UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI, CLUJ NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Liana Cioban

Contribuţii la teoria inegalităţilor variaţionale, problemelor de echilibru şi de optimizare prin intermediul dualităţii

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat: Prof. Univ. Dr. Dorel Duca

FONDUL SOCIAL EUROPEAN
Investeşte în OAMENI

Titlul proiectului
„Studii doctorale inovative într-o societate bazată pe cunoaştere"
POSDRU/88/1.5/S/60185
Proiect cofinanţat din Fondul Social European
prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane
2007-2013

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
Departamentul Cercetare şi Management de Programe
Str. Universităţii, nr. 7-9, 400091 Cluj-Napoca
Tel. (00) 40 - 264 - 40.53.00*; int. 5329
Fax: 40 - 264 - 59.19.06
E-mail: bd.posdru2008@ubbcluj.ro

Cuprins

Introducere

Tăria şi importanţa ştiinţei s-a demonstrat încă o dată în cel de-al Doilea Război Mondial când victoria a fost a celor care au folosit ultimele descoperiri din fizică, chimie, matematică, informatică. În 1939, Leonid Kantorovich a dezvoltat ceea ce astăzi poartă denumirea de programare liniară pentru a planifica ieşirile şi intrările pentru a minimiza astfel costurile şi de a maximiza pierderile inamicului.

Mai târziu, în 1947, George B. Dantzig a publicat metoda simplex ca metodă de rezolvare a problemei de programare liniare în timp ce John von Neumann a dezvoltat teoria dualităţii ca o soluţie la această problemă, împreună cu aplicaţiile ei în teoria jocurilor. Multe concepte din teoria optimizării, cum ar fi şi dualitatea, convexitatea şi generalizările acesteia au fost inspirate de idei provenind din programarea liniară care s-a extins mult datorită utilizării ei în microeconomie, inginerie, transport, planificare, producţie şi altele. În practică, de cele mai multe ori întâlnim probleme de optimizare care implică funcţii convexe care să fie minimizate, funcţii care nu sunt în mod necesar liniare. Din aceasă cauza şi datorită interesului pentru calculul variaţional, studiul mulţimilor şi funcţiilor convexe au înregistrat un interes crescut. Primele lucrări în domeniu sunt datorate matematicienilor ca Fenchel, Moreau, Brondsted, Rockafellar, lucrări care includ noţiuni din teoria funcţiilor complexe, funcţiilor conjugate, dualitate.

Condiţii necesare pentru soluţii optime ale problemei de programare liniare au fost date de Karush-Kuhn-Tucker, care admit restricţii de tip inegalitate, şi care generalizează metoda multiplicatorilor lui Lagrange care permite doar restricţii de tip egalitate. Pentru ca un punct de minim să satisfacă condiţiile Karush-Kuhn-Tucker, acesta trebuie să satisfacă câteva condiţii de regularitate.

Studiul problemei de optimizare clasice este bine prezentată în literatura de specialitate. În cele mai multe lucrări, soluţia optimă a acestei probleme poate fi obţinută prin ataşarea unei probleme duale. Dualitatea este o metodă intens studiată, amintim aici dualitatea Lagrange şi Fenchel. Problemele de optimizare sunt folosite ca mijloc în rezolvarea altor clase de probleme cum ar fi inegalităţile variaţionale şi problemele de echilibru.

Scopul principal al prezentei lucrări este de a studia diferite inegalităţi variaţionale, probleme de echilibru şi probleme de optimizare şi de a caracteriza soluţiile acestor probleme prin intermediul dualităţii.

Aceasă teză este structurată în patru capitole, care sunt prezentate pe scurt subliniind cele mai importante rezultate.

În **Capitolul 1**, Secţiunea 1.1, sunt prezentrate câteva noţiuni şi rezultate din analiza funcţională şi analiza convexă. Apoi sunt prezentate în Secţiunea 1.2 câteva condiţii de regularitate pentru problema de optimizare scalară generală şi duala ei, probleme care sunt exprimate cu ajutorul unei funcţii de perturbare. Condiţiile de regularitate sunt folosite pentru a asigura dualitatea tare între cele două probleme. De asemenea, sunt prezentate condiţiile de regularitate pentru câteva cazuri particulare.

Capitolul 2 se ocupă cu inegalităţile variaţionale. În prima secţiune a acestui capitol introducem o ε-inegalitate variaţională şi duala ei, formulate cu ajutorul unei funcţii de perturbare şi a unui opertator multivoc. Rezultatele principale ale subsecţiunii 2.1 asigură că dacă funcţia implicată este proprie, convexă şi dacă o condiţie de regularitate este îndeplinită, dacă ε-inegalitatea variaţională admite soluţie atunci şi duala ei admite o suluţie. Invers, când ε-inegalitatea variaţională duală admite soluţie şi funcţia implicată este proprie, convexă şi inferior semicontinuă, atunci şi primala ei admite o soluţie. Subliniem faptul că nu avem nevoie de condiţie de regularitate pentru validitatea acestui rezultat. Mai departe, dăm rezultate similare pentru câteva cazuri particulare când particularizăm funcţia de perturbare. Printre aceste cazuri particulare redescoperim schema duală cu ε-inegalităţi variaţionale considerată de Kum, Kim şi Lee dată în spaţii finit dimiensionale. Am îmbunătăţit rezultatele date în [94] aratând că teoremele referitoare la implicaţia ε-inegalitatea variaţională primală admite soluţie atunci şi ε-inegalitatea variaţională duală admite soluţie şi vice versa, au loc în condiţii mai slabe. Un exemplu este dat pentru a justifica folosirea codiţiilor mai slabe. Schema de dualitate propusă de Mosco în [113] cu privire la inegalităţi variaţionale poate fi văzută ca un caz particular a rezultatelor noastre principale. La finalul acestei secţiuni, dăm rezultate de dualitate pentru perechea duală de ε-inegalităţi variaţionale în care este implicat cazul în care avem suma de două funcţii din care una este compusă cu o altă funcţie.

În Secţiunea 2.2 introducem inegalitatea variaţională generală de tip Stampacchia. În Subsecţiunea 2.2.1 reformulăm această inegalitate variaţională într-o problemă de optimizare care depinde de o variabilă fixată. Ataşăm acestei probleme de optimizare o duală şi definim o funcţie cu ajutorul valorii optime a dualei. Condiţiile de regularitate care asigură dualitatea tare pentru această pereche primală-duală de probleme de optimizare joacă un rol important în demonstrarea faptului că această funcţie introdusă este funcţie gap pentru inegalitatea variaţională generală. Convexitatea acestei funcţii este asigurată în anumite ipoteze de convexitate şi monotonie. În Subsecţiunea 2.2.2 sunt prezentate câteva funcţii gap pentru cazuri particulare ale inegalităţii variaţionale generală şi redescoperim câteva funcţii gap introduse în literatura de specialitate de Altangerel, Boţ şi Wanka. Sunt date rezultate imbunătăţite ale celor date de Altangerel et al. folosind condiţii de regularitate mai slabe. Un exemplu este dat ca să justifice folosirea unor condiţii mai slabe. In Subsecţiunea 2.2.3 introducem o funcţie dual gap pentru inegalitatea variaţională generală prin intermediul unei inegalităţi variaţionale generală de tip Minty. Arătăm că în condiţii de monotonie şi continuitate, inegalitatea variaţională generală de tip Stampacchia şi inegalitatea variaţională generală de tip Minty sunt echivalente. Construim o funcţie dual gap reformulând inegalitatea variaţională generală de tip Minty într-o problemă de optimizare, ataşându-i o duală şi definind o funcţie cu ajutorul valorii optime a problemei duale. Se demonstrează în condiţii de monotonie că cele două funcţii pot fi comparate. Rezultatul principal al acestei secţiuni dă condiţii care să asigure că funcţia introdusă cu ajutorul inegalităţii variaţionale de tip Minty este funcţie gap pentru inegalitatea variaţională generală de tip Stampacchia. Facem remarca că această funcţie este o funcţie convexă. În ultima parte a acestei secţiuni particularizăm funcţia dual gap pentru câteva cazuri particulare redescoperind astfel funcţii dual gap introduse în [3, Secţiunea

4]. De asemenea, este prezentat un exemplu care arată că în general funcţia gap şi funcţia dual gap nu coincid, chiar dacă toate condiţiile teoremelor ce asigură că acestea sunt funcţii gap sunt îndeplinite.

În ultima secţiune a acestui capitol, Secţiunea 2.3, dăm condiţii de optim bazate pe calculul subdiferenţial pentru inegalitatea variaţională generală şi pentru câteva cazuri particulare. În Subsecţiunea 2.3.2 prezentăm caracterizări secvenţiale pentru soluţiile inegalităţii variaţionale generale dar şi pentru cazurile ei particulare. Acest tip de caracterizare este aplicabil în absenţa unei condiţii de regularitate. Folosim ca şi instrument de lucru condiţiile secvenţiale date de Boţ, Csetnek şi Wanka în [28, 29] pentru probleme de optimizare. Câteva exemple vin să justifice utilitatea unor astfel de caracterizări secvenţiale.

Capitolul 3 este dedicat problemelor de echilibru. Acest capitol este împărţit în trei secţiuni. Secţiunea 3.1 generalizează problema de echilibru considerată de Bigi, Castellani şi Kassay [19]. Am considerat o problemă de echilibru cu suma de două funcţii în care una este compusă cu un operator liniar. În subsecţiunea 3.1.1 dăm condiţii de regularitate pentru o problemă de optimizare cu sumă de trei funcţii, una fiind compusă cu un operator liniar, condiţie necesară în secţiunea următoare. În Subsecţiunea 3.1.2 ataşăm problemei de equilibru, o problemă de optimizare. Dăm rezultate care stabilesc conexiuni între problema de echilibru şi problema de optimizare ataşată. Folosind caracterizări cu subdiferenţiale, ataşăm problemei de echilibru, o problemă duală. Sunt date apoi rezultate de dualitate pentru această pereche duală de probleme de echilibru. Apoi ataşăm problemei de echilibru o funcţie Lagrange şi arătăm că soluţiile problemei de echilibru şi ale dualei ei sunt strict legate de punctele şa ale funcţiei Lagrange. Considerăm apoi şi duala Fenchel a problemei de optimizare ataşate problemei de echilibru. Această problemă de optimizare duală nu este forma de optimizare a problemei de echilibru duale, dar dăm condiţii astfel încât să asigurăm relaţii între ele. De asemenea, dăm rezultate care garantează că toate soluţiile problemei de echilibru şi ale dualei ei pot fi găsite folosind problema de optimizare ataşată, respectiv, duala ei. Acest ultim rezultat este dat în ipoteze care folosesc condiţia de regularitate prezentată în subsecţiunea 3.1.1. În ultima parte a acestei secţiuni prezentăm câteva cazuri particulare ale rezultatelor noastre, reuşind să redescoperim rezultate introduse în literatură de către Bigi et al. [19] pentru probleme de echilibru şi de asemenea pentru inegalităţile variaţionale considerate în Subsecţiunea 2.1.2 dacă considerăm cazuri particulare ale acestora.

Secţiunea 3.2 se referă la funcţii gap introduse pentru problema generală de echilibru de tip Stampacchia, formulată cu ajutorul unei funcţii de perturbare. Utilizând aceeaşi tehnică prezentată în Secţiunea 2.2 pentru inegalităţi variaţionale, construim funcţii gap pentru problema de echilibru generală. În ipoteze de convexitate şi dacă o condiţie de regularitate este îndeplinită asigurăm că funcţia introdusă este funcţie gap pentru problema de echilibru generală. Particularizând funcţia de perturbare redescoperim câteva funcţii gap introduse pentru probleme de echilibru în literatură de către Boţ şi Capătă în [26] şi de către Altangerel et al. în [2]. Menţionăm de asemenea că prin particularizarea la inegalităţi variaţionale, redescoperim cadrul şi rezultatele prezentate în Secţiunea 2.2.

În Subsecţiunea 3.2.3 introducem o funcţie dual gap pentru problema de echilibru generală utilizând aşa-numita problemă de echilibru de tip Minty care e strâns legată de problema de echilibru generală de tip Stampacchia. Pentru a formula funcţia dual gap pentru problema de echilibru generală în sens Stampacchia sunt utilizate noţiuni generalizate de monotonie şi convexitate. Utilizând ipoteze precum monotonie, convexitate, hemicontinuitate stabilim incluziuni între mulţimea soluţiilor problemei de echilibru de tip Stampacchia şi mulţimea soluţiilor problemei de echilibru de tip Minty. Rezultatul principal al acestei subsecţiuni oferă condiţii pentru a asigura că funcţia introdusă cu ajutorul problemei de echilibru de tip Minty este funcţie gap pentru problema de echilibru de tip Stampacchia. De asemenea, câteva cazuri particulare sunt considerate şi printre ele putem redescoperi situaţii referitoare la inegalităţi variaţionale din subsecţiunea 2.2.3 şi funcţia dual gap considerată de Altangerel et al. în [2].

În ultima secţiunea a acestui capitol, Secţiunea 3.3, dăm caracterizări pentru soluţiile problemei de echilibru generale cu ajutorul calculului subdiferenţial. Asemenea caracterizări sunt date şi pentru câteva cazuri particulare. Particularizarea acestor rezultate la inegalităţi variaţionale ne aduc înapoi rezultatele prezentate în Subsecţiunea 2.3.1. Ultima parte a acestei secţiuni cuprinde caracterizări fără condiţii de regularitate pentru problemele de echilibru prezentate. Arătăm că rezultatele similare obţinute pentru inegalităţi variaţionale pot fi regăsite din caracterizările secvenţiale pentru problemele de echilibru dacă particularizăm bifuncţia din formularea problemei de echilibru la un operator.

Capitolul 4 este dedicat unei probleme de optimizare căreia îi ataşăm o problemă de optimizare aproximantă. Pentru a demonstra echivalenţe între cele două probleme am folosit o proprietate de convexitate generalizată şi anume invexitate de ordin doi. Câteva exemple sunt oferite pentru a ilustra noţiunile teoretice. Se stabilesc legături între mulţimea soluţiilor admisibile ale problemei de optimizare originală şi între mulţimea soluţiilor admisibile ale problemei de optimizare aproximantă. Apoi, se studiază conexiuni între soluţiile optime ale problemei de optimizare aproximante şi soluţiile optime ale problemei de optimizare originale prin intermediul punctelor şa ale funcţiilor Lagrange ale celor două probleme. În ultima secţiune a acestui capitol ataşăm problemei de optimizare originale o problemă duală. Câteva rezultate asigură, în ipoteze potrivite, că dacă problema de optimizare duală admite soluţie atunci şi problema de optimizare aproximantă admite soluţie şi vice versa.

Contribuţiile originale ale autoarei sunt următoarele:

În Capitolul 2: Teoremele: 2.1.3, 2.1.5, 2.1.9, 2.1.12, 2.1.17, 2.1.19, 2.1.27, 2.1.28, 2.1.41, 2.1.45, 2.2.1, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.7, 2.2.9, 2.2.10, 2.2.14, 2.2.16, 2.2.20, 2.2.22, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4, 2.3.5, 2.3.6, 2.3.7, 2.3.8, 2.3.9, 2.3.10, 2.3.11, 2.3.12, 2.3.17, 2.3.18; Propoziţiile: 2.2.3, 2.2.19; Observaţiile: 2.1.4, 2.1.6, 2.1.7, 2.1.8, 2.1.10, 2.1.11, 2.1.13, 2.1.14, 2.1.15, 2.1.16, 2.1.18, 2.1.20, 2.1.21, 2.1.22, 2.1.23, 2.1.24, 2.1.25, 2.1.26, 2.1.29, 2.1.30, 2.1.31, 2.1.32, 2.1.33, 2.1.34, 2.1.35, 2.1.37, 2.1.39, 2.1.40, 2.1.42, 2.1.43, 2.1.44, 2.1.46, 2.1.47, 2.1.47, 2.1.48, 2.1.49, 2.2.2, 2.2.6, 2.2.8, 2.2.11, 2.2.12, 2.2.15, 2.2.17, 2.2.21, 2.2.24, 2.2.25; 2.3.3; Exemplele: 2.1.36, 2.2.13, 2.2.23, 2.3.13, 2.3.14, 2.3.15, 2.3.16;

În Capitolul 3: Teoremele: 3.1.1, 3.1.3, 3.1.5, 3.1.7, 3.1.9, 3.1.10, 3.1.11, 3.1.14, 3.1.15, 3.1.16, 3.2.1, 3.2.13, 3.3.1, 3.3.3, 3.3.5, 3.3.8, 3.3.11, 3.3.13, 3.3.15, 3.3.16, 3.3.18; Corolariile: 3.1.12, 3.1.13, 3.2.11; Propoziţiile: 3.2.8, 3.2.9, 3.2.12; Observaţiile: 3.1.2, 3.1.4, 3.1.6, 3.1.8, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.10, 3.2.14, 3.2.15, 3.2.16; 3.3.2, 3.3.4, 3.3.6, 3.3.6, 3.3.7, 3.3.9, 3.3.10, 3.3.12, 3.3.14, 3.3.17; Exemplul 3.3.19.

În Capitolul 4: Teoremele: 4.2.3, 4.2.4, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.5, 4.3.6, 4.3.7, 4.4.3, 4.4.4; Definiţiile: 4.1.3, 4.1.8; Exemplele: 4.1.6, 4.1.7, 4.2.1, 4.2.2, 4.3.4; Observaţiile: 4.1.5, 4.1.9, 4.1.11.

Aceste rezultate sunt incluse în următoarele lucrări: L. Cioban [45], L. Cioban [46], L.

Cioban [47], L. Cioban [48], L. Cioban [49], L. Cioban şi E.R. Csetnek [50], L. Cioban şi E.R. Csetnek [51], L. Cioban şi D. Duca [52].

Cuvinte cheie: analiză convexă, funcţii conjugate, subdiferenţială (convexă), soluţie optimă, teoria perturbării, dualitate Fenchel şi Lagrange, ε-inegalitate variaţională, ε-subdiferenţială, ε-condiţii de optim, inegalitate variaţională, problemă de echilibru, funcţie gap, funcţie dual gap, condiţii secvenţiale, funcţie Lagrange, punct şa, problemă de optimizare, $(0,2)-\eta-$ problemă de optimizare aproximantă.

Mulţumiri

Încep prin a-mi exprima recunoştinţa faţă de îndrumătorul meu de doctorat, Prof. Univ. Dr. Dorel Duca pentru că m-a sfătuit cu răbdare şi m-a încurajat pe tot parcursul programului de doctorat.

Nu am cuvinte suficiente pentru a-mi exprima mulţumirile şi recunoştinţa Dr. Robert Ernö Csetnek pentru ajutorul său nepreţuit acordat în timpul celor opt luni de stagiu de cercetare la departamentul de cercetare al Facultăţii de Matematică de la Universitatea de Tehnologie din Chemnitz, care m-a introdus în domenii noi de cercetare, m-a ghidat şi a lucrat împreună cu mine în obţinerea unor rezultate semnificative. Doresc să mulţumesc Prof. Dr. Gert Wanka pentru că mi-a asigurat un mediu excelent de cercetare în timpul stagiului de cercetare de la Chemnitz University of Technology, şi vreau să mulţumesc, de asemenea, Dr. Radu Ioan Boţ şi Dr. Sorin-Mihai Grad pentru amabilitatea cu care m-au primit în grupul lor de cercetare dar şi pentru prietenia lor.

A fost un mare privilegiu să-mi petrec ultimii trei ani în Departamentul de Analiză şi Optimizare al Facultăţii de Matematică şi Informatică. Membrii săi îmi vor rămâne mereu dragi. Mulţumiri speciale sunt aduse pentru comisia de îndrumare formată din Prof. Univ. Dr. Liana Lupşa, Prof. Univ. Dr. Kassay Gábor, Conf. Univ. Dr. Tiberiu Trif, pentru sprijinul lor şi sugestiile utile.

Sunt, de asemenea, recunoscătoare pentru sprijinul financiar dat de Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca şi de Institutul de Studii Doctorale intermediul Proiectului POS-DRU/88/1.5/S/60185.

Nu în ultimul rând, doresc să mulţumesc familiei mele. Dragostea mamei mele mi-a oferit inspiraţie şi forţă. Nu aş putea să mulţumesc niciodata îndeajuns tatalui meu pentru sprijinul necondiţionat. Le datorez totul şi aş vrea sa le pot arăta doar cât de mult îi iubesc şi îi apreciez. Nepreţuita familie a fratelui meu mi-a oferit sprijin spiritual, caldură şi bucurie prin zâmbetele şi inocenţa nepoţilor mei iubiţi David şi Tania.

În cele din urma, aş dori sa dedic aceasta lucrare parinţilor mei care m-au încurajat şi au crezut în mine în tot acest timp.

Capitolul 1

Preliminarii

În acest capitol sunt date noţiuni şi rezultate folosite în aceasă teză.

1.1 Noţiuni şi rezultate

În toată teza voi folosi noţiunile şi notaţiile clasice ale analizei funcţionale şi ale analizei convexe ([14, 22, 23, 24, 34, 57, 58, 59, 79, 80, 81, 119, 122, 133]).

1.2 Condiţii de regularitate pentru Probleme de Optimizare

Este bine cunoscut faptul că valoarea optimă a problemei de optimizare duală nu este mai mare decât valoarea optimă a problemei de optimizare primale. În literatura de specialitate acest lucru poartă denumirea de dualitate slabă. Condiţiile de regularitate sunt folosite pentru a asigura dualitatea tare, adică acea situaţie în care valoarea optimă a problemei de optimizare primală este egală cu valoarea optimă a problemei de optimizare duală si aceasta din urmă are o soluţie optimă.

1.2.1 Problema de optimizare scalară generală

Scopul acestei secţiuni este să prezinte câteva condiţii de regularitate pentru problema scalară de optimizare generală şi pentru duala ei, care sunt exprimate cu ajutorul unei funcţii de perturbare.

1.2.2 Cazuri particulare

Această secţiune prezintă condiţii de regularitate pentru câteva cazuri particulare de probleme de optimizare utilizate pe parcursul tezei. Cazurile prezentate aici sunt cazul cu compunere, cazul $f+g\circ A$, cazul $f+\delta_{-K}\circ A$, cazul $g\circ A$, cazul $f+g$, cazul $f+\delta_K$, cazul cu restricţii geometrice şi cu conuri.

Capitolul 2

Inegalităţi variaţionale

O inegalitate care implică o funcţională şi a cărei soluţii trebuie găsite pentru toate valorile unei variabile care aparţine de obicei unei mulţimi convexe, este numită inegalitate variaţională. Teoria matematică despre inegalităţi variaţionale a fost dezvoltată începând cu problema lui Signorini, care constă în găsirea echilibrului unui corp elastic şi neomogen care stă pe o suprafaţă rigidă şi care se supune numai forţei de masă proprii. [63]. Funcţionala implicată în problema lui Signorini a fost obţinută dintr-o problemă variaţională. Aplicabilitatea acestei teorii a fost extinsă şi include probleme din fizică, optimizare, economie, finanţe, teoria jocurilor, etc.

2.1 Dualitate pentru ε-inegalităţi variaţionale prin intermediul calculului subdiferenţial

Cercetarea care face subiectul acestei secţiuni este motivată de următoarea schemă de dualitate referitoare la ε-inegalităţi variaţionale propusă de Kum, Kim şi Lee în [94]. Pentru $\varepsilon \geq 0$ se consideră următoarea ε-inegalitate:

$$\begin{array}{rl} (\mathrm{VI})_\varepsilon^{f,A} & \text{Găsiţi } \overline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ pentru care să existe } v \in F(\overline{x}), \\ & \text{a.î. } \langle v, x - \overline{x} \rangle \geq f(A\overline{x}) - f(Ax) - \varepsilon \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ (\mathrm{DVI})_\varepsilon^{f,A} & \text{Găsiţi } \overline{y} \in \mathbb{R}^m \text{ pentru care să existe } w \in A(F^{-1}(-A^*\overline{y})), \\ & \text{a.î. } \langle w, y - \overline{y} \rangle \leq f^*(y) - f^*(\overline{y}) + \varepsilon \ \forall y \in \mathbb{R}^m, \end{array}$$

unde $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ este un operator multivoc, $f : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este un operator liniar care îndeplineşte $A^{-1}(\operatorname{dom} f) \neq \emptyset$, f^* este conjugata Fenchel a funcţiei f şi A^* este operatorul adjunct al lui A.

În cele ce urmează extindem schema de dualitate a lui Kum, Kim şi Lee în spaţiul infinit dimensional. În locul funcţiei $f \circ A$ în formularea problemei $(\mathrm{VI})_\varepsilon^{f,A}$, considerăm o funcţie generală de perturbare. Ataşăm acestei ε-inegalităţi variaţionale o duală, în care se foloseşte conjugata funcţiei de perturbare. Utilizând puternica tehnică a calculului subdiferenţial ([30, 32, 78, 133]) arătăm că dacă funcţia implicată este proprie, convexă şi dacă o condiţie de regularitate este îndeplinită, dacă ε-inegalitatea variaţională primală admite soluţie atunci şi duala ei admite soluţie. Invers, când ε-inegalitatea variaţională duală admite soluţie şi funcţia implicată este proprie, convexă şi inferior semicontinuă, atunci şi primala admite soluţie. Observăm că pentru această implicaţie nu avem nevoie de condiţie de regularitate. Considerăm câteva cazuri particulare ale rezultatelor principale. Arătăm că schema duală propusă de Kum, Kim şi Lee rezultă ca şi caz particular a rezultateor principale. De asemenea menţionăm că schema de dualitate propusă de Mosco în [113] referitoare la inegalităţi variaţionale, poate fi văzută ca un alt caz particular al rezultatelor noastre.

2.1.1 O abordare cu funcţii de perturbare a ε-inegalităţilor variaţionale

În această secţiune introducem o ε-inegalitate variaţională generală şi duala acesteia. Arătăm că dacă anumite condiţii sunt îndeplinite, primala are soluţie dacă şi numai dacă duala are soluţie. Tehnicile se bazează pe calcul ε-subdiferenţial, în contextul în care condiţiile de regularitate joacă un rol foarte important.

Considerăm acum ε-inegalităţile variaţionale generale anunţate. Fie $F : X \rightrightarrows X^*$ o funcţie multivocă. Pentru $\varepsilon \geq 0$ considerăm următoarea ε-inegalitate variaţională:

$$\begin{aligned} (\mathrm{VI})_\varepsilon^\Phi \quad & \text{Găsiţi } \overline{x} \in X \text{ pentru care să existe } v \in F(\overline{x}), \\ & \text{a.î. } \langle v, x - \overline{x} \rangle \geq \Phi(\overline{x}, 0) - \Phi(x, 0) - \varepsilon \ \forall x \in X. \end{aligned} \tag{2.1}$$

ε-inegalităţii variaţionale generale $(\mathrm{VI})_\varepsilon^\Phi$ îi ataşăm următoarea ε-inegalitate variaţională duală:

$$\begin{aligned} (\mathrm{DVI})_\varepsilon^\Phi \quad & \text{Găsiţi } (\overline{x}^*, \overline{y}^*) \in X^* \times Y^* \text{ pentru care să existe } w \in F^{-1}(-\overline{x}^*), \\ & \text{a.î. } \langle w, x^* - \overline{x}^* \rangle \leq \Phi^*(x^*, y^*) - \Phi^*(\overline{x}^*, \overline{y}^*) + \varepsilon \ \forall (x^*, y^*) \in X^* \times Y^*. \end{aligned} \tag{2.2}$$

În cele ce urmează arătăm că, dacă o condiţie de regularitate este îndeplinită şi funcţia Φ este proprie, convexă şi inferior semicontinuă, atunci $(\mathrm{VI})_\varepsilon^\Phi$ admite soluţie dacă şi numai dacă $(\mathrm{DVI})_\varepsilon^\Phi$ admite soluţie.

Teorema 2.1.3 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [50])*Fie* $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *o funcţie proprie şi convexă astfel încât* $0 \in \mathrm{pr}_Y(\mathrm{dom}\,\Phi)$ *şi presupunem că una din condiţiile de regularitate* (RC_i^Φ), $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, *este îndeplinită. Presupunem că pentru un* $\varepsilon \geq 0$ *fixat,* $\overline{x} \in X$ *este o soluţie pentru* $(VI)_\varepsilon^\Phi$ *şi* $v \in F(\overline{x})$ *satisface (2.1). Atunci şi* $(DVI)_\varepsilon^\Phi$ *admite soluţie şi o soluţie a ei poate fi construită astfel: luăm orice* $\overline{y}^*$ *astfel încât* $(-v, \overline{y}^*) \in \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}, 0)$. *Atunci* $(-v, \overline{y}^*)$ *este o soluţie pentru* $(DVI)_\varepsilon^\Phi$ *şi* $\overline{x} \in F^{-1}(v)$ *satisface (2.2).*

Teorema 2.1.5 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [50])*Fie* $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă astfel încât* $0 \in \mathrm{pr}_Y(\mathrm{dom}\,\Phi)$. *Presupunem că pentru* $\varepsilon \geq 0$ *fixat,* $(\overline{x}^*, \overline{y}^*) \in X^* \times Y^*$ *este o soluţie pentru* $(DVI)_\varepsilon^\Phi$ *şi* $w \in F^{-1}(-\overline{x}^*)$ *satisface (2.2). Atunci şi* $(VI)_\varepsilon^\Phi$ *admite soluţie şi* w *este o soluţie pentru* $(VI)_\varepsilon^\Phi$ *şi* $-\overline{x}^* \in F(w)$ *satisface (2.1).*

Observaţia 2.1.6 *Subliniem faptul că pentru validitatea acestei teoreme nu avem nevoie de condiţie de regularitate.*

Observaţia 2.1.7 *Este evident, din formularea* $(VI)_\varepsilon^\Phi$ *că* $\overline{x}$ *trebuie să aparţină* $\operatorname{dom}\Phi(\cdot,0)$. *Mai mult, elementul* $(\overline{x}^*,\overline{y}^*)$ *din* $(DVI)_\varepsilon^\Phi$ *aparţine* $\operatorname{dom}\Phi^*$ *şi* $(w,0)\in\operatorname{dom}\Phi^{**}$.

2.1.2 Cazuri particulare

În această subsecţiune considerăm câteva cazuri particulare a rezultatelor generale obţinute mai sus. Printre altele, redescoperim şi îmbunătăţim schema de dualitate referitoare la inegalităţi variaţionale considerată de Kum, Kim & Lee [94] şi Mosco [113]. În continuare X şi Y sunt spaţii reale local convexe separate.

Cazul $f+g\circ A$

Fie $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$, $g:Y\to\overline{\mathbb{R}}$ funcţii proprii şi convexe şi $A:X\to Y$ un operator liniar continuu, îndeplinind $\operatorname{dom}f\cap A^{-1}(\operatorname{dom}g)\neq\emptyset$.

Pentru $\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2\geq 0$ considerăm următoarele ε-inegalităţi variaţionale:

$$\begin{aligned}(\mathrm{VI})_\varepsilon^{f,g,A}\quad & \text{Găsiţi } \overline{x}\in X \text{ pentru care să existe } v\in F(\overline{x}),\\ & \text{a.î. } \langle v,x-\overline{x}\rangle\geq(f+g\circ A)(\overline{x})-(f+g\circ A)(x)-\varepsilon\ \forall x\in X\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{DVI})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}^{f,g,A}\quad & \text{Găsiţi } (\overline{x}^*,\overline{y}^*)\in X^*\times Y^* \text{ pentru care să existe}\\ & (w_1,w_2)\in\big(F^{-1}(-\overline{x}^*-A^*\overline{y}^*)\times A(F^{-1}(-\overline{x}^*-A^*\overline{y}^*))\big)\cap\Delta_X^A,\\ & \text{a.î. } \begin{cases}\langle w_1,x^*-\overline{x}^*\rangle\leq f^*(x^*)-f^*(\overline{x}^*)+\varepsilon_1\ \forall x^*\in X^*,\\ \langle w_2,y^*-\overline{y}^*\rangle\leq g^*(y^*)-g^*(\overline{y}^*)+\varepsilon_2\ \forall y^*\in Y^*,\end{cases}\end{aligned}\tag{2.4}$$

unde $\Delta_X^A=\{(x,Ax):x\in X\}$.

Următoarele două teoreme rezumă rezultatele de dualitate obţinute pentru $(\mathrm{VI})_\varepsilon^{f,g,A}$ şi $(\mathrm{DVI})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}^{f,g,A}$.

Teorema 2.1.9 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [50])*Fie* $g:Y\to\overline{\mathbb{R}}$ *şi* $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii şi convexe şi* $A:X\to Y$ *un operator liniar continuu îndeplinind* $\operatorname{dom}f\cap A^{-1}(\operatorname{dom}g)\neq\emptyset$. *Presupunem că una din condiţiile de regularitate* $(RC_i^{f,g,A})$, $i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$ *este îndeplinită. Presupunem că pentru* $\varepsilon\geq 0$ *fixat,* $\overline{x}\in X$ *este o soluţie pentru* $(VI)_\varepsilon^{f,g,A}$ *şi* $v\in F(\overline{x})$ *satisface (2.3). Atunci există* $\varepsilon_1,\varepsilon_2\geq 0$, $\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$, *astfel încât* $(DVI)_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}^{f,g,A}$ *admite soluţie şi o soluţie poate fi construită după cum urmează: luăm orice* $\alpha_1\in\partial_{\varepsilon_1}f(\overline{x})$ *şi* $\alpha_2\in\partial_{\varepsilon_2}g(A\overline{x})$ *cu* $v=-\alpha_1-A^*\alpha_2$. *Atunci* $(\overline{x}^*,\overline{y}^*):=(\alpha_1,\alpha_2)\in X^*\times Y^*$ *este o soluţie pentru* $(DVI)_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}^{f,g,A}$ *şi* $(w_1,w_2):=(\overline{x},A\overline{x})\in\big(F^{-1}(-\alpha_1-A^*\alpha_2)\times A(F^{-1}(-\alpha_1-A^*\alpha_2))\big)\cap\Delta_X^A$ *satisface (2.4).*

Observaţia 2.1.10 *Abordarea construcţiei soluţiei pentru* $(DVI)_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}^{f,g,A}$ *este bine definită.*

Observaţia 2.1.11 *În locul problemei* $(DVI)_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}^{f,g,A}$ *se poate considera următoarea* ε*-inegalitate variaţională:*

$$\begin{array}{ll} (\overline{DVI})_{\varepsilon}^{f,g,A} & \textit{Găsiţi } (\overline{x}^*,\overline{y}^*) \in X^* \times Y^* \textit{ pentru care să existe } (w_1,w_2) \in \\ & \big(F^{-1}(-\overline{x}^* - A^*\overline{y}^*) \times A(F^{-1}(-\overline{x}^* - A^*\overline{y}^*))\big) \cap \Delta_X^A \textit{ a.î. } \forall (x^*,y^*) \in X^* \times Y^* \\ & \langle w_1, x^* - \overline{x}^*\rangle + \langle w_2, y^* - \overline{y}^*\rangle \leq f^*(x^*) + g^*(y^*) - f^*(\overline{x}^*) - g^*(\overline{y}^*) + \varepsilon. \end{array} \quad (2.5)$$

Se poate arăta că dacă pentru un $\varepsilon \geq 0$ dat $(VI)_{\varepsilon}^{f,g,A}$ admite soluţie, atunci şi $(\overline{DVI})_{\varepsilon}^{f,g,A}$ admite soluţie şi o soluţie a ei poate fi construită ca în Teorema 2.1.9.

Teorema 2.1.12 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [50])*Fie $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ două funcţii proprii, convexe şi inferior semicontinue şi $A : X \to Y$ un operator liniar continuu îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g) \neq \emptyset$. *Presupunem că pentru $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ fixaţi, $(\overline{x}^*,\overline{y}^*) \in X^* \times Y^*$ este o soluţie pentru $(DVI)_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}^{f,g,A}$ şi $(w_1,w_2) \in \big(F^{-1}(-\overline{x}^* - A^*\overline{y}^*) \times A(F^{-1}(-\overline{x}^* - A^*\overline{y}^*))\big) \cap \Delta_X^A$ satisface (2.4). Atunci, pentru $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $(VI)_{\varepsilon}^{f,g,A}$ admite soluţie, w_1 este o soluţie pentru $(VI)_{\varepsilon}^{f,g,A}$ şi $-\overline{x}^* - A^*\overline{y}^* \in F(w_1)$ satisface (2.3).*

Cazul $f + \delta_{-K} \circ A$

Să particularizăm rezultatele de dualitate pentru $(\mathrm{VI})_{\varepsilon}^{f,g,A}$ şi $(\mathrm{DVI})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}^{f,g,A}$ la cazul $g = \delta_{-K}$, unde $K \subseteq Y$ este un con convex închis şi nevid. Ca şi în subsecţiunea anterioară, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcţie proprie şi convexă şi $A : X \to Y$ este un operator liniar continuu, îndeplinind $\operatorname{dom} f \cap A^{-1}(-K) \neq \emptyset$.

Pentru $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ considerăm următoarele ε-inegalităţi variaţionale:

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{VI})_{\varepsilon}^{f,K,A} & \text{Găsiţi } \overline{x} \in A^{-1}(-K), \text{ pentru care să existe } v \in F(\overline{x}), \\ & \text{a.î. } \langle v, x - \overline{x}\rangle \geq f(\overline{x}) - f(x) - \varepsilon \ \forall x \in A^{-1}(-K). \end{array} \quad (2.6)$$

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{DVI})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}^{f,K,A} & \text{Găsiţi } (\overline{x}^*,\overline{y}^*) \in X^* \times K^* \text{ pentru care să existe} \\ & (w_1,w_2) \in \big(F^{-1}(-\overline{x}^* - A^*\overline{y}^*) \times A(F^{-1}(-\overline{x}^* - A^*\overline{y}^*))\big) \cap \Delta_X^A \\ & \text{a.î. } \left\{ \begin{array}{l} \langle w_1, x^* - \overline{x}^*\rangle \leq f^*(x^*) - f^*(\overline{x}^*) + \varepsilon_1 \ \forall x^* \in X^* \\ \langle w_2, y^* - \overline{y}^*\rangle \leq \varepsilon_2 \ \forall y^* \in K^*. \end{array} \right. \end{array} \quad (2.7)$$

Următoarele rezultate sunt cazuri particulare ale Teoremei 2.1.9 şi Teoremei 2.1.12.

Teorema 2.1.17 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [50])*Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă, $K \subseteq Y$ un con convex şi închis şi $A : X \to Y$ un operator liniar continuu îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1}(-K) \neq \emptyset$ *şi presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{f,K,A})$, $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ este îndeplinită. Presupunem că pentru $\varepsilon \geq 0$ fixat, $\overline{x} \in A^{-1}(-K)$ este o soluţie pentru $(VI)_{\varepsilon}^{f,K,A}$ şi $v \in F(\overline{x})$ satisface (2.6). Atunci există $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$, astfel încât $(DVI)_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}^{f,K,A}$ admite soluţie şi o soluţie a ei poate fi construită după cum urmează: luăm orice $\alpha_1 \in \partial_{\varepsilon_1} f(\overline{x})$ şi $\alpha_2 \in N_{-K}^{\varepsilon_2}(A\overline{x})$ cu $v = -\alpha_1 - A^*\alpha_2$. Atunci $(\alpha_1,\alpha_2) \in X^* \times K^*$ este o soluţie pentru $(DVI)_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}^{f,K,A}$ şi $(\overline{x}, A\overline{x}) \in \big(F^{-1}(-\alpha_1 - A^*\alpha_2) \times A(F^{-1}(-\alpha_1 - A^*\alpha_2))\big) \cap \Delta_X^A$ satisface (2.7).*

Teorema 2.1.19 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [50])*Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă, $K \subseteq Y$ un con convex şi închis şi $A : X \to Y$ un operator liniar continuu îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1}(-K) \neq \emptyset$. *Presupunem că pentru $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ fixaţi, $(\overline{x}^*, \overline{y}^*) \in X^* \times K^*$ este o soluţie pentru $(DVI)^{f,K,A}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ şi $(w_1, w_2) \in \big(F^{-1}(-\overline{x}^* - A^*\overline{y}^*) \times A(F^{-1}(-\overline{x}^* - A^*\overline{y}^*))\big) \cap \Delta^A_X$ satisface (2.7). Atunci, pentru $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $(VI)^{f,K,A}_\varepsilon$ admite soluţie, w_1 este o soluţie pentru $(VI)^{f,K,A}_\varepsilon$ şi $-\overline{x}^* - A^*\overline{y}^* \in F(w_1)$ satisface (2.6).*

Observaţia 2.1.23 *Să remarcăm că Teorema 2.1.17 şi Teorema 2.1.19 pot fi obţinute aplicând Teorema 2.1.3 şi Teorema 2.1.5 funcţiei de perturbare $\Phi_{f,K,A} : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$,*

$$\Phi_{f,K,A}(x, y) = \begin{cases} f(x), & \textit{dacă } Ax + y \in -K \\ +\infty, & \textit{altfel.} \end{cases}$$

Observaţia 2.1.24 *(i) Rezultatele de dualitate obţinute aici pot fi particularizate cazului $X = Y$ şi $A : X \to X$ operatorul identitate.*

(ii) O altă particularizare a rezultatelor de mai sus poate fi făcută pentru $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$.

Cazul $g \circ A$

Această subsecţiune este devotată particularizării rezultatelor de dualitate obţinute pentru $(\mathrm{VI})^{f,g,A}_\varepsilon$ şi $(\mathrm{DVI})^{f,g,A}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ la cazul $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ pentru orice $x \in X$.

Pentru $\varepsilon \geq 0$ considerăm următoarele două ε-inegalităţi variaţionale:

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{VI})^{g,A}_\varepsilon & \text{Găsiţi } \overline{x} \in X \text{ pentru care să existe } v \in F(\overline{x}), \\ & \text{a.î. } \langle v, x - \overline{x} \rangle \geq g(A\overline{x}) - g(Ax) - \varepsilon \ \forall x \in X. \end{array} \tag{2.8}$$

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{DVI})^{g,A}_\varepsilon & \text{Găsiţi } \overline{y}^* \in Y^* \text{ pentru care să existe } w \in A(F^{-1}(-A^*\overline{y}^*)), \\ & \text{a.î. } \langle w, y^* - \overline{y}^* \rangle \leq g^*(y^*) - g^*(\overline{y}^*) + \varepsilon \ \forall y^* \in Y^*. \end{array} \tag{2.9}$$

Numim $(\mathrm{DVI})^{g,A}_\varepsilon$ inegalitatea variaţională duală pentru $(\mathrm{VI})^{g,A}_\varepsilon$.

Observaţia 2.1.25 *Remarcăm că această pereche de ε-inegalităţi variaţionale au fost considerate în [94] în cadru finit dimensional, şi anume pentru $X = \mathbb{R}^n$ şi $Y = \mathbb{R}^m$, unde $m, n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.1.27 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [50])*Fie $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă, $A : X \to Y$ un operator liniar continuu îndeplinind $A^{-1}(\operatorname{dom} g) \neq \emptyset$ şi presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC^{g,A}_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ este îndeplinită. Presupunem că pentru $\varepsilon \geq 0$ fixat, $\overline{x} \in X$ este o soluţie pentru $(VI)^{g,A}_\varepsilon$ şi $v \in F(\overline{x})$ satisface (2.8). Atunci $(DVI)^{g,A}_\varepsilon$ admite soluţie şi o soluţie poate fi construită după cum urmează: luăm orice $\alpha \in \partial_\varepsilon g(A\overline{x}) \cap (A^*)^{-1}(-v)$. Atunci $\alpha \in Y^*$ este o soluţie pentru $(DVI)^{g,A}_\varepsilon$ şi $A\overline{x} \in A(F^{-1}(-A^*\alpha))$ satisface (2.9).*

Teorema 2.1.28 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [50])*Fie $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă şi $A : X \to Y$ un operator liniar continuu îndeplinind $A^{-1}(\operatorname{dom} g) \neq \emptyset$. Presupunem că pentru $\varepsilon \geq 0$ fixat, $\overline{y}^* \in Y^*$ este o soluţie pentru $(DVI)^{g,A}_\varepsilon$ şi $w \in A(F^{-1}(-A^*\overline{y}^*))$ satisface (2.9). Atunci $(VI)^{g,A}_\varepsilon$ admite soluţie şi o soluţie poate fi construită după cum urmează:*

luăm orice $\beta \in F^{-1}(-A^*\overline{y}^*) \cap A^{-1}(w)$*. Atunci* β *este o soluţie pentru* $(VI)_\varepsilon^{g,A}$ *şi* $-A^*\overline{y}^* \in F(\beta)$ *satisface (2.8).*

Observaţia 2.1.32 *Să obervăm că rezultatele de dualitate pentru* $(VI)_\varepsilon^{g,A}$ *şi* $(DVI)_\varepsilon^{g,A}$ *pot fi obţinute din Teorema 2.1.3 şi Teorema 2.1.5 luând* $\Phi_{g,A} : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $\Phi_{g,A}(x,y) = g(Ax+y)$ *pentru orice* $(x,y) \in X \times Y$.

Observaţia 2.1.35 *În Teorema 2.1.27 şi Teorema 2.1.28 am extins la cadru infinit dimensional rezultate similare date în [94] în spaţii finit dimensionale. Remarcăm că în [94] rezultatele de dualitate sunt date sub o condiţie de regularitate care se regăseşte printre cele propuse de noi. Am considerat şi alte condiţii de regularitate care se pot aplica şi în spaţii infint dimensionale. Să subliniem şi alte îmbunătăţiri aduse [94, Teorema 2.1]. Din Teorema 2.1.27 avem că [94, Teorema 2.1(i)] este adevărată chiar dacă funcţia g nu este inferior semicontinuă. Mai mult, [94, Teorema 2.1(ii)] are loc în absenţa oricărei condiţii de regularitate.*

Exemplul următor justifică folosirea condiţiilor de regularitate mai slabe.

Exemplul 2.1.36 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [50])*Fie* $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $A(x) = (x,0)$,

$$g : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}},\ g(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \textit{dacă } x \in \mathbb{R},\ y \geq 0, \\ +\infty, & \textit{altfel}, \end{cases}$$

şi $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *operator multivoc arbitrar. Se arată că pentru această funcţie, condiţia de regularitate folosită în [94, Teorema 2.1(i)] nu este îndeplinită, dar putem folosi o condiţie de regularitate de tip închidere şi putem aplica Teorema 2.1.27.*

Redescoperind inegalitatea variaţională duală introdusă de Mosco

Dacă considerăm X un spaţiu real local convex separat, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă şi $F : \operatorname{dom} F \to X^*$ un operator, $\operatorname{dom} F$ fiind domeniul lui F. Pentru $\varepsilon = 0$, $X = Y$ şi $A : X \to X$ operatorul identitate ($Ax = x$ pentru orice $x \in X$) şi dacă presupunem că F este injectiv, problemele $(\mathrm{VI})_\varepsilon^{g,A}$ şi $(\mathrm{DVI})_\varepsilon^{g,A}$ devin cele considerate de Mosco în [113] şi rezultatele date de Mosco rezultă din Teorema 2.1.27 şi Teorema 2.1.28.

2.1.3 Cazul compunerii

Fie X, Y spaţii reale, local convexe, separate, $K \subseteq Y$ un con convex închis şi nevid, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă, K-crescatoare cu $g(\infty_K) = +\infty$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă şi $h : X \to Y^\bullet$ o funcţie proprie, K-convexă astfel încât $h(\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} h) \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$.

Pentru $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq 0$ considerăm următoarele ε-inegalităţi variaţionale:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{VI})_{\varepsilon}^{CC} && \text{Găsiţi } \overline{x} \in X \text{ pentru care să existe } v \in F(\overline{x}),\\
& && \text{a.î. } \langle v, x - \overline{x}\rangle \geq (f + g \circ h)(\overline{x}) - (f + g \circ h)(x) - \varepsilon \ \forall x \in X. \qquad (2.10)\\
&(\mathrm{DVI})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}^{CC} && \text{Găsiţi } (v_1, v_2, \lambda) \in X^* \times X^* \times K^* \text{ pentru care să existe } (w_1, w_2, w_3) \in\\
& && \big(F^{-1}(-v_1 - v_2) \times F^{-1}(-v_1 - v_2) \times h(F^{-1}(-v_1 - v_2))\big) \cap \Delta_X^h,\\
& && \text{a.î. } \begin{cases} \langle w_1, x^* - v_1\rangle \leq f^*(x^*) - f^*(v_1) + \varepsilon_1 \ \forall x^* \in X^* \\ \langle w_2, \widetilde{x}^* - v_2\rangle \leq (\lambda h)^*(\widetilde{x}^*) - (\lambda h)^*(v_2) + \varepsilon_2 \ \forall \widetilde{x}^* \in X^* \\ \langle w_3, y^* - \lambda\rangle \leq g^*(y^*) - g^*(\lambda) + \varepsilon_3 \ \forall y^* \in Y^* \end{cases} \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

unde $\Delta_X^h = \{(x, x, h(x)) : x \in \operatorname{dom} h\}$.

În continuare enunţăm rezultatele de dualitate pentru $(\mathrm{VI})_{\varepsilon}^{CC}$ şi $(\mathrm{DVI})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}^{CC}$.

Teorema 2.1.41 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [50])*Fie $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă şi K-crescătoare, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă, $h : X \to Y^\bullet$ o funcţie proprie şi K-convexă astfel încât $h(\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} h) \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$ şi presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{CC_2})$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ este îndeplinită. Presupunem că pentru $\varepsilon \geq 0$ fixat, $\overline{x} \in X$ este o soluţie pentru $(VI)_{\varepsilon}^{CC}$ şi $v \in F(\overline{x})$ satisface (2.10). Atunci există $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq 0$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon$, astfel încât $(DVI)_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}^{CC}$ admite soluţie şi o soluţie poate fi construită astfel: luăm orice $v_1 \in \partial_{\varepsilon_1} f(\overline{x})$, $\lambda \in K^* \cap \partial_{\varepsilon_3} g(h(\overline{x}))$ şi $v_2 \in \partial_{\varepsilon_2}(\lambda h)(\overline{x})$ cu $v = -v_1 - v_2$. Atunci $(v_1, v_2, \lambda) \in X^* \times X^* \times K^*$ este o soluţie pentru $(DVI)_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}^{CC}$ şi $(w_1, w_2, w_3) := (\overline{x}, \overline{x}, h(\overline{x})) \in \big(F^{-1}(-v_1 - v_2) \times F^{-1}(-v_1 - v_2) \times h(F^{-1}(-v_1 - v_2))\big) \cap \Delta_X^h$ satisface (2.11).*

Teorema 2.1.45 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [50])*Fie $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă, K-crescătoare şi inferior semicontinuă, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă şi $h : X \to Y^\bullet$ o funcţie proprie, K-convexă şi star K-inferior semicontinuă astfel încât $h(\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} h) \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$. Presupunem că pentru $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq 0$ fixaţi, $(v_1, v_2, \lambda) \in X^* \times X^* \times K^*$ este o soluţie pentru $(DVI)_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}^{CC}$ şi $(w_1, w_2, w_3) \in \big(F^{-1}(-v_1 - v_2) \times F^{-1}(-v_1 - v_2) \times h(F^{-1}(-v_1 - v_2))\big) \cap \Delta_X^h$ satisface (2.11). Atunci, pentru $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ $(VI)_{\varepsilon}^{CC}$ admite soluţie, w_1 este o soluţie pentru $(VI)_{\varepsilon}^{CC}$ şi $v = -v_1 - v_2 \in F(w_1)$ satisface (2.10).*

2.2 Funcţii gap pentru inegalităţi variaţionale cu ajutorul dualităţii conjugate

În [3] autorii au considerat următoarea inegalitate variaţională mixtă care constă în găsirea unui element $x \in K$ astfel încât

$$(MVI) \quad F(x)^T(y - x) + f(y) - f(x) \geq 0 \ \forall y \in K,$$

unde $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcţie proprie şi convexă, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o multifuncţie. Autorii au asociat problemei (MVI) o problemă de optimizare convexă. Folosind dualitatea Fenchel şi o condiţie de regularitate au construit o funcţie gap pentru (MVI) (vezi [3]).

Scopul acestei secţiuni este să introducem funcţii gap pentru o inegalitate variaţională mai generală. Extindem (MVI) la spaţii infinit dimensionale şi în locul funcţiei f în formularea problemei (MVI) considerăm o funcţie de perturabare generală (vezi [25, 31, 57, 133]). Vom folosi tehnicile din [1, 2, 3]: vom reformula inegalitatea variaţională generală într-o problemă de optimizare care depinde de o variabilă fixată. Ataşăm problemei de optimizare o duală iar funcţia gap va fi formulată cu ajutorul valorii optime a problemei duale. Condiţiile de regularitate care garantezaă dualitatea tare între perechea primală-duală de probleme de optimizare joacă un rol important în demonstrarea faptului că aceste funcţii sunt într-adevăr funcţii gap pentru inegalitatea variaţională. Folosim condiţii de regularitate mai slabe decât cele utilizate în [3], şi prin exemple vom justifica folosirea lor. Particularizând funcţia de perturbare vom redescoperi câteva funcţii gap introduse în literatură.

2.2.1 O funcţie gap pentru inegalitatea variaţională generală

Considerăm inegalitatea variaţională generalizată (de tip Stampacchia) care constă în găsirea unui element $\overline{x} \in X$ astfel încât

$$(VI)^{\Phi} \qquad \langle F(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle + \Phi(x,0) - \Phi(\overline{x},0) \geq 0 \ \forall x \in X,$$

unde X şi Y sunt spaţii reale local convexe separate, $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcţie proprie îndeplinind $0 \in \mathrm{pr}_Y(\mathrm{dom}\,\Phi)$ şi $F : X \to X^*$ un operator dat. Menţionăm că defapt căutăm un element $\overline{x} \in \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot,0)$ şi este de ajuns ca să cerem ca inegalitatea $(VI)^{\Phi}$ să aibă loc pentru orice $x \in \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot,0)$.

O abordare în rezolvarea problemei $(VI)^{\Phi}$ este prin formularea unei funcţii gap pentru problema $(VI)^{\Phi}$.

O funcţie $\gamma : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte funcţie gap pentru problema $(VI)^{\Phi}$ dacă satisface proprietăţile:

(i) $\gamma(x) \geq 0 \ \forall x \in X$;

(ii) $\gamma(x) = 0$ dacă şi numai dacă x este o soluţie a problemei $(VI)^{\Phi}$.

Fie $\overline{x} \in \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot,0)$ fixat. Problemei $(VI)^{\Phi}$ îi putem asocia următoarea problemă de optimizare

$$(P^{\Phi},\overline{x}) \quad \inf_{x\in X}\{\langle F(\overline{x}), x\rangle + \Phi(x,0)\} - \langle F(\overline{x}),\overline{x}\rangle - \Phi(\overline{x},0).$$

Este evident faptul că $\overline{x}$ este o soluţie a inegalităţii variaţionale $(VI)^{\Phi}$ dacă şi numai dacă $v(P^{\Phi},\overline{x}) = 0$.

Problema duală pentru $(P^{\Phi},\overline{x})$ este (vezi [31, page 110] sau [133, page 117])

$$(D^{\Phi},\overline{x}) \quad \sup_{y^*\in Y^*}\{-\Phi^*(-F(\overline{x}),y^*)\} - \langle F(\overline{x}),\overline{x}\rangle - \Phi(\overline{x},0).$$

Urmând ideea din [3], introducem funcţia $\gamma^{\Phi} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definită pentru orice $\overline{x} \in \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot,0)$ de

$$\gamma^{\Phi}(\overline{x}) := -v(D^{\Phi},\overline{x}) = \inf_{y^*\in Y^*}\{\Phi^*(-F(\overline{x}),y^*)\} + \langle F(\overline{x}),\overline{x}\rangle + \Phi(\overline{x},0)$$

şi $\gamma^{\Phi}(\overline{x}) = +\infty$ pentru $\overline{x} \notin \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot,0)$.

Arătăm că în condiţii potrivite γ^{Φ} devine funcţie gap pentru $(VI)^{\Phi}$.

Teorema 2.2.1 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie X şi Y spaţii reale local convexe separate, $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă astfel încât $0 \in \mathrm{pr}_Y(\mathrm{dom}\,\Phi)$ şi presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{\Phi}), i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ este îndeplinită. Atunci γ^{Φ} este funcţie gap pentru problema $(VI)^{\Phi}$.*

Observaţia 2.2.2 *Menţionăm că nu avem nevoie de existenţa soluţiei optime a problemei duale $(D^{\Phi},\overline{x})$, demontraţia teoremei utilizează doar egalitatea $v(P^{\Phi},\overline{x}) = v(D^{\Phi},\overline{x})$, care în literatură poartă denumirea de "zero-duality gap". Aceasta înseamă că în locul condiţiilor de regularitate folosite, se pot utiliza condiţii de regularitate mai slabe, ca de exemplu în [30, 84] şi referinţele lor.*

Propoziţia 2.2.3 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *(Convexitatea funcţiei γ^{Φ}) Presupunem că $F : X \to X^*$ este un operator afin şi monoton şi că funcţia $\Phi(\cdot, 0)$ este convexă. Atunci γ^{Φ} este o funcţie convexă.*

2.2.2 Cazuri particulare

În această subsecţiune considerăm câteva cazuri particulare a rezultatului nostru general obţinut mai sus şi arătăm că putem redescoperi câteva funcţii gap introduse în literatură.

Primul caz de compunere

Fie $\Phi^{CC_1} : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţia de perturbare definită prin $\Phi^{CC_1}(x,y) = f(x) + g(h(x)+y)$ pentru orice $(x,y) \in X \times Y$, unde X şi Y sunt spaţii reale local convexe separate, $K \subseteq Y$ un con nevid, $g : Y^{\bullet} \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcţie proprie cu $g(\infty_K) = +\infty$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $h : X \to Y^{\bullet}$ sunt funcţii propri astfel încât $h(\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h) \cap \mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$.

Inegalitatea variaţională $(VI)^{\Phi^{CC_1}}$ devine: găsiţi un element $\overline{x} \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h \cap h^{-1}(\mathrm{dom}\, g)$ astfel încât

$$(VI)^{CC} \quad \langle F(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle + f(x) + g(h(x)) - f(\overline{x}) - g(h(\overline{x})) \geq 0 \ \forall x \in X.$$

Funcţia $\gamma^{\Phi^{CC_1}}$ devine pentru $\overline{x} \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h \cap h^{-1}(\mathrm{dom}\, g)$

$$\gamma^{CC_1}(\overline{x}) = \inf_{y^* \in K^*} \{g^*(y^*) + (f + y^*h)^*(-F(\overline{x}))\} + \langle F(\overline{x}), \overline{x}\rangle + f(\overline{x}) + g(h(\overline{x}))$$

şi $\gamma^{CC_1}(\overline{x}) = +\infty$ pentru $\overline{x} \notin \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h \cap h^{-1}(\mathrm{dom}\, g)$.

Teorema 2.2.4 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie X şi Y spaţii reale local convexe separate, $K \subseteq Y$ un con nevid, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă, K-crescătoare cu $g(\infty_K) = +\infty$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă şi $h : X \to Y^{\bullet}$ o funcţie proprie, K-convexă astfel încât $h(\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h) \cap \mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$ şi presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{CC_1}), i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ este îndeplinită. Atunci γ^{CC_1} este funcţie gap pentru problema $(VI)^{CC}$.*

Al doilea caz de compunere

Fie $\Phi^{CC_2} : X \times X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţia de perturbare definită prin $\Phi^{CC_2}(x,z,y) = f(x+z) + g(h(x)+y)$ pentru orice $(x,z,y) \in X \times X \times Y$, unde X şi Y sunt spaţii reale local convexe separate,

$K \subseteq Y$ este un con nevid, $g : Y^\bullet \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcţie proprie cu $g(\infty_K) = +\infty$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este proprie şi $h : X \to Y^\bullet$ este o funcţie proprie astfel încât $h(\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} h) \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$.

Inegalitatea variaţională $(VI)^{\Phi^{CC_2}}$ este $(VI)^{CC}$: găsiţi un element $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} h \cap h^{-1}(\operatorname{dom} g)$ astfel încât

$$(VI)^{CC} \quad \langle F(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle + f(x) + g(h(x)) - f(\overline{x}) - g(h(\overline{x})) \geq 0 \ \forall x \in X.$$

Funcţia $\gamma^{\Phi^{CC_2}}$ devine pentru $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} h \cap h^{-1}(\operatorname{dom} g)$

$$\gamma^{CC_2}(\overline{x}) = \inf_{z^* \in X^*, y^* \in K^*} \{g^*(y^*) + f^*(z^*) + (y^*h)^*(-F(\overline{x}) - z^*)\} + \langle F(\overline{x}), \overline{x}\rangle + f(\overline{x}) + (g \circ h)(\overline{x})$$

şi $\gamma^{CC_2}(\overline{x}) = +\infty$ pentru $\overline{x} \notin \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} h \cap h^{-1}(\operatorname{dom} g)$.

Teorema 2.2.5 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie X şi Y spaţii reale local convexe separate, $K \subseteq Y$ un con convex nevid, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă, K-crescătoare cu $g(\infty_K) = +\infty$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă şi $h : X \to Y^\bullet$ o funcţie proprie, K-convexă astfel încât $h(\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} h) \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$ şi presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{CC_2}), i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ este îndeplinită. Atunci γ^{CC_2} este funcţie gap pentru problema $(VI)^{CC}$.*

Cazul $f + g \circ A$

Particularizăm primul caz de compunere la situaţia $K = \{0\}$ şi $h : X \to Y$, $h(x) = Ax$ pentru orice $x \in X$, unde A este un operator continuu liniar. Problema $(VI)^{CC}$ constă în găsirea unui element $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g)$ astfel încât

$$(VI)^{f,g,A} \quad \langle F(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle + f(x) + g(Ax) - f(\overline{x}) - g(A\overline{x}) \geq 0 \ \forall x \in X.$$

Funcţia γ^{CC_1} devine pentru $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g)$

$$\gamma^{f,g,A}(\overline{x}) = \inf_{y^* \in Y^*} \{g^*(y^*) + f^*(-F(\overline{x}) - A^*y^*)\} + \langle F(\overline{x}), \overline{x}\rangle + f(\overline{x}) + g(A\overline{x})$$

şi $\gamma^{f,g,A}(\overline{x}) = +\infty$ pentru $\overline{x} \notin \operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g)$.

Teorema 2.2.7 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie X şi Y spaţii reale local convexe separate, $A : X \to Y$ un operator liniar continuu, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă îndeplinind $\operatorname{dom} g \cap A^{-1}(\operatorname{dom} f) \neq \emptyset$ şi presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{f,g,A}), i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ este îndeplinită. Atunci $\gamma^{f,g,A}$ este funcţie gap pentru problema $(VI)^{f,g,A}$.*

Cazul $f + g$

Acesta este un caz particular al Secţiunii 2.2.2 când luăm $X = Y$ şi $A = \mathrm{id}_X$. În acest caz, inegalitatea variaţională se reduce la a găsi un element $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ astfel încât

$$(VI)^{f,g} \quad \langle F(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle + f(x) + g(x) - f(\overline{x}) - g(\overline{x}) \geq 0 \ \forall x \in X.$$

Funcţia $\gamma^{f,g,A}$ devine pentru $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$

$$\gamma^{f,g}(\overline{x}) = \inf_{y^* \in X^*}\{f^*(-F(\overline{x}) - y^*) + g^*(y^*)\} + \langle F(\overline{x}), \overline{x}\rangle + f(\overline{x}) + g(\overline{x})$$

şi $\gamma^{f,g}(\overline{x}) = +\infty$ pentru $\overline{x} \notin \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$.

Teorema 2.2.9 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie X spaţiu real local convex separat, $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţii proprii şi convexe îndeplinind $\operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset$ şi presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{f,g}), i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ este îndeplinită. Atunci $\gamma^{f,g}$ este funcţie gap pentru problema $(VI)^{f,g}$.*

Cazul $f + \delta_K$

În continuare particularizăm rezultatele din Secţiunea 2.2.2 la cazul $g = \delta_K$, unde $K \subseteq X$ este o mulţime nevidă. În acest caz, inegalitatea variaţională $(VI)^{f,g}$ devine: găsiţi un element $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap K$ astfel încât

$$(VI)^{f,K} \quad \langle F(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle + f(x) - f(\overline{x}) \geq 0 \ \forall x \in K.$$

Funcţia $\gamma^{f,g}$ devine pentru $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap K$

$$\gamma^{f,K}(\overline{x}) = \inf_{y^* \in X^*}\{f^*(y^* - F(\overline{x})) + \sigma_K^*(-y^*)\} + \langle F(\overline{x}), \overline{x}\rangle + f(\overline{x}) + \delta_K(\overline{x})$$

şi $\gamma^{f,K}(\overline{x}) = +\infty$ pentru $\overline{x} \notin \operatorname{dom} f \cap K$.

Teorema 2.2.10 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie X spaţiu real local convex separat, $K \subseteq X$ o mulţime convexă nevidă, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă îndeplinind $\operatorname{dom} f \cap K \neq \emptyset$ şi presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{f,K}), i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ este îndeplinită. Atunci $\gamma^{f,K}$ este funcţie gap pentru problema $(VI)^{f,K}$.*

Observaţia 2.2.11 *Obervăm că în cazul în care considerăm $X = \mathbb{R}^n$, redescoperim funcţia introdusă în [3].*

Observaţia 2.2.12 *În cazul în care considerăm $f \equiv 0$, γ_F^{MVI} devine funcţia gap Auslender. [12] (vezi de asemenea [3]).*

Exemplul 2.2.13 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie $X = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definită pentru $x \in \mathbb{R}$ de*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{dacă } x \geq 0 \\ +\infty, & \text{altfel,} \end{cases}$$

$K = (-\infty, 0]$ şi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Demonstrăm că în acest caz Teorema 2.2.10 poate fi aplicată, în timp ce [3, Teorema 3.1] nu poate fi aplicată deoarece $(RC_7^{f,K})$ nu este îndeplinită, justificând astfel folosirea condiţiei de regularitate de tip închidere.

Cazul cu restricţii geometrice şi cu conuri

Mai departe vom enunţa rezultate care particularizează rezultatele din Secţiunea 2.2.1 când se consideră funcţia de perturbare $\Phi^{C_L} : X \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$\Phi^{C_L}(x,z) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in S, g(x) \in z - C, \\ +\infty, & \text{altfel,} \end{cases}$$

unde X şi Z sunt spaţii reale local convexe separate, Z spaţiu parţial ordonat de un con nevid $C \subseteq Z$, $S \subseteq X$ este o mulţime nevidă, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcţie proprie şi $g : X \to Z^\bullet$ este o funcţie proprie îndeplinind $\operatorname{dom} f \cap S \cap g^{-1}(-C) \neq \emptyset$.

Inegalitatea variaţională $(VI)^{\Phi^{C_L}}$ devine: găsiţi un element $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}$ astfel încât

$$(VI)^C \qquad \langle F(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle + f(x) - f(\overline{x}) \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{A},$$

unde $\mathcal{A} = S \cap g^{-1}(C)$.

Funcţia $\gamma^{\Phi^{C_L}}$ devine pentru $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}$

$$\gamma^{C_L}(\overline{x}) = \inf_{z^* \in C^*} \{(f + (z^*g))^*_S(-F(\overline{x}))\} + \langle F(\overline{x}), \overline{x}\rangle + f(\overline{x}) + \delta_{\mathcal{A}}(\overline{x})$$

şi $\gamma^{C_L}(\overline{x}) = +\infty$ pentru $\overline{x} \notin \operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}$.

Teorema 2.2.14 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie X şi Z spaţii reale local convexe separate, Z paţial ordonat de conul convex $C \subseteq Z$, $S \subseteq X$ o mulţime convexă nevidă, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă şi $g : X \to Z^\bullet$ o funcţie proprie C-convexă îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap S \cap g^{-1}(-C) \neq \emptyset$ *şi presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{C_L}), i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ este îndeplinită. Atunci γ^{C_L} este funcţie gap pentru problema $(VI)^C$.*

Observaţia 2.2.15 *În cazul în care considerăm $X = S = \mathbb{R}^n$, $Z = \mathbb{R}^m$, $C = \mathbb{R}^m_+$ şi $g(x) = (g_1(x), ..., g_m(x))^T$, unde $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., m\}$, obţinem funcţia gap introdusă în [3, Secţiunea 3]. Mai mult, în cazul cînd $f \equiv 0$, obţinem funcţia gap Giannessi [67] (vezi şi [3]).*

Dacă considerăm o altă funcţie de perturbare adică $\Phi^{C_{FL}} : X \times X \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$\Phi^{C_{FL}}(x,y,z) = \begin{cases} f(x+y), & \text{dacă } x \in S, g(x) \in z - C, \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Funcţia $\gamma^{\Phi^{C_{FL}}}$ devine pentru $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}$

$$\gamma^{C_{FL}}(\overline{x}) = \inf_{z^* \in C^*, y^* \in X^*} \{f^*(y^*) + (z^*g)^*_S(-F(\overline{x}) - y^*)\} + \langle F(\overline{x}), \overline{x}\rangle + f(\overline{x}) + \delta_{\mathcal{A}}(\overline{x})$$

şi $\gamma^{C_{FL}}(\overline{x}) = +\infty$ pentru $\overline{x} \notin \operatorname{dom} f \cap \mathcal{A}$.

Teorema 2.2.16 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie X şi Z spaţii reale local convexe separate, Z parţial ordonat de conul convex $C \subseteq Z$, $S \subseteq X$ este o mulţime convexă nevidă, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă şi $g : X \to Z^\bullet$ o funcţie proprie, C-convex îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap S \cap g^{-1}(-C) \neq \emptyset$ *şi presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{C_{FL}}), i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ este îndeplinită. Atunci $\gamma^{C_{FL}}$ este funcţie gap pentru problema $(VI)^C$.*

Observaţia 2.2.17 *(a) Urmând ideea din [3] se poate demonstra relaţia:* $\gamma^{C_L} \leq \gamma^{C_{FL}}$.

(b) În ipotezele folosite în Remarca 2.2.15 obţinem funcţia gap introdusă în [3, Secţiunea 3].

2.2.3 Funcţia dual gap pentru inegalitatea variaţională generală

În cele ce urmează considerăm următoarea inegalitate variaţională de tip Minty: găsiţi un element $\overline{x} \in X$ astfel încât

$$(VI)'^{\Phi} \qquad \langle F(x), x - \overline{x}\rangle + \Phi(x,0) - \Phi(\overline{x},0) \geq 0 \ \forall x \in X.$$

Introducem acum funcţia dual gap pentru $(VI)^{\Phi}$. Pentru $\overline{x} \in \operatorname{dom}\Phi(\cdot,0)$ fixat, inegalităţii variaţionale $(VI)'^{\Phi}$ îi ataşăm problema de optimizare

$$(P'^{\Phi}, \overline{x}) \quad \inf_{x\in X}\{\langle F(x), x-\overline{x}\rangle + \Phi(x,0)\} - \Phi(\overline{x},0)$$

şi duala Fenchel:

$$(D'^{\Phi}, \overline{x}) \quad \sup_{x^*\in X^*}\left\{-\sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - \langle F(x), x-\overline{x}\rangle\} - (\Phi(\cdot,0))^*(-x^*)\right\} - \Phi(\overline{x},0).$$

Urmând ideea din [3], introducem funcţia γ'^{Φ} definită pentru orice $\overline{x} \in \operatorname{dom}\Phi(\cdot,0)$ prin

$$\gamma'^{\Phi}(\overline{x}) = \inf_{x^*\in X^*, y^*\in Y^*}\left\{\sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - \langle F(x), x-\overline{x}\rangle\} + \Phi^*(-x^*, y^*)\right\} + \Phi(\overline{x},0)$$

şi $\gamma'^{\Phi}(\overline{x}) = +\infty$ pentru $\overline{x} \notin \operatorname{dom}\Phi(\cdot,0)$.

În cele ce urmează vom compara funcţia γ^{Φ} cu funcţia nou introdusă, şi anume γ'^{Φ}.

Propoziţia 2.2.19 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Dacă $F : X \to X^*$ este un operator monoton atunci are loc*

$$\gamma'^{\Phi}(\overline{x}) \leq \gamma^{\Phi}(\overline{x}) \ \forall \overline{x} \in X.$$

Teorema 2.2.20 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie X şi Y spaţii reale local convexe separate, $F : X \to X^*$ un operator monoton şi superior hemicontinuu, $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie astfel încât $0 \in \operatorname{pr}_Y(\operatorname{dom}\Phi)$ şi presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{\Phi}), i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ este îndeplinită. Atunci γ'^{Φ} este funcţie gap pentru $(VI)^{\Phi}$.*

Observaţia 2.2.21 *Remarcăm că, în contrast cu funcţia γ^{Φ}, funcţia γ'^{Φ} este întotdeauna o funcţie convexă dacă presupunem că $\Phi(\cdot,0)$ este convexă (vezi Propoziţia 2.2.3).*

În continuare vom particulariza funcţia de perturbare Φ şi vom considera cadrul din Secţiunea 2.2.2. Pentru acest caz particular avem următoarea inegalitate variaţională: găsiţi un element $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ astfel încât

$$(VI)'^{f,g} \qquad \langle F(x), x-\overline{x}\rangle + f(x) + g(x) - f(\overline{x}) - g(\overline{x}) \geq 0 \ \forall x \in X.$$

Funcţia γ'^{Φ} devine pentru $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$

$$\gamma'^{f,g}(\overline{x}) = \inf_{x^* \in X^*, y^* \in Y^*} \left\{ \sup_{x \in X} \{ \langle x^*, x \rangle - \langle F(x), x - \overline{x} \rangle \} + f^*(-x^* - y^*) + g^*(y^*) \right\} + f(\overline{x}) + g(\overline{x})$$

şi $\gamma'^{f,g}(\overline{x}) = +\infty$ pentru $\overline{x} \notin \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$. Avem următorul rezultat.

Teorema 2.2.22 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie X spaţiu real local convex separat, $F : X \to X^*$ un operator monoton şi superior hemicontinuu, $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţii proprii şi convexe îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$ *şi presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{f,g}), i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ este îndeplinită. Atunci $\gamma'^{f,g}$ este funcţie gap pentru $(VI)^{f,g}$.*

Să observăm că am introdus două funcţii, $\gamma^{f,g}$ şi duala $\gamma'^{f,g}$, care în anumite condiţii devin funcţii gap pentru inegalitatea variaţională $(VI)^{f,g}$. Dăm în continuare un exemplu pentru a arăta că în general aceste funcţii nu coincid, chiar dacă toate ipotezele din Teorema 2.2.9 şi Teorema 2.2.22 sunt îndeplinite.

Exemplul 2.2.23 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Considerăm cazul $X = \mathbb{R}$ şi $f, g, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) = F(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Se poate arăta că $f^* = g^* = \delta_{\{1\}}$, deci, pentru orice $\overline{x} \in \mathbb{R}$ avem*

$$\begin{aligned} \gamma'^{f,g}(\overline{x}) &= \inf_{x^* \in \mathbb{R}} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ x^* x - x^2 + x\overline{x} \} + \inf_{y^* \in \mathbb{R}} \{ \delta_{\{1\}}(-x^* - y^*) + \delta_{\{1\}}(y^*) \} \right\} + 2\overline{x} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ -2x - x^2 + x\overline{x} \} + 2\overline{x} = (\overline{x} - 2)^2/4 + 2\overline{x} = (\overline{x} + 2)^2/4 \end{aligned}$$

şi

$$\gamma^{f,g}(\overline{x}) = \inf_{y^* \in \mathbb{R}} \{ \delta_{\{1\}}(-\overline{x} - y^*) + \delta_{\{1\}}(y^*) \} + \overline{x}^2 + 2\overline{x} = \delta_{\{-2\}}(\overline{x}).$$

Observaţia 2.2.24 *Considerăm $f \equiv 0$ şi $g = \delta_K$ unde K este o mulţime nevidă. În acest caz redescoperim funcţia $\gamma_F^{VI'}$ introdusă în [3].*

Observaţia 2.2.25 *Considerăm funcţia de perturbare considerată în prima parte a Secţiunii 2.2.2 în cazul când $X = S = \mathbb{R}^n$, $Z = \mathbb{R}^m$, $C = \mathbb{R}^m_+$, $f \equiv 0$ şi $g(x) = (g_1(x), ..., g_m(x))^T$, unde $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., m\}$. Redescoperim în acest caz funcţia gap introdusă în [3, Secţiunea 4].*

2.3 Condiţii de optim pentru inegalităţi variaţionale

În această secţiune vom da condiţii de optim pentru inegalităşile variaţionale, condiţii bazate pe calculul subdiferenţial. În acest context sunt implicate din nou condiţiile de regularitate. Mai departe, arătăm că putem obţine caracterizări secvenţiale care au loc în absenţa condiţiilor de regularitate, aplicând rezultatele date în [28, 29] pentru probleme de optimizare. Sunt date de asemenea şi exemple care vin să justifice utilitatea unor astfel de caracterizări.

2.3.1 Condiţii de optim pentru inegalităţi variaţionale bazate pe calcul subdiferenţial

Scopul acestei secţiuni este de a caracteriza soluţiile inegalităţilor variaţionale considerate în această lucrare, cu ajutorul subdiferenţialei convexe.

Teorema 2.3.1 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Presupunem că toate ipotezele din Teorema 2.2.1 sunt îndeplinite. Atunci $\overline{x}$ este o soluţie a inegalităţii variaţionale $(VI)^{\Phi}$ dacă şi numai dacă*

$$-F(\overline{x}) \in \mathrm{Pr}_{X^*}(\partial\Phi(\overline{x}, 0)).$$

Teorema 2.3.2 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Presupunem că toate ipotezele din Teorema 2.2.7 sunt îndeplinite. Atunci $\overline{x}$ este o soluţie a inegalităţii variaţionale $(VI)^{f,g,A}$ dacă şi numai dacă*

$$-F(\overline{x}) \in \partial f(\overline{x}) + A^*\partial g(A\overline{x}).$$

Teorema 2.3.4 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Presupunem că toate ipotezele din Teorema 2.2.9 sunt îndeplinite. Atunci $\overline{x}$ este o soluţie a inegalităţii variaţionale $(VI)^{f,g}$ dacă şi numai dacă*

$$-F(\overline{x}) \in \partial f(\overline{x}) + \partial g(\overline{x}).$$

Teorema 2.3.5 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Presupunem că toate ipotezele din Teorema 2.2.10 sunt îndeplinite. Atunci $\overline{x}$ este o soluţie a inegalităţii variaţionale $(VI)^{f,K}$ dacă şi numai dacă*

$$-F(\overline{x}) \in \partial f(\overline{x}) + N_K(\overline{x}),$$

care este echivalentă cu: există $x^* \in \partial f(\overline{x})$ astfel încât următoarea inegalitate variaţională să aibă loc:

$$\langle F(\overline{x}) + x^*, x - \overline{x}\rangle \geq 0 \ \forall x \in K.$$

2.3.2 Condiţii secvenţiale pentru inegalităţi variaţionale

Să observăm că în caracterizările date anterior pentru soluţiile inegalităţilor variaţionale, prin intermediul funcţiilor gap sau cu ajutorul calculului subdiferenţial, îndeplinirea unei condiţii de regularitate a avut o mare importanţă. Arătăm în această secţiune că putem caracteriza soluţiile acestor probleme chiar în absenţa acestor condiţii de regularitate. Folosim ca şi instrument de lucru condiţiile secvenţiale date în [28, 29] pentru diferite probleme de optimizare.

Condiţii secvenţiale pentru inegalitatea variaţională generală

În cele ce urmează dăm condiţii secvenţiale pentru a caracteriza soluţiile inegalităţii variaţionale generale $(VI)^{\Phi}$. În continuarea acestei secţiuni presupunem că X este un spaţiu Banach reflexiv şi Y este un spaţiu Banach.

Teorema 2.3.6 (**L. Cioban**, [48]) *Fie $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă şi $0 \in \mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}\,\Phi)$. Atunci $\overline{x} \in \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot, 0)$ este o soluţie pentru $(VI)^{\Phi}$ dacă şi* *numai dacă există* $(x_n, y_n) \in \operatorname{dom} \Phi$ *şi* $(x_n^*, y_n^*) \in \partial\Phi(x_n, y_n)$ *astfel încât*

$$x_n^* \to -F(\overline{x}),\ x_n \to \overline{x},\ y_n \to 0\,(n \to +\infty),$$

$$\Phi(x_n, y_n) - \langle y_n^*, y_n \rangle - \Phi(\overline{x}, 0) \to 0\,(n \to +\infty).$$

Condiţii secvenţiale pentru cazul $g + f \circ h$

Pentru acest caz von lucra în cadrul următor: X este un spaţiu Banach reflexiv şi Y este un spaţiu Banach parţial ordonat de conul convex nevid $K \subseteq X$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă, $h : X \to Y^\bullet$ este proprie şi K-convexă şi $g : Y^\bullet \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă cu $g(+\infty_K) = +\infty$. Presupunem de asemenea că $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} h \cap h^{-1}(\operatorname{dom} g) \neq \emptyset$.

Considerăm două cazuri particulare ale acestuia. Primul, când presupunem că h este K-epi închisă, şi al doilea caz, cand presupunem că funcţia h este continuă.

1. *Cazul h este K-epi închisă*

Pentru acest caz, presupunem în plus că Y este reflexiv, h este K-epi-închis şi g este K-crescătoare pe $h(\operatorname{dom} h) + K$.

Teorema 2.3.7 (**L. Cioban**, [48]) *Elementul* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} h \cap h^{-1}(\operatorname{dom} g)$ *este o soluţie pentru* $(VI)^{CC}$ *dacă şi numai dacă*

$$\begin{cases} \exists(x_n, p_n, q_n, q_n') \in X \times \operatorname{dom} f \times \operatorname{dom} g \times Y,\ h(x_n) \leq_K q_n' \\ \exists(u_n^*, e_n^*, u_n'^*, q_n^*), q_n^* \in K^*, u_n^* \in \partial f(p_n), q_n^* + e_n^* \in \partial g(q_n), \\ u_n'^* \in \partial(q_n^* h)(x_n), \langle q_n^*, q_n' - h(x_n)\rangle = 0\,\forall n \in \mathbb{N}, \\ u_n^* + u_n'^* \to -F(\overline{x}), e_n^* \to 0, p_n \to \overline{x}, q_n \to h(\overline{x}), q_n' \to h(\overline{x})\,(n \to +\infty), \\ f(p_n) - \langle u_n^*, p_n - x_n\rangle + \langle F(\overline{x}), x_n - \overline{x}\rangle + \langle q_n^*, h(x_n) - h(\overline{x})\rangle - f(\overline{x}) \to 0\,(n \to +\infty), \\ g(q_n) - \langle q_n^*, q_n - h(\overline{x})\rangle - g(h(\overline{x})) \to 0\,(n \to +\infty). \end{cases}$$

2. *Cazul h este continuă*

Pentru acest caz considerăm în plus că $h : X \to Y$ este continuă şi $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ este K-crescătoare pe Y.

Teorema 2.3.8 (**L. Cioban**, [48]) *Elementul* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap h^{-1}(\operatorname{dom} g)$ *este o soluţie pentru* $(VI)^{CC}$ *dacă şi numai dacă*

$$\begin{cases} \exists(x_n, y_n) \in \operatorname{dom} f \times \operatorname{dom} g, \exists(u_n^*, v_n^*, y_n^*) \in X^* \times X^* \times K^*, \\ u_n^* - F(\overline{x}) \in \partial f(x_n), v_n^* \in \partial(y_n^* h)(x_n), y_n^* \in \partial g(y_n)\,\forall n \in \mathbb{N}, \\ u_n^* + v_n^* \to 0, x_n \to \overline{x}, y_n \to h(\overline{x})\,(n \to +\infty), \\ f(x_n) + \langle y_n^*, h(x_n) - h(\overline{x})\rangle + \langle F(\overline{x}), x_n - \overline{x}\rangle - f(\overline{x}) \to 0\,(n \to +\infty), \\ g(y_n) - \langle y_n^*, y_n - h(\overline{x})\rangle - g(h(\overline{x})) \to 0\,(n \to +\infty). \end{cases}$$

Condiţii secvenţiale pentru cazul $f + g \circ A$

Teorema 2.3.9 (**L. Cioban**, [48]) *Fie* $A : X \to Y$ *un operator liniar continuu,* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii, convexe şi inferior semicontinue astfel încât* $A(\operatorname{dom} f) \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$. *Atunci*

$\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g)$ *este o soluţie pentru* $(VI)^{f,g,A}$ *dacă şi numai dacă*

$$\exists\{\varepsilon_n\} \downarrow 0, \exists x_n^* \in \partial_{\varepsilon_n} f(\overline{x}), \exists y_n^* \in \partial_{\varepsilon_n} g(A\overline{x}) \textit{ astfel încât } x_n^* + A^* y_n^* \to -F(\overline{x}),\ (n \to +\infty).$$

Teorema 2.3.10 (**L. Cioban**, [48]) *Fie* $A : X \to Y$ *un operator liniar continuu,* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii, convexe şi inferior semicontinue astfel încât* $A(\operatorname{dom} f) \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$*. Atunci* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g)$ *este o soluţie pentru* $(VI)^{f,g,A}$ *dacă şi numai dacă*

$$\begin{cases} \exists(x_n, y_n) \in \operatorname{dom} f \times \operatorname{dom} g,\ \exists x_n^* \in \partial f(x_n),\ \exists y_n^* \in \partial g(y_n) \textit{ astfel încât} \\ x_n^* + A^* y_n^* \to -F(\overline{x}),\ x_n \to \overline{x},\ y_n \to A\overline{x}\,(n \to +\infty), \\ f(x_n) - \langle x_n^*, x_n - \overline{x}\rangle - f(\overline{x}) \to 0\,(n \to +\infty), \\ g(y_n) - \langle y_n^*, y_n - A\overline{x}\rangle - g(A\overline{x}) \to 0\,(n \to +\infty). \end{cases}$$

Condiţii secvenţiale pentru cazul $f + g$

Teorema 2.3.11 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie* X *spaţiu Banach reflexiv şi* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii, convexe şi inferior semicontinue astfel încât* $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$*. Atunci* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ *este o soluţie a inegalităţii variaţionale* $(VI)^{f,g}$ *dacă şi numai dacă*

$$\begin{cases} \exists(x_n, y_n) \in \operatorname{dom} f \times \operatorname{dom} g,\ \exists x_n^* \in \partial f(x_n),\ \exists y_n^* \in \partial g(y_n) \textit{ astfel încât} \\ x_n^* + y_n^* \to -F(\overline{x}),\ x_n \to \overline{x},\ y_n \to \overline{x}\,(n \to +\infty), \\ f(x_n) - \langle x_n^*, x_n - \overline{x}\rangle - f(\overline{x}) \to 0\,(n \to +\infty), \\ g(y_n) - \langle y_n^*, y_n - \overline{x}\rangle - g(\overline{x}) \to 0\,(n \to +\infty). \end{cases}$$

Condiţii secvenţiale pentru cazul $f + \delta_K$

Teorema 2.3.12 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie* X *un spaţiu Banach reflexiv,* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă şi* $K \subseteq X$ *o mulţime închisă şi convexă astfel încât* $\operatorname{dom} f \cap K \neq \emptyset$*. Atunci* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap K$ *este o soluţie a inegalităţii variaţionale* $(VI)^{f,K}$ *dacă şi numai dacă*

$$\begin{cases} \exists(x_n, y_n) \in \operatorname{dom} f \times K,\ \exists x_n^* \in \partial f(x_n),\ \exists y_n^* \in N_K(y_n) \textit{ astfel încât} \\ x_n^* + y_n^* \to -F(\overline{x}),\ x_n \to \overline{x},\ y_n \to \overline{x}\,(n \to +\infty), \\ f(x_n) - \langle x_n^*, x_n - \overline{x}\rangle - f(\overline{x}) \to 0\,(n \to +\infty), \\ \langle y_n^*, y_n - \overline{x}\rangle \to 0\,(n \to +\infty). \end{cases}$$

În cele ce urmează vom da un exemplu prin care subliniem avantajul unor astfel de caracterizări secvenţiale.

Exemplul 2.3.13 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie* $X = \mathbb{R}^2$, $K = \{0\} \times \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x, y) = -\sqrt{xy} + \delta_{\mathbb{R}^2_+}(x, y)$ *şi* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, y)$ *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$*. În acest caz arătăm că nici Teorema 2.2.10 sau Teorema 2.3.5 nu pot fi aplicate, totuşi condiţiile Teoremei 2.3.12 sunt îndeplinite.*

Capitolul 3

Probleme de echilibru

Problemele de echilibru ne oferă un cadrul unificat pentru studiul diferitelor probleme în optimizare, teoria punctului fix, teoria punctelor şa, inegalităţi variaţionale, etc. după cum lucrarea scrisă de Blum-Oettli [20] arată.

În cele ce urmează vom da caracterizări ale soluţiilor unor probleme de echilibru folosind punctele şa ale unei funcţii Lagrange asociată, prin intermediul dualităţii, folosind funcţiile gap, cu ajutorul proprietăţilor subdiferenţialei convexe şi de asemenea, vom da caracterizări secvenţiale pentru soluţiile acestor probleme de echilibru.

3.1 Dualitate pentru o problemă de echilibru extinsă

Bigi, Castellani şi Kassay [19] au introdus aşa numita "problemă de echilibru generalizată" şi care constă în găsirea unui punct $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$(\mathrm{GEP}) \quad \varphi(\overline{x}, y) + f(y) \geq f(\overline{x}), \ \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

unde $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ este o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie care satisface condiţiile $\varphi(x, \cdot)$ este convexă pentru orice $x \in \operatorname{dom} f$ şi $\varphi(x, x) = 0$ pentru orice $x \in \operatorname{dom} f$, şi s-a arătat că soluţiile problemei (GEP) şi ale dualei sale sunt strict legate de punctele şa ale funcţiei Lagrange asociată.

În cele ce urmează vom studia o formă extinsă a problemei (GEP), o problemă de echilibru mai generală cu suma a două funcţii, una fiind compusă cu un operator continuu şi liniar. Introducem şi studiem de asemenea, o problemă de echilibru duală asociată acesteia.

3.1.1 Condiţii de optim pentru o problemă de optimizare

În această secţiune vom da condiţii de optim pentru o problemă de optimizare care este formată din sumă de trei funcţii, una din ele fiind compusă cu un operator liniar continuu.

Considerăm problema de optimizare

$$(P_3) \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \Big\{ f_1(x) + f_2(x) + f_3(Bx) \Big\}.$$

Problema duală asociată problemei (P_3) este

$$(D_3) \quad \sup_{\substack{x_1^*, x_2^* \in \mathbb{R}^n, x_3^* \in \mathbb{R}^m, \\ x_1^* + x_2^* + B^* x_3^* = 0}} \Big\{ - f_1^*(x_1^*) - f_2^*(x_2^*) - f_3^*(x_3^*) \Big\}.$$

Folosind ca instrument condiţiile de regularitate date pentru probleme care au în funcţia obiectiv compunere cu un operator (vezi [31, section 3.2.2]), putem da, în cazul finit dimensional, următorul rezultat.

Teorema 3.1.1 (**L. Cioban**, [45]) *Fie* $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *un operator liniar,* $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_3 : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *funcţii proprii îndeplinind* $\operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2 \cap B^{-1}(\operatorname{dom} f_3) \neq \emptyset$. *Fie* $(\overline{x}_2^*, \overline{x}_3^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *o soluţie optimă pentru* (D_3) *şi presupunem că* $\operatorname{ri} \operatorname{dom} f_1^* \cap (-\operatorname{ri} \operatorname{dom} f_2^* - B^* \operatorname{ri} \operatorname{dom} f_3^*) \neq \emptyset$. *Atunci există* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, *o soluţie optimă pentru duala problmei* (D_3), *astfel încât*

1. $\overline{x} \in \partial f_1^*(-\overline{x}_2^* - B^* \overline{x}_3^*)$
2. $\overline{x} \in \partial f_2^*(\overline{x}_2^*)$
3. $B\overline{x} \in \partial f_3^*(\overline{x}_3^*)$.

3.1.2 Dualitate pentru problema de echilibru (CEP)

Considerăm următoarea problemă de echilibru care constă în găsirea unui element $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$(\text{CEP}) \quad \varphi(\overline{x}, y) + f(y) + g(Ay) \geq f(\overline{x}) + g(A\overline{x}),\ \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

unde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $g : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ sunt funcţii proprii şi convexe îndeplinind $\operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g \neq \emptyset$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, şi $\varphi(x, \cdot)$ este o funcţie convexă $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$, $\varphi(x, x) = 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$.

Pentru $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$ putem rescrie problema de echilibru (CEP) ca pe o problemă de optimizare

$$(P_{\overline{x}}) \quad \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \Big\{ \varphi(\overline{x}, y) + f(y) + g(Ay) \Big\}.$$

Următoarea teoremă stabileşte conexiuni între (CEP) şi $(P_{\overline{x}})$.

Teorema 3.1.3 (**L. Cioban**, [45]) *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $g : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii şi convexe şi* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g \neq \emptyset$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot)$ *o funcţie convexă* $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$, $\varphi(x, x) = 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$ *şi presupunem că* $A(\operatorname{ri} \operatorname{dom} f) \cap \operatorname{ri} \operatorname{dom} g \neq \emptyset$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\overline{x}$ *este o soluţie pentru* (CEP);

(ii) $\overline{x}$ *este o soluţie pentru* $(P_{\overline{x}})$;

(iii) $\mathcal{D}(\overline{x}) \neq \emptyset$;

unde $\mathcal{D}(x) := \Big\{ (u^*, v^*) : u^* \in \partial f(x), v^* \in \partial g(Ax), -u^* - A^* v^* \in \partial \varphi(x, \cdot)(x) \Big\}$.

Când condiţia de regularitate $A(\mathrm{ri}\,\mathrm{dom}\, f) \cap \mathrm{ri}\,\mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$ este îndeplinită, problema (CEP) poate fi reformulată astfel: găsiţi $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ astfel încât să existe $(\overline{u}^*, \overline{v}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ astfel încât

$$\begin{array}{ll} (p1) & -\overline{u}^* - A^*\overline{v}^* \in \partial\varphi(\overline{x}, \cdot)(\overline{x}); \\ (p2) & \overline{u}^* \in \partial f(\overline{x}); \\ & \overline{v}^* \in \partial g(A\overline{x}); \end{array}$$

Putem ataşa problemei (CEP) următoarea problemă duală care constă în găsirea unui element $(\overline{u}^*, \overline{v}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ astfel încât să existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$\begin{array}{lll} (DCEP) & (d1) & \overline{x} \in \partial\varphi^*(\overline{x}, \cdot)(-\overline{u}^* - A^*\overline{v}^*); \\ & (d2) & \overline{x} \in \partial f^*(\overline{u}^*); \\ & & A\overline{x} \in \partial g^*(\overline{v}^*), \end{array}$$

unde $\varphi^*(x, \cdot)(x^*)$ este conjugata funcţiei φ pe a doua variabilă, $\varphi^*(x, \cdot)(x^*) = (\varphi(x, \cdot))^*(x^*)$.

Teorema 3.1.5 (**L. Cioban**, [45]) *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $g : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii şi convexe şi* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *îndeplinind* $\mathrm{dom}\, f \cap A^{-1}\,\mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot)$ *o funcţie convexă* $\forall x \in \mathrm{dom}\, f \cap A^{-1}\,\mathrm{dom}\, g$, $\varphi(x, x) = 0$, $\forall x \in \mathrm{dom}\, f \cap A^{-1}\,\mathrm{dom}\, g$ *şi presupunem că* $A(\mathrm{ri}\,\mathrm{dom}\, f) \cap \mathrm{ri}\,\mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$. *Dacă* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *este soluţie pentru* (CEP) *atunci orice element din* $\mathcal{D}(\overline{x})$ *este o soluţie pentru* $(DCEP)$.

Considerăm mulţimea:

$$\mathcal{P}(u^*, v^*) = \Big\{x \in \mathrm{dom}\, f \cap A^{-1}\,\mathrm{dom}\, g : x \in \partial\varphi^*(x, \cdot)(-u^* - A^*v^*) \cap \partial f^*(u^*) \cap A^{-1}\partial g^*(v^*)\Big\}.$$

Teorema următoare caracterizează soluţiile problemei $(DCEP)$ prin intermediul mulţimii $\mathcal{P}(u^*, v^*)$.

Teorema 3.1.7 (**L. Cioban**, [45]) *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $g : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii, convexe şi inferior semicontinue şi* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *îndeplinind* $\mathrm{dom}\, f \cap A^{-1}\,\mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot)$ *o funcţie convexă* $\forall x \in \mathrm{dom}\, f \cap A^{-1}\,\mathrm{dom}\, g$, $\varphi(x, x) = 0$, $\forall x \in \mathrm{dom}\, f \cap A^{-1}\,\mathrm{dom}\, g$. *Dacă* $(\overline{u}^*, \overline{v}^*)$ *este o soluţie pentru* $(DCEP)$ *atunci orice element din* $\mathcal{P}(\overline{u}^*, \overline{v}^*)$ *este o soluţie pentru* (CEP).

Observaţia 3.1.8 *Teorema 3.1.7 afirmă că orice element* $\overline{x} \in \mathcal{P}(\overline{u}^*, \overline{v}^*)$ *generează o soluţie pentru* (CEP). *Dacă se consideră în plus condiţia de regularitate* $A(\mathrm{ri}\,\mathrm{dom}\, f) \cap \mathrm{ri}\,\mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$ *îndeplinită, atunci mulţimea* $\mathcal{P}(\overline{u}^*, \overline{v}^*)$ *nu este altceva decât mulţimea soluţiilor problemei* (CEP) *asociate elementului* $\overline{u}^* + A^*\overline{v}^*$.

Teorema 3.1.9 (**L. Cioban**, [45]) *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $g : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii şi convexe şi* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *îndeplinind* $\mathrm{dom}\, f \cap A^{-1}\,\mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot)$ *o funcţie convexă* $\forall x \in \mathrm{dom}\, f \cap A^{-1}\,\mathrm{dom}\, g$, $\varphi(x, x) = 0$, $\forall x \in \mathrm{dom}\, f \cap A^{-1}\,\mathrm{dom}\, g$. *Dacă* $(\overline{u}^*, \overline{v}^*) \in \mathcal{D}(\overline{x})$ *atunci* $\overline{x} \in \mathcal{P}(\overline{u}^*, \overline{v}^*)$.

Teorema 3.1.10 (**L. Cioban**, [45]) *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $g : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii, convexe şi inferior semicontinue şi* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g \neq \emptyset$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot)$ *o funcţie convexă* $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$, $\varphi(x, x) = 0$, $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$. *Dacă* $\overline{x} \in \mathcal{P}(\overline{u}^*, \overline{v}^*)$ *atunci* $(\overline{u}^*, \overline{v}^*) \in \mathcal{D}(\overline{x})$.

Soluţiile problemei (CEP) respectiv ale problemei $(DCEP)$ sunt legate de punctele şa ale funcţiei Lagrange:

$$\mathcal{L}_{\overline{x}}(x, y, u^*, v^*) = f(x) - \langle u^*, x\rangle + g(y) - \langle v^*, y\rangle - \varphi^*(\overline{x}, \cdot)(-u^* - A^*v^*)$$

după cum ne arată următoarea teoremă.

Teorema 3.1.11 (**L. Cioban**, [45]) *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $g : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii, convexe şi inferior semicontinue şi* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g \neq \emptyset$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot)$ *o funcţie convexă* $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$, $\varphi(x, x) = 0$, $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $(\overline{u}^*, \overline{v}^*) \in \mathcal{D}(\overline{x})$;

(ii) $\overline{x} \in \mathcal{P}(\overline{u}^*, \overline{v}^*)$;

(iii) $(\overline{x}, A\overline{x}, \overline{u}^*, \overline{v}^*)$ *este punct şa pentru* $\mathcal{L}_{\overline{x}}$.

Următoarele rezultate sunt consecinţe directe ale Teoremei 3.1.11.

Corolarul 3.1.12 (**L. Cioban**, [45]) *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $g : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii şi convexe şi* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g \neq \emptyset$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot)$ *o funcţie convexă* $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$, $\varphi(x, x) = 0$, $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$ *şi presupunem că* $A(\operatorname{ri} \operatorname{dom} f) \cap \operatorname{ri} \operatorname{dom} g \neq \emptyset$. $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *este o soluţie pentru* (CEP) *dacă şi numai dacă există* $(\overline{u}^*, \overline{v}^*)$ *astfel încât* $(\overline{x}, A\overline{x}, \overline{u}^*, \overline{v}^*)$ *este punct şa pentru* $\mathcal{L}_{\overline{x}}$.

Corolarul 3.1.13 (**L. Cioban**, [45]) *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $g : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii, convexe şi inferior semicontinue şi* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g \neq \emptyset$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot)$ *o funcţie convexă* $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$, $\varphi(x, x) = 0$, $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$. $(\overline{u}^*, \overline{v}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *este o soluţie pentru* $(DCEP)$ *dacă şi numai dacă există* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *astfel încât* $(\overline{x}, A\overline{x}, \overline{u}^*, \overline{v}^*)$ *este punct şa pentru* $\mathcal{L}_{\overline{x}}$.

Dacă considerăm problema de optimizare $(P_{\overline{x}})$ putem formula duala Fenchel astfel:

$$(D_{\overline{x}}) \quad \sup_{\substack{x^* \in \mathbb{R}^n \\ y^* \in \mathbb{R}^m}} \Big\{ -\varphi^*(\overline{x}, \cdot)(-x^*) - g^*(y^*) - f^*(x^* - A^*y^*) \Big\}.$$

Putem observa că $(D_{\overline{x}})$ nu are forma problemei de optimizare ataşate problemei de echilibru $(DCEP)$, dar, putem demonstra următoarele relaţii între ele.

Teorema 3.1.14 (**L. Cioban**, [45]) *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $g : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii şi convexe şi* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g \neq \emptyset$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot)$ *o funcţie convexă* $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$, $\varphi(x, x) = 0$, $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$. *Dacă* $(\overline{u}^*, \overline{v}^*)$ *este o soluţie pentru* $(DCEP)$ *atunci există* $\overline{x} \in \mathcal{P}(\overline{u}^*, \overline{v}^*)$ *astfel încât* $(\overline{u}^* + A^*\overline{v}^*, \overline{v}^*)$ *este o soluţie pentru* $(D_{\overline{x}})$.

În continuare enunţăm rezultate care garantează că toate soluţiile problemelor (CEP) sau $(DCEP)$ pot fi găsite utilizănd problemele de optimizare $(P_{\overline{x}})$ respectiv $(D_{\overline{x}})$ dacă următoarea proprietate a funcţiei φ este îndeplinită:

$$\varphi(x, y) \leq \varphi(x, z) + \varphi(z, y), \; \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

proprietate folosită în acelaşi scop în [17, 19, 20].

Teorema 3.1.15 (**L. Cioban**, [45]) *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $g : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii şi convexe şi* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g \neq \emptyset$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot)$ *o funcţie convexă* $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$, $\varphi(x, x) = 0$, $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$*. Dacă funcţia* φ *satisface proprietatea (3.1) atunci* $\overline{x}$ *este o soluţie pentru problema* (CEP) *dacă şi numai dacă există* $z \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$ *astfel încât* $\overline{x}$ *este o soluţie pentru* (P_z)*.*

Teorema 3.1.16 (**L. Cioban**, [45]) *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $g : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii proprii şi convexe şi* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g \neq \emptyset$, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot)$ *o funcţie convexă* $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$, $\varphi(x, x) = 0$, $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$*. Presupunem că* $\operatorname{ri} \operatorname{dom} \varphi^*(\overline{x}, \cdot) \cap (-\operatorname{ri} \operatorname{dom} f^* - A^* \operatorname{ri} \operatorname{dom} g^*) \neq \emptyset$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^n$ *şi funcţia* φ *satisface (3.1). Atunci,* $(\overline{u}^*, \overline{v}^*)$ *este o soluţie pentru* $(DCEP)$ *dacă şi numai dacă există* $z \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1} \operatorname{dom} g$ *astfel încât* $(\overline{u}^* + A^*\overline{v}^*, \overline{v}^*)$ *este o soluţie pentru* (D_z)*.*

3.1.3 Cazuri particulare

Probleme de echilibru

Particularizând rezultatele de dualitate pentru problemele (CEP) şi $(DCEP)$ la cazul când $m = n$, $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este operatorul identitate, redescoperim atât cadrul cât şi rezultatele prezentate în [19, Secţiunea 3].

Inegalităţi variaţionale

Dacă considerăm $X = R^n$ şi $Y = R^m$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, în formularea problemelor $(\mathrm{VI})_{\varepsilon}^{g,f,A}$ şi $(\mathrm{DVI})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}^{g,f,A}$ prezentate în Secţiunea 2.1.2, obţinem aceleaşi probleme ca şi în cazul când considerăm $\varphi(x, y) = \langle F(x), y - x \rangle$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, pentru problema (CEP). Mai mult, dacă luăm $n = m$, $g \equiv 0$, A operatorul identitate şi dacă F este un operator injectiv, redescoperim perechea duală de inegalităţi variaţionale şi rezultatele de dualitate introduse de Mosco în [113].

3.2 Funcţii gap pentru probleme de echilibru

Scopul acestei secţiuni este să aplicăm tehnicile utilizate în Secţiunea 2.2 pentru probleme de echilibru. Construim funcţii gap pentru o problemă de echilibru generală şi considerăm câteva cazuri particulare printre care redescoperim funcţii gap introduse în literatură.

3.2.1 O funcţie gap pentru problema de echilibru generală

Considerăm problema de echilibru care constă în găsirea unui element $\overline{x} \in X$ astfel încât

$$(PEP) \qquad F(\overline{x}, x) + \Phi(x, 0) \geq \Phi(\overline{x}, 0) \ \forall x \in X,$$

unde X şi Y sunt spaţii reale local convexe separate, $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcţie proprie îndeplinind $0 \in \mathrm{pr}_Y(\mathrm{dom}\,\Phi)$ şi $F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ este o bifuncţie care satisface relaţia $F(x, x) = 0$ pentru orice $x \in \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot, 0)$.

Fie $\overline{x} \in \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot, 0)$ fixat. Problemei (PEP) îi asociem următoarea problemă de optimizare

$$(P^{PEP}, \overline{x}) \quad \inf_{x \in X} \{F(\overline{x}, x) + \Phi(x, 0)\} - \Phi(\overline{x}, 0)$$

Se poate observa că $\overline{x}$ este o soluţie pentru problema de echilibru (PEP) dacă şi numai dacă $v(P^{PEP}, \overline{x}) = 0$.

Considerăm duala Fenchel a problemei $(P^{PEP}, \overline{x})$:

$$(D^{PEP}, \overline{x}) \quad \sup_{x^* \in X^*} \big\{ - F_x^*(\overline{x}, x^*) - (\Phi(\cdot, 0))^*(-x^*)\big\} - \Phi(\overline{x}, 0),$$

unde $F_x^*(\overline{x}, x^*) = (F(\overline{x}, \cdot))^*(x^*)$.

Introducem funcţia $\gamma^{PEP} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definită pentru orice $\overline{x} \in \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot, 0)$ astfel

$$\gamma^{PEP}(\overline{x}) = \inf_{x^* \in X^*, y^* \in Y^*} \big\{F_x^*(\overline{x}, x^*) + \Phi^*(-x^*, y^*)\big\} + \Phi(\overline{x}, 0)$$

şi $\gamma^{PEP}(\overline{x}) = +\infty$ pentru $\overline{x} \notin \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot, 0)$.

Teorema 3.2.1 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Fie X şi Y spaţii reale local convexe separate, $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă, $F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ o bifuncţie proprie astfel încât pentru orice $\overline{x} \in \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot, 0)$, $F(\overline{x}, \overline{x}) = 0$, $\mathrm{dom}\,\Phi(\cdot, 0) \cap \mathrm{dom}\,F(\overline{x}, \cdot) \neq \emptyset$ şi $F(\overline{x}, \cdot)$ este convexă şi continuă întru-un punct din $\mathrm{dom}\,\Phi(\cdot, 0) \cap \mathrm{dom}\,F(\overline{x}, \cdot)$. Presupunem că una din condiţiile de regularitate (RC_i^Φ), $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ este îndeplinită. Atunci γ^{PEP} este funcţie gap pentru problema (PEP).*

Observaţia 3.2.2 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Continuitatea funcţiei $F(\overline{x}, \cdot)$ a fost folosită pentru a garanta egalitatea $v(P^{PEP}, \overline{x}) = v(D^{PEP}, \overline{x})$. Alternativ, putem înlocui continuitatea cu o condiţie de regularitate care foloseşte noţiuni de tip interior, sau o condiţie de regularitate de tip închidere.*

3.2.2 Cazuri particulare

În cele ce urmează particularizăm funcţia de perturbare Φ şi arătăm că unele funcţii gap introduse în literatură pentru probleme de echilibru (vezi [2, 26]) pot fi văzute ca şi cazuri particulare ale rezultatului nostru principal.

Cazul $g \circ h$

Fie $\Phi^{CC_1} : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţia de perturbare definită de $\Phi^{CC_1}(x, y) = \delta_{\mathcal{A}}(x) + g(h(x) + y)$ pentru orice $(x, y) \in X \times Y$, unde X şi Y sunt spaţii reale local convexe separate, $\mathcal{A} \subseteq X$ este o mulţime nevidă, $K \subseteq Y$ este un con nevid, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcţie proprie cu $g(\infty_K) = +\infty$ şi $h : X \to Y^\bullet$ este o funcţie proprie astfel încât $h(\mathcal{A} \cap \mathrm{dom}\,h) \cap \mathrm{dom}\,g \neq \emptyset$. În acest caz redescoperim funcţia introdusă în [26, Secţiunea 4] pentru cazul când g are domeniul întreg spaţiul.

Observaţia 3.2.3 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Dacă considerăm funcţia de perturbare* $\Phi^{f,g} : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ *şi dacă pentru aceasta considerăm* $f = \delta_K$, *unde* $K \subseteq X$ *este o mulţime nevidă şi* $g \equiv 0$, *vom redescoperi funcţia introdusă în [2].*

Observaţia 3.2.4 (**L. Cioban**, E.R. Csetnek, [51]) *Particularizând rezultatele date pentru problemele de echilibru la inegalităţi variaţionale vom redescoperi problemele şi rezultatele prezentate în Secţiunea 2.2.1.*

3.2.3 Funcţia dual gap pentru problema de echilibru generală

În această secţiune introducem o altă clasă de funcţii gap pentru problema (PEP). În cele ce urmează ne vom ocupa de aşa numita problema de echilibru de tip Minty care e strâns legată de (PEP) şi care constă în găsirea unui element $\overline{x} \in X$ astfel încât

$$(DPEP) \qquad F(x,\overline{x}) + \Phi(\overline{x},0) \leq \Phi(x,0), \forall x \in X.$$

Notăm prin S^{PEP} şi S^{DPEP} mulţimea soluţiilor problemelor (PEP) respectiv $(DPEP)$.

Pentru a formula o altă funcţie gap pentru problema (PEP) folosind problema $(DPEP)$, sunt amintite câteva definiţii (vezi [18, 20, 87, 89, 109]): monotonia şi pseudomonotonia unei bifuncţii, cvasiconvexitate, explicit cvasiconvexitate, (explicit) cvasiconcavitate, u-hemicontinuitate şi l-hemicontinuitate.

Propoziţia 3.2.8 (**L. Cioban**, [49]) *Dacă* F *este o bifuncţie monotonă, atunci* $S^{PEP} \subseteq S^{DPEP}$.

Propoziţia 3.2.9 (**L. Cioban**, [49]) *Fie* $F(x,\cdot)$ *convexă* $\forall x \in X$, $F(\cdot,x)$ *u-hemicontinuă* $\forall x \in X$ *şi* $\Phi(\cdot,0)$ *proprie, convexă şi l-hemicontinuă. Atunci* $S^{DPEP} \subseteq S^{PEP}$.

Observaţia 3.2.10 (**L. Cioban**, [49]) *Putem înlocui convexitatea funcţiilor* $F(x,\cdot)$ *şi* $\Phi(\cdot,0)$ *cu explicit cvasiconvexitatea funcţiei* $F(x,\cdot) + \Phi(\cdot,0)$ *în Propoziţia 3.2.9.*

Problemei de echilibru de tip Minty $(DPEP)$ îi ataşăm următoarea problemă de optimizare:

$$(P^{DPEP},\overline{x}) \quad \inf_{x \in X}\{-F(x,\overline{x}) + \Phi(x,0)\} - \Phi(\overline{x},0)$$

unde $\overline{x}$ este fixat. Problema duală Fenchel a problemei $(P^{DPEP},\overline{x})$ este (vezi [57, 133]):

$$(D^{DPEP},\overline{x}) \quad \sup_{x^* \in X^*}\left\{-\sup_{x \in X}[\langle x^*, x\rangle + F(x,\overline{x})] - (\Phi(\cdot,0))^*(-x^*)\right\} - \Phi(\overline{x},0).$$

Urmând ideile folosite în [2, 3], introducem funcţia γ^{DPEP} definită pentru orice $\overline{x} \in \operatorname{dom}\Phi(\cdot,0)$ astfel:

$$\gamma^{DPEP}(\overline{x}) = \inf_{x^* \in X^*, y^* \in Y^*}\left\{\sup_{x \in X}[\langle x^*, x\rangle + F(x,\overline{x})] + \Phi^*(-x^*,y^*)\right\} + \Phi(\overline{x},0),$$

şi $\gamma^{DPEP}(\overline{x}) = +\infty$ pentru $\overline{x} \notin \operatorname{dom}\Phi(\cdot,0)$.

Corolarul 3.2.11 (**L. Cioban**, [49]) *Fie X şi Y spaţii reale local convexe separate, $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă, $F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ o bifuncţie proprie astfel încât pentru orice $\overline{x} \in \operatorname{dom} \Phi(\cdot, 0)$, $F(\overline{x}, \overline{x}) = 0$, $\operatorname{dom} \Phi(\cdot, 0) \cap \operatorname{dom} F(\overline{x}, \cdot)$ şi $-F(\cdot, \overline{x})$ este convexă şi continuă într-un punct x din $\operatorname{dom} \Phi(\cdot, 0) \cap \operatorname{dom} F(\overline{x}, \cdot)$. Presupunem că una din condiţiile de regularitate (RC_i^{Φ}), $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ este îndeplinită. Atunci γ^{DPEP} este funcţie gap pentru $(DPEP)$.*

Comparăm în cele ce urmează funcţia γ^{PEP} cu nou-introdusa funcţie, şi anume γ^{DPEP}.

Propoziţia 3.2.12 (**L. Cioban**, [49]) *Presupunem că F este o bifuncţie monotonă. Atunci are loc*

$$\gamma^{DPEP}(x) \leq \gamma^{PEP}(x), \forall x \in X.$$

În cele ce urmează dăm condiţii pentru ca funcţia γ^{DPEP} să fie funcţie gap pentru problema de echilibru generală de tip Stampacchia, (PEP).

Teorema 3.2.13 (**L. Cioban**, [49]) *Fie X şi Y spaţii reale local convexe separate, $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă, $\Phi(\cdot, 0)$ l-hemicontinuă, $F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ o bifuncţie proprie şi monotonă astfel încât pentru orice $\overline{x} \in \operatorname{dom} \Phi(\cdot, 0)$, $F(\overline{x}, \overline{x}) = 0$, $F(x, \cdot)$ convexă $\forall x \in X$, $\operatorname{dom} \Phi(\cdot, 0) \cap \operatorname{dom} F(\overline{x}, \cdot)$ şi $F(\cdot, \overline{x})$ este convexă şi continuă într-un punct $x \in \operatorname{dom} \Phi(\cdot, 0) \cap \operatorname{dom} F(\overline{x}, \cdot)$. Presupunem că una din condiţiile de regularitate (RC_i^{Φ}), $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ este îndeplinită. Atunci γ^{DPEP} este funcţie gap pentru (PEP).*

Observaţia 3.2.15 *Remarcăm că am introdus două funcţii γ^{PEP} şi γ^{DPEP}, care sunt funcţii gap pentru problema de echilibru (PEP) în anumite ipoteze. În general aceste funcţii nu coincid, chiar dacă toate condiţiile din Teorema 3.2.1 şi Teorema 3.2.13 sunt îndeplinite.*

Cazuri particulare

În această subsecţiune particularizăm problema $(DPEP)$ şi arătăm că rediscoperim câteva funcţii dual gap pentru problemele de echilibru considerate în literatură [2] şi pentru inegalităţi variaţionale care sunt prezentate în Secţiunea 2.2.3.

3.3 Condiţii de optim pentru probleme de echilibru

Acest subcapitol este dedicat caracterizării soluţiilor problemei de echilibru generale dar şi pentru câteva cazuri particulare ale acesteia, folosindu-ne de proprietăţile subdiferenţialei convexe în cazul în care lucrăm în ipoteze de convexitate şi dacă o condiţie de regularitate este îndeplinită. În cazul în care nu este îndeplinită nici o condiţie de regularitate vom da condiţii secvenţiale necesare şi suficiente pentru aceste soluţii.

3.3.1 Condiţii de optim pentru probleme de echilibru bazate pe calcul subdiferenţial

În continuare vom prezenta caracterizări ale soluţiilor problemei de echilibru generale prin intermediul subdiferenţialei convexe.

Teorema 3.3.1 (**L. Cioban**, [46]) *Fie X şi Y spaţii reale local convexe separate, $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă, $F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ o bifuncţie proprie astfel încât pentru orice $\overline{x} \in$* $\operatorname{dom}\Phi(\cdot,0)$*, $F(\overline{x},\overline{x}) = 0$,* $\operatorname{dom}\Phi(\cdot,0) \cap \operatorname{dom}F(\overline{x},\cdot) \neq \emptyset$ *şi $F(\overline{x},\cdot)$ este convexă şi continuă într-un punct din* $\operatorname{dom}\Phi(\cdot,0) \cap \operatorname{dom}F(\overline{x},\cdot)$*. Presupunem că una din condiţiile de regularitate (RC_i^{Φ}), $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ este îndeplinită. Atunci $\overline{x}$ este o soluţie a problemei de echilibru (PEP) dacă şi numai dacă*

$$0 \in \partial(F(\overline{x},\cdot))(\overline{x}) + \mathrm{Pr}_{X^*}(\partial\Phi(\overline{x},0)).$$

Cazuri particulare

1. *Cazul $f + g \circ A$*

Teorema 3.3.3 (**L. Cioban**, [46]) *Fie X şi Y spaţii reale local convexe separate, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă şi $A : X \to Y$ un operator liniar continuu, îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g) \neq \emptyset$*, $F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ o bifuncţie proprie astfel încât pentru orice $\overline{x} \in$* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g)$*, $F(\overline{x},\overline{x}) = 0$,* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g) \cap \operatorname{dom} F(\overline{x},\cdot) \neq \emptyset$ *şi $F(\overline{x},\cdot)$ este convexă şi continuă într-un punct din* $\operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g) \cap \operatorname{dom} F(\overline{x},\cdot)$*. Presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{f,g,A})$, $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ este îndeplinită. Atunci $\overline{x}$ este o soluţie a problemei de echilibru $(EP)^{f,g,A}$ dacă şi numai dacă*

$$0 \in \partial(F(\overline{x},\cdot))(\overline{x}) + \partial f(\overline{x}) + A^*\partial g(A\overline{x}).$$

2. *Cazul $f + g$*

Teorema 3.3.5 (**L. Cioban**, [46]) *Fie X un spaţiu real local convex separat, $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, două funcţii proprii, convexe îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$*, $F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ o bifuncţie proprie astfel încât pentru orice $\overline{x} \in$* $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$*, $F(\overline{x},\overline{x}) = 0$,* $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} F(\overline{x},\cdot) \neq \emptyset$ *şi $F(\overline{x},\cdot)$ este convexă şi continuă într-un punct din* $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} F(\overline{x},\cdot)$*. Presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{f,g})$, $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ este îndeplinită. Atunci $\overline{x}$ este o soluţie a problemei de echilibru $(EP)^{f,g}$ dacă şi numai dacă*

$$0 \in \partial(F(\overline{x},\cdot))(\overline{x}) + \partial f(\overline{x}) + \partial g(\overline{x}).$$

3. *Cazul $f + \delta_K$*

Teorema 3.3.8 (**L. Cioban**, [46]) *Fie X un spaţiu real local convex separat, $K \subseteq X$ o mulţime convexă nevidă, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie şi convexă îndeplinind* $\operatorname{dom} f \cap K \neq \emptyset$*, $F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ o bifuncţie proprie astfel încât pentru orice $\overline{x} \in$* $\operatorname{dom} f \cap K$*, $F(\overline{x},\overline{x}) = 0$,* $\operatorname{dom} f \cap K \cap \operatorname{dom} F(\overline{x},\cdot) \neq \emptyset$ *şi $F(\overline{x},\cdot)$ este convexă şi continuă într-un punct din* $\operatorname{dom} f \cap K \cap \operatorname{dom} F(\overline{x},\cdot)$*. Presupunem că una din condiţiile de regularitate $(RC_i^{f,K})$, $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ este îndeplinită. Atunci $\overline{x}$ este o soluţie a problemei de echilibru $(EP)^{f,K}$ dacă şi numai dacă*

$$0 \in \partial(F(\overline{x},\cdot))(\overline{x}) + \partial f(\overline{x}) + N_K(\overline{x}).$$

3.3.2 Condiţii secvenţiale pentru probleme de echilibru

În această secţiune vom da caracterizări pentru soluţiile problemelor de echilibru, caracterizări care au loc în absenţa condiţiilor de regularitate. Ca şi instrument de lucru vom folosi condiţiile secvenţiale date în [28, 29] pentru probleme de optimizare.

Condiţii secvenţiale pentru problema de echilibru generală

Următorul rezultat foloseşte condiţii secvenţiale pentru caracterizarea soluţiilor problemei de echilibru generală (PEP).

Teorema 3.3.11 (**L. Cioban**, [46]) *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi Y un spaţiu Banach, $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă şi $0 \in \mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}\,\Phi)$, $F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ o bifuncţie proprie astfel încât pentru orice $\overline{x} \in \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot,0)$, $F(\overline{x},\overline{x}) = 0$, $\mathrm{dom}\,\Phi(\cdot,0) \cap \mathrm{dom}\,F(\overline{x},\cdot) \neq \emptyset$ şi $F(\overline{x},\cdot)$ este convexă şi continuă într-un punct din $\mathrm{dom}\,\Phi(\cdot,0) \cap \mathrm{dom}\,F(\overline{x},\cdot)$. Atunci $\overline{x} \in \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot,0) \cap \mathrm{dom}\,F(\overline{x},\cdot)$ este soluţie pentru (PEP) dacă şi numai dacă există $(x_n,y_n) \in (\mathrm{dom}\,\Phi(\cdot,y) \cap \mathrm{dom}\,F(\overline{x},\cdot)) \times \mathrm{dom}\,\Phi(x,\cdot)$, $(x_n^*,y_n^*) \in \partial\Phi(x_n,y_n)$, $z_n^* \in \partial(F(\overline{x},\cdot))(x_n)$, astfel încât*

$$x_n^* + z_n^* \to 0,\ x_n \to \overline{x},\ y_n \to 0\,(n \to +\infty),$$

$$\Phi(x_n,y_n) - \langle y_n^*, y_n\rangle - \Phi(\overline{x},0) \to 0\,(n \to +\infty).$$

În Teorema 3.3.11 sunt date condiţii secvenţiale pentru a caracteriza soluţiile problemei de echilibru generală (PEP) folosind continuitatea funcţiei $F(\overline{x},\cdot)$. În cele ce urmează vom da caracterizări secvenţiale pentru caracterizarea soluţiilor problemei de echilibru generală (PEP) fără a cere continuitatea funcţiei F pe a doua variabilă.

Teorema 3.3.13 (**L. Cioban**, [47]) *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi Y un spaţiu Banach, $\Phi : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă şi $0 \in \mathrm{Pr}_Y(\mathrm{dom}\,\Phi)$, $F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ o bifuncţie proprie astfel încât pentru orice $\overline{x} \in \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot,0)$, $F(\overline{x},\overline{x}) = 0$, $F(\overline{x},\cdot)$ este convexă şi inferior semicontinuă şi $\mathrm{dom}\,\Phi(\cdot,0) \cap \mathrm{dom}\,F(\overline{x},\cdot) \neq \emptyset$. Atunci $\overline{x} \in \mathrm{dom}\,\Phi(\cdot,0) \cap \mathrm{dom}\,F(\overline{x},\cdot)$ este soluţie pentru (PEP) dacă şi numai dacă există $(x_n,y_n) \in \mathrm{dom}\,\Phi$, $z_n \in \mathrm{dom}\,F(\overline{x},\cdot)$, $(x_n^*,y_n^*) \in \partial\Phi(x_n,y_n)$, $z_n^* \in \partial(F(\overline{x},\cdot))(z_n)$, astfel încât*

$$\begin{cases} x_n^* + z_n^* \to 0,\ x_n \to \overline{x},\ y_n \to 0, z_n \to \overline{x}\,(n \to +\infty), \\ F(\overline{x},z_n) - \langle z_n^*, z_n - \overline{x}\rangle \to 0\,(n \to +\infty), \\ \Phi(x_n,y_n) - \langle x_n^*, x_n - \overline{x}\rangle - \langle y_n^*, y_n\rangle - \Phi(\overline{x},0) \to 0\,(n \to +\infty). \end{cases}$$

Condiţii secvenţiale pentru $\sum f_i$

Considerăm următoarea problemă de optimizare:

$$(P^{\Sigma})\quad \inf_{x \in X} \left\{ \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \right\}.$$

În cele ce urmează vom deduce pornind de la [54, Teorema 3.4] condiţii secvenţiale pentru problema de optimizare (P^{Σ}).

Teorema 3.3.15 (**L. Cioban**, [47]) *Fie X un spaţiu Banach reflexiv, $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, ..., m$, sunt proprii, convexe şi inferior semicontinue astfel încât $\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{dom} f_i \neq \emptyset$. Atunci $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{dom} f_i$ este soluţie pentru (P^{Σ}) dacă şi numai dacă $\exists (x_n^1, ..., x_n^m) \in \operatorname{dom} f_1 \times ... \times \operatorname{dom} f_m$, $\exists (x_n^{1*}, ..., x_n^{m*}) \in \partial f_1(x_n^1) \times ... \times \partial f_m(x_n^m)$, astfel încât*

$$\begin{cases} x_n^{1*} + ... + x_n^{m*} \to 0,\ x_n^i \to \overline{x}, i = 1, ..., m\,(n \to +\infty), \\ f_i(x_n^i) - \langle x_n^{i*}, x_n^i - \overline{x}\rangle - f_i(\overline{x}) \to 0\,(n \to +\infty), i = 1, ..., m. \end{cases} \tag{3.2}$$

Pentru cazul când $m = 3$ şi $f_1(x) = F(\overline{x}, x)$, $f_2 = f(x)$, $f_3 = g(x)$, unde $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sunt funcţii proprii, convexe şi inferior semicontinue, $F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ este o bifuncţie proprie astfel încât pentru orice $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, $F(\overline{x}, \overline{x}) = 0$, $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} F(\overline{x}, \cdot) \neq \emptyset$ şi $F(\overline{x}, \cdot)$ este convexă şi inferior semicontinuă, avem următorul rezultat pentru problema de echilibru $(EP)^{f,g}$.

Teorema 3.3.16 (**L. Cioban**, [47]) *Fie X un spaţiu Banach reflexiv, $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţii proprii, convexe şi inferior semicontinue, $F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ o bifuncţie proprie astfel încât pentru orice $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, $F(\overline{x}, \overline{x}) = 0$, $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} F(\overline{x}, \cdot) \neq \emptyset$ şi $F(\overline{x}, \cdot)$ este convexă şi inferior semicontinuă. Atunci $\overline{x} \in \operatorname{dom}\ f \cap \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} F(\overline{x}, \cdot)$ este soluţie pentru $(EP)^{f,g}$ dacă şi numai dacă există $(x_n, y_n, z_n) \in \operatorname{dom} F(\overline{x}, \cdot) \times \operatorname{dom} f \times \operatorname{dom} g$, $(x_n^*, y_n^*, z_n^*) \in \partial(F(\overline{x}, \cdot))(x_n) \times \partial f(y_n) \times \partial g(z_n)$, astfel încât*

$$\begin{cases} x_n^* + y_n^* + z_n^* \to 0,\ x_n \to \overline{x},\ y_n \to \overline{x},\ z_n \to \overline{x},\ (n \to +\infty), \\ F(\overline{x}, x_n) - \langle x_n^*, x_n - \overline{x}\rangle \to 0\,(n \to +\infty), \\ f(y_n) - \langle y_n^*, y_n - \overline{x}\rangle - f(\overline{x}) \to 0\,(n \to +\infty), \\ g(z_n) - \langle z_n^*, z_n - \overline{x}\rangle - g(\overline{x}) \to 0\,(n \to +\infty). \end{cases}$$

Teorema 3.3.18 (**L. Cioban**, [47]) *Fie X un spaţiu Banach reflexiv, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă, $K \subseteq X$ o mulţime convexă şi închisă, $F : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ o bifuncţie proprie astfel încât pentru orice $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap K$, $F(\overline{x}, \overline{x}) = 0$, $\operatorname{dom} f \cap K \cap \operatorname{dom} F(\overline{x}, \cdot) \neq \emptyset$ şi $F(\overline{x}, \cdot)$ este convexă şi inferior semicontinuă, $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap K \cap \operatorname{dom} F(\overline{x}, \cdot)$ este soluţie pentru $(EP)^{f,K}$ dacă şi numai dacă există $(x_n, y_n, z_n) \in \operatorname{dom} F(\overline{x}, \cdot) \times \operatorname{dom} f \times K$, $(x_n^*, y_n^*, z_n^*) \in \partial(F(\overline{x}, \cdot))(x_n) \times \partial f(y_n) \times N_K(z_n)$, astfel încât*

$$\begin{cases} x_n^* + y_n^* + z_n^* \to 0,\ x_n \to \overline{x},\ y_n \to \overline{x},\ z_n \to \overline{x},\ (n \to +\infty), \\ F(\overline{x}, x_n) - \langle x_n^*, x_n - \overline{x}\rangle - F(\overline{x}, \overline{x}) \to 0\,(n \to +\infty), \\ f(y_n) - \langle y_n^*, y_n - \overline{x}\rangle - f(\overline{x}) \to 0\,(n \to +\infty), \\ \langle z_n^*, z_n - \overline{x}\rangle \to 0\,(n \to +\infty). \end{cases}$$

În continuare vom prezenta un exemplu pentru a justifica aplicabilitatea acestor condiţii secvenţiale.

Exemplul 3.3.19 (**L. Cioban**, [47]) *Fie $X = \mathbb{R}^2$, $K = -\mathbb{R}_+^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - \sqrt{y}, & y \geq 0 \\ +\infty, & altfel, \end{cases}$ $F : \mathbb{R}^2 \times R^2 \to \mathbb{R}^2$, $F((\overline{x}, \overline{y}), (x, y)) = \langle (\overline{x}, \overline{y}), (x, y) - (\overline{x}, \overline{y})\rangle$. Se arată că pentru acest caz toate condiţiile Teoremei 3.3.18 sunt îndeplinite.*

Facem remarca că dacă particularizăm funcţia F, adică $F(\overline{x}, x) = \langle G(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle$ pentru toate rezultatele prezentate în acestă secţiune vom redescoperi rezultatele considerate pentru inegalităţi variaţionale date în Secţiunea 2.3.

Capitolul 4

Probleme de optimizare şi $(0,2)$ η-probleme de optimizare aproximante

În acest capitol, ataşăm unui probleme de optimizare iniţiale, o problemă de optimizare aproximantă numită $(0,2)$ η-problema de optimizare aproximantă. Pentru a demonstra relaţii între problema de optimizare originală şi problema de optimizare aproximantă asociată ei vom folosi noţiuni de convexitate generalizată cum este invexitatea şi invexitatea de ordin doi. Vom studia legături între mulţimile soluţiilor admisibile ale celor două probleme dar şi între soluţiile optime ale celor două probleme prin intermediul punctelor şa ale funcţiilor Lagrange ataşate celor două probleme. La final vom ataşa problemei originale duala ei şi vom arăta că în anumite ipoteze, dacă duala are soluţie atunci şi $(0,2)$ η-problema de optimizare aproximantă are soluţie şi vice versa.

4.1 Introducere şi preliminarii

Considerăm problema de optimizare

$$\begin{array}{lll} (P) & \min & f(x) \\ & \text{a.î.} & x \in X \\ & & g(x) \leqq 0 \\ & & h(x) = 0, \end{array}$$

unde X este submulţime din $\mathbb{R}^n$ şi $f : X \to \mathbb{R}$ şi $g = (g_1, ..., g_m) : X \to \mathbb{R}^m$ şi $h = (h_1, ..., h_q) : X \to \mathbb{R}^q$ sunt trei funcţii, $m, n, q \in \mathbb{N}$.

Prin

$$\mathcal{F}(P) := \{x \in X : g(x) \leqq 0,\ h(x) = 0\}$$

notăm mulţimea soluţiilor admisibile ale problemei (P), şi fie funcţia $L_P : X \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$L_P(x, (v, w)) = f(x) + \langle v, g(x)\rangle + \langle w, h(x)\rangle,$$

pentru orice $(x, (v, w)) \in X \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q)$, şi care este funcţia Lagrange asociată problemei (P).

Un punct $(x^0, (v^0, w^0)) \in X \times (\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q)$ se numeşte punct şa pentru L_P dacă

$$L_P\left(x^0, (v, w)\right) \leq L_P\left(x^0, (v^0, w^0)\right) \leq L_P\left(x, (v^0, w^0)\right),$$

pentru orice $(x, (v, w)) \in X \times (\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q)$.

Definim funcţiile $G : X \to \mathbb{R}^m$, $H : X \to \mathbb{R}^q$ astfel

$$G(x) := g\left(x^0\right) + \left[\nabla g\left(x^0\right)\right] \eta\left(x, x^0\right) + \frac{1}{2}\left[\eta\left(x, x^0\right)\right]^T \left[\nabla^2 g\left(x^0\right)\right]\left(\eta\left(x, x^0\right)\right), \tag{4.1}$$
$$H(x) := h\left(x^0\right) + \left[\nabla h\left(x^0\right)\right] \eta\left(x, x^0\right) + \frac{1}{2}\left[\eta\left(x, x^0\right)\right]^T \left[\nabla^2 h\left(x^0\right)\right]\left(\eta\left(x, x^0\right)\right),$$

pentru orice $x \in X$.

Fie $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ o funcţie, x^0 un punct interior din X. Presupunem că g şi h sunt de două ori diferenţiabile în x^0.

Ataşăm problemei (P), problema

$$\begin{array}{lll} (AP) & \min & f(x) \\ & \text{a.î.} & x \in X \\ & & G(x) \leqq 0 \\ & & H(x) = 0, \end{array}$$

numită $(0, 2)$ $\eta-$ problema de optimizare aproximantă şi vom studia conexiuni între soluţiile optime ale acestei probleme şi soluţiile optime ale problemei (P). Această problemă depinde nu doar de X, f, şi g, dar şi de x^0 şi η.

Fie

$$\mathcal{F}(AP) := \{x \in X : \; G(x) \leqq 0, \; H(x) = 0\}$$

mulţimea soluţiilor admisibile ale problemei (AP).

Amintim aici câteva definiţii şi noţiuni utilizate şi care sunt sintetizate în [110], precum invexitate, incavitate, invexitate de ordin doi, incavitate de ordin doi, cvasiinvexitate de ordin doi într-un punct cu privire la o funcţie.

Definiţia 4.1.3 (**L. Cioban**, D. Duca, [52])*Fie X o mulţime nevidă din $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior din X, $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în x^0, şi $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ o funcţie. Spunem că funcţia f este avexă în x^0 cu privire la η dacă*

$$f(x) - f\left(x^0\right) = \left\langle \nabla f\left(x^0\right), \eta\left(x, x^0\right)\right\rangle, \text{ pentru orice } x \in X. \tag{4.2}$$

Definiţia 4.1.8 (**L. Cioban**, D. Duca, [52]) *Fie X o submulţime nevidă din $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior din X, $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori diferenţiabilă în x^0, şi $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ o funcţie. Spunem că funcţia f este avexă de ordin doi x^0 cu privire la η dacă*

$$f(x) - f\left(x^0\right) = \left\langle \nabla f\left(x^0\right), \eta\left(x, x^0\right)\right\rangle + \frac{1}{2}\left[\eta\left(x, x^0\right)\right]^T \left[\nabla^2 f\left(x^0\right)\right](y), \tag{4.3}$$

pentru orice $x \in X$ şi $y \in \mathbb{R}^n$.

4.2 Conexiuni între soluţiile admisibile ale (0,2) η-problemei de optimizare aproximante şi soluţiile admisibile ale problemei originale

Observăm că mulţimile soluţiilor admisibile ale problemei originale şi a aproximantei ei nu sunt legate după cum ne arată câteva exemple. Dar, dacă funcţiile implicate în descrierea celor două probleme îndeplinesc anumite condiţii atunci putem stabili legături între soluţiile admisibile ale (0,2) η-problemei de optimizare aproximante şi soluţiile admisibile ale problemei originale.

Teorema 4.2.3 (**L. Cioban**, D. Duca, [52]) *Fie X o submulţime din $\mathbb{R}^q$, x^0 un punct interior din X, $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$, $g : X \to \mathbb{R}^m$ şi $h : X \to \mathbb{R}^q$ sunt trei funcţii. Presupunem că:*

(i) g este diferenţiabilă de ordin doi în x^0 şi incavă de ordin doi în x^0 cu privire la η;

(ii) h este diferenţiabilă de ordin doi în x^0 şi avexă de ordin doi x^0 cu privire la η.

Atunci orice soluţie admisibilă a problemei (AP) este de asemenea admisibilă pentru problema (P), adică

$$\mathcal{F}(AP) \subseteq \mathcal{F}(P).$$

Teorema 4.2.4 (**L. Cioban**, D. Duca, [52]) *Fie X o submulţime din $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior din X, $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$, $g : X \to \mathbb{R}^m$, $h : X \to \mathbb{R}^q$ sunt trei funcţii. Presupunem că:*

(i) g este diferenţiabilă de ordin doi în x^0 şi invexă de ordin doi în x^0 cu privire la η;

(ii) h este diferenţiabilă de ordin doi în x^0 şi avexă de ordin doi în x^0 cu privire la η.

Atunci orice soluţie admisibilă a problemei (P) este de asemenea admisibilă pentru problema (AP), adică

$$\mathcal{F}(P) \subseteq \mathcal{F}(AP).$$

4.3 Conexiuni între soluţiile optime ale (0,2) η-problemei de optimizare aproximantă şi soluţiile optime ale problemei originale

Funcţia Lagrange ataşată problemei (AP) este notat cu L_{AP}, adică $L_{AP} : X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ definită astfel: $L_{AP}(x,(v,w)) := f(x) + \langle v, g(x^0)\rangle + \left\langle \eta(x,x^0), [\nabla g(x^0)]^T(v)\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle v, [\eta(x,x^0)]^T[\nabla^2 g(x^0)](\eta(x,x^0))\right\rangle + \langle w, h(x^0)\rangle + \left\langle \eta(x,x^0), [\nabla h(x^0)]^T(w)\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle w, [\eta(x,x^0)]^T[\nabla^2 h(x^0)](\eta(x,x^0))\right\rangle$, pentru orice $(x,(v,w)) \in X \times \left(\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^q\right)$.

Teorema 4.3.3 (**L. Cioban**, D. Duca, [52]) *Fie X o submulţime din $\mathbb{R}^n$ şi x^0 un punct interior din X, $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}^m$, $h : X \to \mathbb{R}^q$ sunt patru funcţii. Presupunem că:*

(i) $\eta(x^0,x^0) = 0$;

(ii) g este diferenţiabilă de ordin doi în x^0 şi g_i, $i \in I(x^0)$ sunt cvasiinvexe de ordin doi în x^0;

(iii) h este diferenţiabilă de ordin doi în x^0 şi h avexă de ordin doi în x^0 cu privire la η.

Dacă $(x^0,(v^0,w^0)) \in X \times \left(\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^q\right)$ *este punct şa al funcţiei Lagrange* L_{AP} *ataşat problemei* (AP), *atunci* x^0 *este soluţie optimă a problemei* (P).

În continuare vom prezenta un exemplu care să arate aplicabilitatea teoremei de mai sus. Exemplul a fost inspirat din [7].

Exemplul 4.3.4 (**L. Cioban**, D. Duca, [52]) *Considerăm problemele de optimizare*

$$\begin{array}{lll}(P_1) & \min & f(x) = \frac{1}{2}\arctan^2 x + \arctan x \\ & & g(x) = (1+x^4)(\arctan^2 x - \arctan x) \leq 0 \\ & & h(x) = 0,\end{array}$$

unde $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *Remarcăm că* $\mathcal{F}(P_1) = \{x\in\mathbb{R}, 0\leq x\leq \frac{\pi}{4}\}$, *şi* $\overline{x}=0$ *este soluţie pentru* (P_1). *Considerăm* $\eta:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\eta(x,\overline{x}) = \frac{1}{2}(\arctan x - \arctan \overline{x})$. *În aceste ipoteze se arată că putem aplica teorema anterioară.*

Teorema 4.3.5 (**L. Cioban**, D. Duca, [52]) *Fie* X *o submulţime din* $\mathbb{R}^n$ *şi* x^0 *un punct interior din* X, $\eta: X\times X\to\mathbb{R}^n$, $f:X\to\mathbb{R}$, $g:X\to\mathbb{R}^m$, $h:X\to\mathbb{R}^q$ *sunt patru funcţii. Presupunem că:*

- (*i*) $\eta(x^0,x^0)=0$;
- (*ii*) f *este invexă în* x^0 *cu privire la* η;
- (*iii*) g *este diferenţiabilă de ordin doi în* x^0 *şi* g_i, $i\in I(x^0)$ *sunt cvasiinvexe de ordin doi în* x^0 *cu privire la* η;
- (*iv*) h *este diferenţiabilă de ordin doi în* x^0 *şi* h *avexă de ordin doi în* x^0 *cu privire la* η;
- (*v*) *este îndeplinită o condiţie de regularitate* (P) *în* x^0;
- (*vi*) $[\eta(x,x^0)]^T[\nabla^2 g(x^0)](\eta(x,x^0)) + [\eta(x,x^0)]^T[\nabla^2 h(x^0)](\eta(x,x^0)) \geqq 0$, *pentru orice* $x\in X$.

Dacă $x^0\in X$ *este soluţie optimă pentru problema* (P) *atunci există un punct* $(v^0,w^0)\in\mathbb{R}_+^m\times\mathbb{R}^q$ *astfel încât* $(x^0,(v^0,w^0)) \in X\times\left(\mathbb{R}_+^m\times\mathbb{R}^q\right)$ *este punct şa al funcţiei Lagrange* L_{AP} *ataşat problemei* (AP).

Teorema 4.3.6 (**L. Cioban**, D. Duca, [52]) *Fie* X *o submulţime din* $\mathbb{R}^n$ *şi* x^0 *un punct interior din* X, $\eta: X\times X\to\mathbb{R}^n$, $f:X\to\mathbb{R}$, $g:X\to\mathbb{R}^m$, $h:X\to\mathbb{R}^q$ *sunt patru funcţii. Presupunem că:*

- (*i*) $\eta(x^0,x^0)=0$;
- (*ii*) f *este diferenţiabilă în* x^0 *şi invexă în* x^0 *cu privire la* η;
- (*iii*) g *este diferenţiabilă de ordin doi în* x^0 *şi* g_i, $i\in I(x^0)$ *sunt cvasiinvexe de ordin doi în* x^0 *cu privire la* η;
- (*iv*) h *este diferenţiabilă de ordin doi în* x^0 *şi* h *avexă de ordin doi în* x^0 *cu privire la* η;
- (*v*) *o condiţie de regularitate este îndeplinită pentru problema* (P) *în* x^0;
- (*vi*) $[\eta(x,x^0)]^T[\nabla^2 g(x^0)](\eta(x,x^0)) + [\eta(x,x^0)]^T[\nabla^2 h(x^0)](\eta(x,x^0)) \geqq 0$, *pentru orice* $x\in X$.

Dacă $x^0 \in X$ *este soluţie optimă pentru problema* (P) *atunci* x^0 *este soluţie optimă pentru problema* (AP).

Teorema 4.3.7 (**L. Cioban**, D. Duca, [52]) *Fie* X *o submulţime din* $\mathbb{R}^n$ *şi* x^0 *un punct interior din* X, η, $\mu : X \times X \to \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}^m$, $h : X \to \mathbb{R}^q$, *sunt cinci funcţii,* f *diferenţiabilă în* x^0, g, h *sunt de două ori diferenţiabile în* x^0, $G : X \to \mathbb{R}^m$, $H : X \to \mathbb{R}^q$ *definite de* (4.1). *Presupunem că:*

(*i*) $\eta(\cdot, x^0) : X \to \mathbb{R}^n$ *este diferenţiabilă în* x^0 *şi* $\eta(x^0, x^0) = 0$;

(*ii*) g_i, $i \in I(x^0)$ *sunt cvasiinvexe de ordin doi în* x^0 *cu privire la* η;

(*iii*) h *este avexă de ordin doi în* x^0 *cu privire la* μ;

(*iv*) f, G *sunt invexe în* x^0 *cu privire la* μ;

(*v*) H *este avexă în* x^0 *cu privire la* μ;

(*vi*) *o condiţie de regularitate este îndelinită pentru problema* (AP) *în* x^0.

Dacă $x^0 \in X$ *este o soluţie optimă pentru problema* (AP) *atunci* x^0 *este soluţie optimă pentru problema* (P).

4.4 Dualitate

Ataşăm problemei (P) problema de optimizare duală

$$
\begin{array}{lll}
(D) & \max & f(x) + \langle v, g(x) \rangle + \langle w, h(x) \rangle \\
 & \text{a.î.} & (x, v, w) \in X \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \\
 & & -v \leqq 0 \\
 & & \nabla f(x) + [\nabla g(x)]^T(v) + [\nabla h(x)]^T(w) = 0,
\end{array}
$$

unde X este o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$ şi $f : X \to \mathbb{R}$, $g = (g_1, ..., g_m) : X \to \mathbb{R}^m$ şi $h = (h_1, ..., h_q) : X \to \mathbb{R}^q$ sunt trei funcţii diferenţiabile.

Notăm prin $\mathcal{F}(D) := \left\{(x, v, w) \in X \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q : -v \leqq 0, \nabla f(x^0) + [\nabla g(x)]^T(v) + [\nabla h(x)]^T(w) = 0\right\}$, mulţimea soluţiilor admisibile problemei (D).

Teorema 4.4.3 *Fie* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *o mulţime nevidă, deschisă şi convexă,* x^0 *un punct interior din* X, $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$, $\mu : X \times X \to \mathbb{R}^q$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}^m, h : X \to \mathbb{R}^q$ *sunt cinci funcţii. Presupunem că:*

(*i*) $\eta(x^0, x^0) = 0$;

(*ii*) g *este diferenţiabilă de ordin doi în* x^0 *şi* g_i, $i \in I(x^0)$ *sunt cvasiinvexe de ordin doi în* x^0 *cu privire la* η;

(*iii*) h *este diferenţiabilă de ordin doi în* x^0 *şi* h_j *sunt funcţii avexe de ordin doi în* x^0 *cu privire la* η;

(*iv*) *o condiţie de regularitate este îndeplinită pentru problema* (P) *în* x^0;

(*v*) $[\eta(x, x^0)]^T [\nabla^2 g(x^0)] (\eta(x, x^0)) + [\eta(x, x^0)]^T [\nabla^2 h(x^0)] (\eta(x, x^0)) \geqq 0$, *pentru orice* $x \in X$.

Dacă (x^0, v^0, w^0) *este o soluţie optimă pentru* (D) *şi dacă există o vecinătate* $V \times W$ *a punctului* (v^0, w^0) *şi o funcţie* $\gamma : V \times W \to X$, *diferenţiabilă în* (v^0, w^0) *astfel încât* $\gamma(v^0, w^0) = x^0$ *şi* $\nabla f(\gamma(v, w)) + [\nabla g((v, w))](v^0) + [\nabla h((v, w))](w^0) = 0$, *pentru orice* $(v, w) \in \mathcal{F}(D)$, *atunci* x^0 *este soluţie optimă pentru problema* (AP).

Teorema 4.4.4 *Fie* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *o mulţime deschisă şi nevidă,* x^0 *un punct interior din* X, $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}^m$, $h : X \to \mathbb{R}^q$ *trei funcţii. Presupunem că:*

(i) η *este diferenţiabilă în* x^0 *şi* $\eta(x^0, x^0) = 0$;

(ii) g *este diferenţiabilă de ordin doi în* x^0 *şi* g_i, $i \in I(x^0)$ *sunt funcţii cvasiinvexe de ordin doi în* x^0 *cu privire la* μ;

(iii) h *este diferenţiabilă de ordin doi în* x^0 *şi* h_j *sunt funcţii avexe de ordin doi în* x^0 *cu privire la* μ;

(iv) f *este invexă în* x^0 *cu privire la* μ;

(v) *o condiţie de regularitate este îndeplinită pentru problema* (AP) *în* x^0.

Dacă x^0 *este soluţie optimă pentru problema* (AP) *şi problema* (P) *satisface condiţiile Kukn-Tucker în* x^0, *atunci există un punct* (v^0, w^0) *astfel încât* (x^0, v^0, w^0) *este soluţie optimă pentru problema* (D).

Bibliografie

[1] L. Altangerel, *A Duality Approach to Gap Functions for Variational Inequalities and Equilibrium Problems*, Dissertation, 2006

[2] L. Altangerel, R.I. Boţ, G. Wanka, *On gap functions for equilibrium problems via Fenchel duality*, Pacific Journal of Optimization, **2**(3), 667–678, 2006

[3] L. Altangerel, R.I. Boţ, G. Wanka, *On the construction of gap functions for variational inequalities via conjugate duality*, Asia-Pacific Journal of Operational Research, **24**(3), 353–371, 2007

[4] L. Altangerel, G. Wanka, *Gap functions for vector equilibrium problems via conjugate duality*, Optimization and Optimal Control, Optimization and Its Applications, Springer Verlag, Berlin and Heidelberg, **39**, 185–197, 2010

[5] Q.H. Ansari, J.C. Yao, *Pre-variational Inequalities in Banach Spaces*, Optimization, Techniques and Applications, **2**, 1165–1172, 1998

[6] T. Antczak, *An η-approximation method in nonlinear vector optimization*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **63**, 225–236, 2005

[7] T. Antczak, *Saddle-point criteria in an η-approximation method for nonlinear mathematical programming problems involving invex functions*, Journal of Optimization Theory and Applications, **132**, 71–87, 2007

[8] T. Antczak, *A Second Order $\eta-$ Approximation Method for Constrained Optimization Problems Involving Second Order Invex Functions,* Applications of Mathematics, **54**(5), 433–445, 2009

[9] S. Antman, *The influence of elasticity in analysis: modern developments*, Bulletin of the American Mathematical Society, **9**(3), 267–291, 1983

[10] H. Attouch, M. Théra, *A general duality principle for the sum of two operators*, Journal of Convex Analysis, **3**, 1–24, 1996

[11] G. Auchmuty, *Variational principles for variational inequalities*, Numerical Functional Analysis and Optimization, **10**(9-10), 863–874, 1989

[12] A. Auslender, *Optimization. Méthods Numériques*, Masson, Paris, 1976

[13] D. Aussel, N. Hadjisavvas, *On quasimonotone variational Inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications, **121**(2), 445–450, 2004

[14] H.H. Bauschke, P.L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York, 2011

[15] C.R. Bector, B.K. Bector, *(Generalized)-bonvex functions and second order duality for a nonlinear programming problem*, Congr. Numerantium, **52**, 37–52, 1985

[16] A. Ben-Israel, B. Mond, *What is invexity?*, The Journal of the Australian Mathematical Society, Series B. Applied Mathematics, **28**, 1–9, 1986

[17] M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini, *Existence of equilibria via Ekeland's principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **305**, 502–512, 2005

[18] M. Bianchi, S. Schaible, *Generalized Monotone bifunctions and equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, **90**(1), 31–43, 1996

[19] G. Bigi, M. Castellani, G. Kassay, *A dual view of equilibrium problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **342**, 17–26, 2008

[20] E. Blum, W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, The Mathematics Student, **63**(1-4), 123–145, 1994

[21] H.V. Boncea, D. Duca, *On the η-(1,2) approximated optimization problems*, Carpathian Journal of Mathematics, **28**(1), 17–24, 2012

[22] J.M. Borwein, A.S. Lewis, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization, Theory and Examples*, Springer, 2000

[23] J.M. Borwein, J.D. Vanderwerff, *Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples*, Cambridge University Press, New York, 2010

[24] J. M. Borwein, Q. J. Zhu, *Techniques of Variational Analysis*, Springer, 2005

[25] R.I. Boţ, *Conjugate Duality in Convex Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 637, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010

[26] R.I. Boţ, A.E. Capătă, *Existence results and gap functions for generalized equilibrium problem with composed function*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **72**, 316–324, 2010

[27] R.I. Boţ, E.R. Csetnek, *Regularity conditions via generalized interiority notions in convex optimization: new achievements and their relation to some classical statements*, Optimization, **61**(1), 35–65, 2012

[28] R.I. Boţ, E.R. Csetnek, G. Wanka, *Sequential optimality conditions for composed convex optimization problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **342**(2), 1015–1025, 2008

[29] R.I. Boţ, E.R. Csetnek, G. Wanka, *Sequential optimality conditions in convex programming via perturbation approach*, Journal of Convex Analysis, **15**(2), 149–164, 2008

[30] R.I. Boţ, S.-M. Grad, *Lower semicontinuous type regularity conditions for subdifferential calculus*, Optimization Methods and Software, **25**(1), 37–48, 2010

[31] R.I. Boţ, S.-M. Grad, G. Wanka, *Duality in Vector Optimization*, Springer, 2009

[32] R.I. Boţ, I.B. Hodrea, G. Wanka, *ε-Optimality conditions for composed convex optimization problems*, Journal of Approximation Theory, **153**, 108–121, 2008

[33] R.I. Boţ, G. Wanka, *A weaker regularity condition for subdifferential calculus and Fenchel duality in infinite dimensional spaces*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **64**(12), 2787–2804, 2006

[34] W.W. Breckner, *Functional Analysis* (in Romanian), Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2009

[35] W.W. Breckner, *Operational Research* (in Romanian), Universitatea Babeş Bolyai, Cluj-Napoca, 1981

[36] F.E. Browder, *Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities*, Proceeding of the National Academy of Sciences, U.S.A., **56**, 1080–1086, 1966

[37] A. Brøndsted, *Conjugate convex functions in topological vector spaces*, Matematiskfysiske Meddelelser udgivet af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, **34**(2), 1–27, 1964

[38] A. Brøndsted, R.T. Rockafellar, *On the subdifferentiability of convex functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, **16**, 605–611, 1965

[39] R.S. Burachik, V. Jeyakumar, *A new geometric condition for Fenchel's duality in infinite dimensional spaces*, Mathematical Programming, **104**(2-3), 229–233, 2005

[40] R.S. Burachik, V. Jeyakumar, Z.-Y. Wu, *Necessary and sufficient conditions for stable conjugate duality*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **64**(9), 1998–2006, 2006

[41] A. Cambini, L. Martein, *Generalized convexity and optimality conditions in scalar and vector optimization*, in: Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity, Springer, New York, 151–193, 2005

[42] M. Castellani, G. Mastroeni, *On the duality theory for finite dimensional variational inequalities*, in: F. Giannessi, A. Maugeri (Eds.), Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems, Plenum Press, New York, 21–31, 1995

[43] D. Chan, J.S. Pang, *The generalized quasi-variational inequality problem*, Mathematics of Operations Research, **7**, 211–222, 1982

[44] G.Y. Chen, C.J. Goh, X.Q. Yang, *On gap functions and duality of variational inequality problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **214**(2), 658–673, 1997

[45] **L. Cioban**, *Duality for an extended equilibrium problem*, submitted to Pacific Journal of Optimization

[46] **L. Cioban**, *Optimality conditions for equilibrium problems*, Proceedings of the 4^{th} IEEE International Conference on Nonlinear Science and Complexity, Budapest, 6-11 August, 95–98, 2012

[47] **L. Cioban**, *Sequential optimality conditions for equilibrium problems*, to appear in Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity

[48] **L. Cioban**, *Sequential optimality conditions for variational inequalities*, General Mathematics, Special Issue, **20**(5), 21–30, 2012

[49] **L. Cioban**, *The dual gap function for an equilibrium problem*, submitted to Optimization

[50] **L. Cioban**, E.R. Csetnek, *Duality for ε-variational inequalities via the subdifferential calculus*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **75**(6), 3142–3156, 2012

[51] **L. Cioban**, E.R. Csetnek, *Revisiting the construction of gap functions for variational inequalities and equilibrium problems via conjugate duality*, to appear in Central European Journal of Mathematics

[52] **L. Cioban**, D. Duca, *Optimization problems and (0,2)-η-approximated optimization problems*, Carpathian Journal of Mathematics, **28**(1), 37–46, 2012

[53] G. Cristescu, L. Lupşa, *Non-Connected Convexities and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002

[54] E.R. Csetnek, *Overcoming the failure of the classical generalized interior-point regularity conditions in convex optimization. Applications of the duality theory to enlargements of maximal monotone operators*, Logos Verlag Berlin, 2010

[55] N. Dinh, J.J. Strodiot, V.H. Nguyen, *Duality and optimality conditions for generalized equilibrium problems involving DC functions*, Journal of Global Optimization, **48**(2), 183–208, 2010

[56] D. I. Duca, E. Duca, *Optimization Problems and $\eta-$Approximation Optimization Problems*, Studia Universitatis Babeş-Boyai, Math, **54**(4), 49–62, 2009

[57] I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976

[58] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach Space Theory The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, 2010

[59] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santaluca, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CSM Books in Mathematics/Ouverages de Mathématiques de la SMC **8**, Springer-Verlag, New York, 2001

[60] F. Facchinei, J.-S. Pang, *Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Vol. I, II, Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag, New York, 2003

[61] W. Fenchel, *On conjugate convex functions*, Canadian Journal of Mathematics, **1**, 73–77, 1949

[62] G. Fichera, *Elastostatic problems with unilateral constraints: the Signorini problem with ambiguous boundary conditions*, Seminari dell'istituto Nazionale di Alta Matematica, 19621963, Rome, Edizioni Cremonese, 613–679, 1964

[63] G. Fichera, *La nascita della teoria delle diseguaglianze variazionali ricordata dopo trent'anni*, Incontro scientifico italo-spagnolo, Roma, 21 ottobre 1993, Atti dei Convegni Lincei, 114, Roma: Accademia Nazionale dei Lincei, 47–53, 1995

[64] G. Fichera, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Memorie della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, **7**(2), 91–140, 1964

[65] G. Fichera, *Sul problema elastostatico di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, **34**(2), 138–142, 1963

[66] F. Giannessi, *A remark on infinite-dimensional variational inequalities* Equilibrium problems with side constraints. Lagrangean theory and duality (Acireale, 1994). Matematiche (Catania), **49**(2), 243–247, 1995

[67] F. Giannessi, *On some connections among variational inequalities, combinatorial and continuous optimization*, Annals of Operations Research, **58**, 181–200, 1995

[68] F. Giannessi, *On Minty variational principle*, New Trends in Mathematical Programming, Kluwer, Dordrecht, 1998

[69] F. Giannessi, *Separation of sets and gap functions for quasi-variational inequalities*, Giannessi, F. (ed.) et al., Variational inequalities and network equilibrium problems. Proceedings of a conference, Erice, Italy, New York, NY: Plenum, 101–121, 1995

[70] C.J. Goh, X.Q. Yang, *Duality in Optimization and Variational Inequalities*, Taylor & Francis, London, 2002

[71] M.S. Gowda, M. Teboulle, *A comparison of constraint qualifications in infinite-dimensional convex programming*, SIAM Journal on Control and Optimization, **28**(4), 925–935, 1990

[72] A. Grad, *Quasi-relative interior-type constraint qualifications ensuring strong Lagrange duality for optimization problems with cone and affine constraints*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **361**(1), 86–95, 2010

[73] M.A. Hanson, *On Sufficiency of the Kuhn Tucker condition*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **80**, 545–550, 1981

[74] P.T. Harker, J.S. Pang, *Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems,* A survey of theory, algorithms and applications, Mathematical Programming Series B, **48**(2), 161–220, 1990

[75] D.W. Hearn, *The gap function of a convex program*, Operational Research Letter, **82**(2), 67–71, 1981

[76] E.C. Henkel, C. Tammer, *ε-variational inequalities for vector approximation problems*, Optimization, **38**(1), 11–21, 1996

[77] E.C. Henkel, C. Tammer, *ε-variational inequalities in partially ordered spaces*, Optimization, **36**(2), 105–118, 1996

[78] J.-B. Hiriart-Urruty, *ε-subdifferential calculus*, in: J.-P. Aubin, R.B. Vinter (eds.), Convex Analysis and Optimization, Research Notes in Mathematics, **57**, Pitman, Boston, 43–92, 1982

[79] J.B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms I: Fundamentals*, Springer-Verlag, Berlin, 1993

[80] J.B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms II: Advanced theory and bundle methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1993

[81] J.B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2001

[82] A. Ioffe, *Three theorems on subdifferentiation of convex integral functionals*, Journal of Convex Analysis, **13**(3-4), 759–772, 2006

[83] F.M.O. Jacinto, S. Scheimberg, *Duality for generalized equilibrium problem*, Optimization, **57**(6), 795–805, 2008

[84] V. Jeyakumar, G. Li, *Stable zero duality gaps in convex programming: complete dual characterizations with applications to semidefinite programs*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **360**(1), 156–167, 2009

[85] V. Jeyakumar, W. Song, N. Dinh, G.M. Lee, *Stable strong duality in convex optimization*, Applied Mathematics Report AMR 05/22, University of New South Wales, Sydney, Australia, 2005

[86] V. Jeyakumar, Z.Y. Wu, *A qualification free sequential Pshenichnyi-Rockafellar Lemma and convex semidefinite programming*, Journal of Convex Analysis, **13**(3-4), 773–784, 2006

[87] S. Karamardian, *Generalized complementarity problem*, Journal of Optimization Theory and Applications, **8**, 161–168, 1971

[88] W. Karush, *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints*, M.Sc. Dissertation. Departament of Mathematics, University of Chicago, Chicago, Illinois, 1939

[89] G. Kassay, *The Equilibrium Problem and Related Topics*, Risoprint, Cluj, Romania, 2000

[90] B.T. Kien, G.M. Lee, *An existence theorem for generalized variational inequalities with discontinuous and pseudomonotone operators*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **74**(4), 1495–1500, 2011

[91] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 88. Academic Press, New York, 1980

[92] I.V. Konnov, S. Schaible, *Duality for equilibrium problems under generalized monotonicity*, Journal of Optimization Theory and Applications, **104**(2), 395–408, 2000

[93] H.W. Kuhn, A.W. Tucker, *Nonlinear programming*, Proceedings of the second Berkeley Symposium, Berkeley: University of California Press, 481–492, 1951

[94] S. Kum, G.S. Kim, G.M. Lee, *Duality for ε-variational inequality*, Journal of Optimization Theory and Applications, **139**(3), 649–655, 2008

[95] C.S. Lalitha, *A note on duality of generalized equilibrium problem*, Optimization Letters, **4**, 57–66, 2010

[96] C.S. Lalitha, G. Bhatia, *Duality in ε-variational inequality problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **356**(1), 168–178, 2009

[97] T. Larsson, M. Patriksson, *A class of gap functions for variational inequalities*, Mathematical Programming, **64**(1), 53–79, 1994

[98] G.M. Lee, D.S. Kim, B.S. Lee, G.Y. Chen, *Generalized vector variational inequality and its duality for set-valued mappings*, Applied Mathematics Letters, **11**, 21–26, 1998

[99] S.J. Li, S.H. Hou, G.Y. Chen, *Generalized differential properties of the Auslender gap function for variational inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications, **124**(3), 739–749, 2005

[100] M. B. Lignola, *Regularized gap functions for variational problems*, Operations Research Letters, **36**(6), 710–714, 2008

[101] J.L. Lions, G. Stampacchia, *Inquations variationnelles non coercives*, Comptes rendus hebdomadaires des sances de l'Acadmie des sciences, **261**, 25–27, 1965

[102] J.L. Lions, G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **20**(3), 493–519, 1967

[103] O.L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1969

[104] D.H. Martin, *The essence of invexity*, Journal of Optimization Theory and Applications, **47**, 65–76, 1985

[105] J.E. Martnez-Legaz, *What is invexity with respect to the same η?*, Taiwanese Journal of Mathematics, **13**, 753–755, 2009

[106] J.E. Martínez-Legaz, W. Sosa, *Duality for equilibrium problems*, Journal of Global Optimization, **35**, 311–319, 2006

[107] J.E. Martínez-Legaz, M. Théra, *ε-subdifferentials in terms of subdifferentials*, Set-Valued Analysis, **4**(4), 327–332, 1996

[108] G. Mastroeni, *Gap functions for equilibrium problems*, Journal of Global Optimization, **27**(4), 411–426, 2003

[109] G.J. Minty, *Monotone (non linear) operators in Hilbert space*, Duke Math. Journal, **29**, 341–346, 1962

[110] S.K. Mishra, G. Giorgi, *Nonconvex Optimization and its Applications - Invexity and Optimization*, Volume 88, Springer - Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008

[111] S.K. Mishra, *Second order invexity and duality in mathematical programming*, Optimization, **42**, 51-69, 1997

[112] J.J. Moreau, *Fonctions convexes en dualité*, (multigraph), Faculté des Sciences, Séminaires de Mathématiques, Université de Montpellier, Montpellier, 1962

[113] U. Mosco, *Dual variational inequalities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **40**, 202–206, 1972

[114] J.-P. Penot, *Subdifferential calculus without qualification assumptions*, Journal of Convex Analysis, **3**(2), 207–219, 1996

[115] E.L. Pop, D. Duca, *Optimization problems, first order approximated optimization problems and their connections*, Carpathian Journal of Mathematics, **28**(1), 133–141, 2012

[116] J. Prapairat, P. Somyot, *Existence of solutions for generalized variational inequality problems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **74**(3), 999–1004, 2011

[117] S.M. Robinson, *Composition duality and maximal monotonicity*, Mathematical Programming, **85**, 1–13, 1999

[118] R.T. Rockafellar, *Conjugate duality and optimization*, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, 16, Society for Industrial and Aplied Mathematics, Philadelphia, 1974

[119] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970

[120] R.T. Rockafellar, *Duality and stability in extremum problems involving convex functions*, Pacific Journal of Mathematics, **21**(1), 167–187, 1967

[121] R.T. Rockafellar, *Duality theorems for convex functions*, Bulletin of the American Mathematical Society, **70**, 189–192, 1964

[122] T.R. Rockafellar, R.J-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer, 1998

[123] L. Shizheng, *Necessary and Sufficient Conditions for Regularity of Constraints in Convex Programming*, Optimization, **25**(4), 329–340, 1992

[124] M. Soleimani-damaneh, *The gap function for optimization problems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **69**(2), 716–723, 2008

[125] G. Stampacchia, *Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes*, Comptes rendus hebdomadaires des sances de l'Académie des sciences, **258**, 4413–4416, 1964

[126] L. Thibault, *Sequential convex subdifferential calculus and sequential Lagrange multipliers*, SIAM Journal on Control and Optimization, **35**(4), 1434–1444, 1997

[127] N. Yamashita, K. Taji, M. Fukushima, *Unconstrained optimization reformulations of variational inequality problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, **92**(3), 439–456, 1997

[128] X.Q. Yang, *On the gap functions of prevariational inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications, **116**(2), 437–452, 2003

[129] X.Q. Yang, *Vector variational inequality and its duality*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **21**, 869–877, 1993

[130] J.C. Yao, *Variational inequalities with generalized monotone operators*, Mathematics of Operations Research, **19**(3), 691–705, 1994

[131] Z. Wu, S.Y. Wu, *Gâteaux differentiability of the dual gap function of a variational inequality*, European Journal of Operational Research, **190**(2), 328–344, 2008

[132] C. Zălinescu, *A comparison of constraint qualifications in infinite-dimensional convex programming revisited*, Journal of Australian Mathematical Society Series B, **40**(3), 353–378, 1999

[133] C. Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, 2002

[134] J. Zhang, C. Wan, N. Xiu, *The dual gap function for variational inequalities*, Applied Mathematics and Optimization, **48**(2), 129–148, 2003

[135] D.L. Zhu, P. Marcotte, *An extended descent framework for variational inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications, **80**(2), 349–366, 1994