Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică

Teză de Doctorat

Rezumat

Aproximare prin Operatori Integrali Liniari şi Neliniari de Variabile Reale şi Complexe

Doctorand:
Sorin Trifa

Conducător ştiinţific:
Prof. univ. dr. Sorin Gal

Cluj-Napoca
2018

Cuprins

Cap. 1

Descriere generală a domeniului de cercetare

În această teză, doresc să prezint rezultatele pe care le-am obţinut ca şi co-autor şi ca şi unic autor, privind aproximarea funcţiilor reale si complexe prin operatori integrali, adică prin operatori in a căror expresii apar diverse integrale relative la funcţia de aproximat.

Teoria Aproximării a apărut în secolul al 18-lea ca şi o importantă componentă a Analizei Matematice.

Ea constă din aproximarea unor elemente complicate ale unui spaţiu (în general spaţiu de funcţii), cu elemente simple din punct de vedere calculatoriu (de exemplu polinoame algebrice sau trigonometrice, polinoame pe portiuni, funcţii spline, şi aşa mai departe), cu indicarea atît calitativă cît şi cantitativă a erorilor de aproximare, în termenii K-funcţionalelor şi a modulelor de netezime.

Cronologic vorbind, în 1895, Karl Weierstrass a obţinut primul rezultat de aproximare, conform cu următoarea teoremă.

Theorema I. *Pentru orice* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continuă pe* $[a, b]$*, există un* *sir de polinoame algebrice,* $P_{m_n}(x) = a_0x^{m_n} + . + a_{m_n-1}x + a_{m_n}$*, astfel încît (pentru* $m \to \infty$*,* $P_{m_n}(x) \to f(x)$*, în mod uniform pe* $[a, b]$.

De asemenea, Weierstrass a obţinut şi un rezultat analog pentru aproximarea cu polinoame trigonometrice.

În 1912, prima demonstraţie constructiva a Teoremei I a fost obţinută de către S. N. Bernstein, care a demonstrat că în prezent aşa numitele polinoame Bernstein date de formula

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f)k/n),$$

converg la orice funcţie continuă f, în mod uniform în $[0, 1]$.

În 1942, Tiberiu Popoviciu a obţinut următoarea estimare a erorii

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{3}{2}\omega_1(f; 1/\sqrt{n}), \forall x \in [0, 1], n \in \mathbb{N},$$

ceea ce reprezintă primul rezultat cantitativ în aproximare cu polinoame de tip Bernstein.

Aici, am notat cu $\omega_1(f; \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, 1], |x - y| \leq \delta\}$, modulul de continuitate al lui f.

În paralel cu aproximarea prin polinoame algebrice, a fost dezvoltată şi aproximarea cu polinoame trigonometrice a funcţiilor continue şi 2π periodice, primul rezultat fiind obţinut in 1900 de către Leopold Fejér, care a arătat că media aritmetică a primelor n-sume Fourier parţiale ataşate funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π periodică şi continuă pe $\mathbb{R}$, converge uniform la f pe $\mathbb{R}$.

Apoi, în 1911, D. Jackson a obţinut primul rezultat cantitativ din aproximarea trigonometrica, demonstrînd că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă şi 2π periodică, se poate construi un şir de polinoame trigonometrice numite în prezent polinoamele lui Jackson, care aproximeaza funcţia f cu ordinul de aproximare $\omega_2(f;1/n)$, unde $\omega_2(f;\delta) = \sup\{|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|; 0 \leq h \leq \delta, x \in \mathbb{R}\}$.

Ca o generalizare ale rezultatelor anterior menţionate, începînd cu anii 1950 şi pîna în zilele noastre, o foarte importantă direcţie în aproximarea funcţiilor a fost dezvoltată sub numele de teoria lui Korovkin (sau Popoviciu-Korovkin, sau Bohman-Korovkin), ocupîndu-se cu aproximare cu variaţi operatori liniari şi pozitivi.

Aici putem menţiona contribuţiile clasice aduse de Bohman, Popoviciu, Korovkin, Shisha-Mond şi mulţi alţii. Aceste rezultate spun, în esenţă, că fiind dat un şir de operatori liniari şi pozitivi $(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$, pentru a fi uniform convergent pe $[a,b]$ la funcţia continuă f, este suficient să verificăm că $L_n(e_k) \to e_k$, pentru $k = 0, 1$ şi 2, uniform pe $[a,b]$, unde $e_k(x) = x^k$.

În cazul aproximării funcţiilor complexe de o variabilă complexă prin polinoame sau funcţii întregi, putem menţiona, de exemplu, contribuţiile clasice aduse de către Carleman, Müntz-Szász, Faber, Runge, Walsh, Mergelyan, Arakelian şi mulţi alţii.

Această teză am împărţit-o în patru capitole.

În prezentul capitol 1, după introducerea de mai sus, descriem pe scurt continutul tezei.

Astfel, în Capitolul 2 cu titlu "Aproximare prin operatori neliniari integrali", ideea principală constă în înlocuirea integralei Lebesgue din formulele unor operatori integrali liniari, cu integrale care nu sunt liniare. Apoi, se studiază proprietăţile de aproximare bune ale operatorilor obţinuti.

Acest capitol are trei secţiuni.

În secţiunea întîi denumită "Erori cantitative in cazul Durrmeyer-Choquet", în expresia polinoamelor clasice Bernstein-Durrmeyer, integrala Lebesgue este înlocuita de către integrala neliniara Choquet bazată pe funcţii de mulţimi care nu sunt neapărat numărabil aditive. În acest mod, obţinem operatori de aproximare neliniari. Pentru aproximarea punctuală şi uniformă, obţinem estimări cantitative ale erorii de aproximare în termenii modulului de continuitate. În plus, se obţine şi estimarea erorii de aproximare în spaţiul L^p, $1 \leq p < +\infty$ în raport cu anumite L^p K-funcţionale. Pentru alegeri particulare de funcţii de mulţime submodulare, se obţin rezultate concrete. Posibilitatea de alegere variată a funcţiilor de mulţime submodulare, ne permite obţinerea de estimări de aproximare mai bune decît în cazurile clasice.

În secţiunea a doua întitulată "Aproximare în L^p cu tipuri Kantorovich-Choquet", se ocupă cu aproximări cantitative în norma din spaţiul L^p, cu estimarea erorii obţinută în termenii unei K-funcţionale pentru polinoamele Bernstein-Kantorovich-Choquet, completînd astfel estimările calitative punctuale şi uniforme în termenii modulului de continuitate obţinute în lucrarea Gal [42].

În a treia secţiune a capitolului, întitulată "Aproximare prin operatori posibilistici integrali", reconsiderăm schema lui Feller care generează operatori de aproximare liniari, pozitivi, prin înlocuirea integralei Lebesgue cu o integrală neliniară numită integrală posibilistică. Acest fapt permite construires de operatori de aproximare neliniari, cu bune proprietăţi în aproximare , operatori încluzînd operatorii max-produs studiaţi de B. Bede, L. Coroianu, S.G. Gal în numeroase lucrari (vezi de asemenea monografia de cercetare [7] publicată la Springer).

De asemenea, se obţin proprietăţi cantitative de aproximare pentru anumiţi operatori posibilistici de convoluţie obţinuţi prin schema lui Feller.

În Capitolul 3 întitulat "Ordin arbitrar prin operatori liniari integrali pe $\mathbb{R}_+$", plecînd de la un şir $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, convergînd la zero arbitrar de rapid, construim şiruri de operatori Baskakov-Kantorovich, Szász-Kantorovich, Szász-Durrmeyer, Szász-Durrmeyer-Stancu şi Baskakov-Szász-Durrmeyer-Stancu, convergînd la funcţia aproximata $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ şi avînd ordinul de aproximare $\omega_1(f; \sqrt{\lambda_n})$.

De asemenea, aceste rezultate au şi un caracter unificator, pentru că pentru variate alegeri ale nodurilor λ_n, se pot reobţine rezultate anterioare obţinute de către alţi autori.

În Capitolul 4 întitulat "Ordin arbitrar prin operatori liniari Kantorovich în $\mathbb{C}$", aplicăm ideile din Capitolul 3 la cazul aproximării funcţiilor analitice de o variabilă complexă în submulţimi compacte simplu sau multiplu conexe din $\mathbb{C}$, prin operatori complecşi Kantorovich-Faber de tip Baskakov şi de tip Szász, şi prin operatori Kantorovich-Walsh de tip Baskakov şi Szász.

Prin urmare, considerînd un şir $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, convergînd la zero arbitrar de rapid, construim aceste şiruri de operatori ataşati unei funcţii analitice de o anumita creştere exponentială în mulţimi compacte simplu sau multiplu conexe, care aproximează f cu ordinul $O(\lambda_n)$.

Acest capitol are şase secţiuni. Primele trei secţiuni se ocupă cu aproximarea în mulţimi compacte simplu conexe prin operatori Kantorovich-Faber de tip Baskakov şi Szász, în timp ce urmatoarele trei secţiuni se ocupă cu aproximarea în compacte multiplu conexe prin operatori Kantorovich-Walsh de tip Baskakov şi Szász.

Concluzionînd, rezultatele obţinute în teză au fost obţinute de către autor în colaborare cu Sorin Gal, Lucian Coroianu şi Bogdan Opris, sau ca şi unic autor, în 6 lucrari, publicate de către revistele de mai jos :

1) Coroianu, Lucian ; Gal, Sorin G. ; Opriş, Bogdan D.; **Trifa, Sorin**, Feller's scheme in approximation by nonlinear possibilistic integral operators, **Numerical Functional Analysis and Optimimization**, 38 (2017),

No. 3, 327-343. (IF ISI pe 2017 : 0.852 , SRI pe 2017 : 0.623). .

2) Gal, Sorin G. ; **Trifa, Sorin**, Quantitative estimates in uniform and pointwise approximation by Bernstein-Durrmeyer-Choquet operators, **Carpathian Journal of Mathematics**, 33 (2017), no. 1, 49 - 58. (IF ISI pe 2017 : 0.788 , SRI on 2017 : 0.351). .

3) Gal, Sorin G. ; **Trifa Sorin**, Quantitative estimates in L^p-approximation by Bernstein-Durrmeyer-Choquet operators with respect to distorted Borel measures, **Results in Mathematics**, 72 (2017), no. 3, 1405-1415. (IF ISI pe 2017 : 0.969 , SRI on 2017 : 0.0.667)

4) **Trifa, Sorin**, Approximation with an arbitrary order by generalized Kantorovich-type and Durrmeyer-type operators on $[0, +\infty)$, **Studia Universitatis "Babes-Bolyai", series mathematics**, vol. 62, no. 4 (2017), 485-500. (B_+ journal, recenzat in Mathematical Reviews and Zentralblatt für Mathematik)

5) **Trifa, Sorin**, Approximation of analytic functions with an arbitrary order by Baskakov-Kantorovich-Faber and Szász-Kantorovich-Faber operators in compact sets, **Analele Universitatii din Oradea, fascicola mathematica**, vol. 25 , no. 1, (2018), 181-186. (B_+ journal, recenzat in Mathematical Reviews and Zentralblatt für Mathematik)

6) Gal, Sorin G. ; **Trifa, Sorin**, Quantitative estimates in L^p-approximation by Kantorovich-Choquet operators with respect to distorted Borel measures, trimisa spre publicare.

Mai in detaliu, rezultatele originale din teză sunt următoarele :

Capitolul 2. Teorema 2.1.6 **a fost publicată în lucrarea [51]**.

Teorema 2.1.8 este nouă şi apare pentru prima dată în teza. Lema 2.1.9 şi Exemplul 2.1.1 **au fost publicate în [51]**.

Examplele 2.1.12 şi 2.1.13 **au fost publicate în lucrarea [51]**.

Teorema 2.1.16, Observaţia 2.1.17 şi Corolarul 2.1.18 **au fost publicate în** [**52**].

Teorema 2.2.2 şi Observaţia 2.2.3 **au fost publicate în** [**53**].

Teoremele 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5 şi 2.3.6 **au fost publicate în** [**23**].

Capitolul 3. Lema 3.2.1, Teorema 3.2.2, Corolarul 3.2.3, Lema 3.3.1, Teorema 3.3.2, Corolarul 3.3.3, Lema 3.4.1, Teorema 3.4.2, Corolarul 2.4.3, Lema 3.4.4, Teorema 3.4.5, Corolarul 3.4.6, Lema 3.5.1, Teorema 3.5.2 şi Corolarul 3.5.3, **au fost publicate în lucrarea** [**71**].

Capitolul 4. Definiţia 4.1.1, Teorema 4.1.2, Lema 4.2.1, Teorema 4.2.2 şi Teorema 4.3.1 **au fost publicate în lucrarea** [**72**].

Definiţia 4.4.2, Teorema 4.5.2 şi Teorema 4.6.1 sunt noi şi apar pentru prima dată în teză.

Cuvinte cheie : funcţie de mulţime monotonă şi submodulară, integrala Choquet, operator Bernstein-Durrmeyer-Choquet, operator Kantorovich-Choquet, estimări cantitative punctuale, uniforme şi în spaţii L^p, modul de continuitate, K-funcţionale, integrala neliniara posibilistică, operatori Picard posibilistici Picard, Gauss-Weierstrass şi Poisson-Cauchy, operatori generalizaţi Baskakov-Kantorovich, Baskakov-Durrmeyer, Szász-Durrmeyer de variabilă reală, operatori liniari şi pozitivi, ordin arbitrar de aproximare, operatori complecşi Baskakov-Kantorovich-Faber, Szász-Kantorovich-Faber, Baskakov-Kantorovich-Walsh şi Szász-Kantorovich-Walsh, compact simplu conex, compact multiplu conex, polinoame Faber, polinoame Faber-Walsh.

Imi exprim adînca recunoştinţă domnului profesor dr. Sorin G. Gal, pentru spijinul constant acordat la elaborarea acestei teze.

Cap. 2

Aproximare cu operatori integrali neliniari

În acest capitol deducem estimări cantitative în aproximare cu operatori integrali, înlocuind integrala liniară clasică cu integrala neliniară Choquet şi cu integrala neliniară posibilistică. Capitolul este alcatuit din trei secţiuni : în secţiunea întîi studiem operatorii Bernstein-Durrmeyer-Choquet, în a doua secţiune studiem operatorii Kantorovich-Choquet, iar în a treia secţiune studiem operatori posibilistici.

2.1 Erori cantitative in cazul Durrmeyer-Choquet

Aici studiem operatorii Bernstein-Durrmeyer multivariaţi de d-variables, $M_{n,\mu}$, cu integralele considerate în termenii unei σ-măsuri μ (Borel sau Lebesgue) definită pe simplexul d-dimensional, înlocuite cu integrale Choquet în raport cu o familie de funcţii de mulţimi monotone şi submodulare

$\Gamma_{n,x}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in S^d$. Noii operatori sunt neliniari şi generalizează operatorii liniari Bernstein-Durrmeyer. Pentru aceşti operatori, care pot fi numiţi operatori Bernstein-Durrmeyer-Choquet, obţinem rezultate de aproximare cantitative uniforme sau punctuale şi în spaţiul L^p, în termenii modulului de continuitate şi ai unor K-funcţionale.

De asemenea, în cazul unidimensional, se prezintă şi anumite exemple concrete care imbunătăţesc ordinele de aproximare.

2.1.1 Introducere

Considerăm simplexul clasic în $\mathbb{R}^d$

$$S^d = \{(x_1, ..., x_d); 0 \leq x_1, ..., x_d \leq 1,\ 0 \leq x_1 + ... + x_d \leq 1\}.$$

Sugerate de lucrarea [11], într-o serie de lucrări [8], [9] şi [57], au fost obţinute rezultate calitative privind convergenţa uniformă, punctuală şi în spaţiul L^p (în mod respectiv) a lui $M_{n,\mu}(f)(x)$ către funcţia $f(x)$ (cînd $n \to \infty$), unde $M_{n,\mu}(f)(x)$ notează operatorul liniar Bernstein-Durrmeyer de d-variabile, în raport cu o măsură Borel marginită $\mu : S^d \to \mathbb{R}_+$, definit prin

$$M_{n,\mu}(f)(x)$$

$$= \sum_{|\alpha|=n} \frac{\int_{S^d} f(t) B_\alpha(t) d\mu(t)}{\int_{S^d} B_\alpha(t) d\mu(t)} \cdot B_\alpha(x) := \sum_{|\alpha|=n} c(\alpha, \mu) \cdot B_\alpha(x),\ x \in S^d,\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

cu notaţiile $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$, cu $\alpha_j \geq 0$ pentru $j = 0, ..., n$, $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n = n$ şi

$$B_\alpha(x) = \frac{n!}{\alpha_0! \cdot \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n!} (1 - x_1 - x_2 - ... - x_d)^{\alpha_0} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_d^{\alpha_d}$$

$$:= \frac{n!}{\alpha_0! \cdot \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n!} \cdot P_\alpha(x).$$

Rezultatele de tip calitativ din [8] şi [9] asupra convergentei punctuale şi uniforme, au fost extinse în [50] în cadrul mai general cînd μ este o funcţie de mulţimi monotonă, mărginită, submodulară pe S^d iar integralele din formula (2.1), sunt integrale Choquet definite cu ajutorul lui μ.

Mai jos să descriem pe scurt aceste rezultate calitative.

Fie $\mathcal{B}_{S^d} \subset \mathcal{P}(S^d)$, σ-algebra submulţimilor măsurabile Borel şi $\mu : \mathcal{B}_{S^d} \to [0, +\infty)$ o funcţie de mulţimi normalizată, monotonă, submodulară pe $\mathcal{B}_{S^d}$.

Spunem ca μ este strict pozitivă, cu condiţia ca $\mu(A \cap S^d) > 0$, pentru fiecare mulţime deschisă $A \subset \mathbb{R}^n$ cu $A \cap S^d \neq \emptyset$.

Suportul măsurii de mulţime μ, notat $supp(\mu)$, este definit astfel :

$$supp\mu = \{x \in S^d; \mu(N_x) > 0, \forall N_x \in \mathcal{B}_{S^d} \text{ vecinatate deschisă a lui x}\}.$$

Să notăm cu $C_+(S^d) = \{f : S^d \to [0, +\infty) : f \text{ este continuă}\}$ şi cu $L^\infty_\mu(S^d)$, spaţiul tuturor funcţiilor f, cu valori reale şi $\mathcal{B}_{S^d}$-măsurabile, cu proprietatea că există $E \subset S^d$ (ce depinde de f), cu $\mu(E) = 0$ şi pe $S^d \setminus E$, f este mărginită.

Este de notat aici că nu se pierde generalitatea prin condiţia de normalizare asupra lui μ, iar condiţia $supp(\mu) \setminus \partial S^d \neq \emptyset$, ne garanteaza faptul că $(C) \int_{S^d} B_\alpha(t) d\mu(t) > 0$, pentru orice B_α.

Primul rezultat calitativ cunoscut priveşte aproximarea uniformă.

Teorema 2.1.1. (Gal-Opriş [50]) *Dacă μ este monotonă, normalizată, submodulară, strict pozitivă pe $\mathcal{B}_{S^d}$, cu proprietatea că $supp(\mu) \setminus \partial S^d \neq \emptyset$ iar integralele din formula (2.1) sunt integrale neliniare Choquet, atunci pentru orice $f \in C_+(S^d)$ avem*

$$\lim_{n \to \infty} \|M_{n,\mu}(f) - f\|_{C(S^d)} = 0,$$

unde $\|F\|_{C(S^d)} = \max\{|F(x)|; x \in S^d\}$.

Al doilea rezultat calitativ cunoscut priveşte convergenţa punctuală.

Teorema 2.1.2. (Gal-Opriş [50]) *Dacă μ este monotonă, normalizată, submodulară pe $\mathcal{B}_{S^d}$, astfel încît $supp(\mu)\setminus\partial S^d \neq \emptyset$ iar integralele din formula (2.1) sunt integrale neliniare Choquet, atunci pentru orice $f \in L^{\infty}_{\mu}(S^d)$ cu proprietatea $f(x) \geq 0$, pentru toţi $x \in S^d$, in orice punct $x \in supp(\mu)$ de continuitate pentru f, avem*

$$\lim_{n\to\infty} |M_{n,\mu}(f)(x) - f(x)| = 0.$$

Observaţie. Este de notat că datorită neliniarităţii integralei Choquet, operatorii $M_{n,\mu}(f)$ sunt neliniari.

Scopul principal al acestei secţiuni este de a prezenta estimări cantitative punctuale, uniforme şi în spaţiul L^p, în termenii modulului de continuitate şi a unor K-funcţionale, în aproximarea prin operatorul polinomial multivariat mai general, Bernstein-Durrmeyer-Choquet, scris in termenii integralelor Choquet pe simplexul standard d-dimensional, definit in lucrarea Gal-Trifa [51] prin

$$M_{n,\Gamma_{n,x}}(f)(x) = \sum_{|\alpha|=n} c(\alpha, \mu_{n,\alpha,x}) \cdot B_{\alpha}(x),\ x \in S^d,\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

unde

$$c(\alpha, \mu_{n,\alpha,x}) = \frac{(C)\int_{S^d} f(t)B_{\alpha}(t)d\mu_{n,\alpha,x}(t)}{(C)\int_{S^d} B_{\alpha}(t)d\mu_{n,\alpha,x}(t)}$$

$$= \frac{(C)\int_{S^d} f(t)P_{\alpha}(t)d\mu_{n,\alpha,x}(t)}{(C)\int_{S^d} P_{\alpha}(t)d\mu_{n,\alpha,x}(t)}$$

şi pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in S^d$, $\Gamma_{n,x} = (\mu_{n,\alpha,x})_{|\alpha|=n}$ este o familie de funcţii de mulţimi mărginite, monotone, submodulare şi strict pozitive pe $\mathcal{B}_{S^d}$.

Dacă familia $\Gamma_{n,x}$ se reduce la o singură funcţie de mulţime mărginită, monotonă, submodulară, strict pozitivă (adică $\mu_{n,\alpha,x} = \mu$ pentru toţi n, x

şi α), atunci operatorul dat prin (2.2) se reduce la operatorul considerat în [50].

Dacă $d = 1$ şi integralele Choquet sunt luate în raport cu anumite măsuri posibilistice concrete, atunci estimările în termenii modulului de continuitate sunt detailate. Sunt prezentate exemple care le imbunătăţesc pe cele obţinute prin operatorii clasici de aproximare.

2.1.2 Preliminarii

Mai întîi, prezentăm cîteva concepte cunoscute din teoria posibilităţii, utile in consideraţiile care vor urma. Pentru detalii, se poate consulta [27].

Definiţia 2.1.3 Pentru mulţimea nevida Ω, notăm cu $\mathcal{P}(\Omega)$ familia tuturor submulţimilor lui Ω.

(i) O funcţie $\lambda : \Omega \to [0, 1]$ cu proprietatea $\sup\{\lambda(s); s \in \Omega\} = 1$, se numeşte distribuţie posibilistică (de posibilitate) pe Ω.

(ii) $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ se numeşte măsura posibilistică (de posibilitate), dacă satisface proprietaţile $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ şi $P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sup\{P(A_i); i \in I\}$ pentru orice $A_i \subset \Omega$ şi I, o familie finită sau numărabilă de indici. Dacă $A, B \subset \Omega$, $A \subset B$, atunci ultima proprietate implică uşor că $P(A) \leq P(B)$ şi că $P(A \bigcup B) \leq P(A) + P(B)$.

Orice distribuţie de posibilitate λ on Ω, induce măsura posibilistică $P_\lambda : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, $P_\lambda(A) = \sup\{\lambda(s); s \in A\}$, $A \subset \Omega$. De asemenea, pentru $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$, integrala posibilistică a lui f pe $A \subset \Omega$ in raport cu P_λ, este prin definiţie $(Pos) \int_A f dP_\lambda = \sup\{f(t) \cdot \lambda(t); t \in A\}$ (vezi, de exemplu, [27], Capitolul 1).

Cîteva concepte şi rezultate cunoscute privind integrala Choquet, pot fi rezumate prin următoarele.

Definiţia 2.1.4 Presupunem ca $\Omega \neq \emptyset$ şi fie $\mathcal{C}$ o σ-algebra de submulţimi ale lui Ω.

(i) (vezi [78], p. 63) Funcţia de mulţime $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ se numeşte monotonă (sau capacitate) dacă $\mu(\emptyset) = 0$ şi $\mu(A) \leq \mu(B)$ pentru orice $A, B \in \mathcal{C}$, cu $A \subset B$. De asemenea, μ se numeşte mărginită, dacă $\mu(\Omega) < +\infty$ şi submodulară dacă

$$\mu(A \bigcup B) + \mu(A \bigcap B) \leq \mu(A) + \mu(B), \text{ pentru orice } A, B \in \mathcal{C}.$$

În sfîrşit, dacă $\mu(\Omega) = 1$, ea se numeşte normalizată.

(ii) (vezi, de exemplu, [78], p. 233, sau [17]) Dacă μ este o funcţie de mulţimi monotonă, normalizată pe $\mathcal{C}$ şi dacă $f : \Omega \to \mathbb{R}$ este $\mathcal{C}$-măsurabilă (adică, pentru orice submulţime Borel $B \subset \mathbb{R}$ avem $f^{-1}(B) \in \mathcal{C}$), atunci pentru orice $A \in \mathcal{C}$, integrala Choquet este definită prin

$$(C) \int_A f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu \left(F_\beta(f) \bigcap A \right) d\beta + \int_{-\infty}^0 \left[\mu \left(F_\beta(f) \bigcap A \right) - \mu(A) \right] d\beta,$$

cu $F_\beta(f) = \{\omega \in \Omega; f(\omega) \geq \beta\}$. Dacă $f \geq 0$ on A, atunci mai sus primim $\int_{-\infty}^0 = 0$.

Funcţia f se va numi Choquet integrabila pe A dacă $(C) \int_A f d\mu \in \mathbb{R}$.

In cele ce urmează, înşiruim cîteva proprietăţi cunoscute ale integralei Choquet.

Observaţia 2.1.5 Dacă $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ este o funcţie de mulţime monotonă, atunci au loc urmatoarele proprietăţi :

(i) Pentru toţi $a \geq 0$ avem $(C) \int_A af d\mu = a \cdot (C) \int_A f d\mu$ (dacă $f \geq 0$ atunci vezi, de exemplu, [78], Teorema 11.2, (5), p. 228 şi dacă f are semn arbitrar, atunci vezi, de exemplu, [24], p. 64, Proposition 5.1, (ii)).

(ii) Pentru toţi $c \in \mathbb{R}$ şi f cu valori reale (nu neapărat pozitive), are loc (vezi, de exemplu, [78], pp. 232-233, sau [24], p. 65) $(C) \int_A (f + c) d\mu = (C) \int_A f d\mu + c \cdot \mu(A)$.

Dacă μ este şi submodulară, atunci pentru orice f, g mărginite inferior şi de semn oarecare, avem (vezi [24], p. 75, Theorem 6.3)

$$(C)\int_A (f+g)d\mu \leq (C)\int_A f d\mu + (C)\int_A g d\mu.$$

(iii) Dacă $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in A$, atunci $(C)\int_A f d\mu \leq (C)\int_A g d\mu$ (vezi [78], p. 228, Theorem 11.2, (3) dacă $f, g \geq 0$ şi p. 232 dacă f, g sunt de semn oarecare).

(iv) Dacă $f \geq 0$, atunci $A \subset B$ implică $(C)\int_A f d\mu \leq (C)\int_B f d\mu$. In plus, dacă μ este şi finit subaditivă, rezultă $(C)\int_{A\bigcup B} f d\mu \leq (C)\int_A f d\mu + (C)\int_B f d\mu$.

(v) Este imediat că $(C)\int_A 1 \cdot d\mu(t) = \mu(A)$.

(vi) Formula $\mu(A) = \gamma(M(A))$, unde $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ este o funcţie concavă şi crescătoare, cu $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$ şi M este o măsura de probabilitate (sau doar o măsura finit aditiva) pe o σ-algebra pe Ω (adică, $M(\emptyset) = 0$, $M(\Omega) = 1$ şi M este numarabil aditiva), ne da exemple simple de funcţii de mulţimi normalizate, monotone şi submodulare (vezi, de exemplu, [24], pp. 16-17, Example 2.1). Spre exemplu, putem lua $\gamma(t) = \sqrt{t}$.

Dacă funcţia γ de mai sus este concavă, crescătoare şi satisface doar condiţia $\gamma(0) = 0$, atunci pentru orice măsura Borel mărginită $m \leq 1$, formula $\mu(A) = \gamma(m(A))$ ne dă exemplu simplu de funcţie de mulţimi mărginită, monotonă, submodulară.

Observăm ca orice măsura posibilistică μ este monotonă, normalizată şi submodulară. Într-adevăr, axioma $\mu(A\bigcup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$ implică monotonia, în timp ce proprietatea $\mu(A\bigcap B) \leq \min\{\mu(A), \mu(B)\}$ implică submodularitatea.

(vii) Dacă μ este mărginită şi numărabil aditiva, atunci integrala Choquet $(C)\int_A f d\mu$ se reduce la cazul integralei de tip Lebesgue clasica (vezi [24], p. 62, sau [78], p. 226).

2.1.3 Estimări punctuale şi uniforme

Au loc următoarele estimări cantitative generale din aproximarea punctuala şi uniforma.

Teorema 2.1.6 (Gal-Trifa [51]) *Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in S^d$ fixate, fie $\Gamma_{n,x} = \{\mu_{n,\alpha,x}\}_{|\alpha|=n}$ o familie de funcţii de mulţimi marginite, monotone, submodulare şi strict pozitive pe $\mathcal{B}_{S^d}$.*

(i) Pentru fiecare $f \in C_+(S^d)$, $x = (x_1, ..., x_d) \in S^d$, $n \in \mathbb{N}$, avem

$$|M_{n,\Gamma_{n,x}}(f)(x) - f(x)| \le 2\omega_1(f; M_{n,\Gamma_{n,x}}(\varphi_x)(x))_{S^d},$$

unde $M_{n,\Gamma_{n,x}}(f)(x)$ este data de (2.2), $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$, $\varphi_x(t) = \|t - x\|$ şi $\omega_1(f; \delta)_{S^d} = \sup\{|f(t) - f(x)|; t, x \in S^d, \|t - x\| \le \delta\}$.

(ii) Presupunem că familia $\Gamma_{n,x}$ nu depinde de x. Atunci, pentru orice $f \in C_+(S^d)$ şi $n \in \mathbb{N}$, primim

$$\|M_{n,\Gamma_n}(f) - f\|_{C(S^d)} \le 2K\left(f; \frac{\Delta_n}{2}\right),$$

unde $\Delta_n = \sum_{i=1}^d \|M_{n,\Gamma_n}(|\varphi_{e_i} - x_i\mathbf{1}|)\|_{C(S^d)}$,

$$K(f;t) = \inf_{g \in C_+^1(S^d)} \{\|f - g\|_{C(S^d)} + t\|\nabla g\|_{C(S^d)}\},$$

$C_+^1(S^d)$ este subspaţiul tuturor funcţiilor $g \in C_+(S^d)$ cu derivatele parţiale $\partial_i g$, $i \in \{1, ..., d\}$ continue şi $\|\nabla g\|_{C(S^d)} = \max_{i=\{1,...,d\}}\{\|\partial_i g\|_{C(S^d)}\}$, $\varphi_{e_i}(x) = x_i$, $i \in \{1, ..., d\}$, $x = (x_1, ..., x_d)$, $\mathbf{1}(x) = 1$, pentru toţi $x \in S^d$.

Observaţia 2.1.7 Pozitivitatea lui f în Teorema 2.1.6, (i), (ii) este obligatorie din cauza omogeneităţii pozitive a integralei Choquet, care se foloseşte in demonstraţie. Cu toate acestea, dacă f ia valori reale arbitrare şi dacă este mărginită inferior pe S^d cu $f(x) - m \ge 0$, pentru toţi $x \in S^d$, atunci Teorema 2.1.6, (i), (ii) poate fi re-enunţată pentru operatorul

Bernstein-Durrmeyer-Choquet uşor modificat

$$M^*_{n,\Gamma_{n,x}}(f)(x) = M_{n,\Gamma_{n,x}}(f-m)(x) + m.$$

Intr-adevar, in cazul Teoremei 2.1.6, (i), aceasta este imediată din $\omega_1(f-m;\delta)_{S^d} = \omega_1(f;\delta)_{S^d}$ şi din $M^*_{n,\Gamma_{n,x}}(f)(x) - f(x) = M_{n,\Gamma_{n,x}}(f-m)(x) - (f(x)-m)$. Observăm ca in cazul Teoremei 2.1.6, (ii), deoarece putem considera aici ca $m < 0$, primim imediat relaţiile

$$K(f-m;t) = \inf_{g\in C^1_+(S^d)}\{\|f-(g+m)\|_{C(S^d)} + t\|\nabla g\|_{C(S^d)}\}$$
$$= \inf_{g\in C^1_+(S^d)}\{\|f-(g+m)\|_{C(S^d)} + t\|\nabla(g+m)\|_{C(S^d)}\}$$
$$= \inf_{h\in C^1(S^d),\, h\geq m}\{\|f-h\|_{C(S^d)} + t\|\nabla h\|_{C(S^d)}\}.$$

2.1.4 Cazuri particulare de operatori

Deoarece estimarile din Teorema 2.1.6, (i), (ii) sunt de un caracter foarte general şi abstract, insemnind aparenta dificultate de a calcula integrale Choquet, este de interes ca să se obţina expresii concrete pentru ordinele de aproximare.

In acest sens, vom aplica Teorema 2.1.6, (i) pentru $d = 1$ şi pentru cîteva alegeri speciale de funcţii de mulţimi submodulare.

Astfel, vom considera cazul măsurilor de posibilitate. Notind $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$, să definim $\lambda_{n,k}(t) = \frac{p_{n,k}(t)}{k^k n^{-n}(n-k)^{n-k}\binom{n}{k}} = \frac{t^k(1-t)^{n-k}}{k^k n^{-n}(n-k)^{n-k}}$, $k = 0, ..., n$. Aici, prin convenţie, considerăm $0^0 = 1$, astfel încît cazurile $k = 0$ şi $k = n$ au sens.

Considerind radacina $\frac{k}{n}$ a lui $p'_{n,k}(x)$, este uşor de vazut ca $\max\{p_{n,k}(t); t \in [0,1]\} = k^k n^{-n}(n-k)^{n-k}\binom{n}{k}$, ceea ce implică faptul ca fiecare $\lambda_{n,k}$ este o distribuţie posibilistică pe $[0,1]$. Notind cu $P_{\lambda_{n,k}}$ măsura de posibilitate indusă de către $\lambda_{n,k}$ şi $\Gamma_{n,x} := \Gamma_n = \{P_{\lambda_{n,k}}\}_{k=0}^n$ (adică, Γ este independenta de x), operatorul neliniar Bernstein-Durrmeyer dat de (2.2) in termenii integalelor Choquet in raport cu funcţiile de mulţimi din Γ_n, va deveni

$$D_{n,\Gamma_n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \cdot \frac{(C)\int_0^1 f(t)t^k(1-t)^{n-k}dP_{\lambda_{n,k}}(t)}{(C)\int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}dP_{\lambda_{n,k}}(t)}. \tag{2.3}$$

Este uşor de vazut ca orice măsura de posibilitate $P_{\lambda_{n,k}}$ este marginita, monotonă, submodulară şi strict pozitivă, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, ..., n$, deci ca suntem sub ipotezele Teoremei 2.1.6.

Putem enunţa următorul rezultat.

Teorema 2.1.8. *Fie $D_{n,\Gamma_n}(f)(x)$ dat de (2.3), $f \in C_+([0,1])$, $x \in [0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Avem :*

(i)

$$|D_{n,\Gamma_n}(f)(x) - f(x)|$$
$$\leq 2\omega_1\left(f; \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{x}}{\sqrt{2n}} + \frac{1+|1-2x|}{2n}\right)_{[0,1]}.$$

(ii)

$$\|D_{n,\Gamma_n}(f) - f\|_{C[0,1]} \leq 6\omega_1\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{[0,1]}.$$

Pentru demonstraţia ei, avem nevoie de următorul rezultat auxiliar.

Lema 2.1.9. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $x \in [0,1]$. Notind*

$$A_{n,k}(x) := \sup\{|t-x|t^k(1-t)^{n-k}; t \in [0,1]\} =$$

$$\max\{\sup\{(t-x)t^k(1-t)^{n-k}; t \in [x,1]\}, \sup\{(x-t)t^k(1-t)^{n-k}; t \in [0,x]\}\},$$

cu conventia $0^0 = 1$, pentru toţi $k = 0, ..., n$ avem

$$A_{n,k}(x) = \max\{(t_2-x)t_2^k(1-t_2)^{n-k}, (x-t_1)t_1^k(1-t_1)^{n-k}\},$$

cu t_1, t_2 dat prin

$$t_1 = \frac{nx+k+1-\sqrt{\Delta}}{2(n+1)},\ t_2 = \frac{nx+k+1+\sqrt{\Delta}}{2(n+1)}, \tag{2.4}$$

unde

$$\Delta = (nx + k + 1)^2 - 4kx(n + 1) = n^2 \left[(x + (k + 1)/n)^2 - 4x\frac{k}{n} \cdot \frac{n + 1}{n} \right]$$

$$= (nx - k)^2 + 2x(n - k) + 2k(1 - x) + 1 \geq 1.$$

Observaţia 2.1.10 Deoarece $1 + |1 - 2x| \leq 2$ pentru toţi $x \in [0, 1]$, rezultă că estimarea din Teorema 2.1.8 este mai buna decît cea obţinută in Gal-Trifa [51], care este in termenii lui

$$2\omega_1 \left(f; \frac{(1 + \sqrt{2})\sqrt{x(1 - x)} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)_{[0,1]}.$$

2.1.5 Exemple ce imbunătăţesc estimările clasice

Această secţiune conţine exemple concrete care imbunătăţesc estimările clasice.

Exemplu 2.1.11 (Gal-Trifa [51]) Deoarece operatorii din aceasta secţiune pot fi definiti în raport cu o familie de măsuri Borel şi Choquet combinate în diferite moduri, acest fapt oferă o flexibilitate şi generalitate foarte inalte, permiţind construcţia unor operatori care au chiar mai bune proprietaţi de aproximare. Ca şi un prim exemplu, este clar ca $B_n(f)(x)$ poate de asemenea fi vazut ca şi operatorul Bernstein-Durrmeyer-Choquet in cazul cind $\Gamma_{n,x}$ este compusă din măsurile Dirac $\delta_{k/n}$, $k = 0, ..., n$. Cu aceasta ocazie, observăm că deoarece măsurile Dirac nu sunt strict pozitive, este clar ca strict pozitivitatea funcţiilor de mulţimi din Teorema 2.1.6 nu este intotdeauna necesara.

Exemplu 2.1.12 (Gal-Trifa [51]) În formula (2.3), să înlocuim familia de măsuri posibilistice $\Gamma_n = \{P_{\lambda_{n,k}}\}_{k=0}^{n}$, cu $\Gamma_n = \{\nu_{n,0}, \nu_{n,n}, \mu_{n-2,k-1}, k = 1, ..., n - 1\}$, unde funcţiile de mulţimi $\mu_{n-2,k-1}, k = 1, ..., n - 1$ sunt măsura

Lebesgue, $\nu_{n,0} = \delta_0$ (măsura Dirac), $\nu_{n,n}$ este o funcţie de mulţimi monotonă, submodulară şi strict pozitivă şi definim operatorii Durrmeyer-Choquet prin

$$U_{n,\Gamma_n}(f)(x) = p_{n,0}(x) \cdot \frac{(C)\int_0^1 f(t)(1-t)^n d\nu_{n,0}}{(C)\int_0^1 (1-t)^n d\nu_{n,0}} + p_{n,n}(x) \cdot \frac{(C)\int_0^1 f(t)t^n d\nu_{n,n}}{(C)\int_0^1 t^n d\nu_{n,n}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} p_{n,k}(x) \cdot \frac{(C)\int_0^1 f(t)p_{n-2,k-1}(t)d\mu_{n-2,k-1}(t)}{(C)\int_0^1 p_{n-2,k-1}(t)d\mu_{n-2,k-1}(t)}.$$

Notind cu $G_n(f)(x)$, operatorul Bernstein-Durmeyer (vezi, de exemplu, [54]), obţinem imediat

$$U_{n,\Gamma_n}(f)(x) - f(x) = G_n(f)(x) - f(x) + x^n \left[\frac{(C)\int_0^1 f(t)t^n d\nu_{n,n}(t)}{(C)\int_0^1 t^n d\nu_{n,n}(t)} - f(1) \right].$$

Să alegem $\nu_{n,n}$ definită prin $\nu_{n,n}(A) = \nu(A)$, unde, de exemplu, $\nu(A) = \sqrt{m(A)}$ sau $\nu(A) = \sin[m(A)]$.

Presupunem că $f \geq 0$ este strict crescătoare pe $[0, 1]$. Deoarece

$$(C)\int_0^1 f(t)t^n d\nu_{n,n}(t) = \int_0^\infty \nu_{n,n}(\{t \in [0,1]; f(t)t^n \geq \lambda\})d\lambda$$

$$= (C)\int_0^1 f(t)t^n d\nu(t) < f(1) \cdot (C)\int_0^1 t^n d\nu_{n,n}(t),$$

rezultă imediat

$$\frac{(C)\int_0^1 f(t)t^n d\nu_{n,n}(t)}{(C)\int_0^1 t^n d\nu_{n,n}(t)} - f(1) < f(1) - f(1) = 0.$$

Deoarece strict convexitatea lui f implică $G_n(f)(x) - f(x) > 0$ pentru toţi $x \in (0, 1)$ (vezi, deexemplu, Lema 2.1, (iv) din [54]), rationamente similare cu cele pentru exemplul anterior arata că dacă $f \geq 0$ este strict convexa şi strict crescatoare pe $[0, 1]$, implică

$$|U_{n,\Gamma_n}(f)(x) - f(x)|$$

$$< \max \left\{ |G_n(f)(x) - f(x)|, x^n \left| \frac{(C)\int_0^1 f(t)t^n d\mu(t)}{(C)\int_0^1 t^n d\mu(t)} - f(1) \right| \right\}.$$

Deci, $U_{n,\Gamma_n}(f)(x)$ approximeaza mai bine f on $(0,1)$ decît $G_n(f)(x)$.

Exemplu 2.1.13 (Gal-Trifa [51]) În formula (2.3), să înlocuim familia Γ_n de măsuri posibiblistice $P_{\lambda_{n,k}}$, $k = 0, ..., n$, cu familia constînd din măsurile Dirac $\delta_{k/n}$, $k = 0, 1, ..., n-1$ (care sunt măsuri Borel şi deci cu integralele Choquet corespunzătoare reducîndu-se la cele clasice) împreună cu o funcţie de mulţimi monotonă, submodulară, strict pozitivă $P_{\lambda_{n,n}} := \nu_{n,n}$, definită prin $\nu_{n,n}(A) = \nu(A)$, unde, de exemplu, $\nu(A) = \sqrt{m(A)}$ sau $\nu(A) = \sin[m(A)]$.

Atunci, notînd cu

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

operatorii Bernstein clasici, pentru D_{n,Γ_n} din (2.3) primim

$$D_{n,\Gamma_n}(f)(x) - f(x)$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n-1} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) + x^n \cdot \frac{(C)\int_0^1 f(t)t^n d\nu_{n,n}(t)}{(C)\int_0^1 t^n d\nu_{n,n}(t)} \right] - f(x)$$

$$= B_n(f)(x) - f(x) + x^n \left[\frac{(C)\int_0^1 f(t)t^n d\nu_{n,n}(t)}{(C)\int_0^1 t^n d\nu_{n,n}(t)} - f(1) \right],$$

unde prin raţionamente similare cu cele din Exemplul 5.2, pentru f strict crescatoare pe $[0,1]$, rezultă

$$\frac{(C)\int_0^1 f(t)t^n d\nu_{n,n}(t)}{(C)\int_0^1 t^n d\nu_{n,n}(t)} - f(1) \leq 0.$$

Presupunem acum că $f \geq 0$ este strict crescătoare şi strict convexă pe $[0,1]$. Strict convexitatea lui f implică (vezi [69]) $B_n(f)(x) - f(x) > 0$

pentru toţi $x \in (0, 1)$, deci, pentru $x \in (0, 1)$, $D_{n,\Gamma_n}(f)(x)$ aproximeaza mai bine f decît $B_n(f)(x)$, deoarece

$$|D_{n,\Gamma_n}(f)(x) - f(x)|$$

$$< \max\left\{|B_n(f)(x) - f(x)|, x^n \left|\frac{(C)\int_0^1 f(t)t^n d\nu_{n,n}(t)}{(C)\int_0^1 t^n d\nu_{n,n}(t)} - f(1)\right|\right\}.$$

Observaţia 2.1.14 (Gal-Trifa [51]) Deoarece formula pentru operatorii $D_{n,\Gamma_n}(f)$ in (2.3) foloseşte integrale Choquet în raport cu măsuri posibilistice, este natural să ne punem problema unui studiu al proprietăţilor de convergenţă a lui $D_{n,\Gamma_n}(f)$, in cazul cind integralele Choquet $(C)\int_0^1$ in (2.3) sunt inlocuite (toate, sau doar unele dintre ele) cu integrale posibilistice $(Pos)\int_0^1$, aşa cum sunt ele definite prin Definiţia 2.1.3, (ii). De exemplu, dacă toate integralele Choquet sunt inlocuite cu integrale posibilistice, din (2.3) obţinem uşor noii operatori (care par inca să aiba proprietăţi bune de aproximare !)

$$\overline{D}_{n,\Gamma_n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \cdot \frac{(Pos)\int_0^1 f(t)t^k(1-t)^{n-k} dP_{\lambda_{n,k}}(t)}{(Pos)\int_0^1 t^k(1-t)^{n-k} dP_{\lambda_{n,k}}(t)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \cdot \frac{\sup\{f(t)[t^k(1-t)^{n-k}]^2; t \in [0, 1]\}}{\sup\{[t^k(1-t)^{n-k}]^2; t \in [0, 1]\}}.$$

Un studiu detailat al proprietăţilor de convergenţă pentru toate aceste tipuri de operatori posibilisitici Bernstein-Durrmeyer, ramîne ca şi o direcţie viitoare de cercetare.

2.1.6 Aproximare cantitativă în spaţiul L^p

Scopul principal al acestei subsecţiuni este de a studia rezultate de aproximare cantitativă in spaţiile L^p, $1 \leq p < \infty$, pentru cazul cind $\Gamma_{n,x}$ se reduce la un sungur elementμ, care este o funcţie particulara de mulţimi, normalizată, monotonă şi submodulară, numita măsura Borel distorsionata, adică pentru operatorii daţi de

$$D_{n,\mu}(f)(x) = \sum_{|\alpha|=n} c(\alpha,\mu) \cdot B_{\alpha}(x),\, x \in S^d,\, n \in \mathbb{N},$$

unde

$$c(\alpha,\mu) = \frac{(C)\int_{S^d} f(t)B_{\alpha}(t)d\mu(t)}{(C)\int_{S^d} B_{\alpha}(t)d\mu(t)} = \frac{(C)\int_{S^d} f(t)P_{\alpha}(t)d\mu(t)}{(C)\int_{S^d} P_{\alpha}(t)d\mu(t)}.$$

Dar datorită faptului ca $(C)\int_0^1 f d\mu$ nu este, in general, aditiva ca şi funcţie de f (este doar subadditiva), chiar in cazul simplu cind, de exemplu, $p = 1$ şi $d = 1$, pentru $f \in L^1_{\mu}$ (insemnind ca f este $\mathcal{B}_{[0,1]}$-măsurabilă şi $\|f\|_{L^1_{\mu}} = (C)\int_0^1 |f(t)|d\mu(t) < \infty$), primim

$$\|D_{n,\mu}(f)\|_{L^1_{\mu}} \le \sum_{k=0}^{n} (C)\int_0^1 \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k}|f(t)|d\mu(t) \le (n+1)\cdot\|f\|_{L^1_{\mu}},\, n \in \mathbb{N}.$$

Acest fapt implică ca in cel mai general caz pentru μ, estimarile cantitative din aproximarea din spaţiul L^p cu operatori Bernstein-Durrmeyer-Choquet, par sa ramina o problema deschisă.

Totuşi, pentru o subclasă larga de funcţii de mulţimi normalizate, monotone and submodulare, numite măsuri Borel distorsionate, in subsecţiunea de fata obţinem rezultate de aproximare cantitative in spaţiile L^p, $1 \le p < +\infty$, in termenii unei K-funcţionale potrivite.

Dacă $\mu : \mathcal{B}_{S^d} \to [0, +\infty)$ este o funcţie de mulţime monotonă şi $1 \le p < +\infty$, să facem urmatoarele notatii :

$$L^p_{\mu}(S^d)$$

$$= \{f : S^d \to \mathbb{R}; f \text{ este } \mathcal{B}_{S^d}\text{-măsurabilă şi } (C)\int_{S^d} |f(t)|^p d\mu(t) < +\infty\},$$

$$L^p_{\mu,+}(S^d) = L^p_\mu(S^d) \bigcap \{f : S^d \to \mathbb{R}_+\},$$

$$C(S^d) = \{f : S^d \to \mathbb{R}; f \text{ este continuă pe } S^d\},$$

inzestrata cu norma $\|F\|_{C(S^d)} = \sup\{|F(x)|; x \in S^d\}$,

$$C_+(S^d) = \{f \in C(S^d); f \geq 0 \text{ pe } S^d\},$$

$C^1_+(S^d)$ este subspaţiul tuturor funcţiilor $g \in C_+(S^d)$ cu derivatele partiale $\partial g/\partial x_i$, $i \in \{1, ..., d\}$, continue,

$$\|\nabla g\|_{C(S^d)} = \max_{i=\{1,\dots,d\}} \left\{ \left\| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\|_{C(S^d)} \right\},$$

$$K(f;t)_{L^p_\mu} = \inf_{g \in C^1_+(S^d)} \{\|f - g\|_{L^p_\mu} + t\|\nabla g\|_{C(S^d)}\},\ t \geq 0,$$

$$\text{cu notatia } \|F\|_{L^p_\mu} = \left((C) \int_{S^d} |F(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p},$$

$$IC[0,1] = \{g : [0,1] \to [0,1] : g(0) = 0, g(1) = 1, g \text{ este concava şi strict}$$
$$\text{crescatoare pe } [0,1] \text{ şi există } g'(0) < +\infty\}.$$

Deasemenea, notăm cu $\mathcal{D}(\mathcal{B}_{S^d})$ clasa tuturor funcţiilor de mulţimi $\mu : \mathcal{B}_{S^d} \to [0, +\infty)$ de forma $\mu(A) = g(M(A))$, pentru toate $A \in \mathcal{B}_{S^d}$, unde $g \in IC[0,1]$ şi M este o măsura de probabilitate Borel, strict pozitivă pe $\mathcal{B}_{S^d}$. Cu cuvintele din Observaţia 2.1.5, (vi), orice astfel de μ va fi numita măsura de probabilitate Borel distorsionata.

Observaţia 2.1.15 Potrivit cu Observaţia 2.1.5, (vi), orice $\mu \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_{S^d})$ este o funcţie de mulţimi, normalizată, monotonă, strict pozitivă şi submodulară. Exemple simple de $\mu \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_{S^d})$ sunt $\mu(A) = \sin[\pi \cdot m(A)/2]$, sau $\mu(A) = \arctan[\tan(1) \cdot m(A)]$, sau $\mu(A) = \frac{2m(A)}{1+m(A)}$, sau $\mu(A) = (1 - e^{-m(A)}) \cdot \frac{e}{e-1}$, sau $\mu(A) = \ln[1 + (e-1)m(A)]$, pentru toate $A \in \mathcal{B}_{S^d}$, unde m desemneaza măsura Lebesgue d-dimensionala.

Rezultatul principal al acestei subsecţiuni este următorul.

Teorema 2.1.16 (Gal-Trifa [52]) *Fie* $1 \le p < \infty$. *Dacă* $\mu \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_{S^d})$, *cu* $\mu = g \circ M$, $g \in IC[0,1]$ *şi* M *este o măsura de probabilitate Borel strict pozitivă pe* $\mathcal{B}_{S^d}$, *atunci pentru toate* $f \in L^p_{\mu,+}(S^d)$, $n \in \mathbb{N}$, *avem*

$$\|f - D_{n,\mu}(f)\|_{L^p_\mu} \le c \cdot K\left(f; \frac{\Delta_{n,p}}{c}\right)_{L^p_\mu},$$

unde $c = 1 + g'(0)^{(p+1)/p}$, $\Delta_{n,p} = \sum_{i=1}^d \|D_{n,\mu}(|\varphi_i(x) - \varphi_i(\cdot)|)\|_{L^p_\mu}$, $\varphi_i(x) = x_i$ *for* $x = (x_1, ..., x_d) \in S^d$.

Observaţia 2.1.17 (Gal-Trifa [52]) Pozitivitatea funcţiei f in Teorema 2.1.16 este necesara din cauza omogeneitatii pozitive a integralei Choquet folosită in demonstraţie. Totuşi, dacă f este de semn arbitrar şi mărginită inferior pe S^d with $f(x) - m \ge 0$, pentru toţi $x \in S^d$, atunci enunţul Teoremei 2.1.16 poate fi re-enunţat pentru operatorul uşor modificat Bernstein-Durrmeyer-Choquet, definit prin

$$D^*_{n,\mu}(f)(x) = D_{n,\mu}(f - m)(x) + m,$$

unde avem $D^*_{n,\mu}(f)(x) - f(x) = D_{n,\mu}(f - m)(x) - (f(x) - m)$. Observăm ca putem considera aici ca $m < 0$ şi ca imediat primi relaţiile

$$K(f - m; t)_{L^p_\mu} = \inf_{g \in C^1_+(S^d)} \{\|f - (g + m)\|_{L^p_\mu} + t\|\nabla g\|_{C(S^d)}\}$$

$$= \inf_{g \in C^1_+(S^d)} \{\|f - (g + m)\|_{L^p_\mu} + t\|\nabla(g + m)\|_{C(S^d)}\}$$

$$= \inf_{h \in C^1(S^d),\, h \ge m} \{\|f - h\|_{L^p_\mu} + t\|\nabla h\|_{C(S^d)}\}.$$

Corolar 2.1.18 (Gal-Trifa [52]) *Sub ipotezele şi notatiile din Teorema 2.1.16, avem estimarea*

$$\|f - D_{n,\mu}(f)\|_{L^p_\mu} \le c \cdot K\left(f; \frac{d \cdot c_p}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{L^p_\mu},$$

unde $c_p > 0$ *este o constanta care depinde doar de* p *şi* c *şi este data prin Teorema 2.1.16*

Observaţia 2.1.19 Rezultatele din aceasta subsecţiune arată că pentru o subclasă largă de operatori de tip Durrmeyer-Choquet, putem obţine ordine de aproximare in spaţiile L^p, analoage cu cele obţinute pentru operatorii din varianta clasică. Combinat cu faptul ca rezultatele de aproximare punctuala şi uniforma din Gal-Trifa [51] (obţinute fără restrictiile asupra lui μ din Teorema 2.1.16) prezinta de asemenea avantajul ca pot furniza ordine de aproximare mai bune decît operatorii de tip Durrmeyer clasici, putem concluziona ca operatorii Durrmeyer-Choquet sunt de interes in teoria aproximării. Pe deasupra, impreuna cu rezultatele obţinute şi in [40], cu privire la constructia operatorilor de aproximare prin schema clasica a lui Feller, punind integralele Choquet in loc de integralele clasice, ne sugereaza ca proprietăţile de aproximare ale operatorilor integrali clasici se pot extinde, şi in multe cazuri imbunătăţi, pentru corespondenţii lor de tip Choquet.

2.2 Aproximare în L^p cu tipuri Kantorovich-Choquet

Scopul secţiunii de fata este de a continuă directia de cercetare din subsecţiunea anterioară, la aproximarea în spaţiul L^p cu operatori Bernstein-Kantorovich-Choquet.

Cu notatiile folosite in subsecţiunea anterioara şi sugerati de forma clasica a operatorilor liniari şi pozitivi ai lui Bernstein-Kantorovich, in Gal [42] au fost definiţi următorii operatori/polinoame Bernstein-Kantorovich-

Choquet in raport cu $\Gamma_{n,x} = \{\mu_{n,k,x}\}_{k=0}^{n}$, prin formula

$$K_{n,\Gamma_{n,x}}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \cdot \frac{(C)\int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t)d\mu_{n,k,x}(t)}{\mu_{n,k,x}([k/(n+1),(k+1)/(n+1)])},$$

unde $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

Pentru a fi bine definti acesti operatori, este suficient, de exemplu, să presupunem ca $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie $\mathcal{B}_{[0,1]}$-măsurabilă, mărginită pe $[0,1]$.

Observaţia 2.2.1. Este clar că dacă $\mu_{n,k,x} = M$, pentru toţi n, k şi x, unde M este măsura Lebesgue, atunci polinoamle de mai sus devin cele clasice.

De asemenea, dacă $\mu_{n,k,x} = \delta_{k/n}$ (măsuri Dirac), deoarece $k/n \in (k/(n+1),(k+1)/(n+1))$, este imediat ca $K_{n,\Gamma_{n,x}}(f)(x)$ devin polinoamele lui Bernstein. Acest fapt arata marea flexibilitate ale formulelor acestor operatori. ¡ai exact, putem genera foarte multe tipuri de operatori de aproximare, alegind pentru anumite $\mu_{n,k,x}$ măsura Lebesgue, pentru anumite altele $\mu_{n,k,x}$, măsuri Dirac iar pentru celelalte măsuri $\mu_{n,k,x}$, anumite măsuri de tip Choquet.

Să punctăm că aproximarile punctuală şi uniformă cu $K_{n,\Gamma_{n,x}}(f)(x)$ au fost studiate in [42].

În aceasta secţiune, studiem rezultate cantitative de aproximare in spaţiile L^p, $1 \le p < \infty$, pentru polinoamele $K_{n,\Gamma_{n,x}}(f)(x)$ cînd $\Gamma_{n,x} = \{\mu\}$. În acest caz, le notăm cu $K_{n,\mu}$.

Dar ca şi in cazul polinoamelor Bernstein-Durrmeyer-Choquet studiate in subsecţiunea anterioara, chiar şi in cazul simplu cind, de exemplu, $p = 1$, pentru $f \in L^1_\mu$ (insemnind ca f este $\mathcal{B}_{[0,1]}$-măsurabilă şi $\|f\|_{L^1_\mu} = (C)\int_0^1 |f(t)|d\mu(t) < \infty$), considerind de exemplu operatorul $K_{n,\mu}$, primim uşor

$$\|K_{n,\mu}(f)\|_{L^1_\mu} \le \sum_{k=0}^{n}(C)\int_0^1 p_{n,k}(x)d\mu(x)\cdot\frac{(C)\int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t)d\mu(t)}{\mu([k/(n+1),(k+1)/(n+1)])}$$

$$\le \sum_{k=0}^{n}(C)\int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t)d\mu(t) \le (n+1)\cdot\|f\|_{L^1_\mu}.$$

Aceasta este datorat faptului ca $(C)\int_0^1 f d\mu$ nu este, in general, aditiv ca şi funcţie de f (este numai subaditiva).

Prin urmare, problema estimarilor cantitative in aproximare din spaţiile L^p cu polinoame Bernstein-Kantorovich-Choquet, ramine, in cazul general, o problema deschisă.

Totuşi, in cele ce urmează, ca şi în cazul aproximării in spaţiile L^p cu operatori Bernstein-Durrmeyer-Choquet, pentru o clasă largă de măsuri Lebesgue distorsionate, vom putea demonstra rezultate de aproximare in L^p.

Cu notaţiile din subsecţiunea anterioara, putem enunţa următoarea.

Teorema 2.2.2 (Trifa [53]) *Fie* $1 \le p < \infty$. *Dacă* $\mu \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_{[0,1]})$, *atunci pentru toate funcţiile* $f \in L^p_{\mu,+}[0,1]$ *şi* $n \in \mathbb{N}$, *avem*

$$\|f - K_{n,\mu}(f)\|_{L^p_\mu} \le c_p \cdot K\left(f; \frac{1}{2\sqrt{n+1}}\right)_{L^p_\mu},$$

unde $c_p = 1 + g'(0)^{(p+1)/p}$.

Observaţia 2.2.3. Pozitivitate funcţiei f din Teorema 2.2.2 este necesara din cauza pozitiv omegeneitatii integralei Choquet folosită in demonstraţie. Dacă f este de semn arbitrar şi mărginită inferior pe $[0,1]$ cu $f(x) - m \ge 0$, pentru toţi $x \in [0,1]$, atunci Teorema 2.2.2 poate fi reenunţata pentru operatorii Bernstein-Kantorovich-Choquet uşor modificati, definiti prin

$$K^*_{n,\mu}(f)(x) = K_{n,\mu}(f-m)(x) + m,$$

unde avem $K^*_{n,\mu}(f)(x) - f(x) = K_{n,\mu}(f-m)(x) - (f(x)-m)$. Notăm ca deoarece putem considera aici ca $m < 0$, primim imediat relaţiile

$$K(f-m;t)_{L^p_\mu} = \inf_{g\in C^1_+[0,1]}\{\|f-(g+m)\|_{L^p_\mu} + t\|\nabla g\|_{C[0,1]}\}$$

$$= \inf_{g\in C^1_+[0,1]}\{\|f-(g+m)\|_{L^p_\mu} + t\|\nabla (g+m)\|_{C[0,1]}\}$$

$$= \inf_{h\in C^1[0,1],\, h\geq m}\{\|f-h\|_{L^p_\mu} + t\|\nabla h\|_{C[0,1]}\}.$$

2.3 Aproximare prin operatori posibilistici integrali

In aceasta secţiune construim şiruri de operatori neliniari de aproximare, prin inlocuirea in schema clasica a lui Feller, a integralei Lebesgue cu aşa numita integrală posibilistică. In particular, pentru cazul discret, sunt reobţinuti aşa numiţii operatori de tip max-produs Bernstein, impreuna cu proprietăţile lor calitative de aproximare. Mai mult, studiem şi convergenţa operatorilor neliniari de tip Picard, Gauss-Weiesrtrass şi Poisson-Cauchy.

2.3.1 Introducere

Proprietăţile de aproximare cantitativa pentru operatorii max-produs tip Bernstein, Favard-Szász-Mirakjan, Baskakov, Bleimann-Butzer-Hahn şi Meyer-König-Zeller, au fost studiate in profunzime in, de exemplu, lucrarile [5], [6], [19]-[22].

Recent, in lucrarea [39], folosind idea lui Bernstein din [12], (vezi, de asemenea [58]) şi bazată şi pe o inegalitate de tip Chebyshev din teoria posibilitatii, aceste tipuri de operatori au fost interpretate ca şi expectanţe posibilistice ale unor variabile fuzzy discrete (cu variate distributii posibilistice), fapt care a permis obţinerea de rezultate de convergenţă calitative.

Teoria posibilitaţii este o teorie alternativa teoriei probabilitaţii, care se ocupa cu anumite tipuri de evenimente incerte (vezi [27], [18]) .

Scopul principal al acestei secţiuni este de a dezvolta o alternativa posibilistică la schema binecunoscuta a lui Feller din aproximare. Aceasta schema ne permite să să dăm o abordare naturala operatorilor de aproximare de tip max-produs.

Rezumativ, să ne reamintim ca schema clasică a lui Feller constă din ataşarea la orice funcţie continuă si mărginită pe $\mathbb{R}$, a operatorului

$$L_n(f)(x) = \int_\Omega f \circ Z(n,x) dP = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \lambda_{n,x}(t) dP(t).$$

Aici P este o probabilitate, $(\Omega, \mathcal{C})$ este un spaţiu măsurabil, $Z : \mathbb{N} \times I \to \mathcal{M}_2(\Omega)$, este o variabila aleatoare de pătrat integrabila (in raport cu P) pe Ω, I este un subinterval din $\mathbb{R}$ iar $\lambda_{n,x}$ este densitatea de probabilitate a lui $Z(n,x)$.

Notind acum cu $E(Z(n,x))$ şi $Var(Z(n,x))$ expectanţa şi varianţa lui $Z(n,x)$, in mod respectiv, sub ipotezele

$$\lim_{n\to\infty} E(Z(n,x)) = x, \text{ şi } \lim_{n\to\infty} Var(Z(n,x)) = 0, \text{ uniform pe } I,$$

schema lui Feller afirma ca pentru toţi f ca mai sus, $L_n(f)$ converge la f uniform pe fiecare subinterval compact al lui I.

Nu este fără interes să menţionăm aici ca in lucrarea recenta Gal [40], schema clasica a lui Feller a fost generalizata prin inlocuirea integralei Lebesgue clasice cu integrala Choquet.

In cele ce urmeaza, prin analogie cu ideile anterioare, introducem, pe scurt, o schema de tip Feller bazata pe integrala posibilistică, fapt care permite să construim şiruri convergente variate de operatori neliniari. Ca şi cazuri particulare. se reobţin proprietăţile calitative de aproximare la toţi aşa-numiţii operatori de tip Bernstein max-produs. De asemenea, sunt considerati şi noii operatori posibilistici convergenti de tip Picard, Gauss-Weierstrass şi Poisson-Cauchy obţinuti prin aceasta shema a lui Feller.

2.3.2 Schema lui Feller posibilistica

Începem prin sumarizarea unor concepte cunoscute din teoria posibilitatii, care, pe linga cele introduse prin Definiţia 2.1.3, vor fi folosite în cele ce urmează (vezi [27] sau [18]).

Definiţia 2.3.1. Fie Ω o mulţime nevida.

(i) Orice aplicaţie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se numeşte variabilă fuzzy.

(ii) Fie X o variabila fuzzy cu distribuţia posibilistică λ. Atunci formula $M_{sup}(X) = \sup_{s\in\Omega} X(s)\lambda(s)$ reprezintă expectanţa posibilistică a lui X. De asemenea, formula $V_{sup}(X) = \sup\{(X(s) - M_{sup}(X))^2\lambda(s); s \in \Omega\}$ reprezintă varianţa posibilistică a lui X.

De bază in deducerea schemei lui Feller posibilistice este şi următoarea analoagă posibilistică a inegalităţii lui Chebyshev din teoria probabilitatilor.

Teorema 2.3.2. (vezi Teorema 2.2 din [39]) *Fie $\Omega \neq \emptyset$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ şi distributia de posibilitate λ pe Ω. Pentru toţi $r > 0$, rezultă*

$$P_\lambda(\{s \in \Omega; |X(s) - M_{sup}(X)| \geq r\}) \leq \frac{V_{sup}(X)}{r^2},$$

cu P_λ măsura posibilistică indusă de către λ.

Pentru a ne indeplini scopul nostru, notăm $Var^b(\Omega) = \{X : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{marginită}\ \}$ şi $Var^b_+(\Omega) = \{X : \Omega \to \mathbb{R}_+,\ \text{marginită}\ \}$. De asemenea, pentru price interval $I \subset \mathbb{R}$, să luăm $Z : \mathbb{N} \times I \to Y$, cu $Y = Var^b(\Omega)$ sau $Y = Var^b_+(\Omega)$.

Este clar ca putem scrie formulele

$$M_{sup}(Z(n,x)) = (Pos)\int_{\Omega} Z(n,x)(t)dP_{\lambda}(t) := \alpha_{n,x}, \qquad (2.5)$$

$$V_{sup}(Z(n,x)) = (Pos)\int_{\Omega}(Z(n,x)(t)-\alpha_{n,x})^2 dP_{\lambda}(t) := \sigma^2_{n,x}. \qquad (2.6)$$

Suntem acum in poziţia de a enunţa următorul rezultat de tip Feller.

Teorema 2.3.3. (Coroianu-Gal-Opriş-Trifa [23]) *Presupunem că* $I \subset \mathbb{R}$ *este un subinterval,* $Z(n,x) \in Var^b_+(\Omega)$ *pentru orice* $(n,x) \in \mathbb{N}\times I$ *şi* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *este mărginită şi uniform continuă pe* $\mathbb{R}$*. Folosind notaţiile din (2.5), (2.6) şi considerînd operatorii integrali posibilistici*

$$L_n(f)(x) = (Pos)\int_{\Omega} f \circ Z(n,x)dP_{\lambda},$$

sub ipotezele că $\lim_{n\to+\infty}\alpha_{n,x} = x$ *şi* $\lim_{n\to+\infty}\sigma^2_{n,x} = 0$*, uniform cu* $x \in I$*, rezultă* $\lim_{n\to\infty} L_n(f)(x) = f(x)$*, uniform pe* I*.*

Observaţii. 1) În Teorema 2.3.3, putem considera operatorii mai generali de forma

$$L_n(f)(x) := (Pos)\int_{\mathbb{R}} f(t)dP_{Z(n,x)}(t) = (Pos)\int_{\Omega} f\circ Z(n,x)dP_{\lambda_{n,x}},\ x \in I,$$

unde $P_{\lambda_{n,x}} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $(n,x) \in \mathbb{N}\times I$, este măsura de posibilitate indusă de distribuţia $\lambda_{n,x}$, $(n,x) \in \mathbb{N}\times I$.

2) In particular, proprietăţi calitative de aproximare pot fi deduse prin schema lui Feller din Teorema 2.3.3, pentru toţi operatorii de tip max-produs Bernstein. De exemplu, luind $\Omega = \{0,1,...,n\}$, $I = [0,1]$, $Z(n,x)(k) = \frac{k}{n}$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, $\lambda_{n,x}(k) = \frac{p_{n,k}(x)}{\bigvee_{j=0}^n p_{n,j}(x)}$, unde $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ şi $\bigvee_{j=0}^n p_{n,j}(x) = \max_{j=\{0,\dots,n\}}\{p_{n,j}(x)\}$, din Lema 2.3.3 primim

$$L_n(f)(x) = (Pos)\int_{\Omega} f\circ Z(n,x)dP_{\lambda_{n,x}} = \frac{\bigvee\limits_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)}{\bigvee\limits_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)},$$

ceea ce reprezinta operatorii Bernstein $B_n^{(M)}(f)(x)$ de tip of max-produs, carora le putem aplica acum Teorema 2.3.4.

In mod similar, din Teorema 2.3.3 se pot obţine rezultate calitative de aproximare pentru alţi operatori de tip max-produs, precum cei de tip Favard-Szász-Mirakjan, Baskakov, Bleimann-Butzer-Hahn şi Meyer-König-Zeller.

2.3.3 Aproximare prin operatori de convolutie posibilistici

Să considerăm operatorii clasici ai lui Picard, Gauss-Weierstrass şi Poisson-Cauchy,

$$P_n(f)(x) = \frac{n}{2}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-n|x-t|}dt, \quad W_n(f)(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-n|t-x|^2}dt,$$

$$Q_n(f)(x) = \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{n^2(t-x)^2+1},$$

in mod respectiv, cu $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{R}$.

Bazaţi pe schema posibilistică a lui Feller, pentru $\Omega = \{0, 1, ..., k, ...,\}$ şi $Z(n,x)(k) = k/n$ ca şi in Observaţia 2 de mai sus, definind $\lambda_{n,x}(k) = \frac{e^{-n|x-k/n|}}{\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} e^{-n|x-k/n|}}$, primim urmatorii operatori posibilistici (max-produs) Picard

$$P_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/n)\cdot e^{-n|x-k/n|}}{\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-n|x-k/n|}}.$$

Analog, dacă $\lambda_{n,x}(k) = \frac{e^{-n(x-k/n)^2}}{\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} e^{-n(x-k/n)^2}}$ şi $\lambda_{n,x}(k) = \frac{1/(n^2(x-k/n)^2+1)}{\bigvee_{k=0}^{\infty} 1/(n^2(x-k/n)^2+1)}$ primim următorii operatori posibilistici,

$$W_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/n)\cdot e^{-n(x-k/n)^2}}{\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-n(x-k/n)^2}}, \text{ - de tip Gauss-Weierstrass,}$$

$$Q_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/n)\cdot \frac{1}{n^2(x-k/n)^2+1}}{\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2(x-k/n)^2+1}}, \text{ - de tip Poisson-Cauchy.}$$

Acum, notăm $BUC_{+}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{+}; f$ marginită, uniform continuă$\}$. Proprietăţi calitative de aproximare pentru acesti operatori pot fi obţinute din Teorema 2.3.3. Mai mult decît atit, prin următoarele rezultate putem obţine şi estimări cantitative, după cum urmeaza.

Teorema 2.3.4. (Coroianu-Gal-Opriş-Trifa [23]) *Dacă* $f \in BUC_{+}(\mathbb{R})$, *atunci avem*

$$|P_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2 \cdot \omega_1(f; 1/n)_{\mathbb{R}}.$$

Teorema 2.3.5. (Coroianu-Gal-Opriş-Trifa [23]) *Dacă* $f \in BUC_{+}(\mathbb{R})$ *atunci avem*

$$|W_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2 \cdot \omega_1(f; 1/\sqrt{n})_{\mathbb{R}}.$$

Teorema 2.3.6. (Coroianu-Gal-Opriş-Trifa [23]) *Dacă* $f \in BUC_{+}(\mathbb{R})$, *atunci avem*

$$|Q_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2 \cdot \omega_1(f; 1/(2n))_{\mathbb{R}}.$$

Cap. 3

Aproximare pe $\mathbb{R}_+$ cu operatori integrali

Fiind $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ un şir cu proprietatea că $\lambda_n \searrow 0$ arbitrar de rapid. În acest capitol introducem operatori generalizaţi Szász-Kantorovich, Baskakov-Kantorovich, Szász-Durrmeyer-Stancu şi Baskakov-Szász-Durrmeyer-Stancu, astfel încît pe fiecare subinterval compact din $[0, +\infty)$, ordinul de aproximare uniforma este $\omega_1(f; \sqrt{\lambda_n})$. Acesti operatori generalizati aproximeaza uniform of funcţie Lipschitz 1, pe fiecare subinterval compact din $[0, \infty)$, cu ordinul arbitrar de bun $\sqrt{\lambda_n}$.

3.1 Introducere

Este binecunoscut faptul că operatorii clasici ai lui Baskakov sunt daţi de formula (vezi [4])

$$V_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} \frac{x^j}{(1+x)^{n+j}} f(\frac{j}{n})$$

$$= (1+x)^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+j-1)!}{j!(n-1)!} \frac{x^j}{(1+x)^j}$$

$$= (1+x)^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n(n+1)...(n+j-1)}{j!} \frac{x^j}{(1+x)^j}.$$

În lucrarea recenta [49], acest operator a fost modificat prin inlocuirea lui n cu $\frac{1}{\lambda_n}$ şi au fost obţinute proprietăţile de aproximare (de un ordin arbitrar de bun, depinzind de λ_n) ale noului operator Baskakov, definit prin formula

$$V_n(f;\lambda_n)(x) = (1+x)^{\frac{-1}{\lambda_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{1}{\lambda_n} (1+\frac{1}{\lambda_n})...(j-1+\frac{1}{\lambda_n})(\frac{x}{1+x})^j f(j\lambda_n),\ x \geq_0 .$$

Mai sus, prin convenţie, avem $\frac{1}{j!}\frac{1}{\lambda_n}(1+\frac{1}{\lambda_n})...(j-1+\frac{1}{\lambda_n}) = 1$ pentru $j = 0$.

Cazul variabilei complexe pentru $V_n(f;\lambda_n)(z)$ a fost studiat in [48]. De asemenea, in [38], idea de mai sus a fost aplicata la generalizarea de tip Jakimovski-Leviatan-Ismail a operatorilor Szász-Mirakjan.

Scopul capitolului de faţa este ca, bazaţi pe idea de mai sus, să introducem operatorii modificati/generalizati Szász-Kantorovich, Baskakov-Kantorovich, Szász-Durrmeyer-Stancu şi Baskakov-Szász-Durrmeyer-Stancu, intr-un astfel de mod încît pe fiecare subinterval compact din $[0,+\infty)$, ordinul de aproximare să fie $\omega_1(f;\sqrt{\lambda_n})$. Acesti operatori modificati pot aproxima uniform o funcţie 1-Lipschitz pe fiecare subinterval compact din $[0,\infty)$, cu ordinul arbitrar de bun $\sqrt{\lambda_n}$ dat de la inceput.

Din acest motiv, rezultatele obţinute in acest capitol au un caracter definitiv (adică sunt cele mai bune posibile). In acelaşi timp, rezultatele au deasemenea şi un caracter de unificare, in sensul ca pentru variate alegeri ale nodurilor λ_n, se pot reobţine rezultate anterioare de aproximare obţinute de mulţi alţi autori.

3.2 Operatori Baskakov-Kantorovich

Este cunoscut faptul ca operatorii clasici Baskakov-Kantorovich sunt definiţi prin (vezi, de exemplu, [13])

$$K_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} \frac{x^j}{(1+x)^{n+j}} n \int_{j/n}^{(j+1)/n} f(v)dv$$

$$= (1+x)^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n(n+1)...(n+j-1)}{j!} \frac{x^j}{(1+x)^j} n \int_{j/n}^{(j+1)/n} f(v)dv.$$

Dacă înlocuim n cu $\frac{1}{\lambda_n}$, atunci obţinem operatorii generalizati Baskakov-Kantorovich, definiti prin formula

$$K_n(f;\lambda_n)(x)$$

$$= (1+x)^{-\frac{1}{\lambda_n}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{1}{\lambda_n} (1+\frac{1}{\lambda_n})...(j-1+\frac{1}{\lambda_n}) \frac{x^j}{(1+x)^j} \frac{1}{\lambda_n} \int_{j\lambda_n}^{(j+1)\lambda_n} f(v)dv.$$

Peste tot notăm $e_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, ..., .$

Aceasta secţiune se ocupa cu proprietăţile de aproximare ale operatorului $K_n(f;\lambda_n)(x)$. Pentru scopul nostru, mai întîi avem nevoie de următorul rezultat auxiliar.

Lema 3.2.1. (Trifa [71]) *Avem :*

(i) $K_n(e_0;\lambda_n)(x) = 1$; $K_n(e_1;\lambda_n)(x) = x + \frac{1}{2}\cdot\lambda_n$; $K_n(e_2;\lambda_n)(x) = x^2 + 2\lambda_n x + \lambda_n x^2 + \frac{1}{3}\cdot\lambda_n^2$;

(ii) $K_n((t-x)^2;\lambda_n)(x) = \lambda_n\left(x^2 + x + \frac{1}{3}\cdot\lambda_n\right)$.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următorul.

Teorema 3.2.2. (Trifa [71]) *Fie* $\lambda_n \searrow 0$ *(cu* $n\to\infty$*) cît de rapid dorim şi să presupunem ca* $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *este uniform continuă pe* $[0,+\infty)$ *(scriem* $f \in UC[0,+\infty)$*). Pentru orice* $x \in [0,+\infty)$ *şi* $n \in \mathbb{N}$*, avem*

$$|K_n(f;\lambda_n)(x) - f(x)| \le 2\omega_1(f;\sqrt{\lambda_n}\cdot\sqrt{x^2+x+\lambda_n/3}),$$

unde $\omega_1(f;\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, +\infty), |x - y| \leq \delta\}$ *notează modulul de continuitate al lui* f *, cu pasul* δ*.*

Ca şi o consecinţă imediată a Teoremei 3.2.2, primim următorul rezultat.

Corolar 3.2.3. (Trifa [71]) *Fie* $\lambda_n \searrow 0$ *cît de rapid dorim şi presupunem ca* f *este o funcţie Lipschitz, adică există* $M > 0$ *cu* $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$*, pentru oricare* $x, y \in [0, \infty)$*. Atunci, pentru orice* $x \in [0, +\infty)$ *şi* $n \in \mathbb{N}$ *avem*

$$|K_n(f;\lambda_n)(x) - f(x)| \leq 2M\sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{x + x^2 + \lambda_n/3}.$$

Demonstraţie. Deoarece prin ipoteza f este o funcţie Lipschitz, primim uşor $\omega_1(f;\delta) \leq M\delta$, pentru toţi $\delta > 0$. Alegind $\delta = \sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{x + x^2 + \lambda_n/3}$ şi aplicînd Teorema 3.2.2, primim estimarea dorită. □

Observaţii. 1) Deoarece $f \in UC[0, +\infty)$, este binecunoscut faptul ca primim $\lim_{\delta\searrow 0} \omega_1(f;\delta) = 0$. Prin urmare, alegind $\delta = \lambda_n$, primim ca pentru $n \to \infty$, deoarece $\lambda_n \searrow 0$, trecind la limita cu $n \to \infty$ in estimarea din Teorema 3.2.2, rezultă că $K_n(f;\lambda_n)(x) \to f(x)$, punctual pentru orice $x \in [0, +\infty)$. Acum, pentru a primi ordinul de convergenţă în rezultatele anterioare, expresia $\sqrt{x + x^2 + \lambda_n/3}$ trebuie să fie mărginită, fapt care are loc atunci cind x apartine unui subinterval compact din $[0, +\infty)$.

2) Dacă $f \in UC[0, +\infty)$, atunci $K_n(f;\lambda_n)(x)$ este bine definit, adică

$$|K_n(f;\lambda_n)(x)| < +\infty, \text{ pentru orice } x \in [0, +\infty) \text{ şi } n \in \mathbb{N}.$$

Într-adevăr, dacă f este uniform continuă pe $[0, +\infty)$, atunci cresterea pe $[0, +\infty)$ este liniară, adică există $\alpha, \beta > 0$ cu $|f(x)| \leq \alpha x + \beta$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$ (vezi [25], p. 48, Problème 4, sau [26]). Aceasta implică imediat

$$|K_n(f;\lambda_n)(x)| \leq K_n(|f|;\lambda_n)(x) \leq \alpha \cdot K_n(e_1;\lambda_n)(x) + \beta$$
$$= \alpha(x + \lambda_n/2) + \beta < +\infty,$$

pentru oricare $x \in [0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

3.3 Operatori Szász-Kantorovich

Formula pentru operatorii liniari şi pozitivi clasici Szász-Kantorovich este data de (vezi, de exemplu, [73])

$$S_n(f)(x) = e^{-nx}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(nx)^j}{j!}n\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(v)dv = e^{-nx}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(nx)^j}{j!}\int_0^1 f(\frac{t+j}{n})dt.$$

Inlocuind mai sus n cu $\frac{1}{\lambda_n}$, obţinem operatorii generalizati Szász-Kantorovich, definiti prin formula

$$S_n(f;\lambda_n)(x)$$

$$= e^{-\frac{x}{\lambda_n}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{\lambda_n^j j!}\frac{1}{\lambda_n}\int_{j\lambda_n}^{(j+1)\lambda_n} f(v)dv = e^{-\frac{x}{\lambda_n}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{\lambda_n^j j!}\int_0^1 f(\lambda_n(t+j))dt.$$

Studiem aici proprietăţile de aproximare ale operatorului $S_n(f;\lambda_n)(x)$. Mai intit, avem nevoie de urmatoarea lema.

Lema 3.3.1. (Trifa [71]) *Avem :*

(i) $S_n(e_0;\lambda_n)(x) = 1$; $S_n(e_1;\lambda_n)(x) = x + \frac{1}{2}\cdot\lambda_n$; $S_n(e_2;\lambda_n)(x) = x^2 + 2\lambda_n x + \frac{1}{3}\cdot\lambda_n^2$;

(ii) $S_n((t-x)^2;\lambda_n)(x) = \lambda_n\left(x + \frac{1}{3}\cdot\lambda_n\right)$.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următorul.

Teorema 3.3.2. (Trifa [71]) *Fie* $\lambda_n \searrow 0$ *(cu* $n\to\infty$*) cît de rapid dorim şi presupunem ca* $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *este uniform continuă pe* $[0,+\infty)$. *Pentru orice* $x\in[0,+\infty)$ *şi* $n\in\mathbb{N}$, *avem*

$$|S_n(f;\lambda_n)(x) - f(x)| \le 2\omega_1(f;\sqrt{\lambda_n}\cdot\sqrt{x+\lambda_n/3}).$$

Ca şi o consecinţă imediată a Teoremei 3.3.2, primim următorul rezultat.

Corolar 3.3.3. (Trifa [71]) *Fie* $\lambda_n \searrow 0$ *cît de rapid dorim şi presupunem ca* f *este o funcţie Lipschitz, adică există* $M>0$ *cu* $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|$, *pentru orice* $x, y \in [0, \infty)$. *Atunci, pentru orice* $x \in [0, +\infty)$ *şi* $n \in \mathbb{N}$ *avem*

$$|S_n(f; \lambda_n)(x) - f(x)| \leq 2M\sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{x + \lambda_n/3}.$$

Demonstraţie. Deoarece prin ipoteza f este o funcţie Lipschitz, primim uşor $\omega_1(f; \delta) \leq M\delta$, pentru toţi $\delta > 0$. Alegind acum $\delta = \sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{x + \lambda_n/3}$ şi aplicind Teorema 3.3.2, primim estimarea dorita. □

3.4 Operatori de tip Szász-Durrmeyer

Reamintim ca operatorii clasici Szász-Durrmeyer operators sunt daţi de formula (vezi [63])

$$SD_n(f)(x) = n \sum_{j=0}^{\infty} s_{n,j}(x) \int_0^{\infty} s_{n,j}(t) f(t) dt,$$

unde $s_{n,j}(x) = e^{-nx} \frac{(nx)^j}{j!}$.

Dacă înlocuim n cu $\frac{1}{\lambda_n}$, atunci obţinem operatorii generalizaţi Szász-Durrmeyer, definiţi cu formula

$$SD_n(f; \lambda_n)(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{x}{\lambda_n}} \cdot \frac{x^j}{\lambda_n^j j!} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\lambda_n}} \cdot \frac{t^j}{\lambda_n^j j!} f(t) dt.$$

În prima parte a acestei secţiuni studiem proprietăţile de aproximare ale operatorului $SD_n(f; \lambda_n)(x)$. Mai întîi, avem nevoie de urmatoarea lema.

Lema 3.4.1. (Trifa [71]) *Avem :*

(i) $SD_n(e_0; \lambda_n)(x) = 1$ *;* $SD_n(e_1; \lambda_n)(x) = x + \lambda_n$ *;* $SD_n(e_2; \lambda_n)(x) = x^2 + 4\lambda_n x + 2\lambda_n^2$ *;*

(ii) $SD_n((t - x)^2; \lambda_n)(x) = \lambda_n (2x + 2\lambda_n)$.

Primul rezultat principal al acestei secţiuni este următorul.

Teorema 3.4.2. (Trifa [71]) *Fie $\lambda_n \searrow 0$ cît de rapid dorim şi presupunem că $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ este uniform continuă pe $[0, +\infty)$. Pentru oricare $x \in [0, +\infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$, avem*

$$|SD_n(f; \lambda_n)(x) - f(x)| \le 2\omega_1(f; \sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{2x + 2\lambda_n}).$$

Ca o consecinţă imediată a Teoremei 3.4.2, primim următorul rezultat.

Corolar 3.4.3. (Trifa [71]) *Fie $\lambda_n \searrow 0$ cît de rapid dorim şi presupunem ca f este o funcţie Lipschitz, adică există $M > 0$ cu $|f(x) - f(y)| \le M|x - y|$, pentru oricare $x, y \in [0, \infty)$. Atunci, pentru orice $x \in [0, +\infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$ avem*

$$|SD_n(f; \lambda_n)(x) - f(x)| \le 2M\sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{2x + 2\lambda_n}.$$

In cele ce urmează, vom introduce şi studia operatorii generalizati Szász-Durrmeyer-Stancu. Astfel, este binecunoscut faptul ca operatorii clasici Szász-Durrmeyer-Stancu sunt dati de formula (vezi [44])

$$SD_n^{(\alpha,\beta)}(f)(x) = n \sum_{j=0}^{\infty} s_{n,j}(x) \int_0^{\infty} s_{n,j}(t) f\left(\frac{nt + \alpha}{n + \beta}\right) dt,$$

unde $0 \le \alpha \le \beta$ şi $s_{n,j}(x) = e^{-nx} \frac{(nx)^j}{j!}$.

Dacă inlocuim n cu $\frac{1}{\lambda_n}$, obţinem :

$$SD_n^{(\alpha,\beta)}(f; \lambda_n)(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{x}{\lambda_n}} \frac{(\frac{x}{\lambda_n})^j}{j!} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\lambda_n}} \frac{(\frac{x}{\lambda_n})^j}{j!} f\left(\frac{\frac{t}{\lambda_n} + \alpha}{\frac{1}{\lambda_n + \beta}}\right) dt.$$

Mai întîi, demonstram urmatoarea lemă.

Lema 3.4.4. (Trifa [71]) *Avem :*

(i) $SD_n^{(\alpha,\beta)}(e_0; \lambda_n)(x) = 1$; $SD_n^{(\alpha,\beta)}(e_1; \lambda_n)(x) = \frac{x}{1+\lambda_n\beta} + \frac{\lambda_n(\alpha+1)}{1+\lambda_n\beta}$;

$$SD_n^{(\alpha,\beta)}(e_2; \lambda_n)(x) = \frac{x^2}{(1 + \lambda_n\beta)^2} + \frac{\lambda_n(2\alpha + 3)}{(1 + \lambda_n\beta)^2} x + \frac{\lambda_n^2(\alpha^2 + 2\alpha + 2)}{(1 + \lambda_n\beta)^2};$$

(ii) $SD_n^{(\alpha,\beta)}((t-x)^2; \lambda_n)(x) = \frac{\lambda_n^2\beta^2}{(1+\lambda_N\beta)^2} x^2 + \frac{\lambda_n(1-2\beta(\alpha+1)\lambda_n)}{(1+\lambda_n\beta)^2} x + \frac{\lambda_n^2(\alpha^2+2\alpha+2)}{(1+\lambda_n\beta)^2}$.

Rezultatul principal privind acesti operatori de tip Stancu este următorul.

Teorema 3.4.5. (Trifa [71]) *Fie* $0 \leq \alpha \leq \beta$, $\lambda_n \searrow 0$ *cît de rapid dorim şi presupunem că* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *este uniform continuă pe* $[0, +\infty)$. *Pentru orice* $x \in [0, +\infty)$ *şi* $n \in \mathbb{N}$, *avem*

$$|SD_n^{(\alpha,\beta)}(f;\lambda_n)(x) - f(x)| \leq 2\omega_1(f; \sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{E_n^{(\alpha,\beta)}(x)}),$$

unde

$$E_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\lambda_n \beta^2}{(1+\lambda_n\beta)^2}x^2 + \frac{1-2\beta(\alpha+1)\lambda_n}{(1+\lambda_n\beta)^2}x + \frac{\lambda_n(\alpha^2+2\alpha+2)}{(1+\lambda_n\beta)^2}$$

. Ca si o consecinţă imediată a Teoremei 3.4.5, primim următorul rezultat.

Corolar 3.4.6. (Trifa [71]) *Fie* $0 \leq \alpha \leq \beta$, $\lambda_n \searrow 0$ *cît de rapid dorim şi presupunem ca* f *este o funcţie Lipschitz, anume există* $M > 0$ *cu* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, *pentru oricare* $x, y \in [0, \infty)$. *Atunci, pentru orice* $x \in [0, +\infty)$ *şi* $n \in \mathbb{N}$ *avem*

$$|SD_n^{(\alpha,\beta)}(f;\lambda_n)(x) - f(x)| \leq 2M\sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{E_n^{(\alpha,\beta)}(x)}.$$

3.5 Operatori Baskakov-Szász-Durrmeyer-Stancu

Pentru $0 \leq \alpha \leq \beta$, operatorii clasici Baskakov- Szász-Durrmeyer-Stancu sunt dati prin formula (vezi [56])

$$V_n^{(\alpha,\beta)}(f)(x) = n\sum_{j=0}^{\infty} b_{n,j}(x)\int_0^\infty s_{n,j}(t) f(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}dt,$$

unde, $s_{n,j}(x) = e^{-nx}\frac{(nx)^j}{j!}$ şi

$$b_{n,j}(x) = \binom{n+j-1}{j}\frac{x^j}{(1+x)^{n+j}} = (1+x)^{-n}\frac{n(n+1)...(n+j-1)}{j!}\frac{x^j}{(1+x)^j}.$$

Dacă inlocuim n cu $\frac{1}{\lambda_n}$, obţinem formula :

$$V_n^{(\alpha,\beta)}(f;\lambda_n)(x)$$
$$= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{j=0}^{\infty}(1+x)^{-\frac{1}{\lambda_n}}\frac{\frac{1}{\lambda_n}(\frac{1}{\lambda_n}+1)...(\frac{1}{\lambda_n}+j-1)}{j!}\frac{x^j}{(1+x)^j}$$
$$\cdot\int_0^{\infty}e^{-\frac{t}{\lambda_n}}\cdot\frac{(\frac{t}{\lambda_n})^j}{j!}f(\frac{\frac{t}{\lambda_n}+\alpha}{\frac{1}{\lambda_n}+\beta})dt.$$

Mai întîi, avem nevoie de următorul rezultat auxiliar.

Lema 3.5.1. (Trifa [71]) *Avem :*

(i) $V_n^{(\alpha,\beta)}(e_0;\lambda_n)(x) = 1$; $V_n^{(\alpha,\beta)}(e_1;\lambda_n)(x) = \frac{1}{1+\lambda_n\beta}x + \frac{\lambda_n+\lambda_n\alpha}{1+\lambda_n\beta}$;

$$V_n^{(\alpha,\beta)}(e_2;\lambda_n)(x) = \frac{1+\lambda_n}{(1+\lambda_n\beta)^2}x^2 + \frac{4\lambda_n+2\lambda_n\alpha}{(1+\lambda_n\beta)^2}x + \frac{\lambda_n^2\alpha^2+2\lambda_n^2\alpha+2\lambda_n^2}{(1+\lambda_n\beta)^2};$$

(ii)

$$V_n^{(\alpha,\beta)}((t-x)^2;\lambda_n)(x)$$
$$= \frac{\lambda_n+\lambda_n^2\beta^2}{(1+\lambda_n\beta)^2}x^2 + \frac{2\lambda_n-2\lambda_n^2\beta-2\lambda_n^2\alpha\beta}{(1+\lambda_n\beta)^2}x + \frac{\lambda_n^2\alpha^2+2\lambda_n^2\alpha+2\lambda_n^2}{(1+\lambda_n\beta)^2}.$$

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următorul.

Teorema 3.5.2. (Trifa [71]) *Fie* $0 \le \alpha \le \beta$, $\lambda_n \searrow 0$ *cît de rapid dorim şi presupunem ca* $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *este uniform continuă pe* $[0,+\infty)$. *Pentru oricare* $x \in [0,+\infty)$ *şi* $n \in \mathbb{N}$, *avem*

$$|V_n^{(\alpha,\beta)}(f;\lambda_n)(x) - f(x)| \le 2\omega_1(f;\sqrt{\lambda_n}\cdot\sqrt{F_n^{(\alpha,\beta)}(x)}),$$

unde

$$F_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1+\lambda_n\beta^2}{(1+\lambda_n\beta)^2}x^2 + \frac{2-2\lambda_n\beta-2\lambda_n\alpha\beta}{(1+\lambda_n\beta)^2}x + \frac{\lambda_n\alpha^2+2\lambda_n\alpha+2\lambda_n}{(1+\lambda_n\beta)^2}.$$

Ca şi o consecinţă imediată a Teoremei 3.5.2, primim următorul rezultat.

Corolar 3.5.3. (Trifa [71]) *Fie* $0 \le \alpha \le \beta$, $\lambda_n \searrow 0$ *cît de rapid dorim şi presupunem ca* f *este o funcţie Lipschitz, adică există* $M > 0$ *cu*

$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, *pentru oricare* $x, y \in [0, \infty)$. *Atunci, pentru orice* $x \in [0, +\infty)$ *şi* $n \in \mathbb{N}$, *avem*

$$|V_n^{(\alpha,\beta)}(f; \lambda_n)(x) - f(x)| \leq 2M\sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{F_n^{(\alpha,\beta)}(x)}.$$

Observaţie. Să precizăm ca in Teoremele 3.2.2, 3.3.2, 3.4.2, 3.4.5 şi 3.5.2, pentru orice $\delta > 0$ şi $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uniform continue, modulul de continuitate $\omega_1(f; \delta)$ este finit. Pentru convenienta cititorului, prezentam mai jos demonstraţia. Intr-adevar, pentru un ε_0 fixat, din definiţia uniform continuitatii lui f, există un $\delta_0 > 0$, astfel încît $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_0$, pentru toţi $x, y \in [0, +\infty)$ cu $|x - y| \leq \delta_0$. Trecind aici la supremum după aceşti x, y, rezultă imediat ca $\omega_1(f; \delta_0) \leq \varepsilon_0 < +\infty$. Fie acum $\delta > \delta_0$ arbitrar. In mod evident ca există un $p \in \mathbb{N}$ suficient de mare, astfel încît $\delta \leq p \cdot \delta_0$. Folosind acum monotonia şi subaditivitatea lui $\omega_1(f; \delta)$ ca şi funcţie de δ, primim

$$\omega_1(f; \delta) \leq \omega_1(f; p\delta_0) \leq p \cdot \omega_1(f; \delta_0) < +\infty.$$

Putem deci concluziona ca proprietăţile de aproximare obţinute pentru toţi operatorii din acest capitol au un caracter definitiv, adică furnizeaza ordine de aproximare arbitrar de bune. De asemenea, este bine de notat ca metoda din acest capitol nu funcţioneaza pentru operatorii liniari şi pozitivi ale caror expresii sunt date de sume finite şi sunt definiţi pe intervale mărginite (precum operatorii/polinoamele Bernstein, operatorii/polinoamele Kantorovich, etc).

Cap. 4

Aproximare cu operatori Kantorovich complecşi

Prin folosirea unui şir $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\lambda_n \to 0$ oricît de rapid, în acest capitol obţinem ordinul de aproximare $O(\lambda_n)$ pentru operatorii generalizaţi Baskakov-Kantorovich-Faber şi pentru operatorii generalizati Szász-Kantorovich-Faber, in mod respectiv, ataşati funcţiilor analitice cu creştere exponentiala intr-un continuu (adică intr-o nultime conexă, compactă) $G \subset \mathbb{C}$. Mai multe exemple concrete de continuuri sunt prezentate, pentru care aceşti operatori pot fi construiţi in mod explicit. In plus, obţinem ordinul de aproximare $O(\lambda_n)$ pentru operatorii generalizati Baskakov-Kantorovich-Walsh şi pentru operatorii generalizati Szász-Kantorovich-Walsh ataşati funcţiilor analitice cu crestere exponenţială intr-o mulţime compactă multiplu conexă $G \subset \mathbb{C}$.

4.1 Mulţimi compacte simplu conexe: Preliminarii

Fie $\lambda_n \to 0$ arbitrar de rapid, satisfăcînd în plus, fără a pierde din generalitate, condiţia $0 < \lambda_n \le \frac{1}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

In lucrarea [48], pentru funcţiile analitice cu creştere exponenţiala in mulţimi compacte simplu conexe, s-a obţinut ordinul de aproximare $O(\lambda_n)$, prin operatorii de forma

$$W_n(f; \lambda_n, G; z)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \cdot \sum_{j=0}^{k} (1+\lambda_n) \cdot ... \cdot (1+(j-1)\lambda_n) \cdot [0, \lambda_n, ..., j\lambda_n; e_k] \cdot F_j(z).$$

Aici $F_j(z)$ reprezinta polinoamele Faber ataşate compactului G (numit şi continuum), $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) F_k(z)$ reprezinta dezvoltarea in serie Faber a lui f pe G şi $[0, \lambda_n, ..., j\lambda_n; e_k]$ reprezinta diferenţa divizata a lui $g(z) = e_k(z) = z^k$, pe $j+1$ noduri $0, \lambda_n, ..., j\lambda_n$.

Prin aceasta metoda, ordinul de aproximare $O(1/n)$ obţinut in [35], Secţion 1.9, pp. 124-138, pentru operatorii Baskakov clasici (adică pentru $\lambda_n = 1/n$) in discuri compacte cu centrul in origine, a fost imbunatatit (in [48]) la $O(\lambda_n)$ dat de către operatorii definiţi mai sus, ataşati unei submulţimi compacte şi simplu conexe din $\mathbb{C}$.

Este de menţionat aici faptul că acest domeniu privind estimări cantitative in aproximarea cu alte tipuri de operatori complecşi, se găseşte in multe alte lucrari, ca, de exemplu, in cărţile [35], [36], [56] şi in articolele [16], [34], [45]-[55], [60]-[62].

Pentru scopul nostru, reamintim pe scurt cîteva concepte de baza despre polinoamelor Faber sau/şi despre dezvoltari in serie Faber.

Dacă $G \subset \mathbb{C}$ este mulţime compactă cu $\tilde{\mathbb{C}} \setminus G$ conexă, notăm cu $A(G)$

spaţiul Banach al funcţiilor continue pe G şi analitice în interiorul lui G, cu norma $\|f\|_G = \sup\{|f(z)|; z \in G\}$. Dacă notăm $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}$, din teorema aplicaţiei Riemann, există in mod unic o aplicaţie conformă Ψ a lui $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}_1$ pe $\tilde{\mathbb{C}} \setminus G$ cu proprietăţile $\Psi(\infty) = \infty$ şi $\Psi'(\infty) > 0$. În consecinţă, pentru G îi putem ataşa un polinom de grad n, $F_n(z)$, numit *polinomul lui Faber*, prin formula $\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}$, $z \in G, |w| > 1$.

Pentru $f \in A(G)$ notăm

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \frac{f(\Psi(u))}{u^{n+1}} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\Psi(e^{it}))e^{-int} dt, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

care sunt denumiţi coeficienţi Faber corespunzători lui f şi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)F_n(z)$ este denumita dezvoltarea în serie Faber a lui f pe G. Să notăm că seria Faber este în fapt o generalizare a seriei lui Taylor, la cazul cind discul unitate se înlocuieşte cu o mulţime simplu conexă, marginită de o curbă suficient de "netedă".

Proprietăţi detailate ale polinoamelor lui Faber se găsesc in [33], [70].

Fie G o submulţime compactă şi conexă din $\mathbb{C}$ (adică un aşa zis continuu) şi să facem presupunerea că f este analitică în G, adică există $R > 1$ cu proprietatea că f este analitică pe G_R, adică $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)F_k(z)$, $z \in G_R$. Aici notaţia G_R reprezintă interiorul curbei (inchise) de nivel Γ_R, definită prin $\Gamma_R = \{\Psi(w); |w| = R\}$ (avem $G \subset \overline{G_r}$ pentru orice $1 < r < R$).

Fie $0 < \lambda_n \leq \frac{1}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, cu $\lambda_n \to 0$ arbitrar de rapid.

In cele ce urmează, mai întîi vom introduce o formă potrivită pentru operatorii generalizati Baskakov-Kantorovich-Faber, folosind metoda din [48], utilizată acolo pentru introducerea operatorilor Baskakov-Faber $W_n(f; \lambda_n, G; z)$ menţionaţi în Introducere.

In acest sens, reamintim că în [71], am studiat următoarea formă de operatori Baskakov-Kantorovich de variabilă reală, $x \geq 0$,

$$\mathcal{K}_n(\lambda_n; f)(x) = (1+x)^{-1/\lambda_n} \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{\lambda_n} \left(1 + \frac{1}{\lambda_n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(j - 1 + \frac{1}{\lambda_n}\right) \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^j H_n(f)(j\lambda_n),$$

unde funcţia H_n este astfel încît

$$H_n(f)(j\lambda_n) = \frac{1}{\lambda_n} \cdot \int_{j\lambda_n}^{(j+1)\lambda_n} f(t)dt = \frac{1}{\lambda_n} \cdot \int_{j\lambda_n}^{j\lambda_n+\lambda_n} f(t)dt.$$

Este uşor de vazut ca putem defini $H_n(f)(x) = \frac{1}{\lambda_n} \cdot \int_x^{x+\lambda_n} f(t)dt$.

Acum, aplicînd Teorema 2 din [59], obţinem formula de reprezentare

$$\mathcal{K}_n(f; \lambda_n)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (1+\lambda_n) \ldots (1+(j-1)\lambda_n) \cdot [0, \lambda_n, \ldots, j\lambda_n; H_n(f)] x^j,$$

$x \geq 0$, unde prin convenţie, $(1+\lambda_n) \ldots (1+(j-1)\lambda_n) = 1$ for $j = 0$.

Presupunind că $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) z^k$ este analitică în discul compact $|z| \leq R$, pentru $H_n(f)(z)$ obţinem reprezentarea

$$H_n(f)(z) = \frac{1}{\lambda_n} \cdot \int_z^{z+\lambda_n} f(t)dt = \frac{1}{\lambda_n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \cdot \int_z^{z+\lambda_n} t^k dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(f)}{k+1} [(z+\lambda_n)^{k+1} - z^{k+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(f)}{k+1} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} z^j \lambda_n^{k-j} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k}(f) z^k,$$

unde

$$A_{n,k}(f) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{a_j(f)}{j+1} \lambda_n^{j-k} \binom{j+1}{k}. \tag{4.1}$$

Raţionînd ca şi în [48], putem introduce în mod formal următorii operatori Baskakov-Kantorovich pe disc compact cu centrul în origine, prin formula

$$\mathcal{K}_n(f; \lambda_n)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k}(f) \cdot \sum_{j=0}^{k} (1+\lambda_n) \cdot \ldots \cdot (1+(j-1)\lambda_n) \cdot [0, \lambda_n, \ldots, j\lambda_n; e_k] z^j.$$

În final, procedînd exact ca şi în Definiţia 2.1 din [48] (adică, înlocuind z^j cu $F_j(z)$), dacă $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) F_k(z)$, $z \in G \subset \mathbb{C}$, unde $G \subset \mathbb{C}$ este compactă iar $F_k(z)$ sunt polinoamele Faber ataşate lui G, putem introduce următoarea definiţie.

Definiţia 4.1.1. (Trifa [72]) Operatorii generalizaţi Baskakov-Kantorovich-Faber ataşati lui G şi f sunt definiţi cu formula

$$\mathcal{K}_n(f; \lambda_n, G; z)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k}(f) \cdot \sum_{j=0}^{k} (1+\lambda_n) \cdot ... \cdot (1+(j-1)\lambda_n) \cdot [0, \lambda_n, ..., j\lambda_n; e_k] F_j(z), \quad (4.2)$$

unde pentru $j = 0$ şi $j = 1$, luăm prin convenţie

$$(1 + \lambda_n) \cdot ... \cdot (1 + (j - 1)\lambda_n) = 1.$$

Observaţie. Pentru $\lambda_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ şi $G = \overline{\mathbb{D}}_1$, deoarece $F_j(z) = z^j$, operatorii generalizaţi Baskakov-Kantorovich-Faber de mai sus, se reduc la operatorii clasici complecşi Baskakov-Kantorovich.

Aceleaşi raţionamente formale pot fi aplicate şi operatorilor generalizaţi Szász-Kantorovich, definiţi în cazul real in [71], prin formula

$$K_n(f; \lambda_n)(x) = e^{-x/\lambda_n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j! \lambda_n^j} \cdot \frac{1}{\lambda_n} \cdot \int_{j\lambda_n}^{(j+1)\lambda_n} f(v) dv.$$

Într-adevăr, potrivit lucrării [37], pagina 976 (şi notînd acolo $\frac{b_n}{a_n} := \lambda_n$), operatorii clasici generalizaţi Szász, $S_n(f; \lambda_n)(z)$, pot fi scrişi, in mod formal, prin formula

$$S_n(f; \lambda_n)(x) = e^{-x/\lambda_n} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} f(j\lambda_n) \cdot \frac{x^j}{\lambda_n^j j!}.$$

Apoi, din formula (1), p. 976 din [37], (scrisă din nou pentru $\frac{b_n}{a_n} := \lambda_n$) pentru operatorii generalizaţi Szász, primim forma

$$S_n(f)(x) = e^{-x/\lambda_n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\lambda_n^j j!} \cdot f(j\lambda_n) = \sum_{j=0}^{\infty} [0, \lambda_n, ..., j\lambda_n; f] \cdot z^j.$$

Pastrînd notaţia pentru $H_n(f)(x)$, for $K_n(f;\lambda_n)(x)$, in mod formal putem scrie

$$K_n(f;\lambda_n)(x) = e^{-x/\lambda_n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!\lambda_n^j}\cdot H_n(j\lambda_n) = \sum_{j=0}^{\infty}[0,\lambda_n,...,j\lambda_n;H_n]\cdot x^j.$$

Înlocuind acum x cu z şi considerînd că $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(f)F_k(z)$ este dezvoltarea Faber a lui f in compactul G, raţionînd ca şi în cazul Definiţiei 4.1.1, putem introduce următorul concept.

Definiţia 4.1.2. (Trifa [72]) Operatorii generalizaţi Szász-Kantorovich-Faber ataşati lui G şi f sunt (in mod formal) definiţi prin

$$K_n(f;\lambda_n;G)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}A_k(f)\sum_{j=0}^{k}[0,\lambda_n,...,j\lambda_n;e_k]\cdot F_j(z). \tag{4.3}$$

4.2 Operatori Baskakov-Kantorovich-Faber

În aceasta secţiune, metoda din [48] descrisă în Secţiunea 4.1, va fi aplicată operatorilor complecşi Baskakov-Kantorovich studiaţi în cazul variabilei reale în [71].

Mai întîi, avem nevoie de următorul rezultat auxiliar.

Lema 4.2.1. (Trifa [72]) *Dacă $|a_k(f)| \le M\cdot\frac{A^k}{k!}$, $k\in\mathbb{N}$, cu $M>0$, $0<A<1$ şi $1\ge\lambda_n\searrow 0$, atunci pentru $A_{n,k}(f)$ daţi de formula (4.1) avem estimarea*

$$|A_{n,k}(f)| \le e^A\cdot\left(M\cdot\frac{A^k}{k!}\right).$$

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următorul.

Teorema 4.2.2. (Trifa [72]) *Fie $\lambda_n\searrow 0$, $0<\lambda_n\le\frac{1}{2}$, $n\in\mathbb{N}$, G un continuum şi f analitică pe G (deci există $R>1$ cu $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(f)F_k(z)$, $z\in G_R$). În plus, mai presupunem existenţa unui $M>0$ şi a unui $A\in\left(\frac{1}{R},1\right)$, cu $|a_k(f)|\le M\frac{A^k}{k!}$, pentru orice $k=0,1,...$, (de unde rezultă*

$|f(z)| \leq C(r)Me^{Ar}$ pentru orice $z \in G_r$, $1 < r < R$). Aici G_R notează interiorul curbei de nivel inchise Γ_R dată de $\Gamma_R = \{\Psi(w); |w| = R\}$ şi $G \subset \overline{G_r}$, pentru orice $1 < r < R$.

Fie $1 < r < \frac{1}{A}$ fixat. Atunci, se poate găsi un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ şi constanta $C''(r, f) > 0$ depinzînd de r şi f, cu proprietatea că pentru orice $z \in \overline{G_r}$ şi $n \geq n_0$ avem

$$|\mathcal{K}_n(f; \lambda_n, G; z) - f(z)| \leq C''(r, f) \cdot \lambda_n,$$

unde $\mathcal{K}_n(f; \lambda_n, G; z)$ este dat de formula (4.2).

Observaţii. 1) Este uşor de arătat că Teorema 4.2.2 rămîne adevarată în ipotezele mai generale $|a_k(f)| \leq P_m(k) \cdot \frac{A^k}{k!}$, pentru orice $k \geq 0$, cu P_m polinom algebric cu proprietăţile $grad(P_m) = m$ şi $P_m(k) > 0$ pentru orice $k \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$.

2) Se pot da numeroase exemple pentru G in care aplicaţia conformă Ψ şi polinoamele lui Faber ataşate lui G se pot explicita (vezi, de exemplu, [36], pp. 81-83, sau [37]), după cum urmează : $G = [-1, 1]$, G este mărginită de m-hipocicloid, G este regulat m-stelata ($m = 2, 3, ...,$), G este m-lemniscată symetrica, $m = 2, 3, ...,$, G este semidisc, sau G este o luna circulară. Drept urmare, in aceste cazuri operatorii Baskakov-Kantorovich-Faber se pot şi ei explicita.

4.3 Operatori Szász-Kantorovich-Faber

În această secţiune, metoda din [48] descrisă in Secţiunea 4.1, va fi aplicată la operatorii complecşi de tip Szász-Kantorovich, studiaţi în cazul variabilei reale în [71].

Rezultatul principal este următorul.

Teorema 4.3.1. (Trifa [72]) *Fie $\lambda_n \searrow 0$, $0 < \lambda_n \leq \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, G un con-*

tinuum şi f analitică pe G (deci există $R > 1$ cu $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) F_k(z)$, $z \in G_R$). În plus, mai presupunem existenţa unui $M > 0$ şi a unui $A \in \left(\frac{1}{R}, 1\right)$, cu $|a_k(f)| \leq M \frac{A^k}{k!}$, pentru orice $k = 0, 1, ...$, (de unde rezultă $|f(z)| \leq C(r) M e^{Ar}$ pentru orice $z \in G_r$, $1 < r < R$). Aici G_R notează interiorul curbei de nivel inchise Γ_R dată de $\Gamma_R = \{\Psi(w); |w| = R\}$ şi $G \subset \overline{G_r}$, pentru orice $1 < r < R$.

Fie $1 < r < \frac{1}{A}$ fixat. Atunci, se poate găsi un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ şi constanta $C'''(r, f) > 0$ depinzînd de r şi f, cu proprietatea că pentru orice $z \in \overline{G_r}$ şi $n \geq n_0$ avem

$$|K_n(f; \lambda_n, G; z) - f(z)| \leq C'''(r, f) \cdot \lambda_n,$$

unde $K_n(f; \lambda_n, G; z)$ este dat de formula (4.3).

Observaţii. 1) Este uşor de arătat că Teorema 4.3.1 rămîne adevarată în ipotezele mai generale $|a_k(f)| \leq P_m(k) \cdot \frac{A^k}{k!}$, pentru orice $k \geq 0$, cu P_m polinom algebric cu proprietăţile $grad(P_m) = m$ şi $P_m(k) > 0$ pentru orice $k \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$.

2) Se pot da numeroase exemple pentru G in care aplicaţia conformă Ψ şi polinoamele lui Faber ataşate lui G se pot explicita (vezi Observatia 2 de după Teorema 4.2.2). Drept urmare, in aceste cazuri operatorii Szász-Kantorovich-Faber se pot şi ei explicita.

4.4 Mulţimi compacte multiplu conexe : Preliminarii

Fie $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) B_k(z)$ dezvoltarea funcţiei analitice f în serie Faber-Walsh pe compactul multiplu conex G, unde $B_k(z)$ reprezintă aşa numitele polinoame Walsh ataşate lui G. În lucrarea [41], se definesc şi studiază operatorii complecşi Szász-Mirakjan-Faber-Walsh, dati de formula (vezi Definiţia 3 din [41])

$$M_n(f;\lambda_n;G)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(f)\sum_{j=0}^{k}[0,\lambda_n,...,j\lambda_n;e_k]\cdot B_j(z).$$

Scopul principal al următoarelor două secţiuni este de a obţine proprietăţi de aproximare similare pentru operatorii Baskakov-Kantorovich-Walsh în Secţiunea 4.5 şi pentru operatorii Szász-Kantorovich-Walsh în Secţiunea 4.6.

Dar, mai întîi, în această secţiune prezentăm cîteva chestiuni preliminare despre polinoamele Walsh.

Polinoamele Faber au fost introduse de către Faber în [28], ca şi asociate unei mulţimi compacte simplu conexe. Ele permit dezvoltarea funcţiilor analitice pe acea mulţime, în serii analoage seriilor de puteri clasice.

În Walsh [74], au fost introduse polinoame care le generalizează pe cele ale lui Faber, ataşate mulţimilor compacte cu mai multe componente (adică a caror complementară este un domeniu multiply conex). Aceste polinoame Faber generalizate sunt numite polinoame Faber-Walsh şi de asemenea permit dezvoltarea unei funcţii analitice in serie analoagă cu seria de puteri.

În cele ce urmeaza, să reamintim pe scurt cîteva concepte de bază privind polinoamele Faber-Walsh polynomials şi dezvoltările în serie Faber-Walsh, de care vom avea nevoie pe mai departe.

Peste tot în Secţiunile 4.5 şi 4.6, $G\subset\mathbb{C}$ va fi considerată o mulţime compactă constînd din mai multe componente, adică $\tilde{\mathbb{C}}\setminus G$ este multiplu conexă.

Definiţia 4.4.1. (vezi, de exemplu, Walsh [74]) Un domeniul lemniscatic este un domeniu de forma $\{w\in\tilde{C};|U(w)|>\mu\}$, unde $\mu>0$ este o anumita constantă iar $U(w)=\Pi_{j=1}^{\nu}(w-\alpha_j)^{m_j}$ pentru nişte puncte

$\alpha_1, ..., \alpha_\nu \in \mathbb{C}$ şi exponenti reali $m_1, ..., m_\nu > 0$ cu $\sum_{j=1}^{\nu} m_j = 1$.

În cele ce urmează, vom considera că punctele $\alpha_1, ..., \alpha_\nu$ au proprietatea că dintre ele pot fi alese un şir $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ astfel încît pentru orice mulţime inchisă C care nu conţine nici unul dintre punctele $\alpha_1, ..., \alpha_\nu$, există constantele $A_1(C), A_2(C) > 0$ cu

$$A_1(C) < \frac{|u_n(w)|}{|U(w)|^n} < A_2(C),\ n = 0, 1, 2, ...,\ w \in C, \tag{4.4}$$

unde $u_n(w) = \Pi_{j=1}^{n}(w - \alpha_j)$.

Fie $D_1, ..., D_\nu$ mulţimi compacte exterior mutuale (care nu se reduc la un singur punct) ale planului complex astfel încît complementara lui $G := \bigcup_{j=1}^{\nu} D_j$ in planul complex extins, este o regiune conexă deschisă cu ν-componente. Datorită Teoremei 3 din Walsh [75], există un domeniu lemniscatic

$$K_1 = \{w \in \tilde{\mathbb{C}}; |U(w)| > \mu\}$$

şi o bojectie conformă

$$\Phi : \tilde{\mathbb{C}} \setminus G \to \{w \in \tilde{\mathbb{C}}; |U(w)| > \mu\},\ \text{cu } \Phi(\infty) = \infty,\ \text{şi } \Phi'(\infty) = 1.$$

Aici μ este capacitatea logaritmică a lui G. Pe deasupra, bijectia inversă conformă satisface

$$\Psi = \Phi^{-1} = \{w \in \tilde{\mathbb{C}}; |U(w) > \mu\} \to \tilde{\mathbb{C}} \setminus G,\ \text{cu } \Psi(\infty) = 1 \text{ şi } \Psi'(\infty) = 1.$$

Considerăm funcţiile lui Green $H_1(w) = \log(|U(w)|) - \log(\mu)$, $H = H_1 \circ \Phi$ şi pentru $r > 1$ curbele lor de nivel

$$\Lambda_r = \{w \in \mathbb{C}; H_1(w) = \log(r)\} = \{w \in \mathbb{C}; |U(w)| = r\mu\},$$

$$\Gamma(r) = \{z \in \mathbb{C}; H(z) = \log(r)\}.$$

Avem $\Gamma_r = \Psi(\Lambda_r)$. Notăm cu G_r interiorul lui Γ_r şi cu D_r^∞ exteriorul lui Λ_r (incluzînd ∞).

Este de observat că pentru $1 < r < \beta < R$ avem $G \subset G_r \subset G_\beta \subset G_R$.

Datorită Teoremei 3 din Walsh [74], pentru $z \in \Gamma_r$ and $w \in D_r^\infty$ avem

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(z)}{u_{n+1}(w)}, \text{ cu } B_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\lambda} u_n(t) \cdot \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} dt, \lambda > r.$$

Polinomul $B_n(z)$ este numit al n-lea polinom Faber-Walsh ataşat lui G şi $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ iar potrivit cu Lema 2.5 din Sète [64], polinoamele Faber-Walsh sunt independente de domeniul lemniscatic şi de aplicatia exterioară Ψ.

Observaţii. 1) Demonstraţia existenţei aplicaţiei conforme anterioare Ψ (şi in mod implicit a existentei polinoamelor Faber-Walsh) a fost obţinută de Walsh [75] şi este bazată pe nişte rezultate asupra punctelor critice ale polinoamelor obţinute în cartea [76].

2) O proprietate interesantă a polinoamelor Faber-Walsh polynomials obţinută în Walsh [74], pagina 31, relaţia (34), este că

$$\limsup_{k \to \infty} [\|B_k\|_G]^{1/k} = \mu,$$

proprietate care este similară cu cea a polinoamelor Chebyshev ataşate mulţimii compacte multiplu conexă G şi de asemenea are loc pentru multe mulţimi de polinoame definite prin proprietaţi extremale (vezi Fekete-Walsh [30], [31]). Aici $\| \cdot \|_G$ notează norma uniformă pe G.

3) În mod analog cu polinoamele Faber, datorită Teoremei 3 din Walsh [74], polinoamele Faber-Walsh permit dezvoltări in serii ale funcţiilor analitice pe mulţimi compacte. Anume, dacă f este analitică în compactul G (cu multiple complementare conexe), există $R > 1$ astfel încît f este analitică în G_R iar în interior G_R admite (local, uniform) dezvoltarea in serie $f(z) =$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)B_k(z)$, cu

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_\beta}\frac{f(\Psi(t))}{u_{k+1}(t)}dt, 1 < \beta < R. \tag{4.5}$$

4) Dacă G este simplu conexă, atunci polinoamele Faber-Walsh devin polinoamele Faber.

5) În raţionamentele noastre, avem nevoie de asemenea de următoarea estimare, vezi, de exemplu, Walsh [74], p. 29, relaţia (26)

$$|B_k(z)| \leq A_1(r\mu)^k, \text{ for all } z \in \Gamma_r,\ 1 < r < R, k \geq 0, \tag{4.6}$$

unde A_1 depinde doar de r.

De asemenea, din relaţia $\limsup_{n\to\infty}|a_k|^{1/k} \leq \frac{1}{\beta\mu}$ din Walsh [74], pagina 30, obţinem imediat estimarea

$$|a_k(f)| \leq \frac{C(\beta,\mu,f)}{(\beta\mu)^k}, \text{ for all } k = 0, 1, ..., \tag{4.7}$$

unde $C(\beta,\mu,f) > 0$ este independenta de k. Observăm că aici şi în rationamentele următoare vom alege $1 < r < \beta < R$.

6) În trecut, în timp ce polinoamele Faber au fost studiate şi folosite in multe lucrări publicate, polinoamele Faber-Walsh au fost rar studiate, exceptînd cartea lui Suetin [70], care conţine o secţiune scurtă despre ele. Principalul motiv pentru neglijarea polinoamelor Faber-Walsh a fost că nu au fost cunoscute exemple explicite de aplicaţii lemniscatice conforme. Dar foarte recent, prin lucrarile [64]-[67], polinoamele Faber-Walsh au fost aduse in atentie din nou. Astfel, primul exemplu de aplicaţie conforma lemniscatica Walsh pare să fie menţionata in lucrarea foarte recenta a lui Sète-Liesen [66]. De asemenea, primele formule explicite de polinoame Faber-Walsh au fost studiate pentru cazul cînd G constă din doua intervale compacte disjuncte in Sète-Liesen [67].

Pentru proprietăţi suplimentare privind polinoamele Faber-Walsh, vezi, de exemplu, Capitolul 13 din Suetin [70].

Avînd drept model definiţiile din lucrarea [72], putem de asemenea introduce următoarea definiţie.

Definiţia 4.4.2. Fie $D_1, ..., D_\nu$ mulţimi compacte mutual exterioare (nici una reducîndu-se la un singur punct) ale planului complex, astfel încît complementara lui $G := \bigcup_{j=1}^{\nu} D_j$ in planul complex extins este o regiune deschisă multiplu conexă cu ν-componente şi să presupunem ca f este analitică în G, adică există $R > 1$ astfel încît f este analitică în G_R, adică $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) B_k(z)$ pentru toţi $z \in G_R$, unde $B_k(z)$ notează polinoamele Faber-Walsh ataşate lui G iar G_R notează interiorul curbei de nivel inchise Γ_R.

Operatorii generalizaţi Baskakov-Kantorovich-Walsh şi operatorii generalizaţi Szász-Kantorovich-Walsh ataşati lui G şi f, în mod formal vor fi definiţi cu

$$\mathbb{K}_n(f; \lambda_n; G)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k}(f) \sum_{j=0}^{k} [0, \lambda_n, ..., j\lambda_n; e_k] \cdot B_j(z), \tag{4.8}$$

şi

$$\overline{K}_n(f; \lambda_n; G)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k}(f) \sum_{j=0}^{k} [0, \lambda_n, ..., j\lambda_n; e_k] \cdot B_j(z), \tag{4.9}$$

in mod respectiv, unde

$$A_{n,k}(f) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{a_j(f)}{j+1} \lambda_n^{j-k} \binom{j+1}{k}. \tag{4.10}$$

Peste tot în secţiunile următoare, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale pozitive cu proprietatea că $\lambda_n \searrow 0$ arbitrar de rapid. Fără a pierde din generalitate, putem presupune ca $\lambda_n \leq \frac{1}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

4.5 Operatori Baskakov-Kantorovich-Walsh

În această secţiune obţinem proprietăţi de aproximare pentru operatorii Baskakov-Kantorovich-Walsh.

Acum suntem in poziţia de a enunţa rezultatul principal.

Teorema 4.5.2. *Fie $\mu \geq 1$ şi $D_1, ..., D_\nu$ mulţimi compacte mutual exterioare (nici una reducîndu-se la un singur punct) ale planului complex, astfel încît complementara lui $G := \bigcup_{j=1}^{\nu} D_j$ în planul complex extins este o regiune deschisă conexă şi cu ν-componente. Presupunem ca f este analitică în G, adică inseamnă existenţa unui $R > 1$ cu $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)B_k(z)$ pentru oricare $z \in G_R$. Mai presupunem existenţa constantelor $M > 0$ şi $A \in \left(\frac{1}{R\mu}, \frac{1}{\mu}\right)$, cu $|a_k(f)| \leq M\frac{A^k}{k!}$, pentru orice $k = 0, 1, ...,$ (ceea ce implică $|f(z)| \leq C(r)Me^{\mu Ar}$ pentru orice $z \in G_r$, $1 < r < R$). Aici μ, G_R şi G_r sunt cele definite în Secţiunea 4.4.*

Fie $1 < r < \frac{1}{A\mu}$ fixat. Atunci, se poate găsi un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $C''(r, f, \mu) > 0$ ce depinde doar de r, μ şi f, astfel încît pentru orice $z \in \overline{G_r}$ şi $n \geq n_0$ avem

$$|\mathbb{K}_n(f; \lambda_n, G; z) - f(z)| \leq C''(r, f, \mu) \cdot \lambda_n.$$

Observaţii. 1) Deoarece $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)P_m(k)(\mu Ar)^k < +\infty$ si $\sum_{k=0}^{\infty} P_m(k+1) \cdot \frac{(\mu Ar)^k}{k!} < +\infty$ pentru oricare polinom algebric P_m, cu $grad(P_m) \leq m$ satisfacînd $P_m(k) > 0$ pentru orice $k \geq 0$, este imediat din demonstraţie că Teorema 4.5.2 are loc sub ipoteza mai generală $|a_k(f)| \leq P_m(k) \cdot \frac{A^k}{k!}$, pentru orice $k \geq 0$.

2) În cazul cînd mulţimea G este simplu conexă, Teorema 4.5.2 a fost obţinută în [72].

3) Este bine de notat că de fapt condiţia $\mu \geq 1$ din Teorema 4.5.2 poate fi neglijată şi condiţiile asupra lui A şi r din enunţul Teoremei 4.5.2 poate

fi scris ca şi $A \in (1/R, 1)$, $1 < r < 1/A$ (adică independent de capacitatea logaritmică μ), în mod simplu, normalizînd în mod potrivit ca domeniul lemniscatic să fie $K_1 = \{w : |U(w)| > 1\}$ şi alegînd $\Phi'(\infty) = 1/\mu > 0$. Într-adevăr, în acest caz, polinoamele ataşate Faber-Walsh $\tilde{B}_k(z)$ şi coeficienţii Faber-Walsh $\tilde{a}_k(f)$ din dezvoltarea $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k(f) \cdot \tilde{B}_k(z)$, satisfac (4.5) şi (4.6) fără ca să apară μ^k in aceste estimări (vezi, de exemplu, [41]).

4.6 Operatori Szász-Kantorovich-Walsh

În această secţiune obţinem proprietăţi de aproximare pentru operatorii Szász-Kantorovich-Walsh.

Rezultatul principal este următorul.

Teorema 4.6.1. *Fie $\mu \geq 1$ şi $D_1, ..., D_\nu$ mulţimi compacte mutual exterioare (nici una reducîndu-se la un singur punct) ale planului complex, astfel încît complementara lui $G := \bigcup_{j=1}^{\nu} D_j$ in planul complex extins este o regiune deschisă cu ν-componente. Să presupunem ca f este analitică în G, ceea ce inseamnă existenţa unui $R > 1$ cu $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) B_k(z)$ pentru orice $z \in G_R$. Mai presupunem existenţa constantelor $M > 0$ şi $A \in \left(\frac{1}{R\mu}, \frac{1}{\mu}\right)$, cu $|a_k(f)| \leq M \frac{A^k}{k!}$, pentru orice $k = 0, 1, ...$, (adică $|f(z)| \leq C(r) M e^{\mu A r}$ pentru orice $z \in G_r$, $1 < r < R$). Aici μ, G_R şi G_r sunt cele definite în Secţiunea 4.4.*

Fie $1 < r < \frac{1}{A\mu}$ fixat. Atunci, se oate gasi un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $C'''(r, f, \mu) > 0$ ce depinde numai de r, μ şi f, cu proprietatea că pentru orice $z \in \overline{G_r}$ şi $n \geq n_0$, avem

$$|\overline{K}_n(f; \lambda_n, G; z) - f(z)| \leq C'''(r, f, \mu) \cdot \lambda_n.$$

Observaţii. 1) Din $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) P_m(k) (\mu A r)^k < +\infty$ şi $\sum_{k=0}^{\infty} P_m(k+1) \cdot \frac{(\mu A r)^k}{k!} < +\infty$ pentru orice polinom algebric P_m de grad $\leq m$ satisfacînd

$P_m(k) > 0$ pentru orice $k \geq 0$, este imediat din demonstraţie că Teorema 4.6.1 are loc în ipoteza mai generală $|a_k(f)| \leq P_m(k) \cdot \frac{A^k}{k!}$, pentru orice $k \geq 0$.

2) În cazul cînd mulţimea G este un compact simplu conex, Teorema 4.6.1 a fost demonstrată în [72].

3) Este bine de notat că de fapt condiţia $\mu \geq 1$ din Teorema 4.6.1 poate fi neglijată şi condiţiile asupra lui A şi r din enunţul Teoremei 4.6.1 pot fi scrise ca şi $A \in (1/R, 1)$, $1 < r < 1/A$ (adică independent de capacitatea logaritmică μ), în mod simplu, normalizînd in mod potrivit ca domeniul lemniscatic să fie $K_1 = \{w : |U(w)| > 1\}$ şi alegînd $\Phi'(\infty) = 1/\mu > 0$. Într-adevăr, în acest caz, polinoamele ataşate Faber-Walsh $\tilde{B}_k(z)$ şi coeficienţii Faber-Walsh $\tilde{a}_k(f)$ din dezvoltarea $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k(f) \cdot \tilde{B}_k(z)$, satisfac (4.5) şi (4.6) fără ca să apară μ^k în aceste estimări (vezi, de exemplu, [41]).

Bibliografie

[1] Abel, U., Butzer, P. L., Complete asymptotic expansion for generalized Favard operators, *Constr. Approx.*, **35**(2012), 73-88.

[2] Agratini, O., *Approximation by Linear Operators* (Romanian), University Press, "Babeş-Bolyai" University, Cluj-Napoca, 2000.

[3] Altomare, F., Campiti, M., *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 17. New York, Berlin, 1994.

[4] Baskakov, V. A., An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **113**(1957), 249-251.

[5] Bede, B., Coroianu, L., Gal, S. G., Approximation and shape preserving properties of the Bernstein operator of max-product kind, *Int. J. Math. Math. Sci.*, volume 2009, Article ID **590589**, 26 pages, doi:10.1155/2009/590589.

[6] Bede, B., Coroianu, L., Gal, S. G., Approximation and shape preserving properties of the nonlinear Meyer-König and Zeller operator of max-product kind, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **31**(2010), No. 3, 232-253.

[7] Bede, B., Coroianu, L., Gal, S. G., *Approximation by Max-Product Type Operators*, Springer, New York, 2016.

[8] Berdysheva, E. E., Uniform convergence of Bernstein-Durrmeyer operators with respect to arbitrary measure, *J. Math. Anal. Appl.*, **394**(2012), 324-336.

[9] Berdysheva, E. E., Bernstein-Durrmeyer operators with respect to arbitrary measure II : Pointwise convergence, *J. Math. Anal. Appl.*, **418**(2014), 734-752.

[10] Berdysheva, E. E., Li, B.-Z., On L^p-convergence of Bernstein-Durrmeyer operators with respect to arbitrary masure, *Publ. Inst. Math. (Beograd, N.S.*, **96**(110)(2014), 23-29.

[11] Berdysheva E. E., Jetter, K., Multivariate Bernstein-Durrmeyer operators with arbitrary weight functions, *J. Approx. Theory*, **162**(2010), 576-598.

[12] Bernstein, S. N., Démonstration du théorém de Weierstrass fondeé sur le calcul des probabilités, *Commun. Soc. Math. Kharkov*, **13**(1912/1913), 1-2.

[13] Boehme, T. K., Bruckner, A. M., Functions with convexx means, *Pacific J. Math.*, **14**(1964), 1137-1149.

[14] Campiti, M., Metafune, G., L^p-convergence of Bernstein-Kantorovich-type operators, *Ann. Polon. Math.*, **LXIII**(1996), 273-280.

[15] Cerdà, J., Martín, J., Silvestre, P., Capacitary function spaces, *Collect. Math.*, **62**(2011), 95-118.

[16] Cetin, N., Ispir, N., Approximation by complex modified Szász-Mirakjan operators, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **50** (3) (2013), 355-372.

[17] Choquet, G., Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **5**(1954), 131-295.

[18] De Cooman, G., Possibility theory. I. The measure-and integral-theoretic groundwork, *Internat. J. Gen. Systems*, **25**(1997), no. 4, 291-323.

[19] Coroianu, L., Gal, S. G., Classes of functions with improved estimates in approximation by the max-product Bernstein operator, *Anal. Appl. (Singap.)*, **9**(2011), No. 3, 249-274.

[20] Coroianu, L., Gal, S. G., Localization results for the Bernstein max-product operator, *Appl. Math. Comp.*, **231**(2014), 73-78.

[21] Coroianu, L., Gal, S. G., Localization results for the max-product Meyer-König and Zeller operator, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **34**(2013), No. 7, 713-727.

[22] Coroianu, L., Gal, S. G., Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejér and sinc-type kernels, *Demonstratio Math.*, **49**(2016), no. 1, 38-49.

[23] Coroianu, L., Gal, S. G., Opriş, D. B., **Trifa, S.**, Feller's scheme in approximation by nonlinear possibilistic integral operators, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **38**(2017), No. 3, 327-343.

[24] Denneberg, D., *Non-Additive Measure and Integral*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1994.

[25] Dieudonné, J., *Éléments d'Analyse ; 1. Fondements de l'Analyse Moderne*, Gauthiers Villars, Paris, 1968.

[26] Djebali, S., Uniform continuity and growth of real continuous functions, *Int. J. Math. Education in Science and Technology*, **32**(2001), No. 5, 677-689.

[27] Dubois D., Prade, H., *Possibility Theory*, Plenum Press, New York, 1988.

[28] Faber, G., Über polynomische Entwicklungen, *Math. Ann.*, **64** (1907), 116-135.

[29] Favard, J., Sur les multiplicateurs d'interpolation, *J. Math. Pures Appl.*, **23**(1944), No. 9, 219-247.

[30] Fekete, M., Walsh, J. L., On the asymptotic behavior of polynomials with extremal properties, and of their zeros, *J. d'Analyse Math.*, **4** (1954), 49-87.

[31] Fekete, M., Walsh, J.L., Asymptotic behavior of restricted extremal polynomials, and of their zeros, *Pacific J. Math.*, **7** (1957), 1037-1064.

[32] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. II, Wiley, New York, 1966.

[33] Gaier, D., *Lectures on Complex Approximation*, Birkhauser, Boston, 1987.

[34] Gal, S. G., Approximation in compact sets by q-Stancu-Faber polynomials, $q > 1$, *Comput. Math. Appl.*, **61**(2011), no. 10, 3003-3009.

[35] Gal, S. G., *Approximation by Complex Bernstein and Convolution-Type Operators*, World Scientific Publ. Co, Singapore-Hong Kong-London-New Jersey, 2009.

[36] Gal, S. G., *Overconvergence in Complex Approximation*, Springer, New York, 2013.

[37] Gal, S. G., Approximation of analytic functions by generalized Favard-Szász-Mirakjan-Faber operators in compact sets, *Complex Anal. Oper. Theory*, **9**(5)(2015), 975-984.

[38] Gal, S. G., Approximation with an arbitrary order by generalized Szász-Mirakjan operators, *Stud. Univ. Babes-Bolyai, ser. Math.*, **59**(1)(2014), 77-81.

[39] Gal, S. G., A possibilistic approach of the max-product Bernstein kind operators, *Results Math.*, **65**(2014), 453-462.

[40] Gal, S. G., Approximation by Choquet integral operators, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **195**(3)(2016), 881-896.

[41] Gal S. G., Approximation by Bernstein-Faber-Walsh and Szász-Mirakjan-Faber-Walsh operators in multiply connected compact sets of $\mathbb{C}$, in : *Progress in Approximation Theory and Applicable Complex Analysis, Springer Optimization and Its Applications* (N.K. Govil et al. eds.), **117**, under press.

[42] Gal, S. G., Uniform and pointwise quantitative approximation by KantorovichChoquet type integral operators with respect to monotone and submodular set functions, *Mediterr. J. Math.*, **14** (2017), No. 5, article 205, 12 pp., DOI 10.1007/s00009-017-1007-6

[43] Gal S. G., Gupta, V., Approximation by complex Szász-Durrmeyer operators in compact disks, *Acta Math. Scientia*, **34B**(4)(2014), 1157-1165.

[44] Gal, S. G., Gupta, V., Approximation by complex Szász-Mirakjan-Stancu-Durrmeyer operators in compact disks under exponential growth, *Filomat*, **29**(5)(2015), 1127-1136.

[45] Gal, S. G., Gupta, V., Approximation by complex Durrmeyer type operators in compact disks, in : *Mathematics without Boundaries, Surveys in Interdisciplinary Research*, P.M. Pardalos and T.M. Rassias (editors), Springer, New York-Heidelberg-Dordrecht-London, 2014, pp. 263-284.

[46] Gal, S. G., Gupta, V., Approximation by the complex form of a link operator between the Phillips and the Szász-Mirakjan operators, *Results Math.*, 2015, online access, DOI 10.1007/s00025-015-0443-5.

[47] Gal, S. G., Gupta, V., Mahmudov, N. I., Approximation by a complex q-Durrmeyer type operator, *Ann. Univ. Ferrara*, **58** (1) (2012), 65-87.

[48] Gal, S. G., Opriş, D. B., Approximation of analytic functions with an arbitrary order by generalized Baskakov-Faber operators in compact sets, *Complex Anal. Oper. Theory*, **10**(2) (2016), 369-377.

[49] Gal, S. G., Opriş, D. B., Approximation with an arbitrary order by modified Baskakov type operators, *Appl. Math. Comp.*, **265**(2015), 329-332.

[50] Gal, S. G., Opriş, D. B., Uniform and pointwise convergence of Bernstein-Durrmeyer operators with respect to monotone and submodular set functions, *J. Math. Anal. Appl.*, **424**(2015), 1374-1379.

[51] Gal, S. G., **Trifa, S.**, Quantitative estimates in uniform and pointwise approximation by Bernstein-Durrmeyer-Choquet operators, *Carpathian J. Math.*, **33**(1)(2017), 49-58.

[52] Gal, S. G., **Trifa, S.**, Quantitative estimates in L^p-approximation by Bernstein-Durrmeyer-Choquet operators with respect to distorted Borel measures, *Results in Mathematics*, **72**(2017), no. 3, 1405-1410.

[53] Gal, S. G., **Trifa, S.**, Quantitative estimates in L^p-approximation by Kantorovich-Choquet operators with respect to distorted Borel measures, trimisa spre publicare.

[54] Gonska, H., Kacsó D., Rasa, I., The genuine Bernstein-Durrmeyer operators revisited. *Results Math.*, **62**, 295-310(2012).

[55] Gupta, V., Complex Baskakov-Szász operators in compact semi-disks, *Lobachevskii J. Math.*, **35** (2014), no. 2, 65-73.

[56] Gupta, V., Agarwal, R. P., *Convergence Estimates in Approximation Theory*, Springer, New York, 2014.

[57] Li, B.-Z., Approximation by multivariate Bernstein-Durrmeyer operators and learning rates of least-square regularized regression with multivariate polynomial kernel, *J. Approx. Theory*, **173**(2013), 33-55.

[58] Levasseur, K. N., A probabilistic proof of the Weierstrass approximation theorem, *Amer. Math. Monthly*, **91**(1984), No. 4, 249-250.

[59] Lupaş, A., Some properties of the linear positive operators, II, *Mathematica(Cluj)*, **9(32)**(1967), 295-298.

[60] Mahmudov, N. I., Approximation properties of complex q-Szász-Mirakjan operators in compact disks, *Comput. Math. Appl.*, **60** (6) (2010), 1784-1791.

[61] Mahmudov, N. I., Convergence properties and iterations for q-Stancu polynomials in compact disks, *Comput. Math. Appl.*, **59 (12)** (2010), 3763-3769.

[62] Mahmudov, N. I., Approximation by Bernstein-Durrmeyer-type operators in compact disks, *Appl. Math. Lett.*, **24** (7) (2011), 1231-1238.

[63] Mazhar, S. M., Totik V., Approximation by modified Szász operators, *Acta Sci. Math.*, **49**(1985), 257-269.

[64] Sète, O., Some properties of Faber-Walsh polynomials, *arXiv:1306.1347 (2013).*

[65] Sète, O., *Oral communication.*

[66] Sète, O., Liesen, J., On conformal maps from lemniscatic domains onto multiply-connected domains, *Electronic Transactions on Numerical Analysis (ETNA)*, **45** (2016), 1-15.

[67] Sète, O., Liesen, J., Properties and examples of Faber-Walsh polynomials, *Comput. Methods Funct. Theory*, 2016, online access : DOI: 10.1007/s40315-016-0176-9

[68] Shisha, O., Mond, B., The degree of convergence of linear positive operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **60**(1968), 1196-1200.

[69] Stancu, D. D., On a generalization of the Bernstein polynomials (Romanian), *Studia Univ. Babes-Bolyai Ser. Math.-Phys.*, **14**(2)(1969), 31-45.

[70] Suetin, P. K., *Series of Faber Polynomials*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1998.

[71] **Trifa, S.**, Approximation with an arbitrary order by generalized Kantorovich-type and Durrmeyer-type operators on $[0, +\infty)$, *Studia Universitatis "Babes-Bolyai"*, series mathematics, vol. **62**, no. 4 (2017), 485-500.

[72] **Trifa, S.**, Approximation of analytic functions with an arbitrary order by Baskakov-Kantorovich-Faber and Szász-Kantorovich-Faber operators in compact sets, *Anal. Univ. Oradea, fasc. math.*, vol. **25**, no. 1, (2018), 181-186.

[73] Walczak, Z., On approximation by modified Szász-Mirakjan operators, *Glasnik Mat.*, **37**(2)(2002), 303-319.

[74] Walsh, J. L., A generalization of Faber's polynomials, *Math. Ann.*, **136** (1958), 23-33.

[75] Walsh, J. L., On the conformal mapping of multiply connected regions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82** (1956), 128-146.

[76] Walsh, J. L., *The Location of Critical Points of Analytic and Harmonic Functions*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., vol. **34** Amer. Math. Soc., New York, 1950.

[77] Wang, R. S., Some inequalities and convergence theorems for Choquet integrals, *J. Appl. Math. Comput.*, **35**(2011), 305-321.

[78] Wang, Z., Klir, G. J., *Generalized Measure Theory, Springer*, New York, 2009.