



UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITÁT
TRADITIO ET EXCELLENTIA

Sisteme Dinamice Continue pentru Rezolvarea Problemelor de Satisfacere a Constrângerilor

CONTINUOUS-TIME DYNAMICAL SYSTEMS FOR SOLVING
CONSTRAINT SATISFACTION PROBLEMS

TEZĂ DE DOCTORAT
DE
BOTOND MOLNÁR
LA
DEPARTMENTUL DE FIZICĂ

CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC
PROF. DR. ZOLTÁN NÉDA

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
CLUJ-NAPOCA, ROMANIA
2016

Sisteme Dinamice Continue pentru Rezolvarea Problemelor de Satisfacere a Constrângerilor

CONTINUOUS-TIME DYNAMICAL SYSTEMS FOR SOLVING CONSTRAINT SATISFACTION PROBLEMS

ABSTRACT

În această Teză două teme majore au fost investigate. În prima parte am introdus un model de calculator analog care este capabil de a rezolva probleme tip Boolean satisfaction, iar în partea a doua prezentăm un sistem dinamic continuu care poate să prezică optimul global al energiei problemelor NP-hard.

După noțiunile introductive din Capitolul 1, care discută bazele metodelor computaționale analogice și introduce conceptul de calculatoare de Rețele Celulare Neurale (CNN)^{8,7} prezentăm un sistem dinamic continuu pentru rezolvarea problemelor de tip Boolean satisfiability (k -SAT)¹⁵.

În Capitolul 2 este prezentat modelul de CNN Asimetric, care în contrast cu sistemul dinamic original¹⁵ poate fi implementat, cu circuite analogice, dar în același timp conservă trăsăturile importante ale dinamicii originale. În acest Capitol demonstrăm trei Teoreme fundamentale, care stau la baza modelului nostru: 1) variabilele rămân mărginite; 2) fiecare soluție SAT corespunde unui punct fix stabil; 3) un punct fix stabil întotdeauna corespunde unei soluții. Rezultatele numerice obținute sunt prezentate în Capitolul 3, unde discutăm și natura haotică a dinamicii pentru sistemul considerat, și demonstrăm că există o regiune optimă pentru valorile parametrilor sistemului, care este independent de mărimea sistemului și de complexitatea problemei. Vom arăta, de asemenea, cu toate că ciclurile limită sunt posibile în sistem, prin selectarea adecvată a valorilor parametrilor principali aceste tipuri de atractori pot fi evitate. De asemenea aici s-a dezvoltat un algoritm care poate să detecteze aceste cicluri limită în timp real, algoritm care este descris tot în acest Capitol.

Dacă vorbim despre implementarea fizică a unui dispozitiv, atunci este importantă și discuția despre efectele diferitelor tipuri de zgomote asupra dinamicii din sistem. În Capitolul 4 arătăm că sistemul tolerează foarte bine diferite tipuri de zgomote care pot apărea în dispozitive electronice. S-a studiat trei tipuri de zgomote: zgomot alb, zgomot colorat și erori aleatoare în intensitatea conexiunilor, simulând imperfecțiunile conexiunilor electronice și/sau a elementelor de circuit.

În ultimul Capitol se introduce un sistem dinamic continuu, și se arată că utilizând trăsăturile haotice ale dinamicii se poate prezice optimul global a problemelor NP-hard mult înainte ca aceasta să fie atinsă. S-a testat sistemul pe problema *max*-SAT, varianta NP-hard al problemei k -SAT. Avantajul principal al acestui algoritm este capacitatea de a aproxima corespunzător optimul global al problemelor *max*-SAT într-o perioadă scurtă de timp, furnizând informații despre credibilitatea predicției făcute. Se obține și o estimare aproximativă despre timpul necesar pentru atingerea acestei stări. Din aceste rezultate și simulări rezultă că informațiile ascunse în comportamentul haotic pot fi folosite pentru a obține niște predicții prețioase.

Cuprins

INTRODUCERE	1
1 BAZELE CALCULATOARELOR ANALOGICE CALCULATOARE CNN ÎN GENERAL	3
2 MODELUL CNN PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR k -SAT	7
3 REZULTATE NUMERICE	9
4 EFECTELE ZGOMOTELOR PE CNN	13
5 DINAMICĂ CONTINUĂ PENTRU ESTIMAREA OPTIMULUI GLOBAL AL PROBLE- MELOR DE TIP NP-HARD	17
6 CONCLUZII	21
7 PUBLICAȚII	27
8 CUVINTE CHEIE	31
BIBLIOGRAFIE	35

Introducere

MULTE SISTEME REALE POT FI DESCRISE PRIN UTILIZAREA MODELELOR LOGICE, PRECUM ȘI PRIN PROBLEMELE DE SATISFACERE A CONSTRÂNGERILOR (CONSTRAINT SATISFACTION PROBLEMS, CSP). În acest studiu două probleme de tip SAT (satisfacere) au fost luate în considerare: 1) Problema de tip Boolean satisfiability (k -SAT) și 2) Problema max -SAT. k -SAT este una dintre cele mai dificile probleme din clasa CSP, fiind baza a multor probleme de tip decizie, programare (scheduling), corectare a erorilor și aplicații bio-informatic. Fiind categorizată NP-complet înseamnă că orice problemă NP poate fi transformată în această formă în timp polinomial¹⁰. Dacă problemele k -SAT pot fi rezolvate optim, adică în timp scurt și pentru sisteme relativ mari, atunci toată clasa acestor probleme ar putea fi rezolvată la fel de optim. Soluțiile problemelor NP-complet pot fi verificate eficient (în timp polinomial), dar complexitatea găsirii unei soluții pe sisteme Turing se scalează, în cel mai rău caz, exponențial¹⁸. Din cauza că aceste probleme apar frecvent în știință și tehnologie este foarte important dezvoltarea metodelor și algoritmilor care pot rezolva aceste probleme de tip NP-complet cât mai eficient.

Dezvoltarea tehnologiei CMOS prezintă o creștere cu trend exponențial, care se crede că se va satura în viitorul apropiat^{28,11} din cauza că elementele au mărimi care se apropie deja de nivelul atomic. Din cauza acestei tendințe a tehnologiei CMOS tot mai multă atenție este acordat calculatoarelor analogice,

precum și sistemelor dinamice analogice, care sunt proiectate astfel încât atractorii acestor sisteme dinamice să reprezinte rezultatul calculului.^{5,34,27,4} Recent inginerii au proiectat dispozitive analogice care imită sistemul nervos. Acestea includ sisteme precum Rețele Neurale/Nonliniare Celulare (CNN)^{8,32}, sau dispozitive analogice tip VLSI²³ și se utilizează și pentru rezolvarea problemelor tehnice din robotică și calcul senzorial (vedere, auz). S-a pus întrebarea, dacă tehnologii bazate pe sisteme dinamice continue pot fi utilizate pentru rezolvarea problemelor NP-hard.

Prezenta Teză este organizată în 5 capitole după cum urmează: în Capitolul 1 sunt discutate bazele calculatoarelor analogice oferind și o introducere în calculatoarele tip CNN. În Capitolul 2 sunt descrise bazele problemelor de tip k -SAT după care urmează prezentarea modelului ACNN propus pentru rezolvarea problemelor de tip k -SAT. Rezultatele simulărilor sunt prezentate în Capitolul 3. În Capitolul 4 sunt descrise efectele diferitelor tipuri de zgomote asupra funcționării modelului CNN prezentat. În Capitolul 5 se discută problema max -SAT, împreună cu noul algoritm propus pentru rezolvarea acestora. În sfârșit, în finalul Tezei se discută aplicabilitatea practică a acestor studii precum și posibilitățile de aplicații în viața de zi cu zi a rezultatelor prezentate în Teză.

Muzica este o intrare necorporală în lumea mai înaltă a cunoștinței care înțelege omenirea, dar pe care omenirea nu poate înțelege.

Ludwig van Beethoven

1

Bazele calculatoarelor analogice

Calculatoare CNN în general

CALCULATORELE ANALOGICE NU OPEREAZĂ PE VALORI DISCRETE (0 și 1), CA ȘI CALCULATOARELE DIGITALE, ci pe valori continue a fenomenelor fizice sau a unui semnal special, precum cantități mecanice, electrice sau hidraulice. Din această cauză măsurătorile și procesele de calcul ale acestor sisteme analogice - spre deosebire de mașinile Turing - nu pot fi reproduse exact prin repetarea calculului.

În acest Capitol prezentăm pe scurt lumea calculatoarelor analogice în general, și mai detaliat teoria și principiile fundamentale a calculatoarelor tip CNN.

Imediat după apariția lor, calculatoarele digitale au devenit foarte populare datorită faptului că pot fi programate cu ușurință. Cu toate acestea, dispozitivele analogice au rămas în continuare în folosință pentru sarcini specifice. În anii 1980-1990 la Berkley acestea au fost studiate de Leon O. Chua și Lin Yang^{8,7}, introducând un calculator analog nou denumit CNN, de tip cellular wave computer³¹. Nucleul calculatorului CNN este o Rețea Celulară Neurală/Nelinară (Cellular Neural/Nonlinear Network, CNN), o mulțime de procesori analog dinamici, numite celule interconectate local. Natura revoluționară a calculatoarelor CNN constă în asemănarea cu rețelele neurale: sunt capabile să proceseze mai multe semnale în paralel și au o dinamică continuă, care permite procesarea semnalului în timp real. Rădăcinile acestor tipuri de calculatoare analogice se găsesc în tehnologia informației inspirată din biologie. Procesorul gazdă a calculatorului CNN generează și obține ca și input un semnal analog pe care îl procesează în timp continuu. În general putem spune că este mimat anatomia și comportamentul unor organe senzoriale și de procesare, cum ar fi retina. Implementarea computațională a sistemelor CNN este Mașina Universală CNN (CNN-UM)^{32,6}, care este disponibilă comercial în diferite forme de implementare. Dacă CNN-UM este implementată pe un cip CMOS, atunci vorbim despre un calculator complet programabil cu stocare a programelor pe matrice dinamice. Mașina Universală CNN este universală nu numai în sensul Turing, dar și pe semnale analogice. Începând din 2003 revista International Technology Roadmap for Semiconductors (ITRS, publicat bianual) consideră tehnologia CNN ca una dintre cele mai importante arhitecturi emergente¹⁴. Implementarea calculatoarelor CNN poate fi diferențiată foarte ușor bazat pe sarcina pentru care au fost construite: CMOS cu mod mixt, CMOS digital emulat, FPGA, soluții optice, procesare de imagine, modele de automate celulare sau pentru a rezolva ecuații diferențiale parțiale³⁹. Cea mai promițătoare dintre aceste forme de implementare este acela de procesare a imaginilor și cea legată de alte soluții optice în robotică sau în computația senzorială¹². Acestea au definit calea principală în dezvoltarea practică care a avut ca țintă principală dezvoltarea multiprocesorului vizual⁹. Un rezultat mai recent și mai

important ar fi cipul *Bi-i V301HD* dezvoltat de Analogic Computers, care poate procesa date optice chiar și în rezoluție FullHD. Un alt domeniu în problematica procesării imaginilor este dezvoltarea aparatelor de fotografiere de mare viteză: unele calculatoare CNN construite special în acest scop pot captura imagini de la $10000fps$ până la $100000fps$, care sunt introduse într-un calculator digital și redată cu viteză normală de $29-30fps$, astfel pot fi efectuate investigații detaliate a evenimentelor de mare viteză, care altfel nu ar putea fi studiate. Multe dispozitive de control folosesc calculatoare CNN atașate la un calculator digital. Un exemplu în acest sens este sistemul de identificare a numerelor de înmatriculare a autovehiculelor. Mecanismul de funcționare al acestor dispozitive este următorul: senzorul optic al calculatorului CNN înregistrează imaginea mașinii în timp ce acesta rulează, imaginea este procesată instant de cip. Un singur proces dinamic pe cip identifică literele și cifrele din imaginea obținută, iar rezultatul este transmis calculatorului digital.

Inspirația este un musafir care nu-l vizitează cu bunăvoință pe cel leneș

Piotr Ilici Cheaikovski

2

Modelul CNN pentru rezolvarea problemelor k -SAT

PENTRU A ÎNFRUNTA PROVOCĂRILE COMPUTAȚIONALE moderne este necesară reevaluarea structurii și a scopurilor calculatoarelor actuale. Saturația rapidă a tehnologiei CMOS^{28,11} i-a îndemnat pe oamenii de știință să caute soluții alternative.

În acest Capitol sunt prezentate rezultatele preliminare pe care se bazează modelul CNN dezvoltat

în teză^{26,24}. După o scurtă introducere a Problemei de Satisfacere a Constrângerilor (CSP) în general și a Problemei de tip Boolean satisfiability (k -SAT) în special, discutăm abordarea dinamică continuă a problemei de satisfacere a constrângerilor introdusă de Ercsey-Ravasz și Toroczkai într-un articol recent publicat¹⁵. După acesta este prezentat modelul CNN folosit de către noi prin descrierea trăsăturilor și principiilor acestuia^{26,24}. Sunt enunțate și demonstrate trei Teoreme, care stau la baza noului model^{26,24}:

- Variabilele rămân limitate de-a lungul dinamicii
- Fiecărei soluții k -SAT corespunde un punct fix stabil
- Un punct fix stabil întotdeauna corespunde unei soluție.

Este prezentat un model nou de Rețea Celulară Neurală Asimetrică (Asymmetric Cellular Neural Network, ACNN) cu posibilitatea de aplicare directă în calculul analogic. Acest model prezentat se bazează pe sistemul dinamic continuu introdus de Ercsey-Ravasz și Toroczkai¹⁵ și este proiectat să rezolve probleme k -SAT, care sunt probleme fundamentale de tip CSP. Dacă sunt realizate pe un dispozitiv analog, atunci este nevoie de o singură operațiune pentru găsirea soluției. Intensitatea conexiunilor este determinat de elementele de matrice a instanței k -SAT date. Sistemul pornit din oricare dintre condițiile inițiale va ajunge la o soluție fără să fie nevoie de intervenții ulterioare. S-a arătat că punctele fixe ale sistemului pot fi doar soluțiile, dar asta nu înseamnă că nu pot apărea cicluri limită în sistem. În Capitolul următor se arată că defapt aceste cicluri limită sunt posibile. Acesta este un dezavantaj în comparație cu sistemul original, dar într-un domeniu major a valorilor posibile ale parametrilor principali ciclurile limită nu apar, astfel acest aspect nu constituie o problemă. Așa cum este de așteptat din similitudinea cu sistemul original și acest sistem prezintă comportamente haotice mai ales în faza *hard-SAT* (a se vedea Capitolul următor) consolidând echivalența între dificultatea de optimizare și comportamentul haotic prezent în algoritmii de căutare analogici.

*Feriți-vă de șansele ratate; în caz contrar într-o zi ar putea
fi prea târziu.*

Franz Liszt

3

Rezultate numerice

NOUL MODEL DE REȚEA CELULARĂ NEURALĂ ASIMETRICĂ prezentat în Capitolul anterior împreună cu cele trei Teoreme enunțate constituie baza acestui model, și garantează că toate punctele fixe stabile ale sistemului dinamic corespund cu soluțiile problemelor k -SAT. Cu toate că teoria prezentată în Capitolul anterior indică prezența unui sistem robust, nu avem nici o garanție că nu există și alte tipuri de atractori în sistem. Aceste tipuri diferite de atractori pot fi cicluri limită sau alți atractori haotici. În orice caz, existența sau inexistența acestor atractori este foarte greu de demonstrat cu me-

tode analitice, dar rezultatele simulărilor computaționale indică existența acestor atractori în sistem. Această trăsătură constituie o altă diferență majoră dintre sistemul original¹⁵ și noul solver SAT^{26,24} dezvoltat de noi. Iar rezultatele simulărilor arată că există un interval robust pentru valorile optime ale parametrilor principali (A, B) ai sistemului, care este cvazi-independentă de trăsăturile problemelor, astfel încât dinamica evită ciclurile limită și converge către o soluție k -SAT.

Deoarece este foarte greu de specificat o singură valoare fixă pentru parametrii principali, am căutat și am definit o regiune optimă pentru acești parametri. Pentru a clarifica această problemă s-a testat comportamentul sistemului nostru în funcția parametrilor A și B . S-au realizat hărți colorate pentru diferite sisteme, schimbând densitatea constrângerilor (α) și a valorilor lui k . Schimbarea densității constrângerilor implică o schimbare în complexitatea și dificultatea problemei. În rândul întâi al Figurii 3.1 sunt desenate hărțile pentru problemele 3-SAT cu mărimea sistemului fixat la $N = 40$ și densitatea constrângerilor variată $\alpha = 3.5, 4, 4.25$ (din stânga la dreapta). Ultimul grafic din acest rând arată cadrul regiunilor optime a primelor trei hărți (indicate cu pătrate portocalii pe primele trei grafice) puse unul peste altul. Această figură arată o corespundere excelentă al acestor regiuni, precum și independența de valorile lui α . Acest studiu a fost realizat și în cazul problemelor 4-SAT, rândul al doilea de pe Figura 3.1, precum și în cazul problemelor 5-SAT, rândul al treilea din Figura 3.1. În ambele cazuri ($k = 4, 5$) au fost considerate probleme cu $N = 20$ de variabile. În cazul problemelor 4-SAT valorile α au fost setate după cum urmează: 8.5, 9, 9.25 (din stânga la dreapta), respectiv pentru instanțele 5-SAT $\alpha = 15, 18, 20.55$. Se poate vedea că în toate cele trei cazuri regiunile optime pentru A, B coincid consistent, acestea rămân în același secțiune pentru diferite valori k și diferite mărimi ale sistemelor (N). Variația este mică și pentru diferite graduri de dificultăți α a problemelor.

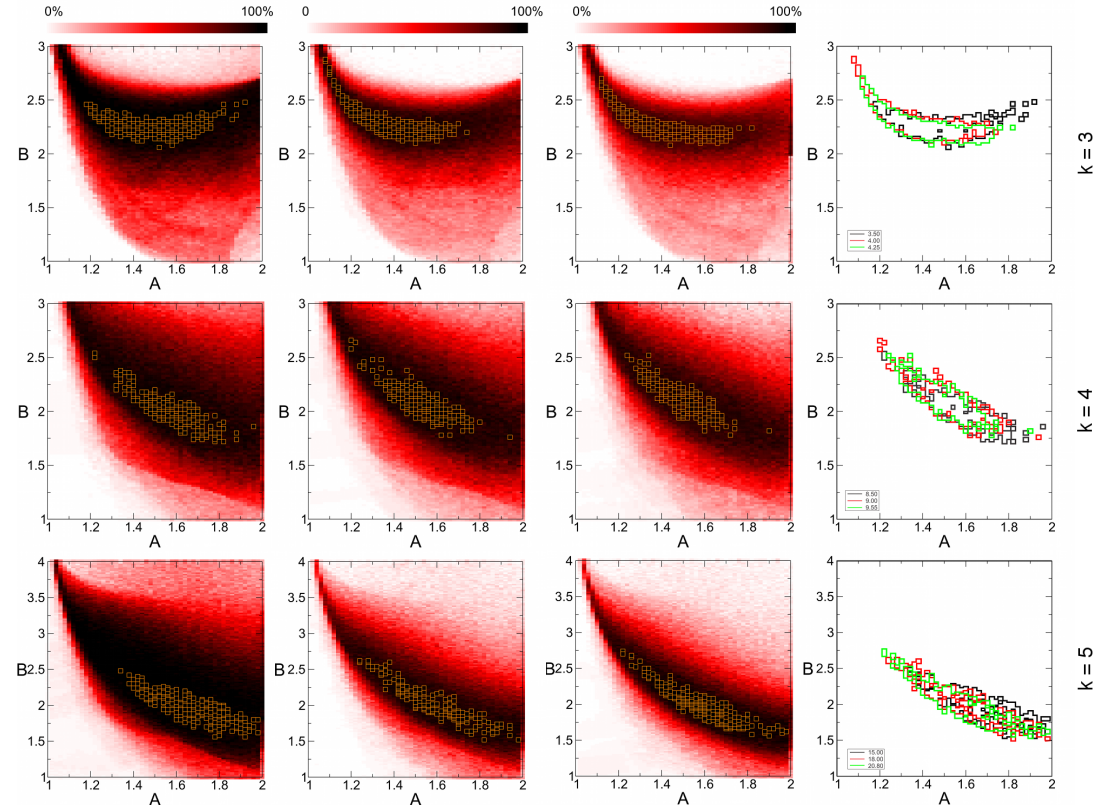


Figura 3.1: *Dependența de parametri a dinamicii în cazul problemelor 3-SAT, 4-SAT și 5-SAT cu mărime fixată iar dificultatea tipică variată.* Pentru fiecare punct (A, B) pe hartă au fost rezolvate 100 de probleme selecționate aleator cu soluție existentă. Culoarea indică fracțiunea problemelor rezolvate (vezi bara de culori). Simulările au fost rulate pentru probleme 3-SAT (primul rând) cu $N = 40$ și $\alpha = 3.5, 4.0, 4.25$ (din stânga la dreapta), 4-SAT (rândul al doilea) cu $N = 20$ și $\alpha = 8.5, 9.0, 9.55$, și 5-SAT (rândul al treilea) cu $N = 20$ și $\alpha = 15, 18, 20.80$. Regiunile optimale al parametrilor este reprezentat pe hărți cu pătrate portocalii. În ultima coloană sunt comparate diferitele regiuni optimale obținute separat în fiecare rând (negru, roșu, verde din stânga la dreapta), prin desenarea cadrului limitator ai acestor regiuni (vezi legenda).

*Cei care au atins toate obiectivele lor, probabil că le-au
avut prea ușoare.*

Herbert von Karajan

4

Efectele zgomotelor pe CNN

PENTRU A IMPLEMENTA ÎN FORMĂ FIZICĂ UN SISTEM este esențial studiul profund al efectelor diferitelor tipuri de zgomote. În Capitolul anterior s-a prezentat un sistem ACNN pentru rezolvarea problemelor k -SAT. S-a arătat că în cazul problemelor computațional dificile sistemul ACNN prezintă manifestări haotice tranziente în dinamică. Acestea ridică întrebarea viabilității acestui sistem analog în prezența zgomotelor, care sunt inevitabile în cursul implementării (ex. circuite electrice) și a modului de utilizare a dispozitivelor analogice. În acest Capitol curent s-a testat robustețea sistemului

în prezența zgomotului alb și a zgomotului $1/f^2$. S-a analizat modul în care potențialele erori aleatoare în intensitatea conexiunilor influențează funcționarea sistemului^{36,25}.

În sisteme reale pot apărea mai multe tipuri de zgomote, cum ar fi zgomot de tip "shot", "thermal", "burst", "flicker", "avalanche", etc.¹⁹. Pentru a studia profund efectele acestora am modelat cele trei tipuri de zgomote comune care pot apărea în astfel de sisteme analogice^{36,25}:

- zgomot alb: necorelat în timp
- zgomot de tip $1/f^2$
- erori mici aleatoare în intensitatea conexiunilor: constantă în timp, modelează imperfecțiunile conexiunilor electronice și/sau a elementelor de circuit.

Zgomotul este o caracteristică fundamentală a circuitelor electronice. De obicei este cauzată de fluctuații mici în curent sau în tensiune, imperfecțiunile elementelor de circuit, etc. Prezența zgomotelor până în ultimii ani a fost considerată ca fiind ceva nedorit, un efect care trebuie eliminat. Recent însă au fost construite mai multe sisteme care profită de prezența zgomotelor. În acest Capitol arătăm cum se îmbunătățește eficiența sistemului CNN în prezența zgomotelor. În cursul implementării cu circuite a modelului CNN o altă întrebare importantă este cea legată de precizia intensității conexiunilor. Când elementele electronice, precum rezistențe, condensatoare, etc. sunt produse, parametrii acestora vor manifesta o mică variație față de valorile propuse în teorie. Aceste fluctuații pot fi considerate ca un zgomot în sistem. Aceste erori au fost introduse în ecuațiile care descrie modelul ACNN ca o valoare mică aleatoare, care este constantă în timp, și este adăugată sau scăzută în mod aleator din valoarea intensității conexiunilor, simulând erori.

Este foarte interesant de remarcat faptul că prezența zgomotelor în sistem poate îmbunătăți performanța sistemului nostru dinamic, mai ales atunci, când valorile parametrilor principali (A , B) ai sistemului nu sunt alese din zona optimă. Această trăsătură este prezentată în Figura 4.1 în cazul unei probleme mici 3-SAT cu $N = 20$ în faza *hard-SAT*, cu densitatea de constrângeri $\alpha = 4.25$. În partea stângă a Figurii 4.1 este reprezentată fracțiunea problemelor rezolvate cu succes în cazul original, când

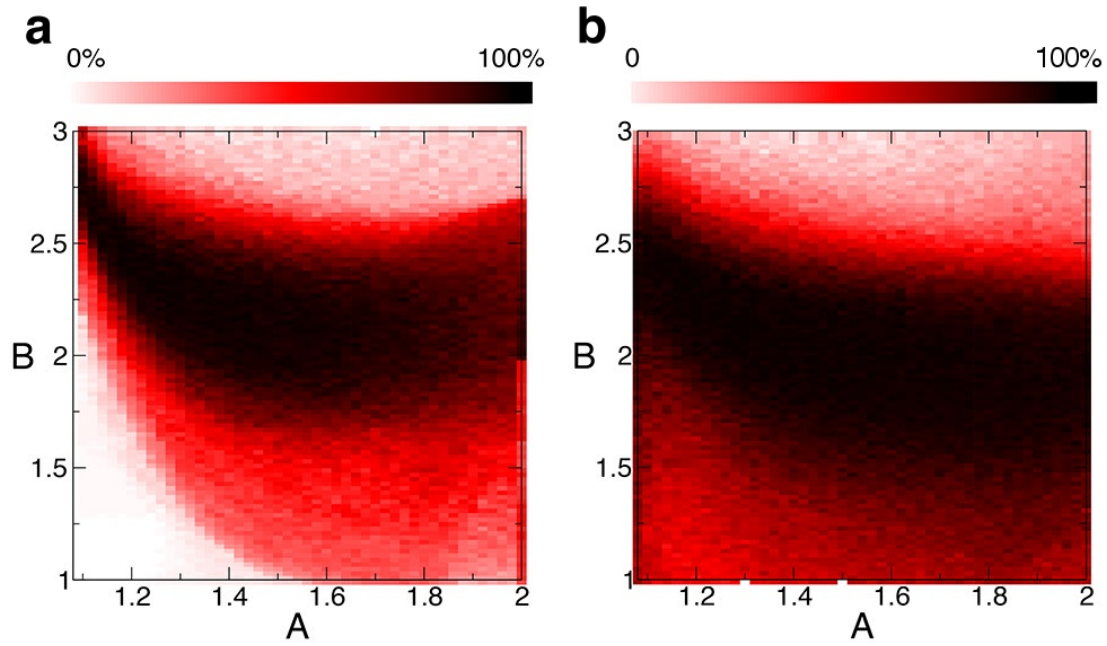


Figura 4.1: Hartă de culori pentru un sistem mic pentru a studia regiunea optimă a parametrilor A, B în prezența zgomotului colorat. Pentru fiecare punct $A \in [1, 2), B \in [1, 3)$ pe hartă s-au rulat 100 probleme 3-SAT cu soluție, alese aleator, cu $N = 20, \alpha = 4.25, t_{max} = 5000$. Codul de culoare folosit reprezintă fracțiunea problemelor rezolvate (vezi bara de culoare): a) fără zgomot, b) cu zgomot colorat ($\tau = 1, I = 0.01$).

nu este zgomot în sistem. Pe partea dreaptă a Figurii 4.1 este reprezentată aceeași problemă, cu aceeași condiții inițiale, dar în cazul în care zgomotul colorat corelat este prezent în sistem cu o intensitate de $I = 0.01$ și timp de corelație $\tau = 1$. Se poate vedea că prezența zgomotului mărește dimensiunea regiunii optime pentru cei doi parametri (A, B). Acesta sprijină ipoteza noastră inițială, conform căreia acești parametri nu au nevoie de reglaj fin pentru ca sistemul să funcționeze în mod corespunzător. Toleranța sistemului față de zgomote cu intensitate ridicată permite o posibilitate de implementare robustă și optimă a sistemului.

*Invenția melodică este una dintre cele mai sigure semne
ale harului Divin.*

Gustav Mahler

5

Dinamică continuă pentru estimarea optimului global al problemelor de tip NP-hard

MAI MULTE PROBLEME DIN VIAȚA REALĂ CAD ÎN CATEGORIA PROBLEMELOR DE TIP NP-HARD.
Sistemul k -SAT prezentat și studiat mai devreme în această Teză este NP-complet. NP-hard constituie

baza mai multor probleme de optimizare, de decizie, de corectare de erori, etc.

Există două clase majore de algoritmi pentru a rezolva probleme NP-hard: solve exacte, care sunt extrem de ineficiente și încete, și metodele euristice care pot fi mult mai eficiente în găsirea unei soluții, dar nu furnizează nici o informație asupra corectitudinii optimului calculat. Aceasta înseamnă că acești algoritmi pot găsi minimul global a sistemului, dar pot fi prinși foarte ușor și într-un minim local, iar utilizatorul nu primește nici un feedback despre natura reală a optimului găsit. Multe probleme din viața reală pot fi traduse într-o Problemă de Satisfacere a Constrângerilor ca și *max-SAT*. De la problema de spin-glass, prin protein folding până la Sudoku¹⁶ și multe aplicații industriale, toate pot fi formulate matematic în formă de *max-SAT*. Este o problemă fundamentală care stă la baza problemelor cum ar fi problema de minimizare a energiei în modelul Edward-Anderson de spin-glass² din fizica statistică, problema comis-voiajorului¹³, problema legată de protein folding în bioinformatică³⁵, aplicații industriale ca și programare³⁸, "design debugging"³³, rutare FPGA⁴⁰, argumentare rațională²⁹. Problema *max-SAT* este forma generală a problemei de tip Boolean satisfiability (*k-SAT*).

Algoritmul propus de noi pentru rezolvarea problemelor *max-SAT* se bazează pe sistemul dinamic coninuu original prezentat de Ercsey-Ravasz și Toroczkai¹⁵. Avantajul principal al acestui model constă în corespondența între atractorii stabili ai sistemului și soluțiile SAT. Pornind dinamica din oricare dintre condițiile inițiale, algoritmul va converge într-o soluție fără vreo intervenție ulterioară a utilizatorului. În faza *hard-SAT* dinamica devine tranzient haotică sugerând concluzii interesante despre relația dintre haos și dificultatea optimizării. Totuși, în cazul problemelor *max-SAT*, când nu există o soluție care să satisfacă toate constrângerile în același timp, asta înseamnă că atractorul global al sistemului nu mai este un atractor stabil.

Algoritmul este ilustrat pe o problemă de referință foarte grea aleasă dintr-un set de probleme de referință listate pe un website a unei competiții de rezolvare a problemelor SAT^{SAT}. Pentru a testa algoritmul nostru s-a rezolvat foarte multe probleme de referință, ceea ce s-a dovedit a fi foarte util pentru că s-a aflat nivelul real al energiei minime, astfel putându-se compara rezultatele obținute cu datele disponibile. S-a ales această problemă în mod special pentru că pare să fie una extrem de dificilă

având $N = 250$ de variabile și o dificultate tipică $\alpha = 4.0$. Pentru a compara rezultatele obținute s-a utilizat algoritmul complet numit *maxsatz*^{21,22}, care a câștigat competiția de rezolvare a problemelor *max-SAT* din anul 2006, 2007, respectiv 2013. Algoritmul *maxsatz* a rulat timp de 5.5 săptămâni (!) pe aceasă problemă dificilă, iar energia minima găsită a fost numai $E = 9$. Algoritmul nostru găsește nivelul de energie $E = 5$ după rularea a celor $P = 189562$ traiectorii, pe parcursul a doar 20 de ore, mai mult decât atât: prezice convingător acest nivel optimal global începând de la rularea traiectoriei $P = 7000$. Pe Figura 5.1 prezentăm performanța algoritmului.

Pe baza dinamicii haotice prezentate anterior, s-a proiectat un algoritm nou, care este capabil să furnizeze eficient o predicție asupra nivelului optim global a problemelor NP-hard, utilizând foarte multe traiectorii dinamice scurte pornite din diferite condiții inițiale. Metoda oferă și o estimare a timpului necesar pentru a găsi următorul nivel mai mic de energie. Această trăsătură de a furniza feedback statistic despre cât de aproape ne aflăm de găsirea optimului global al sistemului este unic. Nici un algoritm cunoscut nu are o trăsătură comparabilă. Această caracteristică este foarte utilă mai ales în cazul problemelor extrem de dificile. În acest Capitol scopul nostru principal era prezentarea acestui algoritm nou, dar detaliile sale pot fi îmbunătățite și mai departe. Pot fi redefinite regulile care decid dacă o predicție este necesară, precum și condițiile de oprire. Tot în acest Capitol se arată și faptul că erorile de predicție apar mai ales în cazul problemelor ușoare. Aceste probleme sunt însă ușor de rezolvate folosind algoritmi de căutare exacți. Scopul principal nu este utilizarea acestei metode în cazul problemelor ușoare ci în cazul celor dificile. Puterea acestui algoritm constă în capacitatea a prezice a minimului global optim al problemelor extrem de dificile, unde ne poate furniza și informații referitoare la cât de aproape ne aflăm în a găsi nivelul optim global.

Rata de evadare (escape rate) bazată pe energia sistemului este o formă generalizată a ratei de evadare din teoria haosului tranzient^{20,37}. De asemenea s-a arătat că scalarea acestei noi măsuri dezvăluie informații cruciale despre structura spațiului de fază: cel mai scăzut nivel de energie, probabilitatea de a găsi nivele de energie mai scăzute, etc. Cu toate că niciodată nu poate fi prezisă ruta exactă a unei traiectorii, trăsăturile statistice ale sistemului sunt robuste și pot fi utilizate pentru a obține informații

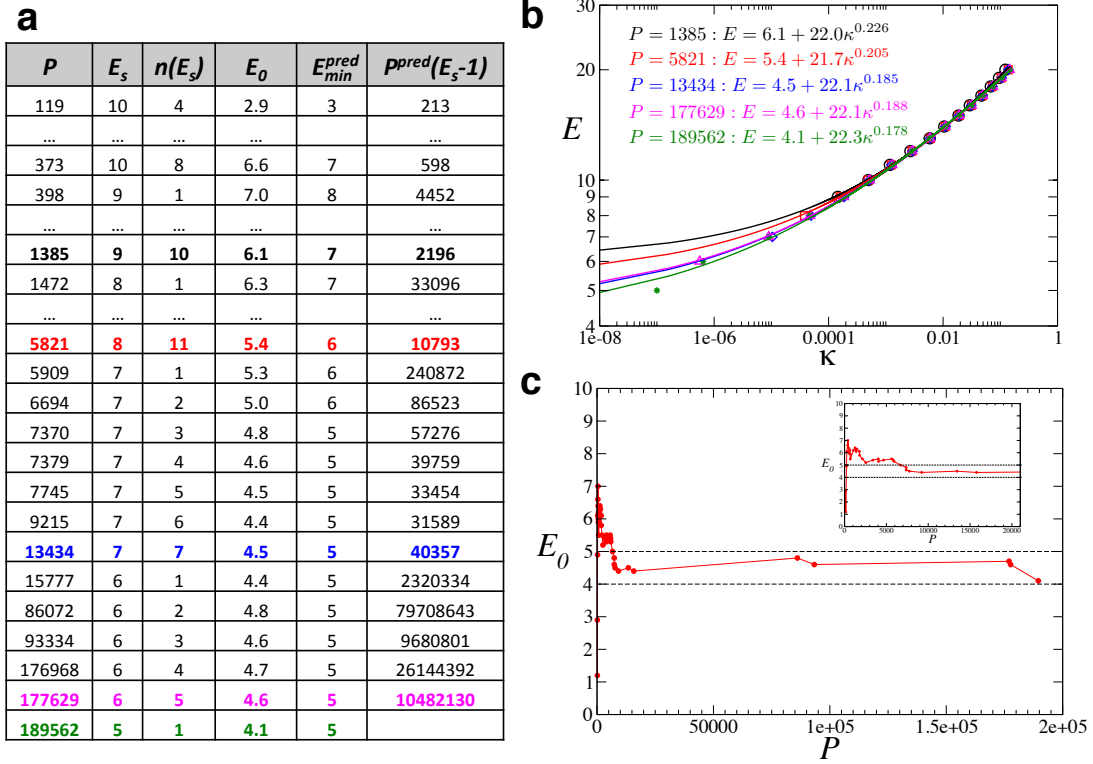


Figura 5.1: Performanța algoritmului ilustrat pe o problemă de referință extrem de dificilă având $N = 250$ variabile și greutatea tipică $\alpha = 4.0$, timpul maxim este setat la $t_{max} = 50$ și valoarea parametrului b la valoarea 0.002375 . a) P - numărul traiectoriilor, E_s - cel mai mic nivel de energie găsit până la acel punct de referință, $n(E_s)$ - de câte ori a fost atins acel nivel, E_0 - parametrul obținut prin precizie prin fitting și predicție a valorii E_{min}^{pred} și $p^{pred}(E_s - 1)$ - numărul traiectoriilor necesare pentru găsirea unui nivel de energie mai mică. Algoritmul estimează rata de evadare și efectuează o predicție la fiecare P din tabel, pentru rândurile evidențiate arătăm fit-ul propriu zis în b). c) Valoarea parametrului relevant E_0 este reprezentată în funcție de P . Fluctuează foarte rapid la început când statistica este mică, dar cum statistica crește se stabilizează în intervalul $E_0 \in [4, 5)$, având o predicție convingătoare asupra valorii $E_{min}^{pred} = 5$ chiar după $P = 7000$ traiectorii până în momentul în care găsește acest nivel de energie la $P = 189562$. În clipa aceea încă nu avem o estimare precisă a valorii $\kappa(5)$ pentru că nivelul acesta a fost găsită numai o singură dată ($n(5) = 1$), dar estimatarea E_{min}^{pred} rămâne neschimbat, convingând algoritmul să accepte valoarea $E_{min}^{dec} = 5$ și să oprească căutarea în continuare.

utile despre sistem. Aceasta poate să devină o nouă abordare în studierea altor sisteme dinamice haotice și cu siguranță asigură un aspect intrigant legat de puterea de predicție în dinamica haotică. Cu toate acestea metoda prezentată considerăm că deschide noi perspective în studierea problemelor de tip NP-hard.

6

Concluzii

Paradigma calculatoarelor analogice încă nu a ajuns la capătul drumului, din contră în fiecare zi apar noi tehnologii și idei care demonstrează viabilitatea mașinilor de acest tip. Rezultatele noastre prezentate în această Teză suportă această idee prin exemple noi și posibilități de îmbunătățire a acestor sisteme, precum și paradigme de calcul în care pot fi utilizate în rezolvarea problemelor complexe.

S-a prezentat un model nou de calculatoare analogice bazată pe modelul CNN introdus de Leon O. Chua and Lin Yang^{8,7}, și pe sistemul dinamic continuu introdus de Mária Ercsey-Ravasz și Zoltán Toroczkai pentru rezolvarea problemelor de tip Boolean satisfiability (k -SAT)¹⁵. Modelul nostru

revoluționar de Rețele Neurale Celulare Asimetrice este ușor de implementat, păstrând și avantajele principale ale dinamicii originale pentru rezolvarea problemelor SAT¹⁵. Avantajul principal al arhitecturii CNN constă în capacitatea ridicată de procesare, acest aspect justifică alegerea modelului de implementare. Datorită felului în care a fost proiectat, implementarea sistemului dinamic original este foarte dificilă, aceasta utilizând unele variabile auxiliare asociate fiecărei constrângeri din problema k -SAT. Valoarea acestor variabile auxiliare nu este limitată, astfel valoarea lor poate să crească până la infinit ca să împiedice ca sistemul să fie blocat în minime locale. Realizat însă pe un dispozitiv analog, ar fi nevoie numai doar de o singură operațiune pentru găsirea soluției optime. Avantajul principal al sistemului constă în faptul că pornind din oricare dintre condițiile inițiale sistemul va converga într-o soluție fără vreo intervenție ulterioară. În contrast cu sistemul dinamic original ciclurile limită nu pot fi excluse, dar s-a arătat că numai punctele fixe ale problemei pot constitui soluții. Nu se poate garanta însă că nu există alte tipuri de atractori (cicluri limită), așa cum s-a și arătat în teza existența lor. Acest aspect constituie un dezavantaj față de sistemul original, dar s-a dovedit că există, o regiune majoră a parametrilor principali (A și B) care conduce sistemul pe traiectorii care evită ciclurile limită. Pentru a simula sistemul mai eficient era nevoie de un algoritm care poate să detecteze dacă sistemul va fi blocat într-un ciclu limită astfel simularea poate fi oprită și repornită dintr-o altă condiție inițială. Deoarece nu există nici un algoritm cunoscut care poate să detecteze în timp real (fără să utilizeze șirul de date deja generată și existentă) dacă o traiectorie urmărește o direcție care conduce într-un ciclu limită sau nu, s-a dezvoltat un algoritm nou pentru această sarcină. Măsurând eficiența algoritmului s-a obținut că predicția este corectă în $\sim 96\%$ dintre cazuri.

Din moment ce implementarea fizică deobicei este diferită față de mediul ideal al modelelor, prezența diferitelor tipuri de zgomote este inevitabilă, iar efectele acestora în sistem constituie o întrebare fundamentală. S-a prezentat un studiu detaliat despre efectul zgomotelor tipice ce pot apărea în circuite analogice: zgomot alb (necorelat în timp), zgomot colorat (corelat în timp) și erori mici aleatoare în intensitatea conexiunilor (constante în timp, care modelează imperfecțiunile conexiunilor electronice și/sau a elementelor de circuit). S-a arătat că prezența zgomotelor în sistem nu are efect negativ

în ceea ce privește funcționarea sistemului, de fapt aceasta contribuie la evitarea mai ușoară a ciclurilor limită prin extinderea zonei optime pentru parametrii principali (A , B) a sistemului. De asemenea, s-a arătat că sistemul nostru poate să tolereze intensități de zgomote până la $I = 10^{-2}$, care este o intensitate cu trei dimensiuni mai mare decât intensitatea zgomotelor maxime admise într-un dispozitiv fizic ($I < 1.6 \times 10^{-6}$).

Conceptul ACNN a fost bine primit de ingineri. Acest model poate fi considerat ca fiind una dintre primele încercări de a generaliza aplicația calculatoarelor CNN, care în prezent sunt utilizate în principal în aplicații vizuale. Un grup de ingineri de la Facultatea de Tehnologie Informației și de Bionică de la Universitatea Catolică Péter Pázmány (Budapesta, Ungaria) au fost primii care au început să lucreze la realizarea fizică a modelului nostru. Munca a fost începută de Prof. Tamás Roska, în prezent continuată de studenții acestuia. După mai multe circuite de test ei au realizat un sistem cu $10 + 20$ celule pe placă de circuit imprimat (PCB). Una dintre aceste plăci este prezentată pe Figura 6.1 (munca este în curs de dezvoltare). Un alt grup de cercetători de la Departamentul de Inginerie Electrică și Științe Computaționale de la Universitatea din Tennessee (Knoxville, TN, SUA) condus de David Basford, independent de grupul din Budapesta a început să lucreze la implementarea modelului CNN³. Un grup de cercetători condus de Prof. X. Sharon Hu de la Universitatea din Notre Dame (Notre Dame, IN, SUA) a început implementarea sistemului dinamic original cu modificări minore aduse acestui sistem prin aplicarea limitelor pe variabilele auxiliare⁴¹.

În cadrul Tezei s-a introdus o variantă modificată a sistemului dinamic original¹⁵ pentru a fi utilizat în predicția optimului global al problemelor NP-hard. Multe probleme din viața reală cad în această categorie, ele nu pot fi soluționate eficient de către nici un algoritm. În majoritatea cazurilor problemele NP-hard nu au o soluție completă (energie nul), dar totuși întrebarea rămâne validă: care este nivelul cel mai scăzut de energie posibilă în sistem? S-a studiat problemele NP-hard prin categoria de probleme *max-SAT*. Algoritmul nou introdus în această Teză poate să furnizeze o predicție referitoare la numărul constrângerilor rămase nesatisfăcute în starea optimului global mult înainte ca această stare să fie atinsă, și furnizează informații despre timpul sau numărul de traiectorii necesare pentru a

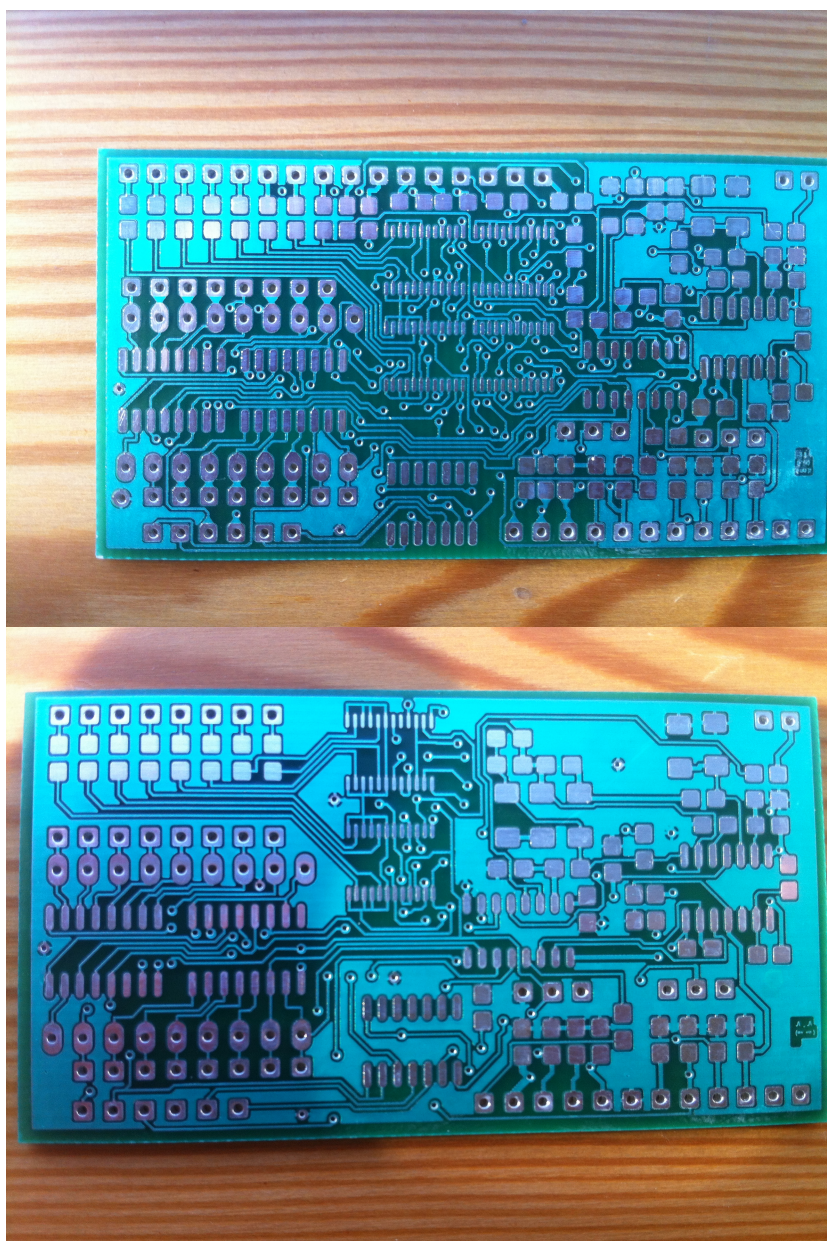


Figura 6.1: *ACNN pe placă de circuit imprimat.* Placa de circuit imprimat al modelului nostru ACNN, realizat de András Horváth și Dóra Babicz de la Facultatea de Tehnologia Informației și de Bionică de la Universitatea Catolică Péter Pázmány (Budapesta, Ungaria).

atinge starea respectivă. S-a păstrat toate avantajele algoritmului dinamic original și s-a introdus câteva îmbunătățiri astfel încât acesta poate să opereze eficient în noul mediu al problemelor NP-hard. De asemenea, s-a arătat că acest algoritm nou poate să prezică optimul global a problemelor *max-SAT* și poate să furnizeze informații referitoare la credibilitatea predicției făcute.

Se poate vedea că aceste studii au deschis noi posibilități în studierea problemelor de optimizare. Mai mult decât atât, pe baza modelului nou prezentat, se află în curs de dezvoltare o direcție complet nouă a dezvoltării calculatoarelor analogice. Algoritmul prezentat la finalul acestei Teze ne furnizează predicții despre minimul global la majoritatea problemelor NP-hard într-un timp relativ scurt, ceea ce constituie un avantaj fără egal în comparație cu algoritmi de deja cunoscuți. În prezent utilizăm acest algoritm pentru a studia problema Ramsey și pentru a prezice mai multe valori ale numerelor Ramsey^{30,17}. Mai mult, în prezent lucrăm la o variantă mai actualizată a algoritmului care poate prezice nu numai valoarea minimă a energiei, dar și o soluție (o alocație a variabilelor tip Boolean, dacă se consideră problema *max-SAT*), care poate să corespundă acestui nivel. Există numeroase posibilități de aplicare atât pentru sistemul ACNN cât și pentru algoritmul de prezicere a minimului global a sistemului în numeroase probleme de optimizare.

Toate aceste sisteme dinamice continue arată că dificultatea în optimizare corespunde unei dinamici haotice în sistemul fizic. Este fascinant că deși traiectoriile individuale sunt haotice, trăsăturile fizice ale dinamicii haotice pot să furnizeze predicții despre trăsăturile globale ale valorilor de energie.

7

Publicații

ARTICOLE ȘTIINȚIFICE (INDEXATE ISI)

- Molnár, B., Varga, M., Toroczkai, Z. and Ercsey-Ravasz, M. (to be submitted) *Predicting global optima of NP-hard problems through analog chaos*
- Sumi, R., Molnár, B. and Ercsey-Ravasz, M. (2014) *Robust optimization with transiently chaotic dynamical systems*, European Physics Letters, 106(4).
- Molnár, B. and Ercsey-Ravasz, M. (2013) *Asymmetric Continuous-Time Neural Networks wi-*

thout Local Traps for Solving Constraint Satisfaction Problems, PLoS ONE, 8(9).

- Molnár, B. and Ercsey-Ravasz, M. (2014), *Analog dynamics for solving max-SAT problems* In Niemier, M and Porod, W (Ed.), 14th Int. Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications (CNNA), University of Notre Dame, Notre Dame, IN, JUL 29-31, 2014.
- Molnár, B., Sumi, R. and Ercsey-Ravasz, M. (2014), *A CNN SAT-solver robust to noise*, In Niemier, M and Porod, W (Ed.), 14th Int. Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications (CNNA), University of Notre Dame, Notre Dame, IN, JUL 29-31, 2014.
- Molnár, B., Toroczkai, Z. and Ercsey-Ravasz, M. (2012), *Continuous-time Neural Networks Without Local Traps for Solving Boolean Satisfiability*, 13th Int. Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications (CNNA), Turin, IT, Aug 29-31, 2012.

PREZENTĂRI LA CONFERINȚE

- *Analog dynamics for solving max-SAT problems*, 14th Int. Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications (CNNA), University of Notre Dame, Notre Dame, IN, Jul 29-31, 2014.
- *A CNN SAT-solver robust to noise*, 14th Int. Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications (CNNA), University of Notre Dame, Notre Dame, IN, Jul 29-31, 2014.
- *Continuous-time Neural Networks Without Local Traps for Solving Boolean Satisfiability*, 13th Int. Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications (CNNA), Turin, IT, Aug 29-31, 2012.

POSTERE

- *CNN Computers for Solving SAT Problems*, IV Summer School on Statistical Physics of Complex and Small Systems (GEFENOL), IFISC, Palma de Mallorca, Spain, Sept 8-19, 2014.

PUBLICAȚII ANTERIOARE (INDEXATE ISI)

- Nédá, Z., Sumi, R., Ercsey-Ravasz, M., Varga, M., Molnár, B. and Cseh, Gy. *Correlation clustering on networks*, Journal of Physics A: Math. Theor. 42 (2009) 345003

8

Cuvinte cheie

Problema de Satisfacere a Constrângerilor, calculatoare analogice, probleme de tip NP-hard, sisteme dinamice continue, Rețele Neurale/Nelineare Celulare (CNN), haos tranzient, sisteme dinamice cu zgomot, probleme de optimizări globale

Bibliografie

- [SAT] <http://maxsat.udl.cat/14/index.html>.
- [2] Barahona F (1982). On the computational complexity of ising spin glass models. on the computational complexity of ising spin glass models. on the computational complexity of ising spin glass models. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 15, 3241–3253.
- [3] Basford, D. A., Smith, J. M., Connor, R. J., MacLennan, B. J., & Holleman, J. (2016). The impact of analog computational error on an analog boolean satisfiability solver. In *Proc. of 38th International Symposium on Circuits and Systems*, IEEE International Symposium on Circuits and Systems.
- [4] Ben-Hur, A., Siegelmann, H., & Fishman, S. (2002). A theory of complexity for continuous time systems. *Journal of Complexity*, 18, 51–86.
- [5] Branicky, M. (1994). Analog computation with continuous odes. *Workshop on Physics and Computation, Dallas TX USA*, (pp. 265–274).
- [6] Chua, L. & Roska, T. (1993). The CNN paradigm. *IEEE Trans. on Circ. and Sys. I-Fund. Theory and App.*, 40(3), 147–156.
- [7] Chua, L. & Yang, L. (1988a). Cellular Neural Networks - Applications. *IEEE Trans. on Circ. and Sys.*, 35(10), 1273–1290.
- [8] Chua, L. & Yang, L. (1988b). Cellular neural networks - theory. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I*, 35(10), 1257–1272.
- [9] Chua, L. O. & Roska, T. (2002). *Cellular neural networks and visual computing, Foundations and applications*. Cambridge University Press.
- [10] Cook, S. A. (1971). The complexity of theorem-proving procedures. In *STOC* (pp. 151–158).
- [11] Courtland, R. (30 March 2015). *The visionary engineer reflects on 50 years of Moore's Law*. Technical report, IEEE Spectrum.
- [12] Crounse, K. & Chua, L. O. (1995). Methods for image-processing and patternformation in cellular neural networks - a tutorial. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 42(10), 583–601.

- [13] Davies J. (2013). *Solving max-SAT by Decoupling Optimization and Satisfaction*. PhD thesis, University of Toronto.
- [14] Ercsey-Ravasz, M. (2008). *Applications of Cellular Neural/Nonlinear Networks in Physics*. PhD thesis, Péter Pázmány Catholic University, Babeş-Bolyai University.
- [15] Ercsey-Ravasz, M. & Toroczkai, Z. (2011). Optimization hardness as transient chaos in an analog approach to constraint satisfaction. *Nature Physics*, 7(12), 966–970.
- [16] Ercsey-Ravasz, M. & Toroczkai, Z. (2012). The Chaos Within Sudoku. *Scientific Reports*, 2, 725.
- [17] Erdős, P. & Szekeres, G. (1935). A combinatorial problem in geometry. *Compos. Math.*, (2), 463–470.
- [18] Garey, M. R. & Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness (Series of Books in the Mathematical Sciences)*. W. H. Freeman & Co Ltd, first edition edition.
- [19] Gray, P. R. (2009). *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*. Wiley, 5 edition.
- [20] Lai, Y.-C. & Tél, T. (2011). *Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite-Time Scales*. Springer.
- [21] Li C.M., Manyá F., P. J. (2006). Detecting disjoint inconsistent subformulas for computing lower bounds for max-sat. In *Proceedings, The Twenty-First National Conference on Artificial Intelligence and the Eighteenth Innovative Applications of Artificial Intelligence Conference*. In: AAAI, AAAI Press.
- [22] Li C.M., Manyá F., P. J. (2007). New inference rules for max-sat. *J. Artif. Intell. Res.*, 30, 321–359.
- [23] Liu, S.-C., Kramer, J., Indiveri, G., Delbruck, T., & Douglas, R. (2002). *Analog VLSI - Circuits and Principles*. MIT Press.
- [24] Molnar, B. & Ercsey-Ravasz, M. (2013). Asymmetric Continuous-Time Neural Networks without Local Traps for Solving Constraint Satisfaction Problems. *PLoS ONE*, 8(9).
- [25] Molnar, B., Sumi, R., & Ercsey-Ravasz, M. (2014). A CNN SAT-solver robust to noise. In Niemier, M and Porod, W (Ed.), *14th International Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications (CNNA)*. 14th International Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications (CNNA), University of Notre Dame, Notre Dame, IN, Jul 29-31, 2014.
- [26] Molnar, B., Toroczkai, Z., & Ercsey-Ravasz, M. (2012). Continuous-time Neural Networks Without Local Traps for Solving Boolean Satisfiability. 13th Int. Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications (CNNA), Turin, IT, Aug 29-31, 2012.
- [27] Moore, C. (1996). Recursion theory on the reals and continuous-time computation. *Theoretical Computer Science*, 162(1), 23–44.

- [28] Moore, G. E. (1965). Cramming more components onto integrated circuits. *Electronics*, (S 0018-9219(98)00753-1), 114–117.
- [29] Park J.D. (2002). Using weighted max-sat engines to solve mpe. In *In: AAAI/IAAI*. (pp. 682–687).
- [30] Ramsey, F. P. (1930). On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc.*, 2(30), 264–285.
- [31] Roska, T. (2002). Computational and computer complexity of analogic cellular wave computers. *Proceedings of the 7th IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications, CNNA2002*, (pp. 323–335).
- [32] Roska, T. & Chua, L. (1993). The CNN Universal Machine - An Analogic Array Computer. *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, 40(3), 163–173.
- [33] Safarpour, S., Mangassarian, H., Veneris, A., Liffiton, M. H., & Sakallah, K. A. (2007). Improved design debugging using maximum satisfiability. *Formal Methods in Computer Aided Design - FMCAD'07, IEEE Computer Society*, (pp. 13–19).
- [34] Siegelmann, H. & Sontag, E. (1994). Analog computation via neural networks. *Theoretical Computer Science*, 131, 331–360.
- [35] Strickland D.M., Barnes E., S. J. (2005). Optimal protein structure alignment using maximum cliques. *Oper. Res.*, 53, 389–402.
- [36] Sumi, R., Molnar, B., & Ercsey-Ravasz, M. (2014). Robust optimization with transiently chaotic dynamical systems. *EPL*, 106(4).
- [37] Tel, T. & Lai, Y.-C. (2008). Chaotic transients in spatially extended systems. *Physics Reports*, 460(6), 245 – 275.
- [38] Vasquez, M. & Hao, J. (2001). A “logic-constrained” knapsack formulation and a tabu algorithm for the daily photograph scheduling of an earth observation satellite. *Comput. Optim. Appl.*, 20, 137–157.
- [39] Werblin, F., Roska, T., & Chua, L. O. (1995). The analogic cellular neural network as a bionic eye. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 23(6), 541–569.
- [40] Xu H., Rutenbar R.A., S. K. (2003). Sub-sat: a formulation for relaxed boolean satisfiability with applications in routing. *IEEE Trans. on CAD of Integrated Circuits and Systems*, 22, 814–820.
- [41] Yin, X., Sedighi, B., Varga, M., Ercsey-Ravasz, M., Toroczkai, Z., & Hu, X. S. (2016). Efficient analog circuits for boolean satisfiability. *arXiv:1606.07467v1*.