UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI, CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

CONTRIBUȚII LA TEORIA GEOMETRICĂ A FUNCȚIILOR

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat:
prof. dr. Ştefan Grigore Sălăgean

Doctorand:
Engel Olga

Cluj-Napoca
2018

Contribuţii la teoria geometrică a funcţiilor

Engel Olga

Facultatea de Matematică şi Informatică

Universitatea Babeş-Bolyai

Rezumatul tezei de doctorat

Cluj-Napoca, 2018

Mulţumiri

Doresc să îmi exprim deosebita recunoştinţă faţă de domnii profesori Ştefan Grigore Sălăgean şi Szász Róbert, pentru îndrumarea, suportul, sugestiile şi ideile preţioase oferite pe parcursul studiilor mele doctorale.

De asemenea datorez sincere mulţumiri pentru ajutorul şi pentru comentariile valoroase al membrilor comisiei ştiinţifice.

Nu în ultimul rând sunt recunoscător părinţilor şi fratelui meu pentru tot sprijinul lor.

Cuvinte cheie

funcţie analitică, funcţie univalentă, funcţie stelată, funcţie tare stelată, funcţie convexă, funcţie aproape convexă, stelaritatea k-parabolică, convexitatea k-uniformă, funcţii cu coeficienţi negativi, compoziţia funcţiilor, funcţii cu argument variabil, puncte extreme, convoluţie, subordonări diferenţiale, derivata Ruscheweyh, derivata Sălăgean, derivata q, operatorul integral Bernardi-Libera-Livingston, operatorul integral Noor, operatorul integral Sălăgean, funcţia Mittag-Leffler, polinoamele Laguerre, polinoamele Legendre, raza de stelaritate, raza de convexitate, raza de uniform convexitate.

Cuprins

1 Introducere **1**

2 Funcţii univalente în planul complex **6**

2.1 Notaţii şi definiţii de bază . . . 6
2.2 Subordonare. Clasa Carathéodory . . . 9
2.3 Clase speciale de funcţii univalente . . . 10
2.3.1 Funcţii stelate . . . 10
2.3.2 Funcţii tare stelate . . . 11
2.3.3 Funcţii Janowski stelate . . . 13
2.3.4 Clasa S^{**} . . . 13
2.3.5 Clasa S^{***} . . . 14
2.3.6 Funcţii stelate parabolic . . . 14
2.3.7 Funcţii convexe . . . 15
2.3.8 Funcţii alfa - convexe . . . 15
2.3.9 Funcţii aproape convexe . . . 15
2.3.10 Funcţii uniform convexe . . . 16

3 Rezultate noi pe funcţii analitice cu argument variabil **17**

3.1 Rezultate preliminare . . . 17
3.2 Funcţii analitice cu argument variabil definit de derivata Ruscheweyh 18
3.3 Funcţii analitice cu argument variabil definit de convoluţia derivatelor Sălăgean şi Ruscheweyh . . . 19
3.3.1 Estimări ale coeficienţilor . . . 19
3.3.2 Teoreme de deformare . . . 19
3.3.3 Puncte extreme . . . 20

4 Metoda subordonărilor diferenţiale **22**
4.1 Definiţii de bază . . . 22
4.2 Leme fundamentale . . . 23
4.3 Aplicaţii . . . 24

5 Clase noi de funcţii analitice definite de operatori diferenţiali şi integrali **26**
5.1 Clasa $UCC_q(\gamma)$ . . . 26
5.2 Clasa $C_{NS}(\alpha)$ . . . 28
5.3 Clasa $Q_1(m, \lambda, A, B)$ . . . 29

6 Noi proprietăţi a funcţiei generalizate Mittag-Leffler **32**
6.1 Funcţia generalizată Mittag-Leffler . . . 32
6.2 Condiţii suficiente de incluziune pentru funcţia generalizată Mittag-Leffler pe diverse clase speciale de funcţii analitice . . . 33

7 Operatori integrali **35**
7.1 O condiţie de stelaritate de ordinul γ al unei operatori integrali . . . 36
7.2 Proprietatea de conservare al operatorului integral Bernardi, definit pe clasele de funcţii $UCC_q(g, \gamma)$ şi $C_{NS}(\alpha)$ . . . 37
7.3 Proprietatea de conservare al operatorului integral generalizat Bernardi-Libera-Livingston, definit pe clasele de funcţii S^{**} şi S^{***} . . . 37

8 Probleme de rază pentru două polinoame ortogonale **39**
8.1 Polinoamele Laguerre generalizate . . . 39
8.2 Raza de stelaritate, convexitate şi de uniform convexitate al polinoamelor Laguerre normalizate . . . 40
8.3 Polinoamele Legendre . . . 42
8.4 Raza de stelaritate, convexitate şi de uniform convexitate al polinoamelor Legendre normalizate de gradul impar . . . 42

Bibliografie **44**

Capitolul 1

Introducere

Teoria geometrică a funcţiilor este o ramură aparte a analizei complexe, care studiează proprietăţile geometrice al funcţiilor analitice. Bazele acestei teorii au fost puse la începutul secolului al XX -lea cu apariţia lucrărilor lui P. Koebe [52], T. H. Gronwall [44], J. W. Alexander [7] şi L. Bieberbach [22]. În 1916 L. Bieberbach [22] a anunţat celebra conjectură, care poartă numele şi care a condus la dezvoltarea acestei teorii. Cele mai importante metode de cercetare au fost metoda parametrică a lui K. Löwner [55], metodele variaţionale introduse de către M. Schiffer [86] şi G. M. Goluzin [41], metoda reprezentărilor integrale, introdusă de către G. Herglotz [47], principiul dualităţii pentru convoluţii, dezvoltat de S. Ruscheweyh [80], metoda subordonărilor diferenţiale, dezvoltat de S.S. Miller şi P.T. Mocanu. În anul 1984 conjectura lui Bieberbach a fost până la urmă demonstrat de către Louis de Branges [26], folosind metoda parametrică a lui Löwner.

În teoria geometrică al funcţiilor analitice, funcţiile univalente joacă un rol important. Este cunoscut că o funcţie olomorfă într-un domeniu $\mathbb{D}$ se zice că este univalentă, dacă orice valoare a sa este luată o singură dată în $\mathbb{D}$.

Cel mai important reprezentant român care a contribuit la dezvoltarea acestei teorii este P. T. Mocanu, care împreună cu S. S. Miller a creat o nouă metodă de studiu, metoda subordonărilor diferenţiale [58]. Această metodă are un rol important în demonstrarea mult mai simplă ale unor rezultate clasice dar şi în obţinerea altor noi. Această metodă este prezentată detaliat în Capitolul 4 al prezentei teze.

În ultimul deceniu teoria funcţiilor univalente a avut o dezvoltare rapidă şi au apărut noi direcţii de cercetare. În lucrările [78], [82], [4], [48], [3] au fost introduse operatorul diferenţial Ruscheweyh, operatorul diferenţial Sălăgean, produsul Hadamard al operatorului generalizat Sălăgean extins şi al operatorului Ruscheweyh extins, operatorul q-diferenţial şi operatorul diferenţial Al-Oboudi. În [82] şi [64] a fost introdus operatorul integral Sălăgean şi operatorul integral Noor. Folosind aceşti operatori diferenţiali şi integrali multe clase de funcţii analitice au fost generalizate şi noi clase de funcţii au fost deasemenea introduse.

O altă direcţie nouă în teoria geometrică a funcţiilor este determinarea razei de stelaritate, de convexitate şi de uniform convexitate pentru câtorva funcţii speciale. De exemplu în [18] Á. Baricz, P. A. Kupán şi R. Szász au determinat raza de stelaritate pentru funcţiile Bessel normalizate de prima speţă, pentru trei normalizări distincte. În [17] Á. Baricz şi R. Szász au determinat raza de convexitate pentru trei tipuri de normalizări al funcţiilor Bessel de prima speţă. În [27] E. Deniz şi R. Szász au determinat raza de uniform convexitate pentru trei tipuri de normalizări al funcţiilor Bessel de prima speţă.

Această teză conţine 8 capitole şi o bibliografie cu 103 titluri. Scopul acestei teze este de a investiga proprietăţile geometrice ale unor clase de funcţii analitice nou introduse şi ale unor funcţii speciale deasemenea. În continuare fiecare capitol este rezumat, subliniind contribuţiile autorului.

În **Capitolul 1** este prezentat contextul istoric al teoriei geometrice a funcţiilor.

Capitolul 2 este dedicat notaţiilor de bază şi rezultatelor preliminare din teoria geometrică funcţiilor. Acest capitol este împărţit în trei subcapitole. În primul subcapitol sunt prezentate câteva noţiuni de bază din teoria univalentă a funcţiilor. De exemplu sunt prezentate clasele $\mathcal{H}[a,n]$, $\mathcal{A}_n$ şi $\mathcal{S}$, unde $a \in \mathbb{C}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Este definit deasemenea clasa funcţiilor cu coeficienţi negativi precum şi produsul Hadamard al două funcţii analitice. Mai departe, ne amintim cinci tipuri de operatori diferenţiali, introdus de Ruscheweyh, Sălăgean, Alb Lupaş, Al-Oboudi şi Jackson. După aceea este prezentat două tipuri de operatori integrali, introdus de Sălăgean şi Noor. Apoi cu convoluţia operatorilor integrali Sălăgean şi Noor, este definit operatorul integral Noor-Sălăgean. Subcapitolul următor se ocupă cu principiul subordonării. Câtvea proprietăţi al relaţiei subordonării este deasemenea reamintit.

În final, obiectivul ultimei subcapitole este de a prezenta câteva clase speciale de funcţii analitice şi de a reaminti câteva caracterizări analitice ale acestora, cu adăugarea rezultatelor autorului. Două clase noi de funcţii analitice sunt deasemenea introduse. În [32] şi [31] de exemplu este arătat că aceste clase, şi anume clasa S^{**} şi S^{***}, are proprietatea că compoziţia oricărei două funcţii din clasele S^{**} şi S^{***} este stelată într-un disc unde compoziţia este definită. Clasa S^{***} pentru funcţii cu coeficienţi negativi este deasemenea definit, urmat de teorema de delimitare a coeficienţilor pentru această clasă. Acest subcapitol conţine deasemenea o condiţie de stelaritate nouă, dată în Lema 2.3.1, o formă exactă ale unei condiţii de tare stelaritate, dată în Teorema 2.3.2.2 şi câteva consecinţe ale acestor rezultate deasemenea se poate regăsi în acest subcapitol.

În **Capitolul 3** sunt date câteva clase noi de funcţii analitice cu argument variabil, definit cu ajutorul operatorului diferenţial Ruscheweyh respectiv cu convoluţia operatorilor diferenţiali Sălăgean şi Ruscheweyh. Sunt deduse câteva rezultate noi pentru aceste clase de funcţii analitice. Proprietăţile imaginilor acestor clase de funcţii prin operatorul integral generalizat Bernardi-Libera-Livingston este deasemenea studiat.

Capitolul 4 se concentrează pe tehnica subordonărilor diferenţiale. Primele două capitole se ocupă cu teoria acestei metode, introdusă de P. T. Mocanu şi S. S. Miller, urmat de secţiunea trei, care prezintă câteva aplicaţii al acestei metode. În această secţiune, folosind metoda subordonărilor diferenţiale, de exemplu este arătat că $S^{**} \subset S^*$ şi $S^{***} \subset \mathcal{K}$, unde S^* şi $\mathcal{K}$ notează clasa funcţiilor stelate şi convexe. În afară de asta, de exemplu este arătat că dacă $f, g \in S^*$, atunci $f \circ g$ este stelată pe $\mathbb{U}(r_0)$, unde $r_0 = \sup\{r \in (0,1] \mid g(\mathbb{U}(r)) \subset \mathbb{U}\}$.

În **Capitolul 5** cu ajutorul operatorului q-diferenţial şi cu ajutorul operatorilor integrali Noor-Sălăgean şi Sălăgean sunt introduse clasele de funcţii $UCC_q(\gamma)$, $C_{NS}(\alpha)$ şi $Q_1(m, \lambda, A, B)$. Câteva proprietăţi geometrice ale acestor clase sunt deasemenea investigate. Contribuţia proprie a autoarei în acest capitol pot fi găsite în lucrările [33], [34] şi [37].

Capitolul 6 este dedicat prezentării a câtorva condiţii necesare referitoare la funcţiile Mittag-Leffler. Prima secţiune se ocupă cu prezentarea funcţiilor Mittag-Leffler şi al funcţiilor Mittag-Leffler generalizate. După aceea sunt prezentate câteva condiţii suficiente, astfel încât funcţia Mittag-Leffler generalizată să aparţine claselor S^*, $\mathcal{K}$, S_p, $\mathcal{UCV}$, $k - S_p(\gamma)$, $k - \mathcal{UCV}(\gamma)$, $k - S_p(\lambda, \gamma)$ şi $k - \mathcal{UCV}(\lambda, \gamma)$, unde $k \geq 0$ şi $\gamma, \lambda \in [0, 1)$.

Capitolul 7 este împărţit în trei subcapitole şi sunt date câteva rezultate în legătură cu operatori integrali. De exemplu, în Teorema 7.1.1 este dată o condiţie de γ - stelaritate pentru operatorul integral $F(z) = \int\limits_0^z f(t)dt$, unde $z \in \mathbb{U}$. În următoarele două subcapitole sunt studiate proprietăţile imaginilor claselor $UCC_q(g, \gamma)$, $C_{NS}(\alpha)$, S^{**}, S^{***} şi TS^{***} prin operatorul integral Bernardi respectiv prin operatorul integral generalizat Bernardi-Libera-Livingston. Teorema 7.2.1, Teorema 7.2.2, Teorema 7.3.1, Teorema 7.3.2 şi Teorema 7.3.3 justifică proprietatea de conservare al operatorului integral Bernardi şi al operatorului integral generalizat Bernardi-Libera-Livingston, definit pe clasele de funcţii mai sus menţionate.

Capitolul 8 tratează câteva probleme de rază pentru două polinoame ortogonale. În prima secţiune sunt reamintite câtve proprietăţi bine cunoscute al polinomului generalizat Laguerre. Apoi, în următoarea secţiune este determinat raza de stelaritate şi de convexitate de ordinul β şi raza de uniform convexitate al polinomului normalizat Laguerre, unde $0 \leq \beta < 1$. Iar în final, în Exemplu 8.2.1 este calculată raza de convexitate al polinomului Laguerre de gradul doi. În secţiunea trei este prezentat polinomul Legendre. Câteva rezultate referitoare la polinoamele Legendre sunt deasemenea prezentate, urmat de ultima secţiune, în care sunt determinate raza de stelaritate de ordinul β, raza de convexitate de ordinul β şi raza de uniform convexitate pentru polinoamele Legendre normalizate de gradul impar, unde $0 \leq \beta < 1$. Rezultatele prezentate în această secţiune pot fi găsite în [24].

Rezultatele originale prezentate în această teză, au fost obţinute în următoarele articole:

1. **O. Engel**, Á.O. Páll-Szabó, P.A. Kupán, *About the radius of convexity of some analytic functions*, Creat. Math. and Inf., 24(2), 155–161, 2015.

2. **O. Engel**, R. Szász, *On a subclass of convex functions*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 59(2), 137–146, 2016.

3. **O. Engel**, *On the composition of two starlike functions*, Acta Univ. Apulensis, 48, 47–53, 2016.

4. **O. Engel**, *On a class of analytic functions defined by the Sălăgean integral operator*, An. Univ. Oradea fasc. Mat., 24(2), 9–14, 2017.

5. **O. Engel**, C. Naicu, *About a generalized class of close-to-convex functions defined by the q-difference operator*, Scient. Bull. of the "Petru Maior" Univ. of Târgu Mureş, 13(1), 30–34, 2016.

6. **O. Engel**, Y.L. Chung, *About a class of analytic functions defined by Noor-Sălăgean integral operator*, J. Math. and Appl., 39, 59–67, 2016.

7. **O. Engel**, Á.O. Páll-Szabó, *The radius of convexity of particular functions and applications to the study of a second order differential subordination*, J. Contemp. Math. Anal., 52(3), 111–120, 2017.

8. Á.O. Páll-Szabó, **O. Engel**, E. Szatmári, *Certain class of analytic functions with varying arguments defined by the convolution of Sălăgean and Ruscheweyh derivative*, Acta Univ. Apulensis, 51, 61–74, 2017.

9. Á.O. Páll-Szabó, **O. Engel**, *Properties of certain class of analytic functions with varying arguments defined by Ruscheweyh derivative*, Acta Univ. Sapientiae, 7(2), 278–286, 2015.

10. **O. Engel**, A.R. Juma, *The sharp version of a strongly starlikeness condition*, Acta Univ. Sapientiae, accepted paper.

11. **O. Engel**, G. Murugusundaramoorthy, R. Szász, *The radius of starlikeness, convexity and uniform convexity of the normalized Laguerre polynomials*, submitted paper.

12. **O. Engel**, Y.L. Chung, *Certain properties of the generalized Mittag-Leffler function*, submitted paper.

13. **O. Engel**, Á.O. Páll-Szabó, *Preserving properties of the generalized Bernardi-Libera-Livingston integral operator defined on some subclasses of starlike functions*, Konuralp J. Math., 5(2), 207–215, 2017.

14. S. Bulut, **O. Engel**, *The radius of starlikeness, convexity and uniform convexity of the Legendre polynomials of odd degree*, submitted paper.

O parte din rezultatele originale au fost prezentate la următoarele conferinţe internaţionale:

1. 5th International Conference on Mathematics and Informatics, September 2-4, 2015, Târgu-Mureş.

2. International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics (ICTAMI 2015), September 17-20, 2015, Alba Iulia.

3. International Conference On Sciences, May 13-14, 2016, Oradea.

4. The 15th International Conference On Applied Mathematics and Computer Science, July 5-7, 2016, Cluj-Napoca.

5. 6th Internation Conference on Mathematics and informatics, September 7-9, 2017, Târgu-Mureş.

Capitolul 2

Funcţii univalente în planul complex

2.1 Notaţii şi definiţii de bază

Fie $\mathbb{U}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ discul centrat în zero în planul complex $\mathbb{C}$ şi notăm cu

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

discul unitate.
Se notează cu $\mathcal{H}(\mathbb{U}(r))$ mulţimea tuturor funcţiilor olomorfe într-un domeniu $\mathbb{U}(r)$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a \in \mathbb{C}$ considerăm următoarele clase de funcţii

$$\mathcal{H}[a, n] = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{U}) : f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + ...\}$$

şi

$$\mathcal{A}_n = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{U}) : f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + ...\}.$$

Menţionăm că $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$.

Funcţiile univalente au un rol important în teoria geometrică a funcţiilor. O funcţie olomorfă pe un interval deschis al planului complex se numeşte univalentă dacă este injectivă. Se notează cu

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{A} : f \text{ este univalentă în } \mathbb{U}\}$$

clasa funcţiilor univalente.

În [91] este introdusă clasa $T \subset \mathcal{S}$, care conţine funcţii de forma

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \ \ a_n \geq 0, z \in \mathbb{U}. \tag{2.1}$$

O funcţie $f \in T$ se numeşte funcţie cu coeficienţi negativi.
Fie $f, g \in \mathcal{A}$ unde

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{2.2}$$

şi

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n. \tag{2.3}$$

Convoluţia sau produsul Hadamard al funcţiilor f şi g este dată de

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

În [78] Ruscheweyh a definit derivata $D^\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ prin

$$D^\gamma f(z) = \frac{z}{(1-z)^{\gamma+1}} * f(z),$$

unde $\gamma > -1$. În cazul particular $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$

$$D^m f(z) = \frac{z(z^{m-1} f(z))^{(m)}}{m!}. \tag{2.4}$$

Este uşor de observat că

$$D^0 f(z) = f(z),$$

$$D^1 f(z) = z f'(z)$$

şi

$$D^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \delta(m, n) a_n z^n,$$

unde $\delta(m, n) = C_{m+n-1}^{m}$.

În [82] Sălăgean a definit operatorul diferenţial $\mathcal{D}^m$. Pentru un numă întreg pozitiv m operatorul $\mathcal{D}^m : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este dată de

$$\mathcal{D}^0 f(z) = f(z),$$

$$\mathcal{D}^1 f(z) = \mathcal{D} f(z) = z f'(z)$$

şi

$$\mathcal{D}^m f(z) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{m-1} f(z)).$$

Se poate observa uşor că pentru $f \in \mathcal{A}$ şi de forma (2.2)

$$\mathcal{D}^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^m a_n z^n.$$

Fie $m \in \mathbb{N}_0$. Notăm cu $\mathcal{D}D^m$ produsul Hadamard (convoluţia) al operatorilor diferenţiali Sălăgean $\mathcal{D}^m$ şi Ruscheweyh D^m,
$\mathcal{D}D^m : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$$\mathcal{D}D^m f(z) = \mathcal{D}^m \left(\frac{z}{1-z} \right) * D^m f(z), \ z \in \mathbb{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, atunci

$$\mathcal{D}D^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} C_{m+n-1}^m n^m a_n z^n. \tag{2.5}$$

Pentru o funcţie $f \in \mathcal{A}$, $\lambda \geq 0$ şi $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, operatorul diferenţial Al-Oboudi $\mathfrak{D}_\lambda^m$ este dată de [3]

$$\mathfrak{D}^0 f(z) = f(z),$$

$$\mathfrak{D}_\lambda^1 f(z) = (1-\lambda) f(z) + \lambda z f'(z) = \mathfrak{D}_\lambda f(z),$$

$$\mathfrak{D}_\lambda^m f(z) = \mathfrak{D}_\lambda(\mathfrak{D}_\lambda^{m-1} f(z)), \ z \in \mathbb{U}.$$

Dacă funcţia f are forma (2.2) atunci avem

$$\mathfrak{D}_\lambda^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [1 + (n-1)\lambda]^m a_n z^n.$$

Pentru $\lambda = 1$ operatorul diferenţial $\mathfrak{D}_\lambda^m$ se reduce la operatorul diferenţial Sălăgean.

Pentru $f \in \mathcal{A}$ şi $0 < q < 1$, derivata q al funcţiei f este dată de

$$D_q f(z) = \frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z}, \tag{2.6}$$

unde $z \neq 0$ şi $D_q f(0) = f'(0)$.

Din relaţia (2.6) se poate deduce că

$$D_q f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-q^n}{1-q} a_n z^{n-1},$$

unde $z \neq 0$.

Pentru $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$, $f(0) = 0$ şi $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, operatorul integral Sălăgean I_S^n este definit după cum urmează [82]:

(i) $I_S^0 f(z) = f(z)$,

(ii) $I_S^1 f(z) = If(z) = \int\limits_0^z f(t)t^{-1}dt$,

(iii) $I_S^n f(z) = I_S(I_S^{n-1} f(z))$.

Dacă f are forma (2.1), atunci

$$I_S^n f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j}{j^n} z^j, \tag{2.7}$$

unde $n \in \mathbb{N}_0$.

În [64] Noor a definit operatorul integral $I_N^n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ astfel cum urmează

$$I_N^n f(z) = \frac{n+1}{z^n} \int\limits_0^z t^{n-1} I_N^n(f(t))dt, \tag{2.8}$$

unde $n \in \mathbb{N}_0$.

Se poate observa că dacă f are forma (2.1), atunci

$$I_N^n f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j}{C(n,j)} z^j, \tag{2.9}$$

unde $C(n,j) = \dfrac{(n+j-1)!}{n!(j-1)!}$.

Dacă $f(z) = z - \sum\limits_{j=2}^{\infty} a_j z^j$, $a_j \geq 0$, cu ajutorul operatorilor integrali Noor şi Sălăgean, definim un operator integral nou astfel cum urmează [34]:

$$I_{NS}^n f(z) = I_N^n f(z) * I_S^n f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j^2}{j^n C(n,j)} z^j, \tag{2.10}$$

unde $C(n,j) = \dfrac{(n+j-1)!}{n!(j-1)!}$ şi $n \in \mathbb{N}_0$.

2.2 Subordonare. Clasa Carathéodory

Definiţia 2.2.1. *[58, 61] Fie f şi g funcţii analitice în $\mathbb{U}$. Spunem că funcţia f este subordonată funcţiei g, dacă există o funcţie $w \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$, cu $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$, pentru $z \in \mathbb{U}$, astfel încât $f(z) = g[w(z)]$, pentru orice $z \in \mathbb{U}$.*

Se notează cu $\prec$ relaţia de subordonare.

Relaţia de subordonare are următoarele proprietăţi [61]. Pentru $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ avem:

1) Dacă $f \prec g$, atunci $f(0) = g(0)$ şi $f(\mathbb{U}) \subseteq g(\mathbb{U})$.

2) Dacă $f \prec g$, atunci $f(\overline{\mathbb{U}(r)}) \subseteq g(\overline{\mathbb{U}(r)})$, $r < 1$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $f(z) = g(\lambda z)$, $|\lambda| = 1$.

3) Dacă $f \prec g$, atunci $\max\{|f(z)| : |z| \leq r\} \leq \{\max |g(z)| : |z| \leq r\}$, $r < 1$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $f(z) = g(\lambda z)$, $|\lambda| = 1$.

4) Dacă $f \prec g$, atunci $|f'(0)| \leq |g'(0)|$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $f(z) = g(\lambda z)$, $|\lambda| = 1$.

5) Dacă g este univalentă, $f(0) = g(0)$ şi $f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U})$, atunci $f \prec g$.

Clasa funcţiilor Carathéodory:

$$\mathcal{P} = \left\{ p \in \mathcal{H}(\mathbb{U}) : p(z) \prec \frac{1+z}{1-z} \right\}.$$

Teorema 2.2.1. ***(Carathéodory)****[61] Dacă* $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ... + p_n z^n + ...$ *aparţine clasei* $\mathcal{P}$*, atunci* $|p_n| \leq 2$*, unde* $n \geq 1$*. Egalitatea are loc pentru funcţia* $p(z) = \dfrac{1+\lambda z}{1-\lambda z}$, $|\lambda| = 1$.

2.3 Clase speciale de funcţii univalente

2.3.1 Funcţii stelate

Definiţia 2.3.1.1. *[58, 61] Fie* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ *şi* $f(0) = 0$*. Spunem că* f *este stelată în* $\mathbb{U}$ *în raport cu originea, dacă funcţia* f *este univalentă în* $\mathbb{U}$ *şi* $f(\mathbb{U})$ *este un domeniu stelat în raport cu originea.*

Clasa funcţiilor stelate se notează cu S^*.
Caracterizarea analitică al funcţiilor stelate este dată în următoarea teoremă.

Teorema 2.3.1.1. *[58, 61] Fie* $f \in \mathcal{A}$*. Funcţia* f *este stelată dacă şi numai dacă*

$$\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \ z \in \mathbb{U}.$$

Definiţia 2.3.1.2. *[58, 61] Fie* $0 \leq \gamma < 1$*. Spunem că* $f \in \mathcal{A}$ *este stelată de ordinul* γ*, dacă şi numai dacă*

$$\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > \gamma, \ z \in \mathbb{U}.$$

Clasa funcţiilor stelate de ordinul γ se notează cu $S^*(\gamma)$.

Lema 2.3.1. *[38] Fie $\gamma \in [0,1)$, $T \in \mathbb{R}$ şi fie funcţia h_T definită de seria de puteri*

$$h_T(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\gamma+iT}{1-\gamma+iT} z^n.$$

Funcţia $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ este stelată de ordinul γ în $\mathbb{U}$ dacă şi numai dacă

$$\frac{f(z)}{z} * \frac{h_T(z)}{z} \neq 0, \text{ pentru orice } z \in \mathbb{U} \text{ şi pentru orice } T \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Deoarece $\Re \frac{zf'(z)}{f(z)}\Big|_{z=0} = 1 > \gamma > 0$, rezultă că condiţia

$$\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > \gamma, \ z \in \mathbb{U}$$

este echivalentă cu

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} - \gamma \neq -iT, \quad \text{pentru orice } \ z \in \mathbb{U} \text{ şi } \ T \in \mathbb{R}.$$

Aceasta poate fi rescrisă ca

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n z^{n-1} - (\gamma - iT)\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}\right) \neq 0,$$

iar de aici obţinem că

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{n-\gamma+iT}{1-\gamma+iT} z^{n-1} \neq 0, \quad \text{pentru orice } z \in \mathbb{U} \text{ şi } T \in \mathbb{R}.$$

Această relaţie este echivalentă cu

$$\frac{f(z)}{z} * \frac{h_T(z)}{z} \neq 0, \text{ pentru orice } z \in \mathbb{U} \text{ şi pentru orice } T \in \mathbb{R}.$$

□

2.3.2 Funcţii tare stelate

Definiţia 2.3.2.1. *Fie $0 \leq \gamma < 1$. Spunem că $f \in \mathcal{A}$ este tare stelată de ordinul γ dacă şi numai dacă*

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \gamma \frac{\pi}{2}, \ z \in \mathbb{U}.$$

Clasa funcţiilor tare stelate de ordinul γ notăm cu $SS^*(\gamma)$.
În [88] H. Silverman a studiat clasa $\mathcal{G}_b$, unde

$$\mathcal{G}_b = \left\{ f \in \mathcal{A} : \left| \frac{1 + \dfrac{zf''(z)}{f'(z)}}{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}} - 1 \right| < b, \quad z \in \mathbb{U} \right\},$$

pentru b număr pozitiv.

Teorema 2.3.2.1. *[66] Dacă funcţia f aparţine clasei $\mathcal{G}_{b(\beta)}$ cu*

$$b(\beta) = \frac{\beta}{\sqrt{(1-\beta)^{1-\beta}(1+\beta)^{1+\beta}}},$$

unde $0 < \beta \leq 1$, atunci $f \in SS^*(\beta)$.

Pentru următoarele rezultate, vom avea nevoie de următoarea lemă.

Lema 2.3.2.1. *[36] Dacă $f \in \mathcal{A}$, $b \in [0, 1)$ şi $p(z) = \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$, atunci inegalitatea*

$$\left| \frac{zp'(z)}{p^2(z)} \right| < b, \quad z \in \mathbb{U}, \tag{2.11}$$

implică

$$p(z) \prec \frac{1}{1 - bz}.$$

Rezultatul este exact.

În următoarea teoremă este dată forma exactă al Teoremei 2.3.2.1.

Teorema 2.3.2.2. *[36] Dacă $\alpha \in (0, 1]$ şi $f \in \mathcal{G}_{b(\alpha)}$, unde $b(\alpha) = \sin\left(\alpha\dfrac{\pi}{2}\right)$, atunci $f \in SS^*(\alpha)$. Rezultatul este exact.*

Punând $\alpha = 1$ în Teorema 2.3.2.2, obţinem următoarea condiţie de stelaritate.

Corolarul 2.3.2.1. *[36] Dacă $f \in \mathcal{A}$ şi*

$$\left| \frac{1 + \dfrac{zf''(z)}{f'(z)}}{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}} - 1 \right| < 1, \quad z \in \mathbb{U},$$

atunci $f \in S^*$.

Pentru $\alpha = \dfrac{1}{2}$, obţinem următoarea condiţie.

Corolarul 2.3.2.2. *[36] Dacă* $f \in \mathcal{A}$ *şi*

$$\left| \frac{1 + \dfrac{zf''(z)}{f'(z)}}{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}} - 1 \right| < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z \in \mathbb{U},$$

atunci $f \in SS^*\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2.3.3 Funcţii Janowski stelate

Clasa funcţiilor Janowski stelate este definit în [49] şi se notează cu $S^*(A, B)$. Fie $-1 \leq B < A \leq 1$. Clasa $S^*(A, B)$ este dată de egalitatea

$$S^*(A, B) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz},\ z \in \mathbb{U} \right\}.$$

Teorema 2.3.3.1. *[93] Fie* $-1 \leq B < A \leq 1$ *şi* $b(1 + |A|)^2 \leq |A - B|$. *Dacă* $f \in \mathcal{G}_b$, *atunci* $f \in S^*(A, B)$.

Teorema 2.3.3.2. *[36] Dacă* $f \in \mathcal{G}_b$ *şi* $b(1 + A - B + |B|) < A - B$, *atunci* $f \in S^*(A, B)$.

Dacă $0 \leq B < A \leq 1$, atunci obţinem corolarul următor.

Corolarul 2.3.3.1. *[36] Fie* $0 \leq B < A \leq 1$ *şi* $b \in (0, +\infty)$ *astfel încât* $b(1 + A) \leq 1 + B$. *Dacă* $f \in \mathcal{G}_b$, *atunci* $f \in S^*(A, B)$.

2.3.4 Clasa S^{**}

Definiţia 2.3.4.1. *[32] Fie* $f \in \mathcal{A}$. *Spunem că* $f \in S^{**}$ *dacă şi numai dacă*

$$\left| 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| < \sqrt{\frac{5}{4}},\ z \in \mathbb{U}.$$

Clasa S^{**} este nevidă. Se poate observa uşor că, dacă $f(z) = z - \dfrac{z^2}{100}$, atunci

$$\left| 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| = \left| \frac{100 - 4z}{100 - 2z} \right| \leq \frac{104}{98} < \sqrt{\frac{5}{4}},\ z \in \mathbb{U}$$

deci $f \in S^{**}$.

Observaţia 2.3.4.1. *[32] Clasa* S^{**} *are proprietatea că, compoziţia oricărei două funcţii din* S^{**} *este stelată, pe un disc unde compoziţia este definită.*

2.3.5 Clasa S^{***}

Definiţia 2.3.5.1. *[31] Fie $f \in \mathcal{A}$. Spunem că $f \in S^{***}$ dacă şi numai dacă*

$$\left|1 - \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < \sqrt{\frac{5}{4}},\ z \in \mathbb{U}.$$

Observaţia 2.3.5.1. *[31] Clasa S^{***} are proprietatea că compoziţia oricărei două funcţii din S^{***} este stelată pe un disc unde compoziţia este definită.*

În continuare este definit clasa S^{***} pentru funcţii cu coeficienţi negativi.

Definiţia 2.3.5.2. *[40] Funcţia $f \in T$ aparţine clasei $TS^{***} = S^{***} \cap T$ dacă*

$$\left|1 - \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < \sqrt{\frac{5}{4}},\ z \in \mathbb{U}.$$

Mai jos este dată teorema de delimitare a coeficienţilor pentru clasa TS^{***}.

Teorema 2.3.5.1. *[40] Funcţia $f \in T$ aparţine clasei TS^{***}, dacă şi numai dacă*

$$\sum_{j=2}^{\infty} j\left(j - 2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) a_j < \frac{\sqrt{5}}{2} - 1. \tag{2.12}$$

2.3.6 Funcţii stelate parabolic

În [76] Rønning a definit clasa funcţiilor stelate parabolic în felul următor:

$$S_p = \{F \in S^* | F(z) = zf'(z), f \in \mathcal{UCV}\}.$$

Definiţia 2.3.6.1. *[9] Clasa S_p al funcţiilor stelate parabolic conţine funcţii $f \in \mathcal{A}$, care satisfac*

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)} > \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right|,\ z \in \mathbb{U}.$$

Pentru $-1 < \gamma \leq 1$ şi $k \geq 0$ spunem că funcţia $f \in \mathcal{A}$ aparţine clasei funcţiilor stelate k-parabolic de ordinul γ, notată cu $k - S_p(\gamma)$, dacă

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - \gamma\right) > k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right|,\ z \in \mathbb{U}.$$

În [62] autorii au generalizat clasa funcţiilor stelate k-parabolic de ordinul γ, pentru $0 \leq \gamma < 1$.

Pentru $0 \leq \lambda < 1$, $0 \leq \gamma < 1$ şi $k \geq 0$ funcţia $f \in \mathcal{A}$ aparţine clasei $k - S_p(\lambda, \gamma)$, dacă

$$\Re\left\{\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z) + \lambda zf'(z)} - \gamma\right\} > k\left|\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z) + \lambda zf'(z)} - 1\right|,\ z \in \mathbb{U}. \tag{2.13}$$

Se poate observa uşor că, $k - S_p(0, \gamma) = k - S_p(\gamma)$, $k - S_p(0, 0) = k - S_p$, unde $0 \leq \gamma < 1$.

2.3.7 Funcţii convexe

Definiţia 2.3.7.1. *[58, 61] Funcţia $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ este convexă în $\mathbb{U}$, dacă f este univalentă în $\mathbb{U}$ şi $f(\mathbb{U})$ este un domeniu convex.*

Se notează cu $\mathcal{K}$ clasa funcţiilor convexe.
Caracterizarea analitică al funcţiilor convexe este dată în următoarea teoremă.

Teorema 2.3.7.1. *[58, 61] Fie $f \in \mathcal{A}$. Funcţia f este convexă, dacă şi numai dacă*

$$\Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right) > 0,\ \ z \in \mathbb{U}.$$

Definiţia 2.3.7.2. *[58, 61] Fie $0 \leq \gamma < 1$. Spunem că $f \in \mathcal{A}$ este convexă de ordinul γ, dacă şi numai dacă*

$$\Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right) > \gamma,\ \ z \in \mathbb{U}.$$

Clasa funcţiilor convexe de ordinul γ se notează cu $\mathcal{K}(\gamma)$.

2.3.8 Funcţii alfa - convexe

Clasa funcţiilor alfa - convexe a fost introdus de P. T. Mocanu în anul 1969, să creeze o relaţie între stelaritate şi convexitate.

Definiţia 2.3.8.1. *[58, 61] Fie $f \in \mathcal{A}$ şi α un număr real. Atunci funcţia f este alfa - convexă, dacă şi numai dacă*

$$\Re J(\alpha, f; z) > 0,$$

unde

$$J(\alpha, f; z) = (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right).$$

Se notează cu M_α clasa funcţiilor alfa - convexe.

2.3.9 Funcţii aproape convexe

Teorema 2.3.9.1. *[58, 61] Funcţia $f \in \mathcal{A}$ este aproape convexă în $\mathbb{U}$, dacă există o funcţie stelată $g \in S^*$, pentru care*

$$\Re\frac{zf'(z)}{g(z)} > 0,\ \ z \in \mathbb{U}.$$

Clasa funcţiilor aproape convexe este notată cu $\mathcal{C}$.

2.3.10 Funcţii uniform convexe

În [42], Goodman a definit clasa funcţiilor uniform convexe, notată cu $\mathcal{UCV}$, cum urmează:

Definiţia 2.3.10.1. *[42] O funcţie $f \in \mathcal{A}$ se numeşte uniform convexă în $\mathbb{U}$, dacă $f \in \mathcal{K}$ şi dacă pentru orice arc de cerc γ din $\mathbb{U}$, cu centrul ζ, tot din $\mathbb{U}$, arcul $f(\gamma)$ este convexă.*

După criteriul analitic pentru funcţii $f \in \mathcal{UCV}$ dată de Rønning [76], avem:
O funcţie $f \in \mathcal{A}$ este uniform convexă în $\mathbb{U}$, dacă şi numai dacă

$$\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|, \; z \in \mathbb{U}. \tag{2.14}$$

Clasa funcţiilor k-uniform convexe a fost introdus de Kanas şi Wisniowska [51], ca o generalizare al funcţiilor uniform convexe. Clasa funcţiilor k-uniform convexe este notată cu $k-\mathcal{UCV}$.
Pentru $-1 < \gamma \leq 1$ şi $k \geq 0$, spunem că funcţia $f \in \mathcal{A}$ aparţine clasei funcţiilor k - uniform convexe de ordinul γ, dacă

$$\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\gamma\right) > k\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|, \; z \in \mathbb{U}.$$

În [62] autorii au generalizat clasa funcţiilor k-uniform convexe de ordinul γ, pentru $0 \leq \gamma < 1$.
Pentru $0 \leq \lambda < 1$, $0 \leq \gamma < 1$ şi $k \geq 0$, funcţia $f \in \mathcal{A}$ aparţine clasei $k-\mathcal{UCV}(\lambda,\gamma)$ dacă

$$\Re\left\{\frac{f'(z)+zf''(z)}{f'(z)+\lambda zf''(z)}-\gamma\right\} > k\left|\frac{f'(z)+zf''(z)}{f'(z)+\lambda zf'(z)}-1\right|, \; z \in \mathbb{U}. \tag{2.15}$$

Se poate observa uşor că, $k-\mathcal{UCV}(0,\gamma) = k-\mathcal{UCV}(\gamma)$ şi $k-\mathcal{UCV}(0,0) = k-\mathcal{UCV}$, unde $0 \leq \gamma < 1$.

Capitolul 3

Rezultate noi pe funcţii analitice cu argument variabil

3.1 Rezultate preliminare

Următoarele definiţii şi teoreme preliminare sunt necesare pentru demonstrarea rezultatelor principale.
În [12], Attiya şi Aouf, cu ajutorul operatorului Ruscheweyh (2.4), au definit clasa $Q(m, \lambda, A, B)$ în felul următor:

Definiţia 3.1.1. *[12] Pentru* $\lambda > 1$, $-1 \leq A < B \leq 1$, $0 < B \leq 1$, $m \in \mathbb{N}_0$ *fie* $Q(m, \lambda, A, B)$ *subclasa funcţiilor* $\mathcal{A}$*, care conţine funcţii* f *de forma (2.2) astfel încât*

$$(1-\lambda)(D^m f(z))' + \lambda(D^{m+1} f(z))' \prec \frac{1+Az}{1+Bz}. \tag{3.1}$$

Definiţia 3.1.2. *[72] Pentru* $\lambda \geq 0$, $-1 \leq A < B \leq 1$, $0 < B \leq 1$, $m \in \mathbb{N}_0$ *fie* $P(m, \lambda, A, B)$ *subclasa funcţiilor* $\mathcal{A}$*, care conţine funcţii* f *de forma* (2.2) *astfel încât*

$$(1-\lambda)(\mathcal{D}D^m f(z))' + \lambda(\mathcal{D}D^{m+1} f(z))' \prec \frac{1+Az}{1+Bz}. \tag{3.2}$$

În 1981, H. Silverman a introdus clasa funcţiilor analitice cu argument variabil.

Definiţia 3.1.3. *[89] O funcţie* f *de forma (2.2) se spune că aparţine clasei* $V(\theta_n)$*, dacă* $f \in \mathcal{A}$ *şi* $arg(a_n) = \theta_n$*, pentru orice* $n \geq 2$*. Dacă mai mult, există un număr real* δ*, astfel încât* $\theta_n + (n-1)\delta \equiv \pi (mod\ 2\pi)$ *pentru orice* $n \geq 2$*, atunci se spune că* f *aparţine clasei* $V(\theta_n, \delta)$*. Reuniunea tuturor mulţimilor* $V(\theta_n, \delta)$*, în raport cu toate secvenţele posibile* $\{\theta_n\}$ *şi toate numere reale posibile* δ*, este notată cu* V*.*

Se notează cu $VQ(m, \lambda, A, B)$ subclasa lui V, în care aparţin funcţii $f \in Q(m, \lambda, A, B)$.
Se notează cu $VP(m, \lambda, A, B)$ subclasa lui V, în care aparţin funcţii $f \in P(m, \lambda, A, B)$.

Teorema 3.1.1. *[29]Fie funcţia f de forma (2.2), ce aparţine clasei V. Atunci $f \in VQ(m, \lambda, A, B)$, dacă şi numai dacă*

$$T(f) = \sum_{n=2}^{\infty} n\delta(m,n)C_n\,(1+B)\,|a_n| \leq (B-A)(m+1) \tag{3.3}$$

unde

$$\delta(m,n) = \binom{m+n-1}{m} \text{ şi } C_n = m+1+\lambda(n-1).$$

Funcţiile extremale sunt

$$f_n(z) = z + \frac{(B-A)(m+1)}{nC_n\delta(m,n)\,(1+B)} e^{i\theta_n} z^n, (n \geq 2).$$

Fie $I(z) = L_c f(z) = \dfrac{c+1}{z^c} \displaystyle\int_0^z f(t)t^{c-1}dt, c > -1$ operatorul integral generalizat Bernardi-Libera-Livingston.

Acum suntem capabili să enunţăm rezultatele noastre principale.

3.2 Funcţii analitice cu argument variabil definit de derivata Ruscheweyh

Fie $f, g \in \mathcal{A}$ două funcţii analitice de forma (2.2) şi (2.3). În acest subcapitol sunt studiate proprietăţile imaginei unei clase de funcţii analitice cu argument variabil, definit de operatorul diferenţial Ruscheweyh (2.4), prin operatorul integral generalizat Bernardi-Libera-Livingston.

Teorema 3.2.1. *[70] Dacă $f \in VQ(m, \lambda, 2\alpha - 1, B)$, atunci $L_c f \in VQ(m, \lambda, 2\beta - 1, B)$, unde*

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{B+1+2\alpha(c+1)}{2(c+2)} \geq \alpha.$$

Rezultatul este exact.

Teorema 3.2.2. *[70] Dacă $f \in VQ(m, \lambda, A, B)$, atunci $L_c f \in VQ(m, \lambda, A^*, B)$, unde*

$$A^* = \frac{B + A(c+1)}{c+2} > A.$$

Rezultatul este exact.

Teorema 3.2.3. *[70] Dacă $f \in VQ(m, \lambda, A, B)$, atunci $L_c f \in VQ(m, \lambda, A, B^*)$, unde*

$$B^* = \frac{A\,(1+B)\,(c+2) + (B-A)\,(c+1)}{(1+B)\,(c+2) - (B-A)\,(c+1)} < B.$$

Rezultatul este exact.

3.3 Funcţii analitice cu argument variabil definit de convoluţia derivatelor Sălăgean şi Ruscheweyh

În acest subcapitol sunt date rezultate pentru câtvea clase de funcţii analitice nou introduse cu argument variabil, definite de convoluţia operatorilor diferenţiali Sălăgean şi Ruscheweyh (2.5) şi sunt studiate proprietăţile imaginilor acestor clase de funcţii prin operatorul integral generalizat Bernardi-Libera-Livingston.

3.3.1 Estimări ale coeficienţilor

Teorema 3.3.1.1. *[72] Fie funcţia f de forma (2.2) din clasa V. Atunci $f \in VP(m, \lambda, A, B)$, dacă şi numai dacă*

$$T(f) = \sum_{n=2}^{\infty} n^{m+1} C_n \,(1 + B)\, |a_n| \leq B - A, \tag{3.4}$$

unde

$$C_n = [m + 1 + \lambda\,(n - 1)\,(m + n + 1)]\,\frac{(m + n - 1)!}{(m + 1)!\,(n - 1)!}.$$

Funcţiile extremale sunt:

$$f(z) = z + \frac{B - A}{n^{m+1} C_n \,(1 + B)} e^{i\theta_n} z^n, (n \geq 2).$$

Corolarul 3.3.1.1. *[72] Fie funcţia f de forma (2.2) din clasa $VP(m, \lambda, A, B)$. Atunci*

$$|a_n| \leq \frac{B - A}{n^{m+1} C_n \,(1 + B)}, (n \geq 2).$$

Condiţia (3.4) este exactă pentru funcţiile

$$f(z) = z + \frac{B - A}{n^{m+1} C_n \,(1 + B)} e^{i\theta_n} z^n, (n \geq 2).$$

3.3.2 Teoreme de deformare

Teorema 3.3.2.1. *[72] Fie funcţia f de forma (2.2) din clasa $VP(m, \lambda, A, B)$. Atunci*

$$|z| - \frac{B - A}{2^{m+1} C_2 \,(1 + B)} |z|^2 \leq |f(z)| \leq |z| + \frac{B - A}{2^{m+1} C_2 \,(1 + B)} |z|^2. \tag{3.5}$$

Rezultatul este exact.

Corolarul 3.3.2.1. *[72]Fie funcţia f de forma (2.2) din clasa $VP(m, \lambda, A, B)$. Atunci $f \in \mathbb{U}(0, r_1)$, unde $r_1 = 1 + \dfrac{B - A}{2^{m+1} C_2 \,(1 + B)}$.*

Teorema 3.3.2.2. *[72] Fie funcţia f de forma* (2.2) *din clasa $VP(m,\lambda,A,B)$. Atunci*

$$1-\frac{B-A}{2^m C_2\,(1+B)}\,|z|\le|f'(z)|\le 1+\frac{B-A}{2^m C_2\,(1+B)}\,|z|\,. \tag{3.6}$$

Rezultatul este exact.

Corolarul 3.3.2.2. *[72] Fie funcţia f de forma* (2.2) *din clasa $VP(m,\lambda,A,B)$. Atunci $f'\in\mathbb{U}(0,r_2)$, unde $r_2=1+\dfrac{B-A}{2^m C_2\,(1+B)}$.*

3.3.3 Puncte extreme

Teorema 3.3.3.1. *[72] Fie funcţia f de forma* (2.2) *din clasa $VP(m,\lambda,A,B)$, cu $arg(a_n)=\theta_n$, unde $\theta_n\equiv\pi,\forall n\ge 2$. Definim*

$$f_1(z)=z$$

şi

$$f_n(z)=z-\frac{B-A}{n^{m+1}C_n\,(1+B)}z^n,(n\ge 2;z\in\mathbb{U}).$$

Atunci $f\in VP(m,\lambda,A,B)$, dacă şi numai dacă funcţia f poate fi exprimat de

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n f_n(z),\ \textit{unde}\ \mu_n\ge 0\ \textit{şi}\ \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n=1.$$

Combinând Teorema 3.3.3.1 cu teorema lui Silverman din [89], obţinem corolarul următor:

Corolarul 3.3.3.1. *Învelitoarea convexă şi închisă al clasei $VP(m,\lambda,A,B)$ este*

$$cl\ co\ VP(m,\lambda,A,B)=\left\{f|f\in\mathcal{A},\sum_{n=2}^{\infty}n^{m+1}C_n(1+B)|a_n|\le B-A\right\}.$$

Punctele de extrem al mulţimii $cl\ co\ VP(m,\lambda,A,B)$ sunt

$$E(cl\ co\ VP(m,\lambda,A,B))=\left\{z+\frac{B-A}{n^{m+1}C_n(1+B)}\xi z^n,|\xi|=1,n\ge 2\right\}.$$

Teorema 3.3.3.2. *[72] Fie*

$$I(z)=L_c f(z)=\frac{c+1}{z^c}\int_0^z f(t)t^{c-1}dt,\ c>-1.$$

Dacă $f\in VP(m,\lambda,2\alpha-1,B)$, atunci $I\in VP(m,\lambda,2\beta-1,B)$, unde

$$\beta=\beta(\alpha)=\frac{B+1+2\alpha(c+1)}{2(c+2)}\ge\alpha.$$

Rezultatul este exact.

Teorema 3.3.3.3. *[72] Dacă $f \in VP(m, \lambda, A, B)$, atunci $I \in VP(m, \lambda, A^*, B)$, unde*

$$A^* = \frac{B + A(c+1)}{c+2} > A.$$

Rezultatul este exact.

Teorema 3.3.3.4. *[72] Dacă $f \in VP(m, \lambda, A, B)$, atunci $I \in VP(m, \lambda, A, B^*)$, unde*

$$B^* = \frac{A(1+B)(c+2) + (B-A)(c+1)}{(1+B)(c+2) - (B-A)(c+1)} < B.$$

Rezultatul este exact.

Capitolul 4

Metoda subordonărilor diferenţiale

4.1 Definiţii de bază

Fie $\Omega, \Delta \subset \mathbb{C}$, $p \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ cu $p(0) = a$, $a \in \mathbb{C}$ şi fie $\psi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{U} \to \mathbb{C}$. Cu ajutorul metodei subordonărilor diferenţiale se studiează probleme de forma:

$$\{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) : z \in \mathbb{U}\} \subset \Omega \Rightarrow p(\mathbb{U}) \subset \Delta. \tag{4.1}$$

Definiţia 4.1.1. *[59] Fie $\psi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{U} \to \mathbb{C}$, $p \in \mathcal{H}[a, n]$ şi h univalentă în $\mathbb{U}$. Subordonarea diferenţială de forma*

$$\psi(p(z), zp'(z)) \prec h(z)$$

se numeşte subordonare diferenţială de ordinul întâi.

Definiţia 4.1.2. *[61] Fie $\psi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{U} \to \mathbb{C}$, $p \in \mathcal{H}[a, n]$ şi h univalentă în $\mathbb{U}$. Subordonarea diferenţială de forma*

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z)) \prec h(z) \tag{4.2}$$

se numeşte subordonare diferenţială de ordinul doi şi p se numeşte (a, n) soluţie a subordonării diferenţiale.

O subordonare diferenţială particulară este subordonarea diferenţială Briot-Bouquet.

Definiţia 4.1.3. *[58, 61] Fie h o funcţie univalentă în $\mathbb{U}$, cu $h(0) = a$, şi fie $p \in \mathcal{H}[a, n]$ care satisface*

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} \prec h(z), \tag{4.3}$$

unde $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ şi $\beta \neq 0$. Subordonarea diferenţială (4.3) se numeşte subordonarea diferenţială Briot-Bouquet.

4.2 Leme fundamentale

Definiţia 4.2.1. *[61] Fie $\mathcal{Q}$ clasa funcţiilor analitice q din $\mathbb{U}$, care au proprietatea că sunt analitice şi injective pe $\overline{\mathbb{U}}\backslash E(q)$, unde*

$$E(q) = \{\zeta \in \partial\mathbb{U} : \lim_{z \longrightarrow \zeta} q(z) = \infty\},$$

şi sunt astfel încât $q'(\zeta) \neq 0$ pentru $\zeta \in \partial\mathbb{U}\backslash E(q)$.

Lema 4.2.1. ***(S.S. Miller, P. T. Mocanu)****[60, 61] Fie $q \in \mathcal{Q}$, cu $q(0) = a$ şi fie $p(z) = a + a_n z^n + \ldots$ analitică în $\mathbb{U}$, cu $p(z) \not\equiv a$ şi $n \geq 1$. Dacă $p \not\prec q$, atunci există punctele $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{U}$, şi $\zeta_0 \in \partial\mathbb{U}\backslash E(q)$ şi un număr $m \geq n \geq 1$, pentru care $p(\mathbb{U}_{r_0}) \subset q(\mathbb{U})$ şi*

(i) $p(z_0) = q(\zeta_0)$

(ii) $z_0 p'(z_0) = m\zeta_0 q'(\zeta_0)$

(iii) $\Re \dfrac{z_0 p''(z_0)}{p'(z_0)} + 1 \geq m\Re\left[\dfrac{\zeta_0 q''(\zeta_0)}{q'(\zeta_0)} + 1\right]$.

Următoarele două leme sunt cazuri particulare al lemei Lema 4.2.1. În primul caz $q(\mathbb{U})$ este un disc iar în al doilea caz $q(\mathbb{U})$ este un semiplan.

Lema 4.2.2. *[58, 61] Fie $p \in \mathcal{H}[a, n]$, cu $p(z) \not\equiv a$ şi $n \geq 1$. Dacă $z_0 \in \mathbb{U}$ şi*

$$|p(z_0)| = \max\{|p(z)| : |z| \leq |z_0|\},$$

atunci

(i) $\dfrac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \geq n\dfrac{|p(z_0) - a|^2}{|p(z_0)|^2 - |a|^2}$ *şi*

(ii) $\Re \dfrac{z_0 p''(z_0)}{p'(z_0)} + 1 \geq n\dfrac{|p(z_0) - a|^2}{|p(z_0)|^2 - |a|^2}$.

Lema 4.2.3. *[58, 61] Fie $p \in \mathcal{H}[a, n]$, cu $p(z) \not\equiv a$ şi $n \geq 1$. Dacă $z_0 \in \mathbb{U}$ şi*

$$\Re\, p(z_0) = \min\{\Re\, p(z) : |z| \leq |z_0|\},$$

atunci

(i) $z_0 p'(z_0) \leq -\dfrac{n}{2}\dfrac{|p(z_0) - a|^2}{\Re[a - p(z_0)]}$ *şi*

(ii) $\Re[z_0^2 p''(z_0)] + z_0 p'(z_0) \leq 0$.

Lema 4.2.4. *[58](Hallenbeck and Ruscheweyh) Fie h o funcţie convexă cu $h(0) \equiv a$ şi fie $\gamma \in \mathbb{C}^*$ un număr complex cu $\Re\, \gamma \geq 0$. Dacă $p \in \mathcal{H}[\mathbb{U}]$ cu $p(0) = a$ şi*

$$p(z) + \frac{1}{\gamma} z p'(z) \prec h(z)$$

atunci

$$p(z) \prec g(z) \prec h(z)$$

unde

$$g(z) = \frac{\gamma}{nz^{\frac{\gamma}{n}}} \int_0^z h(t)t^{\frac{\gamma}{n}-1}dt.$$

Funcţia g este convexă şi este cea mai bună dominantă a subordonării.

Lema 4.2.5. *[59](Miller and Mocanu) Fie g o funcţie convexă în $\mathbb{U}$ şi fie*

$$h(z) = g(z) + n\alpha z g'(z),$$

unde $\alpha > 0$ şi n este un întreg pozitiv. Dacă $p(z) = g(0) + p_n z^n + ...$ este olomorfă în $\mathbb{U}$ şi

$$p(z) + \alpha z p'(z) \prec h(z),$$

atunci

$$p(z) \prec g(z).$$

Rezultatul este exact.

4.3 Aplicaţii

Metoda subordonărilor diferenţiale are un rol important în studierea funcţiilor diferenţiabile în sens complex. Folosind această metodă, proprietăţile geometrice al funcţiilor olomorfe pot fi stabilite într-un mod mult mai simplu.

Teorema 4.3.1. *[32] Avem $S^{**} \subset S^*$.*

Teorema 4.3.2. *[32] Dacă $f \in S^{**}$, atunci $\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\pi}{4}$, $z \in \mathbb{U}$.*

Teorema 4.3.3. *[32] Dacă $f \in S^{**}$, atunci $|\arg f'(z)| < \frac{\pi}{4}$, $z \in \mathbb{U}$.*

Cu ajutorul teoremelor Teorema 4.3.2 şi Teorema 4.3.3, poate fi demonstrat următorul rezultat referitor la compoziţia funcţiilor.

Teorema 4.3.4. *[32] Dacă $f, g \in S^{**}$ şi $r_0 = \sup\{r \in (0,1] \big| g\big(\mathbb{U}(r)\big) \subset \mathbb{U}\}$, atunci $f \circ g$ este stelată în $\mathbb{U}(r_0)$.*

Teorema 4.3.5. *[31] Dacă $f \in \mathcal{A}$ şi*

$$\left|1 - \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < \sqrt{7}, \ z \in \mathbb{U},$$

atunci $f \in S^*$.

Observaţia 4.3.1. *[31] Rezultatul din Teorema 4.3.5 arată că incluziunea* $S^{***} \subset S^*$ *are loc.*

Folosind metoda subordonărilor diferenţiale, se poate arăta uşor că clasa S^{***} este subclasa funcţiilor convexe.

Teorema 4.3.6. *[31] Avem* $S^{***} \subset \mathcal{K}$.

Teorema 4.3.7. *[31] Dacă* $f \in S^{***}$, *atunci* $\left|\arg \dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \dfrac{\pi}{4}$, $z \in \mathbb{U}$.

Teorema 4.3.8. *[31] Dacă* $f \in S^{***}$, *atunci* $|\arg f'(z)| < \dfrac{\pi}{4}$, $z \in \mathbb{U}$.

În următoarele este demonstrat rezultatul referitor la compoziţia funcţiilor.

Teorema 4.3.9. *[31] Dacă* $f, g \in S^{***}$ *şi* $r_0 = \sup\{r \in (0,1] \big| f(\mathbb{U}(r)) \subset \mathbb{U}\}$, *atunci* $f \circ g$ *este stelată în* $\mathbb{U}(r_0)$.

Capitolul 5

Clase noi de funcţii analitice definite de operatori diferenţiali şi integrali

5.1 Clasa $UCC_q(\gamma)$

În acest subcapitol sunt date câteva generalizări a clasei funcţiilor aproape convexe în cazul funcţiilor cu coeficienţi negativi, folosind operatorul diferenţial q, definit de (2.6).

Definiţia 5.1.1. *[33] O funcţie $f \in T$, se spune că aparţine clasei generalizate a funcţiilor aproape convexe de ordinul γ, notată cu $UCC_q(\gamma)$, dacă*

$$\Re \frac{zD_q f(z)}{g(z)} \geq \gamma,$$

unde $0 \leq \gamma < 1$ şi $g \in T^*$.

Observaţia 5.1.1. *[33] Dacă $\gamma = 0$, atunci $UCC_q(0) = UCC_q$.*

Definiţia 5.1.2. *[33] O funcţie $f \in T$, se spune că aparţine clasei generalizate a funcţiilor aproape convexe de ordinul γ, relativă la o funcţie fixată $g \in T^*$, notată cu $UCC_q(g, \gamma)$, dacă*

$$\Re \frac{zD_q f(z)}{g(z)} \geq \gamma,$$

unde $0 \leq \gamma < 1$.

Teorema 5.1.1. *[33] Fie $f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j, g(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j$, $g \in T^*$, unde $a_j, b_j \geq 0$, $j \in \{2, 3, ..\}$ şi $\gamma \in [0, 1)$.*

Dacă $f \in UCC_q(g,\gamma)$, *atunci*

$$\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1-q^j}{1-q}a_j-\gamma b_j\right)<1-\gamma. \tag{5.1}$$

Dacă

$$\sum_{j=2}^{\infty}\left[\frac{1-q^j}{1-q}a_j+(2-\gamma)b_j\right]<1-\gamma, \tag{5.2}$$

atunci $f \in UCC_q(g,\gamma)$.

În cazul particular când

$$\frac{1-q^j}{1-q}a_j \geq b_j,\ j \in \{2,3,..\},$$

atunci (5.1) *implică* $f \in UCC_q(g,\gamma)$.

Teorema 5.1.2. *[33] Fie* $f(z)=z-\sum\limits_{j=2}^{\infty}a_jz^j$, $a_j \geq 0$, $j \in \{2,3,...\}$ *şi* $0 \leq \gamma < 1$. *Dacă* $f \in UCC_q(\gamma)$, *atunci există* $g \in T^*$, $g(z)=z-\sum\limits_{j=2}^{\infty}b_jz^j$, *astfel încât*

$$\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1-q^j}{1-q}a_j-\gamma b_j\right)<1-\gamma. \tag{5.3}$$

Dacă

$$\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1-q^j}{1-q}a_j<1-\gamma, \tag{5.4}$$

atunci $f \in UCC_q(\gamma)$.

În cazul particular când

$$\frac{1-q^j}{1-q}a_j \geq b_j,\ j \in \{2,3,...\}$$

inegalitatea (5.3) *este o condiţie necesară şi suficientă pentru ca funcţia* f *să aparţine clasei* $UCC_q(\gamma)$.

Observaţia 5.1.2. *[33] În cazul când* $f_2(z)=z-\dfrac{z^2}{1+q} \in UCC_q(g_2,\gamma)$, *unde* $g_2(z)=z-\dfrac{z^2}{2} \in T^*$ *avem*

$$\Re\frac{zD_qf_2(z)}{g_2(z)}=\Re\frac{z(1-z)}{z\left(1-\frac{z}{2}\right)}=2\Re\frac{1-z}{2-z}>0.$$

Dar

$$\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1-q^j}{1-q}a_j+(2-\gamma)b_j=1+\frac{2-\gamma}{2}=2-\frac{\gamma}{2}\not<1.$$

Acesta arată că inegalitatea (5.2) *este doar o condiţie suficientă.*

Deoarece în [79] autorii au demonstrat că convoluţia unei funcţii stelate şi al unei convexe este stelată, se poate enunţa următoarea teoremă.

Teorema 5.1.3. *[33] Fie* $f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$, $g(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j$ *şi fie* $\phi(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} c_j z^j \in T^*$, *unde* $a_j, b_j, c_j \geq 0$, $j \in \{2, 3, ..\}$. *Dacă* $f \in UCC_q(g, \gamma)$, *unde* $\dfrac{1-q^j}{1-q} a_j \geq b_j$ *pentru* $j \in \{2, 3, ..\}$, *atunci* $f * \phi \in UCC_q(g, \gamma)$.

5.2 Clasa $C_{NS}(\alpha)$

Folosind operatorul integral Noor-Sălăgean (2.10), în acest subcapitol este definit clasa $C_{NS}(\alpha)$ şi sunt studiate câteva proprietăţi al acestei clase.

Definiţia 5.2.1. *[34] O funcţie* $f \in T$ *aparţine clasei* $C_{NS}(\alpha)$, *dacă*

$$\Re \frac{z[I_{NS}^n f(z)]'}{I_{NS}^n f(z)} > \alpha, \tag{5.5}$$

unde $\alpha \in [0, 1)$ *şi* $z \in \mathbb{U}$.

Pentru $\alpha = 0$ se obţine următoarea definiţie.

Definiţia 5.2.2. *O funcţie* $f \in T$ *aparţine clasei* C_{NS}, *dacă*

$$\Re \frac{z[I_{NS}^n f(z)]'}{I_{NS}^n f(z)} > 0, \tag{5.6}$$

unde $z \in \mathbb{U}$.

Teorema 5.2.1. *[34] Fie* $f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$. *Atunci* $f \in C_{NS}(\alpha)$, *dacă şi numai dacă*

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j^2}{j^{n-1} C(n, j)} \left[1 - \frac{\alpha}{j}\right] < 1 - \alpha. \tag{5.7}$$

Dacă $\alpha = 0$, atunci avem următorul rezultat.

Corolarul 5.2.1. *Fie* $f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$. *Atunci* $f \in C_{NS}$, *dacă şi numai dacă*

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j^2}{j^{n-1} C(n, j)} < 1. \tag{5.8}$$

Fie $E_{NS}(\alpha)$ o subclasă al clasei $C_{NS}(\alpha)$. Această clasă este definită în felul următor [34]:

$$E_{NS}(\alpha) = \left\{ f \in T : \left| \frac{z[I_{NS}^n f(z)]'}{I_{NS}^n f(z)} - 1 \right| < 1 - 2\alpha \text{ and } \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\}. \tag{5.9}$$

Teorema 5.2.2. *[34] Fie $f \in T$. Dacă $f \in E_{NS}(\alpha)$, atunci* $\Re \frac{I_{NS}^n f(z)}{z} > 0$.

5.3 Clasa $Q_1(m, \lambda, A, B)$

În [12] Attiya şi Aouf au definit clasa $Q(m, \lambda, A, B)$ astfel cum urmează:

$$(1 - \lambda)(D^m f(z))' + \lambda(D^{m+1} f(z))' \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz}, \tag{5.10}$$

unde $\lambda \geq 0, -1 \leq A < B \leq 1$, $m \in \mathbb{N}_0$ şi $z \in U$.

În acest subcapitol definim o clasă similară cu clasa $Q(m, \lambda, A, B)$, prin combinaţia convexă al operatorului integral Sălăgean $I^m f(z)$, pentru $\lambda \in [0, 1]$ şi studiem câteva proprietăţi al acestei clase, în cazul când $A = -1$ şi $B = 1$.

Definiţia 5.3.1. *[37] Funcţia $f \in \mathcal{A}$ de forma* (2.2) *aparţine clasei $Q_1(m, \lambda, A, B)$, dacă*

$$(1 - \lambda)[I^m f(z)]' + \lambda[I^{m+1} f(z)]' \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz}, \tag{5.11}$$

unde $\lambda \geq 0, -1 \leq A < B \leq 1$, $m \in \mathbb{N}_0$ şi $z \in \mathbb{U}$.

Un caz particular al definiţiei anterioare este:

Definiţia 5.3.2. *[37] Funcţia $f \in \mathcal{A}$ de forma* (2.2) *aparţine clasei $Q_1(m, \lambda, -1, 1)$, dacă*

$$\Re(1 - \lambda)[I^m f(z)]' + \lambda[I^{m+1} f(z)]' > 0, \tag{5.12}$$

unde $\lambda \in [0, 1]$, $m \in \mathbb{N}_0$ şi $z \in \mathbb{U}$.

Observaţia 5.3.1. *[37] Dacă notăm $p(z) = [I^{m+1} f(z)]'$, atunci* (5.12) *va fi echivalentă cu*

$$\Re[p(z) + (1 - \lambda)zp'(z)] > 0, \tag{5.13}$$

unde $0 \leq \lambda \leq 1$ şi $z \in \mathbb{U}$.

Teorema 5.3.1. *[37] Fie $f \in \mathcal{A}$ o funcţie cu coeficienţi reali şi de forma* (2.2). *Dacă $f \in Q_1(m, \lambda, -1, 1)$, atunci*

$$\sum_{j=2}^{\infty} [j(1 - \lambda) + \lambda] j^{-m} a_j > -1, \tag{5.14}$$

unde $m \in \mathbb{N}_0$ şi $\lambda \in [0, 1]$.

În [20], C. M. Bălăeţi a definit clasa $\mathcal{I}^m(\alpha)$ pentru funcţii analitice care satisfac inegalitatea:

$$\Re[I^m f(z)]' > \alpha,$$

unde $\alpha \in [0, 1)$.

Observaţia 5.3.2. *[37] Punând $\lambda = 0$ în Definiţia 5.3.2, obţinem clasa $\mathcal{I}^m(0)$, definită în [20].*

Punând $\lambda = 0$ în Teorema 5.3.1, se obţine corolarul următor.

Corolarul 5.3.1. *[37] Fie $f \in \mathcal{A}$ o funcţie cu coeficienţi reali şi de forma (2.2). Dacă $f \in \mathcal{I}^m(0)$ atunci*

$$\sum_{j=2}^{\infty} j^{1-m} a_j > -1, \tag{5.15}$$

unde $m \in \mathbb{N}_0$.

În următoarea teoremă este demonstrat un rezultat de incluziune pentru clasele $\mathcal{I}^{m+1}(0)$ şi $Q_1(m, \lambda, -1, 1)$.

Teorema 5.3.2. *[37] Fie $f \in \mathcal{A}$ şi de forma (2.2). Dacă $f \in Q_1(m, \lambda, -1, 1)$, atunci $f \in \mathcal{I}^{m+1}(0)$.*

Teorema 5.3.3. *[37] Fie $f \in \mathcal{A}$ şi de forma (2.2). Dacă $f \in Q_1(m, \lambda, -1, 1)$, atunci $\Re\dfrac{I^{m+1}f(z)}{z} > 0$.*

În (5.13) înlocuind p cu o altă funcţie analitică, se obţine următoarele rezultate.

Teorema 5.3.4. *[37] Fie u o funcţie convexă, astfel încât $u(0) = 1$ şi*

$$h(z) = u(z) + (1 - \lambda)zu'(z), \ \ z \in \mathbb{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$[I^m f(z)]' \prec h(z), \tag{5.16}$$

atunci

$$[I^{m+1} f(z)]' \prec u(z),$$

iar rezultatul este exact.

Teorema 5.3.5. *[37] Fie funcţia u astfel încât $u(0) = 1$ şi*

$$h(z) = u(z) + (1 - \lambda)zu'(z),\ \ z \in \mathbb{U}$$

este convexă. Dacă $f \in \mathcal{A}$ verifică subordonarea diferenţială

$$[I^m f(z)]' \prec h(z), \tag{5.17}$$

atunci

$$\frac{I^m f(z)}{z} \prec u(z),$$

unde

$$u(z) = \frac{1-\lambda}{z^{1-\lambda}} \int_0^z h(t)t^{-\lambda}dt,\ \ z \in \mathbb{U}$$

iar rezultatul este exact.

Capitolul 6

Noi proprietăţi a funcţiei generalizate Mittag-Leffler

6.1 Funcţia generalizată Mittag-Leffler

Funcţia de forma

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)},$$

unde $\Re(\alpha) > 0$ şi $z \in \mathbb{C}$, a fost introdus de Mittag-Leffler în anul 1903 şi se numeşte funcţia Mittag-Leffler.

Funcţia generalizată Mittag-Leffer are forma

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \tag{6.1}$$

unde $z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$ şi a fost studiat de Wiman [103].
Deoarece funcţia generalizată Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}$ nu aparţine clasei $\mathcal{A}$, se consideră următoarea normalizare:

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(z) = \frac{zE_{\alpha,\beta}(z)}{E_{\alpha,\beta}(0)} = z + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} z^2 + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\alpha + \beta)} z^3 + ...,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma[\alpha(n-1) + \beta]} z^n.$$

6.2 Condiţii suficiente de incluziune pentru funcţia generalizată Mittag-Leffler pe diverse clase speciale de funcţii analitice

În această secţiune găsim condiţii suficiente în aşa fel încât, funcţia normalizată Mittag-Leffler $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ să aparţine claselor S^*, $\mathcal{K}$, S_p, $\mathcal{UCV}$, $k - S_p(\gamma)$, $k - \mathcal{UCV}(\gamma)$, respectiv $k - S_p(\lambda, \gamma)$ şi $k - \mathcal{UCV}(\lambda, \gamma)$.

Teorema 6.2.1. *[39] Fie $\alpha, \beta > 0$, $k \geq 0$ şi $0 < \gamma \leq 1$. Dacă*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(k+1) + 1 - \gamma}{\Gamma[\alpha(n-1) + \beta]} \leq \frac{1-\gamma}{\Gamma(\beta)}, \tag{6.2}$$

atunci $\mathcal{E}_{\alpha,\beta} \in k - S_p(\gamma)$.

Teorema 6.2.2. *[39] Fie $\alpha, \beta > 0$, $k \geq 0$ şi $0 < \gamma \leq 1$. Dacă*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{(n-1)(k+1) + 1 - \gamma}{\Gamma[\alpha(n-1) + \beta]} \leq \frac{1-\gamma}{\Gamma(\beta)}, \tag{6.3}$$

atunci $\mathcal{E}_{\alpha,\beta} \in k - \mathcal{UCV}(\gamma)$.

Pentru $k = 1$ şi $\gamma = 0$ se obţin următoarele proprietăţi de caracterizare pentru clasele S_p şi $\mathcal{UCV}$.

Corolarul 6.2.1. *[39] Fie $\alpha, \beta > 0$. Dacă*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{\Gamma[\alpha(n-1) + \beta]} \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)},$$

atunci $\mathcal{E}_{\alpha,\beta} \in S_p$.

Corolarul 6.2.2. *[39] Fie $\alpha, \beta > 0$. Dacă*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(2n-1)}{\Gamma[\alpha(n-1) + \beta]} \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)}, \tag{6.4}$$

atunci $\mathcal{E}_{\alpha,\beta} \in \mathcal{UCV}$.

Teorema 6.2.3. *[39] Fie $\alpha, \beta > 0$, $k \geq 0$ şi $0 < \gamma \leq 1$. Dacă*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{\Gamma[\alpha(n-1) + \beta]} \leq \frac{1-\gamma}{\Gamma(\beta)[1 - \lambda\gamma + k(1-\lambda)]}, \tag{6.5}$$

unde $0 \leq \lambda < 1$, atunci $\mathcal{E}_{\alpha,\beta} \in k - S_p(\lambda, \gamma)$.

Punând $k = \lambda = \gamma = 0$ în teorema anterioară, obţinem următorul criteriu analitic pentru clasa S^*.

Corolarul 6.2.3. *[39] Fie $\alpha, \beta > 0$. Dacă*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{\Gamma[\alpha(n-1)+\beta]} \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)}, \tag{6.6}$$

atunci $\mathcal{E}_{\alpha,\beta} \in S^*$.

Mai jos este dată o teoremă similară pentru clasa $k-\mathcal{UCV}(\lambda, \gamma)$, fără demonstraţie.

Teorema 6.2.4. *[39] Fie $\alpha, \beta > 0$, $k \geq 0$ şi $0 < \gamma \leq 1$. Dacă*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{(n-1)[1-\lambda\gamma + k(1-\lambda)] + 1 - \gamma}{\Gamma[\alpha(n-1)+\beta]} \leq \frac{1-\gamma}{\Gamma(\beta)}, \tag{6.7}$$

unde $0 \leq \lambda < 1$, atunci $\mathcal{E}_{\alpha,\beta} \in k-\mathcal{UCV}(\lambda, \gamma)$.

Punând $k = \lambda = \gamma = 0$ în Teorema 6.2.4, obţinem criteriul analitic pentru clasa $\mathcal{K}$.

Corolarul 6.2.4. *[39] Fie $\alpha, \beta > 0$. Dacă*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\Gamma[\alpha(n-1)+\beta]} \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)},$$

atunci $\mathcal{E}_{\alpha,\beta} \in \mathcal{K}$.

Capitolul 7

Operatori integrali

În matematică, acei operatori integrali care conservă proprietăţile geometrice al domeniului pe care sunt definiţi, au o importanţă majoră. Primul operator integral a fost introdus de J.W. Alexander în 1915 [7] şi a fost definit astfel cum urmează:

$$I : \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

$$A(f)(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt.$$

În [7] a fost arătat deasemenea că operatorul A transformă S^* pe $\mathcal{K}$.

În [54] R.J. Libera a definit operatorul integral

$$L : \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

$$L(f)(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t) dt.$$

Acest operator transformă S^* pe S^* şi a fost extins de Bernardi în 1969 [21] de:

$$F : \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

$$F(f)(z) = I_c f(z) = \frac{1+c}{z^c} \int_0^z f(t) t^{c-1} dt, \text{ unde } c = 1, 2, ...$$

Mai mult a fost arătat că şi acest operator transformă S^* pe S^*, dacă $c = 1, 2, ...$.

În timp, au fost studiate numeroase generalizări al acestor operatori.
De exemplu reamintim operatorul integral generalizat Bernardi - Libera - Livingston

$$I(z) = L_c f(z) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt, \tag{7.1}$$

unde $f \in \mathcal{A}$ şi $c > -1$. Acest operator a fost studiat de Bernardi, pentru $c \in \{1, 2, 3, ...\}$ şi pentru $c = 1$ de Libera.

7.1 O condiţie de stelaritate de ordinul γ al unei operatori integrali

Lema 7.1.1. *[38] Pentru mulţimea duală al clasei* $\mathcal{P} = \{f \in A_0 | \ \Re f(z) > 0, \ z \in \mathbb{U}\}$, *avem*

$$\{f \in A_0 | \ \Re f(z) > \frac{1}{2}, \ z \in \mathbb{U}\} \subset \mathcal{P}^d.$$

Lema 7.1.2. *[38] Pentru* $\theta \in [0, 2\pi]$, *au loc următoarele egalităţi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n(n+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)y(\cos\theta - xy)}{1 + x^2y^2 - 2xy\cos\theta} dxdy + i \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)y\sin\theta}{1 + x^2y^2 - 2xy\cos\theta} dxdy$$

şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{(n+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy(\cos\theta - xy)}{1 + x^2y^2 - 2xy\cos\theta} dxdy + i \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy\sin\theta}{1 + x^2y^2 - 2xy\cos\theta} dxdy.$$

Lema 7.1.3. *[38] Dacă* $\gamma = \dfrac{2 - \ln 4}{3 - \ln 6 - \frac{\pi^2}{12}}$, *atunci au loc inegalităţile*

$$(1-\gamma) \int_0^1 \int_0^1 (1-x)y \frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2 - 2xy\cos\theta)} dxdy \geq$$
$$\frac{1}{6} \int_0^1 \int_0^1 xy \frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+xy)(1+x^2y^2 - 2xy\cos\theta)} dxdy, \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

şi

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy\sin\theta}{1 + x^2y^2 - 2xy\cos\theta} dxdy \leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{(1+xy)\sqrt{1 + x^2y^2 - 2xy\cos\theta}} dxdy, \ \theta \in [0, \pi].$$

Lema 7.1.4. *[38] Pentru* $\theta \in [0, \pi]$, *următoarea inegalitate are loc*

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{2xy}{1 - x^2y^2} dxdy \int_0^1 \int_0^1 xy \frac{(1-xy)(1+\cos\theta)}{(1+x^2y^2 - 2xy\cos\theta)(1+xy)} dxdy \leq$$
$$4(1-\gamma) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\right) \left[(1-\alpha) \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n(n+1)^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{(n+1)^2}\right].$$

Teorema 7.1.1. *[38] Dacă* $f(0) = 1$ *şi*

$$\Re\big(1 + 4zf'(z) + 2z^2 f''(z)\big) > 0, \quad z \in \mathbb{U} \tag{7.2}$$

atunci funcţia $F(z) = \displaystyle\int_0^z f(t)dt$ *este stelată de ordinul* $\gamma = \dfrac{2 - \ln 4}{3 - \ln 4 - \frac{\pi^2}{12}} = 0.7756\ldots$, *adică*

$$\Re \frac{zF'(z)}{F(z)} > \frac{2 - \ln 4}{3 - \ln 4 - \frac{\pi^2}{12}}, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{7.3}$$

Rezultatul este exact.

7.2 Proprietatea de conservare al operatorului integral Bernardi, definit pe clasele de funcţii $UCC_q(g,\gamma)$ şi $C_{NS}(\alpha)$

Teorema 7.2.1. *[33] Fie* $f(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$, $g(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j \in T^*$ *şi*

$$F(z) = I_c f(z) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z f(t) t^{c-1} dt, \ c \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă $f \in UCC_q(g,\gamma)$, *unde* $\frac{1-q^j}{1-q} a_j \leq b_j$ *pentru* $j \in \{2,3,..\}$, *atunci* $F \in UCC_q(g,\gamma)$.

Teorema 7.2.2. *[34] Fie*

$$F(z) = I_c f(z) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z f(t) t^{c-1} dt, \ c \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă $f \in C_{NS}(\alpha)$, *atunci* $F = I_c(f) \in C_{NS}(\beta)$, *unde*

$$\beta = \beta(\alpha,2) = 1 - \frac{(1-\alpha)(c+1)^2}{(c+2)^2(2-\alpha) - (c+1)^2(1-\alpha)} \tag{7.4}$$

şi $\beta > \alpha$, $\alpha \in [0,1)$.

7.3 Proprietatea de conservare al operatorului integral generalizat Bernardi-Libera-Livingston, definit pe clasele de funcţii S^{**} şi S^{***}

În această secţiune sunt studiate proprietăţile imaginilor câtorva subclase de funcţii stelate, prin operatorul integral generalizat Bernardi-Libera-Livingston.

Teorema 7.3.1. *[40] Fie*

$$I(z) = L_c f(z) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt.$$

Dacă $c \geq \sqrt{\frac{5}{4}}$ *şi* $f \in S^{**}$, *atunci* $I \in S^{**}$.

Teorema 7.3.2. *[40] Fie*

$$I(z) = L_c f(z) = \frac{c+1}{z^c} \int\limits_0^z t^{c-1} f(t) dt, \ c > -2.$$

Dacă $f \in S^{***}$*, atunci* $I \in S^{***}$.

Teorema 7.3.3. *[40] Fie*

$$I(z) = L_c f(z) = \frac{c+1}{z^c} \int\limits_0^z t^{c-1} f(t) dt, \ c \in (-1, 0].$$

Dacă $f \in TS^{***}$*, atunci* $I \in TS^{***}$.

Capitolul 8

Probleme de rază pentru două polinoame ortogonale

Numerele reale

$$r^*(f) = \sup\left\{ r > 0 \middle| \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, \text{ pentru orice } z \in \mathbb{U}(r) \right\}$$

şi

$$r^*_\beta(f) = \sup\left\{ r > 0 \middle| \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta, \text{ pentru orice } z \in \mathbb{U}(r) \right\}$$

sunt numite raza de stelaritate, respectiv raza de stelaritate de ordinul β al funcţiei f. Este de ştiut că $r^*(f)$ este cel mai mare disc, astfel încât $f(\mathbb{U}(r^*(f)))$ este un domeniu stelat în raport cu 0.

În mod similar, fie

$$r^c(f) = \sup\left\{ r > 0 \middle| \Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \text{ pentru orice } z \in \mathbb{U}(r) \right\}$$

raza de convexitate al funcţiei f, iar raza de convexitate de ordinul β este

$$r^c_\beta = \sup\left\{ r > 0 \middle| \Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta, \text{ pentru orice } z \in \mathbb{U}(r) \right\}.$$

Raza de uniform convexitate al funcţiei f este dată de

$$r^{uc}(f) = \sup\left\{ r > 0 \middle| \Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|, \text{ pentru orice } z \in \mathbb{U}(r) \right\}.$$

8.1 Polinoamele Laguerre generalizate

Polinoamele Laguerre generalizate satisfac următoarea ecuaţie diferenţială liniară de ordinul doi:

$$xy'' + (\lambda + 1 - x)y' + ny = 0,$$

pentru λ, număr real şi $n \in \mathbb{Z}_+$, care este numită ecuaţia lui Laguerre.
Formula lui Rodrigues al polinoamelor Laguerre este

$$L_n^\lambda(z) = \frac{1}{n!} z^{-\lambda} e^z \frac{d^n}{dz^n}(z^{\lambda+n}e^{-z}), \tag{8.1}$$

unde $n \in \mathbb{Z}_+$. Din relaţia (8.1) şi teorema lui Rolle rezultă, că fiecare rădăcină al ecuaţiei $L_n^\lambda(z) = 0$ este reală şi pozitivă, cu condiţia ca $\lambda + 1 > 0$. Fie z_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ rădăcinile, unde $0 < z_1 < z_2 < ... < z_n$,

Considerăm următoarea formă normalizată al polinomului L_n^λ:

$$\mathcal{L}_{n+1}^\lambda(z) = z\frac{L_n^\lambda(z)}{L_n^\lambda(0)} = z + a_1 z^2 + ... + a_n z^{n+1}.$$

Reprezentarea în formă de produs al polinomului $\mathcal{L}_{n+1}^\lambda$ este

$$\mathcal{L}_{n+1}^\lambda(z) = a_n z(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n). \tag{8.2}$$

8.2 Raza de stelaritate, convexitate şi de uniform convexitate al polinoamelor Laguerre normalizate

Înainte de a determina raza de stelaritate, de convexitate şi de uniform convexitate al polinomului normalizat Laguerre, avem nevoie de următorul rezultat.

Lema 8.2.1. *[35] Dacă $|z| \le r < \beta$, atunci avem*

$$\Re\frac{z}{\beta - z} \le \frac{r}{\beta - r}, \tag{8.3}$$

$$\left|\frac{z}{\beta - z}\right| \le \frac{r}{\beta - r}, \tag{8.4}$$

$$\left|\frac{z}{(\beta - z)^2}\right| \le \frac{r}{(\beta - r)^2}. \tag{8.5}$$

Teorema 8.2.1. *[35] Fie $0 \le \beta < 1$, atunci raza de stelaritate de ordinul β al polinomului normalizat Laguerre $\mathcal{L}_{n+1}^\lambda$, este $r_\beta^*(\mathcal{L}_{n+1}^\lambda) = r_0$, unde r_0 notează cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei $r(\mathcal{L}_{n+1}^\lambda)'(r) - \beta(\mathcal{L}_{n+1}^\lambda(r)) = 0$.*

Teorema 8.2.2. *[35] Fie $0 \le \beta < 1$, atunci raza de convexitate de ordinul β al polinomului normalizat Laguerre $\mathcal{L}_{n+1}^\lambda$, este $r_\beta^c(\mathcal{L}_{n+1}^\lambda) = r_1$, unde r_1 notează cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei $r(\mathcal{L}_{n+1}^\lambda)''(r) - (\beta - 1)(\mathcal{L}_{n+1}^\lambda)'(r) = 0$.*

Teorema 8.2.3. *[35] Raza de uniform convexitate al polinomului normalizat Laguerre, este $r^{uc}(\mathcal{L}_{n+1}^{\lambda}) = r_2$, unde r_2 notează cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$1 + 2\frac{r(\mathcal{L}_{n+1}^{\lambda})''(r)}{(\mathcal{L}_{n+1}^{\lambda})'(r)} = 0.$$

În teorema următoare este determinat cel mai mare disc, centrat în origine, care este transformat prin polinomul L_n^{λ}, pe un domeniu convex.

Teorema 8.2.4. *[35] Fie r_3 cea mai mică rădăcină pozitivă al ecuaţiei*

$$1 + \frac{r(L_n^{\lambda})''(r)}{(L_n^{\lambda})'(r)} = 0.$$

Atunci $\mathbb{U}(r_3)$ este cel mai mare disc, care se transformă prin polinomul L_n^{λ} într-un domeniu convex, unde $r_3 = r^c(L_n^{\lambda})$ este raza de convexitate al polinomului L_n^{λ}.

Este uşor de observat că imaginea $L_n^{\lambda}\big(\mathbb{U}(r^c(L_n^{\lambda}))\big)$ este simetrică faţă de axa OX, iar marginea domeniului $L_n^{\lambda}\big(\mathbb{U}(r^c(L_n^{\lambda}))\big)$ intersectează această axă în punctele $L_n^{\lambda}(r^c(L_n^{\lambda}))$ şi $L_n^{\lambda}(-r^c(L_n^{\lambda}))$. Astfel avem corolarul următor.

Corolarul 8.2.1. *[35] Au loc următoarele inegalităţi*

$$L_n^{\lambda}\big(r^c(L_n^{\lambda})\big) \geq L_n^{\lambda}\big(r\big) \geq \Re\big(L_n^{\lambda}(re^{i\theta})\big) \geq L_n^{\lambda}\big(-r\big) \geq L_n^{\lambda}\big(-r^c(L_n^{\lambda})\big),$$

pentru orice $r \in (0, r^c(L_n^{\lambda}))$, $z \in \mathbb{U}(r)$, şi $\theta \in [0, 2\pi]$. Numărul $r^c(L_n^{\lambda})$ este cel mai mare număr real pozitiv cu această proprietate.

Exemplul 8.2.1. *[35] Raza de convexitate al polinomului Laguerre L_2^{λ}, dată de egalitatea*

$$L_2^{\lambda}(z) = \frac{z^2}{2} - (\lambda+2)z + \frac{(\lambda+2)(\lambda+1)}{2},$$

este cea mai mică rădăcină al ecuaţiei

$$r[L_2^{\lambda}(r)]'' + [L_2^{\lambda}(r)]' = 0.$$

Deoarece $[L_2^{\lambda}(r)]' = r - \lambda - 2$ şi $[L_2^{\lambda}(r)]'' = 1$, atunci obţinem $r = \dfrac{\lambda+2}{2}$, care este raza de convexitate al polinomului Laguerre L_2^{λ}, unde $\lambda > -2$.

8.3 Polinoamele Legendre

Polinoamele Legendre sunt soluţii al ecuaţiei diferenţiale Legendre:

$$\frac{d}{dz}\Big[(1-z^2)\frac{d}{dz}P_n(z)\Big]+n(n+1)P_n(z)=0,$$

pentru $n \in \mathbb{Z}_+$.
Formula lui Rodrigues al polinoamelor Legendre este

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n], \tag{8.6}$$

unde $n \in \mathbb{Z}_+$. Formula recursivă Bonnet pentru polinoamele Legendre este:

$$(n+1)P_{n+1}(z)-(2n+1)zP_n(z)+nP_{n-1}(z)=0.$$

Polinoamele Legendre sunt simetrice sau antisimetrice, ceea ce este exprimat mai jos

$$P_n(-z)=(-1)^n P_n(z).$$

Mai departe, se consideră următoarea formă normalizată al polinomului Legendre de gradul impar P_{2n-1}:

$$\mathcal{P}_{2n-1}(z)=\frac{P_{2n-1}(z)}{P'_{2n-1}(0)}=z+a_2z^2+...+a_{2n-1}z^{2n-1}.$$

Rădăcinile ecuaţiei $P_{2n-1}(z)=0$ sunt $0=z_0<z_1<...<z_{n-1}$ şi $-z_1,-z_2,...,-z_{n-1}$.
Reprezentarea în formă de produs a polinomului $\mathcal{P}_{2n-1}(z)$ este

$$\mathcal{P}_{2n-1}(z)=a_{2n-1}z(z^2-z_1^2)(z^2-z_2^2)...(z^2-z_{n-1}^2). \tag{8.7}$$

8.4 Raza de stelaritate, convexitate şi de uniform convexitate al polinoamelor Legendre normalizate de gradul impar

Teorema 8.4.1. *[24] Raza de stelaritate de ordinul β al polinomului normalizat Legendre $\mathcal{P}_{2n-1}$, de gradul impar este $r^*_\beta(\mathcal{P}_{2n-1})=r_0$, unde r_0 notează cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei $r(\mathcal{P}_{2n-1})'(r)-\beta(\mathcal{P}_{2n-1}(r))=0$, unde $0\le\beta<1$.*

Teorema 8.4.2. *[24] Raza de convexitate de ordinul β al polinomului normalizat Legendre de gradul impar $\mathcal{P}_{2n-1}$ este $r^c_\beta(\mathcal{P}_{2n-1})=r_1$, unde r_1 notează cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei $r(\mathcal{P}_{2n-1})''(r)-(\beta-1)(\mathcal{P}_{2n-1})'(r)=0$, unde $0\le\beta<1$.*

Teorema 8.4.3. *[24] Raza de uniform convexitate al polinomului normalizat Legendre de gradul impar este* $r^{uc}(\mathcal{P}_{2n-1}) = r_2$*, unde* r_2 *notează cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$1 + 2\frac{r(\mathcal{P}_{2n-1})''(r)}{(\mathcal{P}_{2n-1})'(r)} = 0.$$

În următoarea teoremă este determinat cel mai mare disc, centrat în origine, care se transformă prin polinomul P_{2n-1} într-un domeniu convex.

Teorema 8.4.4. *[24] Fie* r_3 *cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$1 + \frac{r(P_{2n-1})''(r)}{(P_{2n-1})'(r)} = 0.$$

Atunci $\mathbb{U}(r_3)$ *este cel mai mare disc, care se transformă prin polinomul* P_{2n-1} *într-un domeniu convex, unde* $r_3 = r^c(P_{2n-1})$ *este raza de convexitate al polinomului* P_{2n-1}*.*

Este uşor de observat, că imaginea $P_{2n-1}\big(\mathbb{U}(r^c(P_{2n-1}))\big)$ este simetrică faţă de axa OX, iar marginea domeniului $P_{2n-1}\big(\mathbb{U}(r^c(P_{2n-1}))\big)$ intersectează această axă în punctele $P_{2n-1}(r^c(P_{2n-1}))$ şi $P_{2n-1}(-r^c(P_{2n-1}))$. Astfel avem următorul corolar.

Corolarul 8.4.1. *[24] Au loc următoarele inegalităţi*

$$P_{2n-1}\big(r^c(P_{2n-1})\big) \geq P_{2n-1}\big(r\big) \geq \Re\big(P_{2n-1}(re^{i\theta})\big) \geq P_{2n-1}\big(-r\big) \geq P_{2n-1}\big(-r^c(P_{2n-1})\big),$$

pentru orice $r \in (0, r^c(P_{2n-1}))$*,* $z \in \mathbb{U}(r)$ *şi* $\theta \in [0, 2\pi]$*. Numărul* $r^c(P_{2n-1})$ *este cel mai mare număr real pozitiv cu această proprietate.*

Bibliografie

[1] S. Agrawal, S.K. Sahoo, *A generalization of starlike functions of order α*, arXiv: 1404.3988v2, 2015 - arxiv.org.

[2] H.S. Al-Amiri, *On Ruscheweyh derivatives*, Ann. Polon. Math., 38, 87–94, 1980.

[3] F.M. Al-Oboudi, *On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator*, Int. J. Math. and Math. Sci., 27, 1429–1436, 2014.

[4] A. Alb Lupaş, *A note on differential superordinations using Sălăgean and Ruscheweyh operators*, Acta Univ. Apul., 24, 201–209, 2010.

[5] A. Alb Lupaş, *Certain differential subordinations using Sălăgean and Ruscheweyh operators*, Acta Univ. Apul., 29, 125–129, 2012.

[6] I. Aldawish, M. Darus, *Starlikeness of q-differential operator involving quantum calculus*, Korean J. Math., 22(4), 699–709, 2014.

[7] J.W. Alexander, *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. of Math., 17(1), 12–22, 1915.

[8] R.M. Ali, V. Ravichandran, *On Bernardi's integral operator and the Briot-Bouquet differential subordination*, J. Math. Anal. and Appl., 324, 663–668, 2006.

[9] R.M. Ali, V. Ravichandran, *Uniformly convex and uniformly starlike functions*, arXiv: 1106.4377v1, 2011 - arxiv.org.

[10] R.M. Ali, V. Ravichandran, N. Seenivasagan, *Differential subordination of analytic functions defined by the multiplier transformation*, Math. Inequal. Appl., 12(1), 123–139, 2009.

[11] J.A. Antonino, S. Romaguera, *Strong differential subordination to Briot-Bouquet differential equations*, J. Differ. Equation, 114, 101–105, 1994.

[12] A.A. Attiya, M.K. Aouf, *A study on certain class of analytic functions defined by Ruscheweyh derivative*, Soochow J. Math., 33(2), 273–289, 2007.

[13] Á. Baricz, D.K. Dimitrov, I. Mező, *Radii of starlikeness and convexity of some q-Bessel functions*, arXiv preprint arXiv: 1409.0293, 2014 - arxiv.org.

[14] Á. Baricz, H. Orhan, R. Szász, *The radius of α-convexity of normalized Bessel functions of the first kind*, arXiv preprint arXiv: 1412.2000, 2014 - arxiv.org.

[15] Á. Baricz, N. Yağmur, *Radii of convexity of some Lommel and Struve functions*, arXiv preprint arXiv: 1410.5217, 2014 - arxiv.org.

[16] Á. Baricz, R. Szász, *Close-to-convexity of some special functions and their derivatives*, arXiv preprint arXiv: 1402.0692, 2014 - arxiv.org.

[17] Á. Baricz, R. Szász, *The radius of convexity of normalized Bessel functions*, Anal. Math., 41(3), 141–151, 2015.

[18] Á. Baricz, P.A. Kupán, R. Szász, *The radius of starlikeness of normalized Bessel functions of the first kind*, Proc. Amer. Math. Soc., 142(6), 2019–2025, 2014.

[19] D. Bansal, J.K. Prajapat, *Certain geometric properties of the Mittag-Leffler functions*, Complex Var. Elliptic Eq., (61)(3), 338–350, 2016.

[20] C.M. Bălăeţi, *A class of holomorphic functions defined by integral operator*, Acta Univ. Apulensis, 15, 379–386, 2008.

[21] S.D. Bernardi, *Convex and starlike univalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 135, 429–446, 1969.

[22] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsb, 138, 940–955, 1916.

[23] R.K. Brown, *Univalence of Bessel functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 11(2), 278–283, 1960.

[24] S. Bulut, O. Engel, *The radius of starlikeness, convexity and uniform convexity of the Legendre polynomials of odd degree*, submitted paper.

[25] M. Darus, R.W. Ibrahim, *Partial sums of analytic functions of bounded turning with applications*, Comp. and Appl. Math., 29(1), 81–88, 2010.

[26] L. De Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math., 154, 137–152, 1985.

[27] E. Deniz, R. Szász, *The radius of uniform convexity of Bessel functions*, arXiv: 1702.07493, 2017.

[28] P.L. Duren, *Univalent functions*, Springer - Verlag, New-York, 1983.

[29] R.M. El-Ashwah, M.K. Aouf, A.A. Hassan, A.H. Hassan, *Certain Class of Analytic Functions Defined by Ruscheweyh Derivative with Varying Arguments*, Kyungpook. Math. J., 54(3), 453–461, 2014.

[30] O. Engel, Á.O. Páll-Szabó, P.A. Kupán, *About the radius of convexity of some analytic functions*, Creat. Math. and Inf., 24(2), 155–161, 2015.

[31] O. Engel, R. Szász, *On a subclass of convex functions*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 59(2), 137–146, 2016.

[32] O. Engel, *On the composition of two starlike functions*, Acta Univ. Apulensis, 48, 47–53, 2016.

[33] O. Engel, C. Naicu, *About a generalized class of close-to-convex functions defined by the q-difference operator*, Scient. Bull. of the "Petru Maior" Univ. of Târgu Mureş, 13(1), 30–34, 2016.

[34] O. Engel, Y.L. Chung, *About a class of analytic functions defined by Noor-Sălăgean integral operator*, J. Math. and Appl., 39, 59–67, 2016.

[35] O. Engel, G. Murugusundaramoorthy, R. Szász, *The radius of starlikeness, convexity and uniform convexity of the normalized Laguerre polynomials*, submitted paper.

[36] O. Engel, A.R. Juma, *The sharp version of a strongly starlikeness condition*, Acta Univ. Sapientiae, accepted paper.

[37] O. Engel, *On a class of analytic functions defined by the Sălăgean integral operator*, An. Univ. Oradea fasc. Mat., 24(2), 9–14, 2017.

[38] O. Engel, Á.O. Páll-Szabó, *The radius of convexity of particular functions and applications to the study of a second order differential subordination*, J. Contemp. Math. Anal., 52(3), 111–120, 2017.

[39] O. Engel, Y.L. Chung, *Certain properties of the generalized Mittag-Leffler function*, submitted paper.

[40] O. Engel, Á.O. Páll-Szabó, *Preserving properties of the generalized Bernardi-Libera-Livingston integral operator defined on some subclasses of starlike functions*, Konuralp J. Math., 5(2), 207–215, 2017.

[41] G.M. Goluzin, *On a variational method in the theory of analytic functions*, Amer. Math. Soc. Transl., 18(2), 1–14, 1961.

[42] A.W. Goodman, *On uniformly convex functions*, Ann. Polon. Math., 56(1), 87–92, 1991.

[43] G.S. Goodman, *A method for comparing univalent functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 75, 511–521, 1969.

[44] T.H. Gronwall, *Some remarks on conformal representation*, Ann. of Math., 16(2), 72–76, 1914/1915.

[45] D.J. Hallenbeck, T.H. MacGregor, *Linear problems and convexity techniques in geometric function theory*, Monograph and Studies in Mathematics, 22, Pitman, Boston, 1984.

[46] H.J. Haubold, A.M. Mathai, R.K. Saxena, *Mittag-Leffler functions and their applications*, J. Appl. Math., Art. ID 298628, 2011.

[47] G. Herglotz, *Über Potenzreihen mit positiven reelen Teile im Einheitskreis*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss., Leipzig, 501–511, 1911.

[48] F.H. Jackson, *On q - functions and a certain difference operator*, Trans. Roy. Soc. Edin., 46, 253–281, 1908.

[49] W. Janowski, *Extremal problems for a family of functions with positive real part and for some related families*, Ann. Polon. Math., 23, 159–177, 1970/1971.

[50] S. Kanas, D. Răducanu, *Some class of analytic functions related to conic domains*, Math. Slovaca, 64(5), 1183–1196, 2014.

[51] S. Kanas, A. Wisniowska, *Conic regions and k-uniform convexity*, J. Comp. Appl. Math., 105, 327–336, 1999.

[52] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys., 1, 191–210, 1907.

[53] E. Kreyszig, J. Todd, *The radius of univalence of Bessel functions*, Illinois J. Math., 4, 143–149, 1960.

[54] J.R. Libera, *Some classes of regular univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 16, 755–758, 1965.

[55] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbindungen des Einheitskreises*, Math. Ann., 89, 103–121, 1923.

[56] F. Mainardi, R. Gorenflo, *On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes*, J. Comput. Appl. Math., 118, 283–299, 2000.

[57] E. Mittal, R.M. Pandey, S. Joshi, *On extension of Mittag-Leffler function*, Appl. Appl. Math., (11)(1), 307–316, 2016.

[58] P.T. Mocanu, S.S. Miller, *Differential Subordinations: Theory and Applications*, Marcel Dekker, New York, Basel, 2000.

[59] P.T. Mocanu, S.S. Miller, *On some classes of first-order differential subordinations*, Mischigan Math. J., 32, 185–195, 1985.

[60] P.T. Mocanu, S.S. Miller, *The theory and applications of second-order differential subordinations*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 34(4), 3–33, 1989.

[61] P.T. Mocanu, T. Bulboacă, G.Şt. Sălăgean, *Teoria Geometrică a Funcţiilor Univalente*, Ed. a II-a, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2006, ISBN 973-686-959-8.

[62] G. Murugusundaramoorthy, N. Magesh, *On certain subclasses of analytic functions associated with hypergeometric functions*, Appl. Math. Lett., 24, 494–500, 2011.

[63] K.I. Noor, *On close-to-convex functions of complex order*, Soochow J. of Math., 26(4), 369–376, 2000.

[64] K.I. Noor, *On new classes of integral operators*, J. Natur. Geom., 16, 71–80, 1999.

[65] K.I. Noor, M.A. Noor, *On integral operators*, J. Math. Anal. Appl., 238(2), 341–352, 1999.

[66] M. Nunokawa, S. Owa, H. Saitoh, N. Takahashi, *On a strongly starlikeness criteria*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 31(3), 195–199, 2003.

[67] G.I. Oros, G. Oros, *Strong differential subordination*, Turk. J. Math., 33, 249–257, 2009.

[68] G.I. Oros, *Strong differential superordination*, Acta Univ. Apul., 19, 101–106, 2009.

[69] G.I. Oros, *First order strong differential superordination*, Gen. Math., 15(2-3), 77–87, 2007.

[70] Á.O. Páll-Szabó, O. Engel, *Properties of certain class of analytic functions with varying arguments defined by Ruscheweyh derivative*, Acta Univ. Sapientiae, 7(2), 278–286, 2015.

[71] Á.O. Páll-Szabó, O. Engel, *Certain class of analytic functions with varying arguments defined by Sălăgean derivative*, Proceedings of the 8th International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics, ICTAMI 2015, Alba Iulia, Romania, 113–120, 2015.

[72] Á.O. Páll-Szabó, O. Engel, E. Szatmári, *Certain class of analytic functions with varying arguments defined by the convolution of Sălăgean and Ruscheweyh derivative*, Acta Univ. Apulensis, 51, 61–74, 2017.

[73] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vanderhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.

[74] V. Ravichandran, *Radii of starlikeness and convexity of analytic functions satisfying certain coefficient inequalities*, Math. Slovaca, 64(1), 27–38, 2014.

[75] S. Rogosin, *The role of the Mittag-Leffler function in fractional modeling*, Mathematics, 3, 368–381, 2015.

[76] F. Rønning, *Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 118(1), 189–196, 1993.

[77] S. Ruscheweyh, *Convolutions in Geometric Function Theory*, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1982.

[78] S. Ruscheweyh, *New criteria for univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 49(1), 109–115, 1975.

[79] S. Ruscheweyh, T. Sheil-Small, *Hadamard products of schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture*, Comment. Math. Helv., 48(1), 119–135, 1973.

[80] S. Ruscheweyh, *Duality for Hadamard products with applications to external problems for functions regular in the unit disc*, Trans. Amer. Math. Soc., 210, 63–74, 1975.

[81] S.K. Sahoo, N.L. Sharma, *On a generalization of close-to-convex functions*, Ann. Pol. Math., 113(1), 93–108, 2014.

[82] G.Şt. Sălăgean, *Subclasses of univalent functions*, Lecturer Notes in Math.(Springer Verlag), 1013, 362–372, 1983.

[83] G.Şt. Sălăgean, *Integral properties of certain classes of analytic functions with negative coefficients*, Int. Journal of Math. and Math. Sci., 1, 125–131, 2005.

[84] G.Şt. Sălăgean, *Geometria planului complex*, Ed. Promedia Plus, Cluj-Napoca, 1999.

[85] G.Şt. Sălăgean, *On some classes of univalent functions*, Seminar de teoria funcţiilor geometrice, Cluj-Napoca, 1983.

[86] M. Schiffer, *Hadamard's formula and variation of domain functions*, Amer. J. Math., 68, 417–448, 1946.

[87] H. Silverman, *A survey with open problems on univalent functions whose coefficients are negative*, Rocky Montain J. Math., 21(3), 1099–1125, 1991.

[88] H. Silverman, *Convex and starlike criteria*, Internat. J. Math. Sci., 22, 75–79, 1999.

[89] H. Silverman, *Univalent functions with varying arguments*, Houston J. Math., 17, 283–287, 1981.

[90] A.K. Shukla, J.C. Prajapati, *On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties*, J. Math. Anal. Appl., 336, 797–811, 2007.

[91] H. Silverman, *Univalent functions with negative coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc., 5, 109–116, 1975.

[92] D.F. Sofonea, *Some new properties of q-Calculus*, Gen. Math., 16(1), 47–54, 2008.

[93] J. Sokól, L. Trojnar-Spelina, *On a sufficient condition for strongly starlikeness*, J. Ineq. Appl., 383(1), 1–11, 2013.

[94] R. Szász, *Geometric properties of the function* Γ *and* $\frac{1}{\Gamma}$, Math. Nachr., 288(1), 115–120, 2015.

[95] R. Szász, *Inequalities in the complex plane*, J. of Inequal. Pure Appl. Math., 8(1), art. 27, 2007.

[96] R. Szász, *About a differential inequality*, Acta Univ. Sapientiae Math., 1(1), 87–93, 2009.

[97] R. Szász, *Starlike image of a class of analytic functions*, Gen. Math., 16(2), 59–67, 2008.

[98] R. Szász, *The sharp version of a criterion for starlikeness related to the operator of Alexander*, Ann. Polon. Math., 94(1), 1–14, 2008.

[99] R. Szász, L.R. Albert, *About a condition for starlikeness*, J. Math. Anal. Appl., 335(2), 1328–1334, 2007.

[100] R. Szász, *Rezultate din teoria geometrică a funcţiilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 2010.

[101] R. Szász, *About the starlikeness of Bessel functions*, Integral Transforms Spec. Funct., 25(9), 750–755, 2014.

[102] R. Szász, *About the radius of starlikeness of Bessel functions of the first kind*, Monats. Math., 176(2), 323–330, 2015.

[103] A. Wiman, *Über de Fundamental satz in der Theorie der Funcktionen* $E_\alpha(x)$, Acta Math., 29, 191–201, 1905.