UNIUNEA EUROPEANĂ
GUVERNUL ROMÂNIEI MINISTERUL MUNCII, FAMILIEI ŞI PROTECŢIEI SOCIALE AMPOSDRU
Fondul Social European POSDRU 2007-2013
Instrumente Structurale 2007-2013
MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI
OIPOSDRU
UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA

Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică

Oana Ruxandra Tuns (Bode)

Probleme particulare de optimizare cu aplicaţie în economie

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat: Prof. Univ. Dr. Liana Lupşa

FONDUL SOCIAL EUROPEAN
Investeşte în OAMENI

Titlul proiectului
„Studii doctorale inovative într-o societate bazată pe cunoaştere"
POSDRU/88/1.5/S/60185
Proiect cofinanţat din Fondul Social European
prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane
2007-2013

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
Departamentul Cercetare şi Management de Programe
Str. Universităţii, nr. 7-9, 400091 Cluj-Napoca
Tel. (00) 40 - 264 - 40.53.00*; int. 5329
Fax: 40 - 264 - 59.19.06
E-mail: bd.posdru2008@ubbcluj.ro

Cuprins

Introducere

"Viaţa presupune luarea unor decizii. Deciziile, indiferent dacă sunt luate de către un grup sau un individ, de obicei implică mai multe obiective contradictorii. Observaţia că problemele generate de viaţa de zi cu zi trebuie rezolvate optim în funcţie de anumite criterii, care nu permit determinarea unei soluţii ideale - optimă pentru fiecare persoană care ia decizia în funcţie de fiecare dintre criteriile luate în considerare - a condus la dezvoltarea optimizării multicriteriale." (EHRGOTT M. [27])

Cercetările operaţionale, adesea considerate a fi un subdomeniu al matematicii, sunt o disciplină care se ocupă cu aplicarea metodelor analitice avansate cu scopul de a ajuta în luarea unor decizii mai bune. În cazul problemelor complexe de luare a deciziilor, acestea conduc la soluţii optime sau aproape de ele. De cele mai multe ori scopul este determinarea maximului sau a minimului unor obiective din lumea reală precum profitul, performanţa, randamentul, pierderile, riscul, costul etc.

Realizările proprii din prezenta teză se referă la introducerea unor tipuri particulare de probleme de optimizare generate de probleme economice concrete. Pentru fiecare astfel de problemă studiată se dau condiţii necesare şi/sau suficiente de optim pe baza cărora se elaborează o metodă de rezolvare. Metoda urmăreşte caracteristicile specifice ale funcţiei şi/sau ale restricţiilor.

După cum sugerează şi titlul tezei, studiem diferite tipuri particulare de probleme de optimizare lexicografică multicriterială şi de probleme de optimizare pe mai multe nivele, legătura fiind dată de punctul de vedere discret în abordarea lor. Toate tipurile de probleme studiate se bazează pe aplicaţii concrete, care pot fi întâlnite în situaţii reale din viaţa de zi cu zi.

Oportunitatea de a efectua cercetări într-un domeniu atât de atractiv reprezintă un real privilegiu. Această teză conţine rezultatele proprii ale autoarei, obţinute individual sau în colaborare, relative la probleme economice concrete din diferite domenii economice, cum ar fi: managementul costurilor, teoria portofoliilor, transferul tehnologic şi alocarea şomerilor la cursurile de pregătire profesională.

Întregul conţinut este împărţit în şase capitole, precedate de o introducere şi urmate de o bibliografie ce include 138 de referinţe.

Capitolul 1, denumit *Preliminarii*, conţine o succintă prezentare referitoare la: problemele de optimizare multicriterială, problemele de optimizare lexicografică multicriterială şi problemele de optimizare pe mai multe nivele. De asemenea, se evidenţiază situaţia în care, într-o problemă de optimizare pe mai multe nivele, coeficienţii depind de unul sau mai mulţi parametri. O problemă de acest tip, obţinută prin modelarea matematică a unei probleme de ordin practic, este prezentată în Capitolul 6 al prezentei teze.

Capitolul 2, denumit *Probleme de optimizare lexicografică multicriterială de tip timp şi* *puncte de optim cu proprietatea P (pipeline)*, conţine în întregime rezultate originale, obţinute de autoare singură sau în colaborare, incluse în lucrările [76], [118], [114] şi [115]. Începem expunerea noastră explicând ceea ce înţelegem prin probleme lexicografice multicriteriale cu p funcţii obiectiv de tip timp (LpBP). Apoi, în lema 2.1.2 şi teorema 2.1.3 studiem structura mulţimii soluţiilor optime ale acestui tip de problemă. În secţiunea 2.2 introducem noţiunea de soluţie optimă cu proprietatea P (pipeline) pentru problemele lexicografice multicriteriale de tip timp şi analizăm unele aspecte relative la mulţimea soluţiilor optime cu proprietatea P. Introducem noţiunea de punct de minim cu proprietatea P a unei funcţii de tip timp relativ la o mulţime (definiţia 2.2.1). Observăm că în această definiţie funcţia f nu apare, dar teorema 2.2.2 justifică utilizarea termenului "minim". Exemple de puncte de minim care au proprietatea P şi care nu au această proprietate se găsesc în exemplul 2.2.3. În propoziţiile 2.2.4 şi 2.2.5 se dau două metode diferite, care pot fi folosite pentru a verifica dacă un punct are proprietatea P. Unele proprietăţi ale mulţimii tuturor punctelor de minim cu proprietatea P sunt prezentate în teorema 2.2.2, propoziţiile 2.2.7, 2.2.8 şi 2.2.9. În secţiunea 2.3 studiem problemele lexicografice de tip timp pentru care mulţimea tuturor soluţiilor admisibile este discretă. Se analizează şi structura mulţimii soluţiilor optime (teoremele 2.3.6 şi 2.3.7), precum şi structura mulţimii soluţiilor optime cu proprietatea P pentru aceste tipuri particulare de probleme (propoziţiile 2.3.8, 2.3.10, 2.3.11 şi corolarul 2.3.9). În secţiunea 2.4, bazându-ne pe teorema 2.4.2, relevăm o metodă de determinare a unei soluţii optime cu proprietatea P pentru problemele lexicografice de tip timp discrete. Această metodă se încadrează în tehnica ponderilor. Originalitatea constă în faptul că tipul ponderii introdus de către noi permite obţinerea directă a punctelor optime cu proprietatea P. Am obţinut astfel o generalizare atât a metodei folosite de către BANDOPADHYAYA L. [6] cât şi a celei descrise de către ZAREPISHEH M. şi KHORRAM E. [135].

În **Capitolul 3**, denumit *O aplicaţie referitoare la managementul costurilor unei firme*, pornim de la o problemă concretă legată de planificarea modului de achiziţionare şi transport a laptelui ce urmează a fi colectat în vederea prelucrării lui, cu cerinţa minimizării costului colectării laptelui şi, în această situaţie, a minimizării laptelui stocat, ţinându-se cont şi de unele cerinţe suplimentare. Generalizăm apoi modelul matematic ataşat problemei concrete. Noul model, ca de altfel şi cel iniţial, este un tip special de problemă de optimizare pe două nivele în care mulţimea soluţiilor admisibile reprezintă mulţimea subgrafelor unui graf dat. Aceste subgrafe îndeplinesc anumite restricţii date. Se dă o metodă de rezolvare a problemei bazată pe tehnica splitării.

Menţionăm faptul că problema studiată nu numai că modelează matematic o problemă concretă de management a costurilor, dar, în acelaşi timp, problema poate fi interpretată ca o generalizare a problemei rutelor sau ca o generalizare a problemei voiajorului comercial. Pentru rezolvarea modelului generalizat, folosim tehnica splitării. În baza lemelor 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 şi a teoremelor 3.2.4 şi 3.2.5, reducem rezolvarea acestei probleme la rezolvarea a trei probleme: (PP), $(P_1(H_0))$, $(P_2(H_0))$, unde H_0 este o soluţie optimă a primei probleme. Problema $(P_1(H_0))$ este o problemă clasică de determinare a minimului unei funcţii pe o mulţime dată de subgrafe ale unui graf. Problema $(P_2(H_0))$ este o problemă de optimizare lexicografică bicriterială. Utilizând metoda prezentată în secţiunea 2.4, putem reduce rezolvarea acestei ultime probleme tot la rezolvarea unei probleme clasice de determinare a minimului unei funcţii pe o mulţime dată de subgrafe ale unui graf. În acest scop am demonstrat teorema 3.2.6. Toate rezultatele prezentate în acest capitol sunt originale. Ele au fost obţinute în colaborare şi au fost publicate în GOINA D. şi TUNS

(Bode) O.R. [43]. Considerăm că rezultatele obţinute de noi în acest capitol pun în evidenţă un nou tip de problemă de optimizare pe două nivele, care poate fi rezolvată exact prin tehnica splitării. De asemenea evidenţiază un nou tip de problemă a rutelor, deci pot aduce o completare la lucrările Gutin G. şi Punnen A. [45] şi Toth P. şi Vigo D. [120].

Capitolul 4, denumit *Aplicaţii ale optimizării multicriteriale relativ la programele de pregătire profesională a şomerilor*, se ocupă cu studiul, din punct de vedere al optimizării, a unor probleme economice concrete legate de repartizarea şomerilor la cursurile de formare profesională. În paragraful 4.2 formulăm două probleme economice generate de repartizarea şomerilor la aceste cursuri. Menţionăm faptul că ambele probleme reprezintă două noi generalizări a problemelor clasice de asignare. Prin urmare, aceste probleme completează rezultatele obţinute de către Pentico D.W. [92]. În subparagraful 4.3 studiem problema economică (AEP_1). Prezentăm modelul matematic corespunzător şi dăm condiţii necesare şi suficiente de optimalitate (propoziţiile 4.3.3, 4.3.5, 4.3.6 şi 4.3.7 şi teorema 4.3.14). Bazându-ne pe propoziţiile 4.3.3 şi 4.3.5, prezentăm o metodă pentru rezolvarea problemei (PM). În subparagraful 4.4 studiem cea de a doua problemă economică, notată prin (AEP_2). În propoziţia 4.4.1 este dată o condiţie necesară şi suficientă ca o soluţie admisibilă să fie şi optimă. Apoi, prezentăm modul în care tehnica introdusă în subparagraful anterior poate fi folosită pentru rezolvarea acestei probleme. Tehnica introdusă de către noi este mai eficientă decât cea dată de către Della Croce F., Paschos V.Th. şi Tsoukias A. [24]. Toate rezultatele matematice din acest capitol sunt originale şi se regăsesc în lucrările [116] şi [119].

Capitolul 5, denumit *Aplicaţii practice legate de optimizarea portofoliilor*, este dedicat problemelor economico-financiare relative la teoria portofoliilor.

În paragraful 5.1, după o succintă prezentare referitoare la teoria modernă a portofoliilor dată în subsecţiunea 5.1.1, evidenţiem în subsecţiunea 5.1.2 cele mai cunoscute şi utilizate modele de selecţie a portofoliilor, adică modelele de tip Markowitz. În continuare, în subsecţiunea 5.1.3 introducem o relaţie între modelele de selecţie a portofoliilor de tip Markowitz şi optimizarea bicriterială. Prin intermediul acestei legături evidenţiate, dăm un nou mod de abordare pentru problema de selecţie a portofoliilor (propoziţiile 5.1.2 şi 5.1.4). Folosind rezultatele obţinute, în subsecţiunea 5.1.4 analizăm un tip particular de probleme de selecţie a portofoliilor. Modelul matematic ataşat acestui tip de problemă este o problemă de optimizare fracţionară pseudo-booleană. Contribuţiile autoarei cu privire la cele prezentate în acest prim paragraf au fost publicate în lucrarea [110]. Tot ceea ce prezentăm în continuare în acest capitol reprezintă rezultate originale ce sunt incluse în lucrările [75], [111] şi [112].

În paragraful 5.2 prezentăm două probleme diferite de selecţie a portofoliului optim. Pentru fiecare dintre ele construim modelul matematic corespunzător, respectiv problemele (EB) şi (EBCT).

În paragraful 5.2.1 studiem problema (EB), care reprezintă o problemă de optimizare de asignare, pe două nivele, de tip cost. Particularităţile acestei probleme ne permit utilizarea tehnicii splitării pentru rezolvarea ei (a se vedea teoremele 5.2.1, 5.2.2 şi corolarul 5.2.5).

În paragraful 5.2.3, extindem problema economică, pe baza unor noi restricţii. Modelul matematic ataşat acestei probleme, adică problema (EBCT), este o problemă de optimizare pe două nivele în care funcţia de nivel inferior este bicriterială de tip cost-timp. Din cunoştinţele noastre, acest tip de problemă de optimizare pe două nivele nu este analizat în literatură. În rezolvarea acestei probleme utilizăm atât tehnica splitării cât şi tehnica introdusă în secţiunea 2.4 (a se vedea teoremele 5.2.9, 5.2.10, 5.2.12, 5.2.13 şi 5.2.14). De asemenea, se dă un algoritm pentru rezolvarea acestei probleme, ilustrat printr-un exemplu.

Capitolul 6, denumit *Aplicaţii ale optimizării pe mai multe nivele în transferul tehnologic*, este dedicat studiului problemelor economice referitoare la transferul tehnologic. Începem în secţiunea 6.1 cu o succintă prezentare referitoare la transferul tehnologic, apoi continuăm cu formularea, în paragraful 6.2, a problemei economice concrete studiate de noi: un model Stackelberg în care două firme competitoare pe piaţă, A şi B, produc n produse diferenţiate. Firma A, pe care o vom numi în continuare firmă lider, se angajează într-un proces de cercetare - dezvoltare, care îi oferă o inovaţie endogenă, ce determină reducerea costurilor de producţie. Firma B nu face acest lucru.

Obiectivul nostru este analiza, în secţiunile care urmează, atât a situaţiei când cele două firme concurează pe piaţă fără ca firma lider (leader firm) să vândă inovaţia, situaţie numită *benchmark* sau *no-licensing case*, cât şi a celei când firma lider A vinde inovaţia firmei B, care se va numi în continuare firmă "urmaş" (follower firm), situaţie numită *licensing*. În acest ultim caz, analiza o vom face urmărind trei posibilităţi de contracte de vânzare:
- vânzarea inovaţiei pe baza perceperii unei taxe pe fiecare unitate de produs vândut de firma "urmaş", caz denumit *per-unit royalty licensing case*;
- vânzarea inovaţiei pe baza perceperii unei taxe fixe, independente de cantitatea de produs vândută de firma "urmaş", caz denumit *fixed-fee licensing case*;
- vânzarea inovaţiei pe baza perceperii unei taxe sub forma combinaţiei celor două tipuri de taxe de mai sus, caz denumit *two-part tariff licensing case*. Toate rezultatele prezentate în paragrafele 6.2 - 6.5 din teză sunt originale şi sunt cuprinse în lucrările [11], [32], [33], [113] şi [118].

În secţiunea 6.3 ataşăm modelul matematic problemei economice studiate pentru cazul benchmark. Noutatea constă în faptul că acest model matematic reprezintă o problemă de optimizare parametrică pe trei nivele cu doi parametri în funcţiile obiectiv. Acest lucru permite rezolvarea problemei matematice folosind variabilele problemelor de nivel superior ca parametri în problemele de nivel inferior (propoziţiile 6.3.2, 6.3.4, 6.3.6 şi 6.3.8). În propoziţia 6.3.6 şi observaţiile 6.3.7 şi 6.3.9 determinăm domeniul de admisibilitate al parametrului care reprezintă gradul de diferenţiere a produselor. Evidenţiem faptul că pentru cazul particular când $n = 1$ şi ambii parametri aparţin intervalului $]0, 1[$, soluţia optimă a problemei matematice coincide cu soluţia optimă a problemei economice. Mai mult, rezultatul obţinut, că valoarea absolută a parametrului care reprezintă gradul de diferenţiere a produselor nu poate depăşi valoarea 1, are o semnificaţie economică importantă. Rezultatul justifică într-o oarecare măsură faptul că acest parametru aparţine intervalului $]0, 1[$, după cum este utilizat şi în literatura economică. În subparagraful 6.3.2 reluăm problema economică formulată în paragraful 6.2, pentru cazul particular $n = 1$. În acest paragraf se determină valoarea optimă pentru unele variabile care au o semnificaţie importantă din punct de vedere economic, cum ar fi: profitul ambelor firme, surplusul consumatorului şi bunăstarea socială. Menţionăm că pentru aceste variabile am utilizat notaţiile din literatura economică de specialitate. Am analizat efectele gradului de diferenţiere a produselor asupra tuturor acestor variabile, precum şi asupra valorii optime a mărimii inovaţiei şi a cantităţii optime produse de fiecare firmă (teorema 6.3.11 şi observaţia 6.3.12). Ca noutate principală a acestor rezultate am remarcat faptul că soluţiile matematice obţinute pentru valorea optimă a mărimii inovaţiei şi a cantităţii produse de fiecare firmă coincid cu valorile obţinute aici. În paragraful 6.4 ataşăm modelul matematic problemei economice concrete în cazul unui contract de tip per-unit royalty. Noutatea constă în faptul că acest model matematic reprezintă o problemă de optimizare parametrică pe patru nivele cu doi parametrii în funcţiile obiectiv. Din nou rezolvăm problema matematică folosind variabilele din problemele de nivel superior ca şi parametri în problemele de nivel inferior (propoziţia 6.4.2). În subparagraful 6.4.2 reluăm problema economică formulată în paragraful 6.2, pentru cazul particular $n = 1$. Ca şi în subsecţiunea 6.3.2, se determină valoarea optimă pentru mărimea inovaţiei, a cantităţii şi a profitului pentru fiecare firmă, a surplusului consumatorului şi a bunăstării sociale. Din nou, analizăm efectele gradului de diferenţiere a produselor asupra tuturor acestor variabile (teorema 6.4.3 şi observaţia 6.4.4). De asemenea, evidenţiem faptul că soluţiile matematice obţinute pentru valorea optimă a mărimii inovaţiei şi a cantităţii produse de fiecare firmă coincid cu valorile obţinute aici. În paragraful 6.5, respectiv 6.6, rezolvăm problema economică formulată în paragraful 6.2 pentru cazul particular $n = 1$, în situaţia în care vânzarea inovaţiei are loc pe baza unui contract de tip fixed-fee, respectiv a unuia de tip two-part tariff. Prin intermediul observaţiei 6.5.1 şi a teoremei 6.5.2, respectiv a teoremelor 6.6.2 şi 6.6.3, prezentăm interpretarea economică a rezultatelor matematice obţinute. Contribuţiile autoarei se referă la:

• Analiza şi compararea tuturor cazurilor posibile referitoare la licensing (pre-licensing, per-unit royalty licensing, fixed-fee licensing şi two-part tariff licensing) în cadrul unui duopol Stackelberg diferenţiat, în situţia în care una dintre firme investeşte în cercetare şi dezvoltare cu scopul de a obţine o reducere a costurilor de producţie.
• Analiza vânzării inovaţiei pe baza unui contract de tip per-unit royalty şi a unuia de tip fixed-fee, în cadrul modelelor Cournot şi Bertrand.
• Compararea dintre rezultatele obţinute de noi şi cele obţinute de către Li C. şi Ji X. [68], pentru acelaşi tip de duopol [11].
• Modelarea matematică folosind problemele de optimizare parametrică în cazul benchmark şi per-unit royalty în cadrul duopolului Stackelberg în care cele două firme competitoare pe piaţă produc n produse diferenţiate. În acest fel, obţinem unele explicaţii matematice referitoare la anumite considerente economice.

Rezultatele din prezenta teză sunt incluse în 19 lucrări, realizate de către autoare singură sau în colaborare (a se vedea [11], [32], [33], [43], [48], [49], [50], [75], [76], [110], [111], [112], [113], [118], [114], [115], [116], [117] şi [119]). 10 dintre aceste lucrări sunt deja publicate, 6 au fost acceptate pentru publicare, iar 3 au fost trimise spre recenzie.

Keywords: modelare matematică, optimizare multicriterială, optimizare lexicografică, optimizare pe mai multe nivele, optimizare pe două nivele pe un graf, optimizare parametrică pe mai multe nivele, problemă lexicografică multicriterială de tip timp, puncte de minim lexicografic cu proprietatea P, problemă de optimizare lexicografică discretă cu funcţii obiectiv de tip timp, problemă de asignare, problemă de selecţie a portofoliului, vânzarea inovaţiei (licensing), model Stackelberg diferenţiat, benchmark, vânzarea inovaţiei pe baza achitării unei taxe pe fiecare unitate de produs, vânzarea inovaţiei pe baza achitării unei taxe fixe independente de cantitatea produsă, vânzarea inovaţiei pe baza unei combinaţii între taxa achitată pe fiecare unitate de produs şi cea independentă de cantitatea produsă.

Mulţumiri

În primul rând doresc să aduc mulţumiri deosebite doamnei Prof. Univ. Dr. Liana Lupşa, de la Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca, coordonatoarea acestei lucrări. Analiza pertinentă a rezultatelor ştiinţifice şi sugestiile domniei sale s-au constituit într-un suport stabil în vederea conceperii, elaborării şi finalizării prezentei teze. Timpul petrecut cu mine pentru pregătirea tezei, experienţa, disponibilitatea şi eficienţa sa caracteristică, m-au ajutat într-o măsură mult mai mare decât pot exprima câteva cuvinte de mulţumire.

În acelaşi timp sincere mulţumiri sunt adresate domnului Prof. Univ. Dr. Flávio Ferreira, şi soţiei sale Prof. Univ. Dr. Fernanda A. Ferreira, de la ESEIG, Polytechnic Institute of Porto, Portugalia, pentru noile idei de cercetare sugerate şi pentru îndrumarea profesională acordată în timpul stagiului de cercetare întreprins în Portugalia.

Adresez mulţumiri şi tuturor membrilor comisiei de îndrumare, Prof. Univ. Dr. Dorel Duca, Prof. Univ. Dr. Marian Mureşan şi Conf. Univ. Dr. Ioana Chiorean, de la Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca.

Sincere mulţumiri sunt apoi adresate domnişoarei Prof. Univ. Dr. Gabriela Cristescu de la Universitatea "Aurel Vlaicu" din Arad, pentru sfaturile oferite din inimă, pentru ajutorul acordat în pregătirea lucrărilor ştiinţifice, pentru toate discuţiile, îndrumările şi încurajările care m-au ajutat să ajung la finalizarea acestei teze.

Totodată sunt recunoscătoare tuturor membrilor Catedrei de Analiză şi Optimizare de la Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca.

Dintr-un punct de vedere personal, adresez cuvinte de mulţumire doamnei Lect. Univ. Dr. Carmen Guţ, de la Facultatea de Business, Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca.

Chiar dacă numai în final adresez mulţumiri părinţilor mei Ioan şi Maria Tuns, precum şi familiei fratelui meu Ciprian, Simona, Maria şi Iulia Tuns, ei ştiu că în inima mea ocupă primul loc. Şi-au revărsat dragostea lor asupra mea, m-au sprijinit în momente grele, mi-au dat imbold în pregătirea de specialitate de-a lungul anilor de studiu. Mereu mi-au fost aproape. Pentru toate acestea, dar şi pentru multe altele, din inimă ,,Vă mulţumesc!"

De asemenea, mulţumiri pentru sprijinul financiar acordat de către Institutul de Studii Doctorale (proiectul POSDRU/88/1.5/S/60185).

Capitolul 1

Preliminarii

În vederea modelării matematice a diverselor tipuri de probleme economice studiate în prezenta teză folosim diferite noţiuni legate de problemele de optimizare multicriterială, problemele de optimizare multicriterială lexicografică şi problemele de optimizare pe mai multe nivele (multilevel).

1.1 Noţiuni şi rezultate relative la problemele de optimizare multicriterială

Există multe probleme practice în care scopul este acela de a realiza concomitent mai multe obiective. Aceste probleme sunt numite probleme de optimizare multicriterială sau multi-obiectiv şi sunt generate de diverse probleme de ordin practic care apar în viaţa de zi cu zi. Rezolvarea lor poate fi abordată în diverse moduri, menţionate succint în teză. Sunt amintite astfel noţiunile de: punct ideal (punct de maxim global/punct de minim global), punct max-eficient, respectiv punct min-eficient şi punct nedominat în raport cu o relaţie de preferinţă.

Printre numeroasele lucrări în care sunt studiate problemele de optimizare multicriterială, amintim: [27], [57], [72], [88], [100] şi [109]. De asemenea, amintim lucrări ale unor autori români foarte utile din punct de vedere practic, cum ar fi [3], [5], [90], [108] şi [121].

1.2 Noţiuni şi rezultate relative la problemele de optimizare lexicografică

Problemele de optimizare lexicografică multicrietrială apar atunci când există obiective contradictorii într-o problemă de decizie şi, suplimentar, aceste obiective trebuie să fie luate în considerare într-o ordine ierarhică, care nu poate fi controlată de către persoana care ia decizia. Exemple concrete a căror model matematic este un astfel de tip de problemă sunt date, spre exemplu, în lucrările [10], [53] şi [131].

În acest paragraf reamintim noţiunile clasice de relaţie de ordonare lexicografică, punct de maxim (respectiv, minim) lexicografic al unei funcţii relative la o mulţime dată, noţiuni utilizate în prezenta teză.

În general, problema de optimizare o vom nota prin:

$$(\text{LP}) \quad \begin{cases} f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \to \text{lex} - \max \quad (\text{sau lex} - \min), \\ x \in S. \end{cases}$$

Există situaţii în care nu toate criteriile urmăresc o maximizare, sau toate o minimizare. De aceea, în cazul în care acest lucru se întâmplă, vom folosi o notaţie specifică care să precizeze ce se urmăreşte: maximizarea sau minimizarea. Numim punct de optim al problemei (LP) orice punct de maxim (minim) lexicografic al funcţiei f relativ la mulţimea S.

Există numeroşi algoritmi care pot fi folosiţi pentru rezolvarea problemei (LP), care, după cum se prezintă în Zarepisheh M. şi Khorram E. [135], au la bază două tehnici diferite de lucru, cunoscute sub denumirea de metoda secvenţială, respectiv metoda ponderilor. În teză vom folosi ambele tehnici.

1.3 Noţiuni şi rezultate relative la problemele de optimizare pe mai multe nivele

Optimizarea pe mai multe nivele (multilevel), şi implicit pe două nivele (bilevel), a devenit în ultimul timp un domeniu important al optimizării. O bibliografie detaliată legată de această tematică este dată în [123]. Problemele de optimizare pe mai multe nivele sunt folosite pentru modelarea a numeroase tipuri de probleme concrete, cum ar fi: probleme de proiectare a reţelelor [13], determinarea preţului optim [71], probleme de fixare optimă a semnalului [67], probleme de transport [26], probleme legate de organizarea transportului cu trenul [40] şi probleme de alocare a resurselor [89].

În cele ce urmează, prezentăm formularea problemei de optimizare pe două nivele după cum este dată în [25].

Fie mulţimile $D \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, $X \subseteq \mathbf{R}^n$, $Y \subseteq \mathbf{R}^m$. Considerăm funcţiile $F : D \to \mathbf{R}$, $f : D \to \mathbf{R}$, $G : D \to \mathbf{R}^p$ şi $g : D \to \mathbf{R}^q$.

Introducem mulţimea $S = \{x \in X,\ y \in Y \mid (x, y) \in D,\ G(x, y) \leqq 0_p,\ g(x, y) \leqq 0_q\}$. Pentru fiecare $x \in X$, notăm $S_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in D,\ G(x, y) \leqq 0_p\}$ şi, în ipoteza că $S_x \neq \emptyset$, notăm $S_x^* := \{\arg\min(\arg\max)\, \{f(x, y) | y \in S_x\}\}$.

Matematic, folosind notaţiile de mai sus, problema de optimizare pe două nivele se notează astfel:

$$(BP) \quad \begin{cases} F(x, y) \ \to \ \min(\max), \\ G(x, y) \leqq 0_p, \\ x \in X, \\ y \in S_x^*. \end{cases} \tag{1.1}$$

Reamintim terminologia utilizată în literatura de specialitate pentru acest tip de probleme de optimizare: mulţimea relaxată a soluţiilor admisibile (relaxed feasible set), mulţimea soluţiilor admisibile, mulţimea soluţiilor admisibile de nivel inferior, mulţimea soluţiilor de reacţie raţională a subordonatului (follower's rational reaction set), valoarea optimă de nivel inferior, funcţie obiectiv de nivel superior, funcţie obiectiv de nivel inferior, problemă de nivel superior, problemă de nivel inferior.

Menţionăm că există cazuri (a se vedea spre exemplu [35] şi [101]) în care rezolvarea problemei de optimizare bilevel poate fi redusă la rezolvarea unei probleme de optimizare multicriterială, noua problemă obţinută putând fi rezolvată utilizând metoda ponderilor. O tehnică asemănătoare vom aplica şi în teză.

Un alt aspect, de noutate, dar care apare în aplicaţiile practice, este cel care presupune considerarea problemelor de optimizare pe două şi pe mai multe nivele în care coeficienţii funcţiilor obiectiv sau ai restricţiilor depind de unul sau mai mulţi parametri. Un astfel de tip de problemă este numit problemă de optimizare parametrică pe două (pe mai multe) nivele. De fapt, a rezolva o problemă de optimizare parametrică înseamnă a specifica, pentru fiecare valoare a parametrului, care este soluţia problemei de optimizare pe două nivele obţinută dacă parametrul este fixat la această valoare. Este bine ştiut faptul că în cazul optimizării pe două nivele se lucrează în ipoteza că atât funcţiile obiectiv de nivel inferior, cât şi funcţia obiectiv de nivel superior, sunt mărginite pe mulţimea soluţiilor optime. De acest lucru trebuie ţinut cont atunci când se determină mulţimea caracteristică (domeniul caracteristic) de variaţie a parametrilor.

Capitolul 2

Probleme de optimizare lexicografică multicriterială de tip timp şi puncte de optim cu proprietatea P (pipeline)

În acest capitol prezentăm câteva rezultate legate de optimizarea lexicografică multicriterială în care funcţia scop are p componente de tip timp.

Amintim faptul că în cadrul problemelor de transport de tip timp, timpul în care se realizează transportul este egal cu maximul dintre timpii în care se efectuează transportul dintr-o locaţie în alta. Soluţiile optime, în cazul problemelor de minim, se bucură de proprietatea că acest timp maxim este cel mai mic. În problemele practice, dintre soluţiile optime sunt preferate acelea pentru care timpul maxim corespunzător este atins de un număr cât mai mic de ori. Această proprietate a fost sesizată de Bandopadhyaya L. [6]. În articolul amintit, acesta introduce, pentru o problemă de transport triaxială cu funcţia scop bicriterială de tip cost-timp, noţiunea de "lexicographic optimal solution with minimum pipeline". Pornind de la acest articol, am introdus noţiunea de *punct de optim lexicografic cu proprietatea P* pentru o problemă de optimizare lexicografică multicriterială în care funcţia scop are p componente de tip timp. Astfel de puncte se întâlnesc în problemele cu caracter aplicativ, după cum se va vedea şi în teză. În acest capitol ne vom ocupa cu studiul structurii mulţimii punctelor de minim lexicografic şi cu studiul structurii mulţimii punctelor de minim lexicografic cu proprietatea P. Acelaşi studiu îl facem şi în cazul în care mulţimea soluţiilor admisibile este o mulţime discretă. Menţionăm faptul că astfel de studii nu am întâlnit în literatura consultată. De asemenea, dăm o teoremă care permite obţinerea unei soluţii optime cu proprietatea P, pentru o problemă de optimizare discretă lexicografică multicriterială în care funcţia scop are p componente de tip timp, prin rezolvarea unei probleme de optimizare discretă cu o singură funcţie scop. Această teoremă reprezintă o generalizare a teoremelor din Bandopadhyaya L. [6] şi a teoremelor din Zarepisheh M. şi Khorram E. [135]. Rezultatele din acest capitol sunt conţinute în lucrările Tuns (Bode) O.R. şi Lupşa L., [76] şi [118].

2.1 Probleme de optimizare lexicografică multicriterială de tip timp

În această secţiune formulăm problema de optimizare lexicografică cu funcţie scop cu p componente de tip timp şi studiem structura mulţimii soluţiilor sale optime.

Fie m, n, p numere naturale nenule, cu $1 \le p \le m$. Notăm

$$I := \{1, \dots, m\},\ J := \{1, \dots, n\},\ H := \{1, \dots, p\}.$$

Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n_+$. Spunem că funcţia vectorială $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ are p componente de *tip timp* (*bottleneck type*) dacă există p numere naturale $i_1, \dots, i_p$ şi o matrice de numere reale $T = [t_{hj}]$ cu p linii şi n coloane astfel încât pentru fiecare $h \in H$,

$$f_{i_h}(x) \ = \ \max\{t_{hj} \cdot \operatorname{sgn}(x_j) \,|\, j \in J\},\ \forall\, x \in \Omega \tag{2.1}$$

sau

$$f_{i_h}(x) \ = \ \min\{t_{hj} \cdot \operatorname{sgn}(x_j) \,|\, j \in J\},\ \forall\, x \in \Omega. \tag{2.2}$$

Fie $I^c := I \setminus \{i_h | h \in H\}$.

În acest capitol vom considera numai cazul în care pentru fiecare componentă de tip timp se foloseşte formula (2.1). În capitolul 4 al tezei vom folosi formula (2.2). În general, în cadrul unei probleme pot fi folosite şi ambele tipuri.

Pentru fiecare $h \in H$ notăm:

$$Z_h = \{t_{hj} | j \in J\},\ q_h := \operatorname{card}(Z_h)\ \text{ şi }\ K_h := \{1, \dots, q_h\}.$$

Să observăm că, pentru fiecare $h \in H$, mulţimea Z_h este finită. Ca urmare, putem numerota elementele mulţimii Z_h cu $z_{h1}, \dots, z_{hq_h}$, astfel încât să avem

$$z_{h1} \ > \ z_{h2} \ > \cdots > \ z_{hq_h}. \tag{2.3}$$

Pentru fiecare $h \in H$ şi $k \in K_h$ construim mulţimea $L_{hk} := \{j \in J | t_{hj} = z_{hk}\}$.

Observaţia 2.1.1 (Tuns (Bode) O.R. [*114*]). *Oricare ar fi $h \in H$ avem $f_{i_h}(x) = z_{hr}$ dacă şi numai dacă*

$$\{j \in L_{hk} | x_j > 0\} = \emptyset,\ \forall\, k \in K_h,\ k < r,\ \text{ şi } \{j \in L_{hr} | x_j > 0\} \ne \emptyset.$$

Fie S o submulţime nevidă a lui Ω. Considerăm următoarea problemă de optimizare

$$(\text{LpBP}) \quad \begin{cases} f(x) \ \to \ \text{lex} - \min \quad (\text{or lex} - \max), \\ x \in S, \end{cases}$$

pe care o vom numi *problemă de optimizare cu p funcţii obiectiv de tip timp.*

Un punct x^0 din S este soluţie optimă a acestei probleme dacă este un punct de minim lexicografic al funcţiei f relativ la mulţimea S. Dacă cu $\hat{S}$ notăm mulţimea punctelor de optim ale problemei (LpBP) şi dacă, pentru fiecare $i \in I$, cu $\hat{S}_i$ notăm mulţimea punctelor de minim ale funcţiei f_i relativ la mulţimea $\hat{S}_{i-1}$, unde $\hat{S}_0 := S$, atunci $\hat{S} = \hat{S}_m$.

Ne interesează structura mulţimii $\hat{S}$ relativ la proprietatea de convexitate.

Lema 2.1.2 (Tuns (Bode) O.R. [*114*]). *Dacă $\Lambda \subseteq S$ este o mulţime convexă şi $h \in H$, atunci mulţimea punctelor de minim ale funcţiei f_{i_h} relativ la Λ este convexă.*

Ca o consecinţă, obţinem un rezultat important pentru aplicaţiile practice.

Teorema 2.1.3 (Tuns (Bode) O.R. [*114*]). *Dacă S este o mulţime convexă nevidă şi funcţiile f_k, $k \in I \setminus \{i_h | h \in H\}$ sunt convexe, atunci mulţimea $\hat{S}$ este convexă.*

2.2 Soluţii optime cu proprietatea P

Fie $\Lambda \subseteq S$, $h \in H$.

Definiţia 2.2.1 (Tuns (Bode) O.R. *şi* Lupşa L. [*118*]). *Un punct $x^0 \in \Lambda$ se numeşte punct de minim cu proprietatea P (minimum point with pipeline property) al funcţiei f_{i_h} relativ la mulţimea Λ dacă pentru orice $x \in \Lambda$, avem*
a) $\sum\limits_{j \in L_{hk}} sgn(x_j^0) = \sum\limits_{j \in L_{hk}} sgn(x_j)$, $\forall\, k \in K_h$,
sau
b) există $r \in K_h$ astfel încât $\sum\limits_{j \in L_{hr}} sgn(x_j^0) < \sum\limits_{j \in L_{hr}} sgn(x_j)$, *şi, dacă $r \geq 2$, atunci* $\sum\limits_{j \in L_{hk}} sgn(x_j^0) = \sum\limits_{j \in L_{hk}} sgn(x_j)$, $\forall\, k \in \{1, ..., r-1\}$.

În ceea ce urmează, pentru fiecare $h \in H$, prin $\tilde{\Lambda}_{i_h}$ notăm mulţimea punctelor de minim cu proprietatea P ale lui f_{i_h} relativ la Λ.

Teorema 2.2.2 (Tuns (Bode) O.R. [*114*]). *Dacă $h \in H$ şi $x^0 \in \tilde{\Lambda}_{i_h}$, atunci x^0 este un punct de minim al lui f_{i_h} relativ la Λ.*

Concluzia teoremei justifică utilizarea adjectivului minim din definiţia 2.2.1.

Ţinând cont că $\hat{\Lambda}_{i_h}$ este mulţimea punctelor de minim ale lui f_{i_h} relativ la Λ, din teorema 2.2.2 deducem că

$$\tilde{\Lambda}_{i_h} \subseteq \hat{\Lambda}_{i_h}. \tag{2.4}$$

Menţionăm faptul că există puncte de minim care nu au proprietatea P, după cum rezultă din exemplul ce urmează.

Exemplul 2.2.3 (Tuns (Bode) O.R. [*114*]). *Fie $\Lambda = [1,2] \times [0,2] \times [0,1] \times [0,1]$ şi fie funcţia $f = (f_1, f_2) : \Lambda \to \mathbb{R}^2$,*
$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max\{2sgn(x_1),\ 3sgn(x_2), 2sgn(x_3)\}$, *oricare ar fi* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Lambda$,
$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max\{3sgn(x_1),\ 2sgn(x_2), sgn(x_3)\}$, *oricare ar fi* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Lambda$.
Avem

$$\hat{\Lambda}_1 = \{(x_1, 0, x_3, x_4) | x_1 \in [1,\ 2],\ x_3 \in [0,\ 1],\ x_4 \in [0,\ 1]\} \text{ şi } \tilde{\Lambda}_1 = [(1,0,0,0),\ (2,0,0,0)].$$

Prin urmare $\hat{\Lambda}_1 \neq \tilde{\Lambda}_1$.

În ipoteza că $\Lambda \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n_+$ şi $h \in H$, în următoarele două propoziţii dăm condiţii necesare şi suficiente pentru ca un punct să fie punct de minim cu proprietatea P, în ipoteza că deja se cunoaşte un astfel de punct. Aceste propoziţii sunt importante din punct de vedere teoretic.

Propoziţia 2.2.4 (TUNS (BODE) O.R. [*114*]). *Dacă $x \in \tilde{\Lambda}_{i_h}$, $f_{i_h}(x) = z_{hr}$ şi $y \in \Lambda$, atunci $y \in \tilde{\Lambda}_{i_h}$ dacă şi numai dacă*

$$f_{i_h}(x) = f_{i_h}(y) \text{ şi } \sum_{j \in L_{hk}} sgn(x_j) = \sum_{j \in L_{hk}} sgn(y_j), \; \forall\, k \in \{r, \ldots, q_h\}. \tag{2.5}$$

Propoziţia 2.2.5 (TUNS (BODE) O.R. [*114*]). *Dacă $x \in \tilde{\Lambda}_{i_h}$ şi $y \in \Lambda$, atunci $y \in \tilde{\Lambda}_{i_h}$ dacă şi numai dacă*

$$\sum_{j \in L_{hk}} sgn(x_j) = \sum_{j \in L_{hk}} sgn(y_j), \; \forall\, k \in K_h. \tag{2.6}$$

Fie $h \in H$. În continuare vom studia proprietăţile mulţimii $\tilde{\Lambda}_{i_h}$ relative la convexitate.

Fie $\Lambda \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n_+$, $h \in H$ şi $x, y \in \Lambda$. Pentru fiecare $k \in K_h$, notăm $L^x_{hk} := \{j \in L_{hk} | \text{sgn}(x_j) = 1, \text{sgn}(y_j) = 0\}$.

Propoziţia 2.2.7 (TUNS (BODE) O.R. [*114*]). *Dacă mulţimea $\Lambda \subseteq S$ este convexă, $h \in K_h$ şi $y \in (\hat{\Lambda}_{i_h} \setminus \tilde{\Lambda}_{i_h})$, atunci există $x \in \tilde{\Lambda}_{i_h}$ astfel încât $]x,\, y] \subseteq (\hat{\Lambda}_{i_h} \setminus \tilde{\Lambda}_{i_h})$.*

Propoziţia 2.2.8 (TUNS (BODE) O.R. [*114*]). *Dacă mulţimea $\Lambda \subseteq S$ este convexă, $h \in H$, $x, y \in \hat{\Lambda}_{i_h}$ şi $]x,\, y[\cap \tilde{\Lambda}_{i_h} \neq \emptyset$, atunci $]x,\, y[\subseteq \tilde{\Lambda}_{i_h}$.*

Propoziţia 2.2.9 (TUNS (BODE) O.R. [*114*]). *Dacă mulţimea $\Lambda \subseteq S$ este convexă, $h \in H$, $x, y \in \tilde{\Lambda}_{i_h}$, $x \neq y$, atunci $[x,\, y] \subseteq \tilde{\Lambda}_{i_h}$ dacă şi numai dacă $L^x_{hk} = \emptyset$ (echivalent cu $L^y_{hk} = \emptyset$), oricare ar fi $k \in K_h$.*

Condiţia $L^x_{hk} = \emptyset$, $\forall\, k \in K_h$ este esenţială după cum rezultă din exemplul care urmează.

Exemplul 2.2.10 (TUNS (BODE) O.R. [*114*]). *Fie funcţia $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cu $f_1(x_1, x_2) = \max\{2sgn(x_1), 2sgn(x_2)\}$ şi $f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $\forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Fie $\Lambda = [(2,0),\, (0,2)] = \{(2(1-\lambda),\, 2\lambda) | \lambda \in [0,\, 1]\}$. Avem $\hat{\Lambda}_1 = [(2,0),\, (0,2)]$, şi $\tilde{\Lambda} = \{(2,0),\, (0,2)\}$. Evident că mulţimea $\tilde{\Lambda}$ nu este convexă. Luând $x = (2,0)$ şi $y = (0,2)$ avem $L^x_{11} = \{1\} \neq \emptyset$, ceea ce indică faptul că ipoteza propoziţiei 2.2.9 nu este satisfăcută.*

În continuare introducem noţiunea de soluţie optimă cu proprietatea P a problemei (LpBP).

Definiţia 2.2.11 (TUNS (BODE) O.R. *şi* LUPŞA L. [*118*]). *Un punct $x^0 \in S$ se numeşte soluţie optimă cu proprietatea P a problemei (LpBP) sau punct de minim lexicografic cu proprietatea P a funcţiei f relativ la S, dacă x^0 este un punct de minim al funcţiei f_k relativ la mulţimea S_{k-1} pentru fiecare $k \in I$ şi, în plus, dacă $k \in \{i_h | h \in H\}$ atunci este chiar un punct de minim cu proprietatea P a lui f_k relativ la mulţimea S_{k-1}.*

Mulţimea punctelor de minim lexicografic ale funcţiei f relativ la mulţimea S o vom nota prin $\tilde{S}$. În continuare dăm un exemplu în care determinăm mulţimea $\tilde{S}$.

Exemplul 2.2.12 (TUNS (BODE) O.R. [*114*]). *Să revenim la exemplul 2.2.3. Dacă $S = [1,\, 2] \times [0,\, 2] \times [0,\, 1] \times [0, 1]$, atunci avem $\tilde{S}_1 = \{(x_1, 0, 0, 0) | x_1 \in [1,\, 2]\}$ şi $\tilde{S}_2 := \tilde{\Lambda} = \{(x_1, 0, 0, 0) | x_1 \in [1,\, 2]\}$. Ca urmare, $\tilde{\Lambda} = \{(x_1, 0, 0, 0) | x_1 \in [1,\, 2]\}$.*

2.3 Probleme de optimizare discretă lexicografică de tip timp

În acest paragraf vom studia problema (LpBP) în ipoteza că mulţimea S este o submulţime a lui $\mathbb{N}^n$, caz în care problema (LpBP) o vom nota prin (LDpBP) şi o vom numi problemă de optimizare discretă lexicografică cu p funcţii obiectiv de tip timp. Deşi aparent astfel de probleme par foarte restrictive, ele se întâlnesc frecvent în viaţa cotidiană. Câteva exemple concrete vor fi studiate în celelalte capitole ale tezei.

Exemplul 2.3.1 (Tuns (Bode) O.R. *şi* Lupşa L. [*118*]).
Fie $S = \{(-1,-1),(-1/2,-1)\}$ *şi* $f : S \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = \max\{2x_1, x_2\}$, *oricare ar fi* $(x_1,x_2) \in S$. *Punctele* $x^0 = (-1,-1)$ *şi* $x = (-1/2,-1)$ *sunt ambele puncte de minim ale lui* f *relativ la* S, *dar numai* $(-1,-1)$ *este un punct de minim cu proprietatea P.*

Exemplul 2.3.2 (Tuns (Bode) O.R. *şi* Lupşa L. [*118*]).
Fie $S = \{0,1,2\} \times \{1,2,3\} \times \{0,1\}$ *şi fie funcţia* $f = (f_1,f_2,f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *cu*
$f_1(x_1,x_2,x_3) = -5 + x_3^2 - x_3$,
$f_2(x_1,x_2,x_3) = \max\{2sgn(x_1), 2sgn(x_2), 3sgn(x_3)\}$,
$f_3(x_1,x_2,x_3) = -8 + x_1^2 + x_3^2$,
oricare ar fi $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.
Avem $\tilde{S} = \{(0,1,0),(0,2,0),(0,3,0)\}$.

Deoarece lucrăm în caz discret, pentru studiul proprietăţilor legate de convexitate a mulţimilor $\hat{S}$ şi $\tilde{S}$ utilizăm noţiunile de mulţime 2-tare convexă relativ la $\mathbb{N}^n$ şi funcţie 2-tare convexă relativ la $\mathbb{N}^n \times \mathbb{R}$ date în Cristescu G. şi Lupşa L. [23].

Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n_+$, $S \subseteq (\Omega \cap \mathbb{N}^n)$ şi $f = (f_1,\dots,f_p) : \Omega \to \mathbb{R}^p$.

Teorema 2.3.6 (Tuns (Bode) O.R. *şi* Lupşa L. [*118*]). *Dacă mulţimea* $\Lambda \subseteq S$ *este 2-tare convexă relativ la* $\mathbb{N}^n$ *şi* $h \in H$, *atunci* $\hat{\Lambda}_{i_h}$, *mulţimea punctelor de minim ale lui* f_{i_h} *relativ la* Λ, *este 2-tare convexă relativ la* $\mathbb{N}^n$.

Corolar 2.3.7 (Tuns (Bode) O.R. *şi* Lupşa L. [*118*]). *Dacă mulţimea* S *este nevidă şi 2-tare convexă relativ la* $\mathbb{N}^n$ *şi funcţiile* f_k, $k \in I \setminus \{i_h | h \in H\}$, *sunt 2-tare convexe relativ la* $\mathbb{N}^n$, *atunci* $\hat{S}$ *este 2-tare convexă relativ la* $\mathbb{N}^n$.

Proprietăţi similare obţinem şi pentru mulţimea punctelor de minim cu proprietatea P.

Propoziţia 2.3.8 (Lupşa L. *şi* Tuns (Bode) O.R. [*76*]). *Dacă mulţimea* $\Lambda \subseteq S$ *este 2-tare convexă relativ la* $\mathbb{N}^n$, $h \in H$, y *este un punct de minim al lui* f_{i_h} *relativ la* Λ, *dar* $y \notin \tilde{\Lambda}_{i_h}$, *atunci* $(]x, y[\bigcap \mathbb{N}^n) \bigcap \tilde{\Lambda}_{i_h} = \emptyset$.

Corolar 2.3.9 (Lupşa L. *şi* Tuns (Bode) O.R. [*76*]). *Dacă mulţimea* $\Lambda \subseteq S$ *este 2-tare convexă relativ la* $\mathbb{N}^n$, $h \in H$ *şi* $x, y \in \hat{\Lambda} \setminus \tilde{\Lambda}$ *atunci*

$$([x,y] \bigcap \mathbb{N}^n) \subseteq (\hat{\Lambda} \setminus \tilde{\Lambda}).$$

Propoziţia 2.3.10 (Lupşa L. *şi* Tuns (Bode) O.R. [76]). *Dacă mulţimea $\Lambda \subseteq S$ este 2-tare convexă relativ la $\mathbb{N}^n$, $h \in H$, $x, y \in \hat{\Lambda}$ şi există $z \in]x, y[\bigcap \mathbb{N}^n$ astfel încât $z \in \tilde{\Lambda}_{i_h}$, atunci $]x, y[\bigcap \mathbb{N}^n \subseteq \tilde{\Lambda}_{i_h}$.*

Propoziţia 2.3.11 (Lupşa L. *şi* Tuns (Bode) O.R. [76]). *Dacă mulţimea $\Lambda \subseteq S$ este 2-tare convexă relativ la $\mathbb{N}^n$, $h \in H$, $x, y \in \tilde{\Lambda}_{i_h}$ şi $]x, y[\cap \mathbb{N}^n \neq \emptyset$, atunci mulţimea $[x, y]$ este 2-tare convexă relativ la $\mathbb{N}^n$ dacă şi numai dacă $L^x_{hk} = \emptyset$ (sau echivalent $L^y_{hk} = \emptyset$), oricare ar fi $k \in K_h$.*

Condiţia $L^x_{hk} = \emptyset$, $\forall\, k \in K_h$, este esenţială după cum rezultă din exemplul care urmează.

Exemplul 2.3.12 (Lupşa L. *şi* Tuns (Bode) O.R. [76]).

Fie $S = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$ şi fie $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cu $f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ şi $f_2(x_1, x_2) = \max\{2sgn(x_1), 2sgn(x_2)\}$, oricare ar fi $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Avem $\tilde{S} = \{(2,0), (0,2)\}$. Deoarece $(1,1) \in \hat{S}_2 \cap \mathbb{N}^2$, dar $(1,1) \notin \tilde{S}$, deducem că mulţimea $\tilde{S}$ nu este 2-tare convexă relativ la mulţimea $\mathbb{N}^2$.

2.4 O metodă de determinare a soluţiilor optime cu proprietatea P ale problemei (LDpBP)

În acest paragraf demonstrăm o teoremă care permite determinarea unei soluţii optime cu proprietatea P a problemei (LDpBP). Metoda se bazează pe tehnica ponderilor şi reprezintă o generalizare a metodelor prezentate în Bandopadhyaya L. [6] şi în Zarepisheh M. şi Khorram E. [135].

Fie m, n, p numere naturale nenule, cu $1 \leq p \leq m$. Fie $I := \{1, \ldots, m\}$, $J := \{1, \ldots, n\}$, $H := \{1, \ldots, p\}$ şi fie i_h, $h \in H$, p numere naturale distincte cu proprietatea că $i_1 < \cdots < i_p$.

Fie $S \subseteq \mathbb{N}^n$ şi fie funcţia vectorială $f = (f_1, \ldots, f_m) : S \to \mathbb{N}^m$ cu p componente de tip timp, date prin (2.1), unde t_{hj}, $h \in H$, $j \in J$, sunt numere naturale. Considerăm problema:

$$\text{(LDpBP)} \quad \begin{cases} f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \to \text{lex} - \min, \\ x \in S. \end{cases}$$

Pentru fiecare $h \in H$ construim $q_h + 1$ numere, astfel:

$$M_{hq_h} = 1 \tag{2.7}$$

şi

$$M_{hk} = 1 + \sum_{j=k+1}^{q_h} M_{hj} \cdot \text{card}(L_{hj}),\ \forall\, k \in \{q_{h-1}, ..., 0\}. \tag{2.8}$$

Se vede imediat că

$$M_{h0} = 1 + \sum_{j=1}^{q_h} M_{hj} \cdot \text{card}(L_{hj}). \tag{2.9}$$

Fie

$$M_0 := 1 + \max\{M_{h0} | h \in H\}. \tag{2.10}$$

Evident că, oricare ar fi $r \in K_h$ avem

$$\sum_{k=r}^{q_h} M_{hk} \cdot \mathrm{card}(L_{hk}) = \begin{cases} M_{h,r-1} - 1 \leq M_{h0} - 1 \leq M_0 - 1 < M_0, \text{ dacă } r > 1, \\ M_{h0} - 1 \leq M_0 - 1 < M_0, \text{ dacă } r = 1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Pentru fiecare $i \in I$, fie $\bar{f}_i$ un număr natural satisfăcând condiţia $\bar{f}_i \geq 2$, astfel încât

$$f_i(x) \leq \bar{f}_i, \ \forall\, x \in S. \tag{2.12}$$

Fie

$$\lambda = 1 + \max\{1 + M_0, \{\bar{f}_i | i \in I\}\}. \tag{2.13}$$

Uşor se vede că

$$\lambda^{m+1-i} - 2\lambda^{m-i} > 0, \forall\, i \in I, \text{ şi } \lambda^{m+2-i_{h_0}} - (M-0+1)\lambda^{m-i_{h_0}} > 0, \forall\, h \in H. \tag{2.14}$$

Următorul rezultat are un caracter pur tehnic şi va fi utilizat în demostraţiile ulterioare.

Observaţia 2.4.1 (Tuns (Bode) O.R. [*115*]). *Fie $u, v \in S$, $u \neq v$, $i_0 \in I^c$, $h \in H$ şi $k \in K_h$. Următoarele inegalităţi sunt adevărate:*

(i) *dacă* $f_{i_0}(u) > f_{i_0}(v)$, *atunci* $f_{i_0}(u) - f_{i_0}(v) \geq 1$;

(ii) $\sum_{i\in I^c, i\geq i_0} \lambda^{m-i}(f_i(u) - f_i(v)) \geq -\sum_{i\in I^c, i\geq i_0} \lambda^{m-i} f_i(v) > \sum_{i\in I^c, i\geq i_0} \lambda^{m+1-i}$;

(iii) *dacă* $f_{i_h}(u) = z_{hs} \in Z_h$, *atunci* $\sum_{j\in L_{hs}} sgn(u_j) \geq 1$;

(iv) $\sum_{j\in L_{hk}} (sgn(u_j) - sgn(v_j)) \geq -\sum_{j\in L_{hk}} sgn(v_j) \geq -\, card(L_{hk})$;

(v) $\sum_{k\in K_h} M_{hk} \sum_{j\in L_{hk}} (sgn(u_j) - sgn(v_j)) \geq -\sum_{k\in K_h} M_{hk}\, card(L_{hk}) = 1 - M_{h0} > 1 - M_0$.

Să considerăm acum problema:

$$(\mathrm{PUP}) \begin{cases} F(x) = M_0 \sum_{i\in I^c} \lambda^{m-i} f_i(x) + \sum_{h\in H} \lambda^{m+1-i_h} \sum_{k\in K_h} (M_{hk} \sum_{j\in L_{hk}} \mathrm{sgn}(x_j)) \to \min, \\ x \in S. \end{cases}$$

Teorema 2.4.2 (Tuns (Bode) O.R. [*115*]). *Un punct $x^0 \in S$ este un punct de optim cu proprietatea P al problemei (LDpBP) dacă şi numai dacă el este o soluţie optimă a problemei (PUP).*

Capitolul 3

O aplicaţie referitoare la managementul costurilor unei firme

În acest capitol am prezentat o problemă concretă de management al costurilor. Modelul matematic ataşat este o problemă de optimizare bilevel pe grafe. Funcţia scop de nivel inferior este bicriterială. Am generalizat modelul obţinut păstrând proprietăţile caracteristice esenţiale. Am dat condiţii necesare şi suficiente de optim în cazul problemei generalizate. Utilizând aceste rezultate, am indicat o metodă exactă de rezolvare a problemei generalizate bazată pe tehnica divizării. Utilizând teorema 2.4.2 am redus rezolvarea problemei de optimizare bicriterială de nivel inferior la rezolvarea unei probleme de optimizare a unei funcţii scop scalare relativ la mulţimea subgrafelor unui graf, subgrafe ce satisfac anumite cerinţe precizate. Revenind la modelul ataşat problemei concrete, rezolvarea problemei se reduce la rezolvarea unei secvenţe finite de perechi de probleme de tip voiajor comercial, adică la determinarea unui ciclu hamiltonian de cost minim care să treacă prin toate vârfurile grafului. Pentru rezolvarea problemei voiajorului comercial există numeroşi algoritmi. Ca referinţe bibliografice amintim Applegate D.L., Bixby R.E., Chvátal V. şi Cook W.J. [4], Gutin G. şi Punnen A. [45], Toth P. şi Vigo D. [120].

Menţionăm că în materialul bibliografic consultat nu am întâlnit studiat un astfel de tip de problemă. Problema studiată de noi poate fi considerată ca o generalizare a problemei rutelor. Ca lucrări de bază legate de problema rutelor amintim cărţile autorilor Gutin G. şi Punnen A. [45] şi a autorilor Toth P. şi Vigo D. [120].

Rezultatele din acest capitol sunt conţinute în lucrarea Goina D. şi Tuns (Bode) O.R. [43].

3.1 Problema colectării laptelui

O companie de prelucrare a laptelui colectează de două ori pe zi, dimineaţa şi seara, lapte dintr-o anumită zonă agricolă. Punctele de colectare sunt situate pe şoselele care unesc satele din zona respectivă. Cantitatea de lapte livrat de un furnizor, la punctul de colectare de care el aparţine, depinde de momentul în care se cere livrarea. Unii furnizori pot livra lapte de două ori pe zi. Alţii pot aduce lapte numai dimineaţa, iar alţii numai seara. De asemenea, există unii furnizori care pot stoca până seara laptele de dimineaţă, în condiţii corespunzătoare de igienă, şi pot să-l aducă la punctul de colectare numai seara. Laptele este transportat de la punctele de colectare

cu un tanc colector. Evident, nici dimineaţa, nici seara, cantitatea de lapte transportat nu poate depăşi capacitatea tancului colector. Cunoscând cantitatea de lapte pe care o poate livra fiecare furnizor şi regimul în care poate face el livrarea, capacitatea tancului colector, costul transportului tancului între oricare două puncte de colectare, sau între acestea şi bază, se cere să se determine un plan de colectare astfel încât:
- să nu se depăşească capacitatea tancului,
- tancul să ridice laptele de la un punct de colectare cel mult o dată, atât dimineaţa cât şi seara,
- costul total al transporturilor efectuate zilnic de tanc să fie cât mai mic,
- pentru acest cost minim, cantitatea de lapte care este stocată să fie cât mai mică. Prin întocmirea unui plan de colectare înţelegem precizarea, pentru fiecare furnizor în parte, a cantităţii de lapte pe care trebuie să o livreze, a regimului în care aceasta trebuie livrată (dimineaţa, seara, dimineaţa şi seara, stochează laptele de dimineaţa şi îl livrează numai seara) şi a punctului de colectare în care trebuie adusă şi, de asemenea, precizarea traseului pe care trebuie să îl parcurgă tancul colector atât dimineaţa cât şi seara, respectând cerinţele impuse.

3.2 Generalizarea modelului matematic ataşat problemei colectării laptelui

În acest paragraf, după ce se construieşte modelul matematic ataşat problemei laptelui, se dă o generalizare a acestuia. Pentru problema de optimizare corespunzătoare modelului ataşat se dau condiţii necesare şi suficiente de optimalitate şi se indică o metodă de rezolvare a ei, deci indirect şi a problemei colectării laptelui. Vom prezenta direct generalizarea, precizând ce particularizare trebuie făcută pentru obţinerea modelului matematic ataşat problemei colectării laptelui.

Fie n un număr natural nenul, $N = \{1, \dots, n\}$, $G = (N, E)$ un graf neorientat valuat şi fie $I \subset N$. Cu Λ vom nota mulţimea subgrafelor $\Gamma = (N_\Gamma, E_\Gamma)$ a lui G cu $N_\Gamma \neq \emptyset$ şi $E_\Gamma \neq \emptyset$.

Fie $\mathcal{C}_1$ mulţimea acelor elemente $G_1 = (N_1, E_1)$ ale lui Λ care satisfac anumite condiţii impuse nodurilor. De asemenea, fie $\mathcal{C}_2$ mulţimea acelor elemente $G_2 = (N_2, E_2)$ ale lui Λ care satisfac alte condiţii impuse nodurilor. Fie $h : \Lambda \to \mathbb{R}$ şi $g : \Lambda \to \mathbb{N}$ două funcţii date, iar a şi b numere pozitive date. Construim funcţia $F : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R}_+$ prin

$$F(G_1, G_2) = a \cdot h(G_1) + b \cdot h(G_2), \ \forall \ (G_1, G_2) \in \Lambda \times \Lambda. \tag{3.1}$$

Considerăm următoarea problemă de optimizare bilevel, cu funcţia scop de nivel inferior bicriterială,

$$(PBG) \quad \begin{cases} F(G_1, G_2) \ \to \ \min, \\ G_1 \in \mathcal{C}_1, \\ G_2 \in S^*(G_1), \end{cases}$$

unde $S^*(G_1)$ este mulţimea soluţiilor optime ale problemei

$$(P(G_1)) \quad \begin{cases} g(G_2) \ \to \ \min, \\ G_2 \in \mathcal{C}_2, \\ N_1 \cap N_2 \cap I = \emptyset. \end{cases}$$

Observăm că problema de nivel inferior are funcţia scop bicriterială. În literatura de specialitate consultată nu am întâlnit studiate probleme de tipul problemei (PBG).

În cazul problemei colectării laptelui, n este cu 2 mai mare decât numărul punctelor de colectare. Mulţimea $\{1, \ldots, n\}$ va corespunde punctelor de colectare la care se adaugă punctul din care pleacă tancul colector şi punctul în care se întoarce. Mulţimea E a muchiilor corespunzătoare grafului $G = (N, E)$ va corespunde drumurilor care unesc punctele corespunzătoare nodurilor grafului. Valuarea grafului corespunde costurilor drumurilor. $\mathcal{C}_1$ reprezintă mulţimea subgrafelor lui G, care satisfac condiţia că nodurile lor corespund centrelor de colectare din care se va colecta laptele dimineaţa. $\mathcal{C}_2$ reprezintă mulţimea subgrafelor lui G, care satisfac condiţia că nodurile corespund locaţiilor de unde se va colecta laptele seara. Mulţimea I corespunde locaţiilor în care laptele de dimineaţă poate fi stocat şi preluat abia seara. În problema laptelui avem $a = b = 1$. Pentru fiecare $\Gamma \in \Lambda$, $h(\Gamma)$ va fi egal cu valoarea ciclului Hamiltonian minimal în raport cu costul format cu vârfurile lui Γ. Numărul $g(\Gamma)$ este egal cu cantitatea de lapte stocată.

În continuare vom da o metodă exactă de rezolvare a problemei (PBG), bazându-ne pe tehnica divizării. În acest scop vom uza de particularităţile funcţiei scop şi ale restricţiilor (mai precis de condiţia ca $N_1 \cap N_2 \cap I = \emptyset$).

Fie

$$S := \Big\{(G_1, G_2) \in \Lambda \times \Lambda \,|\, G_1 \in \mathcal{C}_1,\ G_2 \in \mathcal{C}_2,\ N_1 \cap N_2 \cap I = \emptyset\Big\}$$

şi

$$S_1 = \Big\{G_1 \in \Lambda \mid \exists\, G_2 \in \Lambda \text{ s. t. } (G_1, G_2) \in S\Big\},$$

adică

$$S_1 = \Big\{G_1 \in \mathcal{C}_1 \mid \exists\, G_2 \in \mathcal{C}_2 \text{ s. t. } N_1 \cap N_2 \cap I = \emptyset\Big\}.$$

Pentru fiecare $G_1 \in S_1$ considerăm mulţimea

$$S(G_1) \;=\; \Big\{G_2 \in \mathcal{C}_2 \mid (G_1, G_2) \in S\Big\} \;=\; \Big\{G_2 \in \mathcal{C}_2 \mid N_1 \cap N_2 \cap I = \emptyset\Big\}.$$

Se vede imediat că $S(G_1)$ este mulţimea soluţiilor admisibile ale problemei $(P(G_1))$.

Fie $H \in 2^I$. Considerăm problemele:

$$(P_1(H)) \quad \begin{cases} h(G_1) \;\to\; \min, \\ G_1 \in \mathcal{C}_1, \\ N_1 \cap I = H \end{cases}$$

şi

$$(P_2(H)) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} g(G_2) \\ h(G_2) \end{pmatrix} \;\to\; \text{lex} - \min, \\ G_2 \in \mathcal{C}_2, \\ N_2 \cap H = \emptyset. \end{cases}$$

Să notăm cu h_1^H valoarea optimă a problemei $(P_1(H))$ şi cu (g_2^H, h_2^H) valoarea optimă a problemei $(P_2(H))$.

Construim funcţia $\tilde{F} : 2^I \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{F}(H) = a \cdot h_1^H + b \cdot h_2^H,\ \forall\, H \in 2^I, \tag{3.2}$$

şi considerăm problema de optimizare:

$$(PP) \quad \begin{cases} \tilde{F}(H) \to \min, \\ H \in 2^I. \end{cases}$$

În cele ce urmează vom stabili câteva legături între soluţiile admisibile ale problemelor (PBG) şi (PP) şi apoi între cele optime.

Lema 3.2.1 (Goina D. *şi* Tuns (Bode) O.R. [*43*]). *Dacă $G_1^0 \in \mathcal{C}_1$, G_2^0 este o soluţie admisibilă a problemei $(P(G_1^0))$ şi $H^0 = N_1^0 \cap I$, atunci G_2^0 este o soluţie admisibilă a problemei $(P_2(H^0))$.*

Lema 3.2.2 (Goina D. *şi* Tuns (Bode) O.R. [*43*]). *Dacă (G_1^0, G_2^0) este o soluţie admisibilă a problemei (PBG) şi $H^0 = N_1^0 \cap I$, atunci G_1^0 este o soluţie admisibilă a problemei $(P_1(H^0))$ şi G_2^0 este o soluţie admisibilă a problemei $(P_2(H^0))$.*

Lema 3.2.3 (Goina D. *şi* Tuns (Bode) O.R. [*43*]). *Dacă $H^0 \in 2^I$, G_1^0 este o soluţie admisibilă a problemei $(P_1(H^0))$ şi G_2^0 este o soluţie optimă a problemei $(P_2(H^0))$, atunci (G_1^0, G_2^0) este o soluţie admisibilă a problemei (PBG).*

Teorema 3.2.4 (Goina D. *şi* Tuns (Bode) O.R. [*43*]). *Dacă (G_1^0, G_2^0) este o soluţie optimă a problemei (PBG), atunci, luând $H^0 = N_1^0 \cap I$, următoarele propoziţii sunt adevărate:*
i) G_1^0 este o soluţie optimă a problemei $(P_1(H^0))$;
ii) G_2^0 este o soluţie optimă a problemei $(P_2(H^0))$;
iii) H^0 este o soluţie optimă a problemei (PP).

Teorema 3.2.5 (Goina D. *şi* Tuns (Bode) O.R. [*43*]). *Dacă H^0 este o soluţie optimă a problemei (PP) şi G_1^0, respectiv G_2^0, este o soluţie optimă a problemei $(P_1(H^0))$, respectiv $(P_2(H^0))$, atunci (G_1^0, G_2^0) este o soluţie optimă a problemei (PBG).*

Să remarcăm faptul că problema $(\mathrm{P}_2(\mathrm{H}^0))$ este o problemă de optimizare lexicografică bicriterială. Pentru rezolvarea ei putem utiliza metoda introdusă in paragraful 4.2, particularizând-o corespunzător.

Fie

$$\lambda \geq 1 + \max\{F(G_1, G_2),\ \forall\ (G_1, G_2) \in \Lambda\}. \tag{3.3}$$

Fie $G_1 \in S_1$ şi fie $H \in 2^I$ astfel încât

$$N_1 \cap I = H. \tag{3.4}$$

Construim problema

$$(PL_2(H)) \quad \begin{cases} \lambda \cdot g(G_2) + F(G_1, G_2) \to \min, \\ G_2 \in \mathcal{C}_2, \\ H \cap N_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Teorema 3.2.6 (Goina D. *şi* Tuns (Bode) O.R. [*43*]). *Dacă $G_1 \in S_1$ şi $H \in 2^I$ satisface condiţia (3.4), atunci un element $G_2 \in \mathcal{C}_2$ este soluţie optimă a problemei $(PL_2(H))$ dacă şi numai dacă este soluţie optimă a problemei $(P_2(H))$.*

Observaţia 3.2.7 *Ţinând cont de teorema 3.2.6, putem reduce rezolvarea problemei* (PBG) *la rezolvarea unei secvenţe finite de perechi de probleme* $(P_1(H), P_2(H))$*, în care parametrul* H *parcurge mulţimea* 2^I.

Rezultatele din paragraful 2 al acestui capitol pot fi generalizate, ceea ce ne propunem să facem într-o lucrare ulterioară.

Capitolul 4

Aplicaţii ale optimizării multicriteriale relative la programele de pregătire profesională a şomerilor

Educaţia reprezintă un proces de învăţare continuă (pe parcursul întregii vieţi). Din acest motiv, se impune necesitatea participării la cursuri de formare profesională, deoarece persoanele cu un nivel de calificare mai ridicat se adaptează mai rapid la schimbările tehnologice şi au o productivitate mai ridicată pe termen lung. Diferite aspecte (probleme) legate de cursurile de formare profesională pot fi găsite în lucrările Guţ C.M. şi Bode O.R. [48], Guţ C.M., Vorzsak M., Chifu C.I. şi Bode O.R. [49], Guţ C.M., Vorzsak M. şi Bode (Tuns) O.R. [50].

Având în vedere importanţa persoanelor calificate, trebuie să menţionăm că o problemă majoră cu care se confruntă instituţiile din ţară şi străinătate este cea a lipsei resurselor financiare alocate cursurilor de formare profesională pentru şomeri. O problemă care apare frecvent este insuficienţa fondurilor bugetare alocate cursurilor de formare profesională, care să permită fiecărui şomer să beneficieze gratuit de aceste cursuri. Prin urmare, diferite probleme economice privind alocarea persoanelor pentru a participa la cursurile de formare profesională sau lipsa resurselor financiare alocate acestor cursuri pot fi găsite în diferite situaţii din viaţa de zi cu zi. În acest capitol, studiem din punct de vedere al optimizării diferitele probleme economice care apar şi care sunt rezolvate în practică intuitiv.

Contribuţiile autoarei cu privire la aceste subiecte au fost publicate în articolele în colaborare Tuns (Bode) O.R. şi Neamţiu L. [119] sau în Tuns (Bode) O.R. [116].

4.1 Noţiuni şi rezultate relative la problemele de asignare

În situaţiile din viaţa de zi cu zi, putem găsi diferite probleme economice care implică participarea şomerilor la cursurile de formare profesională. Având în vedere că vom utiliza ca şi instrument matematic problemele de asignare, începem cu o scurtă prezentare a acestor tipuri de probleme. Ca lucrări de referinţă în acest domeniu, dorim să menţionăm [16], [18], [36], [38], [41], [44], [65], [92], [98] şi [125].

De-a lungul timpului, problemele de asignare au cunoscut şi alte diferite generalizări. O imagine de ansamblu foarte utilă în ceea ce priveşte varietatea modelelor problemelor de asignare se găseşte în Pentico D.W. [92]. Această lucrare oferă un studiu cuprinzător a diferitelor variante de probleme de asignare, care au apărut în literatura de specialitate, cum ar fi: problema lexicografică de tip timp, problema de asignare cu side constraints şi problema r-lexicografică multi-obiectiv. Problema lexicografică de tip timp a fost studiată de exemplu în Burkard R.E. şi Rendl F. [16] sau în Sokkalingam P.T. şi Aneja Y.P. [105]. O altă lucrare foarte utilă pentru cercetători şi practicanţi este cea a lui Burkard R., Dell'Amico M. şi Martello S. [15]. Aceasta oferă un studiu cuprinzător a problemelor de asignare de la începuturile lor conceptuale, până în zilele noastre.

În [63] Khanmohammadi S., Hajiha A. şi Jassbi J. introduc o aşa numită matrice a calificării folosită pentru a clasifica şi selecta persoanele calificate pentru diferite munci cu scopul de a optimiza forţa de muncă în cadrul organizaţiei.

Bazându-ne pe lucrările autoarei cu un preponderent caracter economic (a se vedea [48], [49] şi [50]), una dintre problemele critice care se găseşte în diferite situaţii din viaţa de zi cu zi şi care trebuie rezolvată este cea a recalificării şomerilor. Prin urmare, modelele matematice, pe care le-am introdus în prezenta teză cu scopul de a selecta persoanele potrivite pentru diferite cursuri de formare profesională, sunt utilizate pentru rezolvarea diferitelor tipuri de probleme de optimizare, care pot fi văzute ca probleme generale de asignare.

4.2 Formularea problemelor economice

Vom prezenta în continuare două dintre problemele ridicate relative la repartizarea şomerilor la cursurile de formare (recalificare) profesională. În aceeaşi perioadă de timp se organizează mai multe cursuri pentru recalificarea şomerilor. Fiecare curs are ataşat un număr, denumit eficacitate, calculat în funcţie de şansa pe care o are ca să se angajeze un şomer care a absolvit acel curs. De asemenea, pentru fiecare şomer şi fiecare curs, se construieşte un număr, numit scor, ţinând cont de date legate de experienţa profesională anterioară, de pregătirea profesională, de aptitudini, de interesul pe care îl manifestă pentru acel curs etc. De asemenea se cunoaşte numărul locurilor pentru fiecare curs.

Problema (AEP$_1$). În ipoteza că numărul total al locurilor la cursurile de formare este mai mare decât cel al şomerilor, se cere să se determine o repartizare a şomerilor la cursuri astfel încât:
i) fiecare şomer să fie înscris exact la un curs;
ii) cel mai mic scor corespunzător unui şomer înscris la un curs să fie cât mai mare;
iii) cursul pentru care se atinge acest scor să aibă o eficienţă cât mai mare;
iv) numărul de şomeri pentru care scorul personal la cursul la care este înscris este egal cu scorul minim să fie cât mai mic.

Problema (AEP$_2$). În ipoteza că numărul total al locurilor la cursurile de formare este mai mic sau cel mult egal cu numărul şomerilor, se cere să se determine o repartizare a şomerilor la cursuri astfel încât:
i) numărul de şomeri calificaţi prin aceste cursuri să fie cât mai mare;
ii) cel mai mic scor corespunzător unui şomer înscris la un curs să fie cât mai mare;
iii) un şomer să urmeze cel mult un curs.

Înainte de a construi modelele matematice ataşate acestor probleme precizăm notaţiile

utilizate:
• m este numărul total al cursurilor de formare şi $I = \{1, \ldots, m\}$;
• cursurile vor fi numerotate de la 1 la m;
• e_i, $i \in I$, eficacitatea cursului i;
• n numărul total al şomerilor şi $J = \{1, \ldots, n\}$;
• a_i, $i \in I$, numărul maxim al persoanelor care pot participa la cursurile de formare profesională i, $i \in I$;
• r_{ij}, $i \in I$, $j \in J$, scorul obţinut de şomerul j pentru cursul i, $R \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}_+^*)$, $R = [r_{ij}]$ matricea scorurilor.

4.3 Studiul problemei (AEP_1)

În acest paragraf facem un studiu al problemei (AEP_1).

4.3.1 Modelul matematic ataşat problemei (AEP_1)

Facem ipoteza de lucru că numerotarea cursurilor s-a făcut în ordinea descrescătoare a eficacităţii lor, adică avem $e_i \geq e_{i+1}$, $\forall\, i \in I$.

Fie $\mathcal{Y}$ mulţimea matricelor $Y = [y_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ care satisfac următoarele restricţii:

$$y_{ij} \in \{0, 1\},\ \forall\, i \in I, \forall\, j \in J; \tag{4.1}$$

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = 1,\ \forall\, j \in J; \tag{4.2}$$

$$\sum_{j\in J} y_{ij} \leq a_i,\ \forall\, i \in I. \tag{4.3}$$

Fie $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}^3$ funcţia dată prin: $\forall\, Y \in \mathcal{Y}$,

$$f_1(Y) = \min\Big\{r_{ij}\,|\, i \in I,\ j \in J,\ y_{ij} = 1\Big\}, \tag{4.4}$$

$$f_2(Y) = \min\Big\{i \in I\,|\,\exists\, j \in J \quad \text{astfel} \quad \text{încât} \quad r_{ij}y_{ij} = f_1(Y)\Big\}, \tag{4.5}$$

$$f_3(Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J;\, r_{ij}y_{ij}=f_1(Y);\, i\geq f_2(Y)} y_{ij}. \tag{4.6}$$

Lucrăm în ipoteza

$$\sum_{i\in I} a_i \geq n, \tag{4.7}$$

ceea ce asigură faptul că $\mathcal{Y} \neq \emptyset$. Remarcăm faptul că dacă ipoteza (4.7) nu este satisfăcută, atunci $\mathcal{Y} = \emptyset$.

Modelul matematic corespunzător problemei (AEP_1) va fi notat prin:

$$(PS) \quad \begin{cases} f(Y) \to lex - \max - \max - \min, \\ Y \in \mathcal{Y}. \end{cases} \tag{4.8}$$

Definiţia 4.3.2 (TUNS (BODE) O.R. *and* NEAMŢIU L. [*119*]). *Un punct $Y^0 \in \mathcal{Y}$ se numeşte soluţie optimă a problemei (PS) dacă nu există un punct $Y \in \mathcal{Y}$ astfel încât una dintre următoarele condiţii să fie îndeplinită:*
i) $f_1(Y) > f_1(Y^0)$;
ii) $f_1(Y) = f_1(Y^0)$ *şi* $f_2(Y) > f_2(Y^0)$;
iii) $f_1(Y) = f_1(Y^0)$, $f_2(Y) = f_2(Y^0)$ *şi* $f_3(Y) < f_3(Y^0)$.

Remarcăm faptul că modelul ataşat problemei (AEP_1) este o problemă de optimizare lexicografică. Dacă luăm în considerare restricţiile (4.2) şi (4.3), şi funcţia f_1, problema (PS) poate fi privită ca o problemă de transport neechilibrată de tip timp în care variabilele pot lua numai valorile 0 şi 1, mai precis o problemă de tip E cu funcţia scop de tip timp. Pe de altă parte, dacă luăm în considerare funcţia f_1 şi restricţia (4.1), problema (PS) poate fi văzută ca o generalizare a problemei de asignare cu funcţie scop de tip timp.

Ţinând cont de cele prezentate în Capitolul 2, problema (PS) este o problemă de asignare lexicografică tricriterială de tip timp. Soluţia sa optimă este un punct de minim lexicografic al funcţiei f, dar nu este un punct de minim cu proprietatea ”pipeline”. Totuşi soluţia optimă îndeplineşte, datorită formei funcţiei f_3, o condiţie de tip ”pipeline”. Ca atare, putem considera problema (PS) ca o variantă a problemei studiate în Capitolul 2. Necoincizând, după cunoştinţa noastră, cu nici una dintre problemele studiate în literatura de specialitate, o vom studia pentru a putea da o metodă de rezolvare.

Forma particulară a componentelor scalare ale funcţiei scop, precum şi cea a mulţimii soluţiilor admisibile, permite elaborarea unei metode specifice de rezolvare.

4.3.2 Condiţii necesare şi suficiente de optimalitate pentru (PS)

Fie

$$\lambda = \min\{r_{ij} \,|\, i \in I,\, j \in J\}, \tag{4.9}$$

$$h = \min\{i \in I \,|\, \exists\, k \in J \,\text{astfel încât}\, r_{ik} = \lambda\}, \tag{4.10}$$

$$J_{h,\lambda} = \{j \in J \,|\, r_{hj} = \lambda\}, \tag{4.11}$$

şi

$$q = card(J_{h,\lambda}). \tag{4.12}$$

În funcţie de sensul inegalităţii dintre $\sum_{i\in I} a_i$ şi $n+q$, vom deosebi două situaţii distincte, puse în evidenţă de propoziţiile ce urmează.

Propoziţia 4.3.3 (TUNS (BODE) O.R. *şi* NEAMŢIU L. [*119*]). *Dacă*

$$\sum_{i\in I} a_i < n + q, \tag{4.13}$$

atunci pentru fiecare soluţie admisibilă $Y \in \mathcal{Y}$ *avem:*

$$f_1(Y) = \lambda \tag{4.14}$$

şi

$$f_2(Y) = h. \tag{4.15}$$

Observaţia 4.3.4 *Dacă condiţia (4.13) este îndeplinită, atunci, pentru fiecare soluţie optimă* $Y^0 \in \mathcal{Y}$ *a problemei* (PS)*, avem* $f_1(Y^0) = \lambda$ *şi* $f_2(Y^0) = h$.

Propoziţia 4.3.5 (Tuns (Bode) O.R. *şi* Neamţiu L. [*119*]). *Fie* $Y^0 \in \mathcal{Y}$ *o soluţie optimă a problemei* (PS)*. Dacă*

$$\sum_{i \in I} a_i \geq n + q, \tag{4.16}$$

atunci avem

$$y^0_{hj} = 0, \; \forall \, j \in J_{h,\lambda}. \tag{4.17}$$

Din această propoziţie rezultă că, dacă $q = n$, atunci a determina soluţia optimă a problemei (PS) este echivalent cu determinarea unei soluţii optime a unei probleme de acelaşi tip ca şi (PS), dar în care, în matricea scorurilor, linia h nu apare. Prin urmare, în continuare, presupunem că $q < n$.

În construirea unei metode de rezolvare a problemei (PS) am mers pe ideea obţinerii soluţiei optime în două etape. În prima etapă, determinăm un punct de minim lexicografic Y^0 al funcţiei bicriteriale ale cărei componente scalare sunt f_1 şi f_2 pe mulţimea $\mathcal{Y}$. În a doua etapă verificăm dacă Y^0 este şi soluţie optimă a problemei (PS). Dacă nu este o soluţie optimă, indicăm un mod de a înlocui Y^0 cu un alt punct de minim lexicografic. Procedeul continuă până când se găseşte soluţia optimă a problemei (PS). Deoarece mulţimea $\mathcal{Y}$ este finită, evident metoda indicată de noi este o metodă care conduce, după un număr finit de iteraţii, la o soluţie optimă.

În continuare vom studia problema

$$(PM) \quad \begin{cases} \varphi(Y) = \begin{pmatrix} f_1(Y) \\ f_2(Y) \end{pmatrix} \to lex - \max - \max, \\ Y \in \mathcal{Y}. \end{cases} \tag{4.18}$$

Fie $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$ şi $h \in I$. Cu ajutorul acestor numere construim matricea $C_{\lambda,h} = [c_{ij}]$, unde

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, \quad \text{dacă} \quad r_{ij} > \lambda, \\ 1, \quad \text{dacă} \quad r_{ij} = \lambda \quad \text{şi} \quad i \geq h, \\ n+1, \quad \text{dacă} \quad (r_{ij} < \lambda) \quad \text{sau} \quad (r_{ij} = \lambda \quad \text{şi} \quad i < h). \end{cases} \tag{4.19}$$

Considerăm acum problema

$$(AC_{\lambda,h}) \quad \begin{cases} \sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in J} c_{ij} y_{ij} \to \min, \\ Y \in \mathcal{Y}. \end{cases} \tag{4.20}$$

Următoarele rezultate reflectă legătura existentă între soluţiile optime ale problemelor (PS), (PM) şi (AC$_{\lambda,h}$).

Propoziţia 4.3.6 (Tuns (Bode) O.R. şi Neamţiu L. [119]). *Dacă $\tilde{Y} \in \mathcal{Y}$ este o soluţie optimă a problemei (PS), $\lambda = f_1(\tilde{Y})$ şi $h = f_2(\tilde{Y})$, atunci $\tilde{Y}$ este o soluţie optimă a problemei (PM) şi o soluţie optimă a problemei $(AC_{\lambda,h})$.*

Propoziţia 4.3.7 (Tuns (Bode) O.R. şi Neamţiu L. [119]). *Dacă $\tilde{Y} \in \mathcal{Y}$ este o soluţie optimă a problemei (PM) şi o soluţie optimă a problemei $(AC_{\lambda,h})$, unde $\lambda = f_1(\tilde{Y})$ şi $h = f_2(\tilde{Y})$, atunci $\tilde{Y}$ este o soluţie optimă a problemei (PS).*

Din propoziţiile 4.3.6 şi 4.3.7 rezultă că putem reduce rezolvarea problemei (PS) la determinarea acelei soluţii optime Y a problemei (PM) care, în acelaşi timp, este şi soluţie optimă a problemei $(AC_{\lambda,h})$, cu $\lambda = f_1(\tilde{Y})$ şi $h = f_2(\tilde{Y})$.

Deoarece problema $(AC_{\lambda,h})$ este o problemă de transport neechilibrată, vom construi mai întâi problema de transport echilibrată corespunzătoare, adăugând o linie.. Fie $\overline{J} = J \cup \{n+1\}$,

$$b_j = 1,\ \forall j \in J,\ b_{n+1} = \sum_{s\in I} a_s - n, \tag{4.21}$$

$$c^*_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{dacă} \quad i \in I,\ j \in J, \\ 0, & \text{dacă} \quad i \in I,\ j = n+1, \end{cases} \tag{4.22}$$

şi

$$\mathcal{Z} = \{Z = [z_{ij}] \in M_{m\times\{n+1\}}(\{0,1\}) | \sum_{j\in J} z_{ij} = a_i,\ \forall i \in I,\ \sum_{i\in I} z_{ij} = b_j,\ \forall j \in J\}.$$

Să considerăm acum următoarea problemă de transport echilibrată:

$$(AC^*_{\lambda,h}) \quad \begin{cases} f^*_c(Z) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in\overline{J}} c^*_{ij} z_{ij} \to \min, \\ Z \in \mathcal{Z}. \end{cases} \tag{4.23}$$

Aplicând problemei $(\mathrm{AC}^*_{\lambda,h})$ teorema planului potenţial şi ţinând cont de legătura dintre problemele $(\mathrm{AC}^*_{\lambda,h})$ şi $(\mathrm{AC}_{\lambda,h})$ obţinem următoarea condiţie necesară şi suficientă de optimalitate.

Teorema 4.3.8 (Tuns (Bode) O.R. [116]). *$Y \in \mathcal{Y}$ este o soluţie optimă a problemei $(AC_{\lambda,h})$ dacă şi numai dacă*

$$\sum_{s\in I} c_{sj} y_{sj} \le c_{ij},\ \forall i \in I,\ \forall j \in J. \tag{4.24}$$

Din propoziţiile 4.3.6 şi 4.3.7 şi din teorema 4.3.8 obţinem următorul rezultat important.

Teorema 4.3.14 (Tuns (Bode) O.R. [116]). *Matricea $\tilde{Y} \in \mathcal{Y}$ este o soluţie optimă a problemei (PS) dacă şi numai dacă $\tilde{Y}$ este o soluţie optimă a problemei (PM) şi*

$$\sum_{s\in I} c_{sj} y_{sj} \le c_{ij},\ \forall i \in I,\ \forall j \in J, \tag{4.25}$$

unde

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad r_{ij} > f_1(\tilde{Y}), \\ 1, & \text{dacă} \quad r_{ij} = f_1(\tilde{Y}) \quad \text{şi} \quad i \ge f_2(\tilde{Y}), \\ n+1, & \text{dacă} \quad (r_{ij} < f_1(\tilde{Y})) \quad \text{sau} \quad (r_{ij} = f_1(\tilde{Y}) \text{ şi } i < f_2(\tilde{Y})). \end{cases} \tag{4.26}$$

4.3.3 O tehnică de rezolvare a problemei (PM)

Utilizând Propoziţiile 4.3.3 şi 4.3.5, în teză dăm un algoritm polinomial pentru rezolvarea problemei (PM). Eficienţa acestui algoritm constă în faptul că nu se porneşte de la o soluţie admisibilă, care este apoi îmbunătăţită, ci soluţia optimă se obţine prin parcurgerea succesivă, de sus în jos şi de la dreapta la stânga a matricei scorurilor în vederea eliminării a cel puţin unui element şi fixarea valorii variabilei corespunzătoare lui. Menţionăm că această tehnică poate fi utilizată şi pentru rezolvarea problemei de tip timp de asignare. După prezentarea detaliată a acestei metode, ea este ilustrată printr-un exemplu.

4.4 Studiul problemei (AEP$_2$)

În prezentul paragraf modelăm matematic şi rezolvăm cea de a doua problemă economică în condiţiile în care, pe de o parte, nu există nici o restricţie în ceea ce priveşte bugetul alocat pentru cursurile de formare profesională şi, pe de altă parte, în condiţiile în care numărul maxim de persoane care pot participa la aceste cursuri este mai mic decât numărul total de şomeri înregistraţi care au nevoie de a participa la aceste cursuri. Scopul urmărit este acela de a cursa cât mai mulţi şomeri, cel mai mic scor atins de un şomer asignat la un curs să fie cât mai mare şi numărul celor pentru care se atinge scorul minim să fie cât mai mic.

În aceste condiţii, în cele ce urmează vom lucra în ipoteza că

$$\sum_{i \in I} a_i < n. \tag{4.27}$$

Utilizând notaţiile introduse în subsecţiunea 4.2, considerăm următoarea problemă de optimizare lexicografică:

$$(PMR) \quad \begin{cases} \varphi_1(Y) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in J} y_{ij} \\ \min \left\{ r_{ij} \,|\, i \in I,\, j \in J,\, y_{ij} = 1 \right\} \end{pmatrix} \to lex - \max - \max, \\ \sum\limits_{j \in J} y_{ij} \leq a_i,\ \forall\, i \in I, \\ \sum\limits_{i \in I} y_{ij} \leq 1,\ \forall\, j \in J, \\ y_{ij} \in \{0, 1\},\ \forall\, i \in I,\ \forall\, j \in J. \end{cases} \tag{4.28}$$

Vom nota prin Ω mulţimea soluţiilor admisibile ale problemei (PMR), adică

$$\Omega = \left\{ Y = [y_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}(\{0,1\}) \,|\, \sum_{i \in I} y_{ij} \leq 1,\ \forall\, j \in J;\ \sum_{j \in J} y_{ij} \leq a_i,\ \forall\, i \in I \right\}. \tag{4.29}$$

Deoarece lucrăm în ipoteza (4.27), valoarea maximă a sumei $\sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in J} y_{ij}$ este $\sum\limits_{i \in I} a_i$.

Observăm faptul că dacă luăm

$$y_{ij}^* = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = 1,\, j \in \{1, \dots, a_1\}, \\ 0, \text{ dacă } i = 1,\, j \in \{a_1 + 1, \dots, \sum\limits_{i\in I} a_i\}, \\ 1, \text{ dacă } i \in I \setminus \{1\},\, j \in \Big\{ \sum\limits_{k=1}^{i-1}(a_k + 1), \dots, \sum\limits_{k=1}^{i} a_k \Big\}, \\ 0, \text{ dacă } i \in I \setminus \{1\},\, j \in \Big\{1, \dots, \sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k \Big\} \cup \Big\{ \sum\limits_{k=1}^{i}(a_k + 1), \dots, n \Big\}. \end{cases} \tag{4.30}$$

atunci obţinem că $Y^* = [y_{ij}^*] \in \Omega$. Mai mult,

$$\sum_{i\in I} \sum_{j\in J} y_{ij}^0 = a_1 + \dots + a_i + \dots + a_m.$$

Bazându-ne pe cele de mai sus, rezolvarea problemei (PMR) este redusă la rezolvarea următoarei probleme:

$$(PMR_1) \quad \begin{cases} \min \Big\{ r_{ij} \,|\, i \in I,\, j \in J,\, \sum\limits_{j\in J} y_{ij} = a_i,\, \forall\, i \in I, \\ \sum\limits_{i\in I} y_{ij} \le 1,\, \forall\, j \in J, \\ y_{ij} \in \{0, 1\},\, \forall\, i \in I,\, \forall\, j \in J. \end{cases} \tag{4.31}$$

În continuare vom aduce o modificare problemei (PMR$_2$) astfel încât să poată fi rezolvată aplicând metoda descrisă înainte pentru rezolvarea problemei (PM).

Fie $r_{m+1,j} := 1 + \max\{r_{ij} \,|\, i \in I,\, j \in J\}$, $a_{m+1} := n - \sum\limits_{i\in I} a_i$ şi $\bar{I} := I \cup \{m + 1\}$. Considerăm problema:

$$(PMR_2) \quad \begin{cases} \min \Big\{ r_{ij} y_{ij} \,|\, i \in \bar{I},\, j \in J \Big\} \to \max, \\ \sum\limits_{j\in J} y_{ij} = a_i,\, \forall\, i \in \bar{I}, \\ \sum\limits_{i\in \bar{I}} y_{ij} = 1,\, \forall\, j \in J, \\ y_{ij} \in \{0, 1\},\, \forall\, i \in \bar{I},\, \forall\, j \in J. \end{cases} \tag{4.32}$$

Propoziţia 4.4.1 (Tuns (Bode) O.R. [*116*]). *i) Dacă $\bar{Y} = [\bar{y}_{ij}] \in \mathcal{M}_{(m+1)\times n}(\{0, 1\})$ este o soluţie optimă a problemei (PMR_2), atunci $Y^* = [y_{ij}^*] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\{0, 1\})$ este o soluţie optimă a problemei (PMR_1).*

ii) Dacă $Y^* = [y_{ij}^*] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\{0, 1\})$ este o soluţie optimă a problemei (PMR_1), atunci luând

$$\bar{y}_{m+1,j} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } \sum\limits_{i\in I} y_{ij}^* = 1 \\ 1, \text{ dacă } \sum\limits_{i\in I} y_{ij}^* = 0 \end{cases} ,\forall\, j \in J, \tag{4.33}$$

şi $\bar{y}_{ij} = y_{ij}^*, \forall\, i \in I, \forall\, j \in J$, obţinem că matricea $\bar{Y} = [\bar{y}_{ij}] \in \mathcal{M}_{(m+1)\times n}(\{0, 1\})$ este o soluţie *optimă a problemei* (PMR_2).

Rezolvarea problemei (PMR_2) poate fi făcută aplicând tehnica descrisă în paragraful de mai sus. În teză este dat un exemplu simplu cu scopul de a evidenţia cum se aplică acest algoritm.

Capitolul 5

Aplicaţii practice legate de optimizarea portofoliilor

Experienţa profesională pe care am dobândit-o până acum în domeniul economic mi-a dovedit că instrumentele matematice pot simplifica procesul decizional al managementului firmei, astfel încât rezultatele activităţii întreprinse să fie avantajoase. Una dintre cele mai dificile sarcini care presupun asumarea unei decizii importante este decizia de investiţie, deoarece aceasta presupune folosirea (investirea) unei sume de bani cu scopul de a obţine o sumă mai mare. Dar dacă investiţia este făcută fără a ţine cont de anumite restricţii, rezultatul poate fi nefavorabil investitorului. Din acest motiv, în prezentul capitol obiectivul este de a identifica problemele economico-financiare legate de teoria portofoliului, unde prin utilizarea optimizării suntem ghidaţi spre obţinerea soluţiilor optime viabile din punct de vedere practic. Prin urmare, în cadrul acestui capitol ne îndreptăm atenţia spre modelarea matematică şi spre rezolvarea problemelor asociate cu optimizarea portofoliilor.

Contribuţiile autoarei cu privire la aceste subiecte au fost publicate în Lupşa L. şi Tuns (Bode) O.R. [75] şi în Tuns (Bode) O.R. [110], [111] şi [112].

Analizarea problemei de selecţie a portofoliului privită ca o problemă de optimizare bicriterială, ne-a permis să obţinem o nouă funcţie obiectiv pentru investitor. Astfel se introduce un nou model matematic pentru problema de selecţie a portofoliilor, noua funcţie obiectiv fiind egală cu raportul dintre risc şi beneficiu, ţinându-se cont de anumite restricţii.

În secţiunea 5.2.2, bazându-ne pe o problemă economică concretă, studiem cazul în care ambele funcţii obiectiv, atât cea a problemei de nivel superior cât şi cea a problemei de nivel inferior, sunt liniare.

În secţiunea 5.2.3 se studiază un tip de problemă de optimizare pe două nivele în variabile 0-1, pornind de la modelul matematic ataşat unei probleme concrete de optimizare a portofoliilor. Funcţia obiectiv de nivel superior trebuie maximizată, în timp ce funcţia obiectiv de nivel inferior (care este o funcţie bicriterială) trebuie maximizată-minimizată în sens lexicografic. Scopul urmărit a fost acela de a da o metodă de rezolvare a problemei pe două nivele prin reducerea ei la un număr finit de cupluri de probleme de optimizare pseudo-booleene liniare. Una dintre problemele din cuplu este o problemă clasică de asignare.

5.1 Legătura dintre problemele de selecţie a portofoliului şi optimizarea bicriterială

5.1.1 Noţiuni şi rezultate relative la teoria portofoliilor

Teoria modernă a portofoliilor reprezintă o abordare ştiinţifică a investiţiilor. Aceasta se ocupă cu selectarea portofoliilor pentru investitorii care doresc să-şi maximizeze beneficiul aşteptat pentru nivelul de risc pe care fiecare investitor este dispus să şi-l asume. În prezentul paragraf prezentăm câteva noţiuni de bază legate de teoria portofoliilor. Ca şi lucrări de referinţă în acest domeniu de cercetare amintim [54], [56], [79], [81], [82], [83], [87], [97] şi [130].

5.1.2 Modelele de selecţie a portofoliului de tip Markowitz

În acest paragraf prezentăm modelele de selecţie a portofoliului de tip Markowitz, adică problema maximizării beneficiului aşteptat precizându-se clar nivelul de risc asumat, problema minimizării riscului precizându-se clar nivelul beneficiului aşteptat şi problema de echilibrare a beneficiului aşteptat şi a riscului asumat. Se evidenţiază în termeni matematici problema de selecţie a portofoliului. În ciuda faptului că modelele de selecţie a portofoliului de tip Markowitz sunt considerate a fi modele simplificate, deoarece acestea iau în considerare doar valoarea medie şi dispersia profitului portofoliului, acestea sunt cele mai utilizate în zilele noastre, rămânând *piatra de temelie* a teoriei moderne a portofoliului.

5.1.3 Problema de selecţie a portofoliului versus optimizarea bicriterială

În acest paragraf tratăm problema de selecţie a portofoliului ca şi o problemă de optimizare bicriterială. Acest lucru ne permite să obţinem un nou mod abordare referitor la scopul urmărit de investitor. Astfel, introducem un nou model matematic relativ la problema de selecţie a portofoliilor în care noua funcţie obiectiv este egală cu raportul dintre risc şi beneficiu, evident adăugându-se anumite restricţii specifice.

Fie $f = (f_1, f_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ o funcţie vectorială, unde f_1 reprezintă funcţia risc şi f_2 reprezintă funcţia beneficiu. Putem privi problema de selecţie a portofoliului ca şi o problemă de minimizare bicriterială:

$$\text{(PV)} \qquad \begin{cases} (f(s)) = \begin{pmatrix} f_1(s) \\ -f_2(s) \end{pmatrix} \to \text{v} - \min, \\ s \in \Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

Să remarcăm faptul că, în general, prolema (PV) nu are puncte ideale.

În situaţiile concrete, se mai impune condiţia ca riscul să nu depăşească o valoare dată $\overline{m}$ şi beneficiul aşteptat să fie mai mare decât o valoare precizată $\underline{m} > 0$.

Fie $\tilde{\Omega} = \{s \in \Omega |\, f_1(s) \leq \overline{m},\ f_2(s) \geq \underline{m}\}$. Folosind ideea din Stancu-Minasian I.M. [108]

(§ 1.1), construim funcţia $F : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$F(s) = \begin{cases} \dfrac{f_1(s)}{f_2(s)}, \text{ dacă } f_2(s) \neq 0, \\ +\infty, \text{ dacă } f_2(s) = 0. \end{cases}$$

Folosind acum funcţia F introducem o relaţie de preferinţă pe mulţimea Ω.

Definiţia 5.1.1 (Tuns (Bode) O.R. [110]). *Spunem că punctul $s^0 \in \Omega$ este strict preferat punctului $s \in \Omega$ în raport cu relaţia de preferinţă $\succ$, şi notăm acest lucru scriind $s^0 \succ s$, dacă a) $s^0 \in \tilde{\Omega}$ şi $s \notin \tilde{\Omega}$; or b) $s^0 \in \tilde{\Omega}$, $s \in \tilde{\Omega}$ şi $F(s) > F(s^0)$.*
Un punct $s^0 \in \Omega$ se numeşte nedominat dacă $s^0 \in \tilde{\Omega}$ şi nu există $s \in \Omega$ strict preferat lui s^0.

Propoziţia 5.1.2 (Tuns (Bode) O.R. [110]). *Dacă problema (PV) are un punct ideal $s^0 \in \Omega$ şi acesta verifică condiţiile $f_1(s^0) \leq \overline{m}$ şi $f_2(s^0) \geq \underline{m}$, atunci s^0 este un punct nedominat în raport cu relaţia de preferinţă $\succ$.*

Din definiţia 5.1.1 deducem că un punct $x^0 \in \Omega$ este nedominat în raport cu relaţia de preferinţă $\succ$ dacă şi numai dacă este soluţie optimă a problemei

$$\text{(PO)} \qquad \begin{cases} F(s) \ \to \ \min, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} s_j = M, \\ f_1(s) \leq \overline{m}, \\ f_2(s) \geq \underline{m}, \\ s \in \mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

Propoziţia 5.1.4 (Tuns (Bode) O.R. [110]). *Dacă $s^0 \in \Omega$ este o soluţie optimă a problemei (PO) şi $\underline{m} > 0$, atunci s^0 este un punct* min-*eficient al funcţiei $f = (f_1, -f_2)$ relativ la mulţimea $\tilde{\Omega}$.*

Observaţia 5.1.5 *Ţinând cont de cele expuse mai sus, vom numi portofoliu optim orice punct $s^0 \in \Omega$ nedominat în raport cu relaţia de preferinţă $\succ$.*

5.1.4 Un tip particular de problemă de selecţie a portofoliului în variabile 0 şi 1

În această secţiune se exemplifică noul mod de alegere a portofoliului optim pentru un caz particular de problemă de selecţie a portofoliului în care variabilele pot lua doar valorile 0 şi 1. Modelul matematic corespunzător este o problemă de optimizare fracţionară pseudo-booleană. Pentru rezolvarea acestei probleme este sugerată o metodă de tip enumerativ, bazată pe calculul cu şiruri de caractere.

5.2 Două aplicaţii ale problemei de selecţie a portofoliului în variabile 0 şi 1

În această secţiune prezentăm două aplicaţii concrete de probleme de selecţie a portofoliului în variabile 0 şi 1. Folosind optimizarea pe două nivele pentru a modela matematic această problemă, considerăm două situaţii diferite care implică studiul a două probleme diferite:
(i) o problemă de selecţie a portofoliului booleană, în care avem de a face cu o singură perioadă în care se face investiţia, iar portofoliul de acţiuni conţine acţiuni care au aceeaşi cotaţie pe piaţa de capital;
(ii) o problemă de selecţie a portofoliului booleană, în care perioada de investiţie este divizată în mai multe subperioade de timp, pe piaţa de capital se poate tranzacţiona cu diferite portofolii de acţiuni şi există mai multe restricţii referitoare la investiţie.

În fiecare caz în parte, demonstrăm condiţii necesare şi suficiente de optim şi dăm o metodă de rezolvare a problemei.

5.2.1 Formularea problemei economice concrete

Fie S o firmă care deţine n sucursale, notate prin S_j, $j \in J = \{1, \ldots, n\}$. Firma urmează să facă investiţii în anumite portofolii de acţiuni de pe piaţa de capital.

Fie P_i, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$, $m > n$, portofoliile de acţiuni în care firma S va investi. Pentru fiecare portofoliu de acţiuni P_i, $i \in I$, firma S deţine date istorice pe baza cărora poate previziona beneficiul aşteptat pentru un anumit nivel al riscului asumat într-o perioadă de timp T.

Firma S va tranzacţiona cu portofoliile de acţiuni în două moduri diferite:
i) direct, prin intermediul celor n sucursale ale sale;
ii) indirect, prin intermediul a p companii notate prin C_k, $k \in K = \{1, \ldots, p\}$, care fac parte dintr-un grup de companii specializat în servicii de investiţii financiare, notat cu C. În acest caz, pe baza unui acord între cele două companii, grupul C va ceda o parte din beneficiul obţinut firmei S.

Ambele companii reprezintă jucătorii unui joc Stackelberg: firma lider S acţionează prima şi va alege acele portofolii de acţiuni în care va investi direct, şi abia apoi firma follower C va putea tranzacţiona cu portofoliile în care firma lider nu a ales să tranzacţioneze direct. Amintim restricţiile jocului pentru ambii jucători:
- pentru lider: fiecare sucursală va tranzacţiona cu exact un portofoliu de acţiuni astfel încât să îşi maximizeze beneficiul;
- pentru follower: compania C va obţine propriul beneficiu în urma tranzacţionărilor făcute şi, pe baza unui acord cu firma lider, îi va ceda o parte din acest beneficiu. Follower-ul va trebui să tranzacţioneze doar cu acele portofolii care nu au fost alese de către firma lider pentru a investi direct.

În termeni matematici, această problemă economică ne conduce la o problemă de optimizare pe două nivele.

5.2.2 Modelarea matematică şi rezolvarea problemei (EB)

Considerăm prima problemă menţionată în secţiunea 5.2.

Fie $f_1 : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f_1(X) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij}x_{ij},\ \forall\ X = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Reprezintă beneficiul total al firmei S obţinut pe baza investiţiei directe.

Fie $g : \mathbb{R}^{m\times p} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $g(Y) = \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} c_{ik}y_{ik},\ \forall\ Y = [y_{ik}] \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Reprezintă beneficiul total al companiilor C_k, $k \in K$.

Fie $f_2 : \mathbb{R}^{m\times p} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f_2(Y) = \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} b_{ik}y_{ik},\ \forall\ Y = [y_{ik}] \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Reprezintă beneficiul total al firmei S obţinut pe baza investiţiei indirecte.

Modelul matematic pentru problema de selecţie a portofoliului este următoarea problemă de optimizare pe două nivele:

$$(EB)\quad \begin{cases} f_1(X) + f_2(Y) \to \max, \\ X \in \Lambda, \\ Y \in U^{*X}, \end{cases}$$

unde $\Lambda = \left\{X = [x_{ij}] \in \{0,1\}^{m\times n} \mid \sum_{i\in I} x_{ij} = 1,\ \forall\ j \in J,\ \sum_{j\in J} x_{ij} \le 1, \forall i \in I\right\}$ şi U^{*X} este mulţimea soluţiilor optime ale problemei:

$$(P2_X)\quad \begin{cases} g(Y) = \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} c_{ik}y_{ik} \to \max, \\ Y \in U^X, \end{cases}$$

cu $U^X = \left\{Y^X = [y^X_{ik}] \in \{0,1\}^{m\times p} \mid \sum_{i\in I} y^X_{ik} = 1, \forall k \in K, \sum_{k\in K} y^X_{ik} = 1 - \sum_{j\in J} x_{ij},\ \forall i \in I\right\}$.

În continuare arătăm că problema (EB) poate fi rezolvată utilizând tehnica splitării. În acest sens introducem artificial un parametru v si divizăm domeniul de variaţie a parametrului.

Fie $V = \{v = (v_1, ..., v_m) \in \{0,1\}^m \mid v_1 + \cdots + v_m = n\}$. Pentru fiecare $v = (v_1, ..., v_m) \in V$, construim mulţimea $\Lambda^v = \left\{X = [x_{ij}] \in \Lambda \mid \sum_{j\in J} x_{ij} = v_i,\ \forall i \in I\right\}$ şi $U^v = \left\{Y = [y_{ik}] \in \{0,1\}^{m\times p} \mid \sum_{i\in I} y_{ik} = 1, \forall k \in K,\ \sum_{k\in K} y_{ik} = 1 - v_i, \forall i \in I\right\}$. De asemenea, pentru fiecare $v \in V$, considerăm problemele:

$$(P_1^v)\quad \begin{cases} f_1(X) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij}x_{ij} \to \max, \\ X \in \Lambda^v \end{cases}$$

şi

$$(P_3^v)\quad \begin{cases} g^v(Y) = \sum_{i\in(I\setminus M_v)}\sum_{k\in K} c_{ik}y_{ik} \to \max, \\ Y \in U^v, \end{cases}$$

unde $M_v = \{i \in I \mid v_i = 1\}$.

Fie F_1^v valoarea maximă a lui f_1 pe Λ^v, $\mathcal{X}^v$ mulţimea soluţiilor optime ale problemei (P_1^v), G^v valoarea maximă a lui g^v pe U^v, şi $\mathcal{Y}^v$ mulţimea soluţiilor optime ale problemei (P_3^v).

În continuare vom demonstra legătura dintre problema (EB) şi problemele (P_1^v) şi (P_3^v).

Teorema 5.2.1 (TUNS (BODE) O.R. [*111*]). *Dacă* (X^0, Y^0) *este o soluţie optimă a problemei (EB), atunci există* $v^0 = (v_1^0, \ldots, v_m^0) \in V$ *astfel încât* X^0 *să fie soluţie optimă a problemei* $(P_1^{v^0})$ *şi* Y^0 *să fie soluţie optimă a problemei* $(P_3^{v^0})$.

Fie $F : V \to \mathbb{R}$, $F(v) = F_1^v + \max\{f_2(Y) | Y \in U^v\}$. Considerăm problema

$$(EBV) \quad \begin{cases} F(v) \to \max, \\ v \in V. \end{cases}$$

Teorema 5.2.3 (TUNS (BODE) O.R. [*111*]). *Dacă funcţia* g *este injectivă şi* v^0 *este o soluţie optimă a problemei (EBV), atunci* (X^0, Y^0) *este o soluţie optimă a problemei (EB), oricare ar fi* $X^0 \in \mathcal{X}^{v^0}$ *şi* $Y^0 \in \mathcal{Y}^{v^0}$.

Printr-un exemplu arătăm faptul că cerinţa ca funcţia g să fie injectivă este esenţială. Metoda sugerată pentru rezolvarea problemei (EB) este ilustrată în exemplul 5.2.4.

5.2.3 Modelarea matematică şi rezolvarea problemei (EBCT)

Considerăm a doua problemă menţionată în secţiunea 5.2.

Modelul matematic ataşat acestei probleme este:

$$(EBCT) \begin{cases} f(X,Y) = \sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j \in J} a_{ij} x_{ij} + \sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{k \in K} b_{ik} (\sum\limits_{h \in H} y_{ikh}) \to \max, \\ X = [x_{ij}] \in \Omega_1, \\ \max\{r_{ij} x_{ij} \,|\, i \in I,\, j \in J\} \le e, \\ Y = [y_{ikh}] \in \mathcal{Y}^*(X) \,\text{with}\, Y \in \{0,1\}^{m \times p \times s}, \end{cases}$$

unde $\mathcal{Y}^*(X)$ notează mulţimea punctelor din $\mathcal{Y}(X)$ care sunt max-p min-max (conform definiţiei 5.2.9 din teză).

(EBCT) este o problemă de optimizare pe două nivele în care funcţia de nivel inferior este bicriterială de tip cost-timp. După cunoştinţele noastre, astfel de probleme nu au fost analizate în mod special, deşi, după cum vom vedea, admit metode specifice de rezolvare în ipoteza că, coeficienţii din funcţiile scop şi din restricţii sunt numere strict pozitive. Forma particulară a restricţiilor problemei ne permite din nou să elaborăm un algoritm finit de rezolvare. În acest scop divizăm mulţimea Ω, într-un număr de submulţimi mai mic sau egal cu C_m^n, prin intermediul unui parametru v introdus. Fie

$$V = \{v = (v_1, ..., v_m) \in \{0,1\}^m \,|\, v_1 + \cdots + v_m = n\}.$$

Pentru fiecare $v = (v_1, ..., v_m) \in V$ construim

$$U^v := \{i \in I | v_i = 1\}, \quad \bar{U}^v = \{i \in I | v_i = 0\} = I \setminus U^v,$$

$$\Lambda^v := \{X = [x_{ij}] \in \{0,1\}^{m \times n} \,|\, \sum_{i \in I} x_{ij} = 1,\, \forall j \in J, \quad \sum_{j \in J} x_{ij} = v_i,\, \forall\, i \in I\}$$

şi

$$\mathcal{X}^v := \{X = [x_{ij}] \in \Lambda^v \,|\, \max\{r_{ij} x_{ij} \,|\, i \in U^v,\, j \in J\} \le e\}.$$

Observăm că, dacă $\mathcal{V}_1 = \{v \in V \mid \mathcal{X}^v \neq \emptyset\}$, atunci avem $\bigcup_{v\in\mathcal{V}_1} \Lambda^v = \mathcal{X}$. De asemenea, pentru fiecare $v \in V$, notăm

$$
\begin{aligned}
W^v := \Big\{ & Y = [y_{ikh}] \in \{0,1\}^{m\times p\times s} \mid \\
& \operatorname{sgn}\Big(\sum_{i\in\bar{U}^v}\sum_{h\in H} y_{ikh}\Big) = 1,\ \forall\, k \in K, \\
& \operatorname{sgn}\Big(\sum_{k\in K}\sum_{h\in H} y_{ikh}\Big) = 1,\ \forall\, i \in \bar{U}^v, \\
& \sum_{k\in K} y_{ikh} \le 1,\ \forall\, i \in \bar{U}^v,\ \forall\, h \in H, \\
& y_{ikh} = 0, \forall\, i \in U^v,\ \forall\, k \in K,\ \forall\, h \in H \Big\}
\end{aligned}
$$

şi

$$\mathcal{Y}^v := \Big\{ Y \in W^v \mid \max\{d_{ikh}y_{ikh} \mid i \in \bar{U}^v, k \in K\} \le e_h,\ \forall h \in H \Big\}.$$

Fie $\mathcal{V}_2 := \{v \in V \mid \mathcal{Y}^v \neq \emptyset\}$ and $\mathcal{V} := \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$.

Observaţia 5.2.10 (Tuns (Bode) O.R. [*112*]). *Dacă $v \in V$ şi $X \in \Lambda^v$, atunci:*

$$x_{ij} = 0, \quad \forall\, i \in \bar{U}^v, \quad \forall\, j \in J; \tag{5.2}$$

$$\sum_{j\in J} x_{ij} = 1, \forall\, i \in U^v, \quad \sum_{i\in U^v} x_{ij} = 1, \quad \forall\, j \in J; \tag{5.3}$$

$$\max\{r_{ij}x_{ij} \mid i \in I,\ j \in J\} = \max\{r_{ij}x_{ij} \mid i \in U^v,\ j \in J\}. \tag{5.4}$$

Observaţia 5.2.11 (Tuns (Bode) O.R. [*112*]). *Din inegalităţile de mai sus obţinem:*
(i) Dacă $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}(X)$ şi $v = (\sum_{j\in J} x_{1j}, \ldots, \sum_{j\in J} x_{mj})$, atunci $v \in \mathcal{V}$, $X \in \mathcal{X}^v$ şi $Y \in \mathcal{Y}^v$.
(ii) Dacă $v \in \mathcal{V}$, $X \in \mathcal{X}^v$ şi $Y \in \mathcal{Y}^v$, atunci $X \in \mathcal{X}$ şi $Y \in \mathcal{Y}(X)$.
(iii) Dacă $v \in \mathcal{V}$ şi X', $X'' \in \mathcal{X}^v$, atunci $\mathcal{Y}^*(X') = \mathcal{Y}^*(X'')$.

Pentru $v \in \mathcal{V}$ considerăm problema:

$$(\mathrm{P}_1^v) \quad \begin{cases} f_1(X) = \sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} a_{ij}x_{ij} \to \max, \\ X \in \mathcal{X}^v. \end{cases}$$

Mulţimea soluţiilor sale optime o vom nota prin $\mathcal{X}_0^v$.

Prin (P_2^v) vom nota problema determinării punctelor max $-p$ min $-$ max ale funcţiei vectoriale φ relativ la mulţimea $\mathcal{Y}^v$ şi prin $\mathcal{Y}_0^v$ mulţimea acestor puncte.

Teorema 5.2.12 (Tuns (Bode) O.R. [*112*]). *Dacă (X^0, Y^0) este o soluţie optimă a lui (EBCT) şi*

$$v^0 = \Big(\sum_{j\in J} x_{1j}^0, \ldots, \sum_{j\in J} x_{ij}^0, \ldots, \sum_{j\in J} x_{mj}^0\Big), \tag{5.5}$$

atunci $v^0 \in \mathcal{V}$, $X^0 \in \mathcal{X}_0^{v^0}$ *şi* $Y^0 \in \mathcal{Y}_0^{v^0}$.

În continuare considerăm funcţia $F : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ dată prin

$$F(v) = \sum_{i \in U^v} \sum_{j \in J} a_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in \bar{U}^v} \sum_{k \in K} b_{ik} \left(\sum_{h \in H} y_{ikh} \right), \quad \forall\, v \in \mathcal{V}, \tag{5.6}$$

unde $X \in \mathcal{X}_0^v$ şi $Y \in \mathcal{Y}_0^v$ sunt alese arbitrar.

Acum considerăm problema:

$$(EBVT) \quad \begin{cases} F(v) \to \max \\ v \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

Teorema 5.2.13 (Tuns (Bode) O.R. [*112*]). *Dacă* v^0 *este o soluţie optimă a lui (EBVT), atunci perechea* (X^0, Y^0) *este o soluţie optimă a problemei (EBCT), oricare ar fi* $X^0 \in \mathcal{X}_0^{v^0}$ *şi* $Y^0 \in \mathcal{Y}_0^{v^0}$.

Teoremele 5.2.12 şi 5.2.13 ne permit să reducem rezolvarea problemei (EBCT) la rezolvarea unei secvenţe finite de cel mult C_m^n perechi de probleme clasice de optimizare pseudo-booleană. De obicei, acest număr este mai mic din cauza restricţiilor

$$\max\{r_{ij} x_{ij} \,|\, i \in U^v,\ j \in J\} \le e,$$

şi

$$\max\{d_{ikh} y_{ikh} \,|\, i \in \bar{U}^v,\ k \in K\} \le e_h, \text{ oricare ar fi } h \in H.$$

În continuare analizăm modul în care putem transforma problemele (P_1^v) şi (P_2^v) pentru a fi mai uşor de rezolvat.

Fie numerele $\mu = 1 + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij}$ şi matricile $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ şi $\tilde{C}_h = [\tilde{c}_{ikh}]$, unde

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} \mu + a_{ij}, & \text{if} \quad r_{ij} \le e \\ 0, & \text{if} \quad r_{ij} > e \end{cases}, \quad \text{oricare ar fi} \quad i \in I,\ j \in J \tag{5.7}$$

şi

$$\tilde{c}_{ikh} = \begin{cases} c_{ikh}, & \text{if} \quad \mathrm{d_{ikh}} \le \mathrm{e_h} \\ 0, & \text{if} \quad \mathrm{d_{ikh}} > \mathrm{e_h} \end{cases}, \quad \text{oricare ar fi} \quad \mathrm{i \in I,\ k \in K,\ h \in H}. \tag{5.8}$$

Observaţia 5.2.14 (Tuns (Bode) O.R. [*112*]). *Fie* $v \in V$. *Următoarele propoziţii sunt adevărate:*

(i) Dacă există $i \in U^v$ *astfel încât* $\sum_{j \in J} \tilde{a}_{ij} = 0$, *atunci problema* ($P_1^v$) *este inconsistentă.*

(ii) Dacă există $j \in J$ *astfel încât* $\sum_{i \in U^v} \tilde{a}_{ij} = 0$, *atunci problema* ($P_1^v$) *este inconsistentă.*

(iii) Dacă există $i \in \bar{U}^v$ *astfel încât* $\sum_{k \in K} \sum_{h \in H} \tilde{c}_{ikh} = 0$, *atunci problema* ($P_2^v$) *este inconsistentă.*

(iv) Dacă există $k \in K$ *astfel încât* $\sum_{i \in \bar{U}^v} \sum_{h \in H} \tilde{c}_{ikh} = 0$, *atunci problema* ($P_2^v$) *este inconsistentă.*

Fie funcţia $\tilde{f}_1 : \{0, 1\}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}_1(X) = \sum_{i\in U^v} \sum_{j\in J} \tilde{a}_{ij}x_{ij}$, $\forall X \in \{0, 1\}^{m\times n}$.

Fie $X \in \Lambda^v$, şi fie $\Delta(X) = \{(i,j) \in U^v \times J \,|\, x_{ij} = 1, \quad r_{ij} \le e\}$ şi $\bar{\Delta}(X) = \{(i,j) \in U^v \times J \,|\, x_{ij} = 1, \quad r_{ij} > e\}$. Avem $0 \le \mathrm{card}(\Delta(\mathrm{X})) \le \mathrm{n}$ şi

$$\tilde{f}_1(X) = \sum_{(i,j)\in\Delta(X)} \tilde{a}_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in\bar{\Delta}(X)} \tilde{a}_{ij}x_{ij} = \mu \cdot \mathrm{card}(\Delta(\mathrm{X})) + \sum_{(\mathrm{i,j})\in\Delta(\mathrm{X})} \mathrm{a_{ij}}. \tag{5.9}$$

Pentru fiecare $v \in V$ considerăm problema:

$$(\mathrm{PM_1^v}) \quad \begin{cases} \tilde{f}_1(X) \to \max, \\ x \in \Lambda^v. \end{cases} \tag{5.10}$$

Teorema 5.2.15 (Tuns (Bode) O.R. [*112*]). *Fie $v \in V$.*
(i) Problema (P_1^v) are soluţii admisibile dacă şi numai dacă există $X^v \in \Lambda^v$ astfel încât $\tilde{f}_1(X^v) > n\mu$.
ii) Dacă $v \in \mathcal{V}_1$, atunci problemele (P_1^v) şi (PM_1^v) au aceleaşi soluţii optime.

În baza teoremei 5.2.15, rezolvarea problemei (P_1^v) se reduce la rezolvarea unei probleme clasice de asignare. În acest scop se poate aplica algoritmul dat de Kuhn H.W. [66], sau cel al lui Bertsekas D.P. [9], sau se pot aplica algoritmi genetici, precum cei descrişi de Sahu A. şi Tapadar R. [102].

În cele ce urmează, considerăm funcţia $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \varphi_2, f_2)$, unde

$$\tilde{\varphi}_1(Y) = \sum_{i\in\bar{U}^v} \sum_{k\in K} \sum_{h\in H} \tilde{c}_{ikh}y_{ikh}, \quad \forall Y \in \{0,1\}^{m\times p\times s}. \tag{5.11}$$

Fie $v \in V$. Prin (PM_2^v) vom nota problema determinării punctelor $\max - p \min - \max$ ale funcţiei $\tilde{\varphi}$ relativ la mulţimea $\tilde{W}^v$, unde $\tilde{W}^v = \{Y \in W^v \,|\, \varphi(Y) - \tilde{\varphi}(Y) = 0\}$. Fie $\tilde{\mathcal{Y}}_0^v$ mulţimea punctelor $\max - p \min - \max$ ale lui $\tilde{\varphi}$ relativ la $\tilde{W}^v$.

Fie $v \in V$ şi $Y \in \tilde{W}^v$. Notăm $\Gamma(Y) = \Big\{(i,k,h) \in \bar{U}^v \times K \times H \,|\, y_{ikh} = 1 \quad \text{şi} \quad d_{ikh} \le e_h\Big\}$ şi $\bar{\Gamma}(Y) = \Big\{(i,k,h) \in \bar{U}^v \times K \times H \,|\, y_{ikh} = 1 \quad \text{şi} \quad d_{ikh} > e_h\Big\}$. Atunci,

$$\tilde{\varphi}_1(Y) = \sum_{(i,k,h)\in\Gamma(Y)} \tilde{c}_{ikh} + \sum_{(i,k,h)\in\bar{\Gamma}(X)} \tilde{c}_{ikh} = \sum_{(i,k,h)\in\Gamma(Y)} c_{ikh}. \tag{5.12}$$

Teorema 5.2.16 (Tuns (Bode) O.R. [*112*]). *Dacă $v \in V$, atunci avem: $\mathcal{Y}^v = \tilde{W}^v$ şi $\mathcal{Y}_0^v = \tilde{\mathcal{Y}}_0^v$.*

Problema (PM_2^v) este o problemă de optimizare booleană lexicografică cu trei funcţii obiectiv. Ţinând cont de cele expuse în paragraful 2.4, putem reduce rezolvarea acestei probleme la o problemă de optimizare liniară pseudo-booleană. În acest scop, definim secvenţa de numere $M, M_0, M_1, \ldots, M_q$, unde q este cardinalul mulţimii $\varphi_2(\{0,1\}^{m\times p\times s})$. Fie $M = 1 + \sum_{i\in I} \sum_{k\in K} b_{ik} \ge 1 + \max\{f_2(Y)|Y \in \{0, 1\}^{m\times p\times s}\}$.

Utilizând notaţiile anterioare, construim numerele M_k, $k \in \{q, q-1, \ldots, 0\}$, astfel $M_q = 1$ şi $M_t = 1 + \sum_{\nu=t+1}^{q} M_\nu \cdot \mathrm{card}\,(\mathrm{L}_\nu)$, oricare ar fi $\mathrm{t} \in \{\mathrm{q}-1, \ldots, 0\}$.

Fie funcţia $FL : \{0, 1\}^{m\times p\times s} \to \mathbb{R}$,

$$FL(Y) = -M \cdot M_0 \cdot \tilde{\varphi}_1(Y) + M \sum_{t=1}^{q} \Big(M_t \cdot \sum_{(i,k,h)\in L_t} y_{ikh} \Big) - f_2(Y), \tag{5.13}$$

oricare ar fi $Y \in \{0, 1\}^{m\times p\times s}$.

Vom considera acum problema:

$$(\mathrm{PL}^v) \quad \begin{cases} FL(Y) \to \min, \\ Y \in \tilde{W}^v. \end{cases}$$

Mulţimea soluţiilor optime ale acestei probleme o vom nota prin $\tilde{W}_0^v$.

Teorema 5.2.17 (Tuns (Bode) O.R. [*112*]). *Fie $v \in \mathcal{V}$. Un element $Y^0 \in \tilde{W}^v$ este soluţie optimă a problemei (PL^v) dacă şi numai dacă este un punct* $\max - \mathrm{p}\min - \max$ *al funcţiei $\tilde{\varphi}$ relativ la mulţimea $\tilde{W}^v$.*

Teorema 5.2.17 poate fi utilizată la determinarea punctelor $\max - p \min - \max$ ale funcţiei φ relativ la mulţimea $\mathcal{W}^v$.

Remarcăm faptul că problemele (PL^v) sunt probleme de optimizare liniară pseudobooleană, deci pot fi rezolvate utilizând oricare dintre algoritmii descrişi în Berthold T., Heinz S. şi Pfetsch M.E. [8], sau Hammer P.L. şi Rudeanu S. [51], sau Manquinho V. şi Marques-Silva J. [77].

În continuare, ţinând cont de teoremele 5.2.12, 5.2.13, 5.2.15, 5.2.16, 5.2.17, şi de observaţiile anterioare, în teză este descris un algoritm pentru rezolvarea problemei (EBCT), ilustrat prin exemplul 5.2.18.

Contribuţia în acest capitol a autoarei o constituie noul punct de vedere de alegere a portofoliului optim şi studiul celor două aplicaţii. Din punct de vedere matematic, cele două aplicaţii pun în evidenţă două clase particulare de probleme de optimizare pe două nivele, care pot fi rezolvate exact utilizând tehnica splitării, construindu-se şi metodele corespunzătoare.

Capitolul 6

Aplicaţii ale optimizării pe mai multe nivele în transferul tehnologic

Transferul tehnologic este definit în diferite moduri, în funcţie fie de domeniul de cercetare, fie de scopul cercetării.

Prezentul capitol analizează licensing-ul, una dintre cele mai cunoscute metode utilizate pentru transferul tehnologic între firme. Studiem diferite contracte de licensing în cadrul unui duopol Stackelberg diferenţiat, în care una dintre cele două firme se implică într-un proces de cercetare-dezvoltare în urma căruia poate obţine o inovaţie endogenă care îi reduce costurile de producţie. Pe de altă parte, studiem unele tipuri de probleme particulare de optimizare pe mai multe nivele generate de problemele economice concrete referitoare la diversele tipuri de contracte de licensing.

Contribuţiile proprii relaţionate cu aceste subiecte au fost publicate în lucrările în colaborare Ferreira F. şi Bode O.R. [32], [33], precum şi în Tuns (Bode) O.R. [113].

6.1 Noţiuni şi rezultate relative la transferul tehnologic

Începem printr-o succintă prezentare referitoare la transferul tehnologic, şi implicit a licensing-ului. Acesta a fost obiectul a numeroase studii teoretice după cum se poate vedea şi în lucrările [2], [19], [20], [31], [34], [37], [58], [59], [60], [61], [62], [68], [80], [93], [94], [99], [127], [128], [129] şi [138].

Menţionăm faptul că în prezenta teză lucrăm în ipoteza în care competiţia pe piaţă are loc în cadrul modelului Stackelberg deoarece, din punct de vedere matematic, acest lucru ne conduce la problemele de optimizare pe mai multe nivele. Aceste aspecte rezultă şi din lucrările, individuale sau în colaborare, ale autoarei [32], [33], [111], [112] şi [113]. Contribuţiile proprii ale autoarei însă s-au materializat şi în studiile întreprinse pentru modelele Bertrand şi Cournot, regăsite în lucrarea [11].

6.2 Formularea problemei economice studiate

Considerăm un duopol în care cele două firme, notate prin F^1 şi F^0, produc n bunuri diferenţiate. Funcţia cererii este definită prin $p^h = 1 - q^h - < d, q^{1-h} >$, unde:
• $p^h = (p_1^h, \ldots, p_n^h) \in \mathbb{R}^n$ reprezintă preţul firmei F^h, $h = 0, 1$;
• $q^h = (q_1^h, \ldots, q_n^h) \in \mathbb{R}^n$ şi $q^{1-h} = (q_1^{1-h}, \ldots, q_n^{1-h}) \in \mathbb{R}^n$ reprezintă cantitatea produsă de firma F^h, respectiv F^{1-h}, unde $h = 1$;
• d reprezintă gradul de diferenţiere a produselor, $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n$, unde $d_j \in (0, 1)$, $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Duopolul este modelat sub forma unei competiţii de tip Stackelberg: firma lider F^1 îşi alege cantitatea care să o producă şi abia apoi firma follower F^0 este liberă să îşi aleagă cantitatea optimă care să o producă, ţinând cont de cantitatea produsă de lider. Iniţial, ambele firme au costuri marginale identice $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, unde $c_j \in (0, 1)$, $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$. Considerăm cazul în care firma F^1, lider-ul, se implică într-un proces de cercetare - dezvoltare pentru a îşi îmbunătăţi tehnologia. Acesta îi va permite o reducere a costurilor sale de producţie. Costul marginal se va reduce cu o valoare, pe care o notăm cu k. Atunci, suma investită în procesul de cercetare - dezvoltare este $k^2/2$.

În cazul în care există un transfer tehnologic între cele două firme, vom considera următorul joc, în cinci etape. În prima etapă, firma inovatoare decide valoarea inovaţiei (sau, echivalent, suma ce urmează să fie investită în procesul de cercetare-dezvoltare). În a doua etapă, firma inovatoare decide dacă să vândă inovaţia sau nu, deoarece aceasta va reduce costul marginal al firmei care o achiziţionează (licensee firm). Dacă decide să acorde inovaţia, atunci va percepe o taxă de la firma care o va accepta (fie o per-unit royalty rate, o fixed-fee sau o combinaţie a lor). În a treia etapă, firma care nu deţine inovaţia decide dacă să accepte sau să refuze oferta făcută de firma inovatoare. Apoi, ambele firme reprezintă jucătorii unui joc Stackelberg. În a patra etapă, firma inovatoare decide cantitatea produsă, iar în ultima etapă firma care a acceptat inovaţia, fiind conştientă de cantitatea produsă de lider, alege ce cantitate va produce.

În prezentul capitol considerăm ambele cazuri:
i) situaţia când nu are loc transferul tehnologic între cele două firme (benchmark case sau no-licensing case);
ii) situaţia când are loc transferul tehnologic între cele două firme pe baza unuia dintre următoarele tipuri de contracte: contract de tip per-unit royalty, contract de tip fixed-fee sau contract de tip two-part tariff.

6.3 Cazul Benchmark (no-licensing)

În prezenta secţiune vom începe prin a modela matematic şi apoi a rezolva problema economică concretă pentru cazul benchmark. Modelul matematic ataşat acestei probleme reprezintă o problemă de optimizare parametrică pe trei nivele în care atât funcţia obiectiv de nivel superior cât şi cea de nivel inferior trebuiesc a fi maximizate cu anumite restricţii. Vom prezenta apoi rezultatele obţinute din punct de vedere economic.

6.3.1 Modelarea matematică şi rezolvarea problemei economice

Contribuţiile proprii relaţionate cu acest subiect au fost publicate în Tuns (Bode) O.R. [113].

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural, $J = \{1, \ldots, n\}$, şi fie $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. Fie $T \subseteq \mathbb{R}^n$ domeniul de variaţie a parametrului $d = (d_1, d_2, ..., d_n) \in \mathbb{R}^n$. Utilizând acest parametru d putem construi matricea $D \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

Pentru fiecare $d \in T$, fie $f_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $g_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcţiile definite prin

$$f_d(x, y, z) \;=< \gamma - x - Dy + z, x >, \; \forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

$$F_d(x, y, z) \;=< \gamma - x - Dy + z, x > -\frac{1}{2}\|z\|^2 \;=\; f_d(x, y, z) - \frac{1}{2}\|z\|^2, \; \forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

şi

$$g_d(x, y) \;=< \gamma - y - Dx, y >, \; \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Considerăm următoarea problemă de optimizare parametrică pe trei nivele

$$(P; T) \qquad \begin{cases} F_d(x, y, z) \to \max \\ y \in S_d^*(x) \\ x \in S_d^*(z) \\ z \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \; d \in T,$$

unde $S_d^*(x) = \{y^x\} := argmax\{g_d(x, y) \,|\, y \in \mathbb{R}^n\}$, $x \in \mathbb{R}^n_+$, şi $S_d^*(z) := argmax\{f_d(x, y^x, z) \,|\, x \in \mathbb{R}^n_+\}$, $z \in \mathbb{R}^n$. Pentru fiecare $d \in T$, vom nota prin (P_d) problema de optimizare pe trei nivele care se poate obţine din $(P; T)$ dacă acest parametru este fixat ca fiind d.

Observaţia 6.3.1 *Dacă $T =]0, 1[^n$, atunci problema $(P; T)$ reprezintă modelul matematic ataşat problemei economice descrise în cele de mai sus.*

Rezolvarea problemei (P_d), $d \in T$, se reduce la rezolvarea a trei probleme de optimizare.

Fie $d \in T$ şi $x \in \mathbb{R}^n_+$. Considerăm problema:

$$(P^1_{d,x}) \qquad \begin{cases} \varphi_{d,x}(y) \to \max, \\ y \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

unde $\varphi_{d,x}(y) = g_d(x, y) =< \gamma - y - Dx, y >, \forall\, y \in \mathbb{R}^n$.

Revenind la problema (P_d), $d \in T$, rezultă că, oricare ar fi $z \in \mathbb{R}^n$, dacă $S_d^*(z) \neq \emptyset$ şi $x \in S_d^*(z)$, atunci $S_d^*(x) = \{y^x\} = \left\{\frac{1}{2}(\gamma - Dx)\right\}$.

Vom considera acum următoarea problemă de optimizare:

$$(P^2_{d,z}) \quad \begin{cases} \phi_{d,z}(x) \to \max, \\ x \in \mathbb{R}^n_+, \end{cases}$$

unde $\phi_{d,z}(x) = f_d(x, y^x, z) =< \gamma - \frac{1}{2}D\gamma + z, x > + < (D^2 - I_n)x, x >$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_+$, I_n fiind matricea unitate de ordinul n.

Observăm faptul că $\phi_{d,z}(x) = \sum\limits_{j\in J}\Big(-(1 - \frac{d_j^2}{2})x_j^2 + (\gamma_j - \frac{d_j\gamma_j}{2} + z_j)x_j\Big)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Pentru $d \in T$ fixat, vom nota cu $J^d_+ = \Big\{j \in J \,|\, d_j^2 > 2\Big\}$, $J^d_- = \Big\{j \in J \,|\, d_j^2 < 2\Big\}$, $J^d_0 = \Big\{j \in J \,|\, d_j^2 = 2\Big\}$.

Pentru $d \in T$ şi $z \in \mathbb{R}^n$, ambii fixaţi, considerăm mulţimile $J^d_{0+}(z) := \Big\{j \in J^d_0 \,|\, \gamma_j - \frac{d_j\gamma_j}{2} + z_j > 0\Big\}$, $J^d_{00}(z) := \Big\{j \in J^d_0 \,|\, \gamma_j - \frac{d_j\gamma_j}{2} + z_j = 0\Big\}$, $J^d_{0-}(z) := \Big\{j \in J^d_0 \,|\, \gamma_j - \frac{d_j\gamma_j}{2} + z_j < 0\Big\}$.

Propoziţia 6.3.2 (Tuns (Bode) O.R. [113]). *Fie $d \in T$.*
(i) Dacă $J^d_+ \neq \emptyset$, atunci funcţia $\phi_{d,z}$ este nemărginită superior pe $\mathbb{R}^n_+$, pentru fiecare $z \in \mathbb{R}^n$;
(ii) Dacă $J^d_+ = \emptyset$ şi $z \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $J^d_{0+}(z) \neq \emptyset$, atunci funcţia $\phi_{d,z}$ este nemărginită superior pe $\mathbb{R}^n_+$.

Fie $d \in T$ şi $z \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $J^d_+ = \emptyset$ şi $J^d_{0+}(z) = \emptyset$. Vom nota prin $p = card(J^d_{00}(z))$ şi prin $q = card(J^d_{0-}(z))$. Fie $m = n - p - q = card(J^d_-)$.

Observaţia 6.3.3 (Tuns (Bode) O.R. [113]). *Este uşor de observat că, dacă $m = 0$ şi $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+$, atunci $x^z = (x^z_1, \ldots, x^z_n) \in \mathbb{R}^n_+$, unde*

$$x^z_j = \begin{cases} 0, \ \textit{dacă}\ j \in J^d_{0-}(z), \\ \lambda_j, \ \textit{dacă}\ j \in J^d_{00}(z), \end{cases}$$

este un punct de maxim al funcţiei $\phi_{d,z}$.

Dacă $m > 0$, fie $J^d_- = \{j_1, \ldots, j_m\}$, unde $1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n$. Considerăm funcţia $\tilde{\phi}_{d,z} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{\phi}_{d,z}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}) = -\sum_{h=1}^{m}(1 - \frac{d_{j_h}^2}{2})x_{j_h}^2 + \sum_{h=1}^{m}(\gamma_{j_h} - \frac{d_{j_h}\gamma_{j_h}}{2} + z_{j_h})x_{j_h},\ \forall\,(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}) \in \mathbb{R}^m.$$

Propoziţia 6.3.4 (Tuns (Bode) O.R. [113]). *Funcţia $\tilde{\phi}_{d,z} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ este strict concavă şi unicul său punct de maxim este $\tilde{x} = (\tilde{x}_{j_1}, ..., \tilde{x}_{j_m})$, unde $\tilde{x}_{j_h} = \frac{2\gamma_{j_h} - d_{j_h}\gamma_{j_h} + 2z_{j_h}}{2(2 - d_{j_h}^2)}$, pentru fiecare $h \in \{1, \ldots, m\}$.*

Fie $d \in T$ şi $z \in \mathbb{R}^n$.

Considerăm mulţimile $J^d_{--}(z) = \Big\{j \in J^d_- \,|\, \gamma_j - \frac{d_j\gamma_j}{2} + z_j < 0\Big\}$, $J^d_{-+}(z) = \Big\{j \in J^d_- \,|\, \gamma_j - \frac{d_j\gamma_j}{2} + z_j > 0\Big\}$ şi $J^d_{-0}(z) = \Big\{j \in J^d_- \,|\, \gamma_j - \frac{d_j\gamma_j}{2} + z_j = 0\Big\}$. Evident, $J^d_- = J^d_{--}(z) \cup J^d_{-+}(z) \cup J^d_{-0}(z)$.

Bazându-ne pe remarca 6.3.3 şi propoziţia 6.3.4, obţinem următorul rezultat.

Corolar 6.3.5 (Tuns (Bode) O.R. [*113*]). *Dacă $d \in T$ şi $z \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $J_+^d = \emptyset$ şi $J_{0+}^d(z) = \emptyset$, atunci, oricare ar fi $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, punctul $x^z = (x_1^z, \ldots, x_n^z)$, unde*

$$x_j^z = \begin{cases} \lambda_j, \ \text{dacă } j \in J_{00}^d(z), \\ \\ 0, \ \text{dacă } j \in (J_{0-}^d(z) \cup J_{--}^d(z) \cup J_{-0}^d(z)), \\ \\ \dfrac{2\gamma_j - d_j\gamma_j + 2z_j}{2(2-d_j^2)}, \ \text{dacă } j \in J_{-+}^d(z), \end{cases} \tag{6.1}$$

este un punct de maxim al funcţiei $\phi_{d,z}$.

Bazându-ne pe faptul că pentru o problemă de optimizare pe mai multe nivele funcţiile obiectiv de nivel inferior trebuie să aibă puncte de maxim (respectiv, minim), propoziţia 6.3.2 implică faptul că domeniul T^* de admisibilitate al parametrului d are următoarea proprietate:

$$T^* \subseteq \{d \in T \,|\, J_+^d = \emptyset \,\text{şi}\, J_0^d = \emptyset\} = \{d \in T \,|\, d_j^2 < 2, \forall\, j \in J\}. \tag{6.2}$$

În continuare, vom considera că (6.2) are loc. În aceste condiţii, pentru fiecare $z \in \mathbb{R}$, mulţimea $S_d^*(z)$ are exact un element, adică avem $S_d^*(z) = \{x^z = (x_1^z, x_2^z, ..., x_n^z)\}$, unde

$$x_j^z = \begin{cases} 0, \ \text{dacă } j \in J_{--}^d(z) \cup J_{-0}^d(z), \\ \\ \frac{2\gamma_j - d_j\gamma_j + 2z_j}{2(2-d_j^2)}, \ \text{dacă } j \in J_{-+}^d(z). \end{cases} \tag{6.3}$$

În situaţia în care (6.2) are loc, avem $J = J_-^d$. Rezolvarea problemei iniţiale (P_d) este echivalentă cu determinarea mulţimii $argmax\{F_d(x^z, y^{x^z}, z) \,|\, z \in \mathbb{R}^n\}$. Prin urmare, vom rezolva problema

$$(P^3) \quad \begin{cases} \theta_d(z) \to \max, \\ z \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

unde $\theta_d(z) = F_d(x^z, y^{x^z}, z) = < \gamma - x^z - Dy^{x^z} + z, x^z > - \frac{1}{2}\|z\|^2$.

Propoziţia 6.3.6 (Tuns (Bode) O.R. [*113*]). *Dacă există $j \in J$ astfel încât: (i) $2 > d_j^2 > 1$ sau (ii) $d_j^2 = 1$ şi $\gamma_j \neq 0$, atunci funcţia θ_d este superior nemărginită pe $\mathbb{R}^n$.*

Observaţia 6.3.7 *Din propoziţia 6.3.6 rezultă că $T^* \subseteq \{d \in T \,|\, d_j^2 < 1, \, \forall\, j \in J\}$.*

Propoziţia 6.3.8 (Tuns (Bode) O.R. [*113*]). *Dacă $d \in T$ şi $d_j^2 < 1$, $\forall\, j \in J$, atunci funcţia θ_d are un unic punct de maxim $z^* = (z_1^*, z_2^*, ..., z_n^*)$, unde $z_j^* = \frac{\gamma_j(2-d_j)}{2(1-d_j^2)}$, $\forall\, j \in J$.*

Observaţia 6.3.9 *Din propoziţia 6.3.8 rezultă că $\{d \in T \,|\, d_j^2 < 1, \, \forall\, j \in J\} \subseteq T^*$. Atunci, bazându-ne pa remarca 6.3.6 obţinem că $T^* = \{d \in T \,|\, d_j^2 < 1, \, \forall\, j \in J\}$.*

Observaţia 6.3.10 *Originalitatea problemei de optimizare pe trei nivele studiate mai sus constă în faptul că depinde de parametrii d şi γ. Pentru cazul particular când $n = 1$, $d \in]0, 1[$ şi $\gamma \in]0, 1[$, soluţia optimă a problemei coincide cu soluţia optimă care se obţine din punct de vedere economic* *în lucrarea în colaborare* Ferreira F. *şi* Bode O.R. *[32]. Mai mult, rezultatul referitor la faptul că valoarea absolută a parametrului d este mai mică decât* 1 *are o importanţă economică semnificativă. Deoarece d reprezintă gradul de diferenţiere a produselor, rezultatul evidenţiază condiţia că* $d \in]0,1[$*, utilizată din punct de vedere economic.*

6.3.2 Benchmark: Cazul no-licensing pentru un produs diferenţiat

În prezenta secţiune începem prin a da problema economică studiată de autoare în lucrarea în colaborare Ferreira F. şi Bode O.R. [32]. Contribuţiile autoarei relative la situaţia când nu are loc transfer tehnologic între cele două firme sunt prezentate în cadrul acestui paragraf. Este important de remarcat faptul că toate aceste rezultate se pot obţine pentru cazul particular când $n = 1$ al problemei de optimizare parametrică formulată în subsecţiunea 6.2. În plus, determinăm şi surplusul consumatorului CS şi bunăstarea socială W definite prin $CS = \frac{q_1^2+2dq_1q_2+q_2^2}{2}$, $W = \pi_1 + \pi_2 + CS$.

Analizăm situaţia în care nu are loc transfer tehnologic în cadrul duopolului Stackelberg diferenţiat. În funcţie de gradul de diferenţiere a produselor, s-a arătat că:
(i) dacă $0 < d < d_1$[1], atunci firma follower F_2 va decide să fie în competiţie pe piaţă cu firma lider F_1 utilizând vechea ei tehnologie şi va obţine profit (inovaţia non-drastică);
(ii) dacă $d_1 \leq d < 1$, atunci pentru firma follower F_2 nu este profitabil să producă (inovaţia drastică). În acest caz, firma F_1 va deţine monopolul.

Determinăm explicit cantitatea optimă produsă de fiecare firmă, profitul fiecărei firme, valoarea optimă a mărimii inovaţiei, surplusul consumatorului şi bunăstarea socială, atât în cazul inovaţiei non-drastice cât şi a celei drastice.

Analizăm efectele gradului de diferenţiere a produselor asupra: mărimii inovaţiei, profitului ambelor firme (lider şi follower), surplusului consumatorului şi bunăstării sociale. Obţinem următorul rezultat.

Teorema 6.3.11 (Ferreira F. *şi* Bode O.R. [*32*]). *Dacă nu are loc transferul tehnologic, atunci:*
(i) Dacă $d \in (d_2, d_1)$[2] *(respectiv,* $d \in (0, d_2) \cup [d_1, 1)$*), atunci valoarea optimă a mărimii inovaţiei descreşte (respectiv, creşte) pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze;*
(ii) Dacă $d \in (0, 0.5) \cup (d_3, 1)$[3] *(respectiv,* $d \in (0.5, d_3)$*), atunci profitul firmei inovatoare creşte (respectiv, descreşte) pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze;*
(iii) Dacă $d \in (0, d_4) \cup [d_1, 1)$[4] *(respectiv,* $d \in (d_4, d_1)$*), atunci surplusul consumatorului creşte (respectiv, descreşte) pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze;*
(iv) Dacă $d \in (0, d_5) \cup [d_1, 1)$[5] *(respectiv,* $d \in (d_5, d_1)$*), atunci bunăstarea socială creşte (respectiv, descreşte) pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze.*

Observaţia 6.3.12 (Ferreira F. *şi* Bode O.R. [*32*]). *Remarcăm faptul că dacă nu are loc transferul tehnologic şi inovaţia este non-drastică (adică* $d \in (0, d_1)$*), atunci profitul firmei care nu deţine inovaţia creşte pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze.*

[1] d_1 este soluţia din intervalul $]0,1[$ a ecuaţiei $d^2 + 2d - 2 = 0$, $d_1 \simeq 0.732$.
[2] d_2 este soluţia din intervalul $]0,1[$ a ecuaţiei $d^2 - 4d + 1 = 0$, $d_2 \simeq 0.268$.
[3] d_3 este soluţia din intervalul $]0,1[$ a ecuaţiei $d^4 + 2d^3 + 8d - 8 = 0$, $d_3 \simeq 0.268$.
[4] d_4 este soluţia din intervalul $]0,1[$ a ecuaţiei $d^4 - 5d^3 - 3d^2 + 10d - 2 = 0$, $d_4 \simeq 0.219$.
[5] d_5 este soluţia din intervalul $]0,1[$ a ecuaţiei $7d^4 - 13d^3 - 9d^2 + 28d - 10 = 0.$, $d_5 \simeq 0.458$..

6.4 Contractul de tip per-unit royalty rate

În această secţiune analizăm cazul în care există un transfer tehnologic de la firma lider la firma follower pe baza contractului de tip per-unit royalty rate. Ataşăm un model matematic acestei probleme economice concrete. Acest model matematic reprezintă o problemă de optimizare parametrică pe patru nivele, în care atât funcţia obiectiv de nivel superior cât şi funcţiile obiectiv de nivel inferior trebuiesc a fi maximizate luând în considerare anumite restricţii date. Rezolvăm şi determinăm soluţia optimă a problemei atât din punct de vedere matematic, cât şi economic.

6.4.1 Modelarea matematică şi rezolvarea problemei economice

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $J = \{1, 2, ..., n\}$, $r = (r_1, r_2, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$, cu proprietatea că $\gamma_j \in]0, 1[, \forall j \in J$. Fie $T \subseteq\,]0, 1[^n$ domeniul de variaţie al parametrului $d = (d_1, d_2, ..., d_n) \in T$. Folosindu-ne de parametrul d putem construi matricea $D \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dată în subsecţiunea 6.3.1.

Pentru fiecare $d \in T$, considerăm $F_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi
$g_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcţiile definite astfel

$$F_d(x, y, z, r) \;=< \gamma - x - Dy + z, x > -\frac{1}{2}\|z\|^2 + < r, y >, \tag{6.4}$$

$$f_d(x, y, z, r) \;=< \gamma - x - Dy + z, x > + < r, y >, \tag{6.5}$$

$$g_d(x, y, z, r) \;=< \gamma - y - Dx + z - r, y >, \tag{6.6}$$

$\forall\, (x, y, z, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Considerăm următoarea problemă de optimizare parametrică pe patru nivele:

$$(P_{royalty}) \quad \begin{cases} F_d(x, y, z, r) \to \max \\ y \in S_d^*(x, z, r) \\ x \in S_d^*(z, r) \\ r \in S_d^*(z) \\ z \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad , \; d \in T,$$

unde $S_d^*(x, z, r) = \{y^{x,z,r}\} = argmax\{g_d(x, y, z, r) \,|\, y \in \mathbb{R}^n\}$, pentru fiecare $z \in \mathbb{R}^n$ şi $x, r \in \mathbb{R}^n_+$; $S_d^*(z, r) = \{x^{z,r}\} = argmax\{f_d(x, y^{x,z,r}, z, r) \,|\, x \in \mathbb{R}^n_+\}$, pentru fiecare $z \in \mathbb{R}^n$, $y \in S_d^*(x, z, r)$ şi $r \in \mathbb{R}^n_+$; şi $S_d^*(z) = \{r^z\} = argmax\{F_d(x^{z,r}, y^{x,z,r}, z, r) \,|\, r \in \mathbb{R}^n_+\}$, pentru fiecare $z \in \mathbb{R}^n$, $x \in S_d^*(z, r)$ şi $y \in S_d^*(x, z, r)$.

Pentru fiecare $d \in T$, vom nota prin $(P_{d,royalty})$ problema de optimizare pe patru nivele care se poate obţine din $(P_{royalty})$ dacă parametrul este fixat ca fiind d.

Observaţia 6.4.1 *Dacă $T =]0, 1[^n$, atunci problema $(P_{royalty})$ este chiar modelul matematic ataşat problemei economice formulată în secţiunea 6.3.2 în situaţia în care are loc transferul tehnologic pe baza unui contract de tip per-unit royalty.*

Reducem rezolvarea problemei $(P_{royalty})$ la rezolvarea a patru probleme de optimizare.

Fie $d \in T$, $x, r \in \mathbb{R}^n_+$ şi $z \in \mathbb{R}^n$. Considerăm problema:

$$(P^1_{d,x,z,r}) \quad \begin{cases} \varphi_{d,x,z,r}(y) \to \max, \\ y \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

unde $\varphi_{d,x,z,r}(y) = g_d(x,y,z,r) = -\|y\|^2 + <\gamma - Dx + z - r, y>, \forall\, y \in \mathbb{R}^n$,

Revenind la problema $(P_{d,royalty})$, $d \in T$, rezultă că, oricare ar fi $z \in \mathbb{R}^n$, dacă $r \in S^*_d(z)$ şi $x \in S^*_d(z,r)$, atunci $S^*_d(x,z,r) = \{y^{x,z,r}\} = \left\{\frac{\gamma - Dx + z - r}{2}\right\}$.

Fie acum $d \in T$, $z \in \mathbb{R}^n$ şi $r \in \mathbb{R}^n_+$. Considerăm următoarea problemă de optimizare:

$$(P^2_{d,z,r}) \quad \begin{cases} \phi_{d,z,r}(x) \to \max, \\ x \in \mathbb{R}^n_+, \end{cases}$$

unde $\phi_{d,z,r}(x) = f_d(x, y^{x,z,r}, z, r) =<\gamma - \frac{1}{2}D\gamma + z, x> + <(D^2 - I_n)x, x> + <r, y^{x,z,r}>$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n_+$, I_n fiind matricea unitate de ordinul n.

Revenind la problema $(P_{d,royalty})$, $d \in T$, rezultă că oricare ar fi $z \in \mathbb{R}^n$, dacă $r \in S^*_d(z)$ atunci

$$S^*_d(z,r) = \{x^{z,r}\} = \begin{cases} \frac{(d-2)(\gamma+z)}{2(d^2-2)}, \text{ dacă } \gamma + z > 0, \\ \\ 0, \text{ dacă } \gamma + z \leq 0. \end{cases}$$

În continuare, fie $d \in T$ şi $z \in \mathbb{R}^n$. Considerăm următoarea problemă de optimizare:

$$(P^3_{d,z}) \quad \begin{cases} \rho_{d,z}(r) \to \max, \\ z \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

unde $\rho_{d,z}(r) = F_d(x^{z,r}, y^{x,z,r}, z, r)$.

Revenind la problema $(P_{d,royalty})$, $d \in T$, rezultă că, oricare ar fi $z \in \mathbb{R}^n$, avem

$$S^*_d(z) = \{r^z\} = \begin{cases} \frac{\gamma+z}{2}, \text{ dacă } \gamma + z > 0, \\ \\ 0, \text{ dacă } \gamma + z \leq 0. \end{cases}$$

În aceste condiţii, a rezolva problema iniţială $(P_{d,royalty})$ este echivalent cu a determina mulţimea $argmax\{F_d(x^{z,r}, y^{x,z,r}, z, r^z) \,|\, z \in \mathbb{R}^n\}$. Prin urmare, vom rezolva problema:

$$(P^4) \quad \begin{cases} \theta_d(z) \to \max, \\ z \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

unde $\theta_d(z) = F_d(x^{z,r}, y^{x,z,r}, z, r^z) \;=<\gamma - x^{z,r} - Dy^{x,z,r} + z, x^{z,r}> -\frac{1}{2}\|z\|^2 + <r^z, y^{x,z,r}>$.

Propoziţia 6.4.2 (Tuns (Bode) O.R. *şi* Ferreira F. [*117*]). *Dacă $d \in T$, atunci funcţia θ_d este strict concavă şi are un unic punct de maxim $z^* = (z^*_1, z^*_2, ..., z^*_n)$ unde $z^*_j = \frac{\gamma_j(2d_j-3)}{2d_j^2-2d_j-1}$, $\forall j \in J$.*

6.4.2 Contractul de tip per-unit royalty rate pentru un produs diferenţiat

În această secţiune se studiază situaţia în care are loc transferul tehnologic de la firma care deţine inovaţia către cea care nu o deţine pe baza unui contract per-unit royalty (taxă percepută pe fiecare unitate produsă) şi sunt evidenţiate principalele rezultate. Considerând cazul particular când $n = 1$ pentru problema economică formulată în secţiunea 6.2, sunt prezentate toate contribuţiile autoarei relaţionat cu acest subiect publicate în articolul în colaborare FERREIRA F. şi TUNS (BODE) O.R. [33]. Este important de remarcat faptul că toate aceste rezultate se pot obţine pentru cazul particular când $n = 1$ al problemei de optimizare parametrică pe patru nivele studiate anterior.

În cazul acestui tip de contract, inovaţia este non-drastică oricare ar fi $d \in (0, 1)$. Determinăm în mod explicit valoarea optimă a cantităţii produse de fiecare firmă, a profitului fiecărei firme, precum şi valoarea optimă a mărimii inovaţiei, surplusului consumatorului şi bunăstării sociale, atât în cazul inovaţiei non-drastice cât şi a celei drastice.

Analizăm efectele gradului de diferenţiere a produselor asupra mărimii inovaţiei, a royalty rate, surplusului consumatorului, bunăstării sociale şi profitului ambelor firme (lider şi follower). Obţinem următorul rezultat.

Teorema 6.4.3 (FERREIRA F. *şi* TUNS (BODE) O.R. [*33*]). *Dacă transferul tehnologic se realizează pe baza unui contract de tip royalty rate, atunci:*
(i) Valoarea optimă a mărimii inovaţiei, royalty rate, surplusului consumatorului şi bunăstării sociale creşte pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze;
(ii) În cazul inovaţiei non-drastice ($d \in (0, d_1)$)*, interesul firmei inovatoare de a realiza transferul tehnologic creşte pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze;*
(iii) În cazul inovaţiei drastice ($d \in [d_1, 1)$)*, dacă* ($d \in [d_1, d_6)$)[6] (*respectiv, dacă* ($d \in (d_6, 1)$)*, atunci interesul firmei inovatoare de a realiza transferul tehnologic creşte* (*respectiv, descreşte*) *pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze.*

Observaţia 6.4.4 (FERREIRA F. *şi* TUNS (BODE) O.R. [*33*]). *În cazul inovaţiei non-drastice, interesul firmei care nu deţine inovaţia de a accepta transferul tehnologic plătind o per-unit royalty creşte pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze.*

6.5 Contractul de tip fixed-fee pentru un produs diferenţiat

În această secţiune studiem situaţia în care are loc transferul tehnologic de la firma care deţine inovaţia către cea care nu o deţine pe baza unui contract de tip fixed-fee (taxă fixă percepută independentă de cantitatea produsă). Contribuţiile autoarei cu privire la acest subiect au fost publicate în articolul în colaborare FERREIRA F. şi TUNS (BODE) O.R. [33].

Atât în cazul inovaţiei non-drastice cât şi a celei drastice determinăm valoarea maximă a taxei fixe care poate fi percepută de către firma lider, valoarea corespunzătoare pentru mărimea

[6] d_6 este soluţia din intervalul $]0.1[$ a ecuaţiei $4d^8 - 16d^6 + 28d^5 - 63d^4 + 50d^3 + 32d^2 - 24d - 8 = 0$, $d_6 \simeq 0.849$.

inovaţiei, valoarea optimă a cantităţii produse de către fiecare firmă, profitul fiecărei firme, surplusul consumatorului şi bunăstarea socială.

Remarcăm că în această situaţie pentru firma lider se impune restricţia următoare: îşi va vinde inovaţia dacă şi numai dacă profitul total obţinut (adică profitul său + taxa fixă percepută) va depăşi profitul obţinut în cazul când nu are loc transfer tehnologic.

Observaţia 6.5.1 (FERREIRA F. *şi* TUNS (BODE) O.R. [*33*]).
(i) Dacă produsele tind să se diferenţieze ($d \in (0, d_7)$)[7]*, atunci contractul de tip fixed-fee domină strict cazul benchmark;*
(ii) Dacă produsele tind să fie omogene ($d \in [d_7, 1)$)*, atunci firma care deţine inovaţia nu o va vinde pe baza unui contract de tip fixed-fee.*

Studiem efectele gradului de diferenţiere a produselor asupra principalelor variabile.

Teorema 6.5.2 (FERREIRA F. *şi* TUNS (BODE) O.R. [*33*]). *Dacă transferul tehnologic se realizează pe baza unui contract de tip fixed-fee* (*adică* $d \in (0, d_7)$)*, atunci:*
(i) Valoarea optimă a mărimii inovaţiei, taxei fixe percepute de către firma inovatoare, surplusului consumatorului şi bunăstării sociale, creşte pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze;
(ii) Interesul firmei inovatoare de a realiza transferul tehnologic creşte pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze.

6.6 Contractul de tip two-part tariff pentru un produs diferenţiat

Vom considera acum situaţia în care are loc transferul tehnologic de la firma care deţine inovaţia către cea care nu o deţine pe baza unui contract de tip two-part tariff, adică se percepe atât o taxă fixă independentă de cantitatea produsă (fixed-fee), cât şi o taxă pe fiecare unitate de produs (royalty per-unit of output). Contribuţiile autoarei cu privire la acest subiect au fost publicate în articolul în colaborare FERREIRA F. şi BODE O.R. [32].

Determinăm atât în cazul inovaţiei non-drastice, cât şi în cazul celei drastice, valoarea maximă a taxei fixe care poate fi percepută de către firma lider, valoarea optimă a mărimii inovaţiei, a royalty rate, a cantităţii produse de fiecare firmă şi a profitului fiecărei firme, cât şi a surplusului consumatorului şi a bunăstării sociale. Remarcăm faptul că profitul firmei follower este egal cu profitul care l-ar obţine dacă ar accepta un contract de tip fixed-fee.

Obţinem următorul rezultat important.

Observaţia 6.6.1 (FERREIRA F. *şi* BODE O.R. [*32*]). *Un contract de tip two-part tariff domină strict cazul benchmark.*

Pe baza rezultatelor de mai sus, evidenţiem faptul că chiar dacă inovaţia este drastică, întotdeauna este bine pentru firma care o deţine să o vândă fie pe baza unui contract de tip per-unit royalty, fie pe baza unui contract de tip two-part tariff. Acest lucru nu este deloc avantajos dacă îşi vinde inovaţia pe baza unui contract de tip fixed-fee.

---

[7] d_7 este soluţia din intervalul]0.1[a ecuaţiei $9d^7 + 24d^6 - 76d^5 - 160d^4 + 360d^3 + 160d^2 - 576d + 256 = 0$, $d_7 \simeq 0.793$.

Analizăm efectele gradului de diferenţiere a produselor asupra principalelor variabile de mai sus.

Dacă ne aflăm în cazul inovaţiei non-drastice (adică $d \in (0, d_1)$), obţinem următorul rezultat.

Teorema 6.6.2 (FERREIRA F. *şi* BODE O.R. [*32*]).
Dacă inovaţia este non-drastică ($d \in (0, d_1)$) şi transferul tehnologic se realizează pe baza unui contract de tip two-part tariff, atunci:
(i) Valoarea optimă a mărimii inovaţiei, a taxei fixe care poate fi percepută de către firma inovatoare, a surplusului consumatorului şi a bunăstării sociale, creşte pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze;
(ii) Dacă $d \in (0, d_8)$[8]*, (respectiv, dacă $d \in (d_8, d_1)$), atunci valoarea optimă a royalty rate creşte (respectiv, descreşte) pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze.*

Dacă ne aflăm în cazul inovaţiei drastice (adică $d \in [d_1, 1)$), obţinem următorul rezultat.

Teorema 6.6.3 (FERREIRA F. *şi* BODE O.R. [*32*]). *Dacă inovaţia este drastică ($d \in [d_1, 1)$) şi transferul tehnologic se realizează pe baza unui contract de tip two-part tariff, atunci:*
(i) Dacă $d \in [d_1, d_9)$[9]* (respectiv, dacă $d \in (d_9, 1)$), atunci valoarea optimă a mărimii inovaţiei creşte (respectiv, descreşte) pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze;*
(ii) Valoarea optimă a royalty rate şi a surplusului consumatorului descreşte pe măsură ce produsele se diferenţiază;
(iii) Taxa fixă care poate fi percepută de către firma inovatoare creşte pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze;
(iv) Dacă $d \in [d_1, d_{10})$[10]* (respectiv, dacă $d \in (d_{10}, 1)$), atunci bunăstarea socială creşte (respectiv, descreşte) pe măsură ce produsele tind să se diferenţieze.*

[8] d_8 este soluţia din intervalul $]0.1[$ a ecuaţiei $6d^6 - 42d^5 + 125d^4 - 156d^3 + 14d^2 + 112d - 56 = 0$, $d_8 \simeq 0.721..$
[9] d_9 este soluţia din intervalul $]0.1[$ a ecuaţiei $6d^2 - 18d + 11 = 0$, $d_9 \simeq 0.855.$
[10] d_{10} este soluţia din intervalul $]0.1[$ a ecuaţiei $54d^{10} - 99d^9 - 621d^8 + 1866d^7 - 42d^6 - 4446d^5 + 3146d^4 + 3020d^3 - 3276d^2 - 344d + 736 = 0$, $d_{10} \simeq 0.863..$

Bibliografie

[1] Alves M.J., Dempe St., Júdice J.J.: *Computing the Pareto frontier of a bi-objective bilevel linear problem using a multiobjective mixed-integer programming algorithm*, http://AlvesDempeJudice2010.pdf.

[2] Anand B.N., Khanna T.: *The structure of licensing contracts*, The Journal of Industrial Economics, **XLVIII** (2000), no. 1, 103–135.

[3] Andraşiu M., Baciu A., Pascu A., Puşcaş E., Taşnadi Al.: *Metode de Decizii Multicriteriale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.

[4] Applegate D.L., Bixby R.E., Chvátal V., Cook W.J.: *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study*, Princeton University Press, Princeton, 2006.

[5] Baciu A., Pascu A., Puşcaş E.: *Aplicaţii ale Cercetării Operaţionale*, Editura Militară, Bucureşti, 1988.

[6] Bandopadhyaya L.: *Cost-Time Trade-off in Three-Axial Sums' Transportation Problem*, Journal of the Australian Mathematical Society, **35** (1994), 498–505.

[7] Berdysheva R.A., Emelichev V.A.: *Some forms of stability of a combinatorial problem of lexicographic optimization*, Russian Mathematics (Iz. VUZ), **42** (1998), no. 12, 9–19.

[8] Berthold T., Heinz S., Pfetsch M.E.: *Solving Pseudo-Boolean Problems with SCIP*, http://opus4.kobv.de/opus4-zib/files/1067/ZR-08-12.pdf.

[9] Bertsekas D.P.: *A New Algorithm for the Assignment Problem*, Mathematical Programming, **21** (1981), 152–171.

[10] Bhushan M., Rengaswamy R.: *Lexicographic optimization based sensor network design for Robust fault diagnosis*, In: 7th International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems (DYCOPS), Cambridge, Massachusetts, 2004.

[11] **Bode O.R.**, Ferreira F.A., Ferreira F.: *Licensing under Cournot vs Bertrand competition*, submitted for publication in Journal of Optimization Theory and Applications.

[12] Bracken J., McGill J.: *Mathematical Programs with Optimization Problems in the Constraints*, Operations Research, **21** (1973), 37–44.

[13] Brotcorne L., Labbé M., Marcotte P., Savard G.: *Joint Design and Pricing on a Network*, Operations Research, **56** (2008), 1104–1115.

[14] Brown A., Gedlaman A., Martinez S.: *Analyzing the General Linear Piecewise Lexicographic Programming Problem and an Extension of the Fundamental Theorem of Linear Programming*, 2001, http://ramanujan.math.trinity.edu/tumath/research/studpapers/s5.pdf.

[15] Burkard R., Dell'Amico M., Martello S.: *Assignment Problems*, SIAM, 2009, books.google.com/books/about/Assignment_Problems.html?id=nHIzbApLOr0C.

[16] Burkard R.E., Rendl F.: *Lexicographic bottleneck problems*, Operations Research Letters, **10** (1991), no. 5, 303-308.

[17] Candler W., Norton R.: *Multilevel Programming*, Technical Report 20, World Bank Development Research Center, Washington D.C., 1977.

[18] Caron G., Hansen P., Jaumard B.: *The assignment problem with seniority and job priority constraints*, Operations Research, **47**, no. 3, 449-454.

[19] Chang M.C., Lin C.H., Hu J.L.: *The Optimal Licensing Strategy of an Outside Patentee under an Upstream Supplier*, (2009), Taiwan Economic.

[20] Choi J.P.: *Technology transfer with moral hazard*, International Journal of Industrial Organization, **19** (2001), 249–266.

[21] Cohen G., Quadrat J.P., Wynter L.: *On convergence of the algorithm for bilevel programming problems by Clegg and Smith*, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, no. 4185, May 2001,
http//: RR-4185.pdf.

[22] Colson B., Marcotte P., Savard G.: *Bilevel programming: A survey*, A Quarterly Journal of Operations Research, **3** (2005), 87-107.

[23] Cristescu G., Lupşa L.: *Non-Connected Convexities and Applications*, Kluwer Academic Publishers (Springer), Dordrecht/Boston/London, 2002.

[24] Della Croce F., Paschos V.Th., Tsoukias A.: *An improved general procedure for lexicographic bottleneck problems*, Operations Research Letters, **24** (1999), no. 4, 187–194.

[25] Dempe St.: *Foundations of Bilevel Programming*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[26] Duca D., Lupşa L.: *Bilevel transportation problems*, Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation, **30** (2001), no. 1, 25–34.

[27] Ehrgott M.: *Multicriteria Optimization.* Second edition. Springer, Berlin-Heidelberg, 2005.

[28] Emelichev V.A., Gurevsky E.E.: *On stability of some lexicographic multicriteria Boolean problem*, Control and Cybernetics, **36** (2007), no. 2, 333–346.

[29] Faisca N.P., Saraiva P.M., Rustem B., Pistikopoulos E.N.: *A Multi-parametric Programming Approach for Multilevel Hierarchical and Decentralised Optimisation Problems*, Computational Management Science, **6** (2009), no. 4, 377–397.

[30] Ferreira F.A.: *Patent licensing in a Cournot duopoly from high-cost firm to low-cost firm*,
http://ntst08.cankaya.edu.tr/proceedings/proceedings/FernandaAFerreiraPaper.pdf.

[31] Ferreira F.A.: *Licensing in an International Competition with differentiated goods*, Nonlinear Dynamics of Complex Systems: Application in Physical, Biological and Financial Systems. Editors: J.A. Tenreiro Machado, Dumitru Baleanu, Albert Luo. Springer Science + Business Media Llc. New York, (2011), 295-305.

[32] Ferreira F., **Bode O.R.**: *Licensing endogenous cost-reduction in a differentiated Stackelberg model*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **18** (2013), no. 2, 308-315.
http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570412002900.

[33] Ferreira F., **Tuns (Bode) O.R.**: *Per-unit royalty and fixed-fee licensing in a differentiated Stackelberg model*, IEEE 4th International Conference on Nonlinear Science and Complexity Proceedings, Budapest, (2012), 99-102.

[34] Filippini L.: *Licensing contract in a Stackelberg model*, The Manchester School, **73** (2005), no. 5, 582-598.

[35] Fliege J., Vicente L.N.: *A Multicriteria Approach to Bilevel Optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications, **131** (2006), no. 2, 209–225.

[36] Ford Jr L.R., Fulkerson D.R.: *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1966.

[37] Fosfuri A., Roca E.: *Optimal Licensing Strategy: Royalty or fixed-fee?*, International Journal of Business and Economics, **3** (2004), no. 1, 13–19.

[38] Fulkerson D.R., Glicksberg I., Gross O.: *A Production Line Assignment Problem*, The RAND Corporation, RM-1102, 1953.

[39] Galperin E.A.: *Nonscalarized Multiobjective Global Optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications, **75** (1992), no. 1, 69–85.

[40] Gao Y., Lu J., Zhang G., Gao S.: *A Bilevel Model for Railway Train Set Organizing Optimization*, 2010,
www.atlantis-press.com/php/download_paper.php?id=1466.

[41] Garfinkel R.S.: *An Improved Algorithm for the Bottleneck Assignment Problem*, Operations Research, **20** (1972), 1747–1751.

[42] Gaur A., Arora S.R.: *Multi-level Multi-objective Integer Linear Programming Problem*, Advanced Modelling and Optimization, **2** (2008), 297–322.

[43] Goina D., **Tuns (Bode) O.R.**: *A kind of bilevel traveling salesman problem*, acceptată spre publicare în Studia Universitatis Babes-Bolyai, **LVII** (2012), no. 4.

[44] Gross O.: *The Bottleneck Assignment Problem*, The Rand Corporation, Santa Monica, California, Report No. P-1630, 1959.

[45] Gutin G., Punnen A.: *The Traveling Salesman Problem and its Variations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[46] Guţ C.M.: *Participation to professional training courses of the employees belonging to companies from the Romanian manufacturing industry*, Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Negotia, LIII, **I** (2008), Cluj-Napoca, 125-134.

[47] Guţ C.M.: *Present level of employers' investment in education and professional training for employees in Romanian manufacturing industry*, International Journal of Business Research, **8** (2008), no. 4, 125-130.

[48] Guţ C.M., **Bode O.R.**: *Educational and Professional Training Based on SMEs Sources*, X Conference 'European Culture' Proceedings, (2009), 189-196.
http://www.uic.es/progs/obj.uic?id=500e99f41b8b4.

[49] Guţ C.M., Vorzsak M., Chifu C.I., **Bode O.R.**: *The Effects of Economic Crisis Upon Employment and Unemployment in Cluj County*, Proceedings of the IABE-2010 Las Vegas, **8** (2010), no. 1, 127-132.

[50] Guţ C.M., Vorzsak M., **Bode (Tuns) O.R.**: *The Role of SME's in Jobs Creation in Cluj County*, Small and Medium Sized Enterprises in a Globalized World - Conference Proceedings, Cluj-Napoca, (2011), 194-201.

[51] Hammer P.L., Rudeanu S.: *Boolean Methods in Operations Research and Related Areas*, Springer-Verlag, New York, 1968.

[52] Hansen P., Jaumard B., Savard G.: *New branch and bound rules for linear bilevel programming*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, **13** (1992), 1194-1217.

[53] Hernández-Lerma O., Hoyos-Reyes L.F.: *A multiobjective control approach to priority queues*, Mathematical Methods of Operations Research, **53** (2001), 265-277.

[54] Huang C.F., Litzenberger R.H.: *Foundations for Financial Economics*, Prentice Hall, North Holland, 1988.

[55] Ignizio J.P.: *Goal programming and extensions*, Lexington Books, Lexington, 1976.

[56] Ingersoll J.E.: *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield, 1987.

[57] Jahn J.: *Vector Optimization - Theory, Applications, and Extensions*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2004.

[58] Kamien M.I.: *Patent Licensing*, Handbook of Game Theory with Economic Applications, **I** (1992), 331-354.

[59] Kamien M.I., Oren S.S., Tauman Y.: *Optimal licensing of cost-reducing innovation*, Journal of Mathematical Economics, **21** (1992), 483-508.

[60] Kamien M.I., Tauman Y.: *Fees versus royalties and the private value of a patent*, The Quarterly Journal of Economics, **101** (1986), no. 3, 471-491.

[61] Kamien M.I., Tauman Y.: *Patent Licensing: The Inside Story*, Manchester School, **70** (2002), no. 1, 7-15.

[62] Katz M., Shapiro C.: *How to license intangible property*, The Quarterly Journal of Economics, **101** (1986), no. 3, 567-589.

[63] Khanmohammadi S., Hajiha A., Jassbi J.: *Individual job assignment using the qualification matrix*, Proceedings of the 6th WSEAS International Conference on Evolutionary Computing, Lisbon, Portugal, (2005), 146-151.

[64] Kosuch St., Le Bodic P., Leung J., Lisser A.: *On a Stochastic Bilevel Programming Problem with Knapsack Constraints*,
http://www.kosuch.eu/stefanie/veroeffentlichungen/INOC09_abstract.pdf.

[65] Kuhn H.W.: *The Hungarian method for the assignment problem*, Naval Research Logistics Quarterly, **2** (1955), no. 2, 83-97.

[66] Kuhn H.W.: *Variants of the Hungarian Method for Assignment Problems*, Naval Research Logistics Quarterly, **3** (1956), 253-258.

[67] Li Y., Chen S.: *Optimal Traffic Signal Control for an $M \times N$ traffic Network*, Journal of Industrial and Management Optimization, **4** (2008), 661-672.

[68] Li C., Ji X.: *Innovation, licensing, and price vs. quantity competition*, Economic Modelling, **27** (2010), 746-754.

[69] Li H., Jiao Y.C., Zhang F.S., Zhang L.: *An Efficient Method for Linear Bilevel Programming Problems Based on the Orthogonal Genetic Algorithm*, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, **5** (2009), no. 9, 2837-2846.

[70] Liu Y., Mei J.: *Optimality Conditions in Bilevel Multiobjective Programming Problems*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, **33** (2009), 79-87.

[71] Lotito P.A., Mancinelli E.M., Quadrat J.P., Wynter L.: *A Global Descent Heuristic for Bilevel Network Pricing*, 2004,
http://www-rocq.inria.fr/metalau/quadrat/bpalgocomplet.pdf.

[72] Luc D.T.: *Theory of Vector Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[73] Lupşa L., Blaga L.R.: *A Special Type of the Min-efficient Solution of (CT) Problem*, Automation Computers Applied Mathematics, **15** (2006), no. 2, 193–201.

[74] Lupşa L., Blaga L.R.: *Special Type of Transportation Problems*, Automation Computers Applied Mathematics, **16** (2007), no. 2, 263–276.

[75] Lupşa L., **Tuns (Bode) O.R.**: *Bilevel E Programming Problems and a Kind of Portfolio Problems*, Part I, Automation Computers Applied Mathematics, **19** (2010), no. 1, 69-77.

[76] Lupşa L., **Tuns (Bode) O.R.**: *Discrete Lexicographic p-Bottleneck Problems. Part II*, acceptată spre publicare în Buletinul Ştiinţific al Universităţii Politehnică Timişoara.

[77] Manquinho V., Marques-Silva J.: *On Applying Cutting Planes in DLL-based Algorithms for Pseudo-boolean Optimization*, Technical Report RT /003/05-CDIL, INESC-ID 2005.

[78] Marcotte P., Zhu D.L.: *Exact and inexact penalty methods for the generalized bilevel programming problem*, Mathematical Programming, **74** (1996), no. 2, 141-157.

[79] Maringer D.: *Portfolio Management with Heuristic Optimization*, Advanced in Computational Management Science, Springer-Verlag, **8**, 2005.

[80] Marjit S.: *On a non-cooperative theory of technology transfer*, Economics Letters, **33** (1990), 293-298.

[81] Markowitz H.M.: *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, **8** (1952), no. 1, 77–91.

[82] Markowitz H.M.: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley and Sons, New York, 1959.

[83] Markowitz H., Sharpe W.F., Miller M.: *Founders of Modern Finance: Their Prize Winning Concepts and 1990 Nobel Lectures*, AIMR, Charlottesville VA, 1991.

[84] Marques-Silva J., Argelich J., Graça A., Lynce I.: *Boolean Lexicographic Optimization*, Proceedings of the 17th International RCRA Workshop (RCRA 2010): Experimental Evaluation of Algorithms for Solving Problems with Combinatorial Explosion Bologna, Italy, 2010.

[85] Maruşciac I., Rădulescu M.: *Un problème général de la programmation linéaire a plusieurs fonctions écononiques*, Studia, Universitatea Babeş-Bolyai, **15** (1970), no. 2, 55-65.

[86] May K.O.: *Transitivity, Utility and Aggregation in Preference Patterns*, Econometrica, **22** (1954), 1–13.

[87] Meucci A.: *Risk and Asset Allocation*, Springer-Verlag, 2005.

[88] Miettinen K.: *Nonlinear multiobjective optimization*, Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[89] Neamţiu L.: *A Medical Resources Allocation Problem*, Results in Mathematics, **53** (2009), no. 3-4, 341-348.

[90] Neamţiu L.: *Modelare şi Decizie în Economia Medicală*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2008.

[91] Pastor R.: *LB-ALBP: the lexicographic bottleneck assembly line balancing problem*, International Journal of Production Research, **49** (2011), no. 8, 2425–2442.

[92] Pentico D.W.: *Assignment problems: A golden anniversary survey*, European Journal of Operational Research, **176** (2007), 774-793.

[93] Poddar S., Sinha U.B.: *On Patent Licensing in Spatial Competition*, The Economic Record, **80** (2004), no. 249, 208-218.

[94] Poddar S., Sinha U.B.: *Patent licensing from high-cost firm to low-cost firm*, National University of Singapore, Department of Economics, working paper No. 0503, 2005.

[95] Podinovskey V.V., Nogin V.D.: *Pareto-Optimal Solution of Multicriteria Problems*, Moscow, Nauka, 1982 (in russian).

[96] Popovici N.: *Optimizare Vectorială*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005.

[97] Rădulescu M., Rădulescu S., Rădulescu C.Z.: *Modele Matematice pentru Optimizarea Investiţiilor Financiare*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 2006.

[98] Ravindran A., Ramaswami V.: *On the Bottleneck Assignment Problem*, Journal of Optimization Theory and Applications, **21** (1977), 451-458.

[99] Rockett K.: *The quality of licensed technology*, International Journal of Industrial Organization, **8** (1990), 559-574.

[100] Roy B.: *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[101] Ruuska S., Miettinen K., Wiecek M.M.: *Connections Between Single-Level and Bilevel Multiobjective Optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications, **153** (2012), no. 1, 60-74.

[102] Sahu A., Tapadar R.: *Solving the Assignment Problem using Genetic Algorithm and Simulated Annealing*, IAENG International Journal of Applied Mathematics, **36** (2007), no. 1, 37-40.

[103] Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T.: *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press, San Diego-New York-London-Toronto-Montreal-Tokyo, 1985.

[104] Soizic A., Bonnans J.F., Paraisy R., Veyrat S.: *Application of convex lexicographical optimization to the balance of GRTgaz gas grid*, Journal of Global Optimization, **49** (2011), no. 3, 414-423.

[105] Sokkalingam P.T., Aneja Y.P.: *Lexicographic bottleneck combinatorial problems*, Operations Research Letters, **23** (1998), no. 1, 27-33.

[106] Stackelberg H.F.: *Marktform und Gleichgewicht*, Springer-Verlag, Berlin, 1934.

[107] Stackelberg H.F.: *The theory of the market economy*, Oxford University Press, Oxford, 1952.

[108] Stancu-Minasian I.M.: *Stochastic Programming with Multiple Objective Functions*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984.

[109] Steuer R.E.: *Multiple-Criteria Optimization: Theory, Computation, and Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1986.

[110] **Tuns (Bode) O.R.**: *Fractional Optimization for a Portfolio Selection Problem*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, **9** (2011), 173-183.

[111] **Tuns (Bode) O.R.**: *Bilevel E Cost-Time-P Programming Problems*, Proceedings of the 2011 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, **3** (2011), 1168–1179.

[112] **Tuns (Bode) O.R.**: *Bilevel Biobjective Pseudo Boolean Programming Problems*, Journal of Mathematical Modelling and Algorithms, **11** (2012), no. 3, 325-344, http://rd.springer.com/article/10.1007/s10852-012-9188-2.

[113] **Tuns (Bode) O.R.**: *Modeling and solving the benchmark case in a differentiated Stackelberg duopoly*, acceptată spre publicare în Analele Universităţii de Vest Timişoara, **L** (2012), no. 2.

[114] **Tuns (Bode) O.R.**: *About a lexicographic multicriteria bottleneck problem*, acceptată spre publicare în Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, **10** (2012).

[115] **Tuns (Bode) O.R.**: *Connection between lexicographic discrete bottleneck problem and a single-level discrete problem*, submitted for publication in SIAM Journal on Discrete Mathematics.

[116] **Tuns (Bode) O.R.**: *A new kind of a generalized bottleneck assignment problem. Part II*, submitted for publication in Journal of Global Optimization.

[117] **Tuns (Bode) O.R.**, Ferreira F.: *Modeling and solving the per-unit royalty case in a differentiated Stackelberg duopoly*, acceptată spre publicare în Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, **10** (2012).

[118] **Tuns (Bode) O.R.**, Lupşa L.: *Discrete Lexicographic p-Bottleneck Problems. Part I*, acceptată spre publicare în Buletinul Ştiinţific al Universităţii Politehnică Timişoara.

[119] **Tuns (Bode) O.R.**, Neamţiu L.: *A new kind of a generalized bottleneck assignment problem*, General Mathematics, **20** (2012), no. 5, Special Issue, 133-144.

[120] Toth P., Vigo D.: *The Vehicle Routing Problem*, SIAM, Philadelphia, 2001.

[121] Ţigan Şt., Achimaş A., Coman I., Drugan T., Iacob E.: *Decizii Multifactoriale*, Cluj-Napoca, Editura SRIMA, 2001.

[122] Vicente L.N.: *Bilevel Programming: Introduction, History, and Overwiew, BP*, http://www.mat.uc.pt/ lnv/papers/EoO.pdf.

[123] Vicente L.N., Calamai P.H.: *Bilevel and multilevel programming: a bibliography review*, Journal of Global Optimization, **5** (1994), 291-306.

[124] Vicente L., Savard G., Júdice J.: *The discrete linear bilevel programming problem*, Journal of Optimization Theory and Applications, **89** (1996), 597–614.

[125] Votaw D.F., Orden A.: *The personnel assignment problem*, Symposium on Linear Inequalities and Programmng, SCOOP 10, US Air Force, (1952), 155-163.

[126] Wang Z.W., Nagasawa H., Nishiyama N.: *An Algorithm for a Multiobjective, Multilevel Linear Programming*, Journal of the Operations Research Society of Japan, **39** (1996), 176-187.

[127] Wang X.H.: *Fee versus royalty licensing in a Cournot duopoly model*, Economics Letters, **60** (1998), 55-62.

[128] Wang X.H.: *Fee Versus Royalty Licensing in Differentiated Cournot Oligopoly*, Journal of Economics and Business, **54** (2002), 253-266.

[129] Wang X.H., Yang B.Z.: *On Licensing Under Bertrand Competition*, Australian Economic Papers, **38** (1999), 106-119.

[130] Wang S., Xia Y.: *Portfolio Selection and Asset Pricing*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, **514**, Springer-Verlag, 2002.

[131] Weber E., Rizzoli A., Soncini-Sessa R., Castelletti A.: *Lexicographic optimisation for water resources planning: the case of Lake Verbano, Italy*, In: Integrated assessment and decision support proceedings of the first biennial meeting of the international environmental modelling and software society, Lugano, (2002), 235-240.

[132] http://en.wikipedia.org.

[133] Yu P.L.: *Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with Multiobjectives*, Journal of Optimization Theory and Applications, **14** (1974), 319-377.

[134] Yu P.L.: *Multiple-Criteria Decision Making. Concepts, Techniques, and Extensions*, Plenum Press, New York and London, 1985.

[135] Zarepisheh M., Khorram E.: *On the transformation of lexicographic nonlinear multiobjective programs to single objective programs*, Mathematical Methods of Operations Research, **74** (2011), 217-231,
www.springerlink.com/index/G884WP1450M62283.pdf.

[136] Zeleny M.: *Multiple Criteria Decision Making*, Mc Graw-Hill, New York, 1982.

[137] Zionts S.: *Multiple Criteria Problem Solving Proceedings*, Springer Verlag, New York, 1978.

[138] Zuniga M.P., Guellec D.: *Who licenses out patents and why? Lessons from a business survey*, (2009), http://www.oecd.org/dataoecd/47/16/42477187.pdf.