Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică

Teză de Doctorat

Rezumat

Contribuţii la Teoria Aproximării Funcţiilor de Variabilă Reală şi Complexă

Doctorand:
Bogdan D. Opriş

Conducător ştiinţific:
Prof. univ. dr. Sorin G. Gal

Cluj-Napoca
2017

Cuprins

Cuvinte cheie : funcţie de mulţime monotonă şi submodulară, integrala Choquet, aproximare cu operatori Bernstein-Durrmeyer-Choquet, schema lui Feller, integrala posibilistica, aproximare cu operatori posibilistitici, aproximare cu operatori generalizaţi Baskakov de o variabilă reală, aproximare pe discuri compacte din $\mathbb{C}$ cu operatori complecşi generalizaţi Szász, Szász-Kantorovich şi Baskakov, aproximare pe mulţimi compacte din $\mathbb{C}$ cu operatori Baskakov-Faber generalizaţi, ordin arbitrar de aproximare.

Cap. 1

Introducere Generală

Această teză conţine rezultatele pe care le-am obţinut în domeniul teoriei aproximării funcţiilor de o variabilă reală şi de o variabilă complexă.

Teoria aproximării este o parte a Analizei matematice, avînd rădăcinile în secolul al 19-lea, care se ocupă, în esenţă, cu aproximarea unor elemente complicate (de cele mai multe ori funcţii), cu elemente mai simple (de cele mai multe ori polinoame algebrice, polinoame trigonometrice sau funcţii spline, etc). În plus, în cadrul aceleaşi teorii, se obţin şi caracterizări cantitative ale aproximării, de cele mai multe ori în termenii aşa numiţilor moduli de continuitate (de netezime).

Din punct de vedere istoric, în cazul aproximării funcţiilor de o variabilă reală, probabil că primul rezultat principal în această teorie a fost obţinut de către matematicianul german K. Weierstrass în 1895, rezultat care poate fi enunţat în felul următor :

Teorema A. *Dacă* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe intervalul* $[a, b]$*, atunci există un şir de polinoame algebrice cu coeficienţi reali,* $P_{m_n}(x) = a_0 x^{m_n} + . + a_{m_n - 1} x + a_{m_n}$*, astfel încît* $\lim_{n\to\infty} P_{m_n}(x) = f(x)$*, uniform în raport cu* $x \in [a, b]$*.*

O demonstraţie constructivă a teoremei de mai sus a fost obţinută de către matematicianul rus S.N. Bernstein în 1912, care a arătat că şirul de polinoame algebrice care astăzi ii poartă numele, anume $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f)k/n)$, converge uniform la funcţia f presupusă continuă pe $[0, 1]$.

Primul rezultat cantitativ în teoremele lui Weierstrass şi Bernstein de mai sus, a fost obţinut de către matematicianul român Tiberiu Popoviciu în anul 1942, care a arătat că

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{3}{2}\omega_1(f; 1/\sqrt{n}), \forall x \in [0, 1], n \in \mathbb{N},$$

unde $\omega_1(f; \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, 1], |x - y| \leq \delta\}$ reprezintă modulul de continuitate al funcţiei f.

În cazul aproximării funcţiilor continue şi 2π-periodice, primul rezultat constructiv a fost obţinut de către matematicianul maghiar L. Fejér în anul 1900, care a arătat următoarele : dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie 2π-periodică şi continuă pe $\mathbb{R}$, notînd cu $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, unde a_k şi b_k sunt coeficienţii Fourier ai lui f, atunci $T_n(f)(x) = \frac{S_0(f)(x)+...+S_n(f)(x)}{n+1}$ reprezintă un şir de polinoame trigonometrice care converge uniform la funcţia f pe $\mathbb{R}$.

Primul rezultat cantitativ şi constructiv în cazul aproximării cu polinoame trigonometrice, a fost obţinut de către matematicianul american D. Jackson în teza lui de doctorat din 1911, care poate fi enunţat în felul următor : dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă şi 2π-periodica, atunci se poate construi un şir de polinoame trigonometrice $J_n(f)(x)$, $n \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că

$$|J_n(f)(x) - f(x)| \leq C\omega_2(f; 1/n), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

unde $\omega_2(f;\delta) = \sup\{|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|; 0 \leq h \leq \delta, x \in \mathbb{R}\}$ reprezintă modulul de netezime de ordinul 2 al funcţiei f.

O direcţie importantă în Teoria Aproximării Funcţiilor este reprezentată de teoria aproximării cu şiruri de operatori liniari si pozitivi, cu rădăcinile între anii 1950 şi 1970 prin rezultatele de acum clasice ale lui Tiberiu Popoviciu, Bohman, Korovkin, Shisha-Mond şi alţii. În esenţă, aceste rezultate afirmă faptul că pentru ca un şir de operatori liniari si pozitivi, $(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$, să convearga uniform la f pentru orice funcţie continuă pe $[a, b]$, este suficient ca $L_n(e_k)$ să conveargă uniform la e_k, doar pentru $k = 0, 1$ şi 2, unde $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ şi $e_2(x) = x^2$.

În cazul aproximării funcţiilor complexe sau/şi de o variabilă complexă, rădăcinile acestei teorii se găsesc în aproximarea funcţiilor continue prin polinoame sau prin funcţii întregi, prin lucrările lui Müntz-Szász şi Carleman, iar în aproximarea funcţiilor analitice de variabilă complexă prin polinoame sau prin funcţii raţionale, menţionînd aici, în principal, rezultatele obţinute de către Runge, Walsh, Faber, Mergelyan, Arakelyan şi Dzyadyk.

Această teză conţine contribuţiile originale pe care le-am obţinut în domeniul teoriei aproximării funcţiilor de o variabilă reală şi de o variabilă complexă.

Teza este structurată în 4 capitole.

În Capitolul prezent 1, se face o introducere generală în Teoria Aproximării şi o descriere rezumativă a tezei.

În Capitolul 2 întitulat "Aproximare cu operatori integrali neliniari", idea de bază este înlocuirea integralei clasice în expresiile unor operatori de aproximare liniari integrali, cu integrale mai generale (care nu mai sunt liniare), şi studierea proprietăţilor de aproximare ale operatorilor noi obţinuţi.

Capitolul are două secţiuni.

Astfel, în prima secţiune, întitulată "Aproximare cu operatori Durrmeyer-Choquet", în expresiile operatorilor clasici Bernstein-Durrmeyer, se înlocuieşte integrala Lebesgue cu integrala (neliniara) a lui Choquet în raport cu o funcţie de mulţime monotonă si submodulară. Se arată ca noii operatori (neliniari de data asta) ramîn uniform convergenţi la funcţia continua aproximată.

În a doua secţiune a capitolului, în clasica schemă de aproximare a lui Feller de generare a operatorilor liniari si pozitivi cu proprietăţi de aproximare, se înlocuieste integrala clasica liniara în raport cu o masură tip Lebesgue, cu integrala neliniară posibilistică. În acest mod, se generează noi operatori (neliniari) cu proprietăţi bune de aproximare, incluzînd şi aşa numiţii operatori max-produs studiaţi într-o lunga serie de lucrări de catre B. Bede, L. Coroianu şi S.G. Gal (care culminează cu monografia de cercetare [10] aparuta la editura Springer).

Tot în această secţiune se studiază şi proprietăţile cantitative de aproximare ale operatorilor posibilistici de convoluţie obţinuţi prin schema lui Feller adaptată.

În Capitolul 3 întitulat "Ordin arbitrar prin operatori Szász şi Baskakov", plecînd de la un şir $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, convergînd la zero cit de rapid dorim (adică arbitrar de rapid), se construiesc şiruri de operatori Baskakov, q-Baskakov, Szász-Stancu şi Baskakov-Stancu, care converg la funcţia aproximată $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu ordinul de convergenţa $\omega_1(f; \sqrt{\lambda_n})$ (în fapt, arbitrar de bun, deoarece λ_n poate să fie ales ca să tindă la zero, arbitrar de rapid).

Din acest motiv, rezultatele din acest capitol obţinute pentru operatori de tip Szász si Baskakov, sunt de tip definitiv (adică cele mai bune posibile). În acelaşi timp, rezultatele obţinute au şi un puternic caracter unificator, în sensul că se pot reobţine din ele toate rezultatele obţinute anterior de numeroşi alţi autori, prin diferite alegeri particulare ale nodurilor λ_n.

În Capitolul 4, întitulat "Operatori Száasz şi Baskakov complecşi", se aplică ideile din Capitolul 3, la cazul aproximării funcţiilor analitice de o variabilă complexă, prin operatori complecşi Szász, Szász-Kantorovich şi Baskakov.

În prima secţiune a capitolului, plecînd din nou de la un şir $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, convergînd la zero cît de rapid dorim (adică arbitrar de rapid), se construiesc şiruri de operatori Szász, Szász-Kantorovich şi Baskakov ataşaţi unei funcţii analitice si de creştere exponentială într-un disc compact cu centrul în origine, care aproximează functia f cu ordinul $O(\lambda_n)$ şi pentru care se obţin rezultate tip Voronovskaja, cantitative cu ordinul de aproximare $O(\lambda_n^2)$.

În a doua secţiune a capitolului, se consideră aceeaşi problematică ca şi în secţiunea întii, cu deosebirea că acum se consideră operatori de tip Baskakov-Faber, ataşaţi prin intermediul polinoamelor Faber, unei funcţii analitice de creştere exponentială într-o mulţime compactă arbitrară (care nu este neapărat un disc).

Şi rezultatele din această secţiune se pot considera de tip definitiv, în sensul că sunt cele mai bune posibile.

Rezultatele prezentate în această teză au fost obţinute de către autor, în colaborare cu domnul profesor universitar dr. Sorin Gal, cu Nazim Mahmodov, cu Lucian Coroianu, cu Sorin Trifa sau ca şi singur autor, în 6 lucrări :

1) Gal, Sorin G.; **Opriş, Bogdan D.**, *Approximation with an arbitrary order by modified Baskakov type operators.* **Appl. Math. Comput.**, 265 (2015), 329-332 (Factor de impact (FI ISI) pe 2015 : 1.345, Scor relativ de influenţă (SRI) pe 2016 : 0.733)

2) Gal, Sorin G.; **Opriş, Bogdan D.**, *Uniform and pointwise convergence of Bernstein-Durrmeyer operators with respect to monotone and submodular set functions.* **J. Math. Anal. Appl.** 424 (2015), no. 2, 1374-1379 (FI pe 2015 : 1.014, SRI pe 2016 : 1.125)

3) Gal, Sorin G.; **Opriş, Bogdan D.**, *Approximation of analytic functions with an arbitrary order by generalized Baskakov-Faber operators in compact sets.* **Complex Anal. Oper. Theory** 10 (2016), no. 2, 369-377 (FI ISI pe 2015 : 0.663, SRI pe 2016 : 0.724)

4) Coroianu, Lucian ; Gal, Sorin G. ; **Opriş, Bogdan D.**; Trifa, Sorin, *Feller's scheme in approximation by nonlinear possibilistic integral operators*, **Numer. Funct. Anal. and Optim.**, 38 (2017), No. 3, 327-343 (FI ISI pe 2015 : 0.649, SRI pe 2016 : 0.540).

5) Gal, Sorin G.; Mahmudov, Nazim I.; **Opriş, Bogdan D.**, *Approximation with an arbitrary order of Szász, Szász-Kantorovich and Baskakov complex operators in compact disks.* **Azerb. J. Math.** 6 (2016), no. 2, 3-12 (revistă recenzată în Mathematical Reviews şi Zentralblatt für Mathematik)

6) **Opriş, Bogdan, D.**, *Approximation with an arbitrary order by generalized Szász-Stancu and Baskakov-Stancu type operators*, **Anal. Univ. Oradea, fasc. math.**, XXIV (2017), No. 1, 75-81 (revistă B+, recenzată în Mathematical Reviews şi Zentralblatt für Mathematik).

Rezultatele originale obţinute în teză sunt următoarele :

Capitolul 2. Secţiunea 2.1 : Lema 2.1.2, Teorema 2.1.3, Teorema 2.1.4 ; **Rezultatele au fost publicate în lucrarea [44];**

Secţiunea 2.2 : Teorema 2.2.2, Lema 2.2.3, Teorema 2.2.4, Teorema 2.2.5, Corolarul 2.2.6, Teorema 2.2.7, Corolarul 2.2.8, Teorema 2.2.9, Corolarul 2.2.9 ; **Rezultatele au fost publicate în lucrarea [21]** ;

Capitolul 3. Secţiunea 3.1 : Lema 3.1.1, Corolarul 3.1.2, Teorema 3.1.3, Corolarul 3.1.4, Lema 3.1.5, Teorema 3.1.6, Corolarul 3.1.7, Corolarul 3.1.8 ; **Rezultatele au fost publicate în lucrarea [43];**

Secţiunea 3.2 : Lema 3.2.1, Teorema 3.2.2, Corolar 3.2.3 ; **Rezultatele au fost publicae in lucrarea [59];**

Secţiunea 3.3 : Lema 3.3.1, Teorema 3.3.2, Corolarul 3.3.3 ; **Rezultatele au fost publicate în lucrarea [59];**

Capitolul 4. Secţiunea 4.1 : Teorema 4.1.1, Teorema 4.1.2, Teorema 4.1.3 ; **Rezultatele au fost publicate în lucrarea [46];**

Secţiunea 4.2 : Definiţia 4.2.1, Lema 4.2.2, Lema 4.2.3, Teorema 4.2.4. **Rezultatele au fost publicate în lucrarea [45].**

Cuvinte cheie : funcţie de mulţime monotonă şi submodulară, integrala Choquet, operator Bernstein-Durrmeyer, convergenţă uniforma, convergenţă punctuală ; teoria posibilităţii, schema lui Feller, inegalitatea de tip Chebyshev, integrala posibilistica neliniara, operatori posibilistitici Picard, operatori posibilistici Gauss-Weierstrass, operatori posibilistici Poisson-Cauchy, operatori max-produs (posibilistici) de tip Bernstein ; operator generalizat Baskakov de o variabilă reală, operatori liniari şi pozitivi, modul de continuitate, ordin de aproximare, q-calcul diferenţial ; operatori complecşi generalizaţi Szász, Szász-Kantorovich şi Baskakov, rezultate de tip Voronovskaja ; mulţimi compacte, polinoame Faber, operator Baskakov-Faber generalizat.

Doresc să mulţumesc conducătorului ştiinţific, domnului profesor universitar dr. Sorin Gal, pentru deosebita îndrumare a mea pe parcursul elaborării tezei.

Cap. 2

Aproximare cu operatori integrali neliniari

În acest capitol, ne ocupăm de studiul proprietăţilor de aproximare a operatorilor integrali, în care integrala liniara clasica este înlocuita cu integrala neliniara Choquet şi cu integrala nelniara posibilistică. Capitolul consistă din două secţiuni : în prima secţiune ne ocupăm de operatorii Durrmeyer-Choquet, iar în secţiunea a doua ne ocupăm de operatorii posibilistici.

2.1 Aproximare cu operatori Durrmeyer-Choquet

În această secţiune ne ocupăm de operatorul multivariat (adică de mai multe variabile) Bernstein-Durmayer $M_{n,\mu}$, în termenii integralei Choquet în raport cu o funcţie de mulţime monotona şi submodulară μ, pe simplexul standard d-dimensional. Acest operator este neliniar şi generalizeaza operatorul liniar Bernstein-Durrmeyer în raport cu o masură Borel nenegativă şi marginită (incluzînd măsura Lebesgue). Demonstrăm convergenţa uniformă şi punctuală a lui $M_{n,\mu}(f)(x)$ la $f(x)$ pentru $n \to \infty$, generalizînd astfel rezultatele obţinute în lucrarile recente [11] and [12].

2.1.1 Introducere

Plecînd de la lucrarea [13], în alte trei lucrări recente [11], [12] şi [52], s-a obţinut convergenţa uniformă, punctuală şi în L^p a lui $M_{n,\mu}(f)(x)$ catre $f(x)$ (pentru $n \to \infty$), unde $M_{n,\mu}(f)(x)$ noteaza operatorul liniar multivariat Bernstein-Durrmeyer în raport cu o masură Borel nenegativă, marginită, μ, definita pe simplexul standard

$$S^d = \{(x_1, ..., x_d); 0 \leq x_1, ..., x_d \leq 1, \, 0 \leq x_1 + ... + x_d \leq 1\},$$

prin formula

$$M_{n,\mu}(f)(x)$$
$$= \sum_{|\alpha|=n} \frac{\int_{S^d} f(t) B_\alpha(t) d\mu(t)}{\int_{S^d} B_\alpha(t) d\mu(t)} \cdot B_\alpha(x) := \sum_{|\alpha|=n} c(\alpha, \mu) \cdot B_\alpha(x), \, x \in S^d, \, n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

unde f este presupusă μ-integrabila pe S^d. De asemenea, în formula (2.1), am notat $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$, cu $\alpha_j \geq 0$ pentru toţi $j = 0, ..., n$, $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n = n$ si

$$B_\alpha(x) = \frac{n!}{\alpha_0! \cdot \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n!} (1 - x_1 - x_2 - ... - x_d)^{\alpha_0} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_d^{\alpha_d}$$
$$:= \frac{n!}{\alpha_0! \cdot \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n!} \cdot P_\alpha(x).$$

În cele ce urmează, vom arata ca rezultatele din [11] şi [12] asupra convergentei punctuale şi uniforme , ramîn valabile în cadru mult mai general cînd μ este o funcţie de mulţime monotonă, marginită şi submodulară pe S^d

iar integralele aparînd în expresiile coeficientilor $c(\alpha, \mu)$ din formula (2.1), sunt integrale Choquet în raport cu μ.

În acest scop, prezentăm pe scurt conceptele şi rezultatele care vor fi folosite în secţiunile următoare.

Definiţia 2.1.1. Considerăm Ω o mulţime nevidă, $\mathcal{C}$ o σ-algebra de submulţimi ale lui Ω iar $(\Omega, \mathcal{C})$ un spaţiu măsurabil.

(i) (vezi, de exemplu, [63], p. 63) Funcţia de mulţimi $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ se va numi monotonă (sau capacitate), dacă $\mu(\emptyset) = 0$ iar $A, B \in \mathcal{C}$, cu $A \subset B$, implică $\mu(A) \le \mu(B)$. Dacă

$$\mu(A \bigcup B) + \mu(A \bigcap B) \le \mu(A) + \mu(B), \text{ pentru toţi } A, B \in \mathcal{C},$$

atunci μ este numită submodulară. In fine, μ se va numi normalizată, dacă $\mu(\Omega) = 1$.

(ii) (vezi [16], sau [63], p. 233) Fie $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$, normalizată şi monotonă. Funcţia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se numeşte $\mathcal{C}$-măsurabilă, dacă pentru oricare submulţime Borel $B \subset \mathbb{R}$, are loc $f^{-1}(B) \in \mathcal{C}$.

Dacă $f : \Omega \to \mathbb{R}$ este $\mathcal{C}$-măsurabilă, atunci pentru fiecare $A \in \mathcal{C}$, integrala Choquet va fi definită prin formula

$$(C) \int_A f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(F_\beta(f) \bigcap A) d\beta + \int_{-\infty}^0 [\mu(F_\beta(f) \bigcap A) - \mu(A)] d\beta,$$

unde $F_\beta(f) = \{\omega \in \Omega; f(\omega) \ge \beta\}$. Dacă $(C) \int_A f d\mu$ există în $\mathbb{R}$, atunci f se numeşte integrabilă Choquet pe A. Observăm că dacă $f \ge 0$ on A, atunci termenul din formula de mai sus care conţine integrala $\int_{-\infty}^0$, devine egal cu zero.

In cazul în care μ este măsura Lebesgue (adică numărabil aditivă), atunci integrala Choquet $(C) \int_A f d\mu$ se reduce la integrala Lebesgue.

Listăm mai jos nişte proprietăţi cunoscute de care vom avea nevoie în secţiunea principala.

Observaţii. Să presupunem ca $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ este o funcţie monotonă de mulţimi. Atunci, au loc următoarele proprietăţi :

(i) $(C)\int_A$ este pozitiv omogenă, adică pentru orice $a \geq 0$ avem

$$(C)\int_A af d\mu = a \cdot (C)\int_A f d\mu,$$

(pentru $f \geq 0$ vezi, de exemplu, [63], Teorema 11.2, (5), p. 228 iar pentru f de semn arbitrar, vezi, de exemplu, [23], p. 64, Propoziţia 5.1, (ii)).

(ii) În cazul general pentru f şi g, avem $(C)\int_A (f+g)d\mu \neq (C)\int_A f d\mu + (C)\int_A g d\mu$. Dacă μ este şi submodulară, atunci integrala Choquet este subliniară, adică

$$(C)\int_A (f+g)d\mu \leq (C)\int_A f d\mu + (C)\int_A g d\mu,$$

pentru toate funcţiile f, g de semn arbitrar şi mărginite inferior (vezi, de exemplu, [23], p. 75, Teorema 6.3).

Apoi, pentru orice $c \in \mathbb{R}$ şi f de semn arbitrar, are loc

$$(C)\int_A (f+c)d\mu = (C)\int_A f d\mu + c \cdot \mu(A),$$

(vezi, de exemplu, [63], pp. 232-233, sau [23], p. 65).

(iii) Dacă $f \leq g$ pe A atunci $(C)\int_A f d\mu \leq (C)\int_A g d\mu$ (vezi, de exemplu, [63], p. 228, Teorema 11.2, (3) pentru $f, g \geq 0$ şi p. 232 pentru f, g de semn arbitrar).

(iv) Fie $f \geq 0$. Din definiţia integralei Choquet, rezultă imediat ca dacă $A \subset B$ atunci

$$(C)\int_A f d\mu \leq (C)\int_B f d\mu$$

iar dacă, în plus, μ este finit subaditivă, atunci

$$(C)\int_{A\bigcup B} f d\mu \leq (C)\int_A f d\mu + (C)\int_B f d\mu.$$

(v) Din definiţia integralei Choquet, rezultă imediat că

$$(C)\int_A 1 \cdot d\mu(t) = \mu(A).$$

(vi) Exemple simple de funcţii de mulţimi μ, monotone şi submodulare, pot fi obţinute dintr-o masură probabilistă M definită pe o σ-algebră a lui Ω (adică $M(\emptyset) = 0$, $M(\Omega) = 1$ şi M este numărabil aditivă), prin formula $\mu(A) = \gamma(M(A))$, unde $\gamma : [0, 1] \to [0, 1]$ este o funcţie crescătoare şi concavă, iar $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$ (vezi, de exemplu, [23], pp. 16-17, Exemplu 2.1). Observăm că dacă de fapt M este doar finit aditivă, atunci $\mu(A) = \gamma(M(A))$ ramîne înca submodulară.

De asemenea, orice masură de posibilitate μ este monotonă şi submodulară. Întra-adevar, în timp ce monotonia este imediată din axioma $\mu(A \bigcup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$, submodularitatea este imediată din proprietatea $\mu(A \bigcap B) \leq \min\{\mu(A), \mu(B)\}$.

Reamintim aici ca o funcţie de mulţimi $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ (unde $\mathcal{P}(\Omega)$ noteaza famila tuturor submulţimilor lui Ω) se numeşte măsură de posibilitate pe mulţimea nevidă Ω, dacă ea satisface axiomele $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$ şi $\mu(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sup\{\mu(A_i); i \in I\}$ pentru toate $A_i \in \Omega$, şi orice familie de indici I.

Este binecunoscut faptul ca orice distribuţie de posibilitate (pe Ω), adică o funcţie $\lambda : \Omega \to [0, 1]$, astfel încît $\sup\{\lambda(s); s \in \Omega\} = 1$, induce o măsură de posibilitate $\mu_\lambda : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, dată de formula $\mu_\lambda(A) = \sup\{\lambda(s); s \in A\}$, pentru toate $A \subset \Omega$, $A \neq \emptyset$, $\mu_\lambda(\emptyset) = 0$ (vezi, de exemplu, [27], Capitol 1).

2.1.2 Rezultate principale

Fie $\mathcal{B}_{S^d}$ sigma algebra a tuturor submulţimilor Borel measurabile din $\mathcal{P}(S^d)$ iar $\mu : \mathcal{B}_{S^d} \to [0, +\infty)$ o funcţie de mulţimi normalizata, monotonă şi submodulară pe $\mathcal{B}_{S^d}$.

Spunem ca μ este strict pozitiva dacă $\mu(A \cap S^d) > 0$, pentru fiecare mulţime deschisă $A \subset \mathbb{R}^n$ cu $A \cap S^d \neq \emptyset$.

De asemenea, prin definiţie, suportul lui μ, $supp(\mu)$, este mulţimea tuturor $x \in S^d$ cu proprietatea ca pentru fiecare vecinatate deschisă $N_x \in \mathcal{B}_{S^d}$ a lui x, avem $\mu(N_x) > 0$.

Notam cu $C_+(S^d)$ spaţiul tuturor funcţiilor pozitive şi continue pe S^d iar cu $L_\mu^\infty(S^d)$, spaţiul funcţiilor reale, $\mathcal{B}_{S^d}$-măsurabile f, astfel că există o mulţime $E \subset S^d$ (depinzînd de f) cu $\mu(E) = 0$ iar f este marginită pe $S^d \setminus E$.

Notam

$$M_{n,\mu}(f)(x) = \sum_{|\alpha|=n} c(\alpha, \mu) \cdot B_\alpha(x),\ x \in S^d,\ n \in \mathbb{N}.$$

Aplicînd Observaţia 2.2, (i), rezultă uşor

$$c(\alpha, \mu) = \frac{(C)\int_{S^d} f(t)B_\alpha(t)d\mu(t)}{(C)\int_{S^d} B_\alpha(t)d\mu(t)} = \frac{(C)\int_{S^d} f(t)P_\alpha(t)d\mu(t)}{(C)\int_{S^d} P_\alpha(t)d\mu(t)}.$$

Este bine de mentionat aici ca prin normalizarea funcţiei de mulţimi μ, nu se pierde generalitatea şi că, condiţia $supp(\mu) \setminus \partial S^d \neq \emptyset$, garanatează că $(C)\int_{S^d} B_\alpha(t)d\mu(t) > 0$, pentru toţi B_α.

Pentru demonstraţiile rezultatelor principale, avem nevoie de următoarele rezultate auxiliare.

Lema 2.1.2. (Gal-Opriş, [44]) *Să presupunem că μ este o funcţie de mulţimi, normalizată, monotonă şi submodulară. Dacă definim T_n : $C_+(S^d) \to \mathbb{R}_+$ prin*

$$T_n(f) = (C)\int_{S^d} f(t)P_\alpha(t)d\mu(t), f \in C_+(S^d), n \in \mathbb{N},\ |\alpha| = n,$$

atunci pentru toate $f, g \in C_+(S^d)$, avem

$$|T_n(f) - T_n(g)| \leq T_n(|f - g|) = (C)\int_{S^d} |f(t) - g(t)| \cdot P_\alpha(t)d\mu(t).$$

Primul rezultat principal este analog Teoremei 1 din [11] şi se referă la aproximare uniformă.

Teorema 2.1.3. (Gal-Opriş, [44]) *Fie μ o funcţie de mulţimi, normalizata, monotonă, submodulară şi strict pozitiva pe $\mathcal{B}_{S^d}$, astfel încît $supp(\mu) \setminus \partial S^d \neq \emptyset$. Pentru fiecare $f \in C_+(S^d)$ avem*

$$\lim_{n \to \infty} \|M_{n,\mu}(f) - f\|_{C(S^d)} = 0,$$

unde $\|F\|_{C(S^d)} = \max\{|F(x)|; x \in S^d\}$.

Al doilea rezultat principal este un analog al Teoremei 1 din [12] şi se refera la convergenţa punctuală. În acest sens, analizînd raţionamentele din demonstraţia Teoremei 1 din [12] şi folosind aceleaşi proprietăţi ale integralei Choquet ca şi în demonstraţia Teoremei 2.1.3 de mai sus, rezultă uşor următoarea.

Teorema 2.1.4. (Gal-Opriş, [44]) *Fie μ o funcţie de mulţimi, normalizata, monotonă, submodulară pe $\mathcal{B}_{S^d}$, cu $supp(\mu) \setminus \partial S^d \neq \emptyset$. Dacă $f \in L^\infty_\mu(S^d)$ şi $f(x) \geq 0$, pentru toţi $x \in S^d$, atunci în fiecare punct $x \in supp(\mu)$ unde f ese continuă, avem*

$$\lim_{n \to \infty} |M_{n,\mu}(f)(x) - f(x)| = 0.$$

Observaţii. 1) Potrivit cu Observaţia anterioara, (vi), un exemplu de funcţie de mulţimi μ, submodulară şi satisfacînd toate cerinţele din enunţurile Teoremelor 2.1.3 şi 2.1.4, poate fi simplu definita prin $\mu(A) = \sqrt{\nu(A)}$, unde ν este o măsură Borel de probabilitate ca şi în [11] şi [12]. De asemenea, este bine de notat ca datorita nonlinearitaţii integralei Choquet (vezi Observaţia (ii)), spre deosebire de cazul din [11], [12], operatorul Bernstein-Durrmeyer-Choquet este nelinear.

2) Pozitivitatea funcţiei f din Teoremele 2.1.3 şi 2.1.4 este necesară din cauza pozitiv omogeneitaţii integralei Choquet, aplicata în demonstrarea relaţie. Totuşi, dacă f este de semn arbitrar pe S^d, atunci rezultă imediat ca enunţurile Teoremelor 2.1.3 şi 2.1.4 au loc pentru operatorii Bernstein-Durrmeyer-Choquet uşor modificaţi, definiţi prin

$$M^*_{n,\mu}(f)(x) = M_{n,\mu}(f-m)(x) + m,$$

unde $m \in \mathbb{R}$ este o margine inferioară pentru f, adică $f(x) \geq m$, pentru toţi $x \in S^d$.

2.2 Aproximare cu operatori integrali posibilistici

Prin analogie cu schema generală a lui Feller folosită în construcţia şirurilor de operatori liniari şi pozitivi, convergenţi la funcţia aproximata, în această secţiune vom introduce şi studia schema lui Feller bazata pe înlocuirea integralei clasice, cu integrala posibilistică. În acest mod, se vor construi şiruri de operatori neliniari, care converg la funcţia aproximata. În particular, în cazul discret, se reobţin aşa numiţii operatori de tip max-produs Bernstein şi rezultatele lor calitative de convergenţa. De asemenea, operatori posibilistici neliniari de tip Picard, Gauss-Weierstrass şi Poisson-Cauchy sunt studiaţi iar cei de tipul de la Vallée-Poussin, Fejér şi Jackson sunt mentionaţi pentru direcţii viitoare de cercetare.

2.2.1 Introducere

În lucrarea foarte recentă Gal [32], aşa numiţii operatori max-produs de tip Bernstein, tip Favard-Szász-Mirakjan, tip Baskakov, tip Bleimann-Butzer-

Hahn şi tip Meyer-König-Zeller (ale căror proprietăti cantitative de aproximare au fost studiate intensiv în multe lucrări, ca de exemplu, în [8], [9], [17]-[20], vezi şi bibliografia din [32]), au fost în mod natural interpretaţi ca şi valori de expectanţa posibilistică ale unor variabile fuzzy particulare discrete, avînd variate distribuţii de posibilitate. Folosind idea lui Bernstein din [14], (vezi de asemenea mult mai accesibila lucrare [51]), dar bazaţi pe o inegalitate de tip Chebyshev din teoria posibilităţii, aceste interpretări au permis obţinerea unor rezultate calitative de convergenţă.

Este bine de menţionat aici căteoria posibilitătii este o teoria matematică bine dezvoltată, ocupîndu-se cu anumite tipuri de fenomene de incertitudine, fiind considerată ca şi o alternativă la teoria probabilităţilor (vezi, de exemplu, [27], [22]).

Scopul principal al acestei secţiuni este de a prezenta binecunoscuta schema probabilistică a lui Feller , în cadrul teoriei posibilitaţii. În particular, această schemă va permite nu doar o alta abordare a operatorilor max-produs, dar şi introducerea a multor altor operatori posibilistici de aproximare.

Mai întîi, să reamintim că o schemă clasică în construirea de şiruri de operatori liniari şi pozitivi, este schema probabilistică a lui Feller (vezi [29], Capitolul 7, sau mai detailat, [3], secţiunea 5.2, pp. 283-319).

Descrisă pe scurt, ea constă în ataşarea la o funcţie continuă şi marginită $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a unor operatori de aproximare de forma

$$L_n(f)(x) = \int_\Omega f \circ Z(n, x) dP = \int_{\mathbb{R}} f dP_{Z(n,x)},$$

unde P este o măsură de probabilitate pe spaţiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{C})$, $Z : \mathbb{N} \times I \to \mathcal{M}_2(\Omega)$, cu I un subinterval a lui $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_2(\Omega)$ reprezintă spaţiul tuturor variabilelor aleatoare de patrat integrabile pe Ω în raport cu P iar

$P_{Z(n,x)}$ denota distibutia variabilei aleatoare $Z(n,x)$ în raport cu P definita prin $P_{Z(n,x)}(B) = P(Z^{-1}(n,x)(B))$, pentru toate submulţimile lui $\mathbb{R}$, B-Borel măsurabile. Apoi, notînd cu $E(Z(n,x))$ şi $Var(Z(n,x))$ expectanţa şi varianţa variabilei aleatoare $Z(n,x)$, în mod respectiv, şi presupunînd că $\lim_{n\to\infty} E(Z(n,x)) = x$, $\lim_{n\to\infty} Var(Z(n,x)) = 0$, în mod uniform pe I, este demonstrat că pentru toate f ca mai sus, $L_n(f)$ converge la f uniform pe fiecare subinterval compact al lui I.

În plus, dacă pentru variabila aleatoare $Z(n,x)$, densitatea ei de probabilitate $\lambda_{n,x}$ este cunoscuta, atunci pentru orice f putem scrie

$$\int_{\mathbb{R}} f dP_{Z(n,x)} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \lambda_{n,x}(t) dP(t),$$

formula care este folositoare în construirea de operatori concreti $L_n(f)(x)$.

În lucrarea foarte recenta Gal [33], schema lui Feller a fost generalizata la cazul cînd integrala liniara clasica, este înlocuita cu integrala neliniara Choquet în raport cu o funcţie de mulţimi, monotonă şi subaditivă.

Prin analogie cu consideraţiile de mai sus, în subsecţiunea următoare vom considera o schemă Feller bazata pe integrala posibilistică, pentru construirea de şiruri convergente de operatori neliniari.

În particular, în cazul discret, se reobţin aşa numiţii operatori de tip max-produs Bernstein şi rezultatele lor calitative de convergenţa. De asemenea, operatori posibilistici neliniari de tip Picard, Gauss-Weierstrass şi Poisson-Cauchy sunt studiaţi, iar cei de tipul de la Vallée-Poussin, Fejér şi Jackson sunt mentionati pentru directii viitoare de cercetare.

2.2.2 Schema lui Feller în termenii integralei posibilistice

Mai întii sumarizăm concepte binecunoscute pentru variabile fuzzy discrete şi ne-discrete din teoria posibilităţii, care ne vor fi utile în celelalte subsecţiuni ale acestei secţiuni.

După cum se vede uşor, aceste concepte sunt corespondente celor din teoria probabilitaţilor, precum variabila aleatoare, distribuţie de probabilitate, valoare medie (expectanţa), probabilitate, etc. Pentru detalii, se pot consulta, de exemplu, [27] şi [22].

Definiţia 2.2.1. Fie Ω o mulţime nevidă, discretă (adică cel mult numărabila) sau o mulţime ne-discretă.

(i) O variabilă fuzzy X este o aplicaţie $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Dacă Ω este o mulţime discretă, atunci X este numită variabilă fuzzy discretă. Dacă Ω este finita atunci X este numită o variabilă fuzzy finita. Dacă Ω este ne discretă, atunci X este numită variabilă fuzzy ne-discretă.

(ii) O distribuţie posibilistică (pe Ω), este o funcţie $\lambda : \Omega \to [0, 1]$, astfel încît $\sup\{\lambda(s); s \in \Omega\} = 1$.

(iii) Expectanţa posibilistică a unei variabile fuzzy X (pe Ω), cu distribuţia posibilistică λ este definită prin $M_{sup}(X) = \sup_{s\in\Omega} X(s)\lambda(s)$. Varianţa posibilistică a lui X este definita prin

$$V_{sup}(X) = \sup\{(X(s) - M_{sup}(X))^2\lambda(s); s \in \Omega\}.$$

(iv) Dacă Ω este o mulţime nevidă, atunci o măsură posibilistică este o aplicaţie $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, satisfacînd axiomele $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ şi $P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sup\{P(A_i); i \in I\}$ pentru toate $A_i \in \Omega$, şi orice I, o familie de indici cel mult numărabila (dacă Ω este finita, atunci în mod evident şi I trebuie să fie finita). Observăm că dacă $A, B \subset \Omega$, satisface $A \subset B$, atunci din ultima proprietate rezultă uşor că $P(A) \leq P(B)$ şi că $P(A \bigcup B) \leq P(A) + P(B)$.

Este binecunoscut faptul (vezi, de exemplu, [27]) că orice distribuţie posibilistică λ pe Ω, induce o măsură de posibilitate $P_\lambda : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, dată de formula $P_\lambda(A) = \sup\{\lambda(s); s \in A\}$, pentru toate $A \subset \Omega$.

Pentru fiecare variabilă fuzzy (posibilistică) $X : \Omega \to \mathbb{R}$, putem defini măsura ei de distribuţie în raport cu măsura de posibilitate P indusă de distribuţia posibilistică λ, prin formula

$$P_X : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+,\ P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}),\ B \in \mathcal{B},$$

unde $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ iar $\mathcal{B}$ este clasa tuturor submulţimilor lui $\mathbb{R}$ care sunt Borel măsurabile. Este clar că P_X este o măsură posibilistică pe $\mathcal{B}$, indusă de catre distribuţia posibilistică definită de

$$\lambda_X^* : \mathbb{R} \to [0, 1],\ \lambda_X^*(t) = \sup\{\lambda(\omega); \omega \in X^{-1}(t)\}, \quad \text{if } X^{-1}(t) \neq \emptyset,$$

$$\lambda_X^*(t) = 0, \quad \text{if } X^{-1}(t) = \emptyset.$$

(v) (vezi, de exemplu, [22]) Integrala posibilistică a lui $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ pe $A \subset \Omega$, în raport cu măsura posibilistică P_λ indusă de catre distribuţia posibilistică λ, este definita prin

$$(Pos) \int_A f(t) dP_\lambda(t) = \sup\{f(t) \cdot \lambda(t); t \in A\}.$$

Este clar că această Definiţie este un caz particular al integralei posibilistice în raport cu o semi-norma t, introdusă în [22], luînd acolo $t(x, y) = x \cdot y$. De asemenea, notînd $\Lambda_1 : \Omega \to [0, 1]$, $\Lambda_1(x) = 1$, pentru toţi $x \in \Omega$, este imediat că putem scrie

$$(Pos) \int_A f(t) dP_{\Lambda_1}(t) = \sup\{f(t); t \in A\},$$

$$(Pos)\int_A f(t)dP_\lambda(t) = (Pos)\int_A f(t)\cdot\lambda(t)dP_{\Lambda_1}$$

şi $dP_\lambda(t) = \lambda(t)\cdot dP_{\Lambda_1}(t)$.

Este de asemenea bine de mentionat că definiţia conceptului de mai sus de integrala posibilistică, are un sens doar pentru funcţii cu valori pozitive, deoarece, de exemplu, dacă notăm $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, atunci pentru price $f : \Omega \to \mathbb{R}_-$ cu $f(\omega_0) = 0$ pentru un anumit $\omega_0 \in A \subset \Omega$, primim $(Pos)\int_A f(t)dP_\lambda(t) = 0$.

În cele ce urmează, de asemenea avem nevoie în cadrul teoriei posibilitaţii de o analoaga a inegalitaţii lui Chebyshev din teoria probabilitaţilor.

Teorema 2.2.2. (vezi [32]) *Fie Ω o mulţime nevidă, $\lambda : \Omega \to [0, 1]$ şi considerăm $X : \Omega \to \mathbb{R}$ cu distribuţia de posibilitate λ. Atunci, pentru orice $r > 0$ avem*

$$P_\lambda(\{s \in \Omega; |X(s) - M_{sup}(X)| \geq r\}) \leq \frac{V_{sup}(X)}{r^2},$$

unde P_λ este măsură de posibilitate indusă de λ.

Acest rezultat a fost demonstrat în Teorema 2.2 din [32] pentru Ω mulţime discretă, dar analizînd demonstraţia ei, este evident că ea ramîne adevarata şi în cazul ne-discret.

În cazul particular cînd $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$, în termenii integralei posibilistice, inegalitatea lui Chebyshev poate fi scrisă ca si

$$P_\lambda(\{s \in \Omega; |X(s) - (Pos)\int_\Omega X(t)dP_\lambda(t)| \geq r\})$$
$$\leq \frac{(Pos)\int_\Omega (X - (Pos)\int_\Omega X(t)dP_\lambda(t))^2 dP_\lambda}{r^2}.$$

În cele ce urmează, prin analogie cu schema lui Feller din teoria probabilitaţilor, care produce operatori liniari şi pozitivi cu proprietăţi frumoase de aproximare, vom considera o schemă de aproximare analoaga, dar care va produce operatori de aproximare neliniari, construiti cu ajutorul integralei posibilistice.

În acest scop, să notam cu $Var^b(\Omega)$ clasa tuturor $X : \Omega \to \mathbb{R}$ marginite şi cu $Var^b_+(\Omega)$ clasa tuturor $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$, marginite. De asemenea, pentru $I \subset \mathbb{R}$ un interval (marginit sau nemarginit), să considerăm aplicaţia Z definita pe $\mathbb{N} \times I \to Y$ unde $Y = Var^b(\Omega)$ sau $Y = Var^b_+(\Omega)$, depinzînd de context.

Observăm că dacă pentru orice $(n, x) \in \mathbb{N} \times I$ avem $Z(n, x) \in Var^b_+(\Omega)$, atunci pentru conceptele de expectanţa posibilistică şi varianţa posibilistică a lui $Z(n, x)$ (definite prin Definiţia 2.2.1, (iii), de mai sus) putem scrie formulele integrale

$$M_{sup}(Z(n, x)) = (Pos) \int_{\Omega} Z(n, x)(t) dP_{\lambda}(t) := \alpha_{n,x}, \tag{2.2}$$

$$V_{sup}(Z(n, x)) = (Pos) \int_{\Omega} (Z(n, x)(t) - \alpha_{n,x})^2 dP_{\lambda}(t) := \sigma^2_{n,x}. \tag{2.3}$$

Acum, potrivit schemei lui Feller, la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ să ataşam un şir de operatori prin formula

$$L_n(f)(x) := (Pos) \int_{\mathbb{R}} f(t) dP_{Z(n,x)}(t),\ n \in \mathbb{N},\ x \in I, \tag{2.4}$$

unde $P_{Z(n,x)}$ este definita ca şi în Definiţia 2.2.1, (iv), adică în raport cu măsura de posibilitate P_{λ} indusă de distribuţia posibilistică λ.

Mai întîi, pentru operatorii daţi de (2.4), are loc următoarea formulă de reprezentare.

Lema 2.2.3. (Coroianu-Gal-Opriş-Trifa, [21]) *Cu notaţiile anterioare, dacă $Z : \mathbb{N} \times I \to Var^b(\Omega)$ si, în plus, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ este marginită pe $\mathbb{R}$, atunci are loc formula*

$$L_n(f)(x) = (Pos) \int_{\mathbb{R}} f(t) dP_{Z(n,x)}(t) = (Pos) \int_{\Omega} f \circ Z(n, x) dP_{\lambda},\ x \in I \tag{2.5}$$

şi ambele integrale sunt finite.

Dacă $f : I \to \mathbb{R}_+$ *este marginită pe* I*, unde* $I \subset \mathbb{R}$ *este un subinterval şi* $P_\lambda(\{\omega \in \Omega; Z(n,x)(\omega) \notin I\}) = 0$*, atunci avem*

$$L_n(f)(x) = (Pos)\int_{\mathbb{I}} f(t)dP_{Z(n,x)}(t) = (Pos)\int_{\Omega} f \circ Z(n,x)dP_\lambda.$$

Observaţie. În mod explicit, formula (2.5) poate fi scrisă ca

$$L_n(f)(x) = \sup\{f(t)\cdot \lambda^*_{Z(n,x)}(t); t \in \mathbb{R}\} = \sup\{f[Z(n,x)(t)]\cdot \lambda(t); t \in \Omega\},$$

unde $\lambda^*_{Z(n,x)}(t)$ este definita în raport cu λ, ca şi în Definiţia 2.2.1, (iv).

Deoarece următorul rezultat principal foloseste cantitatea $\alpha_{n,x}$ dată de formula (2.2), în mod necesar vom presupune ca $Z(n,x) \in Var^b_+(\Omega)$.

Are loc următorul rezultat de tip Feller.

Teorema 2.2.4. (Coroianu-Gal-Opriş-Trifa, [21]) *Fie* $I \subset \mathbb{R}$ *un subinterval,* $Z(n,x) \in Var^b_+(\Omega)$ *pentru toţi* $(n,x) \in \mathbb{N}\times I$ *şi să presupunem că* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *este uniform continuă şi marginită pe* $\mathbb{R}$*. Cu notaţile din formulele (2.2), (2.3) şi din enunţul Lemei 2.2.3, dacă* $\lim_{n\to+\infty}\alpha_{n,x} = x$ *şi* $\lim_{n\to+\infty}\sigma^2_{n,x} = 0$*, uniform în raport cu* $x \in I$*, atunci* $\lim_{n\to\infty} L_n(f)(x) = f(x)$*, uniform în raport cu* $x \in I$*.*

Observaţii. 1) Analizînd demonstraţia Teoremei 2.2.4, rezultă uşor că fara nici o schimbare în demonstraţia ei, constructia operatorilor $L_n(f)(x)$ poate fi uşor generalizata considerînd că nu doar Z depinde de n şi x, dar că şi λ (şi în consecinţă şi P_λ) pot depinde de n şi x. Mai exact, putem considera $L_n(f)(x)$ de forma mai geerala

$$L_n(f)(x) := (Pos)\int_{\mathbb{R}} f(t)dP_{Z(n,x)}(t) = (Pos)\int_{\Omega} f\circ Z(n,x)dP_{\lambda_{n,x}},\ x \in I,$$

unde $P_{\lambda_{n,x}} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $(n,x) \in \mathbb{N}\times I$, este o familie de masuri posibilistice induse de o familie de distribuţii posibilistice $\lambda_{n,x}$, $(n,x) \in \mathbb{N}\times I$.

Această Observaţie este folositoare în producerea de exemple concrete de astfel de operatori.

De asemenea, este bine de notat aici că dacă presupunem că $P_\lambda(\{\omega \in \Omega; Z(n,x)(\omega) \notin I\} = 0$, atunci operatorii L_n pot fi ataşaţi la funcţii continue, mărginite definite pe subinterval $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}_+$, extinzînd f la o funcţie continuă şi marginită, $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ şi tinînd cont the relaţia evidenta

$$(Pos)\int_{\mathbb{R}} f^* dP_{Z(n,x)} = (Pos)\int_I f dP_{Z(n,x)}.$$

2) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ nu este neaparat pozitiva, dar este marginită, atunci în mod evident că există o constantă $c > 0$ astfel încît $f(x) + c \geq 0$, pentru toţi $x \in I$ şi în acest caz, pentru $n \in \mathbb{N}$, putem ataşa lui f operatorii de aproximare

$$L_n(f)(x) = (Pos)\int_{\mathbb{I}} (f(t) + c) dP_{Z(n,x)}(t) - c$$

$$= (Pos)\int_\Omega (f + c) \circ Z(n,x) dP_{\lambda_{n,x}} - c.$$

3) Ca şi cazuri particulare de operatori pentru care proprietăţile calitative de aproximare pot fi deduse prin schema lui Feller din Teorema 2.2.4, sunt toţi aşa numiţii operatori Bernstein de tip max-produs. Astfel, de exemplu, dacă luam $\Omega = \{0, 1, ..., n\}$, $I = [0, 1]$, $Z(n,x)(k) = \frac{k}{n}$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, $\lambda_{n,x}(k) = \frac{p_{n,k}(x)}{\bigvee_{j=0}^n p_{n,j}(x)}$, cu $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ şi $\bigvee_{j=0}^n p_{n,j}(x) = \max_{j=\{0,\ldots,n\}}\{p_{n,j}(x)\}$, atunci prin formula din Lema 2.2.3 şi din definiţia integralei posibilistice, primim

$$L_n(f)(x) = (Pos)\int_\Omega f \circ Z(n,x) dP_{\lambda_{n,x}} = \frac{\bigvee_{k=0}^n p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)}{\bigvee_{k=0}^n p_{n,k}(x)},$$

care sunt exact operatorii Bernstein max-produs $B_n^{(M)}(f)(x)$. Proprietăţile calitative de aproximare ale lui $B_n^{(M)}(f)(x)$ pot fi deduse acum din Teorema 2.2.4.

În mod analog, dacă, de exemplu, luam $\Omega = \{0, 1, ..., k, ..., \}$ numărabilă şi $P_{\lambda_{n,x}}$ măsura posibilistică indusă de distribuţia posibilistică

$$\lambda_{n,x}(k) = \frac{s_{n,k}(x)}{\bigvee_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)}, x \in [0, +\infty), k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},$$

cu $s_{n,k}(x) = \frac{(nx)^k}{k!}$ şi $\bigvee_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) = \max_{k=\{0,1,...,k,...,\}}\{s_{n,k}(x)\}$, atunci formula din Lema 2.2.3 ne da operatorii max-produs Favard-Szász-Mirakjan.

Într-un mod similar, din Teorema 2.2.4 pot fi obţinute proprietăţi de aproximare calitative şi pentru alti operatori de tip max-produs, precum pentru cei de tip Baskakov, de tip Bleimann-Butzer-Hahn şi de tip Meyer-König-Zeller.

Este bine de mentionat aici că folosind alte metode (directe), pentru acesti operatori s-au obţinut estimări cantitative într-o serie lunga de lucrari, vezi de exemplu, [8], [9], [17]-[20] şi bibliografiile lor.

2.2.3 Aproximare cu operatori posibilistici de convoluţie

În această subsecţiune, folosind schema lui Feller anterioara, introducem şi studiem variante posibilistice ale operatorilor liniari clasici de convolutie ai lui Picard, Gauss-Weierstrass şi Poisson-Cauchy, date în mod formal prin formulele

$$P_n(f)(x) = \frac{n}{2}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-n|x-t|}dt, \quad W_n(f)(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-n|t-x|^2}dt,$$

$$Q_n(f)(x) = \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{n^2(t-x)^2+1},$$

în mod respectiv, unde $n \in \mathbb{N}$ and $x \in \mathbb{R}$.

Notînd $\Omega = \{0, 1, ..., k, ...,\}$ şi $Z(n, x)$ ca şi în Observaţia 3) anterioara şi definind $\lambda_{n,x}(k) = \frac{e^{-n|x-k/n|}}{\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} e^{-n|x-k/n|}}$, prin formula din Lema 2.2.3

$$L_n(f)(x) = (Pos) \int_{\Omega} f \circ Z(n, x) dP_{\lambda_{n,x}},$$

obţinem următorii operatori posibilistici (max-produs !) discreti, ai lui Picard

$$P_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/n) \cdot e^{-n|x-k/n|}}{\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-n|x-k/n|}}.$$

În mod similar, pentru $\lambda_{n,x}(k) = \frac{e^{-n(x-k/n)^2}}{\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} e^{-n(x-k/n)^2}}$ si

$$\lambda_{n,x}(k) = \frac{1/(n^2(x - k/n)^2 + 1)}{\bigvee_{k=0}^{\infty} 1/(n^2(x - k/n)^2 + 1)},$$

obţinem următorii operatori posibilistici (max-produs !) discreţi

$$W_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/n) \cdot e^{-n(x-k/n)^2}}{\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-n(x-k/n)^2}}, \text{ - de tip Gauss-Weierstrass,}$$

$$Q_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/n) \cdot \frac{1}{n^2(x-k/n)^2+1}}{\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2(x-k/n)^2+1}}, \text{ - de tip Poisson-Cauchy.}$$

Să notăm cu $BUC_+(\mathbb{R})$, spaţiul tuturor funcţiilor uniform continue, mărginite şi cu valori pozitive. Convergenţa acestor operatori poate fi demonstratată folosind Teorema 2.2.4. Totuşi, putem obţine şi următoarele estimări cantitative, prin demonstraţie directă, după cum urmează.

Teorema 2.2.5. (Coroianu-Gal-Opriş-Trifa, [21]) *Pentru orice* $f \in BUC_+(\mathbb{R})$ *avem*

$$|P_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2 \cdot \omega_1(f; 1/n)_{\mathbb{R}}.$$

De asemenea, putem considera trunchiaţii operatorului $P_n^{(M)}$. În acest sens, putem enunţa următorul.

Corolar 2.2.6. (Coroianu-Gal-Opriş-Trifa, [21]) *Fie $(m(n))_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere naturale cu proprietatea ca $\lim_{n\to\infty}\frac{m(n)}{n}=+\infty$ iar pentru $f\in BUC_+(\mathbb{R})$ să definim*

$$T_n^{(M)}(f)(x)=\frac{\bigvee_{k=-m(n)}^{+m(n)} f(k/n)\cdot e^{-n|x-k/n|}}{\bigvee_{k=-m(n)}^{+m(n)} e^{-n|x-k/n|}}.$$

Atunci, $T_n^{(M)}(f)$ converge uniform (pentru $n\to\infty$) la f, pe orice subinterval compact de forma $[-A,A]$, $A>0$.

În cele ce urmează, prezentăm rezultate similare pentru ceilalţi operatori posibilistici, $W_n^{(M)}(f)(x)$, $Q_n^{(M)}(f)(x)$ şi trunchiaţii lor corespunzatori daţi de

$$S_n^{(M)}(f)(x)=\frac{\bigvee_{k=-m(n)}^{+m(n)} f(k/n)\cdot e^{-n(x-k/n)^2}}{\bigvee_{k=-m(n)}^{+m(n)} e^{-n(x-k/n)^2}}$$

si

$$U_n^{(M)}(f)(x)=\frac{\bigvee_{k=-m(n)}^{+m(n)} f(k/n)\cdot \frac{1}{n^2(x-k/n)^2+1}}{\bigvee_{k=-m(n)}^{+m(n)} \frac{1}{n^2(x-k/n)^2+1}}.$$

Teorema 2.2.7. (Coroianu-Gal-Opriş-Trifa, [21]) *Pentru toţi $f\in BUC_+(\mathbb{R})$ avem*

$$|W_n^{(M)}(f)(x)-f(x)|\le 2\cdot\omega_1(f;1/\sqrt{n})_{\mathbb{R}}.$$

Corolar 2.2.8. (Coroianu-Gal-Opriş-Trifa, [21]) *Fie $(m(n))_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere naturale cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty}\frac{m(n)}{n}=+\infty$. Atunci, pentru orice $f\in BUC_+(\mathbb{R})$, $S_n^{(M)}(f)$ converge uniform (pentru $n\to\infty$) la f, pe orice subinterval compact de forma $[-A,A]$, $A>0$ ($S_n^{(M)}(f)$ este definit chiar deasupra enunţului Teoremei 2.2.7).*

Teorema 2.2.9. (Coroianu-Gal-Opriş-Trifa, [21]) *Pentru toate $f \in BUC_+(\mathbb{R})$ avem*

$$|Q_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2 \cdot \omega_1(f; 1/(2n))_{\mathbb{R}}.$$

Corolar 2.2.10. (Coroianu-Gal-Opriş-Trifa, [21]) *Fie $(m(n))_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere naturale cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} = +\infty$. Atunci, pentru orice $f \in BUC_+(\mathbb{R})$, $U_n^{(M)}(f)$ converge uniform (pentru $n \to \infty$) la f, pe orice subinterval compact de forma $[-A, A]$, $A > 0$ ($U_n^{(M)}(f)$ este definit tocmai deasupra enunţului Teoremei 2.2.7).*

Observaţii. 1) Să notăm ca în [28], Favard a introdus forma discretă a integralei singulare clasice a lui Gauss-Weierstrass, prin formula

$$\mathcal{F}_n(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/n) \cdot e^{-n(x-k/n)^2}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

şi a demonstrat că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, cu cresterea exponetiala $|f(t)| \leq Me^{At^2}$ pentru toţi $t \in \mathbb{R}$ (aici $M, A > 0$), atunci $\mathcal{F}_n(f)(x)$ converge la $f(x)$ punctual pentru fiecare $x \in R$ şi uniform în orice subinterval compact al lui $\mathbb{R}$. Alte proprietăţi de aproximare ale lui $\mathcal{F}_n(f)(x)$, în mod special, în variate spaţii ponderate, au fost studiate în multe lucrari, vezi, de exemplu, [1] şi bibliogafia de acolo.

Exact ca şi pentru alţi operatori max-produs studiaţi în lucrări anterioare (vezi, de exemplu, [17]-[20]), legat de contrapartea ei liniara, $\mathcal{F}_n(f)(x)$, pentru operatorii max-produs $W_n^{(M)}(f)(x)$, poate fi demonstrat că în anumite subclase de funcţii f, au proprietăţi de aproximare globală mai bune şi prezinta rezultate de localizare mult mai puternice.

Mai precis, ei reprezintă local, mult mai bine (probabil cel mai bine) functia aproximata, în sensul că dacă f şi g coincid pe un subinterval strict inclus în $I \subset \mathbb{R}$, atunci pentru orice subinterval I_0 strict inclus în I, $W_n^{(M)}(f)$ şi $W_n^{(M)}(g)$ coincid în I_0 pentru n suficient de mare.

2) Folosind schema posibilistică Feller, putem introduce pentru studiu variante posibilistice ale operatorilor liniari clasici, trigonometrici de convolutie, ai lui de la Vallée-Poussin, Fejér şi Jackson, în mod formal definiţi prin formulele

$$V_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)k_n(x-t)dt, \;\; F_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)b_n(x-t)dt,$$

$$J_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)c_n(x-t)dt,$$

în mod respectiv, unde f este 2π-periodic,

$$k_n(t) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\left(2\cos(t/2)\right)^{2n}, \; b_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2$$

şi $c_n(t) = \frac{3}{2n(2n^2+1)}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4$.

Mai precis, notînd $\Omega = \{-n, ..., -1, 0, 1, ..., n\}$ şi definind $Z_{n,x}(k) = \frac{k\pi}{n}$, pentru $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ şi $\lambda_{n,x}(k) = \frac{k_n(x-k\pi/n)}{\bigvee_{k=-n}^{n} k_n(x-k\pi/n)}$, prin formula din Lema 2.2.3 şi din definiţia integralei posibilistice, obţinem operatorii posibilistici ai lui de la Vallée-Poussin

$$V_n^{(M)}(f)(x) = (Pos)\int_{\Omega} f \circ Z(n,x)dP_{\lambda_{n,x}} = \frac{\bigvee_{k=-n}^{n} f(k\pi/n)k_n(x-k\pi/n)}{\bigvee_{k=-n}^{n} k_n(x-k\pi/n)}.$$

În mod similar, putem obţine operatorii posibilistici de tip Fejér

$$F_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=-n}^{n} f(k\pi/n)b_n(x-k\pi/n)}{\bigvee_{k=-n}^{n} b_n(x-k\pi/n)}$$

şi de tip Jackson

$$J_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=-n}^{n} f(k\pi/n)c_n(x-k\pi/n)}{\bigvee_{k=-n}^{n} c_n(x-k\pi/n)}.$$

Studierea acestor operatori ramîne ca şi o direcţie de cercetare viitoare.

Cap. 3

Aproximare cu un ordin arbitrar prin operatori Szász şi Baskakov de variabilă reală

Fiind dat un şir arbitrar $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ cit de rapid dorim, în acest capitol construim operatori de tip Baskakov şi Szász, avînd ordinul de aproximare $\omega_1(f; \lambda_n)$.

Construcţia acestor operatori generalizaţi, se bazează pe următoarea idee simplă : în formulele clasice ale operatorilor de tip Baskakov si de tip Szász, se înlocuieşte pest tot n cu $\frac{1}{\lambda_n}$.

Spre exemplificare, plecînd de la formula clasică a operatorilor Szász

$$S_n(f)(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f(k/n),$$

prin înlocuirea lui n cu $\frac{1}{\lambda_n}$ obţinem operatorul Szász generalizat

$$S_n(f; \lambda_n)(x) = e^{-x/\lambda_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{\lambda_n}\right)^k \cdot f\left(k\lambda_n\right),$$

iar plecînd de la formula clasică a operatorului Baskakov

$$V_n(f)(x) = (1+x)^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} \left(\frac{x}{1+x}\right)^j \cdot f\left(\frac{j}{n}\right)$$

$$= (1+x)^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!} \left(\frac{x}{1+x}\right)^j \cdot f\left(\frac{j}{n}\right)$$

$$= (1+x)^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot n(n+1) \cdot ... \cdot (n+j-1) \left(\frac{x}{1+x}\right)^j \cdot f\left(\frac{j}{n}\right),$$

prin înlocuirea lui n cu $\frac{1}{\lambda_n}$ obţinem operatorul Baskakov generalizat

$$V_n(f;\lambda_n)(x)$$

$$= (1+x)^{-1/\lambda_n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{\lambda_n} \left(1 + \frac{1}{\lambda_n}\right) \cdot ... \cdot \left(j - 1 + \frac{1}{\lambda_n}\right) \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^j f\left(j\lambda_n\right).$$

3.1 Operatori Baskakov generalizaţi pe $\mathbb{R}_+$

Fiind dat un şir arbitrar $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ cit de rapid dorim, în această secţiune introducem şi studiem operatori de tip Baskakov, astfel încît pe fiecare subinterval compact din $[0, +\infty)$, să obţinem ordinul de aproximare uniformă $\omega_1(f; \sqrt{\lambda_n})$. Aceşti operatori modificaţi, pot aproxima o funcţie 1-Lipschitz 1 pe fiecare subinterval compact din $[0, +\infty)$, cu ordinul de aproximare arbitrar de bun, $\sqrt{\lambda_n}$. De asemenea, consideraţii similare facem pentru operatori modificaţi q_n-Baskakov, cu $0 < q_n < 1$, $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$.

3.1.1 Introducere

Fie $(\lambda_n)_n$ un şir de numere reale pozitive cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

În lucrarea [15], Cetin şi Ispir au introdus o remarcabila generalizare a operatorilor Szász-Mirakjan ataşaţi unei funcţii analitice f, de crestere exponentiala într-un disc compact,

$$S_n(f;\lambda_n)(z) = e^{-z/\lambda_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^k \cdot f(k\lambda_n),$$

care aproximeaza f în orice disc compact $|z| \leq r$, $r < R$, cu ordinul de aproximare λ_n.

Implicînd în construirea lor şi polinoamele Faber, aceşti operatori şi ordinul lor de aproximare au fost extinse în Gal [36], pentru a aproxima funcţii analitice în submulţimi compacte ale planului complex. Marele avantaj al tuturor acestor constructii este că şirul λ_n, $n \in \mathbb{N}$, poate fi, în mod evident, ales să convearga la zero, cu un ordin arbitrar de mic. Observăm că de fapt, toate rezultatele mentionate mai sus au fost obţinute pentru λ_n scris în forma mai complicata (dar ne-necesara) $\lambda_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n}$.

În primul rînd, vom introduce şi studia operatorii liniari modificaţi/generalizaţi de tip Baskakov definiţi prin

$$L_n(f;\lambda_n)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \varphi^{(j)}(\lambda_n;x)x^j}{j!} f(j\lambda_n), \tag{3.1}$$

pentru funcţii $f : [0,b) \to \mathbb{R}$ (aici b poate fi şi $+\infty$) astel că seria de mai sus converge (de exemplu, dacă f este marginită şi uniform continuă pe $[0,b)$), unde şirul de funcţii analitice $\varphi_n : [0,b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, satisface ipotezele : (i) $\varphi(\lambda_n;0) = 1$; (ii) $(-1)^j\varphi^{(j)}(\lambda_n;x) \geq 0$, pentru toţi $n, j \in \mathbb{N}$, $x \in [0,b]$.

Este bine de observat că pentru cazul particular $\lambda_n = \frac{1}{n}$ şi sub ipoteza aditionala

(iii) există un şir $m(n)$, $n \in \mathbb{N}$ cu $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{m(n)} = 1$ si $\varphi_n^{(k)}(\lambda_n;x) = -n\varphi_n^{(k-1)}(\lambda_n;x)$, pentru toţi $x \in [0,b)$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, operatorii din (3.1) au fost introduşi şi studiaţi în Baskakov [7].

Alegînd $\varphi(\lambda_n; x) = (1+x)^{-1/\lambda_n}$ în (3.1), din cauza formulei

$$\varphi^{(j)}(\lambda_n; x) = (-1)^j \frac{1}{\lambda_n}\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(j-1+\frac{1}{\lambda_n}\right)\cdot (1+x)^{-j-1/\lambda_n}, \quad (3.2)$$

obţinem imediat operatorii Baskakov modificaţi definiţi prin

$$V_n(f; \lambda_n)(x)$$

$$= (1+x)^{-1/\lambda_n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\cdot\frac{1}{\lambda_n}\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(j-1+\frac{1}{\lambda_n}\right)\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^j f\left(j\lambda_n\right), \quad (3.3)$$

$x \geq 0$, unde prin convenţie $\frac{1}{\lambda_n}\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(j-1+\frac{1}{\lambda_n}\right) = 1$ pentru $j = 0$.

Pentru acesti operatori $V_n(f; \lambda_n)(x)$ din (3.3), în Subsecţiunea următoare demonstrăm că în fiecare subinterval compact din $[0, +\infty)$, ordinul de aproximare uniform obţinut este $\omega_1(f; \sqrt{\lambda_n})$, şi în consecinţa, aproximează uniform o funcţie 1-Lipschitz, pe fiecare subinterval compact din $[0, \infty)$, cu ordinul de aproximare arbitrar de bun $\sqrt{\lambda_n}$. Cu alte cuvinte, din punct de vedere al teoriei aproximarii, acesti operatori Baskakov modificaţi reprezintă cea mai buna constructie. În acelaşi timp, rezultatele obţinute au şi un puternic caracter unificator, în sensul că se pot reobţine din ele toate rezultatele obţinute anterior de numeroşi alţi autori, prin diferite alegeri particulare ale nodurilor λ_n. Este de asemenea de remarcat, că modificînd un tip de operator Baskakov introdus în Lopez-Moreno [53], consideraţii similare pot fi facute pentru operatorul definit prin formula

$$L_{n,r}(f; \lambda_n)(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^r f\left(j\lambda_n\right)\cdot\frac{\varphi^{(j+r)}(\lambda_n; x)\cdot(-x)^j}{j!}\cdot\left(\lambda_n\right)^r, r, n \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Apoi, în subsecţiunea următoare facem consideraţii similare pentru operatorii modificaţi q-Baskakov, $0 < q < 1$.

3.1.2 Rezultate principale

Mai întii, avem nevoie de următoarele rezultate auxiliare.

Lema 3.1.1. (Gal-Opriş [43]) *Fie $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, cu $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.*

(i) Dacă $L_n(f;\lambda_n)(x)$ dat de (3.1) este bine definită, atunci se poate scrie

$$L_n(f;\lambda_n)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_n)^j \cdot (-1)^j \cdot \varphi^{(j)}(\lambda_n;0) \cdot [0,\lambda_n,...,j\lambda_n;f] \cdot x^j, x \in [0,b],$$

unde $[0,\lambda_n,...,j\lambda_n;f]$ este diferenţa divizată a lui f pe nodurile $0,\lambda_n,...,j\lambda_n$.

(ii) Notînd $e_k(x) = x^k$, avem

$$L_n(e_0;\lambda_n)(x) = 1, L_n(e_1;\lambda_n)(x) = -x\lambda_n\varphi'(\lambda_n;0),$$

$$L_n(e_2;\lambda_n)(x) = (\lambda_n)^2 \cdot [x^2\varphi''(\lambda_n;0) - x\varphi'(\lambda_n;0)].$$

Observaţie. În cazul cînd $\lambda_n = \frac{1}{n}$, formula din Lema 3.1.1, (i) a fost obţinuta de catre Lupas [54].

Corolar 3.1.2. (Gal-Opriş [43]) *(i) Dacă $(1+\lambda_n)...(1+(j-1)\lambda_n) = 1$ pentru $j = 0$ (prin convenţie), atunci pentru $V_n(f;\lambda_n)(x)$ dat de (3.3), avem*

$$V_n(f;\lambda_n)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (1+\lambda_n)...(1+(j-1)\lambda_n) \cdot [0,\lambda_n,...,j\lambda_n;f]x^j, x \ge 0.$$

(ii) $V_n(e_0;\lambda_n)(x) = 1$, $V_n(e_1;\lambda_n)(x) = x$, $V_n(e_2;\lambda_n)(x) = x^2+\lambda_n\cdot x(1+x)$;

$$V_n((\cdot - x)^2;\lambda_n)(x) = \lambda_n x(1+x).$$

Deoarece $V_n(f;\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, sunt operatori liniari şi pozitivi, putem enunţa următorul rezultat.

Teorema 3.1.3. (Gal-Opriş [43]) *Fie* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *uniform continuă pe* $[0, \infty)$. *Notam* $\omega_1(f; \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; |x - y| \leq \delta,\, x, y \in [0, \infty)\}$. *Pentru toţi* $x \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ *avem*

$$|V_n(f; \lambda_n)(x) - f(x)| \leq 2 \cdot \omega_1 \left(f; \sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{x(1+x)}\right).$$

Ca şi o consecinţa imediata a Teoremei 3.1.3, primim următorul rezultat.

Corolar 3.1.4. (Gal-Opriş [43]) *Dacă există* $L > 0$ *astfel încît* $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, *pentru toţi* $x, y \in [0, \infty)$, *atunci*

$$|V_n(f; \lambda_n)(x) - f(x)| \leq 2L\sqrt{x(1+x)} \cdot \sqrt{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}, x \geq 0.$$

Observaţii. 1) Dacă x aparţine la un subinterval compact al lui $[0, +\infty)$, atunci evident că primim convergenţa uniformă în acel subinterval.

2) Optimalitatea estimărilor din Teorema 3.1.3 şi Corolarul 3.1.4 consistă în faptul că fiind dat un şir arbitrar de numere strict pozitive $(\gamma_n)_n$, cu $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ şi un subinterval compact al lui $[0, b]$, putem gasi un şir λ_n, satisfacînd $2\omega_1(f; \sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{x(1+x)}) \leq \gamma_n$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, b]$ în cazul Teoremei 3.1.3 şi $2L\sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{x(1+x)} \leq \gamma_n$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, b]$ în cazul Corolarului 3.1.4.

3) Dacă f este uniform continuă pe $[0, +\infty)$, atunci este binecunoscut faptul ca cresterea ei pe $[0, +\infty)$ este liniara, adică există $\alpha, \beta > 0$ astfel încît $|f(x)| \leq \alpha x + \beta$, pentru toţi $x \in [0, +\infty)$ (vezi, de exemplu, [25], p. 48, Problème 4, sau [26]). Aceasta implică faptul că în acest caz, $V_n(f; \lambda_n)(x)$ este bine definita pentru toţi $x \in [0, \infty)$.

4) În lucrarea [53], au fost studiaţi operatorii Baskakov de forma

$$L_{n,r}(f)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^r f\left(\frac{j}{n}\right) \cdot \frac{\varphi_n^{(j+r)}(x) \cdot (-x)^j}{j!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^r, r, n \in \mathbb{N},$$

obţinînd, de exemplu dacă $\varphi_n(x) = (1+x)^{-n}$, estimările cantitative de ordinul $\Omega(f; n^{-1/2}) + \frac{C}{n}$, unde $\Omega(f;\delta)$ este un modul de continuitate ponderat. Urmînd liniile demonstraţiilor din [53], alegînd $\varphi(\lambda_n; x) = (1+x)^{-1/\lambda_n}$ în operatorul Baskakov modificat $L_{n,r}(f;\lambda_n)(x)$ dat de formula (3.4), se obţine ordinul de aproximare $\Omega\left(f; \sqrt{\lambda_n}\right) + C\lambda_n$, unde λ_n poate fi ales să convearga la zero cit de rapid dorim.

3.1.3 Cazul operatorilor q-Baskakov, $0 < q < 1$

Mai întii, avem nevoie de următoarele concepte din "quantum calculus" (vezi, de exemplu, e.g. [50], pp. 7-13).

Pentru $0 < q$, $q \neq 1$, şi $a \in \mathbb{R}$, q-analogul lui a este definit prin $[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q}$. Pentru $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, primim $[n]_q = 1 + q + ... + q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $[0]_q = 1$. q-factorialul este definit prin $[n]_q! = [1]_q \cdot [2]_q \cdot ... \cdot [n]_q$ şi coeficientul q-binomial este dat de $\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! \cdot [n-k]_q!}$, $k = 0, 1, ...n$.

Observăm că pentru $q = 1$ primim $[n]_q = n$ şi în consecinţă, $[n]_q! = n!$ şi $\binom{n}{k}_q = \binom{n}{k}$.

q-derivativa unei funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $D_q(f)(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}$, $x \neq 0$, $D_q(f)(0) = \lim_{x\to 0} D_q(f)(x)$, şi q-derivatele de ordin superior sunt date recursiv prin $D_q^0(f) = f$, $D_q^n(f) = D_q(D_q^{n-1}(f))$, $n \in \mathbb{N}$.

Peste tot în această secţiune, considerăm $0 < q < 1$.

În, de exemplu, lucrările [2], [60], [4]–[6], [49], [30], au fost studiate diverse tipuri de operatori q-Baskakov.

Urmînd ideile anterioare şi sugerat de operatorii q-Baskakov introduşi şi studiaţi în [60] şi [2], introducem în cele ce urmează un operator q-Baskakov modificat, astfel.

Fie $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ cu $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$. Este clar că fara a pierde din generalitate, putem presupune că $\frac{1}{\lambda_n} \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Pentru $\varphi(\lambda_n; \cdot) : [0, \infty) \to$

$\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, un şir de funcţii analitice satisfacînd ipotezele (i) $\varphi(\lambda_n; 0) = 1$; (ii) $(-1)^j \varphi^{(j)}(\lambda_n; x) \geq 0$, pentru toţi $n, j \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \infty)$, să introducem operatorii q-Baskakov daţi prin

$$T_{n,q}(f; \lambda_n)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-x)^j}{[j]_q!} \cdot q^{(k(k-1)/2} D_q^k \varphi(\lambda_n; x) f\left(\frac{[j]_q}{q^{k-1}} \cdot \frac{1}{[1/\lambda_n]_q}\right), \quad (3.5)$$

ataşaţi funcţiilor pentru care $T_{n,q}(f; \lambda_n)(x)$ este bine definit.

Observăm că pentru $1/\lambda_n = n$, reobţinem operatorii q-Baskakov din [60], [2].

Urmînd exact liniile din demonstraţia Lemei 1 din [60] şi de asemenea folosind relaţiile (21) şi (22) din [2], obţinem imediat următoarea.

Lema 3.1.5. (Gal-Opriş [43]) *Fie $\lambda_n > 0$, $\frac{1}{\lambda_n} \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ cu $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$. Pentru toţi $n \in \mathbb{N}, x \geq 0$ şi $0 < q < 1$, avem :*

(i) $T_{n,q}(e_0; \lambda_n)(x) = 1$; $T_{n,q}(e_1; \lambda_n)(x) = -x \cdot D_q(\varphi(\lambda_n; \cdot))(0) \cdot \frac{1}{[1/\lambda_n]_q}$;

(ii) $T_{n,q}(e_2; \lambda_n)(x) = x^2 \cdot D_q^2(\varphi(\lambda_n; \cdot))(0) \cdot \frac{1}{q \cdot [1/\lambda_n]_q^2} - x \cdot D_q(\varphi(\lambda_n; \cdot))(0) \cdot \frac{1}{[1/\lambda_n]_q^2}$;

(iii) $T_{n,q}((\cdot - x)^2; \lambda_n)(x) = A_{n,q}x^2 + B_{n,q}x$, unde

$$A_{n,q} = 1 + D_q^2(\varphi(\lambda_n; \cdot))(0) \cdot \frac{1}{q \cdot [1/\lambda_n]_q^2} + 2 \cdot D_q(\varphi(\lambda_n; \cdot))(0) \cdot \frac{1}{[1/\lambda_n]_q}$$

si

$$B_{n,q} = -\frac{D_q\varphi(\lambda_n; 0)}{[1/\lambda_n]_q^2}.$$

Notînd cu $C_B(\mathbb{R}_+)$ spaţiul tuturor funcţiilor reale marginite şi continue pe $[0, \infty)$ şi urmînd exact liniile de demonstraţie a Teoremei 2 din [2], putem enunţa următoarea.

Teorema 3.1.6. (Gal-Opriş [43]) *Fie $\lambda_n > 0$, $\frac{1}{\lambda_n} \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ cu $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$ şi fie $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir astfel încît $0 < q_n < 1$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$. Atunci, pentru $f \in C_B(\mathbb{R}_+)$ uniform continuă,* *operatorii q_n daţi de formula (3.5), satisfac*

$$|T_{n,q_n}(f;\lambda_n)(x) - f(x)| \leq (1 + \sqrt{\max\{x, x^2\}}) \cdot \omega_1(f; \sqrt{C_{n,q_n}}), n \in \mathbb{N}, x \geq 0,$$

unde $C_{n,q_n} = |A_{n,q_n}| + B_{n,q_n}$, $(A_{n,q_n})_n, (B_{n,q_n})_n$ sunt date de Lema 3.1.5, (iii) şi $\omega_1(f;\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0,\infty), |x - y| \leq \delta\}$.

Drept consecinţe ale Teoremei 3.1.6, primim următoarele două corolare.

Corolar 3.1.7. (Gal-Opriş [43]) *Fie $\lambda_n > 0$, $\frac{1}{\lambda_n} \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ cu $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$ şi $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir astfel încît $0 < q_n < 1$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$ and $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$. Atunci, pentru $f \in C_B(\mathbb{R}_+)$ uniform continuă, operatorii daţi de*

$$T_{n,q_n}(f;\lambda_n)(x) = \frac{1}{(1+x)^{1/\lambda_n}}$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[1/\lambda_n]_{q_n} \cdot [1/\lambda_n + 1]_{q_n} \cdot \ldots \cdot [1/\lambda_n + j - 1]_{q_n}}{[j]_{q_n}!} \cdot q^{j(j-1)/2}$$

$$\cdot \frac{x^j}{(1+x)^j} \cdot f\left(\frac{[j]_{q_n}}{q_n^{j-1}} \cdot \frac{1}{[1/\lambda_n]_{q_n}}\right), \tag{3.6}$$

satisfac estimarea

$$|T_{n,q_n}(f;\lambda_n)(x) - f(x)| \leq (1 + \sqrt{\max\{x, x^2\}}) \cdot \omega_1\left(f; \sqrt{\frac{1+q_n}{q_n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{[1/\lambda_n]_{q_n}}}\right),$$

$n \in \mathbb{N}, x \geq 0.$

Corolar 3.1.8. (Gal-Opriş [43]) *Fie $\lambda_n > 0$, $\frac{1}{\lambda_n} \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ cu $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$ şi $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir astfel încît $0 < q_n < 1$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$. Atunci, pentru $f \in C_B(\mathbb{R}_+)$ uniform continuă, operatorii daţi de*

$$S_{n,q_n}(f;\lambda_n)(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{([1/\lambda_n]_{q_n} x)^j}{[j]_{q_n}!} \cdot q_n^{j(j-1)} \cdot E_{q_n}(-[1/\lambda_n]_{q_n} q_n^j x) \cdot f\left(\frac{[j]_{q_n}}{q_n^{j-1}} \cdot \frac{1}{[1/\lambda_n]_{q_n}}\right), \tag{3.7}$$

satisfac estimarea

$$|S_{n,q_n}(f;\lambda_n)(x) - f(x)| \le (1+\sqrt{\max\{x,x^2\}})\cdot \omega_1\left(f;\frac{1}{\sqrt{[1/\lambda_n]_{q_n}}}\right),$$

$n \in \mathbb{N}, x \ge 0.$

Observaţie. Ordinul de aproximare pentru operatorii q_n-Baskakov din Corolarul 3.1.7 şi pentru operatorii q_n-Szász-Mirakjan din Corolarul 3.1.8 este

$$O(1/\sqrt{[1/\lambda_n]_{q_n}}).$$

Pe de alta parte, pentru $q_n = 1$, pentru toţi $n \in \mathbb{N}$, ordinul de aproximare este $O(1/\sqrt{1/\lambda_n}) = O(\sqrt{\lambda_n})$ (vezi Teorema 3.1.3 din cazul operatorilor tip Baskakov).

Totuşi, pentru $0 < q_n < 1$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$, este uşor de văzut că $\sqrt{\lambda_n} \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{[1/\lambda_n]_{q_n}}}$, deoarece $[1/\lambda_n]_{q_n} \le 2/\lambda_n$.

Într-adevar, notînd cu $[a]_*$ partea întreagă a lui a, avem $1/\lambda_n \le [1/\lambda_n]_* + 1$, ceea ce prin $0 < q_n < 1$ implică $q_n^{[1/\lambda_n]_*+1} \le q_n^{1/\lambda_n}$, conducînd la $[1/\lambda_n]_{q_n} \le [[1/\lambda_n]_* + 1]_{q_n} \le [1/\lambda_n]_* + 1 \le 2/\lambda_n$.

Pe de alta parte, din [24], Lema 3.4, $n \le C'[n]_{q_n}$, pentru toţi $n \in \mathbb{N}$ (cu $C' > 0$ independenta de n), dacă şi numai dacă există o constantă $c > 0$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ (independentă de n) astfel încît $q_n^n \ge c$, pentru toţi $n \ge n_0$. Deci, în acest caz, obţinem

$$1/\lambda_n \le [1/\lambda_n]_* + 1 \le C'[[1/\lambda_n]_* + 1]_{q_n}$$

$$\le C'[2[1/\lambda_n]_*]_{q_n} \le 2C'[[1/\lambda_n]_*]_{q_n} \le 2C'[1/\lambda_n]_{q_n}.$$

În concluzie, dacă în Corolariile 3.1.7 şi 3.1.8, q_n este ales să satisfacă $q_n^n \ge c$, pentru toţi $n \ge n_0$, $0 < q_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$, şi $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$, atunci ordinele de aproximare pentru operatorii q_n-Baskakov şi q_n-Szász-Mirakjan corespunzatori, sunt $\omega_1\left(f;\sqrt{\lambda_n}\right)$, care pot fi alese să conveargă la zero cit de rapid dorim.

3.2 Operatori Szász-Stancu generalizaţi pe $[0,+\infty)$

Fie $0\le\alpha,\beta$ şi $\lambda_n>0$, $n\in\mathbb{N}$ satisfacînd $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$.

În această secţiune obţinem estimări pentru operatorii generalizaţi Szász-Stancu daţi de formula

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(f;\lambda_n)(x)=e^{-x/\lambda_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\lambda_n^k k!}\cdot f\left(\frac{\lambda_n(j+\alpha)}{1+\beta\lambda_n}\right),x\ge 0.$$

Este clar că $L_n^{(\alpha,\beta)}$ este operator liniar şi pozitiv pe $[0,+\infty)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Avem nevoie de următorul rezultat auxiliar.

Lemma 3.2.1. (Opriş [59]) *Fie $0\le\alpha,\beta$ şi $\lambda_n>0$, $n\in\mathbb{N}$ satisfăcînd $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$. Notăm $e_k(x)=x^k$, $k=0,1,2,...,$. Pentru toţi $n\in\mathbb{N}$ şi $x\ge 0$ avem :*

(i) $L_n^{(\alpha,\beta)}(e_0;\lambda_n)(x)=1$; $L_n^{(\alpha,\beta)}(e_1;\lambda_n)(x)=\frac{x+\lambda_n\alpha}{1+\lambda_n\beta}$;
(ii) $L_n^{(\alpha,\beta)}(e_2;\lambda_n)(x)=\frac{(x+\lambda_n\alpha)^2+\lambda_n x}{(1+\lambda_n\beta)^2}=\left[\frac{x+\lambda_n\alpha}{1+\lambda_n\beta}\right]^2+\frac{\lambda_n x}{(1+\lambda_n\beta)^2}$;
(iii) $L_n^{(\alpha,\beta)}((\cdot-x)^2;\lambda_n)(x)=\lambda_n\cdot\frac{\lambda_n(\alpha-x\beta)^2+x}{(1+\lambda_n\beta)^2}$.

Notăm cu $C_B(\mathbb{R}_+)$ spaţiul tuturor funcţiilor reale, continue şi mărginite pe $[0,\infty)$. Are loc următorul rezultat.

Teorema 3.2.2. (Opriş [59]) *Fie $0\le\alpha,\beta$ şi $\lambda_n>0$, $n\in\mathbb{N}$ cu $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$, cît de rapid dorim. Atunci, pentru $f\in C_B(\mathbb{R}_+)$ uniform continuă, are loc estimarea*

$$|L_n^{(\alpha,\beta)}(f;\lambda_n)(x)-f(x)|\le 2\omega_1\left(f;\sqrt{\lambda_n}\cdot\sqrt{\lambda_n(\alpha-x\beta)^2+x}\right),x\ge 0,$$

unde $\omega_1(f;\delta) = \sup\{|f(x)-f(y)|; x,y \in [0,\infty), |x-y| \le \delta\}$ *reprezintă modulul de continuitate al funcţiei* f.

Ca şi o consecinţă imediată a Teoremei 3.2.2, primim următorul corolar.

Corolar 3.2.3. (Opriş [59]) *Sub ipotezele Teoremei 3.2.2, dacă, în plus, există* $L > 0$ *astfel încît* $|f(x)-f(y)| \le L|x-y|$, *pentru toţi* $x, y \in [0,\infty)$ *(*f *este funcţie Lipschitz), atunci*

$$|L_n^{(\alpha,\beta)}(f;\lambda_n)(x) - f(x)| \le 2L\sqrt{\lambda_n}\cdot\sqrt{\lambda_n(\alpha - x\beta)^2 + x}, n \in \mathbb{N}, x \ge 0.$$

Observaţii. 1) Dacă x aparţine unui subinterval compact al lui $[0,+\infty)$, atunci în mod evident primim convergenţa uniformă in acel subinterval.

2) Deoarece şirul λ_n poate fi ales să conveargă la zero cît de rapid dorim, rezultatele din Teorema 3.2.2 şi Corolar 3.2.3 sunt de tip definitiv, adică sunt cele mai bune posibile (nu se mai pot îmbunătăţi).

3.3 Operatori Baskakov-Stancu generalizaţi pe $[0,+\infty)$

Fie $0 \le \alpha, \beta$ şi $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ cu $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

În această secţiune obţinem estimări pentru operatorii generalizaţi Baskakov-Stancu daţi de formula

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(f;\lambda_n)(x)$$

$$= (1+x)^{-1/\lambda_n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\cdot\frac{1}{\lambda_n}\cdot\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(j-1+\frac{1}{\lambda_n}\right)\cdot\frac{x^j}{(1+x)^j} f\left(\frac{\lambda_n(j+\alpha)}{1+\beta\lambda_n}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}(1+\lambda_n)\cdot\ldots\cdot(1+(j-1)\lambda_n)\left[\frac{\lambda_n\alpha}{1+\lambda_n\beta},\ldots,\frac{\lambda_n(\alpha+j)}{1+\lambda_n\beta};f\right]x^j, x \ge 0.$$

In mod evident, $K_n^{(\alpha,\beta)}$ este operator liniar şi pozitiv pe $[0,+\infty)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Avem nevoie de următorul rezultat auxiliar.

Lema 3.3.1. (Opriş [59]) *Fie* $0 \le \alpha, \beta$ *şi* $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *cu* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. *Pentru toţi* $n \in \mathbb{N}$ *şi* $x \ge 0$ *avem :*

(i) $K_n^{(\alpha,\beta)}(e_0;\lambda_n)(x) = 1$; $K_n^{(\alpha,\beta)}(e_1;\lambda_n)(x) = \frac{x+\lambda_n\alpha}{1+\lambda_n\beta}$;

(ii) $K_n^{(\alpha,\beta)}(e_2;\lambda_n)(x) = \frac{(x+\lambda_n\alpha)^2+\lambda_n x(x+1)}{(1+\lambda_n\beta)^2} = \left[\frac{x+\lambda_n\alpha}{1+\lambda_n\beta}\right]^2 + \frac{\lambda_n x(x+1)}{(1+\lambda_n\beta)^2}$;

(iii) $K_n^{(\alpha,\beta)}((\cdot - x)^2;\lambda_n)(x) = \lambda_n \cdot \frac{\lambda_n(\alpha-x\beta)^2+x(1+x)}{(1+\lambda_n\beta)^2}$.

Notăm cu $C_B(\mathbb{R}_+)$ spaţiul tuturor funcţiilor reale, continue şi mărginite pe $[0,\infty)$. Are loc următorul rezultat.

Teorema 3.3.2. (Opriş [59]) *Fie* $0 \le \alpha, \beta$ *şi* $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *cu* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, *cît de rapid dorim. Atunci, pentru* $f \in C_B(\mathbb{R}_+)$ *uniform continuă, are loc estimarea*

$$|K_n^{(\alpha,\beta)}(f;\lambda_n)(x) - f(x)| \le 2\omega_1\left(f; \sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{\lambda_n(\alpha - x\beta)^2 + x(1+x)}\right), x \ge 0,$$

unde $\omega_1(f;\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0,\infty), |x-y| \le \delta\}$ *reprezintă modulul de continuitate al funcţiei* f.

Observaţie. Pentru $\alpha = \beta = 0$ reprimim estimarea pentru $V_n(f;\lambda_n)$ obţinută în Corolarul 2.1, (ii) din [43] (vezi de asemenea Secţiunea 3.1 anterioară).

Ca şi o consecinţă imediată a Teoremei 3.3.2, primim următorul corolar.

Corolar 3.3.3. (Opriş [59]) *Sub ipotezele Teoremei 3.3.2, dacă, în plus, există* $L > 0$ *astfel încît* $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$, *pentru toţi* $x, y \in [0,\infty)$ *(*f *este funcţie Lipschitz), atunci*

$$|K_n^{(\alpha,\beta)}(f;\lambda_n)(x) - f(x)| \le 2L\sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{\lambda_n(\alpha - x\beta)^2 + x(1+x)}, n \in \mathbb{N}, x \ge 0.$$

Observaţii. 1) Dacă x aparţine unui subinterval compact al lui $[0,+\infty)$, atunci în mod evident primim convergenţa uniformă in acel subinterval.

2) Deoarece şirul λ_n poate fi ales să conveargă la zero cît de rapid dorim, rezultatele din Teorema 3.3.2 şi Corolar 3.3.3 sunt de tip definitiv, adică sunt cele mai bune posibile (nu se mai pot îmbunătăţi).

Cap. 4

Aproximarea cu un ordin arbitrar prin operatori de tip Szász şi Baskakov de variabilă complexă

În acest capitol, se reiau ideile din capitolul precedent şi se transpun la cazul aproximarii funcţiilor analitice, prin operatori complecşi Szász şi Baskakov, în mulţimi compacte din $\mathbb{C}$. Studiem două cazuri : (i) aproximare în discuri compacte cu centrul în origine ; (ii) aproximare în mulţimi compacte arbitrare, prin folosirea polinoamelor Faber ataşate acestor mulţimi compacte.

4.1 Ordin arbitrar în discuri compacte

Fie deci $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, un şir cu proprietatea că $\lambda_n \to 0$ cit de rapid dorim.

Pentru citiva operatori complecsi generalizaţi de tip Szász, Szász-Kantorovich, şi Baskakov, ataşaţi funcţiilor întregi sau funcţiilor analitice de crestere exponentiala în discuri compacte (şi fara a mai implica şi valorile funcţiei f pe $[0, +\infty)$, obţinem ordinul de aproximare $O(\lambda_n)$.

4.1.1 Introducere

În lucrarea [15], cu notaţiile de acolo pentru două şiruri a_n and b_n, $n \in \mathbb{N}$ (si notînd aici $\lambda_n = \frac{b_n}{a_n}$) autorii au introdus operatorul complex generalizat de tip Szász, prin formula

$$S_n(f; \lambda_n)(z) = e^{-z/\lambda_n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z/\lambda_n)^j}{j!} \cdot f(j\lambda_n), \tag{4.1}$$

unde $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to 0$.

Pentru acest operator, ataşat funcţiilor $f : \overline{\mathbb{D}_R} \bigcup [R, +\infty) \to \mathbb{C}$ de crestere exponentiala în $\overline{\mathbb{D}_R} \bigcup [R, +\infty)$, analitică în discul $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$, $R > 1$ şi continuă pe $[0, +\infty)$, în [15] a fost obţinut ordinul exact de aproximare $O(\lambda_n)$. De asemenea, în aceeasi lucrare a fost obţinut un rezultat de tip Voronovskaja, cu o estimare superioara de ordinul $O(\lambda_n^2)$.

Primul scop al acestei secţiuni este de a extinde rezultatele din [15] la cazul funcţiilor întregi şi apoi, la un tip de operator Szász, care nu implică valorile lui f pe $[0, +\infty)$. De asemenea, se introduce un operator de tip Szász-Kantorovich, pentru care se obţin rezultate similare, imbunataţind atfel în mod esential ordinul de aproximare $O(1/n)$ obţinut în [58].

În al doilea rînd, în această secţiune introducem operatori complecsi Baskakov generalizaţi, pentru care se obţin rezultate similare cu cele pentru operatorii de tip Szász.

4.1.2 Operatori Szász şi Szász-Kantorovich

În cazul operatorului complex de tip Szász, putem demonstra următorul rezultat.

Teorema 4.1.1. (Gal-Opriş [46]) *Fie $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ cu $\lambda_n \to 0$ cit de rapid dorim. Fie $f : \mathbb{D}_R \to \mathbb{C}$, $1 < R \leq +\infty$, adică $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, pentru toţi $z \in \mathbb{D}_R$. Presupunem că există $M > 0$ şi $A \in (1/R, 1)$, cu proprietatea $|c_k| \leq M \frac{A^k}{k!}$, pentru toţi $k = 0, 1, ...$, (ceea ce implică $|f(z)| \leq Me^{A|z|}$ pentru toţi $z \in \mathbb{D}_R$). Considerăm $1 \leq r < \frac{1}{A}$.*

(i) Dacă $R = +\infty$, ($1/R = 0$), adică f este o funcţie întreaga, atunci $S_n(f; \lambda_n)(z)$ este funcţie întreaga, pentru toţi $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ avem

$$S_n(f; \lambda_n)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_n(e_k; \lambda_n)(z)$$

şi pentru toţi $|z| \leq r$ următoarele estimări au loc :

$$|S_n(f; \lambda_n)(z) - f(z)| \leq C_{r,M,A} \cdot \lambda_n,$$

$$|S_n^{(p)}(f; \lambda_n)(z) - f^{(p)}(z)| \leq \frac{p! r_1 \cdot C_{r_1,M,A}}{(r_1 - r} \cdot \lambda_n,$$

$$\left| S_n(f; \lambda_n)(z) - f(z) - \frac{\lambda_n}{2} z f''(z) \right| \leq M_r(f)(z) \cdot \lambda_n^2 \leq C_r(f) \cdot \lambda_n^2,$$

$$\|S_n^{(p)}(f; \lambda_n) - f^{(p)}\|_r \sim \lambda_n,$$

ultima echivalenta avînd loc dacă f nu este un polinom de gradul $\leq p \in \mathbb{N}$ iar constantele din echivalenta depind de f, r, p.

Mai sus avem, $C_{r,M,A} = \frac{M}{2r} \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(rA)^k < \infty$, $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < r_1 < \frac{1}{A}$, $M_r(f)(z) = \frac{3MA|z|}{r^2} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(rA)^{k-1} < \infty$, $C_r(f) = \frac{3MA}{r} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(rA)^{k-1}$ şi $\|f\|_r = \max\{|f(z)|; |z| \leq r\}$.

(ii) Dacă $R < +\infty$, atunci operatorul de aproximare complex

$$S_n^*(f; \lambda_n)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot S_n(e_k; \lambda_n)(z), z \in \overline{\mathbb{D}_r},$$

este bine definit şi $S_n^*(f;\lambda_n)(z)$ satisface toate estimările de la punctul (i), pentru toţi $1 \le r < \frac{1}{A} < R$.

În cele ce urmează, putem defini operatorul complex, generalizat Szász-Kantorovich prin formula

$$K_n(f;\lambda_n)(z) = e^{-z/\lambda_n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z/\lambda_n)^j}{j!} \cdot \frac{1}{\lambda_n} \cdot \int_{j\lambda_n}^{(j+1)\lambda_n} f(v)dv$$

$$= e^{-z/\lambda_n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z/\lambda_n)^j}{j!} \cdot \int_0^1 f\left((t+j)\lambda_n\right) dt.$$

Notînd $F(z) = \int_0^z f(t)dt$, un calcul simplu ne conduce la formula (sub ipoteza că seria $S_n(F;\lambda_n)(z)$ este uniform convergentă)

$$K_n(f;\lambda_n)(z) = S_n'(F;\lambda_n)(z). \tag{4.2}$$

Putem demonstra următoarele rezultate.

Teorema 4.1.2. (Gal-Opriş [46]) *Fie $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ cu $\lambda_n \to 0$ oricit de rapid dorim. Fie $f : \mathbb{D}_R \to \mathbb{C}$, $1 < R \le +\infty$, adică $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, pentru toţi $z \in \mathbb{D}_R$. Presupunem că există $M > 0$ şi $A \in (1/R, 1)$, cu proprietatea $|c_k| \le M\frac{A^k}{k!}$, pentru toţi $k = 0, 1, ...$, (ceea ce implică $|f(z)| \le Me^{A|z|}$ pentru toţi $z \in \mathbb{D}_R$). De asemenea, considerăm $1 \le r < 1/A$.*

(i) Dacă $R = +\infty$, $(1/R = 0)$, adică f este o funcţie întreagă, atunci $K_n(f;\lambda_n)(z)$ este funcţie întreagă, pentru toţi $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ avem

$$K_n(f;\lambda_n)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k K_n(e_k;\lambda_n)(z)$$

şi pentru toţi $|z| \le r$, au loc următoarele estimări :

$$\left| K_n(f;\lambda_n)(z) - f(z) - \frac{\lambda_n}{2}[f'(z) + zf''(z)] \right| \le C_r'(f) \cdot \lambda_n^2,$$

$$\|K_n^{(p)}(f;\lambda_n) - f^{(p)}\|_r \sim \lambda_n,$$

ultima echivalenţa avînd loc dacă f nu este un polinom de gradul $\leq p$ şi constantele din echivalenţa depind de f, r, p.

Mai sus, avem $p \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $C'_r(f) < \infty$ este o constantă independentă de n şi z iar $\|f\|_r = \max\{|f(z)|; |z| \leq r\}$.

(ii) Dacă $R < +\infty$, atunci operatorul complex de aproximare

$$K_n^*(f;\lambda_n)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot K_n(e_k;\lambda_n)(z), z \in \overline{\mathbb{D}_r},$$

este bine definit şi $K_n^*(f;\lambda_n)(z)$ satisface toate estimările de la punctul (i), pentru toţi $1 \leq r < \frac{1}{A} < R$.

Observaţii. 1) În concluzie, rezultatele din din cazul complex, Teoremele 4.1.1 şi 4.1.2, sunt de tip definitiv, în sensul că permit construirea de operatori care pot aproxima funcţiile cu un ordin arbitrar, ales dinainte.

2) Prima estimare din enunţul Teoremei 4.1.1, (i), a fost extinsă (cu o constantă diferită desigur) în [36] la aproximarea cu operatori generalizaţi Szász-Faber, în mulţimi compacte din $\mathbb{C}$.

4.1.3 Operatori Baskakov generalizaţi

Pentru x real şi ≥ 0, formula originală a operatorului clasic al lui Baskakov, este dată de (vezi [7])

$$Z_n(f)(x) = (1+x)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k f(k/n).$$

Multe rezultate de aproximare ale acestui operator clasic au fost publicate dea lungul timpului.

Potrivit Teoremei 2 din [54], sub aceleaşi ipoteze ale lui f potrivit cărora $Z_n(f)(x)$ este bine definit şi notînd cu $[0, 1/n, ..., j/n; f]$ diferenţa divizată a lui f pe nodurile $0, ..., j/n$, pentru $x \geq 0$ putem scrie $Z_n(f)(x) = W_n(f)(x)$,

$x \geq 0$, unde

$$W_n(f)(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{j-1}{n}\right) \cdot [0, 1/n, ..., j/n; f]x^j, x \geq 0, \tag{4.3}$$

(aici pentru $j = 0$ şi $j = 1$ luam $(1 + 1/n) \cdot ... \cdot (1 + (j-1)/n) = 1$).

Pentru $\lambda_n \searrow 0$, arbitrar, din formula (1) din lucrarea [43] (particularizînd acolo $\varphi_n(\lambda_n; x) = (1 + x)^{-1/\lambda_n}$), $Z_n(f)(x)$ poate fi generalizat prin formula

$$Z_n(f; \lambda_n)(x)$$
$$= (1+x)^{-1/\lambda_n} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{\lambda_n} \left(1 + \frac{1}{\lambda_n}\right) \cdot ... \cdot \left(j - 1 + \frac{1}{\lambda_n}\right) \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^j f(j\lambda_n),$$

$x \geq 0$, unde prin convenţie avem $\frac{1}{\lambda_n}\left(1 + \frac{1}{\lambda_n}\right) \cdot ... \cdot \left(j - 1 + \frac{1}{\lambda_n}\right) = 1$ pentru $j = 0$.

Pentru această generalizare, în [43] s-a obţinut ordinul de aproximare $\omega_1(f; \sqrt{\lambda_n} \cdot \sqrt{x(1+x)})$.

În mod corespunzător, $W_n(f)(x)$ dat de formula (4.3), poate fi generalizat prin formula

$$W_n(f; \lambda_n)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (1 + \lambda_n) ... (1 + (j-1)\lambda_n) \cdot [0, \lambda_n, ..., j\lambda_n; f]x^j, x \geq 0,$$

unde prin convenţie, $(1 + \lambda_n) ... (1 + (j-1)\lambda_n) = 1$ pentru $j = 0$.

Este clar că $Z_n(f; \lambda_n)(x) = W_n(f; \lambda_n)(x)$ for all $x \geq 0$, dar după cum a fost observat în [34], p. 124, în cazul particular $\lambda_n = \frac{1}{n}$, dacă $|x| < 1$ nu este pozitiv, atunci $W_n(f; \lambda_n)(x)$ şi $Z_n(f; \lambda_n)(x)$ nu neaparat coincid şi din cauza acestui motiv, în secţiunea 1.8 a carţii [34], pp. 124-138, ei au fost studiaţi separat, sub diferite ipoteze asupra lui f şi $z \in \mathbb{C}$.

În cele ce urmează, vom studia proprietăţile de aproximare ale operatorilor Baskakov generalizaţi complecşi $W_n(f; \lambda_n)(z)$, ataşaţi funcţiilor analitice satisfacînd anumite condiţii de creştere exponentiala.

În acest sens, putem enunţa următoarea.

Teorema 4.1.3. (Gal-Opriş [46]) *Fie* $0 < \lambda_n \leq \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ *cu* $\lambda_n \to 0$ *cit de ra[id dorim. Fie* $f : \mathbb{D}_R \to \mathbb{C}$, $1 < R \leq +\infty$, *adică* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, *pentru toţi* $z \in \mathbb{D}_R$. *Presupunem că există* $M > 0$ *şi* $A \in (1/R, 1)$, *cu proprietatea* $|c_k| \leq M\frac{A^k}{k!}$, *pentru toţi* $k = 0, 1, ...$, *(ceea ce implică* $|f(z)| \leq Me^{A|z|}$ *pentru toţi* $z \in \mathbb{D}_R$*). Considerăm* $1 \leq r < \frac{1}{A}$.

(i) Dacă $R = +\infty$, $(1/R = 0)$, *adică* f *este o funcţie întreagă, atunci pentru* $|z| \leq r$, $W_n(f; \lambda_n)(z)$ *este funcţie analitică, avem* $W_n(f; \lambda_n)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k W_n(e_k; \lambda_n)(z)$ *şi au loc următoarele estimări :*

$$|W_n(f; \lambda_n)(z) - f(z)| \leq C_{r,M,A} \cdot \lambda_n,$$

$$|W_n^{(p)}(f; \lambda_n)(z) - f^{(p)}(z)| \leq \frac{p!r_1 \cdot C_{r_1,M,A}}{(r_1 - r} \cdot \lambda_n,$$

$$\left| W_n(f; \lambda_n)(z) - f(z) - \frac{\lambda_n}{2} z(1+z) f''(z) \right| \leq M_r(f) \cdot \lambda_n^2,$$

$$\|W_n^{(p)}(f; \lambda_n) - f^{(p)}\|_r \sim \lambda_n,$$

ultima echivalenţa avînd loc dacă f *nu este un polinom de grad* $\leq p \in \mathbb{N}$ *iar constantele din echivalenţă depind de* f, r, p.

Mai sus, $C_{r,M,A} = 6M \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(k-1)(rA)^k < \infty$, $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < r_1 < \frac{1}{A}$, $M_r(f) = 16M \cdot \sum_{k=3}^{\infty} (k-1)(k-2)(rA)^k < \infty$ *and* $\|f\|_r = \max\{|f(z)|; |z| \leq r\}$.

(ii) Dacă $R < +\infty$, *atunci operatorul complex de aproximare*

$$W_n^*(f; \lambda_n)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot W_n(e_k; \lambda_n)(z), z \in \overline{\mathbb{D}_r},$$

este bine definit şi $W_n^*(f; \lambda_n)(z)$ *satisface toate estimările de la punctul (i), pentru toţi* $1 \leq r < \frac{1}{A} < R$.

Observaţie. Datorita rezultatelor din cazul variabilei reale din [43] şi celor din cazul complex din Teorema 4.1.3, putem spune că ele sunt definitive, în sensul că pun în evidenţa operatori de tip Baskakov care pot aproxima funcţiile cu un ordin arbitrar, ales dinainte.

4.2 Ordin arbitrar prin operatori Baskakov-Faber

Fie un şir $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\lambda_n \to 0$ cit de repede dorim. În această secţiune, pentru un operator generalizat Baskakov-Faber, ataşat funcţiilor analitice de crestere exponentiala într-un continuum $G \subset \mathbb{C}$, obţinem ordinul de aproximare $O(\lambda_n)$. Indicăm mai multe exemple concrete de continuumuri G, pentru care acest operator poate fi construit în mod explicit. În acest mod, se generalizeaza rezultatele obţinute în secţiunea anterioara pentru discuri compacte, la cazul mai general cînd discul este înlocuit cu o mulţime compactă din $\mathbb{C}$.

4.2.1 Introducere

În conformitate cu consideraţiile din Subsecţiunea 4.1.1, notînd

$$W_n(f)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{j-1}{n}\right) \cdot [0, 1/n, ..., j/n; f] z^j,$$

pentru funcţii analitice satisfacînd anumite condiţii de creştere exponenţială, estimări cantitative de ordinul $O\left(\frac{1}{n}\right)$ în aproximarea cu $W_n(f)(z)$ în discuri compacte cu centrul în origine, au fost pentru prima dată obţinute în [34], secţiunea 1.9, pp. 124-138. Pentru $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, toate rezultatele cantitative se bazeaza pe formula $W_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot W_n(e_k)(z)$, cu $e_k(z) = z^k$, adică

$$W_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{j=0}^{k} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{j-1}{n}\right) \cdot [0, 1/n, ..., j/n; e_k] z^j. \tag{4.4}$$

De asemenea, este bine de notat că estimări cantitative similare în aproximare cu alţi operatori complecsi pot fi găsite în, de exemplu, cartile [34], [35], [48] şi în lucrările [15], [37], [38]-[47], [55]-[57].

Folosind un şir de numere reale pozitive, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $\lambda_n \to 0$ şi sugerată şi de formula (4.4), în această secţiune com generaliza rezultatele obţinute pentru operatorii $W_n(f)(z)$, la aproximarea prin aşa numiţii operatori Baskakov-Faber generalizaţi, ataşaţi unor funcţii cu creşteri exponentiale într-un continuum din $\mathbb{C}$, obţinînd şi ordinul de aproximare $O(\lambda_n)$.

Deoarece $\lambda_n \to 0$, evident că fara a pierde din generalitate, putem presupune că $0 < \lambda_n \leq \frac{1}{2}$, pentru toţi $n \in \mathbb{N}$.

4.2.2 Preliminarii

Mai întii, amintim pe scurt citeva concepte de bază asupra polinoamelor Faber şi ale dezvoltărilor în serie Faber.

Pentru $G \subset \mathbb{C}$ o mulţime compactă astfel încît $\tilde{\mathbb{C}} \setminus G$ este conexa, fie $A(G)$ spaţiul Banach al tuturor funcţiilor care sunt contînue pe G şi analitice în interiorul lui G, înzesrat cu norma $\|f\|_G = \sup\{|f(z)|; z \in G\}$. Notînd $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}$, potrivit Teoremei lui Riemann, există o unica aplicaţie conforma Ψ of $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}_1$ pe $\tilde{\mathbb{C}} \setminus G$ astfel că $\Psi(\infty) = \infty$ şi $\Psi'(\infty) > 0$. Atunci, lui G se poate ataşa polinomul de grad exact n, $F_n(z)$, numit *polinom Faber*, definit prin $\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}$, $z \in G, |w| > 1$.

Dacă $f \in A(G)$ atunci

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \frac{f(\Psi(u))}{u^{n+1}} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\Psi(e^{it}))e^{-int} dt, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

sunt numiţi coeficientii Faber ai lui f iar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)F_n(z)$ este numită seria (dezvoltarea) Faber ataşata lui f pe G. Este bine de notat că seria Faber reprezintă o generalizare naturală a serie Taylor, cînd discul unitate este înlocuit cu un domeniu simplu conex mărginit de o curbă cu proprietăţi de netezime suficient de bune. Detalii asupra proprietăţilor polinoamelor şi dezvoltarilor Faber pot fi gasite în, de exemplu, [31], [62].

Fie G un compact conex din $\mathbb{C}$ (adică un continuum) şi presupunem că f este analitică pe G, adică există $R > 1$ astfel încît f este analitică în G_R, dată prin formula $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)F_k(z)$, $z \in G_R$. Reamintim aici că G_R noteaza înteriorul curbei de nivel închise Γ_R, dată de $\Gamma_R = \{\Psi(w); |w| = R\}$ (si că $G \subset \overline{G_r}$ pentru toţi $1 < r < R$).

Sugerată de formula (4.4), putem introduce următoarea.

Definiţia 4.2.1. (Gal-Opriş [45]) Operatorul Baskakov-Faber generalizat ataşat lui G şi f este definit prin $W_n(f; \lambda_n, G; z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \cdot W_n(e_k; \lambda_n, G; z)$, adică,

$$W_n(f; \lambda_n, G; z)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \cdot \sum_{j=0}^{k} (1 + \lambda_n) \cdot ... \cdot (1 + (j-1)\lambda_n) \cdot [0, \lambda_n, ..., j\lambda_n; e_k] \cdot F_j(z), \quad (4.5)$$

unde pentru $j = 0$ şi $j = 1$, prin convenţie $(1 + \lambda_n) \cdot ... \cdot (1 + (j-1)\lambda_n) = 1$.

Observaţie. Pentru $\lambda_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ şi $G = \overline{\mathbb{D}}_1$, deoarece $F_j(z) = z^j$, generalizarea de mai sus se reduce la operatorul complex Baskakov clasic, introdus şi studiat în [34], secţiunea 1.9.

4.2.3 Rezultate principale

Pentru demonstraţia rezultatului principal, avem nevoie de două leme, după cum urmează.

Lema 4.2.2. (Gal-Opriş [45]) *Fie* $0 < \lambda_n \leq \frac{1}{2} < 1$, $n \in \mathbb{N}$, *cu* $\lambda_n \to 0$. *Pentru toţi* $k, n \in \mathbb{N}$ *cu* $k \leq [1/\lambda_n]$ *(aici* $[a]$ *noteaza partea întreaga a lui* a*) avem inegalitatea*

$$E_{k,n} := \sum_{j=0}^{k-1} (1+\lambda_n) \cdot ... \cdot (1+(j-1)\lambda_n) \cdot [0, \lambda_n, ..., j\lambda_n; e_k] \leq \lambda_n \cdot (k+3)!.$$

Prin convenţie, pentru $j = 0$ *şi* $j = 1$ *luăm* $(1+\lambda_n) \cdot ... \cdot (1+(j-1)\lambda_n) = 1$.

De asemenea, putem demonstra următoarea.

Lema 4.2.3. (Gal-Opriş [45]) *Fie* $0 < \lambda_n \leq \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, *cu* $\lambda_n \to 0$. *Pentru toţi* $k \geq 0$ *şi* $n \in \mathbb{N}$, *avem*

$$G_{k,n} := \sum_{j=0}^{k} (1+\lambda_n) \cdot ... \cdot (1+(j-1)\lambda_n) \cdot [0, \lambda_n, ..., j\lambda_n; e_k] \leq (k+1)!.$$

Rezultatul principal este următorul.

Teorema 4.2.4. (Gal-Opriş [45]) *Fie* f *analitică pe continuumul* G, *adică există* $R > 1$ *astfel încît* f *este analitică în* G_R, *dată prin* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) F_k(z)$, $z \in G_R$. *Deasemenea, presupunem că există* $M > 0$ *and* $A \in \left(\frac{1}{R}, 1\right)$, *cu* $|a_k(f)| \leq M \frac{A^k}{k!}$, *pentru toţi* $k = 0, 1, ...$, *(ceea ce implică* $|f(z)| \leq C(r) M e^{Ar}$ *pentru toţi* $z \in G_r$, $1 < r < R$*).*

Fie $1 < r < \frac{1}{A}$ *arbitrar fixat. Atunci, există un indice* $n_0 \in \mathbb{N}$ *şi o constantă* $C(r, f) > 0$ *depinzînd doar de* r *şi* f, *astfel încît pentru toţi* $z \in \overline{G_r}$ *şi* $n \geq n_0$, *avem*

$$|W_n(f; \lambda_n, G; z) - f(z)| \leq C(r, f) \cdot \lambda_n.$$

Observaţii. 1) Teorema 4.2.4 generalizeaza Teorema 1.9.1, p. 126 din [34], în două sensuri : mai întîi, este extinsă de la discuri compacte centrate în origine, la mulţimi compacte, iar în al doilea rînd, ordinul de aproximare $O\left(\frac{1}{n}\right)$ este în mod esential imbunataţit la ordinul $O\left(\lambda_n\right)$, cu $\lambda_n \to 0$ cit de rapid dorim.

2) Este clar că Teorema 4.2.4 are loc sub ipoteza mult mai generală $|a_k(f)| \leq P_m(k) \cdot \frac{A^k}{k!}$, pentru toţi $k \geq 0$, unde P_m este un polinom algebric de grad m cu $P_m(k) > 0$ pentru toţi $k \geq 0$.

3) Sunt multe exemple pentru G cînd aplicaţia conforma Ψ şi polinoamele Faber asociate lui G, şi în consecinţă cînd şi operatorii Baskakov-Faber, pot fi explicit scrisi (vezi, de exemplu, [35], pp. 81-83, sau [36]), după cum urmează : $G = [-1; 1]$, G este continuumul marginit de m-hypocycloidul, G este m-steaua regulata ($m = 2, 3, ...,$), G este m-lemniscata simetrica, $m = 2, 3, ...,$ sau G este un semidisc.

Bibliografie

[1] Abel, U., Butzer, P. L., Complete asymptotic expansion for generalized Favard operators, *Constr. Approx.*, **35**(2012), 73-88.

[2] Agratini, O., Radu, C., On q-Baskakov-Mastroianni operators, *Rocky Mount. J. Math.*, **42**(3)(2012), 773-790.

[3] Altomare F., Campiti, M., *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 17. New York, Berlin (1994).

[4] Aral, A., A generalization of Szász-Mirakjan operator based on q-integers, *Math. Comput. Model.*, **47**(2008), 1052-1062.

[5] Aral, A., Gupta, V., On q-Baskakov type operators, *Demonstratio Math.*, **47**(1)(2009), 109-122.

[6] Aral, A., Gupta, V., On the Durrmeyer type modiication of q-Baskakov type operators, *Nonlinear Anal.*, **72**(2010), No. 3-4, 1171-1180.

[7] Baskakov, V. A., An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **113**(1957), 249-251.

[8] Bede, B., Coroianu, L., Gal, S. G., Approximation and shape preserving properties of the Bernstein operator of max-product kind, *Int. J. Math. Math. Sci.*, volume 2009, Article ID **590589**, 26 pages, doi:10.1155/2009/590589.

[9] Bede, B., Coroianu, L., Gal, S. G., Approximation and shape preserving properties of the nonlinear Meyer-König and Zeller operator of max-product kind, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **31**(2010), No. 3, 232-253.

[10] Bede, B., Coroianu, L., Gal, S. G., *Approximation by Max-Product Type Operators*, Springer, New York, 2016.

[11] Berdysheva, E. E., Uniform convergence of Bernstein-Durrmeyer operators with respect to arbitrary measure, *J. Math. Anal. Appl.* 394(2012) 324-336.

[12] Berdysheva, E. E., Bernstein-Durrmeyer operators with respect to arbitrary measure, II : Pointwise convergence, *J. Math. Anal. Appl.* 418(2014) 734-752.

[13] Berdysheva, E. E., Jetter, K., Multivariate Bernstein-Durrmeyer operators with arbitrary weight functions, J. Approx. Theory 162(2010) 576-598.

[14] Bernstein, S. N., Démonstration du théorém de Weierstrass fondeé sur le calcul des probabilités, *Commun. Soc. Math. Kharkov*, **13**(1912/1913), 1-2.

[15] Cetin, N., Ispir, N., Approximation by complex modified Szász-Mirakjan operators, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **50** (3) (2013), 355-372.

[16] Choquet, G., Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) 5(1954) 131-295.

[17] Coroianu, L., Gal, S. G., Classes of functions with improved estimates in approximation by the max-product Bernstein operator, *Anal. Appl. (Singap.)*, **9**(2011), No. 3, 249-274.

[18] Coroianu, L., Gal, S. G., Localization results for the Bernstein max-product operator, *Appl. Math. Comp.*, **231**(2014), 73-78.

[19] Coroianu, L., Gal, S. G., Localization results for the max-product Meyer-König and Zeller operator, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **34**(2013), No. 7, 713-727.

[20] Coroianu, L., Gal, S. G., Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejér and sinc-type kernels, *Demonstratio Math.*, **49**(2016), No. 1, 38-49.

[21] Coroianu, L., Gal, S. G., **Opriş, D. B.**, Trifa, S., Feller's scheme in approximation by nonlinear possibilistic integral operators, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **38** (2017), No. 3, 327-343.

[22] De Cooman, G., Possibility theory. I. The measure-and integral-theoretic groundwork, *Internat. J. Gen. Systems*, **25**(1997), No. 4, 291-323.

[23] Denneberg, D., *Non-Additive Measure and Integral*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1994.

[24] Derriennic, M. M., Modified Bernstein polynomials and Jacobi polynomials in q-calculus, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **76**(2005), 269-290.

[25] Dieudonné, J., *Éléments dAnalyse ; 1. Fondements de l'Analyse Moderne*, Gauthiers Villars, Paris, 1968.

[26] Djebali, S., Uniform continuity and growth of real continuous functions, *Int. J. Math. Education in Science and Technology*, **32**(2001), No. 5, 677-689.

[27] Dubois D., Prade, H., *Possibility Theory*, Plenum Press, New York, 1988.

[28] Favard, J., Sur les multiplicateurs d'interpolation, *J. Math. Pures Appl.*, **23**(1944), No. 9, 219-247.

[29] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. II, Wiley, New York, 1966.

[30] Finta, Z., Gupta, V., Approximation propertis of q-Baskakov operators, *Centr. Eur. J. Math.*, **8**(2010), No. 1, 199-211.

[31] Gaier, D., *Lectures on Complex Approximation*, Birkhauser, Boston, 1987.

[32] Gal, S. G., A possibilistic approach of the max-product Bernstein kind operators, *Results Math.*, **65**(2014), 453-462.

[33] Gal, S. G., Approximation by Choquet integral operators, *Annali Mat. Pura Appl.*, **195**(2016), No. 3, 881-896.

[34] Gal, S. G., *Approximation by Complex Bernstein and Convolution-Type Operators*, World Scientific Publ. Co, Singapore-Hong Kong-London-New Jersey, 2009.

[35] Gal, S. G., *Overconvergence in Complex Approximation*, Springer, New York, 2013.

[36] Gal, S. G., Approximation of analytic functions by generalized Favard-Szász-Mirakjan-Faber operators in compact sets, *Complex Anal. Oper. Theory*, **9**(2015), No. 5, 975-984.

[37] Gal, S. G., Approximation in compact sets by q-Stancu-Faber polynomials, $q > 1$, *Comput. Math. Appl.*, **61**(2011), no. 10, 3003-3009.

[38] Gal, S. G., Gupta, V., *Approximation by complex Durrmeyer type operators in compact disks*, in : Mathematics without Boundaries, Surveys in Interdisciplinary Research, P.M. Pardalos and T.M. Rassias (editors), Springer, New York-Heidelberg-Dordrecht-London, 2014, pp. 263-284.

[39] Gal, S. G., Gupta, V., Approximation by the complex form of a link operator between the Phillips and the Szász-Mirakjan operators, *Results Math.*, **67**(2015), 381-393.

[40] Gal, S. G., Gupta, V., Mahmudov, N. I., Approximation by a complex q-Durrmeyer type operator, *Ann. Univ. Ferrara*, **58** (1) (2012), 65-87.

[41] Gal, S. G., Gupta, V., Verma, D. K., Agrawal, P. N., Approximation by complex Baskakov-Stancu operators in compact disks, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **61**(2012), no. 2, 153-165.

[42] Gal, S. G., Mahmudov, N. I., Kara, M., Approximation by complex q-Szász-Kantorovich operators in compact disks, $q > 1$, *Complex Anal. Oper. Theory*, **7**(2013), No. 6, 1853-1867.

[43] Gal, S. G., **Opriş, D. B.**, Approximation with an arbitrary order by modified Baskakov type operators, *Appl. Math. Comp.*, **265**(2015), 329-332.

[44] Gal, S. G., **Opriş, D. B.**, Uniform and pointwise convergence of Bernstein-Durrmeyer operators with respect to monotone and submodular set functions, *J. Math. Anal. Appl.*, **424**(2015), 1374-1379.

[45] Gal, S. G., **Opriş, D. B.**, Approximation of analytic functions with an arbitrary order by generalized Baskakov-Faber operators in compact sets, *Complex Anal. Oper. Theory*, **10**(2016), No. 2, 369-377.

[46] Gal, S. G., Mahmudov, N. I., **Opriş, D. B.**, Approximation with an arbitrary order by Szász, Szász-Kantorovich and Baskakov complex operators in compact disks, *Azerbaijan J. Math.*, **6**(2016), No. 2, 3-12.

[47] Gupta, V., Complex Baskakov-Szász operators in compact semi-disks, *Lobachevskii J. Math.*, **35** (2014), no. 2, 65-73.

[48] Gupta, V., Agarwal, R. P., *Convergence Estimates in Approximation Theory*, Springer, New York, 2014.

[49] Gupta, V., Aral, A., Some approximation properties of q-Baskakov-Durrmeyer operators, *Appl. Math. Comput.*, **218**(2011), No. 3, 783-788.

[50] Kac, V., Cheung, P., *Quantum Calculus*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.

[51] Levasseur, K. N., A probabilistic proof of the Weierstrass approximation theorem, *Amer. Math. Monthly*, **91**(1984), No. 4, 249-250.

[52] Li, B.-Z., Approximation by multivariate Bernstein-Durrmeyer operators and learning rates of least-square regularized regression with multivariate polynomial kernel, *J. Approx. Theory* 173(2013) 33-55.

[53] Lopez-Moreno, A.-J., Weighted simultaneous approximation with Baskakov type operators, *Acta Math. Hungar.*, **104(1-2)**(2004), 143-151.

[54] Lupaş, A., Some properties of the linear positive operators, II, *Mathematica(Cluj)*, **9(32)**(1967), 295-298.

[55] Mahmudov, N. I., Approximation properties of complex q-Szász-Mirakjan operators in compact disks, *Comput. Math. Appl.*, **60** (6) (2010), 1784-1791.

[56] Mahmudov, N. I., Convergence properties and iterations for q-Stancu polynomials in compact disks, *Comput. Math. Appl.*, **59 (12)** (2010), 3763-3769.

[57] Mahmudov, N. I., Approximation by Bernstein-Durrmeyer-type operators in compact disks, *Appl. Math. Lett.*, **24** (7) (2011), 1231-1238.

[58] Mahmudov, N. I., Kara, M., Approximation theorems for complex Szász-Kantorovich operators, *J. Comput. Anal. Appl.*, **15** (1) (2013), 32-38.

[59] **Opriş, D. B.**, Approximation with an arbitrary order by generalized Szász-Stancu and Baskakov-Stancu type operators, *Anal. Univ. Oradea, fasc. math.*, **XXIV** (2017), No. 1, 75-81.

[60] Radu, C., On statistical approximation of a general class of positive linear operators extended in q-calculus, *Appl. Math. Comput.*, **215**(2009), 2317-2325.

[61] Shisha, O., Mond, B., The degree of convergence of linear positive operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **60**(1968), 1196-1200.

[62] Suetin, P. K., *Series of Faber Polynomials*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1998.

[63] Wang, Z., Klir, G.J., *Generalized Measure Theory*, Springer, New York, 2009.