UNIVERSITATEA “BABEŞ-BOLYAI” CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

INCLUZIUNI OPERATORIALE PRIN TEHNICA PUNCTULUI FIX ÎN SPAŢII METRICE VECTORIALE

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Coordonator ştiinţific
Prof.Univ.Dr. Petruşel Adrian-Olimpiu

Doctorand
Petre Ioan-Radu

Cluj-Napoca
2012

Cuprins

Introducere

Cuvânt înainte

În ultimele decenii, dacă consultăm bazele de date electronice, observăm că teoria punctului fix a înregistrat creşteri semnificative ca şi număr de lucrări scrise de autori din diverse domenii ale matematicii. Totodată, ea reprezintă o puternică metodă de rezolvare a multor probleme apărute în aceste domenii ale matematicii, îndeosebi în matematica pură şi aplicată.

Ideea de punct fix a provenit de la a determina soluţiile ecuaţiei $x = f(x)$ şi a devenit importantă în studiul problemelor de existenţă şi unicitate a ecuaţiilor şi incluziunilor diferenţiale.

Dezvoltarea acesteia continuă în colective de cercetare având ca temă teoria punctului fix.

Printre autorii care au adus contribuţii importante în teoria metrică a punctului fix se găsesc: S. Banach, B. Knaster, K. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, R. Caccioppoli, V.V. Niemytzki, L. Kantorovich, M.A. Krasnoselskii, T. Wazewski, M. Edelstein, A.I. Perov, F.E. Browder, W.A. Kirk, L.B. Ćirić, I.A. Rus, K. Goebel, J. Caristi, B. Fisher, S. Heikkila, B.E. Rhoades, S. Seikkalä, M. Kwapisz, J. Matkowski, S. Reich, J. Dugundji, A. Granas, T.A. Makarevich, P.P. Zabrejko, E. De Pascale, T. Burton, R.P. Agarwal, D. O'Regan, C. Avramescu.

Motivarea cercetării

Un rol central în teoria metrică a punctului fix îl are Principiul Contracţiei al lui Banach–Caccioppoli. Astăzi există multe generalizări ale acestui rezultat care au fost date în diferite tipuri de spaţii metrice, printre care spaţiile metrice generalizate, b-metrice şi E-metrice.

Prin intermediul modelării matematice, multe probleme cunoscute din fizică, biologie, chimie, inginerie, etc. dau naştere unui sistem bi-dimensional sau multi-dimensional de ecuaţii, respectiv incluziuni diferenţiale sau integrale. Un astfel de sistem de ecuaţii, respectiv de incluziuni poate fi studiat ca o ecuaţie operatorială, respectiv incluziune operatorială în contextul unui spaţiu metric vectorial, iar în studiul mulţimii soluţiilor un instrument extrem de util este tehnica de punct fix. Deseori, obţinerea rezultatelor de punct fix are loc pe o cale operatorială, iar avantajul acestora constă în faptul că demonstraţiile numai sunt atât de voluminoase.

În studiul ecuaţiei de punct fix $x = f(x)$ sau a incluziunii de punct fix $x \in F(x)$, în mod clasic, se urmărea: existenţa şi unicitatea soluţiei, respectiv dependenţa continuă de date a soluţiei. În plus faţă de acestea, se pot studia şi alte proprietăţi de puncte fixe, precum: stabilitatea Ulam–Hyers a problemei de punct fix, proprietatea problemei de punct fix bine pusă, proprietatea de umbrire la limită, şiruri de operatori şi puncte fixe, etc. Totodată, se poate urmări un studiu cantitativ al mulţimii soluţiilor pentru sisteme de ecuaţii, respectiv de incluziuni ce au în componenţă fiecare sume a câte doi operatori integrali şi să se pună în evidenţă rezultatele de punct fix găsite, prin aplicarea lor în studiul existenţei soluţiei sistemelor de ecuaţii, respectiv incluziuni integrale de tip Fredholm–Volterra.

Mai departe, metrica poate fi înlocuită cu o b-metrică, respectiv E-b-metrică şi astfel, să se cerceteze obţinerea de noi teoreme extinse de punct fix, precum şi tehnici diferite de demonstrare.

În acest sens, scopul principal al acestei teze este de a continua cercetările în următoarele direcţii:

- teoreme de punct fix care asigură existenţa soluţiei într-un spaţiu metric generalizat pentru operatori ce satisfac o condiţie de A-contracţie multivocă în sens Nadler, problemă deschisă din [19];

- noi teoreme de punct fix pentru operatori univoci, respectiv multivoci în spaţii E-metrice pornind de la ideea din [25] şi alte proprietăţi date în [5], [45], [99], [24];

- elaborare a unei teorii pentru o teoremă de punct fix pentru operatori univoci, respectiv multivoci în spaţii E-metrice folosind modelul clasic din [89], respectiv [75];

- diverse extinderi ale Principiului Contracţiei pentru cazul φ-contracţiilor în contextul spaţiilor E-metrice pe baza modelului din [43];
- teoreme de tip Krasnoselskii şi alte rezultate conexe pentru suma a doi operatori univoci şi multivoci în spaţii Banach generalizate pornind de la rezultatele clasice obţinute în [48], [72], [20];
- rezultate de existenţă a soluţiei, respectiv a mulţimii soluţiilor pentru cazul abstract al sistemelor de ecuaţii şi incluziuni integrale de tip Fredholm–Volterra în spaţii Banach generalizate pornind de la rezultatele obţinute în [71], [72], [76], [77];
- teoreme de tip Krasnoselskii pentru suma a doi operatori univoci şi multivoci în spaţii E-Banach folosind idei din [29], [31], [42], [96], [97];
- rezultate de existenţă a soluţiei, respectiv a mulţimii soluţiilor pentru cazul sistemelor de ecuaţii şi incluziuni integrale de tip Fredholm–Volterra în spaţii E-Banach având ca reper [71], [72], [29], [31], [42], [96], [97];
- teoreme de punct fix şi punct fix strict în spaţii b-metrice generalizate pentru operatori univoci şi multivoci folosind tehnica operatorilor Picard şi slab Picard pornind de la ideile din [14], [16], [12];
- teoreme de punct fix în spaţii E-b-metrice pentru operatori univoci şi multivoci folosind tehnica operatorilor Picard şi slab Picard în conul elementelor cu unitate strict ordonată după conceptul introdus în [57].

Structura tezei. Rezultate originale

Teza de doctorat intitulată „*Incluziuni operatoriale prin tehnica punctului fix în spaţii metrice vectoriale*" este structurată în patru capitole, fiecare capitol conţinând câteva secţiuni.

Capitolul 1: Spaţii metrice vectoriale

În primul capitol se definesc noţiunile de spaţiu metric generalizat şi spaţiu metric vectorial, în particular când metrica ia valori într-un spaţiu Riesz. Totodată, se discută despre proprietatea Archimedeană, respectiv de completitudine ordonată (Dedekind), de care se poate bucura un spaţiu Riesz. În aceste spaţii metrice înzestrate cu o metrică vectorială finit dimensională şi infinit dimensională, se definesc noţiunile de şir convergent, şir Cauchy, şir complet, submulţime închisă, diametrul şi mărginirea unei submulţimi ale unui spaţiu metric vectorial, diverse proprietăţi şi elemente de topologie.

Totodată, se enunţă câteva rezultate metrice şi topologice de punct fix preliminare teoremei lui Krasnoselskii într-un spaţiu Banach generalizat, precum teorema lui Perov într-un spaţiu metric generalizat şi teorema lui Schauder într-un spaţiu Banach generalizat. Pentru cazul operatorilor multivoci se obţin rezultate extinse noi.

Contribuţii proprii: lemele 1.3.16, 1.3.17, 1.3.18 şi teorema 1.3.19 care reprezintă teorema lui Perov pentru un operator ce satisface o condiţie de A-contracţie multivocă în sens Nadler, fiind dată ca şi răspuns la o problemă deschisă enunţată în A. Bucur, L. Guran, A. Petruşel [19]. În lema 1.3.20 stabilim un rezultat de dependenţă de date pentru excesul dintre mulţimile punctelor fixe a doi operatori multivoci ce satisfac o condiţie de A-contracţie multivocă în sens Nadler, iar în teorema 1.3.21 extindem un rezultat preliminar teoremei lui Krasnoselskii dat în L. Rybinski [92], care asigură existenţa unei selecţii continue pentru un operator multivoc, în contextul unui spaţiu Banach generalizat.

Lucrarea care cuprinde rezultatele originale ale acestui capitol este:

I.-R. Petre, A. Petruşel, *Krasnoselskii's Theorem in generalized Banach spaces and applications*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Nr. 85, 2012, 1-20.

Capitolul 2: Teoria unei teoreme E-metrice de punct fix

În capitolul doi, pornind de la ideile din [29], [5] şi [25], rezultatele noi aduse cuprind extinderi ale unor teoreme metrice de punct fix pentru operatori univoci, respectiv multivoci din teoria clasică la situaţia spaţiilor E-metrice (teoremele 2.1.3, 2.1.4, 2.1.6, 2.1.8 şi 2.1.11). Totodată, discutăm o teorie a Principiului Contracţiei pentru operatori univoci şi multivoci în spaţii E-metrice ce cuprinde lema lui Cauchy extinsă 2.2.1, respectiv teoremele 2.2.3, 2.2.12, 2.2.13 şi 2.2.14 folosind conceptul de teorie a unei teoreme metrice de punct fix introdus şi studiat de prof. I.A. Rus în cazul metricii clasice. Aceasta constă în studiul unor proprietăţi de puncte fixe precum: existenţa şi unicitatea punctelor fixe şi a punctelor fixe stricte, dependenţa de date a punctelor fixe, convergenţa mulţimii punctelor fixe a unui şir de operatori, stabilitatea Ulam–Hyers a problemei de punct fix, proprietatea problemei de punct fix bine pusă, proprietatea de umbrire la limită şi altele (vezi [89] şi [75]). În mod similar, teoria poate fi extinsă asupra celorlalte teoreme metrice de punct fix studiate ce satisfac condiţii de contracţii generalizate în spaţii E-metrice. Se oferă exemple pentru extinderile făcute (exemplele 2.1.2 şi 2.1.9) şi aplicaţii pentru operatori univoci a Principiului Contracţiei (lema lui Gronwall 2.2.5 şi teorema de comparaţie 2.2.6).

În contextul spaţiilor E-metrice sunt prezentate diverse extinderi globale şi locale ale Principiului Contracţiei pentru operatori univoci (teoremele 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5, lemele 2.3.6, 2.3.7 şi teorema 2.3.9), respectiv pentru operatori multivoci (teorema 2.3.10 şi problema 2.3.14) ce satisfac o condiţie neliniară de φ-contracţie. Aceste rezultate generalizează principii de punct fix bine cunoscute din literatura de specialitate (istoric, vezi [84], [47], [46], [98], [29], [96], [97] şi [25]). De asemenea, prezentăm alte rezultate metrice şi topologice de punct fix preliminare teoremei lui Krasnoselskii în spaţii E-metrice complet ordonate (lemele 2.3.15, 2.3.16, teorema 2.3.17 şi problema 2.3.19, dar şi o versiune extinsă a teoremei lui Cantor şi a lemei lui Cesaro care se găseşte în lema 2.3.20, respectiv lema 2.3.21).

Lucrările care cuprind rezultatele originale ale acestui capitol sunt:

I.-R. Petre, *Fixed points for φ-contractions in E-Banach spaces*, Fixed Point Theory, Vol. 13 (2), 2012, 623-640.

I.-R. Petre, *Fixed point theorems in vector metric spaces for single-valued operators*, Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity, Vol. 9, 2011, 59-80.

I.-R. Petre, *Fixed point theorems in vector metric spaces for multivalued operators*, Topol. Methods Nonlinear Anal. (trimisă spre publicare).

Capitolul 3: Teoreme topologice de punct fix şi aplicaţii în spaţii Banach vectoriale

În capitolul trei demonstrăm teorema lui Krasnoselskii şi alte rezultate posibile de existenţă a punctului fix pentru suma a doi operatori într-un spaţiu Banach generalizat, respectiv într-un spaţiu E-Banach. Studiul punctului fix are loc pentru operatori univoci şi multivoci ce satisfac o condiţie de A-contracţie, respectiv φ-contracţie şi o condiţie de compactitate, teoremele 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.3.1 şi problema 3.3.2. Prezentăm câteva probleme deschise şi totodată, modul de aplicare al teoremelor în studiul sistemelor abstracte de ecuaţii şi incluziuni integrale de tip Fredholm–Volterra într-un spaţiu Banach generalizat, respectiv într-un spaţiu E-Banach, teoremele 3.2.1, 3.2.3, 3.4.1 şi problema 3.4.2.

Lucrările care cuprind rezultatele originale ale acestui capitol sunt:

I.-R. Petre, A. Petruşel, *Krasnoselskii's Theorem in generalized Banach spaces and applications*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Nr. 85, 2012, 1-20.

I.-R. Petre, *Fixed points for φ-contractions in E-Banach spaces*, Fixed Point Theory, Vol. 13 (2), 2012, 623-640.

I.-R. Petre, *A multivalued version of Krasnoselskii's theorem in generalized Banach spaces*, An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa, Ser. Mat. (trimisă spre publicare).

Capitolul 4: Teoreme de punct fix în spaţii b-metrice vectoriale

În ultimul capitol, pornim de la noţiunea clasică de spaţiu b-metric apărută în [30] şi câteva lucrări de reper, precum [12], [38], [14] şi [16]. Astfel, introducem noţiunile de spaţiu b-metric generalizat, respectiv E-b-metric şi un concept relevant de strict pozitivitate într-un spaţiu Riesz (vezi [57]). Un avantaj al acestui concept reiese imediat din renunţarea la ipoteza $\varphi(t) < t$ pentru $t \in E_+$ asupra operatorului de o-comparaţie φ şi folosirea unui formalism "ε–δ" pentru demonstrarea rezultatelor din secţiunile 4.3 şi 4.4.

Contribuţiile proprii se găsesc în exemplele 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, lemele 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7, 4.1.8, 4.1.9, 4.1.10 şi într-un mod netrivial în propoziţiile 4.3.3, 4.3.4, 4.3.5, lema 4.3.6, corolarul 4.3.7 şi lema 4.3.8, care lucrează cu conceptul de strict pozitivitate. De asemenea, teoremele de punct fix 4.2.1, 4.2.3, 4.2.4, 4.2.6 şi punct fix strict 4.2.7, 4.2.8 în spaţii b-metrice generalizate, respectiv E-b-metrice (teoremele de punct fix 4.4.2 şi 4.4.4) folosind tehnica operatorilor Picard şi slab Picard, reprezintă rezultate noi.

Lucrările care cuprind rezultatele originale ale acestui capitol sunt:

Zs. Páles, I.-R. Petre, *Iterative fixed point theorems in E-metric spaces*, Acta Math. Hung., DOI: 10.1007/s10474-012-0274-8.

I.-R. Petre, M. Bota, *Fixed point theorems on generalized b-metric spaces*, Publ. Math. Debrecen (acceptată spre publicare).

I.-R. Petre, *Fixed point theorems in E-b-metric spaces*, Arabian J. Math.

(trimisă spre publicare).

Articole ştiinţifice. Conferinţe

Contribuţiile originale ale autorului incluse integral sau parţial în această teză fac parte din următoarele articole ştiinţifice:

1. I.-R. Petre, A. Petruşel, *Krasnoselskii's Theorem in generalized Banach spaces and applications*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Nr. 85, 2012, 1-20, indexată ISI, Web of Science, ISSN: 1417-3875.

2. Zs. Páles, I.-R. Petre, *Iterative fixed point theorems in E-metric spaces*, Acta Math. Hung., DOI: 10.1007/s10474-012-0274-8, indexată ISI, Web of Science, ISSN: 0236-5294, ISSN: 1588-2632.

3. I.-R. Petre, *Fixed points for φ-contractions in E-Banach spaces*, Fixed Point Theory, Vol. 13 (2), 2012, 623-640, indexată ISI, CNCS A, ISSN: 1583-5022.

4. I.-R. Petre, M. Bota, *Fixed point theorems on generalized b-metric spaces*, Publ. Math. Debrecen, indexată ISI, Web of Science, ISSN: 0033-3883 (acceptată spre publicare).

5. I.-R. Petre, *Fixed point theorems in vector metric spaces for single-valued operators*, Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity, Vol. 9, 2011, 59-80, indexată BDI, CNCS B+, ISSN: 1584-4536.

6. I.-R. Petre, *On the solution operator of a differential inclusion*, JP J. of Fixed Point Theory and Appl., Vol. 6 (2), 2011, 107-117, indexată BDI, ISSN: 0973-4228.

7. I.-R. Petre, *Fixed point theorems in vector metric spaces for multivalued operators*, Topol. Methods Nonlinear Anal., indexată ISI, Web of Science, ISSN: 1230-3429 (trimisă spre publicare).

8. I.-R. Petre, *Fixed point theorems in E-b-metric spaces*, Arabian J. Math., indexată ISI, Web of Science, ISSN: 2193-5343 (trimisă spre publicare).

9. I.-R. Petre, *A multivalued version of Krasnoselskii's theorem in generalized Banach spaces*, An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa, Ser. Mat. (trimisă spre publicare).

O parte din rezultatele originale ce se găsesc în articolele menţionate mai sus au fost prezentate anual în câte o conferinţă internaţională:

1. A 7-a Conferinţă Internaţională de Matematică Aplicată (ICAM7), 1-4 Septembrie, 2010, Baia Mare, România;

2. Conferinţa Internaţională de Operatori Neliniari, Ecuaţii Diferenţiale şi Aplicaţii (ICNODEA), 5-8 Iulie, 2011, Cluj-Napoca, România;

3. A 10-a Conferinţă Internaţională de Teoria Punctului Fix şi Aplicaţiile sale (IC-FPTAC), 9-15 Iulie, 2012, Cluj-Napoca, România.

Cuvinte cheie: A-contracţie, aplicaţii ale teoremei lui Krasnoselskii, con convex, contracţie generalizată, contracţie multivocă, contracţie Reich, φ-contracţie, convergenţă Hausdorff, convergenţă vectorială, dependenţă de date, ecuaţia integrală Fredholm–Volterra, element unitate ordonat, extinderi Principiul Contracţiei, latice liniară, lema Gronwall, incluziunea integrală Fredholm–Volterra, matrice convergentă la zero, metodă iterativă, metrică vectorială, norma Bielecki, normă vectorială, operator compact, operator contractiv, operator multivoc, operator Picard vectorial, operator slab Picard vectorial, principiu de comparaţie, proprietatea de punct fix bine pusă, proprietatea de umbrire la limită, punct fix, punct fix strict, spaţiu Banach vectorial, spaţiu metric vectorial, spaţiu b-metric vectorial, spaţiu Riesz, stabilitatea Ulam–Hyers, suma a doi operatori, teorema lui Krasnoselskii, teorema lui Perov, teoria unei teoreme de punct fix.

Mulţumire. Autorul doreşte să mulţumească pentru suportul financiar provenit din cadrul programelor co-finanţate de Programul Operaţional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane, Contract POSDRU/88/1.5/S/60185 - "Studii Doctorale Inovative într-o Societate Bazată pe Cunoaştere".

Capitolul 1

Spaţii metrice vectoriale

1.1 Spaţiu metric generalizat. Spaţiu E-metric

Este bine cunoscut că, istoric vorbind, A.I. Perov [58], respectiv A.I. Perov şi A.V. Kibenko [59] au extins Principiul Contracţiei dat de Banach în literatura clasică pentru un operator contractiv înzestrat cu o metrică vectorială. În acest sens, vom reaminti în secţiunea 1.3 câteva rezultate cunoscute care se pot găsi în A.-D. Filip, A. Petruşel [33] şi R. Precup [79], precum şi altele noi. De asemenea, în R. Precup [79], sunt prezentate câteva avantaje a modului de lucru cu o normă vectorială în raport cu o normă scalară obişnuită.

Spre sfârşitul secolului XX şi începutul secolului XXI apar lucrări care tratează rezultate în care această metrică vectorială ia valori într-un spaţiu infinit dimensional, în particular, spaţiul Riesz (vezi C. Çevik, I. Altun [25], W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen [45], A.C. Zaanen [99]). Aceste spaţii K-metrice cum le-a denumit P.P. Zabrejko în [100] extind spaţiile metrice generalizate. Însă, la multe rezultate obţinerea de aplicaţii în aceste spaţii este adesea dificilă datorită modului abstractizat de lucru. În continuare vom defini noţiunile de spaţiu metric generalizat şi spaţiu E-metric.

Definiţia 1.1.1. ([58]) Fie X o mulţime nevidă şi considerăm spaţiul $\mathbb{R}^m_+$ înzestrat cu o relaţie de ordine parţială obişnuită pe componente. Operatorul $d : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$ ce satisface toate axiomele uzuale ale metricii se numeşte *metrică generalizată* în sens Perov, iar (X, d) se numeşte *spaţiu metric generalizat.*

Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat în sens Perov. Dacă $v, r \in \mathbb{R}^m$, $v := (v_1, v_2, \dots, v_m)$ şi $r := (r_1, r_2, \dots, r_m)$, atunci prin $v \le r$ înţelegem că

$v_i \leq r_i$, pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ şi prin $v < r$ înţelegem că $v_i < r_i$, pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. De asemenea, $|v| := (|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_m|)$. Dacă $u, v \in \mathbb{R}^m$, cu $u := (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ şi $v := (v_1, v_2, \ldots, v_m)$, atunci $\max(u, v) := (\max(u_1, v_1), \ldots, \max(u_m, v_m))$. Dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci $v \leq c$ înseamnă că $v_i \leq c$, pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Definiţia 1.1.2. ([5]) Dacă E este o mulţime şi „$\leq$” este o relaţie de ordine parţială pe E, atunci perechea $(E, \leq)$ se numeşte *mulţime parţial ordonată*. Într-o mulţime parţial ordonată $(E, \leq)$, notaţia $x < y$ înseamnă că $x \leq y$ şi $x \neq y$. Printr-un interval ordonat $[x, y]$ înţelegem mulţimea $\{z \in E : x \leq z \leq y\}$, iar dacă x şi y nu sunt comparabile, atunci $[x, y] = \emptyset$.

Definiţia 1.1.3. ([5]) Spunem că z este *supremumul* perechii de elemente $x, y \in E$ dacă:

(i) z este un majorant al mulţimii $\{x, y\}$, adică $x \leq z$ şi $y \leq z$;

(ii) z este cel mai mic majorant, adică $x \leq u$ şi $y \leq u$ implică $z \leq u$.

Similar se defineşte *infimumul* a două elemente $x, y \in E$ şi notăm cu $x \vee y = \sup\{x, y\}$, respectiv $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Definiţia 1.1.4. ([5]) O mulţime parţial ordonată $(E, \leq)$ se numeşte *latice* dacă orice pereche de elemente $x, y \in E$ admite un supremum şi un infimum.

Funcţiile $(x, y) \mapsto x \vee y$ şi $(x, y) \mapsto x \wedge y$ reprezintă operaţiile laticeale pe E. Într-o latice orice mulţime finită, nevidă admite un supremum şi un infimum. Dacă $\{x_1, \ldots, x_n\}$ este o submulţime finită a unei latice, atunci notăm cu $\bigvee\limits_{i=1}^{n} x_i = \sup\{x_1, \ldots, x_n\}$, respectiv $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} x_i = \inf\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Definiţia 1.1.5. Fie E un spaţiu liniar real. Spunem că $K \subset E$ se numeşte *con convex* dacă:

(i) K con, adică $tK \subset K$, pentru orice $t > 0$ (echivalent, $t > 0$ şi $x \in K$ implică $tx \in K$);

(ii) K convex, adică $K + K \in K$ (echivalent, $x, y \in K$ implică $x + y \in K$).

Definiţia 1.1.6. ([5]) Un spaţiu liniar real E împreună cu o relaţie de ordine „$\leq$” compatibilă cu structura algebrică a lui E în sensul că pentru orice $x, y \in E$ sunt satisfăcute proprietăţile:

(1) $x \leq y$ implică $x + z \leq y + z$, pentru orice $z \in E$;

(2) $x \leq y$ implică $tx \leq ty$, pentru orice $t > 0$;

se numeşte *spaţiu liniar ordonat.*

Definiţia 1.1.7. ([5]) Un spaţiu liniar ordonat care este şi latice se numeşte *spaţiu Riesz* sau *latice liniară.*

Interpretarea geometrică a structurii de latice pe un spaţiu Riesz este ilustrată în Figura 1.

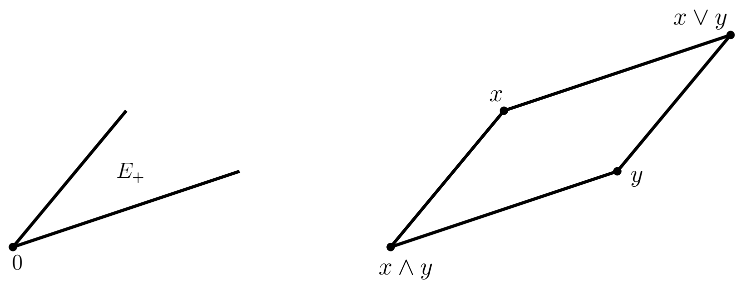

Figura 1: Geometria lui sup şi inf.

Definiţia 1.1.8. ([5]) Pentru un vector x dintr-un spaţiu Riesz, definim

$$|x| = x \vee (-x) \text{ valoarea absolută a lui } x.$$

O multitudine de spaţii bine cunoscute sunt spaţii Riesz.

Exemplul 1.1.9. ([5]) Spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$, cu norma definită prin

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{2}}$$

împreună cu relaţia de ordine uzuală, unde $x = (x_1, \ldots, x_n) \leq y = (y_1, \ldots, y_n)$ atunci când $x_i \leq y_i$, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ este un spaţiu Riesz. Infimumul şi supremumul celor doi vectori x şi y este dat de

$$x \vee y = (\max\{x_1, y_1\}, \ldots, \max\{x_n, y_n\}) \text{ şi}$$
$$x \wedge y = (\min\{x_1, y_1\}, \ldots, \min\{x_n, y_n\}).$$

Exemplul 1.1.10. ([5]) Spaţiul liniar al funcţiilor continue cu valori reale $C(X)$ şi spaţiul funcţiilor mărginite şi continue cu valori reale $C_b(X)$ definite pe un spaţiu topologic X, cu normele definite prin

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

sunt spaţii Riesz, relaţiile de ordine fiind definite punctual, adică $f \leq g$ atunci când $f(x) \leq g(x)$, pentru orice $x \in X$. Pentru acest exemplu operaţiile laticeale sunt:

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)) \text{ şi}$$
$$(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x)).$$

Exemplul 1.1.11. ([5]) Spaţiul liniar al funcţiilor p-integrabile în sens Lebesgue $L_p(\mu), 0 \leq p \leq \infty$, cu norma din L_p definită prin

$$||f||_p = \begin{cases} \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, 0 \leq p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup} |f|, p = \infty \end{cases}$$

este un spaţiu Riesz, relaţia de ordine fiind definită punctual *a.p.t.*, adică $f \leq g$ în $L_p(\mu)$ atunci când $f(x) \leq g(x)$, a.p.t. $x \in \mu$. Operaţiile laticeale sunt date de

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)) \text{ şi}$$
$$(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x)).$$

Definiţia 1.1.12. (L. Kantorovich, [25], [100]) Fie X o mulţime nevidă şi E un spaţiu Riesz. Spunem că funcţia $d : X \times X \to E$ este o *metrică vectorială* (sau *E-metrică*) dacă satisface următoarele axiome:

(a) $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;

(b) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$, pentru orice $x, y, z \in X$;

iar tripletul (X, d, E) se numeşte *spaţiu metric vectorial* (sau *spaţiu E-metric*).

Este evident că spaţiile E-metrice generalizează spaţiile metrice, pentru orice elemente x, y, z, w ale unui spaţiu E-metric fiind verificate următoarele proprietăţi:

(i) $0 \leq d(x, y)$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$;

(iv) $|d(x, z) - d(y, w)| \leq |d(x, y) - d(z, w)|$.

Exemplul 1.1.13. (L. Kantorovich, [25], [100]) Un spaţiu Riesz E este un spaţiu E-metric cu $d : E \times E \to E$ definită de

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Această E-metrică se numeşte *metrica valoare absolută* pe E. Pentru mai multe exemple de spaţii E-metrice, vezi C. Çevik, I. Altun [25].

Dacă X este o mulţime nevidă şi $f : X \to X$ este un operator univoc, notăm cu $\mathrm{Fix}(f) := \{x \in X \mid x = f(x)\}$, iar dacă $F : X \to P(X)$ este un operator multivoc, notăm cu

$$\begin{aligned} \mathrm{Fix}(F) &:= \{x \in X \mid x \in F(x)\}; \\ \mathrm{SFix}(F) &:= \{x \in X \mid \{x\} = F(x)\}; \\ s(X) &:= \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \mid x_n \in X,\, n \in \mathbb{N}^*\right\}. \end{aligned}$$

În contextul unui spaţiu metric (X, d), vom nota cu

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &:= \{Y \mid Y \subseteq X\}; \\ P(X) &:= \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid Y \neq \emptyset\}; \\ P_{cl}(X) &:= \{Y \in P(X) \mid Y \text{ este închisă}\}; \\ P_{b,cl} &:= \{Y \in P(X) \mid Y \text{ este mărginită şi închisă}\} \\ P_{b,cl,cv}(X) &:= \{Y \in P(X) \mid Y \text{ este mărginită, închisă şi convexă}\}; \\ P_{cp}(X) &:= \{Y \in P(X) \mid Y \text{ este compactă}\}; \\ P_{cp,cv} &:= \{Y \in P(X) \mid Y \text{ este compactă şi convexă}\}; \\ \mathrm{Graph}(F) &:= \{(x, y) \in X \times X \mid y \in F(x)\} \end{aligned}$$

şi vom folosi următoarele funcţionale:

$D_d : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+$, $D_d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ - funcţionala distanţă;

$\delta_d : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+$, $\delta_d(A, B) = \sup\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ - funcţionala diametru;

$\rho_d : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+$, $\rho_d(A, B) = \sup\{D_d(a, B) : a \in A\}$ - funcţionala exces;

$H_d : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+$, $H_d(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a, b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a, b)\right\}$ - funcţionala Pompeiu–Hausdorff.

Dacă A şi B sunt două mulţimi nevide ale unui spaţiu metric generalizat (X,d) cu $d(x,y) := \begin{bmatrix} d_1(x,y) \\ \vdots \\ d_m(x,y) \end{bmatrix}$, atunci notăm cu

$$D(A,B) = \begin{bmatrix} D_{d_1}(A,B) \\ \vdots \\ D_{d_m}(A,B) \end{bmatrix}, \ \delta(A,B) = \begin{bmatrix} \delta_{d_1}(A,B) \\ \vdots \\ \delta_{d_m}(A,B) \end{bmatrix},$$

$$\rho(A,B) = \begin{bmatrix} \rho_{d_1}(A,B) \\ \vdots \\ \rho_{d_m}(A,B) \end{bmatrix}, \ H(A,B) = \begin{bmatrix} H_{d_1}(A,B) \\ \vdots \\ H_{d_m}(A,B) \end{bmatrix}.$$

De remarcat că dacă A şi B sunt două mulţimi nevide ale unui spaţiu E-metric (X,d,E), atunci aceste funcţionale se pot defini ca în contextul spaţiilor metrice, în cazul particular când A şi B sunt E-mărginite şi spaţiul Riesz E este complet ordonat. Aceste condiţii restrictive, conform Definiţiei 1.2.9, asigură existenţa unui supremum, respectiv infimum în E.

Operatorul multivoc $F : X \to P(X)$ se numeşte E-închis dacă Graph (F) este E-închis în $X \times X$. Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, definit recurent prin

$$\begin{cases} x_0 = x, x_1 = y; \\ x_{n+1} \in F(x_n), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

se numeşte şirul aproximaţiilor succesive pentru F, pornind din $(x,y) \in X \times X$.

Pentru modul de definire a E-mărginirii, E-închiderii unei mulţimi şi a proprietăţii de completitudine ordonată a unui spaţiu Riesz, vezi secţiunea următoare.

1.2 Proprietăţi şi elemente de topologie

În cazul spaţiilor metrice generalizate în sens Perov, noţiunile de şir convergent, şir Cauchy, completitudine, modul de definire a submulţimilor deschise şi închise este similar cu cel al spaţiilor metrice obişnuite. Totodată, în cele ce urmează prezentăm câteva elemente de topologie (vezi, de exemplu, A. Granas şi J. Dugundji [35], P.P. Zabrejko [99], E. Zeidler [101]).

Definiţia 1.2.1. ([25]) Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat. O submulţime $A \subset X$ se numeşte *deschisă* dacă pentru orice $x \in A$, există $r \in \mathbb{R}^m_+$ cu $r > 0$ astfel încât $B(x_0, r) \subset A$, unde $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$ notează bila deschisă de centru x_0 şi rază r. Orice bilă deschisă este o mulţime deschisă, iar colecţia tuturor submulţimilor deschise ale lui X reprezintă *topologia metrică generalizată* pe X.

Definiţia 1.2.2. ([99]) Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat. O submulţime C a lui X se numeşte *compactă* dacă orice acoperire deschisă a lui C conţine o subacoperire finită. O submulţime C a lui X este *secvenţial compactă* dacă orice şir din C conţine un subşir convergent cu limita în C.

O submulţime C a lui X este *total mărginită* dacă pentru fiecare $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_+$ cu $\varepsilon > 0$, există un număr finit de elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în X astfel încât $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Mulţimea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se numeşte *ε-reţea finită*.

O submulţime C a unui spaţiu topologic este *relativ compactă* dacă închiderea sa este compactă, adică, $\bar{C}$ este compactă. Mulţimea C este *secvenţial relativ compactă* dacă orice şir din C conţine un subşir convergent (limita poate să nu fie în C), adică, $\bar{C}$ este secvenţial compactă.

Propoziţia 1.2.3. *([99]) Dacă C este o submulţime a lui X, atunci au loc următoarele afirmaţii:*

(i) C este compactă $\Leftrightarrow$ C este secvenţial compactă $\Leftrightarrow$ C este închisă şi total mărginită;

(ii) C relativ compactă $\Leftrightarrow$ C secvenţial relativ compactă $\Leftrightarrow$ C total mărginită.

Definiţia 1.2.4. ([86], [100]) Fie X o mulţime nevidă şi fie $|\cdot| : X \to \mathbb{R}^m$ o normă pe X. Atunci perechea $(X, |\cdot|)$ se numeşte *spaţiu normat generalizat*. Dacă, în plus, $(X, |\cdot|)$ are proprietatea că orice şir Cauchy din X este convergent în sensul normei, atunci spunem că $(X, |\cdot|)$ este un *spaţiu Banach generalizat*.

Definiţia 1.2.5. ([101]) Fie X, Y două spaţii normate generalizate, $K \subset X$ şi $f : K \to Y$ un operator. Atunci f se numeşte:

(i) *compact*, dacă pentru orice submuţime mărginită $A \subset K$ avem că $f(A)$ este relativ compactă sau $\overline{f(A)}$ este compactă;

(ii) *complet continuu*, dacă f este continuu şi compact;

(iii) *cu imagine relativ compactă*, dacă f este continuu şi $f(K)$ este relativ compactă sau $\overline{f(K)}$ este compactă.

În cele ce urmează vom prezenta câteva proprietăţi de ordine şi laticeale de care se pot bucura spaţiile Riesz, iar în contextul spaţiilor E-metrice vom defini noţiunile de şir E-convergent, şir E-Cauchy, şir E-complet, submulţime E-deschisă şi E-închisă, E-diametrul şi E-mărginirea unei submulţimi ale unui spaţiu E-metric precum şi alte proprietăţi, modul de definire fiind diferit faţă de cel uzual.

Definiţia 1.2.6. ([5]) Fie E un spaţiu Riesz. Spunem că $A \subset E$ este *mărginit ordonată superior* (*inferior*) dacă există un vector u numit o margine superioară (inferioară) a lui A ce domină (este dominat de) fiecare element din A, adică $a \leq u$ ($a \geq u$), pentru orice $a \in A$. Aşadar, A este *mărginit ordonată* dacă este mărginit ordonată superior şi inferior.

Definiţia 1.2.7. ([5]) Fie E un spaţiu Riesz şi (x_n) un şir din E. Spunem că (x_n) este *descrescător* (*crescător*) şi notăm $x_n \downarrow$ ($x_n \uparrow$), dacă $n \geq m$ implică $x_n \leq x_m$ ($x_n \geq x_m$), iar simbolul $x_n \downarrow\geq x$ ($x_n \uparrow\leq x$) notează un şir descrescător (crescător) mărginit ordonat inferior (superior) de x.

Semnificaţia scrierii $x_n \downarrow x$ înseamnă că $x_n \downarrow$ şi $\inf\{x_n\} = x$. Dacă $(x_n), (y_m) \subset E$, atunci avem următoarele proprietăţi de bază:

$x_n \downarrow x$ şi $y_m \downarrow y$ implică $x_n + y_m \downarrow x + y$;

$x_n \downarrow x$ implică $\lambda x_n \downarrow \lambda x$, pentru $\lambda > 0$ şi $\lambda x_n \uparrow \lambda x$, pentru $\lambda < 0$;

$x_n \downarrow x$ şi $y_m \downarrow y$ implică $x_n \vee y_m \downarrow x \vee y$ şi $x_n \wedge y_m \downarrow x \wedge y$.

Semnificaţia scrierii $x_n \uparrow x$ şi proprietăţile de bază ale scrierii $\uparrow$ se tratează similar.

Definiţia 1.2.8. ([5]) Spunem că un spaţiu Riesz E este *Archimedean* dacă $\frac{1}{n}x \downarrow 0$, pentru orice $x \in E_+$, unde

$E_+ := \{x \in E : x \geq 0\}$ este conul pozitiv al lui E.

Definiţia 1.2.9. ([5]) Spunem că un spaţiu Riesz E este *complet ordonat* sau *complet Dedekind* dacă orice mulţime nevidă mărginit ordonată superior admite un supremum (echivalent, orice mulţime nevidă mărginit ordonată inferior admite un infimum).

Lema 1.2.10. *([5]) Orice spaţiu Riesz complet ordonat este Archimedean.*

Reciproca Lemei 1.2.10 este falsă, un exemplu de spaţiu Riesz Archimedean, dar nu complet ordonat este $C[0,1]$.

Exemplul 1.2.11. ([5]) Considerăm şirurile de funcţii liniare $(f_n)_{n\geq 2}$ şi $(g_n)_{n\geq 2}$ din $C[0,1]$ definite pe porţiuni

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ -n\left(x - \frac{1}{2}\right), \text{ dacă } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, \text{ dacă } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}, \\ n(1-x), \text{ dacă } 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

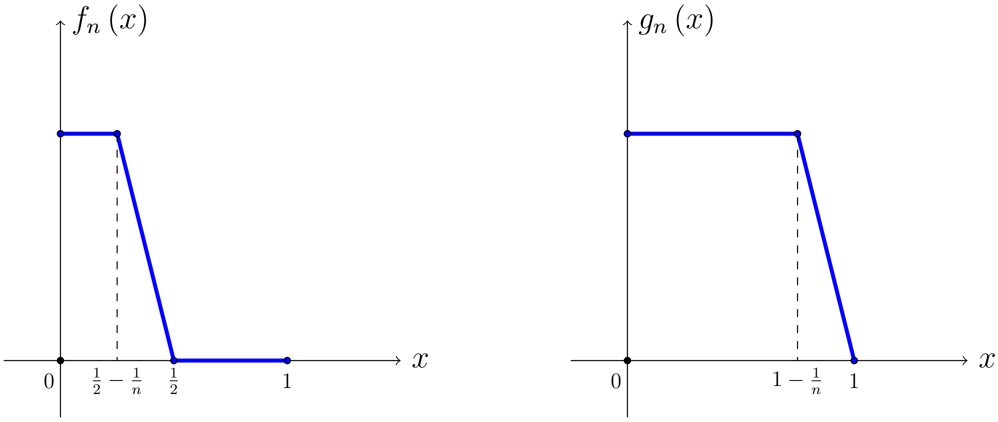

Figura 2: Graficele funcţiilor f_n şi g_n.

Avem că $0 \leq f_n \uparrow \leq \mathbf{1}$ în $C[0,1]$, unde $\mathbf{1}$ reprezintă funcţia constantă unu, dar conform figurii 2, $\{f_n\}$ nu are un supremum în $C[0,1]$, deci $C[0,1]$ nu este complet ordonat. Se mai poate observa că implicaţia

$$f_n(x) \uparrow f(x), \text{ pentru orice } x \in [0,1] \implies f_n \uparrow f$$

este adevărată în sens laticeal, însă reciproc $f_n \uparrow f$ în sens laticeal nu implică că $f_n(x) \uparrow f(x)$, pentru orice $x \in [0,1]$. Un astfel de exemplu este funcţia g_n ilustrată în figura 2, unde $g_n \uparrow \mathbf{1}$ în sens laticeal pe când $g_n(1) = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Definiţia 1.2.12. ([25], [29], [100]) Fie E un spaţiu Riesz. Spunem că un şir (b_n) din E este *convergent ordonat* (sau *o-convergent*) la $b \in E$ şi notăm $b_n \xrightarrow{o} b$, dacă există un şir (a_n) în E astfel încât $a_n \downarrow 0$ şi $|b_n - b| \leq a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Definiţia 1.2.13. ([25], [29], [100]) Fie E, F două spaţii Riesz şi $f : E \to F$ o funcţie. Spunem că f este *continuă ordonat* dacă $b_n \xrightarrow{o} b$ în E implică $f(b_n) \xrightarrow{o} f(b)$ în F.

Definiţia 1.2.14. ([25], [29], [100]) Fie E un spaţiu Riesz. Spunem că un şir (b_n) din E este *Cauchy ordonat* (sau *o-Cauchy*), dacă există un şir (a_n) în E astfel încât $a_n \downarrow 0$ şi $|b_n - b_{n+p}| \leq a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $p \in \mathbb{N}^*$.

Definiţia 1.2.15. ([25], [29], [100]) Spunem că un spaţiu Riesz E este *complet ordonat* (sau *o-complet*) dacă orice şir o-Cauchy este o-convergent.

Pentru mai multe aspecte legate de proprietăţi de ordine şi laticeale, convergenţă şi continuitate ordonată în spaţii Riesz cititorul interesat poate consulta C.D. Aliprantis, K.C. Border [5].

Definiţia 1.2.16. ([25], [29], [100]) Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric. Spunem că un şir (x_n) din X *converge vectorial* (sau *E-converge*) la $x \in E$ şi notăm $x_n \xrightarrow{d,E} x$, dacă există un şir (a_n) în E astfel încât $a_n \downarrow 0$ şi $d(x_n, x) \leq a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Definiţia 1.2.17. ([25], [29], [100]) Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric. Spunem că un şir (x_n) din X este *Cauchy vectorial* (sau *E-Cauchy*), dacă există un şir (a_n) în E astfel încât $a_n \downarrow 0$ şi $d(x_n, x_{n+p}) \leq a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $p \in \mathbb{N}^*$.

Definiţia 1.2.18. ([25], [29], [100]) Spunem că un spaţiu E-metric (X, d, E) este *complet vectorial* (sau *E-complet*) dacă orice şir E-Cauchy din X este E-convergent la o limită din X.

Definiţia 1.2.19. ([25], [29], [100]) Fie X, Y două spaţii E-metrice şi $f : X \to Y$ o funcţie. Spunem că f este *continuă vectorial* (sau *E-continuă*) dacă $x_n \xrightarrow{d,E} x$ în X implică $f(x_n) \xrightarrow{d,E} f(x)$ în Y.

Lema 1.2.20. *([25]) Dacă $x_n \xrightarrow{d,E} x$, atunci au loc următoarele proprietăţi:*

1. *Limita x este unică;*
2. *Orice subşir al lui (x_n) E-converge la x;*
3. *Dacă $y_n \xrightarrow{d,E} y$ atunci $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} d(x, y)$.*

Dacă (X, d, E) este un spaţiu E-metric, atunci o submulţime $A \subset X$ se numeşte *E-deschisă* dacă pentru orice $x \in A$, există $r > 0$ în E astfel încât $B(x, r) \subset A$, unde $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$. Orice bilă E-deschisă este o mulţime E-deschisă, iar colecţia tuturor submulţimilor E-deschise ale lui X reprezintă *topologia metrică vectorială* pe X, notată cu $\tau_{d,E}$.

Într-un spaţiu E-metric, definirea noţiunilor de mulţime compactă, relativ compactă, total mărginită, operator compact, operator complet continuu, operator cu imagine relativ compactă, respectiv a noţiunilor de compactitate secvenţială (caracterizate cu şiruri) se definesc ca şi în contextul spaţiilor metrice generalizate prin înlocuirea spaţiului $\mathbb{R}^m$ cu spaţiul Riesz E. Propoziţia 1.2.3 are loc şi în cazul spaţiilor E-metrice (vezi A.C. Zaanen [99], pg. 500). Similar, conceptele de mulţime E-închisă şi E-mărginită sunt definite în sensul E-metricii.

Definiţia 1.2.21. ([25]) Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric. Spunem că $Y \subset X$ este *închisă vectorial* (sau *E-închisă*) dacă are loc implicaţia

$$x_n \subset Y \text{ şi } x_n \xrightarrow{d,E} x \text{ implică } x \in Y.$$

Definiţia 1.2.22. ([25]) Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric. Spunem că o submulţime nevidă $A \subset X$ definită prin

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

se numeşte *diametrul vectorial* al lui A (sau *E-diametru*) dacă

$$\sup\{d(x, y) : x, y \in A\} \text{ există în } E.$$

Mai mult, dacă există $a > 0$ în E astfel încât $d(x, y) \leq a$, pentru orice $x, y \in A$, atunci A se numeşte o mulţime *mărginită vectorial* (sau *E-mărginită*).

Corolarul 1.2.23. *([25]) Dacă E este un spaţiu Riesz complet ordonat, atunci orice mulţime E-mărginită a lui X are un E-diametru.*

Teorema 1.2.24. *([25]) Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(i) Orice şir E-convergent este E-Cauchy;

(ii) *Orice şir E-Cauchy este E-mărginit;*

(iii) *Dacă un şir E-Cauchy (x_n) are un subşir (x_{n_k}) astfel încât $x_{n_k} \xrightarrow{d,E} x$, atunci $x_n \xrightarrow{d,E} x$;*

(iv) *Dacă (x_n) şi (y_n) sunt două şiruri E-Cauchy, atunci $(d(x_n, y_n))$ este un şir o-Cauchy.*

Observaţia 1.2.25. ([25]) Dacă $E = \mathbb{R}$, atunci conceptele de E-convergenţă şi convergenţă în sensul metricii, respectiv conceptele de şir E-Cauchy şi şir Cauchy sunt aceleaşi. Dacă $X = E$ şi d este metrica valoare absolută pe X, atunci conceptele de E-convergenţă şi o-convergenţă sunt aceleaşi.

Definiţia 1.2.26. ([29]) Fie X un spaţiu liniar şi E un spaţiu Riesz. O funcţie $||\cdot|| : X \to E$ se numeşte *E-normă* pe X dacă satisface următoarele proprietăţi:

(a) $||x|| \geq 0$, pentru orice $x \in X$;

(b) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, pentru orice $x, y \in X$.

Mai mult, tripletul $(X, ||\cdot||, E)$ se numeşte *spaţiu E-normat*.

Observaţia 1.2.27. ([29]) Dacă $||\cdot||$ este o E-normă pe X, atunci funcţia $d : X \times X \to E, d(x, y) = ||x - y||$ este o E-metrică pe X şi d se numeşte E-metrica generată de E-norma $||\cdot||$.

Definiţia 1.2.28. ([29]) Un spaţiu E-normat $(X, ||\cdot||, E)$ se numeşte *spaţiu Banach vectorial* (sau *spaţiu E-Banach*) dacă orice şir E-Cauchy din X este E-convergent în sensul normei.

Dacă $|\cdot|$ reprezintă valoarea absolută a spaţiului Riesz E, atunci $(E, |\cdot|, E)$ este un spaţiu E-Banach. Orice spaţiu Riesz E-normat este Archimedean şi astfel, un spaţiu E-Banach este Archimedean (vezi A.C. Zaanen [99]).

1.3 Rezultate de punct fix în spaţii metrice generalizate

Ştiind deja ce înseamnă o metrică vectorială care ia valori în spaţiul finit dimensional $\mathbb{R}^m$ sau spaţiul Riesz E, ne propunem ca în această secţiune să acordăm atenţie noţiunilor şi rezultatelor metrice şi topologice de punct fix care au la bază metrica generalizată în sens Perov, capitolul următor fiind dedicat în exclusivitate E-metricii.

Reamintim modul de definire a contracţiei, precum şi alte rezultate ajutătoare cunoscute în demonstarea teoremei lui Krasnoselskii pentru operatori univoci în spaţii Banach generalizate.

Definiţia 1.3.1. ([94]) O matrice pătratică de numere reale A se numeşte *convergentă la zero* dacă $A^n \longrightarrow 0$ când $n \to \infty$.

Definiţia 1.3.2. ([58]) Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat şi fie $f : X \to X$ un operator univoc. Atunci, f se numeşte o *A-contracţie univocă* dacă şi numai dacă $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ este o matrice convergentă la zero şi

$$d[f(x), f(y)] \leq Ad(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

Definiţia 1.3.3. ([86]) Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat. Atunci $f : X \to X$ este un *operator Picard* (prescurtat PO), dacă:

(i) $\mathrm{Fix}(f) = \{x^*\}$;

(ii) pentru orice $x_0 \in X$, şirul $x_n = f^n(x_0)$ converge la punctul fix al lui f.

Definiţia 1.3.4. ([86]) Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat şi fie $f : X \to X$ un operator Picard. Atunci f este un *operator M-Picard* (prescurtat M-PO) dacă şi numai dacă $M \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ şi există operatorul $f^\infty : X \to X$, $f^\infty(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0)$ astfel încât $d[x_0, f^\infty(x_0)] \leq Md[x_0, f(x_0)]$, pentru orice $x_0 \in X$.

Teorema 1.3.5. *(Perov [58]). Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat şi complet şi fie $f : X \to X$ o A-contracţie univocă, atunci:*

(i) există un unic punct fix x^* pentru f şi şirul aproximaţiilor succesive $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = f^n(x_0)$ este convergent şi are limita x^*, pentru orice $x_0 \in X$ şi $n \in \mathbb{N}^*$;

(ii) $d(x_n, x^*) \leq A^n (I - A)^{-1} d(x_0, x_1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Lema 1.3.6. *([79], [87]) Fie $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) A este o matrice convergentă la zero;

(ii) *Valorile proprii ale lui A sunt în discul unitate deschis, adică, $|\lambda| < 1$, pentru fiecare $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $\det(A - \lambda I) = 0$;*

(iii) *Matricea $I - A$ este nesingulară şi $(I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^n + \cdots$;*

(iv) *Matricea $I - A$ este nesingulară şi $(I - A)^{-1}$ are elementele nenegative;*

(v) *$A^n q \longrightarrow 0$ şi $qA^n \longrightarrow 0$ când $n \to \infty$, pentru orice $q \in \mathbb{R}^m$.*

Exemplul 1.3.7. ([79]) Câteva tipuri de matrice convergente la zero sunt:

1) $A = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}_+$ şi $a + b < 1$;

2) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}_+$ şi $a + b < 1$;

3) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ şi $\max\{a, c\} < 1$.

Teorema 1.3.8. *(Schauder [29]). Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Banach generalizat, fie $Y \subset X$ o mulţime închisă şi convexă şi fie $f : Y \to Y$ un operator cu imagine compactă. Atunci f are cel puţin un punct fix în Y.*

Pentru cazul operatorilor multivoci avem următoarele noţiuni.

Definiţia 1.3.9. ([19]) Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat, $Y \subset X$ şi $F : Y \to P(X)$ un operator multivoc. Atunci, F se numeşte o *A-contracţie multivocă* dacă şi numai dacă $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ este o matrice convergentă la zero şi pentru orice $x, y \in Y$ şi pentru orice $u \in F(x)$, există $v \in F(y)$ astfel încât

$$d(u, v) \leq Ad(x, y).$$

Reamintim că un operator multivoc $F : X \to P(Y)$ se numeşte *semi-continuu inferior* (prescurtat s.c.i.) în $x_0 \in X$, dacă şi numai dacă, pentru orice mulţime deschisă $U \subset X$ astfel încât $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, există o vecinătate V pentru x_0 astfel încât pentru orice $x \in V$, avem că $F(x) \cap U \neq \emptyset$.

Spunem că F este *H-s.c.i.* în $x_0 \in X$, dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_+$ cu $\varepsilon > 0$, există $\eta_\varepsilon \in \mathbb{R}^m_+$ cu $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in B(x_0, \eta_\varepsilon)$, avem că $F(x_0) \subset V(F(x), \varepsilon)$, unde

$$V(F(x), \varepsilon) = \{x \in X : D(x, F(x)) \leq \varepsilon\}.$$

De remarcat că o funcţională Pompeiu–Hausdorff generalizată

$$H : P_{b,cl}(X) \times P_{b,cl}(X) \to \mathbb{R}_+^m$$

poate fi introdusă pe un spaţiu metric generalizat în sens Perov şi astfel se poate extinde conceptul de contracţie multivocă dat de S.B. Nadler Jr. în [50].

Definiţia 1.3.10. ([19]) Fie $Y \subset X$ şi fie $F : Y \to P_{b,cl}(X)$ un operator multivoc. Atunci, F se numeşte o *A-contracţie multivocă în sens Nadler* dacă şi numai dacă $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ este o matrice convergentă la zero şi

$$H[F(x), F(y)] \leq Ad(x,y), \text{ pentru orice } x, y \in Y.$$

În mod similar se poate considera şi condiţia

$$H^t[F(x), F(y)] \leq d^t(x,y)A, \text{ pentru orice } x, y \in Y,$$

unde A^t notează transpusa matricei A. Însă, rezultatele care se pot obţine sunt de tip dual. De asemenea, din proprietăţile lui H, dacă F este o A-contracţie multivocă în sens Nadler rezultă că F este o A-contracţie multivocă.

Definiţia 1.3.11. ([19]) Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat. Atunci $F : X \to P(X)$ este un *operator multivoc slab Picard* (prescurtat operator MWP), dacă pentru fiecare $x \in X$ şi $y \in F(x)$, există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât:

(i) $x_0 = x$, $x_1 = y$;

(ii) $x_{n+1} \in F(x_n)$;

(iii) şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la un punct fix al lui F.

Pentru exemple de operatori MWP, vezi A. Petruşel [73] şi I.A. Rus, A. Petruşel, A. Sântămărian [90].

Definiţia 1.3.12. ([73]) Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat şi fie $F : X \to P(X)$ un operator MWP. Atunci definim operatorul multivoc

$$F^\infty : \text{Graph}(F) \to P(\text{Fix}(F))$$

prin formula $\{F^\infty(x,y) = z \in \text{Fix}(F) :$ există un şir al aproximaţiilor succesive pentru F pornind din (x,y) care converge la $z\}$.

Definiţia 1.3.13. ([82]) Fie $X, Y \neq \emptyset$ şi fie $F : X \to P(Y)$ un operator multivoc. Atunci un operator univoc $f : X \to Y$ este o *selecţie* pentru F dacă şi numai dacă $f(x) \in F(x)$, pentru orice $x \in X$.

Definiţia 1.3.14. ([73]) Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat şi fie $F : X \to P(X)$ un operator MWP. Atunci F este un *operator multivoc M-slab Picard* (prescurtat operator M-MWP) dacă şi numai dacă $M \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ şi există o selecţie f^∞ pentru F^∞ astfel încât $d[x, f^\infty(x, y)] \leq Md(x, y)$, pentru orice $(x, y) \in \mathrm{Graph}(F)$.

Lema 1.3.15. *([86]) Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Banach generalizat. Atunci:*

$$H(Y + Z, Y + W) \leq H(Z, W), \text{ pentru fiecare } Y, Z, W \in P_b(X).$$

Reamintim că un operator multivoc măsurabil $F : [a, b] \to P_{cp}(\mathbb{R}^n)$ se numeşte *mărginit integrabil* dacă şi numai dacă există o funcţie integrabilă Lebesgue $m : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ astfel încât pentru fiecare $v \in F(t)$, avem că $|v| \leq m(t)$, a.p.t. pe $[a, b]$. Pentru un operator multivoc măsurabil şi mărginit integrabil F, avem că mulţimea tuturor selecţiilor integrabile în sens Lebesgue S_F^1 pentru F este închisă şi nevidă (vezi H. Covitz, S.B. Nadler Jr. [27]).

În continuare prezentăm câteva rezultate ajutătoare noi în demonstarea teoremei lui Krasnoselskii şi a altor teoreme conexe pentru suma a doi operatori multivoci în spaţii Banach generalizate, printre care:

- demonstrăm Teorema lui Perov pentru un operator ce satisface o condiţie de A-contracţie multivocă în sens Nadler, care este un răspuns la o problemă deschisă enunţată în A. Bucur, L. Guran, A. Petruşel [19];

- stabilim un rezultat de dependenţă de date pentru excesul dintre mulţimile punctelor fixe a doi operatori ce satisfac o condiţie de A-contracţie multivocă în sens Nadler;

- extindem un rezultat preliminar teoremei lui Krasnoselskii dat în L. Rybinski [92].

Lema 1.3.16. *Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat şi fie $A, B \subset P_{cl}(X)$, $q > 1$. Atunci, pentru orice $a \in A$, există $b \in B$ astfel încât*

$$d(a, b) \leq qH(A, B).$$

Lema 1.3.17. *Fie (X,d) un spaţiu metric generalizat, $A \in P(X)$ şi $x \in X$. Atunci $D(x,A) = 0$ dacă şi numai dacă $x \in \bar{A}$.*

Lema 1.3.18. *Fie $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ o matrice convergentă la zero. Atunci, există $Q > 1$ astfel încât pentru orice $q \in (1,Q)$ avem că qA este convergentă la 0.*

Teorema 1.3.19. *Fie (X,d) un spaţiu metric generalizat complet şi fie $F : X \to P_{cl}(X)$ o A-contracţie multivocă în sens Nadler. Atunci, F este un operator $(I-A)^{-1}$-MWP.*

Lema 1.3.20. *Fie (X,d) un spaţiu metric generalizat şi complet şi fie $F_1, F_2 : X \to P_{b,cl}(X)$ două A-contracţii multivoce în sens Nadler. Atunci:*

$$\rho[\mathrm{Fix}(F_1), \mathrm{Fix}(F_2)] \le (I-A)^{-1} \begin{bmatrix} \sup\limits_{x\in X} \rho_{d_1}[F_1(x), F_2(x)] \\ \vdots \\ \sup\limits_{x\in X} \rho_{d_m}[F_1(x), F_2(x)] \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.3.21. *Fie (X,d) un spaţiu metric generalizat şi fie Y o submulţime închisă a unui spaţiu Banach generalizat $(Z, |\cdot|)$. Presupunem că operatorul multivoc $F : X \times Y \to P_{cl,cv}(Y)$ satisface următoarele condiţii:*

(i) *A este o matrice convergentă la zero şi $H[F(x,y_1), F(x,y_2)] \le A|y_1 - y_2|$, pentru fiecare (x,y_1), $(x,y_2) \in X \times Y$;*

(ii) *pentru fiecare $y \in Y$, $F(\cdot, y)$ este H-s.c.i. pe spaţiul X.*

Atunci există un operator continuu $f : X \times Y \to Y$ astfel încât:

$$f(x,y) \in F(x, f(x,y)), \text{ pentru fiecare } (x,y) \in X \times Y.$$

Capitolul 2

Teoria unei teoreme E-metrice de punct fix

2.1 Teoreme E-metrice de punct fix

Un rezultat de referinţă în studiul existenţei şi unicităţii punctului fix într-un spaţiu E-metric îl prezintă o teoremă dată de C. Çevik şi I. Altun în [25]. Cazul $X = E$ a fost studiat şi de alţi autori, precum: L. Kantorovich, R. Cristescu, F. Voicu.

Teorema 2.1.1. *([25]) Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric complet cu E Archimedean şi fie $f : X \to X$ un operator ce satisface o condiţie de k-contracţie univocă, adică există o constantă $k \in [0, 1)$ astfel încât*

$$d\left[f(x), f(y)\right] \leq kd(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

Atunci, f are un punct fix unic în X şi pentru orice $x_0 \in X$, şirul iteratelor (x_n) definit prin $x_n = f(x_{n-1})$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, E-converge la punctul fix al lui f.

Exemplul 2.1.2. ([39]) Fie $E = \mathbb{R}^2$ împreună cu relaţia de ordine definită pe componente (deci E-Archimedean) şi considerăm

$$X = \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\right\} \cup \left\{(0, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\right\}.$$

Definim operatorul $d : X \times X \to E$ prin

$$d\left[(x, 0), (y, 0)\right] = \left(\frac{4}{3}\left|x - y\right|, \left|x - y\right|\right),$$

$$d\left[(0, x), (0, y)\right] = \left(\left|x - y\right|, \frac{2}{3}\left|x - y\right|\right),$$

$$d\left[(x, 0), (0, y)\right] = \left(\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y\right).$$

Astfel, X este un spaţiu E-metric complet. Fie $f : X \to X$ cu $f((x,0)) = (0,x)$ şi $f((0,x)) = \left(\frac{x}{2},0\right)$, atunci f satisface condiţia de k-contracţie univocă pentru $k = \frac{3}{4}$, ceea ce reiese din verificarea inegalităţilor

$$
\begin{aligned}
d\left[f(x,0), f(y,0)\right] &\leq \frac{3}{4} d\left[(x,0),(y,0)\right],\\
d\left[f(x,0), f(0,y)\right] &\leq \frac{3}{4} d\left[(x,0),(0,y)\right],\\
d\left[f(0,x), f(y,0)\right] &\leq \frac{3}{4} d\left[(0,x),(y,0)\right],\\
d\left[f(0,x), f(0,y)\right] &\leq \frac{3}{4} d\left[(0,x),(0,y)\right]
\end{aligned}
$$

şi conform Teoremei 2.1.1, f are un punct fix unic în X, însă f nu este o contracţie (de exemplu, în raport cu metrica de tip Cebîşev) pe $X \subset \mathbb{R}^2$, deci teorema clasică a lui Banach–Caccioppoli nu poate fi aplicată.

În cele ce urmează, extindem alte rezultate de punct fix pentru operatori univoci ce satisfac condiţii de contracţii generalizate la contextul spaţiilor E-metrice.

Teorema 2.1.3. *Fie (X,d,E) un spaţiu E-metric complet cu E Archimedean. Presupunând că operatorul $f : X \to X$ satisface condiţia lui Ćirić–Reich–Rus de (a,b,c)-contracţie univocă, adică există $a,b,c \in \mathbb{R}_+$ cu $a+b+c < 1$ astfel încât*

$$d\left[f(x), f(y)\right] \leq ad(x,y) + bd\left[x, f(x)\right] + cd\left[y, f(y)\right], \text{ pentru orice } x,y \in X.$$

Atunci f are un punct fix unic în X şi pentru orice $x_0 \in X$, şirul iteratelor (x_n) definit prin $x_n = f(x_{n-1})$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, E-converge la punctul fix al lui f.

Teorema 2.1.4. *Fie (X,d,E) un spaţiu E-metric complet cu E Archimedean. Presupunând că operatorul $g : X \to X$ satisface condiţia de (a,b,c,e,f)-contracţie univocă, adică există $a,b,c,e,f \in \mathbb{R}_+$ cu $a+b+c+2f < 1$ astfel încât pentru orice $x,y \in X$, să avem*

$$
\begin{aligned}
&d\left[g(x), g(y)\right]\\
&\qquad \leq ad(x,y) + bd\left[x, g(x)\right] + cd\left[y, g(y)\right] + ed\left[y, g(x)\right] + fd\left[x, g(y)\right].
\end{aligned}
$$

Atunci g are un punct fix unic în X şi pentru orice $x_0 \in X$, şirul iteratelor (x_n) definit prin $x_n = g(x_{n-1})$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, E-converge la punctul fix al lui g.

Observaţia 2.1.5. Teorema 2.1.4 generalizează Teorema 2.1.3 prin alegerea constantelor $e = f = 0$, iar Teorema 2.1.3 generalizează Teorema 2.1.1 prin alegerea constantelor $b = c = 0$.

O altă teoremă metrică de punct fix pentru operatori univoci ce poate fi extinsă într-un spaţiu E-metric este prima formă a Teoremei lui Ćirić. Se poate observa că şi această teoremă este un caz particular al Teoremei 2.1.4, demonstraţia fiind similară.

Teorema 2.1.6. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric complet cu E Archimedean. Presupunând că operatorul $g : X \to X$ satisface condiţia lui Ćirić de α-contracţie univocă, adică există $\alpha \in [0, 1)$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$, să avem*

$$\begin{aligned} & d\left[g\left(x\right), g\left(y\right)\right] \\ & \quad \leq \alpha \max\left\{d\left(x, y\right), d\left[x, g\left(x\right)\right], d\left[y, g\left(y\right)\right], \frac{1}{2}\left[d\left(x, g\left(y\right)\right) + d\left(y, g\left(x\right)\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Atunci g are un punct fix unic în X şi pentru orice $x_0 \in X$, şirul iteratelor (x_n) definit prin $x_n = g\left(x_{n-1}\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, E-converge la punctul fix al lui g.

În continuare prezentăm câteva teoreme de punct fix pentru operatori multivoci în spaţii E-metrice.

Definiţia 2.1.7. Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric. Spunem că operatorul $F : X \to P_{cl}\left(X\right)$ este o *k-contracţie multivocă*, dacă şi numai dacă $k \in [0, 1)$ şi pentru orice $x, y \in X$ şi orice $u \in F\left(x\right)$, există $v \in F\left(y\right)$ astfel încât

$$d\left(u, v\right) \leq kd\left(x, y\right).$$

Teorema 2.1.8. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric complet cu E Archimedean. Presupunând că operatorul $F : X \to P_{cl}\left(X\right)$ este o k-contracţie multivocă, atunci F admite un punct fix în X şi pentru orice $x \in X$, există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al aproximaţiilor succesive pentru F pornind din $(x, y) \in$* Graph(F) *care E-converge în (X, d, E) la punctul fix al lui F.*

Exemplul 2.1.9. Fie $E = \mathbb{R}^2$ cu relaţia de ordine definită pe componente (deci E-Archimedean) şi considerăm

$$X = \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\right\} \cup \left\{(0, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\right\}.$$

Definim operatorul $d : X \times X \to E$ prin

$$d\left[(x,0),(y,0)\right] = \left(\frac{4}{3}|x-y|, |x-y|\right),$$
$$d\left[(0,x),(0,y)\right] = \left(|x-y|, \frac{2}{3}|x-y|\right),$$
$$d\left[(x,0),(0,y)\right] = \left(\frac{4}{3}x+y, x+\frac{2}{3}y\right).$$

Astfel, X este un spaţiu E-metric complet. Fie $F : X \to P_{cl}(X)$ cu $F(x_1,x_2) = \{u(x_1,x_2), v(x_1,x_2)\}$, unde $u, v : X \to X$ sunt definiţi prin

$$u((x,0)) = (0,x) \text{ şi } u((0,x)) = \left(\frac{x}{2},0\right);$$
$$v((x,0)) = (0,x) \text{ şi } v((0,x)) = \left(\frac{x}{3},0\right).$$

Avem următoarele posibilităţi:

Cazul 1: pentru orice $x_1 = (x,0), x_2 = (y,0) \in X$ şi orice $u = (0,x) \in F(x_1)$, există $v = (0,y) \in F(x_2)$

Cazul 2: pentru orice $x_1 = (x,0), x_2 = (0,y) \in X$ şi orice $u = (0,x) \in F(x_1)$, există $v = \left(\frac{y}{2},0\right) \in F(x_2)$ sau $v = \left(\frac{y}{3},0\right) \in F(x_2)$

Cazul 3: pentru orice $x_1 = (0,x), x_2 = (y,0) \in X$ şi orice $u = \left(\frac{x}{2},0\right) \in F(x_1)$ sau orice $u = \left(\frac{x}{3},0\right) \in F(x_1)$, există $v = (0,y) \in F(x_2)$

Cazul 4: pentru orice $x_1 = (0,x), x_2 = (0,y) \in X$ şi orice $u = \left(\frac{x}{2},0\right) \in F(x_1)$, există $v = \left(\frac{y}{2},0\right) \in F(x_2)$, respectiv pentru orice $x_1 = (0,x), x_2 = (0,y) \in X$ şi orice $u = \left(\frac{x}{3},0\right) \in F(x_1)$, există $v = \left(\frac{y}{3},0\right) \in F(x_2)$

Pentru toate aceste cazuri condiţia de k-contracţie multivocă are loc pentru $k = \frac{3}{4}$. Din Teorema 2.1.8 rezultă că F are un punct fix în X, însă F nu este o contracţie multivocă (de exemplu, în raport cu metrica de tip Cebîşev) pe $X \subset \mathbb{R}^2$, deci teorema clasică a lui Nadler nu poate fi aplicată.

Definiţia 2.1.10. Fie (X,d,E) un spaţiu E-metric. Spunem că operatorul $F : X \to P_{cl}(X)$ este o (a,b,c)-*contracţie multivocă*, dacă şi numai dacă $a,b,c \in \mathbb{R}_+$ cu $a+b+c < 1$ şi pentru orice $x,y \in X$ şi orice $u \in F(x)$, există $v \in F(y)$ astfel încât

$$d(u,v) \leq ad(x,y) + bd(x,u) + cd(y,v).$$

Teorema 2.1.11. *Fie (X,d,E) un spaţiu E-metric complet cu E Arhimedean. Presupunând că operatorul $F : X \to P_{cl}(X)$ este o (a,b,c)-contracţie* *multivocă, atunci F admite un punct fix în X şi pentru orice $x \in X$, există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al aproximaţiilor succesive pentru F pornind din $(x, y) \in$* Graph(F) *care E-converge în (X, d, E) la punctul fix al lui F.*

Observaţia 2.1.12. Teoremele 2.1.8 şi 2.1.11 generalizează rezultatele cunoscute din teoria punctului fix pentru operatori multivoci de tip contractiv în spaţii metrice complete (vezi Nadler [85], Covitz-Nadler [75], S. Reich [80], A. Bucur, L. Guran şi A. Petruşel [19]), etc. şi nu necesită impunerea condiţiei de grafic închis asupra operatorului F, care de exemplu în [19] este cerută.

2.2 Teoria unei teoreme E-metrice de punct fix

În această secţiune discutăm o teorie a teoremei metrice de punct fix a lui Banach–Caccioppoli în spaţii E-metrice (vezi Teorema 2.1.1 din secţiunea anterioară) în sensul dat de I.A. Rus în [89] pentru cazul spaţiilor metrice clasice. De asemenea, se discută cazul operatorilor multivoci după modelul dat de A. Petruşel şi I.A. Rus în [75].

Similar, teoria poate fi extinsă asupra celorlalte teoreme metrice de punct fix din secţiunea anterioară ce satisfac condiţii de contracţii generalizate în spaţii E-metrice.

Pornim prin a extinde lema lui Cauchy dată de I.A. Rus şi M.-A. Şerban în [91] la cazul spaţiilor Riesz.

Lema 2.2.1 (Lema lui Cauchy)**.** *Fie E un spaţiu Riesz complet ordonat. Fie $a_n \in \mathbb{R}_+, b_n \in E_+, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < +\infty$ şi $b_n \xrightarrow{o} 0$ când $n \to \infty$. Atunci*

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i \xrightarrow{o} 0 \text{ când } n \to \infty.$$

Observaţia 2.2.2. Dacă (X, d, E) este un spaţiu E-metric şi $f : X \to X$ este o k-contracţie univocă, este uşor de observat că f este E-continuă.

Teorema 2.2.3. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric complet cu E Archimedean şi $f : X \to X$ o k-contracţie univocă. Atunci următoarele afirmaţii au loc:*

i) Fix$(f) = \{x_f^*\}$ *şi $f^n(x) \xrightarrow{d,E} x_f^*$ când $n \to \infty$, pentru orice $x \in X$, adică, f este un operator Picard vectorial (prescurtat E-PO);*

ii) $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(f^n) = \{x_f^*\}$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, *adică,* f *este un operator Bessaga vectorial;*

iii) $d\left[f^n(x), x_f^*\right] \leq \frac{k^n}{1-k} d[x, f(x)]$, *pentru orice* $x \in X$ *şi orice* $n \in \mathbb{N}^*$*;*

iv) $d\left(x, x_f^*\right) \leq \frac{1}{1-k} d[x, f(x)]$, *pentru orice* $x \in X$, *adică,* f *este* $\frac{1}{1-k}$*-E-PO;*

v) $\sum\limits_{n \in \mathbf{N}} d\left[f^n(x), f^{n+1}(x)\right] \leq \frac{1}{1-k} d[x, f(x)]$, *pentru orice* $x \in X$, *adică,* f *este E-PO bun;*

vi) $\sum\limits_{n \in \mathbf{N}} d\left[f^n(x), x_f^*\right] \leq \frac{1}{1-k} d\left(x, x_f^*\right)$, *pentru orice* $x \in X$, *adică,* f *este E-PO special;*

vii) Dacă $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ *sunt astfel încât*

$$d[x_n, f(x_n)] \xrightarrow{d,E} 0 \text{ când } n \to \infty,$$

atunci

$$x_n \xrightarrow{d,E} x_f^* \text{ când } n \to \infty,$$

adică, problema de punct fix pentru operatorul f *este bine pusă;*

viii) Dacă $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ *şi*

$$(d(x_{n+1}, f(x_n))) \xrightarrow{o} 0 \text{ când } n \to \infty,$$

implică că există $x \in X$ *astfel încât*

$$d[x_n, f^n(x)] \xrightarrow{o} 0 \text{ când } n \to \infty,$$

adică, operatorul f *are proprietatea de umbrire la limită;*

ix) Dacă $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *este un şir E-mărginit în* X, *atunci*

$$f^n(x_n) \xrightarrow{d,E} x_f^* \text{ când } n \to \infty;$$

x) Dacă $g : X \to X$ *este astfel încât există* $\eta \in E_+$ *cu*

$$d[f(x), g(x)] \leq \eta, \text{ pentru orice } x \in X,$$

atunci:

$$x_g^* \in \mathrm{Fix}(g) \text{ implică } d\left(x_f^*, x_g^*\right) \leq \frac{1}{1-k}\eta;$$

xi) Dacă $f_n : X \to X$, $f_n \xrightarrow{unif.} f$, $x_n^* \in \mathrm{Fix}\,(f_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *atunci*

$$x_n^* \xrightarrow{d,E} x_f^* \text{ când } n \to \infty;$$

xii) Dacă (X, d, E) *este un spaţiu* E*-metric normat, cu* $d\,(x, y) = |x - y|$, *unde* $|\cdot| : X \to E_+$, *atunci* $1_X - f : X \to X$ *este un izomorfism* E*-topologic;*

xiii) Dacă (X, d, E) *este un spaţiu* E*-metric şi* E*-mărginit cu* E *complet ordonat, atunci*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n\,(X) = \left\{x_f^*\right\},$$

adică, f *este un operator Janos.*

În continuare prezentăm două aplicaţii ale teoremei E-metrice studiate pentru operatori univoci. În acest scop avem nevoie de următoarea cerinţă.

Definiţia 2.2.4. Prin definiţie, $(X, d, E, \leq)$ este un *spaţiu* E*-metric ordonat* dacă (X, d, E) este un spaţiu E-metric şi „$\leq$" este o relaţie de ordine parţială pe X, astfel încât următoarea implicaţie are loc: dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în X sunt astfel încât

i) $x_n \leq y_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

ii) $x_n \xrightarrow{d,E} x$, $y_n \xrightarrow{d,E} y$ când $n \to \infty$,

atunci

$$x \leq y.$$

Lema 2.2.5 (Lemă de tip Gronwall pentru k-contracţii). *Fie* $(X, d, E, \leq)$ *un spaţiu* E*-metric ordonat şi complet cu* E *Archimedean şi* $f : X \to X$ *un operator. Presupunând că* f *este o* k*-contracţie univocă şi* f *este crescător, atunci:*

i) $x \leq f\,(x)$ *implică* $x \leq x_f^*$;

ii) $x \geq f\,(x)$ *implică* $x \geq x_f^*$.

Teorema 2.2.6 (Teoremă de comparaţie pentru k-contracţii). *Fie* $(X, d, E \leq)$ *un spaţiu* E*-metric ordonat şi complet cu* E *Archimedean şi* $f, g, h : X \to X$ *trei operatori. Presupunând că:*

i) $f \leq g \leq h$*;*

ii) f, g, h *sunt* k*-contracţii univoce;*

iii) operatorul g *este crescător.*

Atunci:

$$x_f^* \leq x_g^* \leq x_h^*.$$

Pentru cazul multivoc (vezi Teorema 2.1.8), de asemenea, studiem alte proprietăţi de puncte fixe, precum:

- existenţa punctelor fixe şi a punctelor fixe stricte;
- dependenţa de date a punctelor fixe;
- convergenţa mulţimii punctelor fixe a unui şir de operatori multivoci;
- stabilitatea Ulam–Hyers a incluziunii $x \in F(x)$;
- proprietatea problemei de punct fix bine pusă;
- proprietatea de umbrire la limită;
- altele.

Definiţia 2.2.7. Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric. Atunci operatorul multivoc $F : X \to P(X)$ se numeşte *slab Picard vectorial* (prescurtat operator E-MWP), dacă şi numai dacă pentru orice $x \in X$ şi orice $y \in F(x)$, există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în X astfel încât:

(i) $x_0 = x$, $x_1 = y$;

(ii) $x_{n+1} \in F(x_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

(iii) şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este E-convergent şi limita sa este un punct fix pentru F.

Definiţia 2.2.8. Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric şi fie $F : X \to P(X)$ un operator E-MWP. Atunci definim operatorul multivoc $F^\infty : \mathrm{Graph}(F) \to P(\mathrm{Fix}(F))$ prin formula $\{F^\infty(x, y) = x^* \in \mathrm{Fix}(F) :$ există un şir al aproximaţiilor succesive pentru F pornind din (x, y) care E-converge la $x^*\}$.

Definiţia 2.2.9. Fie (X, d, E) un spaţiu metric vectorial şi $F : X \to P(X)$ un operator E-MWP. Atunci F se numeşte *c-slab Picard vectorial* (prescurtat operator c-E-MWP) dacă şi numai dacă $c \in \mathbb{R}_+^*$ şi există o selecţie f^∞ a lui F^∞ astfel încât $d[x, f^\infty(x, y)] \leq c d(x, y)$, pentru orice $(x, y) \in \mathrm{Graph}(F)$.

Definiţia 2.2.10. Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric şi fie $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de mulţimi ordonate în $P_{cl}(X)$. Atunci F_n se numeşte *Hausdorff E-convergent* la o mulţime ordonată şi închisă F din X, notăm cu $F_n \overset{H,d,E}{\longrightarrow} F$ când $n \to \infty$ dacă şi numai dacă există un şir $(a_n) \subset E$ astfel încât $a_n \downarrow 0$ când $n \to \infty$ şi pentru orice $u_n \in F_n(x)$, există $v \in F(x)$ (respectiv pentru orice $v \in F(x)$, există $u_n \in F_n(x)$) astfel încât

$$d(u_n, v) \leq a_n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Definiţia 2.2.11. Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric complet şi $F : X \to P(X)$ un operator multivoc. Prin definiţie, F se numeşte *operator Picard vectorial* (prescurtat E-MPO) dacă şi numai dacă:

(i) $\mathrm{SFix}(F) = \mathrm{Fix}(F) = \{x^*\}$;

(ii) $F^n(x) \overset{H,d,E}{\longrightarrow} \{x^*\}$ când $n \to \infty$, pentru orice $x \in X$.

Un prim rezultat pentru k-contracţii multivoce în spaţii E-metrice este următorul.

Teorema 2.2.12. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric complet cu E Archimedean şi $F : X \to P_{cl}(X)$ o k-contracţie multivocă. Atunci următoarele afirmaţii au loc:*

i) $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$;

ii) F este un operator $\frac{1}{1-k}$-E-MWP;

iii) Fie $G : X \to P_{cl}(X)$ o k-contracţie multivocă şi $\eta \in E_+$ astfel încât pentru orice $u \in G(x)$, există $v \in F(x)$ astfel încât $d(u, v) \leq \eta$ (respectiv pentru orice $u \in F(x)$, există $v \in G(x)$ astfel încât $d(u, v) \leq \eta$). Atunci pentru orice $p \in \mathrm{Fix}(G)$, există $q \in \mathrm{Fix}(F)$ astfel încât $d(p, q) \leq \frac{1}{1-k}\eta$ (respectiv pentru orice $p \in \mathrm{Fix}(F)$, există $q \in \mathrm{Fix}(G)$ astfel încât $d(p, q) \leq \frac{1}{1-k}\eta$).

iv) Fie $F_n : X \to P_{cl}(X)$, $n \in \mathbb{N}$ un şir de k-contracţii multivoce astfel încât $F_n(x) \overset{H,d,E}{\longrightarrow} F(x)$ când $n \to \infty$, uniform în raport cu $x \in X$. Atunci, $\mathrm{Fix}(F_n) \overset{H,d,E}{\longrightarrow} \mathrm{Fix}(F)$ când $n \to \infty$;

v) (Stabilitatea Ulam–Hyers a incluziunii $x \in F(x)$) Fie $\epsilon \in E_+$ astfel încât există $y \in F(x) : d(x, y) \leq \epsilon$. Atunci, există $x^* \in \mathrm{Fix}(F)$ astfel încât $d(x, x^*) \leq \frac{1}{1-k}\epsilon$.

Un al doilea rezultat pentru k-contracţii multivoce în spaţii E-metrice este următorul.

Teorema 2.2.13. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric complet cu E Archimedean şi $F : X \to P_{cl}(X)$ o k-contracţie multivocă cu $\mathrm{SFix}(F) \neq \emptyset$. Atunci următoarele afirmaţii au loc:*

i) $\mathrm{Fix}(F) = \mathrm{SFix}(F) = \{x^*\}$;

ii) $\mathrm{Fix}(F^n) = \mathrm{SFix}(F^n) = \{x^*\}$, *pentru* $n \in \mathbb{N}^*$;

iii) $F^n(x) \xrightarrow{H,d,E} \{x^*\}$ *când* $n \to \infty$, *pentru orice* $x \in X$;

iv) Fie $G : X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc şi $\eta \in E_+$ astfel încât $\mathrm{Fix}(G) \neq \emptyset$ şi pentru orice $u \in G(x)$, există $v \in F(x)$ astfel încât $d(u, v) \leq \eta$ (respectiv pentru orice $u \in F(x)$, există $v \in G(x)$ astfel încât $d(u, v) \leq \eta$). Atunci pentru orice $p \in \mathrm{Fix}(G)$, există $q \in \mathrm{Fix}(F)$ astfel încât $d(p, q) \leq \frac{1}{1-k}\eta$ (respectiv pentru orice $p \in \mathrm{Fix}(F)$, există $q \in \mathrm{Fix}(G)$ astfel încât $d(p, q) \leq \frac{1}{1-k}\eta$);

v) Fie $F_n : X \to P_{cl}(X), n \in \mathbb{N}$ un şir de operatori multivoci astfel încât $\mathrm{Fix}(F_n) \neq \emptyset$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $F_n(x) \xrightarrow{H,d,E} F(x)$ când $n \to \infty$, uniform în raport cu $x \in X$. Atunci, $\mathrm{Fix}(F_n) \xrightarrow{H,d,E} \mathrm{Fix}(F)$ când $n \to \infty$.

vi) (Proprietatea problemei de punct fix bine pusă) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir în X astfel încât există $y_n \in F(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0, \text{ când } n \to \infty,$$

atunci $x_n \xrightarrow{d,E} x^*$, când $n \to \infty$.

vii) (Proprietatea de umbrire la limită a operatorului multivoc) Dacă $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir în X astfel încât există $u_n \in F(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$d(y_{n+1}, u_n) \xrightarrow{o} 0, \text{ când } n \to \infty,$$

atunci există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ al aproximaţiilor succesive pentru F, astfel încât

$$d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0, \text{ când } n \to \infty.$$

Un al treilea rezultat pentru k-contracţii multivoce în spaţii E-metrice este următorul.

Teorema 2.2.14. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric complet cu E Archimedean şi $F : X \to P_{cp}(X)$ o k-contracţie multivocă astfel încât $F(\mathrm{Fix}(F)) = \mathrm{Fix}(F)$. Atunci următoarele afirmaţii au loc:*

i) $F(x) = \mathrm{Fix}(F)$, *pentru orice* $x \in \mathrm{Fix}(F)$;

ii) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *este un şir astfel încât* $x_n \xrightarrow{d,E} x^* \in \mathrm{Fix}(F)$ *când* $n \to \infty$, *atunci* $F(x_n) \xrightarrow{H,d,E} \mathrm{Fix}(F)$ *când* $n \to \infty$.

2.3 Rezultate neliniare de punct fix în spaţii E-metrice

În această secţiune se găsesc rezultate neliniare noi de punct fix, ce prezintă diverse extinderi şi abordări ale Principiului Contracţiei pentru operatori univoci şi multivoci în spaţii E-metrice, vezi J. Matkowski [47] şi I.A. Rus [86].

Printre acestea, se află modul de obţinere a unei teoreme neliniare univoce de punct fix cu concluzii echivalente cu cele ale Principiului Contracţiei într-o submulţime a unui spaţiu E-metric dat ca şi o reuniune de bile închise, precum şi o versiune extinsă a teoremei lui Węgrzyk în spaţii E-metrice. De asemenea, sunt prezentate rezultate neliniare noi de punct fix preliminare teoremei lui Krasnoselskii în spaţii E-metrice.

În cele ce urmează prezentăm modul de definire a φ-contracţiei neliniare univoce, precum şi versiuni neliniare a Teoremei 2.1.1 (globală şi locală) pentru operatori univoci în spaţii E-metrice.

Definiţia 2.3.1. Un operator crescător $\varphi : E_+ \to E_+$ cu $\varphi(t) \leq t$ şi $\varphi^n(t) \xrightarrow{o} 0$, pentru orice $t > 0$ se numeşte *operator de comparaţie ordonat* (prescurtat o-comparaţie).

Definiţia 2.3.2. Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric şi fie $\varphi : E_+ \to E_+$ un operator de o-comparaţie. Spunem că operatorul $f : X \to X$ este o *φ-contracţie neliniară univocă*, dacă şi numai dacă

$$d[f(x), f(y)] \leq \varphi[d(x, y)], \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

Teorema 2.3.3. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric complet cu E-Archimedean şi fie $f : X \to X$ o φ-contracţie neliniară univocă. Atunci:*

i) există un punct fix unic x^* *pentru* f *în* X *şi pentru orice* $x \in X$, *şirul* $f^n(x) \xrightarrow{d,E} x^*$;

ii) $d\left[x^{*}, f^{n}(x)\right] \leq \varphi^{n}\left[d\left(x^{*}, x\right)\right]$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

O versiune locală a Teoremei 2.3.3 poate fi obţinută în bila închisă

$$\bar{B}\left(x_{0}, r\right):=\left\{x \mid x \in X, d\left(x_{0}, x\right) \leq r\right\}.$$

Teorema 2.3.4. *Fie* (X, d, E) *un spaţiu* E*-metric complet cu* E*-Archimedean,* $x_{0} \in X$, $r \in E_{+}$, *fie* $f: \bar{B}\left(x_{0}, r\right) \rightarrow X$ *un operator şi există un operator crescător* $\varphi:[0, r] \rightarrow[0, r] \subset E_{+}$ *(nu neaparat o-continuu) astfel încât* $\varphi^{n}(t) \xrightarrow{o} 0$, *pentru orice* $t \in(0, r]$ *cu proprietatea că* $d[f(x), f(y)] \leq \varphi[d(x, y)]$ *şi* $d(x, y) \leq r$, *pentru orice* $x, y \in \bar{B}\left(x_{0}, r\right)$. *Presupunem că* $d\left[x_{0}, f\left(x_{0}\right)\right] \leq r-\varphi(r)$. *Atunci:*

i) *există un punct fix unic* x^{*} *pentru* f *în* $\bar{B}\left(x_{0}, r\right)$ *şi pentru orice* $x \in \bar{B}\left(x_{0}, r\right)$, *şirul* $f^{n}(x) \xrightarrow{d, E} x^{*}$;

ii) $d\left[x^{*}, f^{n}(x)\right] \leq \varphi^{n}(b)$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Urmărind ideile din M. Kwapisz [43], se pot obţine alte rezultate cu concluzii echivalente cu ale Teoremelor 2.3.3 şi 2.3.4, în spaţiul

$$X\left(x_{0}, r\right):=\bigcup_{\lambda \in E_{+}} \bar{B}\left(x_{0}, \lambda r\right)=\bigcup_{\lambda \in E_{+}}\left\{x \mid x \in X, d\left(x, x_{0}\right) \leq \lambda r\right\}.$$

Teorema 2.3.5. *Fie* (X, d, E) *un spaţiu* E*-metric complet cu* E*-Archimedean,* $x_{0} \in X$, $r \in E_{+}$, *fie* $f: X\left(x_{0}, r\right) \rightarrow X$ *un operator şi există un operator crescător* $\varphi: E_{+} \rightarrow E_{+}$ *(nu neaparat o-continuu) astfel încât* $\varphi^{n}(t) \xrightarrow{o} 0$, *pentru orice* $t>0$, *cu proprietăţile:*

1) $\varphi(\lambda r) \leq \varphi(\lambda) r$, *pentru* $\lambda \in E_{+}$;

2) $d[f(x), f(y)] \leq \varphi[d(x, y)]$ *şi* $d(x, y) \leq \lambda r$, *pentru orice* $x, y \in X\left(x_{0}, r\right)$ *şi pentru* $\lambda \in E_{+}$;

3) $d\left[x_{0}, f\left(x_{0}\right)\right] \leq \lambda_{0} r$, *pentru* $\lambda_{0} \in E_{+}$.

Atunci:

i) *există un punct fix unic* x^{*} *pentru* f *în* $X\left(x_{0}, r\right)$ *şi pentru orice* $x \in X\left(x_{0}, r\right)$, *şirul* $f^{n}(x) \xrightarrow{d, E} x^{*}$;

ii) $d\left[x^{*}, f^{n}(x)\right] \leq \varphi^{n} d\left(x^{*}, x\right)$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.3.6. *Dacă* $\left(y_{n}\right) \subset X\left(x_{0}, r\right)$ *şi* $y_{n} \xrightarrow{d, E} y$, *atunci* $y \in X\left(x_{0}, r\right)$, *adică,* $X\left(x_{0}, r\right)$ *este* E*-închisă în* X *în raport cu convergenţa* $\xrightarrow{d, E}$.

Înzestrând spaţiul $X(x_0, r)$ cu o E-metrică $\rho : X(x_0, r) \times X(x_0, r) \to E_+$, dată de

$$\rho(x, y) = \inf_{\lambda \in E_+} \{d(x, y) \leq \lambda r\},$$

avem următoarele:

Lema 2.3.7. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric complet cu E-Archimedean. Atunci, spaţiul $X(x_0, r)$ este E-complet în raport cu ρ.*

Folosind aceleaşi ipoteze ca şi în Teorema 2.3.5, obţinem un alt rezultat de existenţă şi unicitate în spaţiul E-metric $X(x_0, r)$. De remarcat că, de această dată, demonstraţia este bazată pe legătura dintre E-metricile ρ şi d şi astfel, nu vom aplica Teorema 2.3.5 pentru a arăta că şirul aproximaţiilor succesive al lui f converge în raport cu $\xrightarrow{d,E}$ la unicul punct fix al lui f în $X(x_0, r)$.

Teorema 2.3.8. *Dacă ipotezele Teoremei 2.3.5 au loc, atunci:*

i) f este o φ-contracţie neliniară univocă în $X(x_0, r)$ în raport cu ρ;

ii) există un punct fix unic x^* pentru f în $X(x_0, r)$ şi pentru orice $y_0 \in X(x_0, r)$, $f^n(y_0) \xrightarrow{d,E} x^*$.

În cele ce urmează prezentăm modul de definire a φ-contracţiei neliniare multivoce, o versiune neliniară a Teoremei 2.1.1 pentru operatori multivoci şi probleme deschise pe această direcţie.

Definiţia 2.3.9. Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric şi fie $\varphi : E_+ \to E_+$ un operator de o-comparaţie. Spunem că operatorul $F : X \to P_{cl}(X)$ este o *φ-contracţie neliniară multivocă*, dacă şi numai dacă pentru orice $x, y \in X$ şi orice $u \in F(x)$, există $v \in F(y)$ astfel încât

$$d(u, v) \leq \varphi[d(x, y)].$$

Teorema 2.3.10. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric complet. Presupunând că operatorul $F : X \to P_{cl}(X)$ este o φ-contracţie neliniară multivocă, atunci F are un punct fix în X şi pentru orice $x \in X$, există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al aproximaţiilor succesive pentru F pornind din $(x, y) \in$ Graph(F) care E-converge în (X, d, E) la punctul fix al lui F.*

Dacă alegem cazul particular când $\varphi(t) = kt$, $k \in [0, 1)$ obţinem Teorema 2.1.8.

Observaţia 2.3.11. Teoremele 2.3.3, 2.3.4 şi 2.3.10 reprezintă extinderea la cazul spaţiilor E-metrice a câtorva principii metrice clasice de punct fix din analiza neliniară. Dacă alegem $X = E$ şi d metrica valoare absolută pe E, atunci obţinem teoreme de punct fix în spaţiul Riesz E (vezi R. Cristescu [29]).

Problema 2.3.12. Să se demonstreze alte teoreme de punct fix în spaţii E-metrice pentru operatori univoci şi multivoci ce satisfac condiţii neliniare de φ-contracţii generalizate şi de asemenea, să se studieze teoria unei astfel de teoreme (vezi I.-R. Petre [63], A. Petruşel, I.A. Rus [75] şi I.A. Rus [89]).

Considerăm următoarea definiţie:

Definiţia 2.3.13. Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric cu E complet ordonat şi fie $\varphi : E_+ \to E_+$ un operator de o-comparaţie. Spunem că operatorul $F : X \to P_{b,cl}(X)$ este o *φ-contracţie neliniară multivocă în sens Nadler*, dacă şi numai dacă

$$H[F(x), F(y)] \leq \varphi[d(x, y)], \text{ pentru orice } x, y \in X. \tag{2.3.1}$$

Problema 2.3.14. Să se definească o funcţională H lucrativă pentru care are loc condiţia (2.3.1) când E este o latice liniară, să se demonstreze Teorema 2.3.10 în termenii Definiţiei 2.3.13 şi să se stabilească o lemă de dependenţă de date pentru excesul dintre mulţimile punctelor fixe a doi operatori ce satisfac o condiţie de φ-contracţie neliniară multivocă în sens Nadler.

Dificultatea apare din cauza faptului că nu putem nega în mod obişnuit inegalitatea $u \leq v$ pentru $u, v \in E_+$. De exemplu, pentru $E_+ = \mathbb{R}^2_+$, avem următoarea figură:

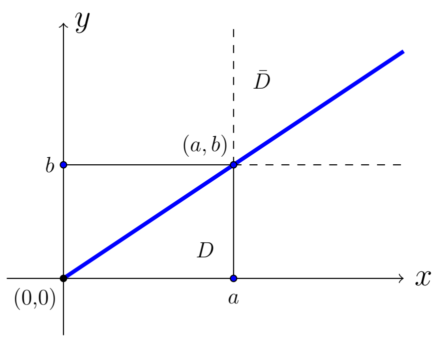

Figura 3: Dificultăţi de negare într-o latice liniară.

De aici se observă că elementele comparabile sunt cele de pe diagonala boldată, iar elementele din afara dreptunghiul $D = [0, a] \times [0, b]$ nu sunt doar cele din porţiunea $\bar{D}$. Astfel, nu putem stabili o lemă de tipul Lemei 1.3.16 în contextul spaţiilor E-metrice. Pentru a evita demonstrarea unei astfel de leme, în secţiunea 4.3 introducem o noţiune de strict pozitivitate într-un spaţiu Riesz şi astfel, avem o nouă perspectivă de abordare a Problemei 2.3.14.

Lema 2.3.15. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric cu E complet ordonat şi fie $A \subset P_b(X)$. Atunci $D(x, A) = 0$ dacă şi numai dacă $x \in \bar{A}$.*

În continuare prezentăm câteva rezultate topologice preliminare teoremei lui Krasnoselskii în spaţii E-Banach. Ţinem cont că într-un spaţiu E-Banach X, Lema lui Ky Fan şi Teorema lui Schauder pot fi demonstrate folosind o metodă similară cu cea clasică, unde presupunem că E este complet ordonat şi $Y \subset X$ este o mulţime E-mărginită (astfel, definţia completitudinii ordonate 1.2.9 garantează că $\inf_{x \in Y} ||x - f(y_0)||$ există în E). Mai precis, avem următoarele rezultate.

Lema 2.3.16. *Fie X un spaţiu E-normat cu E complet ordonat, fie $Y \subset X$ o mulţime E-compactă şi E-convexă şi fie $f : Y \to X$ un operator univoc E-continuu. Atunci $||y_0 - f(y_0)|| = \inf_{x \in Y} ||x - f(y_0)||$.*

Teorema 2.3.17. *Fie X un spaţiu E-Banach cu E complet ordonat, fie $Y \subset X$ o mulţime E-mărginită, E-închisă şi E-convexă şi fie $f : Y \to Y$ un operator univoc cu imagine E-relativ compactă. Atunci f are cel puţin un punct fix în Y.*

Observaţia 2.3.18. Pentru o altă teoremă de tip Schauder într-o latice liniară Hausdorff Archimedeană, vezi T. Kawasaki, M. Toyoda, T. Watanabe [42].

Problema 2.3.19. Să se demonstreze o teoremă de tip Rybinski după modelul Teoremei 1.3.21 în contextul spaţiilor E-metrice care să asigure existenţa unei selecţii E-continue pentru un operator multivoc care necesită impunerea unei condiţii de φ-contracţie neliniară multivocă în sens Nadler în raport cu al doilea argument.

Avem nevoie de o versiune extinsă a teoremei de intersecţie a lui Cantor şi a lemei lui Cesaro.

Lema 2.3.20. *Fie* (X, d, E) *un spaţiu* E*-metric complet cu proprietatea că pentru orice şir descrescător* $\{F_n\}_{n\geq 1}$ *de submulţimi nevide şi* E*-închise ale lui* X *avem că* $\delta(F_n) \xrightarrow{o} 0$ *când* $n \to \infty$*. Atunci intersecţia* $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ *conţine un element şi numai unul.*

Lema 2.3.21. *Fie* (X, d, E) *un spaţiu* E*-metric complet cu* E *Archimedean şi fie* (x_n) *un şir* E*-mărginit în* X*. Atunci, există un subşir* E*-convergent* (x_{n_k}) *în* X*.*

Capitolul 3

Teoreme topologice de punct fix şi aplicaţii în spaţii Banach vectoriale

3.1 Teorema lui Krasnoselskii în spaţii Banach generalizate

În această secţiune demonstrăm teorema de punct fix a lui Krasnoselskii în spaţii Banach generalizate pentru operatori univoci şi multivoci. Totodată, discutăm alte rezultate posibile de existenţă a punctului fix pentru suma a doi operatori multivoci, unde un operator satisface o condiţie de A-contracţie multivocă, iar celălalt operator satisface o condiţie de compactitate.

Teorema 3.1.1. *Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Banach generalizat şi fie $Y \in P_{cl,cv}(X)$. Presupunând că operatorii $f, g : Y \to X$ satisfac proprietăţile:*

i) f este o A-contracţie univocă;

ii) g este continuu;

iii) $g(Y)$ este relativ compactă şi $f(x) + g(y) \in Y$, pentru orice $x, y \in Y$.

Atunci $f + g$ are un punct fix în Y.

Pentru o matrice $A := (a_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,m\}} \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ notăm cu

$$|A| := (|a_{ij}|)_{i,j \in \{1,\ldots,m\}} \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+).$$

În acest context, spunem că o matrice nesingulară A are *proprietatea de valoare absolută* dacă $A^{-1}|A| \leq I$. Câteva exemple de matrice convergente la zero $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, care de asemenea satisfac proprietatea

$$(I - A)^{-1}|I - A| \leq I$$

sunt:

1) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}_+$ şi $\max(a, b) < 1$;

2) $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ şi $a + b < 1, c < 1$;

3) $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$, unde $a > 1, b > 0$ şi $|a - b| < 1$.

Pentru studiul existenţei punctului fix pentru suma a doi operatori multivoci, forma de bază a teoremei lui Krasnoselskii într-un spaţiu Banach generalizat, precum şi alte rezultate conexe ei sunt prezentate în cele ce urmează.

Teorema 3.1.2. *Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Banach generalizat şi fie $Y \in P_{cp,cv}(X)$. Presupunând că operatorii $F : Y \to P_{b,cl,cv}(X)$, $G : Y \to P_{cp,cv}(X)$ satisfac proprietăţile:*

i) $F(y_1) + G(y_2) \subset Y$, pentru fiecare $y_1, y_2 \in Y$;

ii) F este o A-contracţie multivocă în sens Nadler;

iii) G este s.c.i. şi $G(Y)$ este relativ compactă;

iv) matricea $I - A$ are proprietatea de valoare absolută.

Atunci $F + G$ are un punct fix în Y.

Extinzând o idee a lui T.A. Burton (vezi [20]), observăm că putem slăbi ipoteza $i)$ din Teorema 3.1.2.

Teorema 3.1.3. *Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Banach generalizat şi fie $Y \in P_{cp,cv}(X)$. Presupunând că operatorii $F : Y \to P_{b,cl,cv}(X)$, $G : Y \to P_{cp,cv}(X)$ satisfac proprietăţile:*

i) $y \in F(y) + G(x), x \in Y$ atunci $y \in Y$;

ii) F este o A-contracţie multivocă în sens Nadler;

iii) G este s.c.i. şi $G(Y)$ este relativ compactă;

iv) matricea $I - A$ are proprietatea de valoare absolută.

Atunci $F + G$ are un punct fix în Y.

Teorema 3.1.4. *Presupunem că condiţiile ii), iii) şi iv) ale Teoremei 3.1.3 au loc. Dacă există $r \in \mathbb{R}_+^m$ astfel încât pentru $Y = \{x \in X : |x| \leq r\}$, avem că $G(Y) \subset Y$ şi $|y| \leq D[y, F(y)]$, $y \in Y$, atunci concluzia Teoremei 3.1.3 are loc.*

De remarcat că în termenii unei măsuri abstracte de necompactitate pe Y, putem spune că operatorul multivoc $F : Y \to P_{b,cl}(X)$ se numeşte (α, A)-contracţie multivocă dacă şi numai dacă $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ este o matrice convergentă la zero şi $\alpha(F(B)) \leq A\alpha(B)$, pentru fiecare $B \in P_b(Y)$. Putem da naştere aici la o nouă direcţie de studiu a teoremei lui Krasnoselskii folosind rezultatele clasice date în A. Petruşel [70], I.A. Rus [88] şi A. Petruşel [72].

Problema 3.1.5. Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Banach generalizat şi fie $F_1, F_2 : X \to P_{b,cl}(X)$ doi operatori multivoci, astfel încât F_1 este o A-contracţie multivocă şi F_2 este compact. Atunci $F_1 + F_2$ este o (α, A)-contracţie multivocă.

Problema 3.1.6. Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Banach generalizat şi fie $Y \in P_{b,cl,cv}(X)$. Dacă $F : Y \to P_{cl,cv}(Y)$ este o (α, A)-contracţie multivocă s.c.s., atunci F are un punct fix în Y.

Problema 3.1.7. Fie $(X, |\cdot|)$ un spaţiu Banach generalizat şi fie $Y \in P_{b,cl,cv}(X)$. Presupunând că operatorii $F, G : Y \to P_{cp,cv}(X)$ satisfac proprietăţile:

i) $F(y) + G(y) \subset Y$, pentru fiecare $y \in Y$;

ii) F este o A-contracţie multivocă în sens Nadler;

iii) G este s.c.s. şi compact.

Atunci $F + G$ are un punct fix în Y.

3.2 Aplicaţii

Din literatura de specialitate este bine cunoscut faptul că Teoremele 3.1.1 şi 3.1.2 au o mulţime de aplicaţii interesante pentru forma clasică, de exemplu, L. Collatz [26] a stabilit existenţa unei soluţii pentru ecuaţia integrală

$$x(t) = \frac{1}{3}\left[x^2(t) + t\right] + \frac{1}{3}\int_0^1 |x(s) - t|^{\frac{1}{2}} ds,\ t \in [0, 1]$$

şi aşa mai departe, altă aplicaţie a teoremei lui Krasnoselskii în spaţii Hilbert poate fi găsită în M. Zuluaga [102] sau pentru cazul multivoc, vezi, de exemplu A. Petruşel [72].

Scopul nostru este de a extinde aceste aplicaţii pentru rezultatele din secţiunea anterioară, impunând o condiţie de A-contracţie univocă, respectiv multivocă asupra unuia dintre operatorii integrali şi alte condiţii care conduc la obţinerea existenţei soluţiei unui sistem de ecuaţii, respectiv incluziuni integrale într-un spaţiu Banach generalizat. Folosind Teoremele 3.1.1 şi 3.1.2, respectiv Teoremele conexe 3.1.3 şi 3.1.4, se pot obţine rezultate de existenţă pentru o mulţime de sisteme de ecuaţii şi incluziuni diferenţiale. În continuare considerăm cazul abstract al sistemelor de două ecuaţii integrale de tip Fredholm–Volterra.

Teorema 3.2.1. *Fie $I=[0,a]$ (cu $a>0$) un interval al axei reale şi considerăm următorul sistem de ecuaţii integrale în $C(I,\mathbb{R}^n)\times C(I,\mathbb{R}^p)$:*

$$\begin{cases} x_1(t)=\lambda_{11}\int_0^t k_1(t,s,x_1(s),x_2(s))\,ds+\lambda_{12}\int_0^a l_1(t,s,x_1(s),x_2(s))\,ds \\ x_2(t)=\lambda_{21}\int_0^t k_2(t,s,x_1(s),x_2(s))\,ds+\lambda_{22}\int_0^a l_2(t,s,x_1(s),x_2(s))\,ds \end{cases}$$

pentru $t\in I$, unde $\lambda_{ij}\in\mathbb{R}$ pentru $i,j\in\{1,2\}$. Presupunem că:

i) $k_1,l_1\in C(I^2\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$ *şi* $k_2,l_2\in C(I^2\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^p)$;

ii) există matricea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in M_{2,2}(\mathbb{R}_+)$ *astfel încât*

$$|k_i(t,s,u_1,u_2)-k_i(t,s,v_1,v_2)|\le a_{i1}|u_1-v_1|+a_{i2}|u_2-v_2|,$$

pentru fiecare $(t,s,u_1,u_2),(t,s,v_1,v_2)\in I^2\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$, $i\in\{1,2\}$;

iii) $\begin{pmatrix}|\lambda_{11}|\\ |\lambda_{21}|\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}\frac{r_1}{2a(a_{11}r_1+a_{12}r_2)}\\ \frac{r_2}{2a(a_{21}r_1+a_{22}r_2)}\end{pmatrix}$ *şi* $\begin{pmatrix}|\lambda_{12}|\\ |\lambda_{22}|\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}\frac{r_1}{2M_{l_1}}\\ \frac{r_2}{2M_{l_2}}\end{pmatrix}$, *unde*

$r:=\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\end{pmatrix}$, *cu* $r_1,r_2>0$ *şi* $M_{l_i}=\max\limits_{t\in[0,a]}\int_0^a|l_i(t,s,x_1(s),x_2(s))|\,ds$, *pentru* $i\in\{1,2\}$.

Atunci, există $x_0:=(x_1^0,x_2^0)\in C(I,\mathbb{R}^n)\times C(I,\mathbb{R}^p)$ astfel încât sistemul nostru de ecuaţii are o soluţie $x^*:=(x_1^*,x_2^*)\in\bar{B}(x_1^0,r_1)\times\bar{B}(x_2^0,r_2)\subset C(I,\mathbb{R}^n)\times C(I,\mathbb{R}^p)$.

Observaţia 3.2.2. Teoremele 3.2.1 şi 3.2.3 pot fi îmbunătăţite, presupunând în locul existenţei unei matrice pătratice de numere reale pozitive A, o altă matrice pătratică $A = (a_{ij})_{i,j=1,2}$, unde $a_{ij} \in L^p([0,a], \mathbb{R}_+), i, j \in \{1,2\}$ şi pe baza inegalităţii lui Hölder care ne garantează că

$$\int_0^t a_{ij}(s) e^{\tau s} ds \leq |a_{ij}|_{L^p} \left(\int_0^t a_{ij}(s) e^{q\tau s} ds \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ unde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

putem de asemenea obţine, alte rezultate similare.

Folosind Teorema 3.1.2 vom demonstra un rezultat de existenţă a soluţiei pentru un sistem abstract de două incluziuni integrale de tip Fredholm–Volterra într-un spaţiu Banach generalizat. De remarcat că în rezultatul ce urmează existenţa punctului fix are loc pentru o mulţime de operatori multivoci $F_i : Y_i \to P_{cp,cv}(X_i)$, unde $\left(X_i, |\cdot|_{X_i}\right)$ este un spaţiu Banach şi $Y_i \in P_{b,cl,cv}(X_i)$, pentru $i \in \{1,2\}$.

Pentru a arăta că F_i este o contracţie multivocă în sens Nadler înseamnă să arătăm că pentru $i \in \{1,2\}$, există o matrice convergentă la zero $A = (a_{ij})_{i,j=1,2} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că pentru orice $x := (x_1, x_2)$, $y := (y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ şi pentru fiecare $u_i \in F_i(x_1, x_2)$, există $v_i \in F_i(y_1, y_2)$, respectiv pentru fiecare $v_i \in F_i(y_1, y_2)$, există $u_i \in F_i(x_1, x_2)$ astfel încât

$$|u_i - v_i|_{X_i} \leq a_{i1} |x_1 - y_1|_{X_1} + a_{i2} |x_2 - y_2|_{X_2}.$$

Considerăm operatorul multivoc $F : Y_1 \times Y_2 \to P_{cp,cv}(X_1 \times X_2)$ dat de $F := (F_1, F_2)$ şi notăm $Y := Y_1 \times Y_2$, $X := X_1 \times X_2$, $|u - v|_X := \begin{pmatrix} |u_1 - v_1|_{X_1} \\ |u_2 - v_2|_{X_2} \end{pmatrix}$. Atunci inegalităţile anterioare pot fi reprezentate în forma vectorială: pentru orice $x, y \in Y$ şi pentru fiecare $u \in F(x)$, există $v \in F(y)$, respectiv pentru fiecare $v \in F(y)$, există $u \in F(x)$ astfel încât

$$|u - v|_X \leq A |x - y|_X, \text{ unde } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}_+).$$

Teorema 3.2.3. *Fie $I = [0,a]$ (cu $a > 0$) un interval al axei reale şi considerăm următorul sistem de incluziuni integrale în $C(I, \mathbb{R}^n) \times C(I, \mathbb{R}^p)$:*

$$\begin{cases} x_1(t) \in \lambda_{11} \int_0^t K_1(t, s, x_1(s), x_2(s)) ds + \lambda_{12} \int_0^a L_1(t, s, x_1(s), x_2(s)) ds \\ x_2(t) \in \lambda_{21} \int_0^t K_2(t, s, x_1(s), x_2(s)) ds + \lambda_{22} \int_0^a L_2(t, s, x_1(s), x_2(s)) ds \end{cases}$$

pentru $t \in I$, unde $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ pentru $i, j \in \{1,2\}$. Presupunem că:

i) $K_1 : I^2 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to P_{cl,cv}(\mathbb{R}^n)$, $K_2 : I^2 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to P_{cl,cv}(\mathbb{R}^p)$ *sunt doi operatori multivoci s.c.i., măsurabili şi mărginit integrabili;*

ii) $L_1 : I^2 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$, $L_2 : I^2 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^p)$ *sunt doi operatori multivoci s.c.i., măsurabili şi mărginit integrabili (de două funcţii integrabile* m_{L_1}, m_{L_2}*);*

iii) există matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}_+)$ *astfel încât pentru fiecare* (t, s, u_1, u_2), $(t, s, v_1, v_2) \in I^2 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ *şi pentru* $i \in \{1, 2\}$*, avem că:*

$$H\left(K_i\left(t, s, u_1, u_2\right), K_i\left(t, s, v_1, v_2\right)\right) \leq a_{i1}\left|u_1 - v_1\right| + a_{i2}\left|u_2 - v_2\right|;$$

iv) $\begin{pmatrix} |\lambda_{11}| \\ |\lambda_{21}| \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \frac{R_1}{2a(a_{11}R_1 + a_{12}R_2)} \\ \frac{R_2}{2a(a_{21}R_1 + a_{22}R_2)} \end{pmatrix}$ *şi* $\begin{pmatrix} |\lambda_{12}| \\ |\lambda_{22}| \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \frac{R_1}{2aM_{L_1}} \\ \frac{R_2}{2aM_{L_2}} \end{pmatrix}$, *unde*

$$M_{L_1} = \max_{t \in [0,a]} \left|m_{L_1}\right|_{\mathbb{R}^n}, \ M_{L_2} = \max_{t \in [0,a]} \left|m_{L_2}\right|_{\mathbb{R}^p}$$

şi m_{L_i} *reprezintă mulţimea selecţiilor continue pentru operatorul multivoc* $t \longrightarrow \lambda_{i2} \int_0^a L_i\left(t, s, x_1(s), x_2(s)\right) ds$*, pentru* $i \in \{1, 2\}$.

v) matricea $I - M$ *are proprietatea de valoare absolută, unde*

$$M = \left(\frac{|\lambda_{i1}|\, a_{ij}}{\tau}\right)_{i,j=1,2}, \ \tau > 0.$$

Atunci, există $(x_1^0, x_2^0) \in C(I, \mathbb{R}^n) \times C(I, \mathbb{R}^p)$ *astfel încât sistemul nostru de incluziuni are o soluţie* $x^* := (x_1^*, x_2^*) \in \bar{B}(x_1^0, R_1) \times \bar{B}(x_2^0, R_2) \subset C(I, \mathbb{R}^n) \times C(I, \mathbb{R}^p)$.

3.3 Teorema lui Krasnoselskii în spaţii E-Banach

În această secţiune demonstrăm o versiune neliniară a teoremei de punct fix a lui Krasnoselskii în spaţii E-Banach pentru operatori univoci urmând ca în secţiunea următoare să prezentăm modul de aplicare al teoremei. Varianta multivocă a teoremei este o problemă deschisă care survine din Problema 2.3.14.

Teorema 3.3.1. *Fie* $(X, ||\cdot||, E)$ *un spaţiu E-Banach cu E complet ordonat şi fie Y o submulţime nevidă, E-mărginită, E-convexă şi E-închisă a lui X. Presupunând că operatorii* $f, g : Y \to X$ *satisfac proprietăţile:*

i) f este o φ-contracţie neliniară univocă şi operatorul $\psi : E_+ \to E_+$ definit prin $\psi(t) = t - \varphi(t)$ satisface următoarea relaţie:

$$\text{dacă } (\psi(t_n)) \downarrow 0 \text{ când } n \to \infty, \text{ atunci } (t_n) \downarrow 0 \text{ când } n \to \infty;$$

ii) g este E-continuu;

iii) $g(Y)$ este E-relativ compactă şi $f(x) + g(y) \in Y$, pentru orice $x, y \in Y$.

Atunci $f + g$ are un punct fix în Y.

Problema 3.3.2. Să se demonstreze Teorema lui Krasnoselskii într-un spaţiu E-Banach pentru suma a doi operatori multivoci, unde un operator satisface o condiţie de φ-contracţie neliniară multivocă în sens Nadler, iar al doilea operator o condiţie de compactitate.

3.4 Aplicaţii

În această ultimă secţiune, dăm un rezultat de existenţă a soluţiei într-un spaţiu E-Banach pentru o ecuaţie integrală de tip Fredholm–Volterra care necesită aplicarea Teoremei 3.3.1. Obţinerea unui rezultat de existenţă a soluţiei pentru o incluziune integrală de tip Fredholm–Volterra într-un spaţiu E-Banach reprezintă o problemă deschisă, drept consecinţă a Problemei 3.3.2.

Teorema 3.4.1. *Fie E un spaţiu Riesz complet ordonat, $r \in E_+$ cu $r > 0$ şi fie $I = [0, a]$ (unde $a > 0$) un interval al axei reale. Considerăm următoarea ecuaţie integrală de tip Fredholm–Volterra în $C(I, E)$:*

$$x(t) = \int_I k(t, s, x(s))\, ds + \int_0^t l(t, s, x(s))\, ds,\ t \in I. \tag{3.4.1}$$

Presupunem că:

i) $k \in C(I^2 \times E, E)$ şi $l \in C(I^2 \times E, E)$ sunt doi operatori o-continui;

ii) există $\omega \in C(I^2, E_+)$ cu $\sup\limits_{t \in I} \int_I \omega(t, s)\, ds \leq 1$, astfel încât

$$|k(t, s, x) - k(t, s, y)| \leq \omega(t, s)\, \varphi(|x - y|),\ \text{pentru orice } (t, s) \in I^2,\ x, y \in E,$$

unde $\varphi : E_+ \to E_+$ este un operator de o-comparaţie şi operatorul $\psi : E_+ \to E_+$ definit de $\psi(t) = t - \varphi(t)$ satisface următoarea relaţie:

$$\text{dacă } (\psi(t_n)) \downarrow 0 \text{ când } n \to \infty, \text{ atunci } (t_n) \downarrow 0 \text{ când } n \to \infty;$$

iii) avem că $M_l := \sup_{t\in I} \int_0^t l(t,s,x(s))\,ds \leq \frac{1}{2}r$ *şi* $\psi(r) \geq \delta$, *unde* $\delta := \sup_{x\in \bar{B}(0,r)} \left| \sup_{t\in I} \int_I k(t,s,x(s))\,ds \right| \in E_+$.

Atunci, ecuaţia (3.4.1) are o soluţie x^* *în* $\bar{B}(0,r) \subset C(I,E)$.

Problema 3.4.2. Fie E un spaţiu Riesz complet ordonat, $r \in E_+$ cu $r > 0$ şi fie $I = [0,a]$ (unde $a > 0$) un interval al axei reale. Considerăm incluziunea integrală de tip Fredholm–Volterra în $C(I,E)$:

$$x(t) \in \int_I K(t,s,x(s))\,ds + \int_0^t L(t,s,x(s))\,ds,\ t \in I. \tag{3.4.2}$$

Să se impună condiţii asupra operatorilor multivoci $K, L : I^2 \times E \to P(E)$ astfel încât incluziunea (3.4.2) să admită o soluţie x^* în $\bar{B}(0,r) \subset C(I,E)$.

Capitolul 4

Teoreme de punct fix în spaţii b-metrice vectoriale

4.1 Spaţiu b-metric generalizat

În această secţiune introducem o noţiune mai largă de spaţiu b-metric generalizat care extinde noţiunea folosită de alţi autori precum V. Berinde în [12], S. Czerwik în [30], J. Heinonen în [38], M. Boriceanu, A. Petruşel, I.A. Rus în [14], M. Bota în [16]. Folosind acest context, prezentăm câteva proprietăţi şi rezultate ajutătoare pentru demonstraţiile teoremelor de punct fix din secţiunea următoare.

Definiţia 4.1.1. Fie X o mulţime nevidă şi fie $S \geq I$ o matrice pătratică de tipul $m \times m$ de numere reale nenegative, unde I notează matricea identitate. O funcţională $d : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$ se numeşte *b-metrică generalizată* dacă şi numai dacă pentru orice $x, y, z \in X$ sunt satisfăcute următoarele condiţii:

1. $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq S[d(x, y) + d(y, z)]$.

Perechea (X, d) se numeşte *spaţiu b-metric generalizat.*

Clasa spaţiilor b-metrice generalizate este mai largă decât clasa spaţiilor metrice generalizate, deoarece un spaţiu b-metric generalizat este un spaţiu metric generalizat când $S = I$ înlocuind în inegalitatea triunghiului din definiţia anterioară. Exemple de spaţii b-metrice sunt date în V. Berinde [12], S. Czerwik [30], J. Heinonen [38]. Aici vom da câteva exemple de spaţii b-metrice generalizate.

Menţionăm că dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+), A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$, pentru $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ atunci prin $A \leq B$ înţelegem că $a_{ij} \leq b_{ij}$, pentru $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Exemplul 4.1.2. Fie X o mulţime cu cardinalul $card(X) \geq 3$. Presupunem că $X = X_1 \cup X_2$ este o partiţie a lui X astfel încât $card(X_1) \geq 2$. Fie $S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ o matrice de numere reale. Atunci, funcţionala $d : X \times X \to \mathbb{R}^2_+$ definită prin

$$d(x,y) := \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & x = y \\ 2\begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \end{bmatrix}, & x, y \in X_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & \text{altfel} \end{cases}$$

este o b-metrică generalizată pe X.

Exemplul 4.1.3. Mulţimea $\ell^p(\mathbb{R})$ (cu $0 < p < 1$), unde $\ell^p(\mathbb{R}) := \{(x_n) \subset \mathbb{R} \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, împreună cu funcţionala $d : [\ell^p(\mathbb{R}) \times \ell^q(\mathbb{R})]^2 \to \mathbb{R}^2_+$,

$$d(x,y) := \begin{bmatrix} (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_{1n} - y_{1n}|^p)^{1/p} \\ (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_{2n} - y_{2n}|^q)^{1/q} \end{bmatrix}$$

este un spaţiu b-metric generalizat cu $S = \begin{bmatrix} 2^{1/p} & s_{12} \\ s_{12} & 2^{1/q} \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. De remarcat că exemplul are loc şi în cazul general $\ell^p(X)$ cu $0 < p < 1$, unde X este un spaţiu Banach generalizat.

Exemplul 4.1.4. Spaţiul $L^p[0,1]$ (unde $0 < p < 1$) al tuturor funcţiilor cu valori reale $x(t)$, $t \in [0,1]$ cu proprietatea că $\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty$, împreună cu funcţionala

$$d(x,y) := \begin{bmatrix} (\int_0^1 |x_1(t) - y_1(t)|^p dt)^{1/p} \\ (\int_0^1 |x_2(t) - y_2(t)|^q dt)^{1/q} \end{bmatrix}, \text{ pentru orice } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L^p[0,1] \times L^q[0,1]$$

este un spaţiu b-metric generalizat cu $S = \begin{bmatrix} 2^{1/p} & 0 \\ 0 & 2^{1/q} \end{bmatrix}$.

Într-un spaţiu b-metric generalizat (X, d) noţiunile de şir convergent, şir Cauchy, completitudinte, mulţime deschisă şi închisă sunt similare cu cele din spaţiile metrice obişnuite, însă o b-metrică generalizată nu este continuă în general şi nu induce o topologie pe X.

Lema 4.1.5. *Fie (X, d) un spaţiu b-metric generalizat şi fie $A, B \in P(X)$. Presupunem că există $\eta \in \mathbb{R}^m_+$, $\eta > 0$ astfel încât au loc:*

(i) pentru orice $a \in A$, există $b \in B$ astfel încât $d(a, b) \leq \eta$;

(ii) pentru orice $b \in B$, există $a \in A$ astfel încât $d(a, b) \leq \eta$.

Atunci, $H(A, B) \leq \eta$.

Lema 4.1.6. *Fie (X, d) un spaţiu b-metric generalizat, $A \in P(X)$ şi $x \in X$. Atunci $D(x, A) = 0$ dacă şi numai dacă $x \in \overline{A}$.*

Lema 4.1.7. *Fie (X, d) un spaţiu b-metric generalizat şi fie $\{x_k\}_{k=0}^n \subset X$. Fie $S \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ cu $S \geq I$. Atunci:*

$$d(x_0, x_n) \leq Sd(x_0, x_1) + \cdots + S^{n-1}d(x_{n-2}, x_{n-1}) + S^{n-1}d(x_{n-1}, x_n).$$

Lema 4.1.8. *Fie (X, d) un spaţiu b-metric generalizat şi fie $S \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ cu $S \geq I$. Atunci pentru orice $A, B, C \in P(X)$, avem că:*

$$H(A, C) \leq S[H(A, B) + H(B, C)].$$

Lema 4.1.9. *Fie (X, d) un spaţiu b-metric generalizat şi fie $A, B \in P_{cl}(X)$. Atunci pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}^m_+$ cu $\alpha > 0$ şi orice $b \in B$, există $a \in A$ astfel încât*

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \alpha.$$

Mai mult, dacă, $A, B \in P_{cp}(X)$ şi $S \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ cu $S \geq I$. Atunci pentru orice $b \in B$, există $a \in A$ astfel încât

$$d(a, b) \leq SH(A, B).$$

Lema 4.1.10. *Fie (X, d) un spaţiu b-metric generalizat şi fie $A, B \in P_b(X)$, $q > 1$. Atunci, pentru orice $a \in A$, există $b \in B$ astfel încât*

$$\delta(A, B) \leq qd(a, b).$$

4.2 Teoreme de punct fix în spaţii b-metrice generalizate

În această secţiune prezentăm câteva teoreme de punct fix şi punct fix strict în spaţii b-metrice generalizate folosind tehnica operatorilor Picard şi slab Picard. Modul de definire a operatorilor Picard, M-Picard, multivoc slab Picard şi multivoc M-slab Picard într-un spaţiu b-metric generalizat este similar celui dintr-un spaţiu metric generalizat (vezi secţiunea 1.3).

Începem prin a prezenta câteva teoreme de punct fix pentru operatori univoci în spaţii b-metrice generalizate.

Teorema 4.2.1. *Fie (X,d) un spaţiu b-metric generalizat complet cu $S \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$, $S \geq I$ şi fie $f : X \to X$ o A-contracţie univocă astfel încât $AS = SA$ şi $SA < I$. Atunci f este un operator $(I-SA)^{-1} S$-Picard.*

Definiţia 4.2.2. Fie (X,d) un spaţiu b-metric generalizat şi fie $f : X \to X$ un operator univoc. Atunci, f se numeşte o (A,B,C)-*contracţie univocă* dacă şi numai dacă există matricele $A,B,C \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$, unde A este convergentă la zero cu $A+B+C < I$ astfel încât

$$d[f(x), f(y)] \leq Ad(x,y) + Bd[x, f(x)] + Cd[y, f(y)], \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

Teorema 4.2.3. *Fie (X,d) un spaţiu b-metric generalizat complet cu $S \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$, $S \geq I$ şi fie $f : X \to X$ o (A,B,C)-contracţie univocă astfel încât $KS = SK$, unde $K := (I-C)^{-1}(A+B)$ şi $SA < I$. Atunci f este un operator $(I-SA)^{-1} S(I-B)$-Picard.*

Este uşor de observat (vezi S. Czerwik [30]) că dacă (X,d) este un spaţiu b-metric generalizat, atunci funcţionala $H : P_{b,cl}(X) \times P_{b,cl}(X) \to \mathbb{R}^m_+$ este o b-metrică generalizată în $P_{b,cl}(X)$. De asemenea, dacă (X,d) este un spaţiu b-metric generalizat complet, avem că $(P_{b,cl}(X), H)$ este un spaţiu b-metric generalizat complet.

În continuare prezentăm câteva teoreme de punct fix şi punct fix strict în spaţii b-metrice generalizate pentru operatori multivoci.

Teorema 4.2.4. *Fie (X,d) un spaţiu b-metric generalizat complet cu $S \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$, $S \geq I$ şi fie $F : X \to P_{cl}(X)$ o A-contracţie multivocă în sens Nadler astfel încât $AS = SA$ şi $SA < I$. Atunci F este un operator multivoc $(I-SA)^{-1} S$-slab Picard.*

Definiţia 4.2.5. Fie $Y \subset X$ o mulţime nevidă şi fie $F : Y \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc. Atunci, F se numeşte o (A, B, C)-*contracţie multivocă* dacă şi numai dacă există matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$, unde A este convergentă la zero cu $A + B + C < I$ astfel încât

$$H[F(x), F(y)] \leq Ad(x, y) + BD[x, F(x)] + CD[y, F(y)], \text{ pentru orice } x, y \in Y.$$

Teorema 4.2.6. *Fie (X, d) un spaţiu b-metric generalizat complet cu $S \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$, $S \geq I$ şi fie $F : X \to P_{cl}(X)$ o (A, B, C)-contracţie multivocă astfel încât $KS = SK$, unde $K := (I - qC)^{-1}(A + B)$, $q \in \left(1, \frac{1}{\rho(A+B+C)}\right)$ şi $SA < I$. Atunci F este un operator multivoc $(I - SA)^{-1} S (I - B)$-slab Picard.*

Avem două rezultate adiţionale pentru mulţimea punctelor strict fixe ale lui F. Primul în termenii funcţionalei H, iar al doilea în termenii funcţionalei δ.

Teorema 4.2.7. *Dacă ipotezele Teoremei 4.2.6 au loc şi* $\mathrm{SFix}(F)$ *este nevidă, atunci:*

$$\mathrm{Fix}(F) = \mathrm{SFix}(F) = \{x^*\}.$$

Teorema 4.2.8. *Fie (X, d) un spaţiu b-metric generalizat complet cu $S \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$, $S \geq I$ şi fie $F : X \to P_b(X)$ astfel încât $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$, unde A este o matrice convergentă la zero cu $A + B + C < I$, $KS = SK$, unde $K := (I - C)^{-1}(A + B)$, $SA < I$ şi*

$$\delta[F(x), F(y)] \leq Ad(x, y) + B\delta[x, F(x)] + C\delta[y, F(y)], \text{ pentru orice } x, y \in Y.$$

Atunci $\mathrm{SFix}(F) = \{x^*\}$.

Observaţia 4.2.9. Dacă alegem $B = C = 0$ în Teorema 4.2.8 implică că $\delta[F(x), F(x)] = 0$, pentru orice $x \in X$ ceea ce înseamnă că F este un operator univoc. Astfel, Teorema 4.2.8 nu este trivială dacă $B + C > 0$.

4.3 Spaţiu E-b-metric

În această secţiune introducem noţiunea de spaţiu E-b-metric şi un concept relevant de strict pozitivitate într-un spaţiu Riesz. De asemenea, prezentăm câteva rezultate ajutătoare pentru demonstraţiile teoremelor de punct fix din secţiunea următoare care au la bază conceptul de strict pozitivitate.

Definiţia 4.3.1. Fie X o mulţime nevidă şi fie $s \geq 1$ un număr real. O funcţională $d : X \times X \to E_+$ se numeşte *E-b-metrică* dacă şi numai dacă pentru orice $x, y, z \in X$ sunt satisfăcute următoarele condiţii:

1. $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$.

Perechea (X, d, E) se numeşte *spaţiu E-b-metric.*

Reamintim din C.D. Aliprantis, K.C. Border [5] că un element $e \in E_+$ într-un spaţiu Riesz E se numeşte *element unitate ordonat* dacă, pentru orice $x \in E$, există $\lambda \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $|x| \leq \lambda e$. Însă, această noţiune de strict pozitivitate este insuficientă pentru scopul nostru. Astfel, introducem următorul concept.

Definiţia 4.3.2. Spunem că $e \in E_+$ este un *element unitate strict ordonat*, notat cu $e \gg 0$ dacă, pentru orice submulţime $H \subset E_+$ cu $\inf H = 0$, există $h_1, \ldots, h_n \in H$ astfel încât $\min(h_1, \ldots, h_n) \leq e$.

De exemplu, dacă $E = \mathbb{R}^2$, $E_+ = \mathbb{R}^2_+$, atunci $e = (e_1, e_2) \gg 0$ dacă şi numai dacă $e_1 > 0$ şi $e_2 > 0$. Astfel, în acest caz, putem observa că elementele unitate ordonate sunt la fel de bine elemente unitate strict ordonate.

Propoziţia 4.3.3. *Dacă E este un spaţiu Riesz Archimedean şi e este un element unitate strict ordonat, atunci e este un element unitate ordonat.*

Implicaţia reciprocă din propoziţia anterioară nu este adevărată în general ceea ce arătăm în propoziţia următoare.

Propoziţia 4.3.4. *În spaţiul $E = \ell^\infty$ cu conul pozitiv*

$$E_+ = \{(e_1, e_2, \ldots) : e_i \geq 0\} \subset \ell^\infty,$$

$e \in E_+$ este un element unitate ordonat dacă şi numai dacă $\inf\{e_1, e_2, \ldots\} > 0$. *Însă, nu există un element unitate strict ordonat în E.*

Notăm cu E_{++} mulţimea elementelor unitate strict ordonate în E.

Propoziţia 4.3.5. *E_{++} este un con convex.*

În rezultatele următoare vom caracteriza convergenţa şirurilor în termenii elementelor unitate strict ordonate.

Lema 4.3.6. *Fie E un spaţiu Riesz complet ordonat şi presupunem că E_{++} este nevidă. Atunci $h_n \xrightarrow{o} 0$ dacă şi numai dacă, pentru orice $e \in E_{++}$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$|h_n| \leq e, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Corolarul 4.3.7. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric complet cu E complet ordonat şi presupunem că E_{++} este nevidă. Atunci $x_n \xrightarrow{d,E} x^*$ dacă şi numai dacă, pentru orice $e \in E_{++}$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$d(x_n, x^*) \leq e, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Lema 4.3.8. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric complet cu E complet ordonat şi presupunem că E_{++} este nevidă. Atunci $x_n \xrightarrow{d,E} x^*$ este un şir E-Cauchy dacă şi numai dacă, pentru orice $e \in E_{++}$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$d(x_n, x_m) \leq e, \text{ pentru orice } m > n \geq n_0.$$

4.4 Teoreme de punct fix în spaţii E-b-metrice

În această secţiune prezentăm câteva teoreme de punct fix în spaţii E-b-metrice folosind tehnica operatorilor Picard şi slab Picard. Studiul punctului fix se realizează folosind conul elementelor unitate strict ordonate E_{++}, concept introdus în secţiunea anterioară, vezi de asemenea Zs. Páles, I.-R. Petre [57] şi I.-R. Petre [61]. Mai mult, următoarele teoreme nu necesită impunerea condiţiei $\varphi(t) < t$ asupra operatorului de o-comparaţie φ.

Definiţia 4.4.1. Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric şi fie $f : X \to X$ un operator Picard vectorial. Atunci spunem că operatorul f se numeşte *ψ-Picard vectorial* dacă şi numai dacă $\psi : E_+ \to E_+$ este un operator cu proprietatea că: pentru orice şir descrescător (t_n) din E_+ cu $t_n \downarrow t$, avem că $\psi(t_n) \downarrow \psi(t)$, pentru orice $t \in E_+$ cu $t > 0$ şi $d(x, x^*) \leq \psi[d(x, f(x))]$, pentru orice $x \in X$.

Teorema 4.4.2. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-b-metric complet cu $s \geq 1$ şi cu E complet ordonat. Presupunem că E_{++} este nevidă şi fie $f : X \to X$ o*

φ-contracţie neliniară univocă. Dacă pentru orice şir descrescător (t_n) din E_+ cu $t_n \downarrow t$, avem că $\varphi(t_n) \downarrow \varphi(t)$ şi operatorul $\psi : E_+ \to E_+$ definit de $\psi(t) = \frac{1}{s}t - \varphi(t)$ este inversabil, atunci f este un operator ψ^{-1}-Picard vectorial.

Definiţia 4.4.3. Fie (X, d, E) un spaţiu E-metric şi fie $F : X \to P(X)$ un operator multivoc slab Picard vectorial. Atunci spunem că operatorul F se numeşte *ψ-slab Picard vectorial* dacă şi numai dacă $\psi : E_+ \to E_+$ este un operator cu proprietatea că: pentru orice şir descrescător (t_n) din E_+ cu $t_n \downarrow t$, avem că $\psi(t_n) \downarrow \psi(t)$, pentru orice $t \in E_+$ cu $t > 0$ şi există o selecţie f^∞ pentru F^∞ astfel încât $d[x, f^\infty(x, y)] \leq \psi[d(x, y)]$, pentru orice $(x, y) \in \mathrm{Graph}(F)$.

Teorema 4.4.4. *Fie (X, d, E) un spaţiu E-b-metric complet cu $s \geq 1$ şi cu E complet ordonat. Presupunem că E_{++} este nevidă şi fie $F : X \to P_{cl}(X)$ o φ-contracţie neliniară multivocă. Presupunem că: pentru orice şir descrescător (t_n) din E_+ cu $t_n \downarrow t$, avem că $\varphi(t_n) \downarrow \varphi(t)$ şi $\varphi(st) \leq s\varphi(t)$, pentru orice $t \in E_+$ cu $t > 0$. Dacă operatorul $\psi : E_+ \to E_+$ definit de $\psi(t) = \frac{1}{s}t - s^2\varphi(t)$ este inversabil, atunci F este un operator ψ^{-1}-slab Picard vectorial.*

Bibliografie

[1] M. Abbas, A.R. Khan, S.Z. Németh, *Complemetarity problems via common fixed points in vector lattices*, Fixed Point Theory Appl., Vol. 2012:60, 2012, 26 pagini.

[2] R.P. Agarwal, *Contraction and approximate contraction with an application to multi-point boundary value problems*, J. Comput. Applied Math., Vol. 9, 1983, 315-325.

[3] R.P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[4] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*, Springer, Dordrecht, 2009.

[5] C.D. Aliprantis, K.C. Border, *Infinite Dimensional Analysis*, Springer, Berlin, 1999.

[6] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Springer, Dordrecht, 2006.

[7] G. Allaire, S.M. Kaber, *Numerical Linear Algebra*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 55, Springer, New York, 2008.

[8] A. Amini-Harandi, H. Emami, *A fixed point theorem for contraction type maps in partially ordered metric spaces and application to ordinary differential equations*, Nonlinear Anal., Vol. 72, 2010, 2238-2242.

[9] J.-P. Aubin, A. Celina, *Differential Inclusions*, Springer, Berlin, 1984.

[10] I.A. Bakhtin, *The contraction mapping principle in quasimetric spaces*, Funct. Anal., Unianowsk Gos. Ped. Inst., Vol. 30, 1989, 26-37.

[11] D. Barbu, G. Bocşan, *Contractive mappings in spaces with vector norm*, Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin, Vol. 15, Nr. 4, 2008, 577-587.

[12] V. Berinde, *Generalized contractions in quasimetric spaces*, Semin. Fixed Point Theory, Preprint Nr. 3, 1993, 3-9.

[13] L.M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, 1953.

[14] M. Boriceanu, A. Petruşel, I.A. Rus, *Fixed point theorems for some multivalued generalized contractions in b-metric spaces*, Int. J. Math. Stat., Vol. 6, 2010, 65-76.

[15] M. Boriceanu, *Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b-metrics*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., Vol. 3, 2009, 3-14.

[16] M. Bota, *Dynamical Aspects in the Theory of Multivalued Operators*, Cluj University Press, 2010.

[17] M. Bota, A. Molnár, Cs. Varga, *On Ekeland's Variational Principle in b-metric spaces*, Fixed Point Theory, Vol. 12, Nr. 2, 2011, 21-28.

[18] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Herman, Paris, 1974.

[19] A. Bucur, L. Guran, A. Petruşel, *Fixed points for multivalued operators on a set endowed with vector-valued metrics and applications*, Fixed Point Theory, Vol. 10, Nr. 1, 2009, 19-34.

[20] T.A. Burton, *A fixed-point theorem of Krasnoselskii*, Appl. Math. Lett., Vol. 11, 1998, 85-88.

[21] T.A. Burton, *Integral equations, implicit functions, and fixed points*, Proc. Am. Math. Soc., Vol. 124, Nr. 8, 1996, 2383-2390.

[22] T.A. Burton, *Liapunov functionals, fixed points, and stability by Krasnoselskii's theorem*, Nonlinear Stud., Vol. 9, Nr. 2, 2002, 181-190.

[23] T.A. Burton, T. Furumochi, *Krasnoselskii's fixed point theorem and stability*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Vol. 49, 2002, 445-454.

[24] S. Carl, S. Heikkila, *Fixed Point Theory in Ordered Sets and Applications*, Springer, New York, 2011.

[25] C. Çevik, I. Altun, *Vector metric spaces and some properties*, Topol. Methods Nonlinear Anal., Vol. 34, 2009, 375-382.

[26] L. Collatz, *Some applications of functional analysis to analysis, particularly to nonlinear integral equations*, Nonlinear Functional Anal. and Appl. (Proc. Advanced Sem., Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin, Madison, Wis, 1970), Academic Press, New York, 1-43.

[27] H. Covitz, S.B. Nadler Jr., *Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces*, Isr. J. Math., Vol. 8, 1970, 5-11.

[28] R. Cristescu, *Ordered Linear Spaces*, Editura Academiei, 1959 (în lb. română).

[29] R. Cristescu, *Order Structures in Normed Vector Spaces*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1983 (în lb. română).

[30] S. Czerwik, *Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces*, Atti Sem. Mat. Univ. Modena, Vol. 46, 1998, 263-276.

[31] E. De Pascale, G. Marino, P. Pietramala, *The use of the E-metric spaces in the search for fixed points*, Matematiche, Vol. 48, Nr. 2, 1993, 367-376.

[32] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, W. de Gruyter, 1992.

[33] A.-D. Filip, A. Petruşel, *Fixed point theorems on spaces endowed with vector-valued metrics*, Fixed Point Theory Appl., Vol. 2010, 2010, ID Articol 281381, 15 pagini.

[34] M. Fréchet, *Les Espaces Abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[35] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer, New York, 2003.

[36] D. Guo, V. Lakshmikantham, X. Liu, *Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1996.

[37] J. Harjani, K. Sadarangani, *Fixed point theorems for weakly contractive mappings in partially ordered sets*, Nonlinear Anal., Vol. 71, 2009, 3403-3410.

[38] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer, Berlin, 2001.

[39] L.-G. Huang, X. Zhang, *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 332, 2007, 1468-1476.

[40] J. Jachymski, J. Matkowski, T. Swiatkowski, *Nonlinear contractions on semimetric spaces*, J. Appl. Anal., Vol. 1, 1995, 125-134.

[41] L. Kantorovich, *The method of successive approximations for functional equations*, Acta. Math., Vol. 71, 1939, 63-97.

[42] T. Kawasaki, M. Toyoda, T. Watanabe, *Schauder-Tychonoff's fixed point theorem in a vector lattice*, Fixed Point Theory, Vol. 11, Nr. 1, 2010, 37-44.

[43] M. Kwapisz, *Some remarks on abstract form of iterative methods in functional equation theory*, Proc. 16 Internationales Symposium űber Funktionalgleichungen, Graz, 1978.

[44] T. Lazăr, G. Moţ, G. Petruşel, S. Szentesi, *The theory of Reich's fixed point theorem for multivalued operators*, Fixed Point Theory Appl., Vol. 2010, 2010, ID Articol 178421, 10 pagini.

[45] W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen, *Riesz Spaces*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Vol. 1, 1971.

[46] J. Matkowski, *Fixed point theorems for contractive mappings in metric spaces*, Cas. Pěst. Mat., Vol. 105, 1980, 341-344.

[47] J. Matkowski, *Integrable solutions of functional equations*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), Vol. 127, 1975, 68 pagini.

[48] I. Muntean, *Capitole speciale de analiză funcţională*, Cluj-Napoca, 1990 (în lb. română).

[49] I. Muntean, *În legătură cu o teoremă de punct fix în spaţii local convexe*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., Vol. 19, 1974, 1105-1109 (în lb. rusă).

[50] S.B. Nadler Jr., *Multi-valued contraction mappings*, Pac. J. Math., Vol. 30, 1969, 475-487.

[51] Juan J. Nieto, Rosana Rodriguez-López, *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Order, Vol. 22, 2005, 223-239.

[52] Juan J. Nieto, Rodrigo L. Pouso, Rosana Rodriguez-López, *Fixed point theorems in ordered abstract spaces*, Amer. Math. Soc., Vol. 153, Nr. 8, 2007, 2505-2517.

[53] D. O'Regan, R. Precup, *Continuation theory for contractions on spaces with two vector-valued metrics*, Appl. Anal., Vol. 82, 2003, 131-144.

[54] D. O'Regan, A. Petruşel, *Fixed point theorems for generalized contractions in ordered metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 341, Nr. 2, 2008, 1241-1252.

[55] D. O'Regan, N. Shahzad, R.P. Agarwal, *Fixed point theory for generalized contractive maps on spaces with vector-valued metrics*, Fixed Point Theory Appl., Vol. 6, Nova Sci. Publ., New York, 2007, 143-149.

[56] D. O'Regan, *Fixed-point theory for the sum of two operators*, Appl. Math. Let., Vol. 9, 1996, 1-8.

[57] Zs. Páles, **I.-R. Petre**, *Iterative fixed point theorems in E-metric spaces*, Acta Math. Hung., DOI: 10.1007/s10474-012-0274-8.

[58] A.I. Perov, *On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations*, Pviblizhen. Met. Reshen. Differ. Uvavn., Vol. 2, 1964, 115-134 (în lb. rusă).

[59] A.I. Perov, A.V. Kibenko, *On a certain general method for investigation of boundary value problems*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., Vol. 30, 1966, 249-264 (în lb. rusă).

[60] **I.-R. Petre**, *A multivalued version of Krasnoselskii's theorem in generalized Banach spaces*, An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa, Ser. Mat. (trimisă spre publicare).

[61] **I.-R. Petre**, *Fixed point theorems in E-b-metric spaces*, Arabian J. Math. (trimisă spre publicare).

[62] **I.-R. Petre**, *Fixed point theorems in vector metric spaces for multivalued operators*, Topol. Methods Nonlinear Anal. (trimisă spre publicare).

[63] **I.-R. Petre**, *Fixed point theorems in vector metric spaces for single-valued operators*, Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity, Vol. 9, 2011, 59-80.

[64] **I.-R. Petre**, M. Bota, *Fixed point theorems on generalized b-metric spaces*, Publ. Math. Debrecen (acceptată spre publicare).

[65] **I.-R. Petre**, *Fixed points for φ-contractions in E-Banach spaces*, Fixed Point Theory, Vol. 13, Nr. 2, 2012, 623-640.

[66] **I.-R. Petre**, A. Petruşel, *Krasnoselskii's theorem in generalized Banach spaces and applications*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Nr. 85, 2012, 1-20.

[67] **I.-R. Petre**, *On the solution operator of a differential inclusion*, JP J. of Fixed Point Theory and Appl., Vol. 6, Nr. 2, 2011, 107-117.

[68] A. Petruşel, *A generalization of Krasnoselskii's fixed point theorem*, Proc. Sci. Comm. Meeting of "Aurel Vlaicu" Univ. Arad, Vol. 14A, 1996, 109-112.

[69] A. Petruşel, I.A. Rus, *Fixed point theorems in ordered L-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 134, 2006, 411-418.

[70] A. Petruşel, *Fixed points and integral inclusions*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., Vol. 35, Nr. 2, 2006, 183-188.

[71] A. Petruşel, *Integral inclusions. Fixed point approaches*, Annales Soc. Math. Pol., Ser. I, Commentat. Math. XL, 2000, 147-158.

[72] A. Petruşel, *Multivalued operators and fixed points*, Pure Math. Appl., Vol. 11, Nr. 2, 2000, 361-368.

[73] A. Petruşel, *Multivalued weakly Picard operators and applications*, Sci. Math. Jap., Vol. 59, Nr. 1, 2004, 169-202.

[74] A. Petruşel, *Operatorial Inclusions*, House of the Book of Science, Cluj-Napoca, 2002.

[75] A. Petruşel, I.A. Rus, *The theory of a metric fixed point theorem for multivalued operators*, Fixed Point Theory and its Applications, Yokohama Publ., 2010, 167-176.

[76] R. Precup, A. Viorel, *Existence results for systems of nonlinear evolution equations*, Int. J. Pure Appl. Math., Vol. 47, Nr. 2, 2008, 199-206.

[77] R. Precup, A. Viorel, *Existence results for systems of nonlinear evolution inclusions*, Fixed Point Theory, Vol. 11, Nr. 2, 2010, 337-346.

[78] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[79] R. Precup, *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, Math. Comput. Modelling, Vol. 49, Nr. 3-4, 2009, 703-708.

[80] S. Reich, *Fixed points of contractive functions*, Boll. Unione Mat. Ital., Vol. 5, Nr. 4, 1972, 26-42.

[81] S. Reich, *Kannan's fixed point theorem*, Boll. Unione Mat. Ital., Vol. 4, Nr. 4, 1971, 1-11.

[82] D. Repovš, P.V. Semenov, *Continuous Selections of Multivalued Mappings*, Kluwer, Dordrecht, 1998.

[83] Sh. Rezapour, R.H. Haghi, *Fixed point of multifunctions on cone metric spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim., Vol. 30, 2009, 825-832.

[84] B.E. Rhoades, *A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans. Am. Math. Soc., Vol. 226, 1977, 257-290.

[85] I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008.

[86] I.A. Rus, *Generalized Contractions and Applications*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001.

[87] I.A. Rus, *Principles and Applications of the Fixed Point Theory*, Dacia, Cluj-Napoca, 1979 (în lb. română).

[88] I.A. Rus, *Technique of the fixed point structures for multivalued mappings*, Math. Jap., Vol. 38, 1993, 289-296.

[89] I.A. Rus, *The theory of a metrical fixed point theorem: theoretical and applicative relevances*, Fixed Point Theory, Vol. 9, Nr. 2, 2008, 541-559.

[90] I.A. Rus, A. Petruşel, A. Sântămărian, *Data dependence of the fixed point set of multivalued weakly Picard operators*, Nonlinear Anal., Vol. 52, 2003, 1947-1959.

[91] I.A. Rus, M.-A. Şerban, *Some generalizations of a Cauchy lemma and applications*, Topics in Mathematics, Computer Science and Philosophy, A Festschrift for Wolfgang W. Breckner, 173-181.

[92] L. Rybinski, *An application of the continuous selection theorem to the study of the fixed points of multivalued mappings*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 153, 1990, 391-396.

[93] M. Turinici, *Nonlinear contractions and applications to Volterra functional equations*, An. Şt. Univ. Iaşi, S.I., Vol. 23, 1977, 43-50.

[94] R.S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Vol. 27 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer, Berlin, 2000.

[95] A. Viorel, *Contributions to the study of nonlinear evolution equations*, Teză de Doctorat, Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca, 2011.

[96] F. Voicu, *Contractive operators in partially ordered spaces*, Seminar on Diff. Eq., Vol. 3, 1989, 181-214.

[97] F. Voicu, *Fixed point theorems in spaces with vectorial metric*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Math., Vol. 36, Nr. 4, 1991, 53-56.

[98] R. Węgrzyk, *Fixed point theorems for multifunctions and their applications to functional equations*, Dissertationes Math., Vol. 201, 1982, 1-28.

[99] A.C. Zaanen, *Riesz Spaces*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Vol. 2, 1983.

[100] P.P. Zabrejko, *K-metric and K-normed linear spaces: survey*, Collect. Math., Vol. 48, Nr. 4-6, 1997, 825-859.

[101] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis, Vol. I, Fixed Point Theorems*, Springer, Berlin, 1993.

[102] M. Zuluaga, *On a fixed point theorem and application to a two-point boundary value problem*, Comment. Math. Univ. Carolinae, Vol. 27, 1986, 731-735.