UNIVERSITATEA "BABEŞ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA
SCOALA DOCTORALA DE MATEMATICA SI INFORMATICA

# Proprietati variationale ale solutiilor ecuatiilor si sistemelor de ecuatii operatoriale neliniare

REZUMAT AL TEZEI DOCTORALE

*Student doctorand:*
Angela BUDESCU

*Profesor Coordonator:*
Prof. Dr. Radu PRECUP

**Cluj - Napoca**
**2016**

# Cuprins

# Introducere

Metodele variationale reprezinta un capitol important atat al analizei neliniare, cat si a teoriei ecuatiilor diferentiale. Avantajul acestor metode in teoria ecuatiilor este acela de a oferi proprietati vaiationale ale solutiilor.

S-au publicat numeroase articole referitoare la aceasta metoda bazata pe teoria punctului critic, care prin comparatie cu metoda punctului fix, ofera informatii aditionale despre solutie, de exemplu, aceasta poate fi punct de minim, de maxim sau punct sa.

Pentru rezultate in aceasta directie, cititorul poate consulta de exemplu, una dintre urmatoarele referinte: A. Ambrosetti si P. H. Rabinowitz [4], O. Kavian [41], P. H. Rabinowitz [79], M. Struwe [94].

Teoria punctului fix ne ofera conditii care garanteaza existenta punctelor fixe pentru anumite clase de operatori neliniari. Una din intrebarile care ni le adresam in mod natural este aceea daca ecuatia de punct fix are o forma variationala, data de functionala asociata acesteia. De exemplu, suntem interesati daca punctul fix este un punct de extrem al functionalei energie.

Motivatia adresarii acestei probleme provine din fizica, unde in multe cazuri, starea unui proces se conforma principiului minimizarii energiei.

Probleme de acest tip au fost luate in considerare, de exemplu, in articolele A. Budescu [17], A. Budescu si R. Precup [18, 19], R. Precup [78], D. Motreanu si C. Varga [55], si B. Ricceri [84, 86], in conexiune cu proprietati Lipschitz ale operatorilor neliniari.

In aceasta teza, suntem interesati de studiul ecuatiei operatoriale semiliniare

$$Au = J'(u), \tag{0.0.1}$$

intr-un spatiu Hilbert $(H, (.,.)_H)$, unde $A$ este un operator liniar, pozitiv definit, iar termentul neliniar este derivata Fréchet a unei functionale $J$.

Cautam proprietati variationale ale solutiilor slabe $u \in H_A$, unde $H_A$ este spatiul energetic asociat operatorului $A$.

Ecuatia $(0.0.1)$ este echivalenta cu ecuatia de punct fix

$$u = T(u), \tag{0.0.2}$$

unde $T := A^{-1}J'$. Constructia functionalei asociate ecuatiei $(0.0.1)$ se bazeaza pe teoria operatorilor liniari, auto-adjuncti, pozitiv definiti in spatii Hilbert ( H. Brezis [15], H. Brezis si F. Browder [16], S. G. Michlin [53] ). Aceasta functionala este definita astfel

$$E : H_A \to \mathbb{R}, \quad E(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2{}_{H_A} - J(u). \tag{0.0.3}$$

In mod similar, discutam sistemul

$$\begin{cases} A_1 u = J_{11}(u,v) \\ A_2 v = J_{22}(u,v), \end{cases} \tag{0.0.4}$$

asociat a doi operatori liniar pozitiv definiti $A_1, A_2$, si a doua functionale $J_1, J_2$, unde prin $J_{11}(u,v), J_{22}(u,v)$ intelegem derivatele Fréchet ale lui $J_1(.,v)$, respectiv $J_2(u,.)$.

In continuare, prezentam cateva rezultate date in lucrarea R. Precup [77], pe care le vom aplica ecuatiei $(0.0.1)$ si respectiv sistemului $(0.0.4)$. In lucrarea R. Precup [77], s-a aratat ca unicul punct fix al unei contractii $T$ pe un spatiu Hilbert, care se identifica cu dualul sau, in cazul in care $T$ are forma variationala

$$T(u) = u - E'(u), \tag{0.0.5}$$

minimizeaza functionala $E$.

De asemenea, unicul punct fix $(u^*, v^*)$ al unei contractii Perov $(T_1(u,v), T_2(u,v))$, unde $T_1$ si $T_2$ se pot exprima astfel

$$T_1(u,v) = u - E_{11}(u,v) \tag{0.0.6}$$

$$T_2(u,v) = u - E_{22}(u,v), \tag{0.0.7}$$

este, sub anumite conditii, un punct de echilibru de tip Nash al perechii de functionale $(E_1, E_2)$, adica:

$$\begin{aligned} E_1(u^*, v^*) &= \min_u E_1(u, v^*) \\ E_2(u^*, v^*) &= \min_v E_2(u^*, v). \end{aligned}$$

Mai multe informatii despre punctele de echilibru de tip Nash, probleme relationate, diferite metode si aplicatii, se pot gasi in lucrarile A. Kristály, V. Radulescu si C. Varga [44], J. F. Nash [60], si S. Park [68].

In cazul sistemelor vom folosi o metoda vectoriala bazata pe matrici in loc de constante, si pe norme vectoriale, utilizata initial in A. I. Perov si A. V. Kibenko [71] pentru versiunea vectoriala a principiului contractiei, si care a fost extinsa in lucrarea R. Precup [74] in conexiune cu alte principii ale analizei neliniare.

Scopul nostru este de a dezvolta o teorie generala bazata pe studiul existentei si caracterizarii variationale ale solutiilor slabe ale ecuatiilor de tipul $(0.0.1)$ si sisteme de tipul $(0.0.4)$, si apoi de a aplica rezultatele abstracte la probleme specifice: probleme Dirichlet pentru ecuatii eliptice si sisteme, probleme eliptice sub conditii de nerezonanta, ecuatii si sisteme de ecuatii singulare de ordinul al doilea.

Motivati de numarul mare de aplicatii, facem un pas inainte si discutam cazul ecuatiei de punct fix $u = N(u)$, de aceasta data in contextul teoriei topologice a punctului fix. Presupunem ca operatorul $N$ este in conexiune cu functionala energie $E$, prin relatia

$$E'(u) = u - N(u)$$

in cazul spatiilor Hilbert si in mod corespunzator, prin relatia

$$E'(u) = J(u) - J(N(u))$$

in spatii Banach mai generale, unde $J$ este aplicatia de dualitate definita in Sectinea 5.3.

Prin abordarea noastra, comparativ cu teoremele clasice topologice de punct fix ale lui Schauder, Krasnoselskii, Darbo, si Sadovskii, o parte ale ipotezelor asupra operatorului $N$ este inlocuita de conditii cerute functionalei $E$.

**Structura tezei**

Teza se divide in 5 capitole, fiecare capitol continand multiple sectiuni, si este organizata in felul urmator.

## Capitolul 1: Preliminarii

In Sectiunea 1.1 reamintim cateva notiuni si rezultate de baza, mai exact: operatorul de superpozitie Nemytskii si proprietatile sale ( P. Jebelean [39], D. Pascali si S. Sburlan [69], R. Precup [76] ), principiul variational al lui Ekeland ( I. Ekeland [31, 32], D. G. de Figueiredo [33], M. Frigon [35, 36] ), matrici cu raza spectrala mai mica decat 1, sau matrici convergente la zero, si rolul acestora in studiul sistemelor ( A. I. Perov [70], R. Precup [74] ), cateva principii de punct fix din analiza neliniara: principiul contractiei lui Banach pe spatii metrice complete si terema punctului fix a lui Perov pentru operatori de tipcontractiv pe spatii metrice gemeralizate ( J. Dugunji si A. Granas [30], A. Granas si J. Dugunji [37], A. I. Perov [70], A. I. Perov si A. V. Kibenko [71], R. Precup [73], I. A. Rus [87, 88, 89] ), serii Fourier abstracte in spatii Hilbert si proprietatile acestora ( L. V. Kantorovich si G. P. Akilov [40], R. Precup [76] ).

In Sectiunea 1.2, prezentam notiunile de operator compact, operator complet continuu si cateva ditre propritatile acestora ( H. Brezis [14], K. Deimling [25], A. Granas si J. Dugunji [37], M. A. Krasnoselskii [43], R. Precup [73], E. Zeidler [97] ); de asemenea prezentam cateva dintre teoremele topologice de punct fix: Teorema de punct fix a lui Schauder pentru operatori compacti, principiul Leray-Schauder pentru operatori complet continui, contractii, si condensatori ( J. Leray si J. Schauder [49], D. O' Regan si R. Precup [66], R. Precup [75], J. Schauder [93] ), si teoremele de punct fix ale lui Krasnoselskii, Darbo, si Sadovskii ( G. Darbo [23], A. Granas si J. Dugunji [37], M. A. Krasnoselskii [42, 43], B. N. Sadovskii [91, 92] ).

Sectiunea $1.3$ contine caracterizarea variationala ale punctelor fixe pentru operatori de tip contractie, data in lucrarea R. Precup [77], care reprezinta punctul de start al prezentei teze.

## Capitolul 2: Ecuatii si sisteme de ecuatii operatoriale semiliniare cu neliniaritati de tip potential

In acest capitol, dezvoltam o teorie generala, abstracta pentru ecuatii si sisteme de ecuatii operatoriale semiliniare cu partea liniara data de operatori pozitiv definiti si neliniaritati de tip potential. De asemenea, prezentam aplicatii la ecuatii si sisteme de ecuatii eliptice.

Pentru inceput, suntem interesati de studiul ecuatiei operatoriale semiliniare $(0.0.1)$iar apoi, vom discuta cazul sistemelor de ecuatii $(0.0.4)$. In acest scop, vom folosi teoria ecuatiilor operatoriale dezvoltate in S. G. Michlin [53].

Interesul nostru in acest tip de ecuatii si sisteme este reprezentat de problema eliptica

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.0.8}$$

si in mod corespunzator, de urmatorul sistem eliptic

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,v) \text{ in } \Omega \\ -\Delta v = g(x,u,v) \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \partial\Omega \\ v = 0 \text{ pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.9}$$

unde $\Omega$ este o submultime deschisa si marginita a multimii $\mathbb{R}^n$.

De asemenea, problemele eliptice cu conditii la limita au reprezentat subiect de studiu pentru alti autori, precum G. Dinca, P. Jebelean si J. Mawhin [29], D. G. de Figueiredo [34], P. Jebelean [39], L. Nirenberg [61], si V. Radulescu [82].

In particular, vom obtine caracterizari variationale ale solutiilor slabe ale problemei Dirichlet problem $(0.0.8)$, si pentru sistemul $(0.0.9)$. Mai exact, vom da conditii astfel incat solutia problemei Dirichlet $(0.0.8)$ sa minimizzeze functionala energie asociata, si astfel incat solutia problemei corespunzatoare pentru sistemul $(0.0.9)$ sa fie punct de echilibru de tip Nash al perechii de functionale energie asociate. In cazul sistemelor vom adapta abordarea variationala pentru o singura ecuatie datorata autorilor C. Bereanu, P. Jebelean si J. Mawhin [10].

*

Acest capitol este organizat dupa cum urmeaza. In sectiunea $2.1$ aruncam o privire de ansamblu al capitolului iar in Sectiunea $2.2$ prezentam preliminarii aditionale necesare acestui capitol. In Sectiunea $2.3$, discutam cazul ecuatiei $(0.0.1)$, iar in Sectiunea $2.4$, obtinem rezultate teoretice pentru sistemul $(0.0.4)$. Mai departe, in Sectiunea $2.5$ aplicam primul rezultat abstract la problema eliptica $(0.0.8)$, iar in Sectiunea $2.6$ vom aplica cel de-al doilea rezultat abstract la sistemul $(0.0.9)$.

*

**Contributiile personale aduse la acest capitol** sunt: Teoremele 2.3.1, 2.4.1, 2.5.1, 2.6.1. Aceste rezultate sunt continute in articolele A. Budescu [17], si A. Budescu si R. Precup [19].

## Capitolul 3: Ecuatii semiliniare sub conditii de nerezonanta

In acest capitol, studiem caracterizarea variationala a solutiilor slabe pentru ecuatia semiliniara de forma

$$Au - cu = J'(u), \tag{0.0.10}$$

intr-un spatiu Hilbert $H$ cu conditia de *nerezonanta* $c \neq \lambda_j$, $j = 1, 2, ...$, unde $\lambda_j$ sunt valorile proprii ale operatorului $A$. Aici $A$ este un operator liniar pozitiv definit, indeplinind toate proprietatile cerute in Sectiunea 2.2.

Probleme de nerezonanta au fost studiate de numerosi autori, printre care H. Amann si E. Zehnder [2], R. P. Agarwal, D. O'Regan si R. Precup [7], D. G. de Figueiredo [34], J. Mawhin si J. R. Ward Jr. [50], D. Muzsi [56, 57], D. Muzsi si R. Precup [58, 59], D. O'Regan [63].

Rezultatul principal al acestui capitol este acela ca sub anumite ipoteze asupra functionalei $J \in C^1(H)$, daca $E$ este functionala energie asociata ecuatiei (0.0.10) data de

$$E(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H_A}^2 - \frac{c}{2}\|u\|_H^2 - J(u),$$

atunci orice solutie $u$ satisface $E(u) \leq E(u + w)$, pentru orice element $w$ ortogonal pe primii $k$ vectori proprii ai lui $A$.

Demonstratia se bazeaza pe aplicarea principiului lui Ekeland unei functionale alese in mod potrivit, si difera esential fata de demonstratia cazului particular $c = 0$, care a fost discutat in Sectiunea 2.3.

In particular, vom aplica teoria generala dezvoltata in Sectiunea 3.4 la problema eliptica

$$\begin{cases} -\Delta u - cu = f(x, u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.11}$$

in domeniul marginit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Rezultatul obtinut este urmatorul: daca $\lambda_k < c < \lambda_{k+1}$, pentru anumiti $k \in \{0, 1, ...\}$, si $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o functie care satisface conditiile Carathéodory si conditia Lipschitz

$$|f(x, u) - f(x, \bar{u})| \leq \alpha |u - \bar{u}|,$$

cu $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}}(\lambda_{k+1} - c)$, atunci pentru orice solutie slaba $u^* \in H_0^1(\Omega)$ a problemei (0.0.11), are loc urmatoarea proprietate variationala:

$$E(u^*) = \inf_{w \in H_k} E(u^* + w).$$

Aici $E$ este fuctionala energie asociata si

$$H_k = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : (u, \phi_j)_{H_0^1} = 0 \text{ pentru } j = 1, 2, ..., k \right\}.$$

*

Capitolul este organizat dupa cum urmeaza. Sectiunea 3.1 este devotata prezentarii generale, in timp ce in Sectiunea 3.2 prezentam teoria spectrala a operatorilor liniari, simetrici si complet continui ( H. Brezis [14], L. V. Kantorovich si G. P. Akilov [40], R. Precup [76] ). In Sectiunea 3.3, prezentam cateva rezultate auxiliare in legatura cu seriile Fourier, si anume Lema 3.3.1 si Lema 3.3.2, pe care le vom folosi pentru a enunta rezultatul principal al acestui capitol, Teorema 3.4.1. Mai mult, in Sectiunea 3.4, discutam cazul ecuatiei (0.0.10), si dezvoltam o teorie generala in cazul de nerezonanta, iar in Sectiunea 3.6, aplicam aceasta teorie problemei eliptice (0.0.11).

*

**Contributiile personale din acest capitol** sunt: Teoremele 3.4.1, 3.5.1, Lemele 3.3.1, 3.3.2. Aeste rezultate sunt continute in lucrarea A. Budescu si R. Precup [18].

## Capitolul 4: Proprietati variationale ale solutiilor ecuatiilor si sistemelor de ecuatii singulare de ordinul doi

Acest capitol contine rezultate care provin din teoria abtracta obtinuta in Sectiunea 2.3 pentru o ecuatie, si in Sectiunea 2.4 pentru sisteme. Mai exact, prezentam applicatii la probleme specifice: ecuatii diferentiale singulare de ordinul doi si sisteme de ecuatii de acest tip. Toate rezultatele din acest capitol se bazeaza pe teoria abstracta dezvoltata in Capitolul2.

Problemele singulare cu conditii la limita au fost studiate in mod intensiv in anii recenti. Facem referinta la bibliografiile lucrarilor R. P. Agarwal, R. P. Agarwal, D. O'Regan si R. Precup [7], K. Q. Lan [47], K. Q. Lan si J. R. L. Webb [48], D. O'Regan [62, 63, 64], D. O'Regan si R. P. Agarwal [65], I. Rachunkova [80], I. Rachunkova si J. Tomecek [81].

Mai intai, in Sectiunea 4.2, abordam cazul unei ecuatii, si vom prezenta rezultate pentru problema cu conditii la limita pentru o ecuatie de ordinul doi de tipul

$$\begin{cases} -\left(p(x)u'(x)\right)' = f\left(x, u\left(x\right)\right) & \text{a.e. } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{0.0.12}$$

Aici $p \in C[0,1] \cap C^1(0,1)$, $p > 0$ on $(0,1)$, se poate anula pentru $x = 0$ sau $x = 1$, ecuatia devenind singulara in raport cu variabila independenta $x$. Presupunem ca $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{p\left(x\right)} dx$ e finita. In acest caz, $H = L^2(0,1)$, si $Au = -\left(pu'\right)'$ cu

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u \in C[0,1] \cap C^1(0,1) : \ u(0) = u(1) = 0, \\ pu' &\in AC[0,1], \ (pu')' \in L^2(0,1)\}. \end{aligned}$$

De asemenea, spatiul energetic $H_A$ este spatiul Sobolev ponderat

$$H_0^1(0,1;p) = \left\{u \in AC[0,1] : \ u(0) = u(1) = 0, \ \sqrt{p}u' \in L^2(0,1)\right\}.$$

Pentru o prezentare de baza a spatiilor Sobolev, se poate consulta de exemplu cartea R. A. Adams [1].

Rezultatul obtinut afirma ca unica solutie a $(0.0.12)$ minimizeaza functionala energie asociata.

In continuare, extindem teoria la sisteme de forma

$$\begin{cases} -\left(p(x)u'(x)\right)' = f\left(x, u\left(x\right), v\left(x\right)\right) \\ -\left(q(x)v'(x)\right)' = g\left(x, u\left(x\right), v\left(x\right)\right) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \tag{0.0.13}$$

unde ambele functii $p$ si $q$ pot introduce singularitati.

In cazul sistemelor $(0.0.13)$, rezultatul nostru se refera la existenta unui punct de echilibru de tip Nash al perechii de functionale energie asociate.

*

Acest capitol este organizat dupa cum urmeaza. Sectiunea $4.1$ este devotata prezentarii generale, in timp ce in Sectiunea $4.2$ prezentam rezultatele principale, pentru inceput in cazul unei ecuatii, apoi in cazul sistemelor. In Sectiunea $4.3$, am dat doua exemple pentru a ilustra rezultatele obtinute in sectiunea precedenta.

*

**Contributiile personale din acest capitol** sunt: Teoremele 4.2.1, 4.2.2 si Exemplele 4.3.1, 4.3.2. Aceste rezultate sunt continute in lucrarea A. Budescu si R. Precup [19].

## Capitolul 5: Teoreme de punct fix sub conditii variationale si topologice combinate

In acest capitol, obtinem puncte fixe care minimizeaza functionalele asociate, de aceasta data in contextul teoriei topologice de punct fix. Vom folosi principiul variational al lui Ekeland si conditia de compacitate Palais-Smale garantata prin propietatile topologice ale operatorilor neliniari.

Mai precis, consideram ecuatia de punct fix

$$u = N(u) \tag{0.0.14}$$

intr-o submultime $D$ a spatiului Hilbert $H$ cu produsul scalar $(.,.)$ si norma $\|.\|$, care are o structura variationala in sensul ca exista o functionala $E \in C^1(H)$, astfel incat

$$u - N(u) = E'(u) \tag{0.0.15}$$

pentru orice $u \in D$.

Ideea pe care o urmarim este aceea de a obtine caracterizari variationale ale solutiilor ecuatiei $(0.0.14)$. Comparativ cu abordarea clasica (Schauder, Krasnoselskii, Darbo si Sadovskii), in rezultatele noastre vom inlocui o parte din ipoteze asupra operatorului $N$ cu conditii cerute functionalei energie $E$.

Intai, obtinem un rezultat pentru cazul in care $N$ este suma a doi operatori, si anume Teorema 5.2.1. Consecinta acesteia, Teorema 5.2.2, poate fi interpretata ca fiind versiunea variational-topologica a teoremei de punct fix a lui Darbo.

In cele ce urmeaza, generalizam Teorema 5.2.2 pentru operatori condensatori. Rezultatul, Teorema 5.2.3, este versiunea variational-topologica a teoremei de punct fix a lui Sadovskii.

Mai mult, in Sectiunea $5.3$, obtinem un rezultat variational-topologic in spatii Banach mai generale. Aici, consideram problema de punct fix $(0.0.14)$ intr-un spatiu Banach $X$ cu proprietati geometrice favorabil alese, care sunt exprimate in acord cu proprietatile aplicatiei de dualitate.

Aplicatiile de dualitate au devenit un instrument important in analiza functionala neliniara, iar in particular pentru chestiuni in conexiune cu operatori neliniari. Pentru mai multe detalii, recomandam spre citire urmatoarele titluri pentru studiul proprietatilor gemetrice ale spatiilor Banach spaces si multe altele: V. Barbu [9], I. Cioranescu [22], G. Dinca [27], G. Dinca si P. Jebelean [28], G. Dinca, P. Jebelean si J. Mawhin [29].

Rezultatul pe care il enuntam in Sectiunea $5.3$, si anume Teorema 5.3.1, este versiunea analoaga vectorial-topologica a teoremei de punct fix a lui Schauder.

La final, vom da o aplicatie la problema cu conditii la capetele frontierei

$$\begin{cases} -(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' = f(t, u(t)), & t \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{0.0.16}$$

folosind Teorema 5.3.1.

In acest caz, spatiul $X := W_0^{1,p}(0,1)$ este inzestrat cu norma energetica

$$\|u\|_{1,p} = \left( \int_0^1 |u'(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

si funnctionala energie este data de

$$E : W_0^{1,p}(0,1) \to \mathbb{R}, \;\; E(u) = \int_0^1 \left( \frac{1}{p} |u'(t)|^p - F(t, u(t)) \right) dt,$$

unde $F(t,\tau) = \displaystyle\int_0^\tau f(t,s)ds$.

De asemena, aplicatia de dualitate a spatiului $W_0^{1,p}(0,1)$ este functia

$$J : W_0^{1,p}(0,1) \to W^{-1,q}(0,1), \quad (1/p + 1/q = 1)$$

data de

$$J(u) = -(|u'|^{p-2}u')'.$$

Rezultatul obtinut afirma ca problema $(0.0.16)$ are o solutie $u \in W_0^{1,p}(0,1)$ cu $\|u\|_{1,p} < R$, unde $R > 0$ satisface

$$h(R) := \frac{R^p}{p} - \frac{a}{q} R^q - bR > 0,$$

care minimizeaza functionala energie $E$, pe bila inchisa centrata in origine si de raza $R$ din $W_0^{1,p}(0,1)$.

*

Capitolul acesta este organizat dupa cum urmeaza. In Sectiunea $5.1$ prezentam perspectiva de ansamblu, iar Sectiunea $5.2$ o devotam studiului problemei de punct fix $(0.0.14)$ in spatii Hilbert. In Sectiunea $5.3$, extindem teoria la spatii Banach mai generale, unde vom presupune ca aplicatia de dualitate $J$ este monovalenta, inversabila, si atat $J$ cat si $J^{-1}$ sunt continue. Sectiunea $5.4$ contine o aplicatie a teoriei generale dzvoltate in Sectiunea $5.3$ la problema $(0.0.16)$ cu conditii pe capetele frontierei.

*

**Contributiile personale din acest capitol** sunt: Teoremele 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3, 5.3.1, 5.4.1. Aceste rezultate sunt continute in lucrarea A. Budescu si R. Precup [20].

*

**Activitatea de cercetare a autorului**

Majoritatea rezultatelor prezentate in aceasta teza de doctorat sunt parte din urmatoarele lucrari:

- A. Budescu, *Semilinear operator equations and systems with potential-type nonlinearities*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. **59** (2014), 199–212, MR3229442.
- A. Budescu si R. Precup, *Variational properties of the solutions of semilinear equations under nonresonance conditions*, J. Nonlinear Convex Anal., **17**(2016), Issue 8, 1517-1530.
- A. Budescu si R. Precup, *Variational properties of the solutions of singular second-order differential equations and systems*, J. Fixed Point Theory Appl. **18** (2016)3, 505-518.
- A. Budescu si R. Precup, *Fixed point theorems under combined topological and variational conditions*, Results Math., **70**(2016), 3, 487–797.

*

**Cuvinte cheie si fraze:** Ecuatie eliptica, problema cu conditii la limita, punct fix, punct critic, punct de echilibru de tip Nash, ecuatie operatoriala semiliniara, valori proprii, nerezonanta, principiul variational al lui Ekeland, problema eliptica, ecuatie diferentiala singulara, operator neliniar compact, operator condensator.

# Capitolul 1

# Preliminarii

## 1.1 Notiuni si rezultate de baza

Scopul acestui capitol introductiv este de a prezenta cateva definitii si rezultate de baza pe care le vom folosi in cele ce urmeaza.

### 1.1.1 Principiul variational al lui Ekeland

In aceasta sectiune prezentam principiul variational al lui Ekeland, care este unul dintre cele mai frecvent aplicate rezultate ale analizei neliniare. Pentru mai multe detalii, a se vedea, de exemplu, I. Ekeland [31], E. Bishop si R. R. Phelps [11], J. Danes [24] si M. Frigon [36].

Vom aplica principiul variational al lui Ekeland in demonstratiile a divrse rezultate obtinute de-a lungul tezei.

Vom prezenta versiunea slaba a principiului variational al lui Ekeland, care este suficienta pentru contextul in care vom lucra.

Mai intai, sa ne reamintim faptul ca o functionala reala $E$ definita pe un spatiu metric $X$este *semicontinua inferior* daca multimea

$$(E \leq r) := \{u \in X : E(u) \leq r\}$$

este inchisa pentru orice $r \in \mathbb{R}$.

**Teorema 1.1.1** *Fie $(X, d)$ un spatiu metric complet si fie $E : X \to \mathbb{R}$ o functie semicontinua inferior si marginita inferior. Atunci date fiind $\epsilon > 0$ si $u_0 \in X$, exista un punct $u \in X$ astfel incat*

$$E(v) - E(u) + \epsilon d(u, v) \geq 0 \quad \textit{pentru oricare } v \in X, \tag{1.1.1}$$

$$E(u) \leq E(u_0) - \epsilon d(u, u_0). \tag{1.1.2}$$

**Corolarul 1.1.2** *Sub ipotezele Teoremei 1.1.1, pentru orice $\epsilon > 0$, exista un element $u \in X$ astfel incat* (1.1.1) *sa aiba loc si*

$$E(u) \leq \inf_X E + \epsilon.$$

**Corolarul 1.1.3** *Sub ipotezele Teoremei 1.1.1, daca $X$ este un spatiu Banach cu norma $\|\cdot\|$, si $E \in C^1(X)$, atunci exista un sir $(u_k)$ cu*

$$E(u_k) \to \inf_X E \quad si \quad E'(u_k) \to 0. \tag{1.1.3}$$

**Definitia 1.1.1** *Spunem ca functionala $E$ satisface conditia de compacitate* Palais-Smale *daca orice sir satisfacand*

$$E(u_k) \to c \quad si \quad E'(u_k) \to 0$$

*pentru orice $c \in \mathbb{R}$, are un subsir convergent.*

**Corolarul 1.1.4** *Under the assumptions of Corollary 1.1.3, if in addition $E$ satisfies the Palais-Smale condition, then there is a point $u \in X$ with*

$$E(u) = \inf_X E \quad and \quad E'(u) = 0.$$

### 1.1.2 Matrici cu raza spectrala mai mica decat unu

In continuare, vom prezenta notiunea de matrice cu raza spectrala mai mica decat unu, uneori numite matrici convergente la zero. Vom prezenta proprietatile lor de baza, iar in particular vom sublinia relatia dintre conceptul de matrice convergenta la zero si matrice inversa-pozitiva.

**Definitia 1.1.2** *O matrice patratica $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ se numeste* convergenta la zero *daca*

$$M^k \to 0 \quad atunci\ cand \quad k \to \infty,$$

*unde cu $0$ am notat matricea zero de ordin $n$.*

**Lema 1.1.1** *Fie $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:*

**(i)** *$M$ este o matrice convergenta la zero;*

**(ii)** *$I - M$ este nesingular si*

$$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \dots \tag{1.1.4}$$

*(unde $I$ reprezinta matricea unitate de acelasi ordin ca si $M$);*

**(iii)** *valorile proprii ale lui $M$ sunt localizate in interiorul discului unitate al planului complex (raza spectrala $\rho(M)$ este mai mica decat $1$);*

**(iv)** *$I - M$ este nesingulara si $(I - M)^{-1}$ are elemente pozitive (matricea $I - M$ este inversa-pozitiva).*

De notat ca, in acord cu echivalenta afirmatiilor $(i)$ si $(iv)$, o matrice $M$ este convergenta la zero daca si numai daca matricea $I - M$ este *inversa-pozitiva*.

De asemenea, folosind bine-cunoscutul concept, *raza spectrala* ( A. I. Perov [70], R. Precup [74], O. Bolojan-Nica [12] ), putem spune ca o matrice $M$ este convergenta la zero daca si numai daca $\rho(M) < 1$, unde raza spectrala $\rho(M)$ se defineste astfel

$$\rho(M) = \max\left\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C} \text{ este o valoare proprie a lui } M\right\}.$$

De notat ca pentru o matrice patratica de ordinul 2

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}_+),$$

are loc $\rho(M) < 1$ daca si numai daca

$$a + d < \min\{2, 1 + ad - bc\} \tag{1.1.5}$$

( a se vedea O. Bolojan and R. Precup [13] ). Facem referire la R. Precup [74], pentru un studiu amanuntit despre rolul matricilor cu raza spectrala mai mica decat unu in studiul sistemelor de ecuatii operatoriale semiliniare. In lucrarea mentionata, autorul subliniaza de asemenea avantajul utilizarii normelor vectoriale, fata de normele scalare.

Cateva dintre rezultatele care urmeaza a fi prezentate see notiunea de *contractie generalizata* in sensul lui Perov.

Fie $(X, d)$ un spatiu metric generalizat cu $d : X \times X \to \mathbb{R}^n$.

**Definitia 1.1.3** *Un operator $T : X \to X$ se numeste* contractie generalizata *in raport cu metrica vectoriala $d$, daca exista o matrice convergenta la zero $M$ de ordinul $n$ astfel incat*

$$d(T(u), T(v)) \le M d(u, v)$$

*pentru orice $u, v \in X$.*

Matricea $M$ se numeste *matrice Lipschitz*.

Aceasta notiune se foloseste in versiunea vectoriala a principiului contractiei lui Banach, care se datoreaza lui A. I. Perov [70].

## 1.2 Teoreme topologice de punct fix

In aceasta sectiune prezentam cateva rezultate fundamentale topologice din analiza neliniara, pe care le vom folosi pe parcursul prezentei teze.

Teorema de punct fix conectata la conceptul de operator complet continuu este *teorema de punct fix a lui Schauder.* Urmatoarele doua teoreme sunt cunoscute sub denumirea de teoremele de punct fix ale lui Schauder ( a se vedea J. Schauder [93]). In aplicatii a doua teorema este mai folositoare.

**Teorema 1.2.1** ***(Teorema de punct fix a lui Schauder)*** *Fie $X$ un spatiu Banach, $K \subset X$ o multime nevida, convexa, compacta si fie*

$$N : K \to K$$

*un operator continuu. Atunci $N$ are cel putin un punct fix.*

**Teorema 1.2.2** ***(Teorema de punct fix a lui Schauder)*** *Fie $X$ un spatiu Banach, $D \subset X$ o multime nevida, convexa, marginita inchisa si fie*

$$N : D \to D$$

*un operator complet continuu. Atunci $N$ are cel putin un punct fix.*

### 1.2.1 Teoremele de punct fix ale lui Krasnoselskii, Darbo si Sadovskii

Teoremele topologice de punct fix care urmeaza, vor fi utilizate in Capitolul 5. Vom incepe cu cateva notiuni si rezultate preliminare.

Un rezultat care unifica teoremele de punct fix ale lui Banach si Schauder este urmatorul.

**Teorema 1.2.3** ***(Krasnoselskii)*** *Daca $D \subset X$ este o multime nevida, convex, marginita inchisa, $T : D \to X$ un operator contractiv, $S : D \to X$ un operator compact, si*

$$T(D) + S(D) := \{T(u) + S(v) : \ u, \ v \in D\} \subset D,$$

*atunci exista cel putin un $u \in D$ astfel incat $N(u) = u$, unde $N := T + S$.*

In aplicatii, unul din dezavantajele folosirii teoremei de punct fix precedente este conditia de invarianta $N(D) \subset D$. Principiul lui Leray-Schauder ( a se vedea de exemplu J. Leray si J. Schauder [49] ) face posibila evitarea unei astfe de conditii si cere in schimb faptul ca o conditie pe frontiera sa fie satisfacuta.

**Teorema 1.2.4** ***(Principiul lui Leray-Schauder)*** *Fie $X$ un spatiu Banach. De asemenea, fie $K \subset X$ o multime inchisa , convexa, $U \subset K$ o multime deschisa marginita in $K$ si $u_0 \in U$ un element fixat. Notam cu $\partial U$ frontiera multimii $U$ in raport cu $K$. Presupunem ca operatorul $N : \overline{U} \to K$ este compact si satisface conditia pe frontiera*

$$u \neq (1 - \lambda)u_0 + \lambda N(u) \tag{1.2.1}$$

*pentru orice $u \in \partial U$ si $\lambda \in (0, 1)$. Atunci $N$ are cel putin un punct fix in $\overline{U}$.*

Pentru demonstratiile Teoremelor 1.2.1, 1.2.2, 1.2.4 a se vedea, de exemplu R. Precup [73].

Fie $\mathcal{P}$ multimea tuturor submultimilor marginite ale lui $X$. Notam cu $\alpha$ *masura de necompacitate Kuratowski* pe $X$, adica,

$$\alpha(M) = \inf\{d > 0 : M \text{ admite o acoperire finita de multimi de diametru } \leq d\}, \tag{1.2.2}$$

pentru orice $M \in \mathcal{P}$.

Sa reamintim cateva proprietati de baza a masurii de necompacitate Kuratowski( A. Ambrosetti [3], G. Darbo [23], K. Deimling [25], J. Dugunji si A. Granas [30], J. K. Hale si S. M. V. Lunel [38], K. Kuratowski [46] ):

**(a)** $\alpha(M) = 0$ daca si numai daca $M$ este o multime relativ compacta;

**(b)** $\alpha(M_1 \cup M_2) = \max\{\alpha(M_1), \alpha(M_2)\}$;

**(c)** $\alpha(\text{conv } M) = \alpha\{M\} = \alpha\left(\overline{M}\right)$.

Un operator continuu $N : D \subset X \to X$ se numeste

**(a)** de *tip Krasnoselskii*, daca $N = S + T$, unde $S$ este complet continuu si $T$ este un operator contractiv;

**(b)** un operator $k$ *contractiv* (de *tip Darbo*) pentru anumiti $k \in [0, 1)$ , daca

$$\alpha(N(M)) \leq k\alpha(M), \tag{1.2.3}$$

pentru orice $M \subset D$ marginita;

**(c)** un *operator condensator*, daca

$$\alpha(N(M)) < \alpha(M), \tag{1.2.4}$$

pentru orice $M \subset D$ marginita, cu $\alpha(M) > 0$.

In mod evident, fiecare functie complet continua este de tip Krasnoselskii si fiecare functie de tip Krasnoselskii este un operator contractiv. De asemenea, orice operator contractiv este un operator condensator.

Inlocuind in Teorema 1.2.4 operatorul complet continuu $T$ cu o functie de tip Krasnoselskii, cu un operator contractiv, sau un operator condensator, Teorema 1.2.4 devine, mai general, mai general principiul Leray-Schauder pentru functii de tip Krasnoselskii ,pentru contractii, respectiv pentru operatori condensatori.

Notiunilor de operator de tip Krasnoselskii, operator contractiv si operator condensator, putem asocia Teorema 1.2.3 si urmatoarele generalizari ale teoremei de punct fix ale lui Schauder ( a se vedea, de exemplu M. A. Krasnoselkii [43], G. Darbo [23], B. N. Sadovskii [91, 92] ).

**Teorema 1.2.5** ***(Teorema de punct fix a lui Darbo)*** *Fie $X$ un spatiu Banach. Daca $D \subset X$ este o multime nevida, convexa, marginita inchisa si $N : D \to D$ este un operator $k$-contractiv, atunci exista cel putin un $u \in D$ astfel incat $N(u) = u$.*

**Teorema 1.2.6** ***(Teorema de punct fix a lui Sadovskii)*** *Fie $X$ un spatiu Banach. Daca $D \subset X$ este o multime nevida, convexa, marginita inchisa si $N : D \to D$ este un operator condensator, atunci exista cel putin un $u \in D$ astfel incat $N(u) = u$.*

## 1.3 Proprietati variationale pentru operatori contractivi

In aceasta sectiune, sumarizam rezultatele abstracte din lucrarea R. Precup [77], in legatura cu caracterizarea variationala a punctelor fixe ale operatorilor de tip contractiv, care reprezinta punctul de start al prezentei teze.

Primul rezultat se refera la contractii uzuale pe un spatiu Hilbert.

**Teorema 1.3.1** ***(R. Precup** [77])* *Fie $(X, (.,.))$ un spatiu Hilbert identificat cu dualul sau si $T : X \to X$ o contractie cu unicul punct fix $u^*$ (garantatde principiul contractiei lui Banach). Daca exista o functionala $E$ de clasa $C^1$ marginita inferior astfel incat*

$$E'(u) = u - T(u) \tag{1.3.1}$$

*pentru orice $u \in X$, atunci $u^*$ minimizeaza functionala $E$, adica*

$$E(u^*) = \inf_X E.$$

Urmatorul rezultat din lucrarea R. Precup [77] este despre sisteme de forma

$$\begin{cases} u = T_1(u,v) \\ v = T_2(u,v), \end{cases} \tag{1.3.2}$$

unde $u \in X_1$, $v \in X_2$. In acest caz, in loc de constante Lipschitz, vom folosi matrici.

Referitor la sistemul (1.3.2), presupunem ca $(X_i, \|\cdot\|_i)$, $i = 1, 2$, sunt spatii Hilbert identificate cu dualul lor si notam cu $X := X_1 \times X_2$.

De asemenea, presupunem ca fiecare ecuatie a sistemului are o forma variationala, adica, exista functionalele continue

$$E_1, E_2 : X \to \mathbf{R},$$

astfel incat $E_1(.,v)$ sa fie diferentiabila in sens Fréchet pentru orice $v \in X_2$, $E_2(u,.)$ sa fie diferentiabila in sens Fréchet pentru orice $u \in X_1$, si

$$\begin{cases} E_{11}(u,v) = u - T_1(u,v) \\ E_{22}(u,v) = v - T_2(u,v). \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Aici $E_{11}(.,v), E_{22}(u,.)$ sunt derivatele Fréchet ale lui $E_1(.,v)$, respectiv $E_2(u,.)$,.

Urmatoarea teorema ne ofera o caracterizare variationala a punctului fix a unei contractii Perov, fiind versiunea vectoriala a Teoremei 1.3.1.

**Teorema 1.3.2** ***(R. Precup** [77]) Presupunem ca au loc conditiile de mai jos. In plus, presupunem ca $E_1(.,v)$ si $E_2(u,.)$ sunt marginite inferior pentru orice $u \in X_1$, $v \in X_2$, si ca exista $R$, $c > 0$ astfel incat una din urmatoarele conditii au loc:*

$$\begin{aligned} E_1(u,v) &\geq \inf_{X_1} E_1(.,v) + c \;\; \textit{pentru } |u|_1 \geq R \textit{ si } v \in X_2, \\ E_2(u,v) &\geq \inf_{X_2} E_2(u,.) + c \;\; \textit{pentru } |v|_2 \geq R \textit{ si } u \in X_1. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

*Atunci punctul fix $(u^*, v^*)$ al $T_1, T_2)$ (garantat de teorema de punct fix a lui Perov) este un punct de echilibru de tip Nash al perechii de functionale $(E_1, E_2)$, adica*

$$\begin{aligned} E_1(u^*, v^*) &= \inf_{X_1} E_1(., v^*) \\ E_2(u^*, v^*) &= \inf_{X_2} E_2(u^*, .). \end{aligned}$$

Cateva aplicatii ale Teoremelor 1.3.1 si 1.3.2 la ecuatii diferentiale au fost date in R. Precup [77]. De asemenea, extensii ale acestor rezultate la functionale nenetede se pot gasi in R. Precup [78].

# Capitolul 2

# Ecuatii si sisteme de ecuatii operatoriale semiliniare cu neliniaritati de tip potential

## 2.1 Prezentare generala

Acest capitol se bazeaza pe lucrarea A. Budescu [17], a carui motivatie a fost articolul R. Precup [77].

Rezultatele principale se refera la proprietatile variationale ale solutiilor ecuatiilor semiliniare avand forma

$$Au = J'(u), \tag{2.1.1}$$

unde $A$ este un operator liniar, simetric, pozitiv definit, iar termenul neliniar este derivata Fréchet a unei functionale $J$.

## 2.2 Teoria variationala a ecuatiilor operatoriale liniare

In aceasta sectiune, prezentam teoria variationala a ecuatiilor operatoriale liniare din S. G. Michlin [53, 54]( a se vedea de asemenea si D. Muzsi si R. Precup [58] ) pentru ecuatii liniare asociate operatorilor pozitiv definiti. Teoria va fi folosita in urmatoarele sectiuni ale tezei.

Fie $H$ un spatiu Hilbert cu produsul scalar notat cu $(.,.)_H$, si norma $\|.\|_H$. Fie

$$A : D(A) \to H$$

un operator liniar, simetric si dens definit.

Reamintim ca un operator $A$ se numeste *simetric* daca

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H,$$

pentru orice $u, v \in D(A)$.

Un operator simetric definit peste tot este *auto-adjunct*.

Operatorul simetric $A$ se numeste *positiv definit* daca

$$\inf_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \frac{(Au, u)_H}{\|u\|_H^2} > 0. \tag{2.2.1}$$

Operatorul simetric $A$ se numeste *pozitiv definit* daca exista o constanta $\gamma > 0$ astfel incat

$$(Au, u)_H \geq \gamma^2 \|u\|_H^2 \tag{2.2.2}$$

pentru orice $u \in D(A)$.

Pentru un asemenea operator liniar, inzestram subspatiul liniar $D(A)$ a lui $H$ cu functionala biliniara:

$$(u, v)_{H_A} = (Au, v)_H$$

pentru orice $u, v \in D(A)$.

Se poate verifica ca $(.,.)_{H_A}$ este un produs scalar. In consecinta, $D(A)$ inzestrat cu produsul scalar $(.,.)_{H_A}$ este un spatiu pre-hilbertian. Acest spatiu poate sa nu fie complet. Completatul $H_A$ a spatiului $(D(A), (.,.)_{H_A})$ se numeste *spatiul energetic* al operatorului $A$.

Prin constructie, $D(A) \subset H_A \subset H$ cu incluziuni dense.

Folosim acelasi simbol $(.,.)_{H_A}$ pentru a nota produsul scalar al lui $H_A$. Norma corespunzatoare

$$\|u\|_{H_A} = \sqrt{(u, u)_{H_A}}$$

se numeste *norma energetica* asociata operatorului $A$.

Daca $u \in D(A)$, atunci $\|u\|_{H_A} = \sqrt{(Au, u)_H}$, iar in (2.2.2), avem *inegalitatea lui Poincaré*

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_{H_A}, \tag{2.2.3}$$

pentru orice $u \in D(A)$. Prin densitate inegalitatile de mai sus se extind la spatiul $H_A$.

Fie $H'_A$ spatiul dual al lui $H_A$. Daca facem identificarea lui $H$ cu dualul sau, atunci din incluziunea $H_A \subset H$ avem $H \subset H'_A$.

Atasam operatorului $A$ urmatoarea problema

$$Au = f, \quad u \in H_A \tag{2.2.4}$$

unde $f \in H'_A$.

Printr-o *solutie slaba* a (2.2.4) intelegem un element $u \in H_A$ cu

$$(u, v)_{H_A} = (f, v) \tag{2.2.5}$$

pentru orice $v \in H_A$, unde notatia $(f, v)$ semnifica valoarea functionalei $f$ pe elementul $v$.

**Teorema 2.2.1** *Pentru orice $f \in H'_A$ exista o unica solutie slaba $u \in H_A$ a problemei* (2.2.4).

Acest rezultat ne permite sa definim operatorul solutie $A^{-1}$ asociat operatorului $A$. Astfel,

$$A^{-1} : H'_A \to H_A \, ,$$

$$A^{-1} f = u, \tag{2.2.6}$$

unde $u$ este unica solutie slaba a problemei (2.2.4).

Operatorul $A^{-1}$ este bine definit de catre teorema precedenta, si avem

$$(A^{-1} f, v)_{H_A} = (f, v) \tag{2.2.7}$$

pentru orice $v \in H_A$, si $f \in H'_A$.

De asemenea, operatorul $A^{-1}$ este o izometrie intre $H'_A$ si $H_A$, adica,

$$\|A^{-1} f\|_{H_A} = \|f\|_{H'_A} \tag{2.2.8}$$

pentru orice $f \in H'_A$.

Mentionam de asemenea si inegalitatea lui Poincaré pentru incluziunea $H \subset H'_A$,

$$\|u\|_{H'_A} \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_H, \qquad u \in H. \tag{2.2.9}$$

Folosind (2.2.8) si (2.2.9), observam faptul ca, daca $f \in H$, atunci

$$\|A^{-1} f\|_{H_A} = \|f\|_{H'_A} \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_H. \tag{2.2.10}$$

Pentru $f \in H'_A$, consideram functionala

$$E : H_A \to \mathbb{R},$$
$$E(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2{}_{H_A} - (f, u).$$

Functional $E$ este diferentiabila Fréchet, si pentru orice $u, v \in H_A$, avem:

$$(E'(u), v) = \lim_{t \to 0} \frac{E(u + tv) - E(u)}{t} = (u, v)_{H_A} - (f, v) = \left(u - A^{-1} f, v\right)_{H_A}. \tag{2.2.11}$$

Acum, (2.2.11) arata ca $u \in H_A$ este o solutie slaba a (2.2.4) daca si numai daca $u$ este *punct critic* pentru $E$, adica,

$$E'(u) = 0.$$

## 2.3 Minimizant pentru operatori de tip contractiv

In aceasta sectiune, prezentam formularea variationala a ecuatiei semiliniare

$$Au = J'(u), \tag{2.3.1}$$

si enuntam primul rezultat al acestui capitol referitor la proprietatea variationala a solutiei ecuatiei (2.3.1).

Fie $H$ un spatiu Hilbert cu produs scalar notat cu $(.,.)_H$, si norma $\|.\|_H$. Let $A$ be a symmetric, linear, and densely defined operator as in the previous section, and let

$$J : H \to \mathbb{R}$$

be a $C^1$- functional.

Cautam solutii slabe $u \in H_A$ entru ecuatia semiliniara (2.3.1), unde $H_A$ este spatiul energetic definit in Sectiunea 2.2.

Ecuatia (2.3.1) este echivalenta cu

$$u = A^{-1}J'(u),$$

adica, cu ecuatia de punct fix

$$u = T(u),$$

unde $T := A^{-1}J'$.

Asociem ecuatiei (2.3.1) functionala

$$E : H_A \to \mathbb{R}, \quad E(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2{}_{H_A} - J(u). \tag{2.3.2}$$

Avem urmatorul rezultat.

**Teorema 2.3.1** *(**A. Budescu and R. Precup** [19]) Presupunand ca precedentele conditii asupra lui $A$ si $J$ au loc, in plus, presupunand ca urmatoarele conditii sunt satisfacute:*

**(i)** *exista $\alpha < \gamma^2$ cu*

$$\|J'(u) - J'(v)\|_H \leq \alpha\|u - v\|_H \tag{2.3.3}$$

*pentru orice $u, v \in H$ ;*

**(ii)** *exista $a < \frac{1}{2}$, si $b, c \in \mathbb{R}_+$ astfel incat*

$$J(u) \leq a\|u\|^2{}_{H_A} + b\,\|u\|_{H_A} + c \tag{2.3.4}$$

*pentru orice $u \in H_A$.*

*Atunci exista o unica solutie $u^* \in H_A$ a ecuatiei (2.3.1) astfel incat*

$$E(u^*) = \inf_{H_A} E.$$

## 2.4 Puncte de echilibru de tip Nash pentru contractii in sens Perov

Aceasta sectiune este devotata studiului sistemelor de tipul

$$\begin{cases} A_1 u = J_{11}(u,v) \\ A_2 v = J_{22}(u,v), \end{cases} \tag{2.4.1}$$

unde $A_1, A_2$ sunt operatori liniari, simetrici si pozitiv definiti pe doua spatii Hilbert $H_1$, $H_2$. Notam cu $H := H_1 \times H_2$.

De asemenea, $J_1, J_2 : H \to \mathbb{R}$ sunt doua functionale de clasa $C^1$ si prin $J_{11}(u,v)$ ne referim la derivata partiala a lui $J_1$ in raport cu $u$, si prin $J_{22}(u,v)$ intelegem derivata partiala a lui $J_2$ in raport cu $v$.

Exprimam sistemul de mai sus sub forma unei ecuatii de punct fix in felul urmator

$$w = T(w) \tag{2.4.2}$$

pentru operatorul neliniar $T = (T_1, T_2)$, unde $w = (u,v)$. Operatorii $T_1$ si $T_2$ sunt definiti dupa cum urmeaza

$$T_1 : H_{A_1} \times H_{A_2} \to H_{A_1}, \quad T_1(u,v) = A_1^{-1} J_{11},$$

respectiv

$$T_2 : H_{A_1} \times H_{A_2} \to H_{A_2}, \quad T_2(u,v) = A_2^{-1} J_{22}.$$

Astfel, (2.4.2) poate fi rescris in mod explicit in felul urmator

$$\begin{cases} u = T_1(u,v) \\ v = T_2(u,v). \end{cases} \tag{2.4.3}$$

Aceasta structura vectoriala a (2.4.2) permite celor doi termeni $T_1$ si $T_2$ sa se comporte diferit unul de celalalt, si de asemenea in raport cu cele doua variabile. Aceasta presupune uzul matricilor in loc de constante, atunci cand conditiile Lipschitz se impun operatorilor $T_1$ si $T_2$.

In continuare, vom descrie structura variationala a fiecarei ecuatii componente a sistemului (2.4.3). Asociem ecuatiilor sistemului (2.4.3) functionalele

$$E_1, E_2 : H_{A_1} \times H_{A_2} \to \mathbb{R}$$

definite de

$$\begin{aligned} E_1(u,v) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_{A_1}} - J_1(u,v) \\ E_2(u,v) &= \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_{A_2}} - J_2(u,v). \end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned} E_{11}(u,v) &= u - T_1(u,v) \\ E_{22}(u,v) &= v - T_2(u,v), \end{aligned}$$

sau in mod echivalent

$$\begin{aligned} E_{11}(u,v) &= 0 \\ E_{22}(u,v) &= 0, \end{aligned}$$

unde $E_{11}(.,v)$, $E_{22}(u,.)$ sunt derivatele Fréchet ale lui $E_1(.,v)$, respectiv $E_2(u,.)$. Rezultatul principal al acestei sectiuni este urmatoarea teorema.

**Teorema 2.4.1** *(**A. Budescu and R. Precup** [19]) Fie ca precedentele conditii referitoare la $A_1, A_2$, si $J_1, J_2$ sa aiba loc. In plus, presupunem ca urmatoarele conditii sunt satisfacute:*

**(i)** *exista $m_{ij} \in \mathbb{R}_+$ $(i,j=1,2)$ astfel incat*

$$\begin{aligned} \|J_{11}(u,v) - J_{11}(\bar{u},\bar{v})\|_{H_1} &\le m_{11}\|u-\bar{u}\|_{H_1} + m_{12}\|v-\bar{v}\|_{H_2} \\ \|J_{22}(u,v) - J_{22}(\bar{u},\bar{v})\|_{H_2} &\le m_{21}\|u-\bar{u}\|_{H_1} + m_{22}\|v-\bar{v}\|_{H_2} \end{aligned}$$

*pentru orice $u, \bar{u} \in H_1$, si $v, \bar{v} \in H_2$, si raza spectrala a matricii*

$$M = \begin{bmatrix} \dfrac{m_{11}}{\gamma_1^2} & \dfrac{m_{12}}{\gamma_1^2} \\ \\ \dfrac{m_{21}}{\gamma_2^2} & \dfrac{m_{22}}{\gamma_2^2} \end{bmatrix}$$

*este strict mai mica decat unu;*

**(ii)** *exista $a_1, a_2 < 1/2$, si $b_1, b_2, c_1, c_2 \ge 0$ astfel incat*

$$\begin{aligned} J_1(u,v) &\le a_1\|u\|_{H_{A_1}}^2 + b_1\|u\|_{H_{A_1}} + c_1 \\ J_2(u,v) &\le a_2\|v\|_{H_{A_2}}^2 + b_2\|u\|_{H_{A_2}} + c_2 \end{aligned}$$

*pentru orice $u \in H_{A_1}, v \in H_{A_2}$;*

**(iii)** *exista $R, d > 0$ astfel incat una dintre urmatoarele conditii au loc:*

$$\begin{aligned} E_1(u,v) &\ge \inf_{H_{A_1}} E_1(.,v) + d \quad \textit{for} \quad \|u\|_{H_{A_1}} \ge R \ \textit{, and } v \in H_{A_2} \\ E_2(u,v) &\ge \inf_{H_{A_2}} E_2(u,.) + d \quad \textit{for} \quad \|v\|_{H_{A_2}} \ge R \ \textit{, and } u \in H_{A_1}. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

*Atunci exista o unica solutie* $(u^*, v^*) \in H_{A_1} \times H_{A_2}$ *a sistemului* (2.4.1), *care este* punct de echilibru de tip Nash *a perechii de functionale* $(E_1, E_2)$, *adica,*

$$\begin{aligned} E_1(u^*, v^*) &= \inf_{H_{A_1}} E_1(., v^*) \\ E_2(u^*, v^*) &= \inf_{H_{A_2}} E_2(u^*, .). \end{aligned}$$

## 2.5 Aplicatie la ecuatii eliptice

In aceasta sectiune, prezentam o aplicatie a Teoremei 2.3.1 la ecuatii eliptice. Mai exact, avem problema Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) \ \text{ in } \ \Omega \\ \quad u = 0 \ \text{ pe } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Aici $\Omega$ este o submultime deschisa marginita a lui $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $\Delta$ este Laplacianul.

In acest caz $H = L^2(\Omega)$, si $A = -\Delta$ cu

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

De asemenea, $H_A = H_0^1(\Omega)$ cu produsul scalar

$$(u, v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x,$$

si norma

$$\|u\|_{H_0^1} = \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Functionala $J : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ este data de

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x)) dx,$$

unde

$$F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds.$$

Pe de alta parte $\gamma = \sqrt{\lambda_1}$, unde $\lambda_1$ este prima valoare proprie a problemei Dirichlet pentru $-\Delta$ ( a se vedea de exemplu H. Brezis [15], J. Mawhin si M. Willem [51], R. Precup [76] ).

Astfel functionala energie asociata ecuatiei (2.5.1) este urmatoarea

$$E : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$E(u) = \int_\Omega \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x, u(x)) \right) \mathrm{d}x.$$

Problema (2.5.1) este echivalenta cu problema de punct fix

$$u = (-\Delta)^{-1} N_f(u),$$

unde $N_f$ este operatorul Nemytskii de superpozitie presupun a actiona de la $L^2(\Omega)$ la $L^2(\Omega)$,

$$N_f(u)(x) = f(x, u(x))$$

( mai multe detalii in Sectiunea 1.1 ).

De notat ca functionala $J$ este de clasa $C^1$ pe $L^2(\Omega)$,

$$J' = N_f,$$

si

$$E'(u) = u - (-\Delta)^{-1} N_f(u).$$

**Teorema 2.5.1** *(**A. Budescu** [17]) Presupunem ca urmatoarele conditii sunt satisfcute:*

**(i)** *$f$ satisfice conditiile Carathéodory, adica, $f(.,y) : \Omega \to \mathbb{R}$ este masurabila pentru orice $y \in \mathbb{R}$, si $f(x,.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continua pentru aproape orice $x \in \Omega$;*

**(ii)** *$f(.,0) \in L^2(\Omega)$;*

**(iii)** *exista $\alpha \in [0, \lambda_1)$ astfel incat*

$$|f(x,u) - f(x,\bar{u})| \leq \alpha |u - \bar{u}|$$

*pentru orice $u, \bar{u} \in \mathbb{R}$, si aproape orice $x \in \Omega$.*

*Atunci* $(2.5.1)$ *are o unica solutie slaba $u^* \in H_0^1(\Omega)$, si*

$$E(u^*) = \inf_{H_0^1(\Omega)} E.$$

## 2.6 Aplicatie la sisteme eliptice

In aceasta sectiune, prezentam o aplicatie a Teoremei 2.4.1 pentru sistemul eliptic

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,v) \text{ in } \Omega \\ -\Delta v = g(x,u,v) \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \partial\Omega \\ v = 0 \text{ pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6.1}$$

intr-un domeniu marginit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, unde

$$f, g : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Aceasta problema este echivalenta cu sistemul

$$\begin{cases} u = (-\Delta)^{-1} f(., u, v) \\ v = (-\Delta)^{-1} g(., u, v). \end{cases}$$

O pereche $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ este o solutie a $(2.6.1)$ daca si numai daca

$$\begin{cases} E_{11}(u, v) = 0 \\ E_{22}(u, v) = 0, \end{cases}$$

unde $E_1, E_2 : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ sunt definite de

$$\begin{aligned} E_1(u, v) &= \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - \int\limits_\Omega F(x, u(x), v(x))\mathrm{d}x, \\ E_2(u, v) &= \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \int\limits_\Omega G(x, u(x), v(x))\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

si

$$F(x, t, s) = \int\limits_0^t f(x, \tau, s)\mathrm{d}\tau, \;\; G(x, t, s) = \int\limits_0^s g(x, t, \tau)\mathrm{d}\tau.$$

Functionalele $E_1(., v)$ si $E_2(u, .)$ sunt de clasa $C^1$ pentru orice $u$, respectiv $v$ fixate,
, si

$$\begin{aligned} E_{11}(u, v) &= u - (-\Delta)^{-1} f(., u, v) \\ E_{22}(u, v) &= v - (-\Delta)^{-1} g(., u, v). \end{aligned}$$

Din nou aici $E_{11}\,(., v)\,, E_{22}\,(u, .)$ sunt derivate Fréchet ale lui $E_1\,(., v)$, respectiv $E_2\,(u, .)$.

Vom spune ca o functie $H : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de *tip coerciv* daca functionala

$$\begin{gathered} \Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \Phi(v) = \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega H(x, v(x))\mathrm{d}x \end{gathered}$$

este coercivea, adica,

$$\Phi(v) \to \infty \quad \text{cand} \quad \|v\|_{H_0^1} \to \infty.$$

Enuntam rezultatul principal al acestei sectiuni.

**Teorema 2.6.1** *(**A. Budescu** [17]) Fie $f, g : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$, $g = g(x, y, z)$ satisfac conditiile Carathédory. Presupunem ca $f(., 0, 0)$, $g(., 0, 0) \in L^2(\Omega)$, si ca urmatoarele conditii sunt indeplinite:*

**(i)** *exista $m_{ij} \in \mathbb{R}_+$ $(i, j = 1, 2)$ cu:*

$$\begin{cases} |f(x, u, v) - f(x, \bar{u}, \bar{v})| \le m_{11}|u - \bar{u}| + m_{12}|v - \bar{v}| \\ |g(x, u, v) - g(x, \bar{u}, \bar{v})| \le m_{21}|u - \bar{u}| + m_{22}|v - \bar{v}| \end{cases} \tag{2.6.2}$$

*pentru orice $u, \bar{u}, v, \bar{v} \in \mathbb{R}$, si aproape orice $x \in \Omega$;*

**(ii)** *exista $H, H_1 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu*

$$H_1(x, v) \le G(x, u, v) \le H(x, v), \tag{2.6.3}$$

*pentru orice* $u, v \in \mathbb{R}$, *si aproape orice* $x \in \Omega$, *unde* $H$ *si* $H_1$ *sunt de tip coerciv.*
*Daca matricea*

$$M = \frac{1}{\lambda_1} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

*e convergenta la zero, atunci* $(2.6.1)$ *are o unica solutie* $(u^*, v^*) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ *care este un punct de echilibru de tip Nash a perechii de functionale energie* $(E_1, E_2)$ *asociate problemei* $(2.6.1)$.

# Capitolul 3

# Ecuatii semiliniare sub conditii de nerezonanta

## 3.1 Prezentare generala

Acest capitol este bazat pe articolul A. Budescu si R. Precup [18], unde avem de a face cu solutii slabe ale ecuatiei operatoriale semiliniare

$$Au - cu = J'(u) \tag{3.1.1}$$

intr-un spatiu Hilbert. Aici, la fel ca si in sectiunile anterioare, $A$ este un operator liniar pozitiv definit, si $J : H \to \mathbb{R}$ este o $C^1$-functionala.

Vom presupune ca ecuatia $(3.1.1)$ este sub conditia de nerezonanta, adica $c$ nu este o valoarea proprie a lui $A$.

In cadrul unor ipoteze asupra lui $J$, daca $E$ este functionala energie a ecuatiei $(3.1.1)$, si $c$ se afla intre doua valori proprii $\lambda_k$ si $\lambda_{k+1}$, atunci pentru orice solutie $u$ a ecuatiei, obtinem urmatoarea proprietate variationala

$$E(u) \leq E(u + w)$$

pentru orice element $w$ ortogonal pe primii $k$ vectori proprii ai lui $A$.

Rezultatele din acest capitol completeaza teoria existenta dezvoltata in D. Muzsi si R.Precup [58], si aplicatiile la probleme eliptice date de J. Mawhin si J. R. Ward Jr. [50], D. O'Regan si R. Precup [66].

## 3.2 Teorie spectrala

Atasam operatorului $A$ din sectiunea anterioara, urmatoarea problema

$$Au = f, \quad u \in H_A. \tag{3.2.1}$$

Din teorema de reprezentare a lui Riesz rezulta ca, pentru orice $f \in H_A'$, exista un unic $u_f \in H_A$, astfel incat

$$(u_f, v)_{H_A} = (f, v) \quad \text{pentru fiecare } v \in H_A, \tag{3.2.2}$$

unde notatia $(f, v)$ stands for the value of the functional $f$ on the element $v$.

Notam $u_f$ cu $A^{-1}f$, si o numim *solutie slaba* a ecuatiei (3.2.1). Astfel,

$$A^{-1} : H'_A \to H_A$$
$$\left(A^{-1}f, v\right)_{H_A} = (f, v)$$

pentru $f \in H'_A, \quad v \in H_A$. Este usor de observat ca, operatorul liniar $A^{-1}$ de la $H$ la $H$ este pozitiv definit.

De acum inainte, in plus, presupunem ca, scufundarea lui $H_A$ in $H$ este compacta. Aceasta garanteaza ca $A^{-1}$ este un *operator compact* de la $H$ la el insusi.

Atunci, din teoria spectrala a operatorilor compacti auto-adjuncti ( a se vedea S. G. Mihlin [54], D. Muzsi si R. Precup [58] ), amintim urmatoarele proprietati.

**(i)** Multimea valorilor proprii ale operatorului $A^{-1}$ este nevida si cel mult numarabila;

**(ii)** Zero este singurul punct de acumulare posibil al multimii de valori proprii ai operatorului $A^{-1}$;

**(iii)** Fiecarei valori proprii ii corespunde un numar finit de vectori proprii liniar independenti;

**(iv)** Valorile proprii ale lui $A^{-1}$ sunt pozitive;

**(v)** Exista o multime ortonormala $(\phi_k)_{k\geq 1}$ de vectori proprii ai lui $A^{-1}$, cu

$$\|\phi_k\|_H = 1,$$

care este cel mult numarabila si

$$A^{-1}u = \sum_{k\geq 1} \left(A^{-1}u, \phi_k\right)_H \phi_k$$

oricare ar fi $u \in H$.

Presupunem ca $D(A)$ este infinit dimensional. Atunci imaginea lui $A^{-1}$ este infinit dimensionala si deci, exista un sir $(\mu_j)_{j\geq 1}$ de valori proprii ai lui $A^{-1}$, si in mod corespunzator, un sir $(\phi_j)_{j\geq 1}$ de valori proprii, ortonormal in $H$.

Fie $\lambda_j := 1/\mu_j$. Atunci

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_j \leq \ldots, \quad \lambda_j \to \infty \quad \text{cand} \quad j \to \infty,$$

si din

$$A^{-1}\phi_j = \mu_j \phi_j,$$

avem

$$(\phi_j, v)_{H_A} = \lambda_j (\phi_j, v)_H \quad \text{oricare ar fi} \quad v \in H_A, \tag{3.2.3}$$

adica,

$$A\phi_j = \lambda_j \phi_j$$

in sens slab. Prin urmare $\lambda_j$ si $\phi_j$, $j \geq 1$, sunt *valorile proprii* si respectiv *vectorii proprii*, ai lui $A$, cu $\|\phi_j\|_H = 1$.

De asemenea, vom folosi urmatoarea caracterizare a valorilor proprii ( a se vedea S. G. Michlin [54] ), si anume

$$\lambda_j = \inf \left\{ \frac{\|u\|_{H_A}^2}{\|u\|_H^2} : \ u \in H_A \setminus \{0\}, \ (u, \phi_i)_{H_A} = 0 \ \text{ pentru } i = 1, 2, ..., j-1 \right\}$$

pentru $j = 1, 2, \ldots$.

Este de observat faptul ca, pentru $j = 1$, aceasta arata ca, cea mai buna constanta $\gamma^2$ in (2.2.1) este $\gamma^2 = \lambda_1$.

Daca in $H_A'$ consideram produsul scalar si norma

$$(u, v)_{H_A'} := \left(A^{-1}u, A^{-1}v\right)_{H_A}, \quad \|u\|_{H_A'} := \left\|A^{-1}u\right\|_{H_A},$$

atunci folosind (3.2.3) obtinem

$$\|\phi_j\|_H = 1, \quad \|\phi_j\|_{H_A} = \sqrt{\lambda_j}, \quad \|\phi_j\|_{H_A'} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}.$$

De asemenea, pentru fiecare $v \in H_A'$, avem

$$(v, \phi_j) = (A^{-1}v, \phi_j)_{H_A} = (A^{-1}v, A^{-1}(\lambda_j \phi_j))_{H_A} = \lambda_j (v, \phi_j)_{H_A'}.$$

Aceasta implica faptul ca, sistemele

$$(\phi_j), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\phi_j\right), \quad \left(\sqrt{\lambda_j}\phi_j\right)$$

sunt ortonormale si complete (baze Hilbert) in $H$, $H_A$ si respectiv $H_A'$, si ca pentru fiecare $v \in H_A$, seriile Fourier

$$\sum (v, \phi_j)_H \phi_j, \ \ \sum \left(v, \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\phi_j\right)_{H_A} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\phi_j, \ \ \sum \left(v, \sqrt{\lambda_j}\phi_j\right)_{H_A'} \sqrt{\lambda_j}\phi_j$$

sunt identice si pot fi scrise in urmatorul fel

$$\sum (v, \phi_j)\phi_j,$$

unde prin $(v, \phi_j)$ intelegem actiunea lui $v$ ca un element a lui $H_A'$ peste $\phi_j$.

## 3.3 Rezultate auxiliare referitoare la serii Fourier

In aceasta sectiune, vom da anumite rezultate auxiliare referitoare la proprietatile seriilor Fourier in spatii Hilbert, care sunt unelte esentiale ale acestui capitol.

Prima lema extinde la spatiul dual $H'_A$ al lui $H_A$, rezultatul corespunzator pentru $H$, folosit in D. Muzsi si R. Precup [58], si demonstrat pentru prima data pentru $A = -\Delta$ in R. Precup [72] ( vezi de asemenea D. O'Regan si R. Precup[66, Lema 6.1] ).

**Lema 3.3.1** *(**A. Budescu si R. Precup [18]**) Fie $c$ orice constanta cu $c \neq \lambda_j$, pentru $j = 1, 2, \ldots$ . Pentru fiecare $v \in H'_A$, exista o unica solutie slaba $u \in H_A$ a problemei*

$$Lu := Au - cu = v, \quad u \in H_A$$

*notata cu $L^{-1}v$, si are loc urmatoarea dezvoltare a vectorilor proprii*

$$L^{-1}v = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j - c}(v, \phi_j)\phi_j, \tag{3.3.1}$$

*unde seria converge in $H_A$. In plus,*

$$\|L^{-1}v\|_{H_A} \leq \sigma_c \|v\|_{H'_A}, \tag{3.3.2}$$

*unde* $\sigma_c = \max\left\{\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_j - c}\right| : j = 1, 2, \ldots\right\}$.

**Lema 3.3.2** *(**A. Budescu si R. Precup [18]**) Pentru fiecare $w \in H_k$ au loc urmatoarele inegalitati:*

$$\|w\|_H \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}\|w\|_{H_A}; \tag{3.3.3}$$

$$\left\|L^{-1}w\right\|_{H_A} \leq \frac{\sqrt{\lambda_{k+1}}}{\lambda_{k+1} - c}\|w\|_H; \tag{3.3.4}$$

$$\left\|L^{-1}w\right\|_{H_A} \leq \frac{1}{\lambda_{k+1} - c}\|w\|_{H_A}. \tag{3.3.5}$$

## 3.4 Rezultatul principal

Rezultatul principal al acestui capitol este referitor la o proprietate variationala a solutiilor ecuatiilor semiliniare de forma

$$Au - cu = J'(u), \tag{3.4.1}$$

unde $A$ este un operator liniar avand toate proprietatile cerute in Sectiunea 2.2 si $c$ nu este o valoare proprie a lui $A$.

Trebuie sa dezvoltam o teorie de nerezonanta generala, care in particular, pentru $c = 0$, contine rezultatele din Sectiunea 2.3.

Astfel, cautam solutii slabe $u \in H_A$ ale ecuatiei semiliniare (3.4.1), adica, un element $u \in H_A$ cu

$$(u, v)_{H_A} - c(u, v)_H = (J'(u), v)$$

oricare ar fi $v \in H_A$. Daca notam

$$Lu = Au - cu,$$

atunci $(3.4.1)$ este echivalent cu ecuatia de punct fix

$$u = L^{-1}J'(u), \quad u \in H_A.$$

Pe de alta parte, ecuatia $(3.4.1)$ are forma variationala

$$E'(u) = 0,$$

unde $E : H_A \to \mathbb{R}$ este functionala energie data de

$$E(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H_A}^2 - \frac{c}{2}\|u\|_H^2 - J(u).$$

Este de observat faptul ca

$$E'(u) = Lu - J'(u).$$

In cazul in care identificam $H'_A$ cu $H_A$ via $A^{-1}$, si luam in considerare faptul ca

$$A^{-1}(Lu - J'(u)) = A^{-1}(Au - cu - J'(u)) = u - A^{-1}[cu + J'(u)],$$

obtinem

$$E'(u) = u - A^{-1}[cu + J'(u)]. \tag{3.4.2}$$

Remarcam faptul ca metoda folosita in Sectiunea 2.3 nu mai poate fi aplicata atunci cand $c \neq 0$, dupa cum se poate observa ca

$$A^{-1}[cu + J'(u)] \neq L^{-1}J'(u).$$

Fie $H_k$ si $H_k^{\perp}$ subspatiile lui $H_A$ definite prin

$$H_k = \left\{u \in H_A : (u, \phi_j)_{H_A} = 0 \text{ pentru } j = 1, 2, ..., k\right\}; \tag{3.4.3}$$

$$H_k^{\perp} = \left\{u \in H_A : (u, \phi_j)_{H_A} = 0 \text{ pentru } j = k+1, k+2, ...\right\}.$$

In cele ce urmeaza, prin $P$ si $P^{\perp}$ intelegem proiectia operatorilor pe $H_k$ si pe complementul sau ortogonal $H_k^{\perp}$. Deci, orice element $u \in H_A$ poate fi scris ca

$$u = P^{\perp}u + Pu.$$

Acum putem enunta rezultatul principal pentru ecuatia $(3.4.1)$.

**Teorema 3.4.1** *(**A. Budescu si R. Precup [18]**) Presupunem ca toate conditiile de mai sus pentru $A$, $J$ si $c$ sunt indeplinite. In plus, presupunem ca exista $\alpha < \lambda_{k+1} - c$, $p \leq \frac{1}{2} - \frac{c}{2\lambda_{k+1}}$ si $q, r \in \mathbb{R}_+$ astfel incat*

$$\|J'(u) - J'(v)\|_H \leq \alpha \|u - v\|_H \tag{3.4.4}$$

*oricare ar fi* $u, v \in H_A$ *satisfacand* $P^{\perp}u = P^{\perp}v$, *si*

$$J(u) \leq p \|u\|_{H_A}^2 + q \|u\|_{H_A} + r \tag{3.4.5}$$

*oricare ar fi* $u \in H_A$. *Atunci pentru orice solutie* $u^* \in H_A$ *a ecuatiei* (3.4.1), *are loc urmatoarea proprietate variationala*

$$E(u^*) = \inf_{w \in H_k} E(u^* + w). \tag{3.4.6}$$

La fel ca in Sectiunea 2.5, teoria abstracta prezentata aici poate fi aplicata la ecuatii eliptice semiliniare cu conditii de nerezonanta, pin urmare , in urmatoarea sectiune vom da o aplicatie la problema eliptica

$$\begin{cases} -\Delta u - cu = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases}$$

unde $c \neq \lambda_j$, $j = 1, 2, ...,$.

O directie de cercetare viitoare ar fi sa extindem teoria dezvoltata in acest capitol la sisteme de nerezonanta de forma

$$\begin{cases} A_1 u - c_1 u = J_{11}(u,v) \\ A_2 v - c_2 v = J_{22}(u,v), \end{cases}$$

unde prin $J_{11}(u,v), J_{22}(u,v)$ intelegem derivatele partiale a doua functionale de clasa $C^1$, $J_1, J_2 : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$. Putem anticipa ca sub anumite conditii, solutia $(u,v)$ a sistemului este un punct de echilibru de tip Nash pentru perechea de functionale energie asociate pe un subspatiu format din prudusul cartezian a doua subspatii care depind de constantele $k_1$ si $k_2$, unde $\lambda_{k_i} < c_i < \lambda_{k_i+1}$, $i = 1, 2$.

## 3.5 Aplicatie la probleme eliptice sub conditii de nerezonanta

In aceasta sectiune, extindem rezultatele din Sectiunea 2.5. Mai exact, tratam cazul problemei

$$\begin{cases} -\Delta u - cu = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5.1}$$

sub conditia de *nerezonanta* $c \neq \lambda_j$, $j = 1, 2, ...$, unde $\lambda_j$ sunt valorile proprii ai problemei Dirichlet pentru $-\Delta$.

Functionala energie este

$$E(u) = \int_\Omega \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{c}{2} u^2 - F(x, u(x)) \right) dx,$$

unde $E : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, si $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s) ds$.

Insa, daca $c > \lambda_1$, $E$ nu este marginit inferior si, prin urmare, solutia nu poate fi un minorant al lui $E$. Cu toate acestea, chiar si in acest caz, o proprietate variationala are loc pentru solutie.

Presupunem ca

$$\lambda_k < c < \lambda_{k+1}$$

pentru anumiti $k \in \{0, 1, ...\}$ , unde $\lambda_0 = -\infty$.

Fie $H_k$ si $H_k^{\perp}$ subspatiile lui $H_0^1$ definite de

$$H_k = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : (u, \phi_j)_{H_0^1} = 0 \text{ pentru } j = 1, 2, ..., k \right\};$$

$$H_k^{\perp} = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : (u, \phi_j)_{H_0^1} = 0 \text{ pentru } j = k+1, k+2, ... \right\}.$$

Mai mult, daca notam

$$Lu = -\Delta u - cu,$$

si luam in considerare faptul ca $c \neq \lambda_j$, $j = 1, 2, ...,$, atunci $L$ este inversabil si (3.5.1) este echivalenta cu ecuatia de punct fix

$$u = L^{-1} N_f(u), \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

unde $N_f$ este operatorul de superpozitie Nemytskii, definit dupa cum urmeaza

$$N_f : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad N_f(u)(x) = f(x, u(x)),$$

unde presupunem ca este bine-definit.

Pe de alta parte, ecuatia (3.5.1) are forma variationala

$$E'(u) = 0,$$

si

$$E'(u) = Lu - N_f(u) = Lu - J'(u).$$

Daca identificam $H^{-1}(\Omega)$ cu $H_0^1(\Omega)$ via $(-\Delta)^{-1}$, si luam in considerare faptul ca

$$(-\Delta)^{-1}[Lu - N_f(u)] = (-\Delta)^{-1}[-\Delta u - cu - N_f(u)] = u - (-\Delta)^{-1}[cu + N_f(u)],$$

obtinem

$$E'(u) = u - (-\Delta)^{-1}[cu + N_f(u)].$$

Observam ca metoda folosita in Sectiunea 2.5 nu mai poate fi aplicata cand $c \neq 0$, dupa cum se poate observa ca

$$(-\Delta)^{-1}[cu + N_f(u)] \neq L^{-1} N_f(u).$$

Folosind Teorema 3.4.1, obtinem urmatorul rezultat.

**Teorema 3.5.1** *(**A. Budescu si R. Precup [18]**) Assume that the folllowing conditions are satisfied:*
*(i) f satisface conditiile Carathéodory;*
*(ii)* $f(., 0) \in L^2(\Omega)$;
*(iii) exista* $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}}(\lambda_{k+1} - c)$ *astfel incat*

$$|f(x, u) - f(x, \bar{u})| \leq \alpha |u - \bar{u}|$$

*oricare ar fi* $u, \bar{u} \in \mathbb{R}$*, si a.p.t.* $x \in \Omega$*.*
*Atunci pentru orice solutie slaba* $u^* \in H_0^1(\Omega)$ *a problemei* $(3.5.1)$ *are loc urmatoarea proprietate variationala:*

$$E(u^*) = \inf_{w \in H_k} E(u^* + w).$$

# Capitolul 4

# Proprietati variationale ale solutiilor ecuatiilor si sistemelor de ecuatii singulare de ordinul doi

## 4.1 Prezentare generala

Acest capitol este bazat pe articolul A. Budescu si R. Precup [19], unde se studiaza existenta si caracterizarea variationala a solutiilor slabe ale problemei Dirichlet pentru ecuatii si sisteme diferentiale ordinare singulare de ordinul doi. Solutia apare ca o minimizare a functionalei energie asociate ecuatiei, iar pentru cazul sistemelor, ca un echilibru de tip Nash-type pentru multimea de functionale energie.

In acest capitol, consideram problema Dirichlet pentru o singura ecuatie de ordinul doi

$$\begin{cases} -\left(p(x)u'(x)\right)' = f\left(x, u\left(x\right)\right) \quad \text{a.p.t } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

si pentru un sistem de doua ecuatii

$$\begin{cases} -\left(p(x)u'(x)\right)' = f\left(x, u\left(x\right), v\left(x\right)\right) \\ -\left(q(x)v'(x)\right)' = g\left(x, u\left(x\right), v\left(x\right)\right) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Aici $p, q \in C[0,1] \cap C^1(0,1)$, $p, q > 0$ pe $(0,1)$ pot disparea facand ecuatiile singulare in raport cu variabila independenta $x$.

## 4.2 Rezultatele principale

### 4.2.1 Cazul unei singure ecuatii

In aceasta sectiune, prezentam o aplicatie a Teoremei 2.3.1 pentru problema singulara la limita

$$\begin{cases} -\left(p(x)u'(x)\right)' = f\left(x, u\left(x\right)\right) \quad \text{a.p.t. } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

unde $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p \in C[0,1] \cap C^1(0,1)$, si presupunem ca

$$I = \int_0^1 \frac{1}{p\left(x\right)} dx$$

este finita. In particular, ultima conditie este satisfacuta daca $p(x) > 0$ for all $x \in [0,1]$.

In acest caz specific, $H = L^2(0,1)$, si

$$Au = -\left(pu'\right)'$$

cu

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u \in C[0,1] \cap C^1(0,1) : \ u(0) = u(1) = 0, \\ pu' &\in AC[0,1], \ (pu')' \in L^2(0,1)\}. \end{aligned}$$

Mai mult, produsul scalar si norma sunt date de

$$(u,v)_{H_A} = \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

si

$$\|u\|_{H_A} = \left(\int_0^1 p(x)u'(x)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

respectiv. A se observa ca, aici, spatiul energetic $H_A$ este spatiul Sobolev ponderat

$$H_0^1(0,1;p) = \left\{u \in AC[0,1] : \ u(0) = u(1) = 0, \ \sqrt{p}u' \in L^2(0,1)\right\},$$

sau echivalent,

$$H_0^1(0,1;p) = \left\{u : \ u(x) = \int_0^x \frac{v(s)}{\sqrt{p(s)}}\mathrm{d}s, \ v \in L^2(0,1), \ \int_0^1 \frac{v(s)}{\sqrt{p(s)}}\mathrm{d}s = 0\right\}.$$

Pentru simplificare, de acum inainte, vom folosi simbolul $H_A$ in loc de $H_0^1(0,1;p)$.

Printr-o *solutie (slaba)* a ecuatiei (4.2.1) intelegem o functie $u \in H_A$, astfel incat $f(.,u) \in L^2(0,1)$, si

$$(u,v)_{H_A} = (f(.,u),v)_{L^2}$$

oricare ar fi $v \in H_A$.

De asemenea, functionala $J : L^2(0,1) \to \mathbb{R}$ este data de

$$J(u) = \int_0^1 F(x, u(x))dx, \text{ unde } F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds.$$

Operatorul $A$ este pozitiv definit si $\gamma = 1/\sqrt{I}$.

In cele ce urmeaza, vom folosi inegalitatea Poincaré:

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \sqrt{I}\|u\|_{H_A}, \qquad u \in H_A. \tag{4.2.2}$$

Functionala energie asociata ecuatiei (4.2.1) este data de

$$\begin{aligned} E &: H_A \to \mathbb{R}, \\ E(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{H_A}^2 - \int_0^1 F(x, u(x))\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Evident, problema (4.2.1) este echivalenta cu ecuatia de punct fix

$$u = A^{-1}N_f(u),$$

unde $N_f$ este operatorul de superpozitie Nemytskii $N_f(u)(x) = f(x, u(x))$ , definit in Sectiunea 1.1.1.

Expresia lui $A^{-1}(h)$ pentru orice $h \in L^2(0,1)$ este

$$\left(A^{-1}h\right)(x) = \frac{1}{I}\int_0^1 \frac{1}{p(s)}\int_0^s h(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \cdot \int_0^x \frac{1}{p(s)}\mathrm{d}s - \int_0^x \frac{1}{p(s)}\int_0^s h(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.$$

Cu aceste preliminarii, putem enunta si demonstra primul rezultat al acestui capitol.

**Teorema 4.2.1** *(**A. Budescu si R. Precup [19]**) Presupunand ca urmatoarele conditii sunt satisfacute:*

**(i)** *$f$ satisface conditiile Carathéodory;*

**(ii)** $f(.,0) \in L^2(0,1)$;

**(iii)** *exista $\alpha \in [0, 1/I)$ astfel incat*

$$|f(x,u) - f(x,\bar{u})| \leq \alpha|u - \bar{u}|$$

*oricare ar fi $u, \bar{u} \in \mathbb{R}$, si a.p.t. $x \in (0,1)$ .*

*Atunci, (4.2.1) are o unica solutie slaba $u^* \in H_A$, si*

$$E(u^*) = \inf_{H_A} E.$$

### 4.2.2 Cazul sistemelor

In aceasta sectiune, ca o aplicatie a Teoremei 2.4.1, extindem teoria din Sectiunea 4.2.1 pentru sisteme de tipul

$$\begin{cases} -\left(p(x)u'(x)\right)' = f\left(x, u\left(x\right), v\left(x\right)\right) \\ -\left(q(x)v'(x)\right)' = g\left(x, u\left(x\right), v\left(x\right)\right) \quad \text{a.e. } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \tag{4.2.3}$$

unde $f, g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p, q \in C^1[0,1]$, si

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{p(x)} \mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{q(x)} \mathrm{d}x$$

sunt finite. Aici, $H = H_1 \times H_2$, $H_1 = H_2 = L^2(0,1)$,

$$A_1 u = -\left(pu'\right)'$$

cu

$$\begin{aligned} D(A_1) &= \{u \in C[0,1] \cap C^1(0,1) : \ u(0) = u(1) = 0, \\ pu' &\in AC[0,1], \ (pu')' \in L^2(0,1)\} \end{aligned}$$

si

$$A_2 v = -\left(qv'\right)'$$

cu

$$\begin{aligned} D(A_2) &= \{v \in C[0,1] \cap C^1(0,1) : \ v(0) = v(1) = 0, \\ qv' &\in AC[0,1], \ (qv')' \in L^2(0,1)\}. \end{aligned}$$

De asemenea, spatiile energetice corespunzatoare $H_{A_1}, H_{A_2}$ sunt

$$H_{A_1} = H_0^1\left(0,1;p\right) \quad \text{si} \quad H_{A_2} = H_0^1\left(0,1;q\right),$$

respectiv, in timp ce definitia solutiei slabe a sistemului (4.2.3) este similara cu cea pentru ecuatia (4.2.1).

Este de observat faptul ca, $A_1, A_2$ sunt doi operatori pozitiv definiti si

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{I_1}}, \ \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{I_2}}.$$

Functionalele $J_1, J_2 : H \to \mathbb{R}$ sunt date de

$$J_1(u,v) = \int_0^1 F(x, u(x), v(x))\mathrm{d}x, \quad J_2(u,v) = \int_0^1 G(x, u(x), v(x))\mathrm{d}x,$$

cu

$$F(x,t,s)=\int_0^t f(x,\tau,s)\mathrm{d}\tau, \quad G(x,t,s)=\int_0^s g(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Functionalele energie $E_1, E_2 : H_{A_1} \times H_{A_2} \to \mathbb{R}$ sunt definite de

$$\begin{aligned} E_1(u,v) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_{A_1}} - \int_0^1 F(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x \\ E_2(u,v) &= \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_{A_2}} - \int_0^1 G(x,u(x),v(x))\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Urmand aceiasi pasi ca si in cazul unei singure ecuatii obtinem ca sistemul (4.2.3) este echivalent cu problema de punct fix

$$\begin{cases} u = A_1^{-1}N_f(u,v) \\ v = A_2^{-1}N_g(u,v). \end{cases}$$

Aici, $N_f$, $N_g$ sunt operatorii de superpozitie Nemytskii asociati lui $f$ si $g$, respectiv. Fiecare ecuatie a sistemului (4.2.3) are o forma variationala, deci poate fi rescris astfel

$$\begin{aligned} E_{11}(u,v) &= u - A_1^{-1}N_f(u,v) \\ E_{22}(u,v) &= v - A_2^{-1}N_g(u,v), \end{aligned}$$

unde $E_{11}(.,v), E_{22}(u,.)$ sunt derivatele Fréchet ale lui $E_1(.,v)$ si $E_2(u,.)$, respectiv.

Avem urmatorul rezultat.

**Teorema 4.2.2** *Fie $f,g : [0,1]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y,z)$, $g = g(x,y,z)$ satisfy the Carathéodory conditions.*

*Presupunem ca $f(.,0,0)$, $g(.,0,0) \in L^2(0,1)$, si ca urmatoarele conditii sunt indeplinite:*

**(i)** *exista $m_{ij} \in \mathbb{R}_+$ $(i,j=1,2)$ cu*

$$\begin{aligned} |f(x,u,v)-f(x,\bar{u},\bar{v})| &\le m_{11}|u-\bar{u}|+m_{12}|v-\bar{v}| \\ |g(x,u,v)-g(x,\bar{u},\bar{v})| &\le m_{21}|u-\bar{u}|+m_{22}|v-\bar{v}|, \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

*oricare ar fi $u,\bar{u},v,\bar{v} \in \mathbb{R}$ , si a.p.t. $x \in [0,1]$;*

**(ii)** *exista $H$, $H_1 : [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu*

$$H_1(x,v) \le G(x,u,v) \le H(x,v), \tag{4.2.5}$$

*oricare ar fi $u,v \in \mathbb{R}$, si a.p.t. $x \in [0,1]$, unde $H$ si $H_1$ sunt de tip coerciv, si raza spectrala a matricii*

$$M = \begin{bmatrix} m_{11}I_1 & m_{12}I_1 \\ m_{21}I_2 & m_{22}I_2 \end{bmatrix} \tag{4.2.6}$$

*este strict mai mica decat unu.*

*Atunci,* $(4.2.3)$ *are o solutie unica* $(u^*, v^*) \in H_{A_1} \times H_{A_2}$ *care este un punct de echilibru de tip Nash pentru perechea de functionale energie* $(E_1, E_2)$ *asociate problemei* $(4.2.3)$*, adica,*

$$\begin{aligned} E_1(u^*, v^*) &= \inf_{H_{A_1}} E_1(., v^*) \\ E_2(u^*, v^*) &= \inf_{H_{A_2}} E_2(u^*, .). \end{aligned}$$

## 4.3 Exemple

In aceasta sectiune, sunt date doua exemple pentru a ilustra rezultatele din Sectiunile 4.4.1 si 4.4.2, primul pentru cazul unei singure ecuatii iar al doilea pentru cazul sistemelor.

**Exemplu 4.3.1** *Un exemplu tipic pentru functia p ca in (4.2.1) este:*

$$p(x) = x^\beta \ \ (x \in [0,1]), \ \text{cu } 0 < \beta < 1.$$

*Aici*

$$I = \int_0^1 \frac{1}{p(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-\beta}.$$

*Functia* $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *poate fi definita astfel*

$$f(x,u) = \alpha \sin u + g(x),$$

*cu* $g \in L^2(0,1)$ *si* $\alpha < 1/I$*, adica,* $\alpha < 1 - \beta$*.*

*In acest caz, functionala energie este*

$$\begin{aligned} E &: H_A \to \mathbb{R}, \\ E(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{H_A}^2 - \int_0^1 F(x, u(x))\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

*unde*

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s = \alpha(1 - \cos t) + g(x)t.$$

*Exemplul considerat satisface toate ipotezele Teoremei 4.2.1.*

*Un alt exemplu pentru functia p este*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} \ \ (x \in [0,1]).$$

*In acest caz,*

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - (1-x)^2}}\mathrm{d}x.$$

*Inlocuind* $1 - x := t$ *obtinem*

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

*Considerind functia $f$ din Exemplul 4.3.1, putem demonstra usor ca toate ipotezele Teoremei 4.2.1 sunt satisfacute.*

**Exemplu 4.3.2** *Referindu-ne la sistemul (4.2.3), consideram*

$$\begin{aligned} p(x) &= x^{k_1}\ , \\ q(x) &= x^{k_2}\ \ (x \in [0,1]),\ \ \textit{cu}\ 0 < k_1 < 1,\ \ 0 < k_2 < 1. \end{aligned}$$

*Prin urmare,*

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^{k_1}} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-k_1}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^{k_2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-k_2}.$$

*De asemenea, consideram*

$$\begin{aligned} f(x,u,v) &= m_{11} \sin u + m_{12} v + h_1(x) \\ g(x,u,v) &= m_{21} \sin u + m_{22} v + h_2(x), \end{aligned}$$

*unde $h_1, h_2 \in L^2(0,1)$, si $m_{ij} \in \mathbb{R}_+$, $i,j = 1,2$. In acest caz, matricea $M$ data de $(4.2.6)$ este*

$$M = \begin{bmatrix} \dfrac{m_{11}}{1-k_1} & \dfrac{m_{12}}{1-k_1} \\ \dfrac{m_{21}}{1-k_2} & \dfrac{m_{22}}{1-k_2} \end{bmatrix}.$$

*Ipoteza $\rho(M) < 1$ implica prin (1.1.5)*

$$\textit{fie}\ \frac{m_{11}}{1-k_1} < 1, \ \ \textit{sau}\ \frac{m_{22}}{1-k_2} < 1.$$

*Putem presupune ca*

$$\frac{m_{22}}{1-k_2} < 1, \tag{4.3.1}$$

*in caz contrar interschimbam ecuatiile sistemului. Atunci, aratam ca, (4.3.1) garanteaza (4.2.5) cu doua functii $H$, $H_1$ de tip coerciv. Intr-adevar, in acest caz, avem*

$$G(x,u,v) = m_{21} v \sin u + m_{22} \frac{v^2}{2} + h_2(x) v,$$

*si*

$$H_1(x,v) \le G(x,u,v) \le H(x,v),$$

*unde*

$$\begin{aligned} H_1(x,v) &= -m_{21}|v| + m_{22} \frac{v^2}{2} + h_2(x) v, \\ H(x,v) &= m_{21}|v| + m_{22} \frac{v^2}{2} + h_2(x) v. \end{aligned}$$

*Ramane sa demonstram ca $H$ este de tip coerciv, adica,*

$$\Phi(v) \to +\infty \quad \textit{cand} \quad \|v\|_{H_{A_2}} \to \infty,$$

*unde*

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_{A_2}} - \int_0^1 H(x, v(x))\mathrm{d}x.$$

*Avem ca*

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_{A_2}} - m_{21}\|v\|_{L^1} - \frac{m_{22}}{2}\|v\|^2_{L^2} - \int_0^1 h_2(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

*Folosind inegalitatea Poincaré*

$$\|v\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1-k_2}}\|v\|_{H_{A_2}},$$

*inegalitatea Hölder, si scufundarea continua a lui $H_{A_2}$ in $L^1(0,1)$, obtinem*

$$\Phi(v) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_{22}}{1-k_2}\right)\|v\|^2_{H_{A_2}} - C\|v\|_{H_{A_2}}.$$

*Aceasta arata ca*

$$\Phi(v) \to +\infty \quad \textit{cand} \quad \|v\|_{H_{A_2}} \to \infty.$$

*Prin urmare, daca raza spectrala a lui $M$ este mai mica decat unu, toate ipotezele Teoremei 4.2.2 sunt satisfacute.*

*Observam ca, rezultatul obtinut pentru un sistem de doua ecuatii poate fi extins la un sistem general de $n$ ecuatii, cu $n \geq 2$.*

# Capitolul 5

# Teoreme de punct fix sub conditii variationale si topologice combinate

## 5.1 Prezentare generala

Acest capitol este bazat pe articolul A. Budescu si R. Precup [20], unde ideea principala este de a inlocui o parte din conditiile asupra operatorului implicat in teoremele clasice de punct fix a lui Schauder, Krasnoselskii, Darbo, si Sadovskii, prin ipoteze asupra functionalei asociate, in cazul in care ecuatia de punct fix are o forma variationala.

Vom analiza problema pentru stabilirea unei teorii de punct fix topologice. Mai exact,vom studia ecuatia de punct fix

$$u = N(u),$$

mai intai intr-o submultime a unui spatiu Hilbert identificat cu dualul sau, unde operatorul $N$ este legat de o functionala $C^1$ $E$ prin relatia

$$N(u) = u - E'(u),$$

si apoi, mai general in spatii Banach.

## 5.2 Teoreme de punct fix variational-topologice in spatii Hilbert

In aceasta sectiune, consideram ecuatia de punct fix

$$u = N(u) \tag{5.2.1}$$

intr-o submultime $D$ a unui spatiu Hilbert $H$ cu produs scalar $(.,.)$ si norma $\|.\|$, care are o structura variationala, in sensul ca exista o functionala $E \in C^1(H)$ astfel incat

$$u - N(u) = E'(u) \tag{5.2.2}$$

oricare ar fi $u \in D$. Observam ca formula (5.2.2) necesita ca spatiul $H$ sa fie identificat cu dualul sau, cum este garantat de teorema de reprezentare a lui Riesz.

**Teorema 5.2.1** *Fie $U \subset H$ o multime nevida, marginita si deschisa, $D = \overline{U}$ si fie*

$$T : H \to H \quad si \quad S : D \to H$$

*doi operatori astfel incat urmatoarele conditii sa fie satisfacute:*

**(A$_1$)** *$I - T : H \to H$ este inversabil si*

$$(I-T)^{-1} \text{ este } \gamma \text{ - Lipschitz}, \tag{5.2.3}$$

*pentru anumiti $\gamma > 0$;*

**(A$_2$)** *exista $b \in [0, 1/\gamma)$, astfel incat*

$$\alpha(S(M)) \leq b\alpha(M), \tag{5.2.4}$$

*oricare ar fi $M \subset D$.*

*In plus, presupunem ca exista o functionala $E \in C^1(H)$, marginita inferior pr $D$, cu*

$$\inf_{\overline{U}} E < \inf_{\partial U} E \tag{5.2.5}$$

*astfel incat*

$$E'(u) = u - S(u) - T(u), \quad \text{oricare ar fi } u \in D. \tag{5.2.6}$$

*Atunci, exista $u^* \in U$, astfel incat*

$$E(u^*) = \inf_D E \quad si \quad E'(u^*) = 0.$$

Urmatorul rezultat este o consecinta directa a Teoremei 5.2.1, si poate fi vazut ca o versiune variational-topologica teoremei de punct fix a lui Darbo.

**Teorema 5.2.2** *Fie $U \subset H$ o multime nevida si marginita, $D = \overline{U}$, si fie $N : D \to H$ un operator b-contractiv (de tip Darbo), pentru anumiti $b \in [0,1)$. Daca exista o functionala $E \in C^1(H)$, marginita inferior pe $D$, astfel incat* (5.2.5) *este indplinita si*

$$E'(u) = u - N(u), \quad \text{oricare ar fi } u \in D, \tag{5.2.7}$$

*atunci exista $u^* \in U$, astfel incat*

$$E(u^*) = \inf_D E \quad si \quad E'(u^*) = 0.$$

In comparatie cu teorema lui Darbo, nu vom cere nici convexitatea lui $D$, nici invarianta lui $N$. In schimb, domeniul $D$ are un interior nevid, si forma variationala (5.2.7) este ceruta impreuna cu proprietatea aditionala (5.2.5).

Teorema 5.2.2 poate fi generalizata pentru operatori condensatori printr-o usoara modificare a demonstratiei Teoremei 5.2.1. Rezultatul este o versiune variational-topologica a teoremei de punct fix a lui Sadovskii.

**Teorema 5.2.3** *Fie $U \subset H$ o multime nevida, deschisa si marginita, $D = \overline{U}$, si fie $N : D \to H$ operator condensator. Daca exista o functionala $E \in C^1(H)$, marginita inferior pe $D$, astfel incat* (5.2.5) *si* (5.2.7) *au loc, atunci exista $u^* \in U$, astfel incat*

$$E(u^*) = \inf_D E \quad si \quad E'(u^*) = 0.$$

## 5.3 O teorema variational-topologica de punct fix in spatii Banach

In aceasta sectiune, consideram problema de punct fix (5.2.1), mai general intr-un spatiu Banach cu anumite proprietati geometrice, care sunt exprimate in termenii proprietatilor aplicatiei de dualitate. Amintim ca, (a se vedea, de exemplu, C. Chidume [21], I. Cioranescu [22]), pentru o *functie gauge,* adica, o functie continua si strict crescatoare $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, cu $\phi(0) = 0$ si $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$, *aplicatia de dualitate* corespunzatoare, este definita ca

$$J : X \to 2^{X^*}, \tag{5.3.1}$$

prin

$$J(u) := \{u^* \in X^* : u^*(u) = \|u\| \|u^*\|, \ \|u^*\| = \phi(\|u\|)\}.$$

In particular, daca $\phi(t) = t$, atunci aplicatia de dualitate este numita *aplicatie de dualitate normata.*

In cele ce urmeaza, presupunem ca, pentru o functie gauge data,

(C) aplicatia de dualitate $J$ este monovalenta, inversabila, si atat $J$ cat si $J^{-1}$ sunt continue.

Conditii suficiente pentru $J$ sa posede proprietatile de mai sus pot fi gasite in C. Chidume [21], I. Cioranescu [22].

Spunem ca, ecuatia (5.2.1) are o structura variationala intr-o submultime $D \subset X$, daca exista o functionala $E \in C^1(X)$, astfel incat

$$E'(u) = J(u) - J(N(u))$$

pentru orice $u \in D$.

Urmatorul rezultat este o teorema topologica-vectoriala analoaga cu teorema de punct fix lui Schauder.

**Teorema 5.3.1** *Fie $X$ un spatiu Banach, astfel incat conditia* (C) *sa fie satisfacuta, fie $U \subset X$ o multime nevida, deschisa marginita si $D = \overline{U}$. Presupunem ca $N : D \to X$ un operator compact, si exista o functionala $E \in C^1(X)$, marginita inferior pe $D$, astfel incat* (5.2.5) *sa aiba loc, si*

$$E'(u) = J(u) - J(N(u))$$

*pentru orice $u \in D$. Atunci, exista $u^* \in U$, astfel incat*

$$E(u^*) = \inf_D E \quad si \quad E'(u^*) = 0.$$

## 5.4 Aplicatie

In aceasta sectiune, prezentam o aplicatie a Teoremei 5.3.1 la problema cu conditii pe capetele frontierei

$$\begin{cases} -(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' = f(t, u(t)), & t \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{5.4.1}$$

unde

**(G)** $p > 1$, si $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface conditiile Carathéodory, si

$$|f(t,u)| \leq a\,|u|^{q-1} + b \tag{5.4.2}$$

pentru aproape orice $t \in [0,1]$, pentru orice $u \in \mathbb{R}$, si unele constante $a, b \geq 0$, si $q \geq 1$.

Consideram spatiul Banach $X := W_0^{1,p}(0,1)$, inzestrat cu norma energetica

$$\|u\|_{1,p} = \left( \int_0^1 |u'(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

si functionala energie

$$E : W_0^{1,p}(0,1) \to \mathbb{R}, \quad E(u) = \int_0^1 \left( \frac{1}{p}|u'(t)|^p - F(t, u(t)) \right) dt,$$

unde $F(t,\tau) = \int_0^\tau f(t,s)ds$. Functionala $E$ este de clasa $C^1$ in $W_0^{1,p}(0,1)$, si

$$E'(u) = -\left(|u'|^{p-2}u'\right)' - f(.,u).$$

Astfel, solutiile sistemului $(5.4.1)$ sunt puncte critice ale lui $E$.

Aplicatia de dualitate a spatiului $W_0^{1,p}(0,1)$ corespunzatoare functiei gauge $\phi(t) = t^{p-1}$ este functia

$$J : W_0^{1,p}(0,1) \to W^{-1,q}(0,1), \quad (1/p + 1/q = 1)$$

data de

$$J(u) = -(|u'|^{p-2}u')',$$

care satisface conditia (C) necesara.

De asemenea, solutiile problemei (5.4.1) sunt punctele fixe ale operatorului $N : W_0^{1,p}(0,1) \to W_0^{1,p}(0,1)$, $N(u) = J^{-1}(f(.,u))$ ,care este complet continuu folosind argumentele bazate pe teorema Arzela-Ascoli. Evident,

$$E'(u) = J(u) - J(N(u)).$$

Consideram $R > 0$ si $U = B_R(0)$, bila deschisa din $W_0^{1,p}(0,1)$ cu centrul in origine si de raza $R$. Pentru a putea arata ca functionala $E$ este marginita inferior pe $\overline{U}$, mai intai vom folosi conditia de crestere (5.4.2) pentru a obtine estimarea

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{\|u\|_{1,p}^p}{p} - \int_0^1 F(t,u(t))dt \\ &\geq \frac{\|u\|_{1,p}^p}{p} - \int_0^1 \left(\frac{a}{q}|u(t)|^q + b|u(t)|\right) dt \\ &= \frac{\|u\|_{1,p}^p}{p} - \frac{a}{q}\|u\|_{L^q(0,1)}^q - b\|u\|_{L^1(0,1)}. \end{aligned}$$

Apoi, luand in considerare inegalitatile

$$\|u\|_{L^q(0,1)} \leq \|u\|_{1,p} \quad \text{and} \quad \|u\|_{L^1(0,1)} \leq \|u\|_{1,p} \quad \left(u \in W_0^{1,p}(0,1)\right)$$

obtinem

$$E(u) \geq \frac{\|u\|_{1,p}^p}{p} - \frac{a}{q}\|u\|_{1,p}^q - b\|u\|_{1,p}. \tag{5.4.3}$$

Acum, daca $\|u\|_{1,p} \leq R$, atunci,

$$E(u) \geq -\frac{a}{q}R^q - bR,$$

ceea ce arata ca $E$ este marginit inferior in $\overline{U}$.

Mai mult, aratam faptul ca aceasta conditie, (5.2.5), este satisfacuta cu conditia ca $R$ sa fie astfel incat

$$h(R) := \frac{R^p}{p} - \frac{a}{q}R^q - bR > 0. \tag{5.4.4}$$

Intr-adevar, in acest caz, daca $u \in \partial U$, adica $\|u\|_{1,p} = R$, din (5.4.3), avem

$$E(u) \geq h(R) > 0 = E(0) \geq \inf_{\overline{U}} E,$$

de unde

$$\inf_{\partial U} E \geq h(R) > \inf_{\overline{U}} E.$$

De exemplu, daca $q < p$, atunci $h(R) \to \infty$ cand $R \to \infty$, si conditia (5.4.4) este indeplinita oricare ar fi $R$ suficient de mare.

Prin urmare, potrivit Teoremei 5.3.1, avem urmatorul rezultat.

**Teorema 5.4.1** *Daca conditia* (G) *este indeplinita, atunci pentru fiecare numar* $R > 0$ *satisfacand* (5.4.4), *problema* (5.4.1) *are o solutie* $u \in W_0^{1,p}(0,1)$, *cu* $\|u\|_{1,p} < R$, *care minimizeaza functionala energie* $E$ *pe bila inchisa cu centrul in origine si de raza* $R$ *din* $W_0^{1,p}(0,1)$.

# Bibliografie

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, London, 1975.

[2] H. Amann si E. Zehnder, *Nontrivial solutions for a class of nonresonance problems and applications to nonlinear differential equations*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4) **7** (1980), 539–603.

[3] A. Ambrosetti, *Un theorema di esistenza per le equazieni differenziali negli spazi di Banach*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **39** (1967), 349–360.

[4] A. Ambrosetti si P. H. Rabinowitz, *Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.

[5] R. P. Agarwal, *Nonlinear superlinear singular and nonsingular second order boundary value problems*, J. Differential Equations **143** (1998), 60–95.

[6] R. P. Agarwal, M. Meehan si D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[7] R. P. Agarwal, D. O'Regan si R. Precup, *A note on nonuniform nonresonance for nonlinear boundary value problems with $y'$ dependence*, to appear.

[8] J. V. Baxley, *Some singular nonlinear boundary value problems*, SIAM J. Math. Anal. **22** (2), 463–479.

[9] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach spaces*, Ed. Acad-Noordhoff, Bucuresti-Leyden, 1976.

[10] C. Bereanu, P. Jebelean si J. Mawhin, *Variational methods for nonlinear perturbations of singular $\Phi$-Laplacians*, Rend. Lincei Math. Appl. **22** (2011), 89–111.

[11] E. Bishop si R. R. Phelps, *The support functional of a convex set*, In: Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VII, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963, 27–35.

[12] O. Bolojan-Nica, *Fixed point methods for nonlinear differential systems with nonlocal conditions*, Casa Cartii de Stiinta, Cluj-Napoca, 2013.

[13] O. Bolojan si R. Precup, *Implicit first order differential systems with nonlocal conditions*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **69** (2014), 1–13.

[14] H. Brezis, *Analyse Fonctionelle. Theorie et Applications*, Dunod, Paris, 1983.

[15] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.

[16] H. Brezis si F. Browder, *Partial differential equations in the 20th Century*, Adv. Math. **135** (1998), 76–144.

[17] A. Budescu, *Semilinear operator equations and systems with potential-type nonlinearities*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. **59** (2014), 199–212.

[18] A. Budescu si R. Precup, *Variational properties of the solutions of semilinear equations under nonresonance conditions*, J. Nonlinear Convex Anal., to appear.

[19] A. Budescu si R. Precup, *Variational properties of the solutions of singular second-order differential equations and systems*, J. Fixed Point Theory Appl. **17** (2016), DOI 10.1007/s11784-016-0284-1.

[20] A. Budescu si R. Precup, *Fixed point theorems under combined topological and variational conditions*, Results Math., DOI 10.1007/s00025-016-0589-9.

[21] C. Chidume, *Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations*, Springer, London, 2009.

[22] I. Cioranescu, *Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

[23] G. Darbo, *Punti uniti in transformazioni a codominio non compatto*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **24** (1955), 84–92.

[24] J. Daneš, *Equivalence of some geometric and related results of nonlinear functional analysis*, Comment. Math. Univ. Carolin. **26** (1985), 443–454.

[25] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[26] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces-Selected Topics*, Springer Verlag, Berlin, 1975.

[27] G. Dinca, *Variational Methods and Applications* (Romanian), Editura Tehnica, Bucuresti, 1980.

[28] G. Dinca si P. Jebelean, *Quelques résultats d'existence pour les applications de dualité*, C. R. Acad. Sci. Paris, **329** (1999), 125–128.

[29] G. Dinca, P. Jebelean si J. Mawhin, *Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian*, Recherches de Mathématiques, Inst. de Math. Pure et Appliqué, Univ. Catholique de Louvain, Rapport no. **75**(1999).

[30] J. Dugunji si A. Granas, *Fixed Point Theory*, I. PWN, Warsaw, 1982.

[31] I. Ekeland, *Sur les problèmes variationnels*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **275** (1972), 1057–1059.

[32] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324–353.

[33] D. G. de Figueiredo, *Lectures on Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Inst. of Fundamental Research, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[34] D. G. de Figueiredo, *Semilinear elliptic systems in: Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations* (Trieste, 1997), 122-152, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.

[35] M. Frigon, *Fixed point results for generalized contraction in gauge spaces and applications*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 2957–2965.

[36] M. Frigon, *On some generalizations of Ekeland's principle and inward contractions in gauge spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. **10** (2011), 279–298.

[37] A. Granas si J. Dugunji, *Fixed Point Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New-York, 2003.

[38] J. K. Hale si S. M. V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Appl. Math. Sci. , Springer-Verlag, New York, 1993.

[39] P. Jebelean, *Nonlinear Analysis Methods with Applications to Boundary Value Problems with p-Laplacian*, Ed. Univ. de Vest, Timisoara, 2001.

[40] L. V. Kantorovich si G. P. Akilov, *Functional Analysis*, (Romanian), Ed. St. Enc., Bucuresti, 1986.

[41] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer, Berlin, 1993.

[42] M. A. Krasnoselskii, *Some Problems of Nonlinear Analysis*(Russian), Uspehi Math. Nauk (N.S.), Amer. Math. Soc. Translations, **10** (1958), 345–409.

[43] M. A. Krasnoselskii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, 1964.

[44] A. Kristály, V. Radulescu si C. Varga, *Variational Principles in Mathematical Physics*, Geometry and Economics, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[45] A. Kristály si C. Varga, *An introduction to critical point theory for non-smooth functions*, Casa Cartii de Stiinta, Cluj-Napoca, 2004.

[46] K. Kuratowski, *Topology I*, Academic Press, 1966.

[47] K. Q. Lan, *Multiple positive solutions of semilinear differential equations with singularities*, J. Lond. Math. Soc. **63** (2) (2001), 690–704.

[48] K. Q. Lan si J. R. L. Webb, *Positive solutions of semilinear differential equations with singularities*, J. Differ. Equ. **148** (1998), 407–421.

[49] J. Leray si J. Schauder, *Topologie et equations fonctionelles*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **51** (1934), 45–78.

[50] J. Mawhin si J. R. Ward Jr., *Nonresonance and existence for nonlinear elliptic boundary value problems*, Nonlinear Anal. **6** (1981), 677–684.

[51] J. Mawhin si M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer, Berlin, 1989.

[52] M. Meehan si D. O'Regan, *Existence Principles for nonresonant operator and integral equations*, Comput. Math. Appl. **35** (1998), no. 9, 79–87.

[53] S. G. Michlin, *Linear Partial Differential Equations* (Romanian), Ed. St. Enc., Bucuresti, 1983.

[54] S. G. Michlin, *Partielle Differentialgleichungen der Mathematischen Physik* (German), Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Akademie-Verlag, Berlin, 1978.

[55] D. Motreanu si C. Varga, *Some critical point results for locally Lipschitz functionals*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **4** (1997), 17–33.

[56] D. Muzsi, *A theory of semilinear operator equations under nonresonance conditions*, J. Nonlinear Funct. Anal. Appl., to appear.

[57] D. Muzsi, *Semilinear boundary value problems under nonresonance conditions*, Ph. D. Thesis, Cluj-Napoca, 2008.

[58] D. Muzsi si R. Precup, *Non-resonance and existence for systems of non-linear operator equations*, Appl. Anal. **87** (2008), 1005–1018.

[59] D. Muzsi si R. Precup, *Nonresonance theory for semilinear operator equations under regularity conditions*, Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity, **6** (2008), 3–17.

[60] J. F. Nash, *Non-cooperative games*, Ann. Math. (2)**54** (1951), 286–295.

[61] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Norm. Sup. Pisa **13** (1959), 115–162.

[62] D. O'Regan, *Theory of Singular Boundary Value Problems*, World Scientific Publishing, Singapore, 1994.

[63] D. O'Regan, *Nonresonant and resonant singular boundary value problems*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **4** (1997), no. 4, 25–42.

[64] D. O'Regan, *Some Existence Principles and Some General Results for Singular Nonlinear Two Point boundary Value Problems*, J. Math. Anal. Appl. **166** (1992), 24–40.

[65] D. O'Regan si R. P. Agarwal, *Singular Differential and Integral Equations with Applications*, Springer Science and Business Media, 2003.

[66] D. O'Regan si R. Precup, *Theorems of Leray-Schauder Type and Applications*, Taylor and Francis, London, 2001.

[67] D. O'Regan si R. Precup, *Continuation theory for contraction on spaces with two vector-valued metrics*, Applicable Analysis **82** (2) (2003), 131–144.

[68] S. Park, *Generalizations of the Nash equilibrium theorem in the KKM theory*, Fixed Point Theory Appl. 2010, Article ID 234706.

[69] D. Pascali si S. Sburlan, *Nonlinear Mappings of Monotone Type*, Ed. Acad.-Sijthoff & Noordhoff, Bucuresti-Alphen aan den Rijn, 1978.

[70] A. I. Perov, *On Cauchy problem for a system of ordinary differential equations*, Pviblizhen. Met. Reshen. Differ. Uvavn. **2** (1964), 115–134.

[71] A. I. Perov si A. V. Kibenko, *On a certain general method for investigation of boundary value problems* (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR **30** (1996), 249–264.

[72] R. Precup, *Existence results for non-linear boundary value problems under nonresonance conditions*, in Qualitative Problems for Differential Equations and Control Theory, C. Corduneanu Ed., World Scientific, Singapore, 1995, p. 263–273.

[73] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2002.

[74] R. Precup, *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, Math. Comp. Modelling **49** (2009), 703–708.

[75] R. Precup, *The Leray-Schauder boundary condition in critical point theory*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 3218–3228.

[76] R. Precup, *Linear and Semilinear Partial Differential Equations*, De Gruyter, Berlin, 2013.

[77] R. Precup, *Nash-type equilibria and periodic solutions to nonvariational systems*, Adv. Nonlinear Anal. **3** (2014), 197–207.

[78] R. Precup, *Nash-type equilibria for systems of Szulkin functionals*, Set-Valued Var. Anal (2015), DOI 10.1007/s11228-015-0356-1.

[79] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[80] I. Rachunkova, *Singular mixed boundary value problem*, J. Math. Anal. Appl. **320** (2006), 611–618.

[81] I. Rachunkova si J. Tomecek, *Singular nonlinear problem for ordinary differential equation of the second-order on the half-line*, in Mathematical Models in Engineering, Biology, and Medicine, (eds. A. Cabada, E. Liz and J.J. Nieto ), AIP Conf. Proc. 1124, Amer. Inst. Phys., Melville, (2009), 294–303.

[82] V. Radulescu, *Treatment Methods of the Elliptic Problems*, Univ. of Craiova, Craiova, 1998.

[83] B. Ricceri, *A general variational principle and some of its applications*, Comput. Appl. Math **113** (2000), 401–410.

[84] B. Ricceri, *Uniqueness properties of functionals with Lipschitzian derivative*, Port. Math., **63** (2006), 393–400.

[85] B. Ricceri, *On a theory by Schechter and Tintarev*, Taiwanese J. Math., **12** (2008), 1303–1312.

[86] B. Ricceri, *Fixed points of nonexpansive potential operators in Hilbert spaces*, Fixed Point Theory Appl. DOI 10.1186/1687-1812-2012-123.

[87] I. A. Rus, *Principles and Applications of the Fixed Point Theory* (Romanian), Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

[88] I. A. Rus, *Fixed point structures, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx*.m, **28** (51), 1986, 59–64.

[89] I. A. Rus, *Generalized contractions and applications*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001.

[90] I. A. Rus, A. Petrusel si G. Petrusel, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008.

[91] B. N. Sadovskii, *On a fixed point principle*, Funkt. Anal **4** (2) (1967), 74–76.

[92] B. N. Sadovskii, *Measures of noncompactness and condensing operators* (Russian), Problemy Mat. Anal. Sloz. Sistem. **2** (1968) 89–119.

[93] J. Schauder, *Der fixpunktsatz in functionalraumen*, Studia Math. **2** (1930), 171–180.

[94] M. Struwe, *Variational Methods*, Springer, Berlin, 1990.

[95] A. Szulkin, *Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems*, Ann. Inst. Henry Poincaré, Anal. Non Linéaire **3** (1986), 77-109.

[96] P. Zabrejko, *Continuity properties of the superposition operator*, J. Austral. Math. Soc. **47** (1989), 186-210.

[97] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed Point Theorems*, Springer-Verlag, New York, 1990.