots, m$, convexe iar inegalităţile din $\mathcal{A}$ referitoare la f şi g sunt alese astfel încât să asigure convexitatea mulţimii.

4.2 Câteva cazuri particulare pentru con

Particularizând conul C, problemelor obţinute le ataşăm dualele Lagrange şi Fenchel-Lagrange. Pentru a obţine dualitate tare dăm conditţile de regularitate adecvate.

Primul caz. $C = (-\mathbb{R}^k_+) \times \{0\}$, Φ_j -descrescatoare, f_j -concave şi g_j -afine pentru orice $j = 1, ..., k$. În acest caz considerăm

$$\mathcal{A} = \left\{(x, s, t) \in X \times \mathbb{R}^k_+ \times int(\mathbb{R}^k_+) : h(x) \leqq 0, f(x) \geqq s, g(x) = t\right\}.$$

Avem $\inf(P^\Phi) = \inf(P')$.

Duala Lagrange pentru (P^Φ) în acest caz, este

$$\sup_{\substack{\alpha \leqq 0, \beta \in \mathbb{R}^k, \gamma \geqq 0, \\ \Phi_j^+(\alpha_j) + \beta_j \leq 0, j=1,\ldots,k}} \inf_{x \in X} \left[\alpha^T f(x) + \beta^T g(x) + \gamma^T h(x)\right] \tag{D^Φ_{L1}}$$

iar duala sa Fenchel-Lagrange este:

$$\sup_{\substack{\alpha \leqq 0, \beta \in \mathbb{R}^k, \gamma \geqq 0 \\ \Phi_j^+(\alpha_j) + \beta_j \leq 0, j=\overline{1,k} \\ p,q \in X^*}} \left\{-(\alpha^T f)^*(p) - (\beta^T g)^*(q) - (\gamma^T h)^*(-p-q)\right\}. \tag{D^Φ_{FL1}}$$

Modul de obţinere a dualelor asigură că dualitatea slabă are loc. Pentru a obţine dualitatea tare dăm următoarele condiţii de regularitate.

$$\exists (x', s', t') \in ri(X) \times int(\mathbb{R}^k_+) \times int(\mathbb{R}^k_+) : \begin{cases} f(x') > s', \\ g(x') = t', \\ h_j(x') \leq 0, \text{ if } j \in L, \\ h_j(x') < 0, \text{ if } j \in N, \end{cases} \tag{CQ_1}$$

unde mulţimea $\{1,\ldots,m\}$ am împărţit-o în două mulţimi disjuncte după cum urmează

$L = \{j \in \{1,\ldots,m\} : h_j$ este restricţia la X a unei funcţii afine$\}$

si $N = \{1,\ldots,m\} \setminus L$.

Teorema 4.2.1 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [8]) Dacă sunt îndeplinite condiţiile (CQ_1), atunci există dualitate tare între problemele (P') şi (D^{Φ}_{FL1}), adică, (D^{Φ}_{FL1}) are o soluţie optimă şi $v(P') = v(P^{\Phi}) = v(D^{\Phi}_{FL1})$.*

Luând in considerare că $v(D^{\Phi}_{FL1}) \leq v(D^{\Phi}_{L1}) \leq v(P^{\Phi})$, obţinem următorul corolar.

Corolarul 4.2.2 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [8]) Dacă sunt îndeplinite condiţiile (CQ_1), atunci există dualitate tare între problemele (P') si (D^{Φ}_{L1}), adică, (D^{Φ}_{L1}) are o soluţie optimă şi $v(P') = v(P^{\Phi}) = v(D^{\Phi}_{L1})$.*

Teorema 4.2.3 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [8]) (a) Fie condiţiile (CQ_1) îndeplinite şi presupunem că problema primală (P^{Φ}) are o soluţie optimă $\overline{x}$. Atunci problema duală (D^{Φ}_{FL1}) are o soluţie optimă, de asemenea, fie aceasta $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{p}, \overline{q})$, si următoarele conditii de optim sunt îndeplinite,*

(i) $\sum_{j=1}^{k} g_j(\overline{x})\Phi_j\left(\frac{f_j(\overline{x})}{g_j(\overline{x})}\right) = -(\overline{\alpha}^T f)^*(\overline{p}) - (\overline{\beta}^T g)^*(\overline{q}) - (\overline{\gamma}^T h)^*(-\overline{p} - \overline{q})$, $j = 1,\ldots,k$,

(ii) $\Phi_j^+(\overline{\alpha}_j) + \overline{\beta}_j \leq 0, j = 1, ..., k$

(iii) $h(\overline{x}) \leqq 0$.

(b) Dacă $\overline{x}$ este un punct admisibil pentru problema (P^{Φ}) şi $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{p}, \overline{q})$ este admisibil pentru problema (D^{Φ}_{FL1}) indeplinind condiţiile de optim (i)-(iii), atunci există dualitate tare între (P^{Φ}) şi (D^{Φ}_{FL1}).

În plus, $\overline{x}$ este o soluţie optimă a problemei primale şi $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{p}, \overline{q})$ este o solutie optimă a problemei duale.

Teorema 4.2.4 *(H.-V. Boncea, S.-M. Grad, [8]) (a) Fie condiţiile (CQ_1) îndeplinite şi presupunem că problema primală (P^{Φ}) are o soluţie optimă $\overline{x}$. Atunci problema duală (D^{Φ}_{L1}) are o soluţie optimă, de asemenea, fie aceasta $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$, şi urmatoarele condiţii de optim sunt adevarate,*

(i) $\sum_{j=1}^{k} g_j(\overline{x})\Phi_j\left(\frac{f_j(\overline{x})}{g_j(\overline{x})}\right) = \inf_{x \in X}\left[\overline{\alpha}^T f(x) + \overline{\beta}^T g(x) + \overline{\gamma}^T h(x)\right]$, $j = 1,\ldots,k$,

(ii) $\Phi_j^+(\overline{\alpha}_j) + \overline{\beta}_j \leq 0, j = 1, ..., k$

(iii) $h(\overline{x}) \leqq 0$.

(b) Dacă $\overline{x}$ este un punct admisibil pentru problema (P^{Φ}) si $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ este admisibil pentru problema (D^{Φ}_{L1}) şi (i)-(iii) au loc, atunci există dualitate tare intre (P^{Φ}) si (D^{Φ}_{L1}).

În plus, $\overline{x}$ este o soluţie optima a problemei primale şi $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ este o soluţie optimă a problemei duale.

Caz special. Considerând $\Phi_j(x) = -\ln(x), x > 0$ pentru orice $j = 1, ..., k$, problema (P^{Φ}) devine problema tratată in [13].

În continuare prezentăm alte patru cazuri fara a mai expune dualele si rezultatele referitoare la dualitatea tare si condiţii de optim, care sunt asemănătoare primului caz.

Cazul al doilea: $C = \mathbb{R}^k_+ \times \{0\}$, Φ_j -crescătoare, f_j -convexe si g_j -afine pentru orice $j = 1, ..., k$. În acest caz considerăm

$$\mathcal{A} = \left\{(x, s, t) \in X \times \mathbb{R}^k_+ \times int(\mathbb{R}^k_+) : h(x) \leqq 0, f(x) \leqq s, g(x) = t\right\}.$$

Caz special. Luând $\Phi_j(x) = x$, şi $g_j(x) = 1$, pentru $j = 1, ..., k$, si considerând $f_j(x) = k_j(x - y^j)$ obţinem problema lui Steiner-Fermat din [52].

Cazul al treilea. $C = \mathbb{R}^k_+ \times (-\mathbb{R}^k_+)$, Φ_j -crescătoare, f_j -convexe si g_j -concave pentru orice $j = 1, ..., k$. În plus presupunem $\Phi_j(y) \leq 0$, $\forall y \in \left\{\frac{f(x)}{g(x)} : x \text{ admisibil pentru } (P^{\Phi})\right\}$. Mulţimea punctelor admisibile a problemei (P') în acest caz este

$$\mathcal{A} = \left\{(x, s, t) \in X \times \mathbb{R}^k_+ \times int(\mathbb{R}^k_+) : h(x) \leqq 0, f(x) \leqq s, g(x) \geqq t\right\}.$$

Caz special. Pentru $\Phi_j(x) = -1$, si $g_j(x) = \ln x_j, x > 0$ pentru orice $j = 1, ..., k$, $X = int(\mathbb{R}^n_+)$ si $h(x) = Ax - b$ obţinem entropia lui Burg din [33].

Cazul al patrulea. $C = (-\mathbb{R}^k_+) \times \mathbb{R}^k_+$, Φ_j -descrescătoare, f_j -concave si g_j -convexe pentru orice $j = 1, ..., k$, cu presupunerea ca $\Phi_j(y) \geq 0$, $\forall y \in \{\frac{f(x)}{g(x)} : x$ admisibil pentru $(P^{\Phi})\}$. În acest caz

$$\mathcal{A} = \left\{(x, s, t) \in X \times \mathbb{R}^k_+ \times int(\mathbb{R}^k_+) : h(x) \leqq 0, f(x) \geqq s, g(x) \leqq t\right\}.$$

Caz special. Luând $\Phi_j(x) = \lambda_j \frac{1}{x}, x > 0, \lambda_j > 0$ pentru orice $j = 1, ..., k$, funcţia obiectiv a problemei (P^{Φ}) este cea din problema scalarizatoare tratată in [79].

Cazul al cincilea. $C = \{0\} \times \{0\}$, f_j şi g_j afine pentru orice $j = 1, ..., k$. În acest caz avem

$$\mathcal{A} = \left\{(x, s, t) \in X \times \mathbb{R}^k_+ \times int(\mathbb{R}^k_+) : h(x) \leqq 0, f(x) = s, g(x) = t\right\}.$$

Caz special. Pentru $f_j(x) = x_j$ şi $g_j(x) = d_j$, pentru orice $j = 1, ..., k$ si $h_j(x) = \Psi_j(A_j x + \alpha_j) + b_j^T x + c_j$, $j = 1, ..., m$, obţinem problema din [77].

Chapter 5

Asupra problemelor de optimizare $\eta - (1,2)$ aproximante

Pentru aceasta secţiune se consideră o submulţime nevidă X din $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior din X, $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în x^0, $g : X \to \mathbb{R}^m$ o funcţie de două ori diferenţiabilă în x^0 şi fie $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ o funcţie.

Considerăm problema de optimizare:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in X \\ g(x) \leqq 0, \end{cases} \tag{P_η}$$

Notăm cu $\mathcal{F}(P_\eta) := \{x \in X : g(x) \leqq 0\}$ mulţimea soluţiilor admisibile a problemei (P_η). Penru rezolvarea problemei (P_η), există diferite moduri de abordare (vezi [65, 67]). Una dintre acestea constă în ataşarea problemei (P_η), a unei alte probleme de optimizare, a carei soluţii ne dau (informaţii despre) soluţiile optime ale problemei iniţiale (P_η) (vezi [1, 3, 44, 45, 46]).

În continuare, ataşăm problemei (P_η), problema:

$$\begin{cases} \min F(x) := f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), \eta(x, x^0)\rangle \\ x \in X \\ G(x) := g(x^0) + [\nabla g(x^0)](\eta(x, x^0)) + \\ +\frac{1}{2} \left\langle [\nabla^2 g(x^0)](\eta(x, x^0)), \eta(x, x^0)\right\rangle \leqq 0, \end{cases} \tag{AP_η}$$

unde

$$\left\langle [\nabla^2 g(x^0)](\eta(x,x^0)), \eta(x,x^0) \right\rangle \ : \ = (\left\langle [\nabla^2 g_1(x^0)](\eta(x,x^0)), \eta(x,x^0) \right\rangle, ..., \left\langle [\nabla^2 g_m(x^0)](\eta(x,x^0)), \eta(x,x^0) \right\rangle).$$

Notăm cu $\mathcal{F}(AP_\eta) := \{x \in X : G(x) \leqq 0\}$ mulţimea soluţiilor admisibile ale problemei (AP_η).

5.1 Noţiuni şi rezultate preliminare

În această secţiune se dau câteva noţiuni şi rezultate cunoscute, de care avem nevoie şi le vom folosi în acest capitol şi care pot fi găsite în cărţi şi monografii de specialitate, precum [65, 67].

5.2 Problema de optimizare η-aproximanta

Considerăm X o mulţime nevidă din $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior al lui X, $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă in x^0, $g : X \to \mathbb{R}^m$ o funcţie de două ori diferenţiabilă in x^0 si $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ o funcţie.

Teorema 5.2.1 *(H.-V. Boncea, D. Duca, [5]) Fie g o funcţie invexă de ordin doi în x^0 w.r.t. (în raport cu) η. Dacă $\widetilde{x}$ este o soluţie admisibilă a problemei (P_η), atunci $\widetilde{x}$ este o soluţie admisibilă a problemei (AP_η), adică, $\mathcal{F}(P_\eta) \subseteq \mathcal{F}(AP_\eta)$.*

Exemplul 5.2.2 *(H.-V. Boncea, D. Duca, [5]) Considerăm urmatoarea problema de optimizare:*

$$\begin{cases} \min f(x) = \ln(x+1) \\ x \in (-1, \infty) \subseteq \mathbb{R} \\ g(x) = x^2 - 2x \leqq 0. \end{cases} \tag{$\overline{P}$}$$

Mulţimea soluţiilor admisibile a problemei $(\overline{P})$ este $\mathcal{F}(\overline{P}) = [0,2]$. Pentru $x^0 = 0$ si $\eta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $\eta(x, x^0) = x - x^0 = x$, problema $(A\overline{P})$ este

$$\begin{cases} \min F(x) = x \\ G(x) = x^2 - 2x \leqq 0. \end{cases} \tag{$A\overline{P}$}$$

Avem $\mathcal{F}(A\overline{P}) = \mathcal{F}(\overline{P})$.

Exemplul 5.2.3 *(H.-V. Boncea, D. Duca, [5]) Considerăm problema de optimizare:*

$$\begin{cases} \min f(x) = x_1 \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ g(x) = -x_1 + x_2^4 \leqq 0. \end{cases} \qquad (P^*)$$

Mulţimea soluţiilor admisibile a problemei (P^*) *este* $\digamma(P^*) = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) \leqq 0\}$. *Pentru* $x^0 = (0,0)$ *si* $\eta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definită de*

$$\eta(x,y) = x - y, \text{ pentru orice } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

problema (AP^*) *este*

$$\begin{cases} \min F(x) = x_1 \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ G(x) = -x_1 \leqq 0. \end{cases} \qquad (AP^*)$$

Avem $\digamma(P^*) \subseteq \digamma(AP^*)$, $(1,5) \in \digamma(AP^*)$, *dar* $(1,5) \notin \digamma(P^*)$. *Deci* $\digamma(P^*) \neq \digamma(AP^*)$.

Teorema 5.2.6 *(H.-V. Boncea, D. Duca, [5]) Fie* g *o funcţie incavă de ordin doi în* x^0 *w.r.t.* η. *Dacă* x *este o soluţie admisibilă a problemei* (AP_η)*, atunci* x *este o soluţie admisibilă a problemei* (P_η)*, adică,* $\digamma(AP_\eta) \subseteq \digamma(P_\eta)$.

Teorema 5.2.7 *(H.-V. Boncea, D. Duca, [5]) Fie* f *o funcţie quasi-incavă în* x^0 *w.r.t.* η*,* g *o funcţie avexă de ordin doi în* x^0 *w.r.t.* η *şi* $\eta(x^0, x^0) = 0$. *Dacă* $x^0 \in X$ *este o soluţie optimă a problemei* (P_η)*, atunci* x^0 *este o soluţie optimă a problemei* (AP_η).

Teorema 5.2.8 *(H.-V. Boncea, D. Duca, [5]) Fie* f *o funcţie pseudo-invexă în* x^0 *w.r.t.* η*,* g *o funcţie invexă de ordin doi în* x^0 *w.r.t.* η *şi* $\eta(x^0, x^0) = 0$. *Dacă* x^0 *este o soluţie optimă a problemei* (AP_η)*, atunci* x^0 *este o soluţie optimă a problemei* (P_η).

5.3 Echivalenţa între punctele şa ale problemei η-aproximanta şi cele ale problemei primale

În această secţiune se consideră X o mulţime nevidă din $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior din X, $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă in x^0, $g : X \to \mathbb{R}^m$ o funcţie de două ori diferenţiabilă în x^0 si $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ o funcţie. Notăm lagrangianul problemei (AP_η), $L^\eta_{AP} : X \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$, definit prin

$$\begin{aligned} L^{\eta}_{AP}(x,v) \ : & = f(x^0) + \left\langle \nabla f(x^0), \eta(x,x^0) \right\rangle + \left\langle v, g(x^0) \right\rangle + \\ & + \left\langle v, [\nabla g(x^0)](\eta(x,x^0)) + \frac{1}{2} \left\langle [\nabla^2 g(x^0)](\eta(x,x^0)), \eta(x,x^0) \right\rangle \right\rangle, \end{aligned}$$

pentru orice $(x,v) \in X \times \mathbb{R}^m_+$.

Teorema 5.3.1 *Fie X o submulţime din $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior din X , $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}^m$ funcţii diferenţiabile in x^0. Dacă există $v^0 \in \mathbb{R}^m_+$ astfel încât $(x^0, v^0) \in X \times \mathbb{R}^m_+$ este un punct şa al lagrangianului L^{η}_P, atunci x^0 este o soluţie optimă a problemei (P_η).*

Teorema 5.3.2 *Fie X o submulţime convexă din $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior din X, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}^m$ funcţii convexe. Dacă $x^0 \in X$ este o soluţie optimă a problemei (P_η) atunci există $v^0 \in \mathbb{R}^m_+$ astfel încât $(x^0, v^0) \in X \times \mathbb{R}^m_+$ este un punct şa al lagrangianului L^{η}_P.*

Teorema 5.3.3 *(H.-V. Boncea, D. Duca, [5]) Fie problema (P_η) de ordin $(1,2)$-KT invexă in x^0 w.r.t. η, g o funcţie invexă de ordin doi în x^0 w.r.t. η şi $\eta(x^0, x^0) = 0$. Dacă $(x^0, v^0) \in X \times \mathbb{R}^m_+$ este un punct şa al lagrangianului L^{η}_{AP}, atunci x^0 este o soluţie optimă a problemei (P_η).*

Teorema 5.3.4 *(H.-V. Boncea, D. Duca, [5]) Presupunem că $\eta(x^0, x^0) = 0$, $\left\langle \left\langle [\nabla^2 g(x^0)](\eta(x,x^0)), \eta(x,x^0) \right\rangle, v^0 \right\rangle \geqq 0$, pentru orice $x \in X$ şi au loc condiţiile de regularitate corespunzătoare pentru problema (P_η) în x^0. Dacă x^0 este o soluţie optimă a problemei (P_η), atunci există un punct $v^0 \in \mathbb{R}^m_+$ astfel încât $(x^0, v^0) \in X \times \mathbb{R}^m_+$ este un punct şa al lagrangianului L^{η}_{AP}.*

Bibliography

[1] T. Antczak, *An η-approximation approach to nonlinear mathenatical programming involving invex functions*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 25 , 423-438, 2004.

[2] T. Antczak, *A second order η-approximation method for constrained optimization problems involving second order invex functions*, Applied Mathematics 54, 433-445, 2009.

[3] T. Antczak, *Saddle-point criteria in an η-approximation method for nonlinear mathematical programming problems involving invex functions*, Journal of Optimization Theory and Applications, 132(1), 71-87, 2007.

[4] A. Ben-Tal, A. Ben-Israel, M. Teboulle, *Certainty equivalents and information measures: duality and extremal principles*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 157, 211-236, 1991.

[5] H.-V. Boncea, D. Duca, *On the $\eta - (1, 2)$ approximated optimization problems*, Carpathian Journal of Mathematics 28(1), 17-24, 2012.

[6] H.-V. Boncea, S.-M. Grad, *Characterizations of ε-duality gap statements for composed optimization problems*, submitted.

[7] H.-V. Boncea, S.-M. Grad, *Characterizations of ε-duality gap statements for constrained optimization problems*, submitted.

[8] H.-V. Boncea, S.-M. Grad, *Convex optimization problems with entropy-like objective functions*, preprint.

[9] J.M. Borwein, A.S. Lewis, *Convex analysis and nonlinear optimization: Theory and examples, Second edition*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathematiques de la SMC 3, Springer-Verlag, New York, 2006.

[10] R.I. Boţ, *Conjugate duality in convex optimization,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2010.

[11] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *A new constraint qualification for the formula of the subdifferential of composed convex functions infinite dimensional spaces*, Mathematische Nachrichten 281(8), 1088-1107, 2008.

[12] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *Duality in Vector Optimization*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.

[13] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *Duality for optimization problems with entropy-like objective functions*, Journal of Optimization and Information Sciences 26(2), 415-441, 2005.

[14] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *Generalized Moreau-Rockafellar results for composed convex functions*, Optimization 58(7), 917-933, 2009.

[15] R.I. Boţ, S.-M. Grad, *Lower semicontinuous type regularity conditions for subdifferential calculus*, Optimization Methods and Software 25(1), 37-48, 2010.

[16] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *New constraint qualification and conjugate duality for composed convex optimization problems*, Journal of Optimization Theory and Applications 135(2), 241-255, 2007.

[17] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *New regularity conditions for Lagrange and Fenchel-Lagrange duality in infinite dimensional spaces*, Mathematical Inequalities & Applications 12(1), 171-189, 2009.

[18] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *New regularity conditions for strong and total Fenchel-Lagrange duality in infinite dimensional spaces*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 69(1), 323–336, 2008.

[19] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *On strong and total Lagrange duality for convex optimization problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 337(2), 1315–1325, 2008.

[20] R.I. Boţ, I.B. Hodrea, G. Wanka, *Composed convex programming: duality and Farkas-type results*, in: Z. Kasa, G. Kassay, J. Kolumban (Eds.), "Proceedings of the International Conference in Memoriam Gyula Farkas", Cluj University Press, Cluj-Napoca, 22-35, 2006.

[21] R.I. Boţ, I.B. Hodrea, G. Wanka, *ε-optimality conditions for composed convex optimization problems*, Journal of Approximation Theory 153(1), 108-121, 2008.

[22] R.I. Boţ, I.B. Hodrea, G. Wanka, *Farkas-type results for inequality systems with composed convex functions via conjugate duality*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 322(1), 316-328, 2006.

[23] R.I. Boţ, G. Kassay, G. Wanka, *Strong duality for generalized convex optimization problems*, Journal of Optimization Theory and Applications 127(1), 45-70, 2005.

[24] R.I. Boţ, G. Wanka, *A weaker regularity condition for subdifferential calculus and Fenchel duality in infinite dimensional spaces*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 64(12), 2787–2804, 2006.

[25] R.I. Boţ, G. Wanka, *An alternative formulation for a new closed cone constraint qualification*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 64(6), 1367-1381, 2006.

[26] R.I. Boţ, G. Wanka, *Farkas-type results for max-functions and applications*, Positivity 10(4), 761-777, 2006.

[27] R.I. Boţ, G. Wanka, *Farkas-type results with conjugate functions*, SIAM Journal of Optimization 15(2), 540-554, 2005.

[28] W. Breckner, *Cercetare Operationala,* Universitatea "Babes-Bolyai", Facultatea de Matematica, Cluj-Napoca, 1981.

[29] B.E. Breckner, N. Popovici, *Convexity and optimization, an introduction*, EFES, Cluj-Napoca, 2006.

[30] A. Brøndsted, *Conjugate convex functions in topological vector spaces*, Matematisk-fysiske Meddelelser udgivet af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab 34(2), 1-27, 1964.

[31] R.S. Burachik, V. Jeyakumar, *A dual condition for the convex subdifferential sum formula with applications*, Journal of Convex Analysis 12(2), 279-290, 2005.

[32] R.S. Burachik, V. Jeyakumar, Z.Y. Wu, *Necessary and sufficient conditions for stable conjugate duality*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 64(9), 1998-2006, 2006.

[33] Y. Censor, A.R. de Pierro, A.N. Iusem, *Optimization of Burg's entropy over linear constraints*, Applied Numerical Mathematics 7(2), 151-165, 1991.

[34] C. Combari, M. Laghdir, L. Thibault, *Sous-différentiels de fonctions convexes composées*, Annales des Sciences Mathématiques du Québec 18(2), 119-148, 1994.

[35] C. Combari, M. Laghdir, L. Thibault, *A note on subdifferentials of convex composite functions*, Archiv der Mathemtik 67(3), 239-252, 1996.

[36] C. Combari, M. Laghdir, L. Thibault, *On sudifferential calculus for convex functions defined on locally convex spaces*, Annales des Sciences Mathématiques du Québec 23(1), 23-36, 1999.

[37] B.D. Craven, *Invex functions and constrained local minima*, Bulletin of the Australian Mathematical Society 24, 357-366, 1981.

[38] I. Csiszár, *Some remarks on the dimension and entropy of random variables*, Acta Mathematica Hungarica 12, 299-408, 1961.

[39] I. Csiszár, *On the dimension and entropy of order α of the mixture of probability distributions*, Acta Mathematica Hungarica 13, 246-255, 1962.

[40] I. Csiszár, *On generalized entropy*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 4, 404-419, 1969.

[41] I. Csiszár, *Entropy maximization and related methods: axiomatics, algorithms*, Szigma 24, 111-137, 1993.

[42] N. Dinh, M.A. Goberna, M.A. López, *From linear to convex systems: consistency, Farkas' lemma and applications*, Journal of Convex Analysis 13(1), 113-133, 2006.

[43] N. Dinh, M.A. Goberna, M.A. López, T.Q. Son, *New Farkas-type constraint qualifications in convex infinite programming*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations 13(3), 580-597, 2007.

[44] D. I. Duca, *On the Higher-Order in Nonlinear Programming in Complex Space*, Seminar on Optimization Theory (Cluj-Napoca, 1985), 39-50, Preprint 85-5, Univ. "Babes-Bolyai", Cluj-Napoca, 1985.

[45] D. I. Duca, *Multicriteria Optimization in Complex Space*, House of the Book of Science, Cluj-Napoca, 2006.

[46] D. I. Duca, E. Duca, *Optimization Problem and η-Approximation Optimization Problems*, Studia Universitatis Babes-Bolyai, Math., 54(4), 49-62, 2009.

[47] I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976.

[48] D.H. Fang, C. Li, K.F. Ng, *Constraint qualifications for optimality conditions and total Lagrange dualities in convex infinite programming*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 73(5), 1143—1159, 2010.

[49] D.H. Fang, C. Li, X.Q Yang, *Stable and total Fenchel duality for DC optimization problems in locally convex spaces*, SIAM Journal on Optimization 21(3), 730—760, 2011.

[50] W. Fenchel, *On conjugate convex functions*, Canadian Journal of Mathematics 1, 73-77, 1949.

[51] D. Gale, H.W. Tucker, *Linear programming and the theory of games*, in: T.C. Koopman (ed.), Activity Analysis of Production and Allocation, John Wiley & Sons, Inc., New York, 317-329, 1951.

[52] C.R. Glassey, *Explicit duality for convex homogeneous programs*, Mathematical Programming 10, 176-191, 1976.

[53] M.A. Hanson, *On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 80, 545-550, 1981.

[54] J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms I: Fundamentals*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[55] J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms II: Advanced theory and bundle methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[56] J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[57] H. Hu, *Characterizations of the strong basic constraint qualifications*, Mathematics of Operations Research 30(4), 956-965, 2005.

[58] V. I. Ivanov, *Second-order Kuhn-Tucker invex constrained problems,* Journal of Global Optimization 50(3), 519-529, 2011.

[59] V. Jeyakumar, N. Dinh, G.M. Lee, *A new closed cone constraint qualification for convex optimization*, Applied Mathematics Report AMR04/8, University of New South Wales, Sydney, Australia, 2004.

[60] V. Jeyakumar, G.Y. Li, *New dual constraint qualifications characterizing zero duality gaps of convex programs and semidefinite programs*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 71(12), 2239–2249, 2009.

[61] V. Jeyakumar, G.Y. Li, *Stable zero duality gaps in convex programming: Complete dual characterizations with applications to semidefinite programs*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 360, 156–167, 2009.

[62] C. Li, D.H. Fang, G. López, M.A. López, *Stable and total Fenchel duality for convex optimization problems in locally convex spaces*, SIAM Journal on Optimization 20(2), 1032—1051, 2009.

[63] D. T. Luc, *Theory of Vector Optimization*, Springer, Berlin, 1989.

[64] L. Lupşa, L. Blaga, *Cercetare operationala, tehnici de optimizare I*, Mega, Cluj-Napoca, 2010.

[65] O. L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1969.

[66] J.-E. Martínez-Legaz, I. Singer, *Some conjugation formulas and subdifferential formulas of convex analysis revisited*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 313(2), 717-729, 2006.

[67] S. K. Mishra and G. Giorgi, *Nonconvex Optimization and its applications- Invexity and Optimization*, Volume 88, Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

[68] J.J. Moreau, *Fonctions convexes en dualité*, (multigraph), Faculté des Sciences, Séminaires de Mathématiques, Université de Montpellier, 1962.

[69] J.J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Seminaire sur les Équation aux Dérivées Partielles, Collége de France, Paris, 1967.

[70] J.P. Penot, M. Théra, *Semi-continuous mappings in general topology*, Archiv der Mathematik 38(1), 158-166, 1982.

[71] T. Precupanu, *Closedness conditions for the optimality of a family of nonconvex optimization problems*, Mathematische Operationsforschung und Statistik Series Optimization 15(3), 339-346, 1984.

[72] R.T. Rockafellar, *Conjugate Duality and Optimization*, Regional Conference Series in Applied Mathematics Vol. 16 SIAM Publications, Philadelphia, 1974.

[73] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[74] R.T. Rockafellar, *Duality theorems for convex functions*, Bulletin of the American Mathematical Society 70, 189-192, 1964.

[75] R.T. Rockafellar, *Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions*, Duke Mathematical Journal 33(1), 81-89, 1966.

[76] J.-J. Strodiot, V.N. Nguyen, N. Heukemes, *ε-optimal solutions in nondifferentiable convex programming and some related questions*, Mathematical Programming 25(3), 307-328, 1983.

[77] M. Teboulle, *A simple duality proof for quadratically constrained entropy functionals and extension to convex constraints*, SIAM Journal on Applied Mathematics 49(6), 1845-1850, 1989.

[78] D. Tiba, C. Zălinescu, *On the necessity of some constraint qualification conditions in convex programming*, Journal of Convex Analysis 11(1), 95-110, 2004.

[79] G. Wanka, R.I. Boţ, *Multiobjective duality for convex ratios*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 275(1), 354-368, 2002.

[80] G. Wanka, R.I. Boţ, E. Vargyas, *On the relations between different dual problems assigned to a composed optimization problem*, Mathematical Methods of Operations Research 66(1), 47-68, 2007.

[81] X.Q. Yang, V. Jeyakumar, *First and second-order optimality conditions for convex composite multiobjective optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications 95(1), 209-224, 1997.

[82] C. Zălinescu, *Convex analysis in general vector spaces*. World Scientific, River Edge, 2002.