UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
ŞCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

INEGALITĂŢI DE TIP HARNACK ŞI SOLUŢII POZITIVE MULTIPLE PENTRU PROBLEME NELINIARE

Rezumatul tezei de doctorat

Doctorand:
Diana-Raluca Herlea

Conducător de doctorat:
Prof. Dr. Radu Precup

Cluj-Napoca
2016

Cuprins

Introducere

Scopul acestei teze de doctorat este de a sublinia rolul inegalităţilor de tip Harnack în obţinerea unor rezultate de existenţă, localizare şi multiplicitate a soluţiilor pozitive pentru ecuaţii şi sisteme de ecuaţii neliniare.

Teorema de punct fix a lui Krasnosel'skiĭ în con

În centrul acestei teze se află teorema de compresie-extensie a lui Krasnosel'skiĭ (adică teorema de punct fix a lui Krasnosel'skiĭ în con), care ajută la obţinerea unor rezultate de existenţă, localizare şi multiplicitate a soluţiilor într-o coroană a unui con dintr-un spaţiu Banach (vezi M. A. Krasnosel'skiĭ [51, 52]).

Ideea este să găsim soluţii ale unei ecuaţii operatoriale de forma $u = N(u)$, într-un con K a unui spaţiu liniar normat $(X, \|\cdot\|)$, cu $r \leq \|u\| \leq R$, unde r şi R sunt două numere pozitive $0 < r < R$. Dacă poate fi stabilit un astfel de rezultat de existenţă, atunci imediat se pot obţine soluţii multiple în K. Acest lucru este posibil dacă ipotezele teoremei de existenţă sunt satisfăcute de mai multe perechi de numere (r, R). Prin urmare vom obţine mai multe soluţii $u_1, u_2, ..., u_k$ în K, localizate astfel: $r_i \leq \|u_i\| \leq R_i$, $i = 1, 2, ..., k$. Aceste soluţii sunt distincte dacă $r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < ... < r_k < R_k$. Similar putem obţine şiruri infinite de soluţii.

Rezultatul fundamental de existenţă care permite aplicarea strategiei anterioare este teorema de punct fix a lui Krasnosel'skiĭ.

Teoremă (**Krasnosel'skiĭ**) Fie $(X, \|.\|)$ un spaţiu liniar normat; $K \subset X$ un con; $r, R \in \mathbb{R}_+$, $0 < r < R$; $K_{r,R} = \{u \in K : r \leq \|u\| \leq R\}$ şi fie $N : K_{r,R} \to K$ un operator compact. Dacă una din următoarele condiţii este satisfăcută:

(a) $N(u) \nless u$ dacă $\|u\| = r$ şi $N(u) \ngtr u$ dacă $\|u\| = R$;

(b) $N(u) \ngtr u$ dacă $\|u\| = r$ şi $N(u) \nless u$ dacă $\|u\| = R$.

Atunci N are un punct fix u în K cu $r \leq \|u\| \leq R$.

Condiţia (a) exprimă o proprietate a operatorului N de a comprima coroana conică $K_{r,R}$, în timp ce condiţia (b) exprimă proprietatea de extensie.

Strategia descrisă anterior pentru cazul unei ecuaţii poate fi extinsă la sisteme într-o manieră asemănătoare, pe componente. Astfel, pentru un sistem de două ecuaţii

$$\begin{cases} u_1 = N_1(u_1, u_2) \\ u_2 = N_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

vom fi interesaţi să găsim soluţii (u_1, u_2), unde u_1 aparţine conului K_1, u_2 aparţine conului K_2 şi fiecare este localizată după cum urmează

$$r_1 \leq \|u_1\| \leq R_1, \quad r_2 \leq \|u_2\| \leq R_2.$$

Prin urmare, în acest caz, apar două coroane conice. Ideea este să le permitem lui N_1 şi N_2 să satisfacă fie condiţia de compresie fie condiţia de extensie, individual. Astfel, sunt posibile trei cazuri:
(1) Ambii operatori N_1, N_2 sunt compresivi;
(2) Ambii operatori N_1, N_2 sunt expansivi;
(3) Unul dintre operatorii N_1, N_2 este compresiv, iar celălalt este expansiv.

Rezultatul fundamental de existenţă care permite aplicarea strategiei anterioare în cazul sistemelor este următoarea versiune vectorială a teoremei de punct fix a lui Krasnosel'skiĭ care este prezentată pentru un sistem general de n ecuaţii.

Theorem(**[78]**) Fie $(X, \|.\|)$ un spaţiu liniar normat; $K_1, K_2, ..., K_n \subset X$ conuri; $K := K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$; $r, R \in \mathbb{R}_+^n$, $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$, $R = (R_1, R_2, ..., R_n)$ cu $0 < r_i < R_i$ pentru orice i, $K_{r,R} = \{u \in K : r_i \leq \|u_i\| \leq R_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$ şi fie $N : K_{r,R} \to K$, $N = (N_1, N_2, ..., N_n)$ un operator compact. Dacă pentru fiecare $i = 1, 2, ..., n$, una din următoarele condiţii este satisfăcută în $K_{r,R}$:
(a) $N_i(u) \not< u_i$ dacă $\|u_i\| = r_i$ şi $N_i(u) \not> u_i$ dacă $\|u_i\| = R_i$;
(b) $N_i(u) \not> u_i$ dacă $\|u_i\| = r_i$ şi $N_i(u) \not< u_i$ dacă $\|u_i\| = R_i$.
Atunci N are un punct fix $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ în K cu $r_i \leq \|u_i\| \leq R_i$ pentru $i = 1, 2, ..., n$.

Pentru aplicaţii ale principiilor de compresie-extensie pentru ecuaţii şi sisteme integrale şi diferenţiale facem referire la to R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan şi R. Precup [2], R. P. Agarwal, D. O'Regan şi P. J. Y. Wong [4], S. Budisan [15], A. Cabada şi J. A. Cid [17], L. H. Erbe, S. Hu şi H. Wang [24], S. Li [55], W.-C. Lian, F.-H. Wong şi C.-C. Yeh [58], B. Liu şi J. Zhang [60], M. Meehan şi D. O'Regan [64], R. Precup [79, 80, 83], Y. N. Raffoul [87], W. Sun, S. Chen, Q. Zhang şi C. Wang [89], P. J. Torres [92], F. Wang şi F. Zhang [93], J. R. L. Webb [97]. În [54] R. W. Leggett şi L. R. Williams au obţinut o generalizare remarcabilă a rezultatului original a lui Krasnosel'skiĭ şi au aplicat această teoremă de punct fix obţinută unor ecuaţii neliniare care modelează anumite boli infecţioase.

În aplicaţii, tehnica bazată pe teorema lui Krasnosel'skiĭ necesită construcţia unui con adecvat de funcţii pentru care condiţiile de compresie şi extensie pot fi satisfăcute. În acest scop, în cazul majorităţii problemelor la limită, funcţiile lui Green corespunzătoare şi proprietăţile lor joacă un rol foarte important (vezi de exemplu A. Boucherif [13], F. Haddouchi şi S. Benaicha [31], J. R. L. Webb [96]).

Funcţiile lui Green au fost numite după matematicianul britanic George Green, care a fost primul care a dezvoltat acest concept în anii 1830. O funcţie a lui Green este răspunsul la impulsul unei ecuaţii diferenţiale ordinare definite pe un domeniu având anumite condiţii iniţiale specificate sau condiţii la limită. În conformitate cu D. G. Duffy [23], aplicarea funcţiilor lui Green la ecuaţii diferenţiale ordinare implicând problemele la limită a început cu lucrarea lui Burkhardt(1861-1914). Mai târziu, Bôcher (1867-1918) a extins aceste rezultate la problemele la limită de ordinul

n.

În lucrarea R. Precup [85] a fost observat faptul că în cazul multor probleme pentru care funcţiile lui Green nu sunt cunoscute sau proprietăţile lor nu sunt suficient de bune, se pot folosi în schimb inegalităţile slabe de tip Harnack asociate operatorilor diferenţiali şi condiţiilor la limită (vezi de asemenea R. Precup [79, 83]). Acest tip de inegalităţi ajută la obţinerea de estimări inferioare care sunt utile pentru realizarea condiţiei de compresie-extensie. În anumite cazuri, astfel de inegalităţi apar ca o consecinţă a concavităţii soluţiilor pozitive.

Lucrarea M. Kassmann [50] prezintă o introducere pentru anumite inegalităţi numite după Carl Gustav Axel von Harnack. Aceste inegalităţi au fost definite iniţial pentru funcţii armonice. Mai târziu J. Serrin [88] şi J. Moser [65] au generalizat inegalitatea lui Harnack pentru soluţii ale ecuaţiilor cu derivate parţiale eliptice şi parabolice. Mulţi alţi autori au demonstrat astfel de inegalităţi pentru diferite probleme (vezi W. Hebisch şi L. Saloff-Coste [37], T. Kuusi [53], R. Precup [85], R. Zacher [102]).

Rolul inegalităţilor de tip Harnack

Inegalităţile de tip Harnack sunt stabilite în conexiune cu un spaţiu Banach ordonat $(X, \leq)$, cu norma monotonă şi un operator dat $L : D(L) \subset X \to X$.

Spunem că o inegalitate de tip Harnack are loc pentru L dacă există un element diferit de zero φ în conul pozitiv $K \subset X$ astfel încât

$$u \geq \|u\|\varphi,$$

pentru fiecare supersoluţie pozitivă a ecuaţiei $Lu = 0$, adică $u \in D(L)$ cu $u \geq 0$ şi $Lu \geq 0$.

Această inegalitate este acompaniată de una inversă şi anume

$$u \leq \|u\|\psi,$$

unde $\psi \geq 0$ şi $\psi \neq 0$, care în aplicaţii pentru spaţii de funcţii este satisfăcută în mod trivial, de exemplu cu $\psi \equiv 1$.

Explicăm pe scurt utilitatea inegalităţilor de tip Harnack în garantarea condiţiei

$$N(u) \not< u \quad \text{dacă } u \in K \text{ şi } \|u\| = r$$

cerută de teorema lui Krasnosel'skiĭ, în cazul unei ecuaţii de forma $Lu = F(u)$, unde $N = L^{-1}F$.

Presupunând că operatorul N este pozitiv şi crescător în raport cu relaţia de ordine $\leq$, demonstraţia începe astfel:
Presupunem contrarul, şi anume

$$N(u) < u \quad \text{pentru anumiţi } u \in K \text{ cu } \|u\| = r.$$

Din inegalitatea de tip Harnack

$$u \geq \|u\|\varphi = r\varphi,$$

folosind faptul că N este crescător, obţinem

$$N(u) \geq N(r\varphi).$$

Pe de altă parte, din $u \leq \|u\|\psi$ şi $N(u) < u$, avem

$$r\psi \geq u > N(u).$$

Atunci $r\psi > N(r\varphi)$, iar norma fiind monotonă deducem că $r\|\psi\| \geq \|N(r\varphi)\|$. De aici reiese o contradicţie dacă cerem ca ipoteză

$$r\|\psi\| < \|N(r\varphi)\|.$$

Mai multe detalii despre utilizarea inegalităţilor de tip Harnack în conexiune cu teorema lui Krasnosel'skiĭ, într-un cadru abstract, sunt date în ultimul capitol al tezei.

Structura tezei

Teza de doctorat este împărţită în patru capitole, fiecare capitol fiind organizat în mai multe secţiuni, o **Introducere** şi o listă de **Referinţe**.

Capitolul 1 este dedicat în totalitate prezentării unor noţiuni, rezultate şi notaţii preliminarii care vor fi folosite pe întreg parcursul tezei. În Secţiunea 1.1 se introduc conceptele de spaţiu Banach ordonat, operator compact şi complet continuu precum şi bine cunoscuta teoremă de punct fix a lui Krasnosel'skiĭ în con. În Secţiunea 1.2 prezentăm un rezultat de comparaţie pentru problemele la limită cu condiţii Dirichlet, în timp ce Secţiunea 1.3 prezintă un rezultat auxiliar de existenţă şi unicitate.

În **Capitolul 2** discutăm patru clase de ecuaţii diferenţiale neliniare cu diferite condiţii la limită, motivaţi de anumite probleme neliniare care provin din modelarea matematică a unor procese din inginerie, mecanică, fizică, economie, etc.

Secţiunea 2.1 conţine o prezentare generală a capitolului în care explicăm conţinutul fiecărei secţiuni şi prezentăm principalele instrumente şi metode de lucru folosite.

În Secţiunea 2.2 prezentăm noi rezultate de existenţă, localizarea şi multiplicitate a soluţiilor pozitive a problemelor nelocale la limită pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi de forma

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) - au(1) = g[u]. \end{cases}$$

Aici g este o funcţională liniară mărginită pe $C[0,1]$. Două cazuri sunt incluse: cazul discret, când

$$g[u] = \sum_{k=1}^{m} a_k u(t_k),$$

şi cazul continuu când g este dat de o integrală Stieltjes,

$$g[u] = \int_0^1 u(s)\,d\gamma(s).$$

Este de observat faptul că, în particular, când $a = 1$ şi $g[u] = 0$ avem condiţia de periodicitate $u(0) = u(1)$.

Problemele nelocale pentru diferite clase de ecuaţii şi sisteme diferenţiale au fost intensiv studiate în literatură (a se vedea, de exemplu, A. Boucherif [13], A. Boucherif şi R. Precup [14], L. Byszewski [16], G. Infante [45], O. Nica [67, 68], O. Nica şi R. Precup [69] pentru condiţii nelocale pe mai multe puncte; R. Precup şi D. Trif [86], J. R. L. Webb şi G. Infante [99] pentru condiţii nelocale date de integrale Stieltjes).

Menţionăm de asemenea alte câteva lucrări ce tratează probleme nelocale pentru diferite clase de ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale: O.-M. Bolojan [12], X. Hao, L. Liu şi Y. Wu [35], G. Infante [46], J. R. L. Webb şi G. Infante [98].

Principalele rezultate din această secţiune sunt: Teorema 2.2.1, Teorema 2.2.2 şi Teorema 2.2.3. Aceste rezultate sunt parte din lucrarea D.-R. Herlea [40].

În Secţiunea 2.3 studiem existenţa, localizarea şi multiplicitatea soluţiilor pozitive ale problemei Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + f(t,u) = 0, & 0 < t < 1 \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

unde $\phi : (-a,a) \to (-b,b)$, $0 < a,b \leq \infty$, este un omeomorfism astfel încât $\phi(0) = 0$.

Studiul ecuaţiilor şi sistemelor cu ϕ-Laplacian este un subiect clasic care a atras atenţia a numeroşi experţi datorită interesului în aplicaţii (a se vedea R. P. Agarwal, D. O'Regan şi S. Stanek [3]). Aceste probleme cu diferite condiţii la limită au fost studiate într-un număr mare de lucrări utilizând metode de punct fix, teoria gradului, metode variaţionale. Ne referim la lucrările C. Bereanu şi J. Mawhin [8], C. Bereanu, P. Jebelean şi J. Mawhin [10, 11], A. Cabada şi R. L. Pouso [18], H. Dang şi S. F. Oppenheimer [21], P. Drábek şi J. Hernández [22], M. García-Huidobro şi P. Ubilla [26], M. García-Huidobro, R. Manásevich şi J. R. Ward [27], D. D. Hai şi K. Schmitt [32], D. D. Hai şi R. Shivaji [33], D. D. Hai şi H. Wang [34], J. Henderson şi H. Wang [39], P. Jebelean şi C. Popa [47], P. Jebelean, C. Popa şi C. Şerban [48], J. Marcos do Ó şi P. Ubilla [61], J. Mawhin [62], J. Mawhin [63], D. O'Regan [70]-[72], D. O'Regan şi R. Precup [73], I. Peral [75], V. Polášek şi I. Rachůnková [76, 77], W. Sun şi W. Ge [90], C. Şerban [91], J. Y. Wang [94], Z. Wang şi J. Zhang [95], Z. Yang [100], Z. Yang şi D. O'Regan [101], şi referinţele din acestea.

Contrar lucrărilor menţionate anterior, abordarea noastră este bazată pe o inegalitate slabă de tip Harnack asociată problemei, şi anume următorul rezultat:

Lema 2.3.1 *Pentru fiecare* $c \in (0,1)$, *şi orice* $u \in C^1[0,1] \cap C([0,1];\mathbb{R}_+)$ *cu* $u'(0) = u(1) = 0$, $u'(t) \in (-a,a)$ *oricare ar fi* $t \in [0,1]$, $\phi \circ u' \in W^{1,1}(0,1)$ *şi* $(\phi(u'))' \leq 0$ *pe* $[0,1]$, *avem*

$$u(t) \geq (1-c)\|u\|_\infty, \text{ oricare ar fi } t \in [0,c].$$

Principalele rezultate din această secţiune sunt: Lema 2.3.1, Teorema 2.3.1, Teorema 2.3.2 şi Teorema 2.3.3; Exemplul 2.3.4, Exemplul 2.3.5, Exemplul 2.3.6 şi Exemplul 2.3.7 care prezintă câteva aplicaţii numerice. Cea mai mare parte a acestor rezultate se regăsesc în lucrarea D.-R. Herlea şi R. Precup [43].

Secţiunea 2.4 este dedicată studiului ecuaţiilor diferenţiale ordinare de acelaşi tip ca în secţiunea anterioară, dar de această dată cu condiţii Dirichlet

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + f(t,u) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Aici ϕ este un omeomorfism de la $(-a,a)$ la $\mathbb{R}$, $0 < a \leq \infty$ iar inegalitatea de tip Harnack este dată de următoarea Lemă:

Lema 2.4.2 *Pentru fiecare $t_0, t_1 \in (0,1)$ cu $t_0 < t_1$, şi orice $u \in C^1[0,1] \cap C([0,1];\mathbb{R}_+)$ cu $u(0) = u(1) = 0$, $u'(t) \in (-a,a)$ oricare ar fi $t \in [0,1]$, $\phi \circ u' \in W^{1,1}(0,1)$ şi $(\phi(u'))' \leq 0$ a.p.t. pe $[0,1]$, avem*

$$u(t) \geq \gamma(t)\|u\|_\infty, \text{ oricare ar fi } t \in [0,1],$$

unde

$$\gamma(t) = \begin{cases} \min\{t_0, 1-t_1\}, & \text{oricare ar fi } t \in [t_0,t_1] \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Cele mai relevante rezultate din această secţiune sunt: Lema 2.4.1, Teorema 2.4.1, Teorema 2.4.2 şi Teorema 2.4.3. Aceste contribuţii pot fi găsite în lucrarea D.-R. Herlea [41].

În Secţiunea 2.5 discutăm despre ecuaţii cu ϕ-Laplacian cu condiţii Neumann-Robin

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + f(t,u) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) - au'(0) = 0, \\ u'(1) = 0, \end{cases}$$

unde $a > 0$ şi ϕ este un omeomorfism de la $\mathbb{R}$ la $(-b,b)$, $0 < b \leq \infty$. Probleme cu condiţii Robin generale

$$\alpha_1 u(0) - \beta_1 u'(0) = 0 = \alpha_2 u(1) + \beta_2 u'(1),$$

au fost studiate de mulţi autori pentru a obţine existenţa soluţiilor pozitive (vezi L. H. Erbe şi H. Wang [25], W. G. Ge şi J. Ren [28]). Alţi autori au lucrat cu anumite cazuri speciale. De exemplu A. Benmezaï, S. Djebali şi T. Moussaoui [5], W. G. Ge şi J. Ren [29] şi D.-R. Herlea [41] au studiat cazul $\beta_1 = \beta_2 = 0$ şi $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, în timp ce D.-R. Herlea şi R. Precup [43] au discutat cazul $\alpha_1 = \beta_2 = 0$, $\alpha_2 = 1$ şi $\beta_1 = -1$.

Pentru a putea aplica tehnica lui Krasnosel'skiĭ problemei noastre în primul rând trebuie să stabilim o inegalitate slabă de tip Harnack:

Lema 2.5.1 *Pentru fiecare $d \in (0,1)$, şi orice $u \in C^1[0,1] \cap C([0,1];\mathbb{R}_+)$ cu $u(0) - au'(0) = u'(1) = 0$, $\phi \circ u' \in W^{1,1}(0,1)$ şi $(\phi(u'))' \leq 0$ a.p.t. pe $[0,1]$, avem*

$$u(t) \geq \gamma(t)\|u\|_\infty, \text{ oricare ar fi } t \in [0,1],$$

unde

$$\gamma(t) = \begin{cases} \dfrac{a+d}{a+1}, & \text{pentru } t \in [d,1] \\ 0, & \text{pentru } t \in [0,d). \end{cases}$$

Principalele rezultate din această secţiune sunt: Lema 2.5.1, Teorema 2.5.1, Teorema 2.5.2 şi Teorema 2.5.3; Exemplul 2.5.4, Exemplul 2.5.5, Exemplul 2.5.7 şi Exemplul 2.5.6. Rezultatele din această secţiune au fost publicate în lucrarea D.-R. Herlea [42].

Capitolul 3 extinde la cazul general al sistemelor rezultatele din Capitolul 2, folosind de această dată versiunea vectorială a teoremei de punct fix a lui Krasnosel'skiĭ. După o prezentare generală a problemelor în Secţiunea 3.1, în Secţiunea 3.2 sunt obţinute rezultate de existenţă, localizare şi multiplicitate pentru un sistem de două ecuaţii diferenţiale de oridinul întâi cu condiţii nelocale

$$\begin{cases} u_1' = f_1(t, u_1, u_2) \\ u_2' = f_2(t, u_1, u_2) \\ u_1(0) - a_1 u_1(1) = g_1[u_1] \\ u_2(0) - a_2 u_2(1) = g_2[u_2]. \end{cases}$$

unde g_1, g_2 sunt două funcţionale liniare pe $C[0,1]$. Rezultatele teoretice sunt ilustrate de câteva exemple relevante.

Scopul Secţiunii 3.3 este de a ilustra aplicabilitatea versiunii vectoriale a teoremei lui Krasnosel'skiĭ la probleme Dirichlet-Neumann pentru sisteme cu ϕ-Laplacian

$$\begin{cases} (\phi_i(u_i'))' + f_i(t, u_1, u_2, ..., u_n) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u_i'(0) = u_i(1) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n). \end{cases}$$

unde ϕ_i sunt omeomorfisme diferite de la $(-a_i, a_i)$ la $(-b_i, b_i)$, $0 < a_i, b_i \leq \infty$.

Secţiunea 3.4 este dedicată studiului unui sistem cu ϕ-Laplacian având condiţii Dirichlet

$$\begin{cases} (\phi_i(u_i'))' + f_i(t, u_1, u_2, ..., u_n) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u_i(0) = u_i(1) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n). \end{cases}$$

unde ϕ_i sunt omeomorfisme diferite de la $(-a_i, a_i)$ la $\mathbb{R}$, $0 < a_i \leq \infty$.

În Secţiunea 3.5 prezentăm rezultate de existenă şi localizare a soluţiilor pozitive pentru problema Neumann-Robin

$$\begin{cases} (\phi_i(u_i'))' + f_i(t, u_1, u_2, ..., u_n) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u_i(0) - a_i u_i'(0) = 0 \\ u_i'(1) = 0 \qquad\qquad (i = 1, 2, ..., n), \end{cases}$$

unde $a_i > 0$, ϕ_i sunt omeomorfisme diferite de la $\mathbb{R}$ la $(-b_i, b_i)$, $0 < b_i \leq \infty$.

Cele mai relevante rezultate din acest capitol sunt: Teorema 3.2.1, Teorema 3.2.2, Teorema 3.3.1, Teorema 3.3.2, Teorema 3.4.1 şi Teorema 3.5.1; Exemplul 3.2.3 şi Exemplul 3.2.5 care prezintă două aplicaţii numerice. Aceste rezultate apar în lucrările D.-R. Herlea [40]-[42], D.-R. Herlea şi R. Precup [43].

Scopul **Capitolului 4** este de a ilustra o teorie abstractă. După o prezentare generală dată de

Secţiunea 4.1, în Secţiunea 4.2 ne vom concentra pe problema abstractă pentru o singură ecuaţie

$$\begin{cases} Lu = F(u) \\ u \in B, \end{cases}$$

într-un spaţiu Banach $(X, \|\cdot\|)$, unde $L : D(L) \subset X \to X$ şi $F : X \to X$ sunt doi operatori daţi şi $B \subset X$.

Apoi, în Secţiunea 4.3, extindem rezultatele pentru cazul sistemelor

$$\begin{cases} L_i u_i = F_i(u_1, u_2, ..., u_n) \\ u_i \in B_i \quad (i = 1, 2, ..., n). \end{cases}$$

Teoria foloseşte tehnica lui Krasnosel'skiĭ şi este bazată pe o inegalitate abstractă de tip Harnack care este, de această dată, presupusă ca ipoteză.

Principalele contribuţii aici sunt următoarele: Teorema 4.2.1, Teorema 4.2.2, Teorema 4.2.3 şi Teorema 4.3.1. Rezultatele din acest capitol vor apărea în lucrarea D.-R. Herlea şi R. Precup [44].

După cum s-a menţionat mai sus în rezumatul fiecărui capitol, majoritatea rezultatelor din această teză de doctorat fac parte din următoarele lucrări:

- D.-R. Herlea, *Existence and localization of positive solutions to first order differential systems with nonlocal conditions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., **59**(2014), 221-231.
- D.-R. Herlea, *Positive solutions for second-order boundary-value problems with ϕ-Laplacian*, Electron. J. Differential Equations, **2016**(2016), 1-8.
- D.-R. Herlea and R. Precup, *Existence, localization and multiplicity of positive solutions to ϕ-Laplace equations and systems*, Taiwanese J. Math., **20**(2016), 77-89.
- D.-R. Herlea, *Existence, localization and multiplicity of positive solutions for the Dirichlet BVP with ϕ-Laplacian*, Fixed Point Theory, to appear.
- D.-R. Herlea and R. Precup, *Abstract weak Harnack type inequalities and multiple positive solutions of nonlinear problems*, submitted.

Câteva direcţii de cercetare viitoare

Metoda care a fost folosită în această teză poate fi aplicată şi altor clase de probleme, de exemplu, ecuaţiilor şi sistemelor de ordin superior cu diferite condiţii la limită, ecuaţiilor funcţional-diferenţiale precum şi ecuaţiilor cu derivate parţiale. Câteva lucrări care urmează aceste direcţii ar fi A. Cabada, R. Precup, L. Saavedra şi S. Tersian [19], Y. Li [56], H. Lian, J. Zhao şi R. P. Agarwal [59], M. Naceri, R. P. Agarwal, E. Çetin şi A. El-Haffaf [66].

O altă idee este aceea de a studia soluţii radiale pozitive pentru anumite clase de probleme la limită care introduc singularităţi în ecuaţii (pentru probleme cu soluţii radiale ne referim la lucrările C. Bereanu, P. Jebelean şi J. Mawhin [11], D. D. Hai şi K. Schmitt [32], X. He [36], D. Jiang şi H. Liu [49]).

Altă direcţie este de a folosi inegalităţile de tip Harnack împreună cu principii provenite din teoria punctului critic, aşa cum a fost sugerat şi în R. Precup [81].

Cuvinte cheie

Inegalităţi slabe de tip Harnack, soluţii pozitive, teorema de punct fix a lui Krasnosel'skiĭ, con, ecuaţii şi sisteme neliniare, ϕ-Laplacian

Mulţumiri

Finalizarea acestei teze de doctorat nu ar fi fost posibilă fără suportul constant, răbdarea, asistenţa şi îndrumarea conducătorului de doctorat, Profesorul Radu Precup. Pentru tot efortul şi standarde sale academice ridicate îi sunt pe deplin recunoscătoare, am avut multe de învăţat de la dumnealui. Numeroase alte mulţumiri sunt de asemenea adresate tuturor membrilor Grupului de Ecuaţii Diferenţiale, pentru ajutorul şi sfaturile preţioase oferite pe parcursul seminariilor de cercetare. De asemenea, aş dori să mulţumesc şi Profesorului Rafael Ortega şi Profesorului Pedro Torres pentru ajutorul oferit în timpul stagiului de cercetare din cadrul Universităţii din Granada, Spania. În final, aş vrea să le mulţumesc şi membrilor familiei mele pentru dragostea necondiţionată şi sprijinul oferit.

Capitolul 1

Preliminarii

În acest capitol se prezintă anumite noţiuni şi rezultate care vor fi folosite pe parcursul tezei de doctorat. Spaţii Banach ordonate, operatori compacţi şi complet continui precum şi teorema de punct fix a lui Krasnosel'skiĭ în con sunt uneltele de bază pentru această teză.

1.1 Noţiuni şi rezultate de bază

1.1.1 Spaţii Banach ordonate

Definiţia 1.1.1 Fie X un spaţiu liniar real. Printr-un *con* K a lui X înţelegem o submulţime convexă închisă a lui X astfel încât $\lambda K \subset K$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}_+$ şi $K \cap (-K) = \{0\}$.

Propoziţia 1.1.1 *Fie X un spaţiu liniar şi $K \subset X$ un con. Relaţia $\leq_K$ pe X definită de*

$$u \leq_K v \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad v - u \in K,$$

este o relaţie de ordine (reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă) pe X (numită relaţia de ordine indusă de K), compatibilă cu structura liniară a lui X, adică, dacă $u_i, v_i \in X$, $u_i \leq_K v_i$, $i = 1, 2$, şi $\lambda \in \mathbb{R}_+$, avem

$$u_1 + u_2 \leq_K v_1 + v_2, \quad \lambda u_1 \leq_K \lambda v_1.$$

În schimb, dacă $\leq$ este o relaţie de ordine pe X compatibilă cu structura liniară a lui X, atunci mulţimea

$$K_+ = \{u \in X : 0 \leq u\}$$

este un con (numit conul pozitiv) şi $\leq = \leq_{K_+}$.

Un spaţiu Banach înzestrat cu un con, sau echivalent, cu o relaţie de ordine compatibilă cu structura liniară este numit un *spaţiu Banach ordonat.*

1.1.2 Operatori compacţi şi complet continui

Definiţia 1.1.2 Un spaţiu metric (X, d) este *compact* dacă orice şir de elemente din X are un subşir convergent în X.

Fie (X, d) un spaţiu metric compact şi $C(X; \mathbb{R})$ spaţiul Banach al tuturor funcţiilor continue de la X la $\mathbb{R}$ sub norma $\|\cdot\|_\infty$.

Teorema 1.1.1 (Ascoli-Arzela) *O submulţime Y a lui $C(X; \mathbb{R})$ este relativ compactă dacă şi numai dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

(i) Y este mărginită, adică există o constantă $C > 0$ astfel încât

$$\|u(x)\| \leq C,$$

oricare ar fi $x \in X$ şi $u \in Y$.

(ii) Y este echicontinuă, adică pentru fiecare $\epsilon > 0$ există un $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $u \in Y$,

$$\|u(x_1) - u(x_2)\| < \epsilon,$$

atunci când $x_1, x_2 \in X$ şi $d(x_1, x_2) < \delta$.

Definiţia 1.1.3 Fie X, Y două spaţii Banach şi $T : D \subset X \to Y$.

(a) Operatorul T este *mărginit* dacă transformă orice submulţime mărginită a lui D într-o submulţime mărginită a lui Y.

(b) Operatorul T este *complet continuu* dacă este continuu şi transformă orice submulţime mărginită a lui D într-o submulţime relativ compactă a lui Y.

(c) Operatorul T este *compact* dacă este continuu şi $T(D)$ este relativ compact.

1.1.3 Teorema de punct fix a lui Krasnosel'skiĭ în con

Teorema 1.1.2 (Krasnosel'skiĭ) *Fie $(X, \|.\|)$ un spaţiu liniar normat; $K \subset X$ un con; $r, R \in \mathbb{R}_+$, $0 < r < R$; $K_{r,R} = \{u \in K : r \leq \|u\| \leq R\}$ şi fie $N : K_{r,R} \to K$ un operator compact. Dacă una din următoarele condiţii este satisfăcută:*

(a) *$N(u) \nless u$ dacă $\|u\| = r$ şi $N(u) \ngtr u$ dacă $\|u\| = R$;*

(b) *$N(u) \ngtr u$ dacă $\|u\| = r$ şi $N(u) \nless u$ dacă $\|u\| = R$.*

Atunci N are un punct fix u în K cu $r \leq \|u\| \leq R$.

Teorema 1.1.3 ([78]) *Fie $(X, \|.\|)$ un spaţiu liniar normat; $K_1, K_2, ..., K_n \subset X$ conuri; $K := K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$; $r, R \in \mathbb{R}_+^n$, $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$, $R = (R_1, R_2, ..., R_n)$ cu $0 < r_i < R_i$ pentru orice i, $K_{r,R} = \{u \in K : r_i \leq \|u_i\| \leq R_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$ şi fie $N : K_{r,R} \to K$, $N = (N_1, N_2, ..., N_n)$ un operator compact. Dacă pentru fiecare $i = 1, 2, ..., n$, una din următoarele condiţii este satisfăcută în $K_{r,R}$:*

(a) *$N_i(u) \nless u_i$ dacă $\|u_i\| = r_i$ şi $N_i(u) \ngtr u_i$ dacă $\|u_i\| = R_i$;*

(b) *$N_i(u) \ngtr u_i$ dacă $\|u_i\| = r_i$ şi $N_i(u) \nless u_i$ dacă $\|u_i\| = R_i$.*

Atunci N are un punct fix $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ în K cu $r_i \leq \|u_i\| \leq R_i$ pentru $i = 1, 2, ..., n$.

1.2 Un rezultat de comparare

Fie intervalele I_0 şi $J = [t_0, t_1]$, funcţiile $\phi : J \times I_0 \to \mathbb{R}$ şi $q : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi operatorul diferenţial A definit astfel

$$\begin{aligned} &Au(t) := -\frac{d}{dt}\phi\left(t, u'(t)\right) - q(t, u(t), u'(t)), \quad t \in J, \\ &u \in Y := \{u \in C^1(J) |\ u'[J] \subseteq I_0 \text{ şi } \phi(\cdot, u'(\cdot)) \in AC(J)\}. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Teorema 1.2.1 *([38]) Fie funcţiile $q : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $\phi : J \times I_0 \to \mathbb{R}$ care au următoarele proprietăţi:*

(ϕ_0) $\phi(t, z) < \phi(t, y)$ când $t \in J$, $y, z \in I_0$ şi $z < y$;

(q_1) $q(t, x, z) \leq q(t, y, z)$ pentru aproape toţi $t \in J$ şi oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \geq y$;

(q_2) $q(t, x, z) - q(t, x, y) \leq h(t, \phi(t, y) - \phi(t, z))$ pentru aproape toţi $t \in J$ şi oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $y, z \in I_0$, $y > z$, $0 < \phi(t, y) - \phi(t, z) \leq r$, unde $r > 0$, $h : J \times [0, r] \to \mathbb{R}_+$, şi $x(t) \equiv 0$ este singura funcţie din $AC(J)$ care satisface

$$x'(t) \leq h(t, x(t)) \text{ a.p.t. în } J, \quad x(t_0) = 0.$$

Presupunem că $u, w \in Y$ satisface

$$Au(t) \leq Aw(t) \text{ a.p.t. în } J, \quad u(t_0) \leq w(t_0), \quad u(t_1) \leq w(t_1).$$

Atunci $u(t) \leq w(t)$ pentru oricare $t \in J$. În particular, în cadrul unor astfel de condiţii asupra lui q şi ϕ, problema Dirichlet

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}\phi\left(t, u'(t)\right) = q(t, u(t), u'(t)) & \text{a.p.t. în } J \\ u\left(t_0\right) = c_0, \quad u\left(t_1\right) = c_1 \end{cases}$$

are cel mult o soluţie.

1.3 Un rezultat auxiliar de existenţă şi unicitate

Presupunem că

(H_Φ) $\phi : (-a, a) \to \mathbb{R}$, $0 < a \leq \infty$ este un omeomorfism astfel încât $\phi(0) = 0$, $\phi = \nabla\Phi$, cu $\Phi : (-a, a) \to (-\infty, 0]$ de clasă C^1, şi strict convex.

Deci, ϕ este strict monoton pe $(-a, a)$.

Dacă $\Phi^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este transformata Legendre-Fenchel a lui Φ definită de

$$\Phi^*(v) = \langle \phi^{-1}(v), v \rangle - \Phi[\phi^{-1}(v)] = \sup_{u \in (-a, a)} \{\langle u, v \rangle - \Phi(u)\},$$

atunci Φ^* este de asemenea strict convex şi

$$\Phi^*(v) \leq a|v| - \inf_{|v|<a} \Phi \circ \phi^{-1} =: a|v| + d. \tag{1.3.2}$$

Acum, folosind nenegativitatea lui Φ,

$$\Phi^*(v) \geq \sup_{u \in (-a,a)} \langle v, u \rangle = a|v|, \tag{1.3.3}$$

avem că Φ^* este coerciv pe $\mathbb{R}$. De asemenea Φ^* este de clasă C^1. Prin urmare

$$\phi^{-1} = \nabla \Phi^*,$$

astfel încât

$$v = \nabla \Phi(u) = \phi(u), u \in (-a,a) \Leftrightarrow u = \phi^{-1}(v) = \nabla \Phi^*(v), v \in \mathbb{R}.$$

Fiind date $h, H \in C[0,1]$, $H := \int_0^t h(s)\, ds$ şi $b \in \mathbb{R}$, definim

$$\begin{aligned} G(b;H) &= \int_0^1 \phi^{-1}[b - H(t)]\, dt = \int_0^1 \nabla_b \Phi^*[b - H(t)]\, dt \\ &= \nabla_b \int_0^1 \Phi^*[b - H(t)]\, dt = \nabla_b g(b;H), \end{aligned}$$

unde

$$g(b;H) = \int_0^1 \Phi^*[b - H(t)]\, dt.$$

Lema 1.3.1 *([7]) Dacă $\phi = \nabla \Phi$, cu Φ satisfăcând ipotezele (H_Φ), atunci, oricare ar fi $H \in C[0,1]$, ecuaţia*

$$\int_0^1 \phi^{-1}[b - H(t)]\, dt = 0 \tag{1.3.4}$$

are o soluţie unică $b := Q_\phi(H)$. Mai mult, $Q_\phi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ este continuu şi transformă submulţimi mărginite ale lui $C[0,1]$ în submulţimi mărginite ale lui $\mathbb{R}$.

Capitolul 2

Soluţii pozitive pentru anumite clase de ecuaţii neliniare

2.1 Prezentare generală

Acest capitol este dedicat existenţei, localizării şi multiplicităţii soluţiilor pozitive pentru anumite probleme la limită.

2.2 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu condiţii nelocale

Vom prezenta rezultate de existenţă, localizare şi multiplicitate a soluţiilor pozitive pentru problema

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) - au(1) = g[u] \end{cases} \tag{2.2.1}$$

unde $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$; $g : C[0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţională liniară dată de

$$g[u] = \int_0^1 u(s)\, d\gamma(s), \tag{2.2.2}$$

cu $g[1] < 1$; $\gamma \in C^1[0,1]$ crescătoare şi $0 < a < 1 - g[1]$.

Căutăm soluţii nenegative u pe $[0,1]$. Problema (2.2.1) este echivalentă cu următoarea ecuaţie integrală

$$u(t) = \int_0^t [c(\gamma(1) - \gamma(s) + a) + 1]h(s)\, ds + \int_t^1 c(\gamma(1) - \gamma(s) + a)h(s)\, ds, \tag{2.2.3}$$

unde $c := 1/(1 - g[1] - a)$, $c > 0$. Dacă asociem condiţiei nelocale $u(0) - au(1) = g[u]$, funcţia lui Green

$$G(t,s) = \begin{cases} c[\gamma(1) - \gamma(s) + a] + 1 & \text{pentru } 0 \le s \le t \le 1 \\ c[\gamma(1) - \gamma(s) + a] & \text{pentru } 0 \le t < s \le 1, \end{cases} \tag{2.2.4}$$

atunci (2.2.3) poate fi scrisă

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)\,ds. \tag{2.2.5}$$

Prin urmare am obţinut inversul operatorului L, $L^{-1} : C[0,1] \to C[0,1]$,

$$(L^{-1}h)(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)\,ds.$$

Următoarele proprietăţi sunt esenţiale pentru aplicarea tehnicii lui Krasnosel'skiĭ:
1) $G(t,s) \le H(s)$, oricare ar fi $t, s \in [0,1]$, unde

$$H(s) = c[\gamma(1) - \gamma(s) + a] + 1$$

2) $\delta H(s) \le G(t,s)$ oricare ar fi $t, s \in [0,1]$, unde

$$\delta = \min_{s\in[0,1]} \frac{c[\gamma(1) - \gamma(s) + a]}{c[\gamma(1) - \gamma(s) + a] + 1}.$$

Este de observat faptul că $\delta > 0$ întrucât $a, c > 0$ şi $\gamma(1) \ge \gamma(s)$, oricare ar fi $s \in [0,1]$. De asemenea, este evident că $\delta < 1$.

Fie $N : C([0,1]; \mathbb{R}_+) \to C([0,1]; \mathbb{R}_+)$ definit astfel

$$N(u)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\,ds.$$

Proprietăţile de mai sus ale funcţiilor lui Green implică faptul că pentru oricare $t, t^* \in [0,1]$, avem:

$$N(u)(t) \ge \delta N(u)(t^*). \tag{2.2.6}$$

Dacă t^* este astfel încât $N(u)(t^*) = \|N(u)\|_\infty$, atunci (2.2.6) ne arată că

$$N(u)(t) \ge \delta \|N(u)\|_\infty \quad \text{oricare ar fi} \quad t \in [0,1] \tag{2.2.7}$$

şi orice funcţie nenegativă $u \in C[0,1]$.

Bazându-ne pe aceste estimări putem defini conul

$$K = \{u \in C[0,1] : u(t) \ge \delta \|u\|_\infty, \text{ oricare ar fi } t \in [0,1]\}. \tag{2.2.8}$$

Datorită relaţiei (2.2.7) avem proprietatea de invarianţă $N(K) \subset K$. Aşadar, problema (2.2.1) este echivalentă cu problema de punct fix $u = Nu$, $u \in K$, pentru operatorul N din K. Continuitatea lui f implică complet continuitatea lui N datorită argumentelor oferite de teorema Ascoli-Arzela.

Este de observat faptul că (2.2.7) reprezintă o inegalitate slabă de tip Harnack pentru super soluţiile nenegative ale problemei (2.2.1).

2.2.1 Rezultate de existenţă şi localizare

Teorema 2.2.1 *Presupunând că există α, $\beta > 0$ cu $\alpha \ne \beta$, astfel încât*

$$A\lambda > \alpha, \quad B\Lambda < \beta, \tag{2.2.9}$$

unde

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 G(t^*, s)\, ds, \ \textit{pentru un punct ales} \ \ t^* \in [0,1],\\
B &= \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 G(t,s)\, ds,\\
\lambda &= \min\{f(t,u) : 0 \le t \le 1,\ \delta\alpha \le u \le \alpha\},\\
\Lambda &= \max\{f(t,u) : 0 \le t \le 1,\ \delta\beta \le u \le \beta\},
\end{aligned}$$

Atunci (2.2.1) *are cel puţin o soluţie pozitivă* u *cu* $r \le \|u\|_\infty \le R$, *unde* $r = \min\{\alpha, \beta\}$, $R = \max\{\alpha, \beta\}$.

Următoarea teoremă este despre existenţa a cel puţin o pereche α, β care satisface condiţiile (2.2.9).

Teorema 2.2.2 *Fie* f *o funcţie crescătoare cu* $f = f(u)$. *Presupunem că una din următoarele condiţii este satisfăcută:*

(i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ *şi* $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$;

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ *şi* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Atunci (2.2.1) *are cel puţin o soluţie pozitivă.*

2.2.2 Un rezultat de multiplicitate

Teorema 2.2.1 garantează existenţa soluţiilor într-o coroană conică. Evident, dacă ipotezele Teoremei 2.2.1 sunt satisfăcute pentru mai multe coroane conice disjuncte, atunci se obţin soluţii multiple.

Teorema 2.2.3 *Fie* f *o funcţie crescătoare cu* $f = f(u)$. *Dacă condiţia*

(iii) $\limsup_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} > \dfrac{1}{\delta A}$ *şi* $\liminf_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} < \dfrac{1}{B}$

este îndeplinită, atunci (2.2.1) *are un şir de soluţii pozitive* $(u_n)_{n\ge 1}$ *astfel încât* $\|u_n\|_\infty \to \infty$ *când* $n \to \infty$.

Dacă condiţia

(iv) $\limsup_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} > \dfrac{1}{\delta A}$ *şi* $\liminf_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} < \dfrac{1}{B}$

este îndeplinită, atunci (2.2.1) *are un şir de soluţii pozitive* $(u_n)_{n\ge 1}$ *astfel încât* $\|u_n\|_\infty \to 0$ *când* $n \to \infty$.

2.3 Problema Dirichlet-Neumann pentru ecuaţii cu ϕ-Laplacian

Vom prezenta rezultate de existenţă, localizare şi multiplicitate pentru soluţii pozitive ale problemei la limită

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + f(t,u) = 0, & 0 < t < 1 \\ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.3.10}$$

Motivaţia acestui studiu o constituie cazurile ecuaţiilor cu p-Laplacian şi cu operatori de curbură în spaţiile Euclidian şi Minkowski, pentru care problema (2.3.10) devine

$$\begin{cases} \left(|u'|^{p-2} u'\right)' + f(t, u) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2.3.11}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}}\right)' + f(t, u) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2.3.12}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u'^2}}\right)' + f(t, u) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.3.13}$$

Inspiraţi de cele trei exemple bine cunoscute, mulţi autori au studiat cazurile omeomorfismelor pe $\mathbb{R}$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; ale omeomorfismelor cu codomeniu mărginit, $\phi : \mathbb{R} \to (-b, b)$; şi ale omeomorfismelor cu domeniul mărginit, $\phi : (-a, a) \to \mathbb{R}$, separat. În această secţiune, cele trei cazuri vor fi studiate în mod unitar presupunând că ϕ este un omeomorfism de la $(-a, a)$ la $(-b, b)$, şi $0 < a, b \leq \infty$.

2.3.1 Rezultate de existenţă şi localizare

În această secţiune studiem soluţiile pozitive ale problemei (2.3.10). Avem următoarele ipoteze: $\phi : (-a, a) \to (-b, b)$, $0 < a, b \leq \infty$ este un omeomorfism crescător astfel încât $\phi(0) = 0$ şi $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie continuă cu $f(t, x) < b$.

Mai întâi obţinem ecuaţia integrală echivalentă cu problema (2.3.10)

$$u(t) = -\int_t^1 \phi^{-1}\left(-\int_0^\tau f(s, u(s))\, ds\right) d\tau. \tag{2.3.14}$$

În schimb, dacă o funcţie $u \in C([0, 1]; \mathbb{R}_+)$ satisface (2.3.14), care înseamnă implicit că

$$\int_0^\tau f(s, u(s))\, ds < b$$

oricare ar fi $\tau \in [0, 1]$, atunci u este o soluţie pozitivă a problemei (2.3.10).

Mai departe, presupunând în plus că $f(t, x) < b$ oricare ar fi $t \in [0, 1]$ şi $x \in \mathbb{R}_+$, putem defini operatorul integral $N : C([0, 1]; \mathbb{R}_+) \to C([0, 1]; \mathbb{R}_+)$ astfel

$$N(u)(t) = -\int_t^1 \phi^{-1}\left(-\int_0^\tau f(s, u(s))\, ds\right) d\tau, \tag{2.3.15}$$

şi atunci, aflarea soluţiilor pozitive ale problemei (2.3.10) este echivalentă cu problema de punct fix pentru operatorul N pe $C([0, 1]; \mathbb{R}_+)$. Este de observat faptul că datorită argumentelor oferite de teorema Ascoli-Arzela, N este complet continuu. Fie $\|.\|_\infty$ norma pe $C[0, 1]$.

Pentru a putea aplica teorma lui Krasnosel'skiĭ avem nevoie de o inegalitate slabă de tip

Harnack pentru operatorul diferenţial $Lu := -(\phi(u'))'$ şi condiţiile la limită $u'(0) = u(1) = 0$.

Lema 2.3.1 *Pentru fiecare* $c \in (0,1)$, *şi orice* $u \in C^1[0,1] \cap C([0,1];\mathbb{R}_+)$ *cu* $u'(0) = u(1) = 0$, $u'(t) \in (-a,a)$ *oricare ar fi* $t \in [0,1]$, $\phi \circ u' \in W^{1,1}(0,1)$ *şi* $(\phi(u'))' \leq 0$ *pe* $[0,1]$, *avem*

$$u(t) \geq (1-c)\|u\|_\infty, \text{ oricare ar fi } t \in [0,c]. \tag{2.3.16}$$

Pentru primul rezultat avem nevoie de următoarele ipoteze:

(A1) $\phi : (-a,a) \to (-b,b)$, $0 < a, b \leq \infty$ este un omeomorfism crescător astfel încât $\phi(0) = 0$;

(A2) $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie continuă, $f(t,.)$ este crescătoare pe $\mathbb{R}_+$ pentru fiecare $t \in [0,1]$, şi $f(t,x) < b$ oricare ar fi $t \in [0,1]$ şi $x \in \mathbb{R}_+$.

Teorema 2.3.1 *Presupunem că ipotezele* (A1) *şi* (A2) *sunt îndeplinite. În plus presupunem că există* $c, \alpha, \beta > 0$ *cu* $c < 1$ *şi* $\alpha \neq \beta$ *astfel încât*

$$\Phi(\alpha) := -\int_0^c \phi^{-1}\left(-\int_0^\tau f(s,(1-c)\alpha)\,ds\right)d\tau > \alpha, \tag{2.3.17}$$

$$\Psi(\beta) := -\int_0^1 \phi^{-1}\left(-\int_0^\tau f(s,\beta)\,ds\right)d\tau < \beta. \tag{2.3.18}$$

Atunci (2.3.10) *are cel puţin o soluţie pozitivă* u *cu* $r \leq \|u\|_\infty \leq R$, *unde* $r = \min\{\alpha,\beta\}$, $R = \max\{\alpha,\beta\}$.

Următorul rezultat este unul de existenţă a cel puţin unei perechi de numere (α,β).

Teorema 2.3.2 *Presupunem că ipotezele* (A1) *şi* (A2) *sunt îndeplinite şi că una din următoarele condiţii este satisfăcută:*

(i) $\limsup_{\lambda\to\infty} \dfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to 0} \dfrac{\Psi(\lambda)}{\lambda} < 1$;

(ii) $\limsup_{\lambda\to 0} \dfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to\infty} \dfrac{\Psi(\lambda)}{\lambda} < 1$.

Atunci (2.3.10) *are cel puţin o soluţie pozitivă.*

2.3.2 Un rezultat de multiplicitate

Cu ajutorul următorului rezultat se obţine un şir de soluţii pozitive pentru problema 2.3.10, a cărui existenţă este garantată de oscilaţiile lui f către infinit sau zero.

Teorema 2.3.3 *Presupunem că ipotezele* (A1) *şi* (A2) *sunt îndeplinite. Dacă condiţia*

(iii) $\limsup_{\lambda\to\infty} \dfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to\infty} \dfrac{\Psi(\lambda)}{\lambda} < 1$

este satisfăcută, atunci (2.3.10) *are un şir de soluţii pozitive* $(u_n)_{n\geq 1}$ *astfel încât* $\|u_n\|_\infty \to \infty$ *când* $n \to \infty$.

Dacă condiţia

(iv) $\limsup_{\lambda\to 0} \dfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to 0} \dfrac{\Psi(\lambda)}{\lambda} < 1$

este satisfăcută, atunci (2.3.10) *are un şir de soluţii pozitive* $(u_n)_{n\geq 1}$ *astfel încât* $\|u_n\|_\infty \to 0$ *când* $n \to \infty$.

2.3.3 Exemple

Exemplu 2.3.4 Considerăm problema (2.3.12) unde

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(t,x) = \frac{\gamma x}{x+\delta} \tag{2.3.19}$$

şi $\gamma, \delta > 0$. În acest caz $a = \infty$, $b = 1$ şi se poate verifica foarte uşor condiţia (A2), în particular, inegalitatea $f(t,x) < 1$, are loc dacă şi numai dacă $\gamma \leq 1$. Cu ajutorul unui calcul direct obţinem

$$\Phi(\alpha) = \frac{1-\sqrt{1-A^2c^2}}{A}, \quad \Psi(\beta) = \frac{1-\sqrt{1-B^2}}{B},$$

unde

$$A = \frac{\gamma(1-c)\alpha}{(1-c)\alpha+\delta}, \quad B = \frac{\gamma\beta}{\beta+\delta}. \tag{2.3.20}$$

Acum este uşor de observat că

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} = \frac{\gamma(1-c)c^2}{2\delta} \quad \text{şi} \quad \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda} = 0. \tag{2.3.21}$$

Prin urmare, condiţia (ii) din Teorema 2.3.2 este satisfăcută dacă $[\gamma(1-c)c^2]/2\delta > 1$. Astfel, dacă

$$\delta < \gamma\frac{(1-c)c^2}{2} \quad \text{şi} \quad \gamma \leq 1,$$

atunci problema (2.3.12) are cel puţin o soluţie pozitivă.

Exemplu 2.3.5 Considerăm problema (2.3.13) pentru aceeaşi funcţie (2.3.19). În acest caz $a = 1$, $b = \infty$ şi condiţia (A2) are loc pentru orice $\gamma, \delta > 0$. Avem

$$\Phi(\alpha) = \frac{\sqrt{1+A^2c^2}-1}{A}, \quad \Psi(\beta) = \frac{\sqrt{1+B^2}-1}{B},$$

unde A, B sunt date de (2.3.20), şi limitele (2.3.21) sunt satisfăcute de asemenea. Prin urmare, dacă

$$\delta < \gamma\frac{(1-c)c^2}{2} \quad \text{şi} \quad \gamma > 0,$$

atunci problema (2.3.13) are cel puţin o soluţie pozitivă.

Exemplu 2.3.6 Considerăm problema (2.3.12) unde, de această dată

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(t,x) = \frac{\gamma\sqrt{x}}{\delta+\sqrt{x}} \tag{2.3.22}$$

şi $\gamma, \delta > 0$. În acest caz $a = \infty$, $b = 1$ şi se poate verifica foarte uşor condiţia (A2), în particular, inegalitatea $f(t,x) < 1$, are loc dacă şi numai dacă $\gamma \leq 1$. Cu ajutorul unui calcul direct obţinem

$$\Phi(\alpha) = \frac{1-\sqrt{1-A^2c^2}}{A}, \quad \Psi(\beta) = \frac{1-\sqrt{1-B^2c^2}}{B},$$

unde

$$A = \frac{\gamma\sqrt{(1-c)\,\alpha}}{\sqrt{(1-c)\,\alpha}+\delta}, \quad B = \frac{\gamma\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\delta}. \tag{2.3.23}$$

Acum este uşor de observat că

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} = \infty \text{ şi } \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\Psi(\lambda)}{\lambda} = 0. \tag{2.3.24}$$

Prin urmare, condiţia (ii) din Teorema 2.3.2 este satisfăcută. Astfel, problema (2.3.12) are cel puţin o soluţie pozitivă.

Exemplu 2.3.7 Considerăm problema (2.3.13) pentru aceeaşi funcţie (2.3.22). În acest caz $a = 1$, $b = \infty$ şi condiţia (A2) are loc pentru orice $\gamma, \delta > 0$. Avem

$$\Phi(\alpha) = \frac{\sqrt{1+A^2c^2}-1}{A}, \quad \Psi(\beta) = \frac{\sqrt{1+B^2c^2}-1}{B},$$

unde A, B sunt date de (2.3.23), şi limitele (2.3.24) sunt satisfăcute de asemenea. Prin urmare problema (2.3.13) are cel puţin o soluţie pozitivă.

2.4 Problema Dirichlet pentru ecuaţii cu ϕ-Laplacian

În această secţiune, ne concentrăm asupra existenţei, localizării şi multiplicităţii soluţiilor pozitive ale următoarei probleme Dirichlet

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + f(t,u) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2.4.25}$$

unde ϕ este un omeomorfism de la $(-a,a)$ la $\mathbb{R}$, $0 < a \leq \infty$.

Sub aceste ipoteze sunt două modele de bază (a se vedea C. Bereanu, P. Jebelean and J. Mawhin [11], S.-S. Chen and Z.-H. Ma [20]):

(1) Pentru $a = \infty$ avem operatorul p-Laplacian,

$$\phi(u) = |u|^{p-2}u, \text{ cu } p > 1.$$

(2) Pentru $a = 1$ avem operatorul de curbură în spaţiul Minkowski,

$$\phi(u) = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

2.4.1 Rezultate de existenţă şi localizare

În această secţiune, demonstrăm existenţa soluţiilor pozitive pentru problema (2.4.25). Avem următoarele ipoteze: $\phi : (-a,a) \to \mathbb{R}$, $0 < a \leq \infty$ este un omeomorfism crescător astfel încât $\phi(0) = 0$ şi $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie continuă.

Pentru a obţine ecuaţia integrală echivalentă cu problema (2.4.25), vom considera mai întâi problema:

$$\begin{cases} (\phi\,(u'))' + h\,(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u\,(0) = u\,(1) = 0, \end{cases} \tag{2.4.26}$$

unde $h \in C[0,1]$. Ecuaţia integrală echivalentă cu problema (2.4.26) este

$$u(t) = \int_0^t \phi^{-1}\left(b - \int_0^\tau h(s)\,ds\right)\,d\tau, \tag{2.4.27}$$

unde $b = \phi(u'(0))$. Potrivit Lemei 1.3.1 (dată de C. Bereanu and J. Mawhin [7]), există un unic $b = b(h)$. În plus, funcţia $b : C[0,1] \to \mathbb{R}$ este continuă şi duce mulţimi mărginite în mulţimi mărginite.

Ţinând cont de acestea, oricare ar fi $t \in [0,1]$ putem defini operatorul integral $S : L^1[0,1] \to C^1[0,1]$ astfel

$$(Sh)(t) = \int_0^t \phi^{-1}\left(b(h) - \int_0^\tau h(s)\,ds\right)\,d\tau, \tag{2.4.28}$$

care are următoarele proprietăţi:

(a) Pentru fiecare $h \geq 0$, $Sh \geq 0$;

(b) Dacă $h_1 \geq h_2 \geq 0$ atunci $Sh_1 \geq Sh_2$.

Acum, întorcându-ne la problema (2.4.25), avem echivalenţa sa cu următoarea ecuaţie integrală

$$u = S \circ F(u), \tag{2.4.29}$$

unde $F(u) = f(\cdot, u)$.

Apoi, definim operatorul integral $N : C([0,1];\mathbb{R}_+) \to C([0,1];\mathbb{R}_+)$,

$$N(u)(t) = \int_0^t \phi^{-1}\left(b - \int_0^\tau f(s, u(s))\,ds\right)\,d\tau, \tag{2.4.30}$$

unde $b = b(f(\cdot, u(\cdot)))$. Prin urmare, aflarea soluţiilor pozitive ale problemei (2.4.25) este echivalentă cu problema de punct fix pentru operatorul N pe $C([0,1];\mathbb{R}_+)$. Este de observat faptul că datorită argumentelor oferite de teorema Ascoli-Arzela, N este complet continuu.

Pentru a putea aplica teorema lui Krasnosel'skiĭ avem nevoie de o inegalitate de tip Harnack pentru operatorul diferenţial $Lu := -(\phi(u'))'$.

Lema 2.4.1 *Pentru fiecare* $t_0, t_1 \in (0,1)$ *cu* $t_0 < t_1$, *şi orice* $u \in C^1[0,1] \cap C\,([0,1]\,;\mathbb{R}_+)$ *cu* $u\,(0) = u\,(1) = 0$, $u'\,(t) \in (-a, a)$ *oricare ar fi* $t \in [0,1]$, $\phi \circ u' \in W^{1,1}(0,1)$ *şi* $(\phi(u'))' \leq 0$ *a.p.t. pe* $[0,1]$, *avem*

$$u(t) \geq \gamma(t)\|u\|_\infty, \ \textit{oricare ar fi} \ \ t \in [0,1], \tag{2.4.31}$$

where

$$\gamma(t) = \begin{cases} \min\{t_0, 1 - t_1\}, & \textit{oricare ar fi} \ \ t \in [t_0, t_1] \\ 0, & \textit{altfel.} \end{cases}$$

Pentru următorul rezultat avem nevoie de ipotezele:

(B1) $\phi : (-a, a) \to \mathbb{R}$, $0 < a \leq \infty$ este un omeomorfism crescător astfel încât $\phi(0) = 0$;

(B2) $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie continuă, $f(t, .)$ este crescătoare pe $\mathbb{R}_+$ oricare ar fi $t \in [0, 1]$.

Teorema 2.4.1 *Presupunem că ipotezele* (B1) *şi* (B2) *sunt îndeplinite. În plus presupunem că există* $\alpha, \beta > 0$ *cu* $\alpha \neq \beta$ *astfel încât*

$$\|Sf(\cdot, \gamma(\cdot)\alpha)\|_\infty > \alpha, \tag{2.4.32}$$

$$\|Sf(\cdot, \beta)\|_\infty < \beta. \tag{2.4.33}$$

Atunci (2.4.25) *are cel puţin o soluţie pozitivă* u *cu* $r \leq \|u\|_\infty \leq R$, *unde* $r = \min\{\alpha, \beta\}$, $R = \max\{\alpha, \beta\}$.

Următoarea teoremă este una de existenţă a cel puţin unei perechi de numere α, β care satisfac condiţiile (2.4.32), (2.4.33).

Teorema 2.4.2 *Presupunem că ipotezele* (B1) *şi* (B2) *sunt îndeplinite şi că una din următoarele condiţii este satisfăcută:*

(i) $\limsup_{\lambda\to\infty} \dfrac{\|Sf(\cdot, \gamma(\cdot)\lambda)\|_\infty}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to 0} \dfrac{\|Sf(\cdot, \lambda)\|_\infty}{\lambda} < 1$;

(ii) $\limsup_{\lambda\to 0} \dfrac{\|Sf(\cdot, \gamma(\cdot)\lambda)\|_\infty}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to\infty} \dfrac{\|Sf(\cdot, \lambda)\|_\infty}{\lambda} < 1$.

Atunci (2.4.25) *are cel puţin o soluţie pozitivă.*

2.4.2 Un rezultat de multiplicitate

Teorema 2.4.3 *Presupunem că ipotezele* (B1) *şi* (B2) *sunt îndeplinite. Dacă condiţia*

(iii) $\limsup_{\lambda\to\infty} \dfrac{\|Sf(\cdot, \gamma(\cdot)\lambda)\|_\infty}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to\infty} \dfrac{\|Sf(\cdot, \lambda)\|_\infty}{\lambda} < 1$

este satisfăcută, atunci (2.4.25) *are un şir de soluţii pozitive* $(u_n)_{n\geq 1}$ *astfel încât* $\|u_n\|_\infty \to \infty$ *când* $n \to \infty$.

Dacă condiţia

(iv) $\limsup_{\lambda\to 0} \dfrac{\|Sf(\cdot, \gamma(\cdot)\lambda)\|_\infty}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to 0} \dfrac{\|Sf(\cdot, \lambda)\|_\infty}{\lambda} < 1$

este satisfăcută, atunci (2.4.25) *are un şir de soluţii pozitive* $(u_n)_{n\geq 1}$ *astfel încât* $\|u_n\|_\infty \to 0$ *când* $n \to \infty$.

2.5 Problema Neumann-Robin pentru ecuaţii cu ϕ-Laplacian

Scopul acestei secţiuni este de a prezenta noi rezultate de existenţă, localizare şi multiplicitate a soluţiilor pozitive pentru problema

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + f(t, u) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) - au'(0) = 0 \\ u'(1) = 0, \end{cases} \tag{2.5.34}$$

unde $a > 0$, ϕ este un omeomorfism de la $\mathbb{R}$ la $(-b, b)$ şi $0 < b \leq \infty$.

Potrivit literaturii de specialitate C. Bereanu şi J. Mawhin [9], C. Bereanu, P. Jebelean şi J. Mawhin [11], A. Cabada şi R. L. Pouso [18], S.-S. Chen şi Z.-H. Ma [20], există două modele remarcabile în acest context:

(1) Operatorul p-Laplacian, unde $b = \infty$ şi

$$\phi(u) = |u|^{p-2}u, \quad \text{cu} \quad p > 1. \tag{2.5.35}$$

(2) Operatorul de curbură, unde $b < \infty$ şi

$$\phi(u) = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}. \tag{2.5.36}$$

2.5.1 Rezultate de existenţă şi localizare

Avem următoarele ipoteze: $\phi : \mathbb{R} \to (-b, b)$, $0 < b \leq \infty$ este un omeomorfism crescător astfel încât $\phi(0) = 0$ şi $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie continuă cu $f(t, x) < b$.

Mai întâi obţinem ecuaţia integrală echivalentă cu problema (2.5.34)

$$u(t) = a\phi^{-1}\left(\int_0^1 f(s, u(s))\, ds\right) + \int_0^t \phi^{-1}\left(\int_\tau^1 f(s, u(s))\, ds\right) d\tau. \tag{2.5.37}$$

Apoi, presupunând că $f(t, x) < b$ oricare ar fi $t \in [0, 1]$ şi $x \in \mathbb{R}_+$, definim operatorul integral $N : C([0, 1]; \mathbb{R}_+) \to C([0, 1]; \mathbb{R}_+)$ astfel

$$N(u)(t) = a\phi^{-1}\left(\int_0^1 f(s, u(s))\, ds\right) + \int_0^t \phi^{-1}\left(\int_\tau^1 f(s, u(s))\, ds\right) d\tau, \tag{2.5.38}$$

şi, prin urmare, aflarea soluţiilor pozitive ale problemei (2.5.34) este echivalentă cu problema de punct fix pentru operatorul N pe $C([0, 1]; \mathbb{R}_+)$. Este de observat faptul că datorită argumentelor oferite de teorema Ascoli-Arzela, N este complet continuu.

Pentru a putea aplica teorema lui Krasnosel'skiĭ avem nevoie de o inegalitate de tip Harnack pentru operatorul $Lu := -(\phi(u'))'$ şi condiţiile la limită.

Lema 2.5.1 *Pentru fiecare $d \in (0, 1)$, şi orice $u \in C^1[0, 1] \cap C([0, 1]; \mathbb{R}_+)$ cu $u(0) - au'(0) = u'(1) = 0$, $\phi \circ u' \in W^{1,1}(0, 1)$ şi $(\phi(u'))' \leq 0$ a.p.t. pe $[0, 1]$, avem*

$$u(t) \geq \gamma(t)\|u\|_\infty, \ \textit{oricare ar fi} \ \ t \in [0, 1], \tag{2.5.39}$$

unde

$$\gamma(t) = \begin{cases} \dfrac{a + d}{a + 1}, & \textit{pentru } t \in [d, 1] \\ 0, & \textit{pentru } t \in [0, d). \end{cases}$$

Pentru următoarea teoremă avem nevoie de ipotezele:

(C1) $\phi : \mathbb{R} \to (-b, b)$, $0 < b \leq \infty$ este un omeomorfism crescător astfel încât $\phi(0) = 0$;

(C2) $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie continuă, $f(t,.)$ este crescătoare pe $\mathbb{R}_+$ oricare ar fi $t \in [0,1]$ şi $f(t,x) < b$ oricare ar fi $t \in [0,1]$ şi $x \in \mathbb{R}_+$.

Teorema 2.5.1 *Presupunem că ipotezele* (C1) *şi* (C2) *sunt îndeplinite. În plus presupunem că există* $\alpha, \beta > 0$ *cu* $\alpha \neq \beta$ *astfel încât*

$$\Phi(\alpha) := a\phi^{-1}\left(\int_0^1 f(s,\gamma(s)\alpha)\,ds\right) + \int_0^1 \phi^{-1}\left(\int_\tau^1 f(s,\gamma(s)\alpha)\,ds\right)d\tau > \alpha, \tag{2.5.40}$$

$$\Psi(\beta) := a\phi^{-1}\left(\int_0^1 f(s,\beta)\,ds\right) + \int_0^1 \phi^{-1}\left(\int_\tau^1 f(s,\beta)\,ds\right)d\tau < \beta. \tag{2.5.41}$$

Atunci (2.5.34) *are cel puţin o soluţie pozitivă* u *cu* $r \leq \|u\|_\infty \leq R$, *unde* $r = \min\{\alpha,\beta\}$, $R = \max\{\alpha,\beta\}$.

Teorema 2.5.2 *Presupunem că ipotezele* (C1) *şi* (C2) *sunt îndeplinite şi că una din următoarele condiţii este satisfăcută:*

(i) $\limsup_{\lambda\to\infty} \dfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to 0} \dfrac{\Psi(\lambda)}{\lambda} < 1$;

(ii) $\limsup_{\lambda\to 0} \dfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to\infty} \dfrac{\Psi(\lambda)}{\lambda} < 1$.

Atunci (2.5.34) *are cel puţin o soluţie pozitivă.*

2.5.2 Un rezultat de multiplicitate

Următoarea teoremă garanteză existenţa unui şir de soluţii pozitive pentru problema (2.5.34).

Teorema 2.5.3 *Presupunem că ipotezele* (C1) *şi* (C2) *sunt îndeplinite. Dacă condiţia*

(iii) $\limsup_{\lambda\to\infty} \dfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to\infty} \dfrac{\Psi(\lambda)}{\lambda} < 1$

este satisfăcută, atunci (2.5.34) *are un şir de soluţii pozitive* $(u_n)_{n\geq 1}$ *astfel încât* $\|u_n\|_\infty \to \infty$ *când* $n \to \infty$.

Dacă condiţia

(iv) $\limsup_{\lambda\to 0} \dfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to 0} \dfrac{\Psi(\lambda)}{\lambda} < 1$

este satisfăcută, atunci (2.5.34) *are un şir de soluţii pozitive* $(u_n)_{n\geq 1}$ *astfel încât* $\|u_n\|_\infty \to 0$ *când* $n \to \infty$.

2.5.3 Cazuri particulare

În această subsecţiune, vom lua în considerare câteva cazuri particulare ale problemei (2.5.34).

Mai întâi considerăm modelul remarcabil cu p-Laplacian (2.5.35). Problema (2.5.34) devine

$$\begin{cases} \left(|u'|^{p-2}u'\right)' + f(t,u) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) - au'(0) = 0 \\ u'(1) = 0. \end{cases} \tag{2.5.42}$$

Acum, vom considera modelul care implică operatorul (2.5.36). Atunci problema (2.5.34) devine

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right)' + f\,(t,u) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) - au'\,(0) = 0 \\ u'\,(1) = 0. \end{cases} \tag{2.5.43}$$

2.5.4 Exemple

Exemplu 2.5.4 *(condiţia (ii), cazul $b < \infty$)* Considerăm problema (2.5.43) unde

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(t,x) = f(x) = \frac{x}{x+1}. \tag{2.5.44}$$

În acest caz $b = 1$ şi se poate verifica foarte uşor condiţia (C2), în particular, inegalitatea $f\,(t,x) < 1$ este îndeplinită. Cu ajutorul unui calcul direct obtţinem

$$\Phi(\lambda) = A\left(\frac{a+d}{\sqrt{1-A^2}} + \frac{1-d}{1+\sqrt{1-A^2}}\right), \quad \Psi\,(\lambda) = B\left(\frac{a}{\sqrt{1-B^2}} + \frac{1}{1+\sqrt{1-B^2}}\right),$$

unde

$$A = \frac{\lambda(a+d)(1-d)}{\lambda(a+d)+(a+1)}, \quad \text{şi} \quad B = \frac{\lambda}{\lambda+1}. \tag{2.5.45}$$

Acum este uşor de observat că

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} = \frac{(a+d)(1-d)(2a+d+1)}{2(a+1)} \quad \text{şi} \quad \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda} = 0. \tag{2.5.46}$$

Astfel condiţia (ii) din Teorema 2.5.2 este satisfăcută dacă

$$C := \frac{2(a+1)}{(a+d)(1-d)(2a+d+1)} < 1,$$

care este îndeplinită pentru un a suficient de mare. De exemplu putem alege $a = 7$ şi $d = 0.5$.

Exemplu 2.5.5 *(condiţia (iii), cazul $b = \infty$)* Dacă în (2.5.34) considerăm $\phi(u) = u$ atunci condiţiile (2.5.40) şi (2.5.41) devin

$$\Phi(\lambda) = f\left(\frac{a+d}{a+1}\lambda\right)\left(\frac{(1-c)(2a+d+1)}{2}\right), \quad \Psi(\lambda) = f(\lambda)\left(\frac{2a+1}{2}\right).$$

Considerăm

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(t,x) = f(x) = mx + nx\sin(p\ln(x+1)).$$

În acest caz $b = \infty$ şi condiţia (C2) este îndeplinită dacă

$$m \geq n(p+1). \tag{2.5.47}$$

Acum este uşor de observat că

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} = (m+n)\frac{(a+d)(1-d)(2a+d+1)}{2(a+1)}$$

şi

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda} = (m-n)\frac{2a+1}{2}.$$

Astfel condiţia (iii) din Teorema 2.5.3 este satisfăcută dacă

$$m+n > A \quad \text{şi} \quad m-n < B, \tag{2.5.48}$$

unde

$$A = \frac{2(a+1)}{(a+d)(1-d)(2a+d+1)} \quad \text{şi} \quad B = \frac{2}{2a+1}.$$

De exemplu, condiţiile (2.5.47) şi (2.5.48) sunt îndeplinite pentru

$$a = 2.5, \quad d = 0.3 \quad m = 0.46, \quad n = 0.15, \quad p = 2.$$

Exemplu 2.5.6 *(condiţia (iv), cazul $b < \infty$)* Considerăm

$$\phi(u) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

şi funcţia $f(t,x) = f(x)$ care este definită pe un interval mai mic $(0,\epsilon)$ astfel

$$f(x) = mx + nx\sin\left(p\ln\frac{1}{x}\right).$$

Aici $\epsilon > 0$ este ales astfel încât $f(x) < 1$ pe $(0,\epsilon)$. Funcţia este crescătoare pe $(0,\epsilon)$ dacă

$$m \geq n(p+1). \tag{2.5.49}$$

Aici

$$\Phi(\lambda) = (a+d)\phi^{-1}\left((1-d)f\left(\frac{a+d}{a+1}\lambda\right)\right) + \int_d^1 \phi^{-1}\left((1-\tau)f\left(\frac{a+d}{a+1}\lambda\right)\right)d\tau.$$

Dat fiind faptul că

$$\int_d^1 \phi^{-1}\left((1-\tau)f\left(\frac{a+d}{a+1}\lambda\right)\right)d\tau \geq 0,$$

o condiţie suficientă pentru $\Phi(\lambda) > \lambda$ este îndeplinită dacă

$$\phi^{-1}\left((1-d)f\left(\frac{a+d}{a+1}\lambda\right)\right) > \frac{\lambda}{a+d},$$

sau echivalent

$$(1-d)f\left(\frac{a+d}{a+1}\lambda\right) > \phi\left(\frac{\lambda}{a+d}\right).$$

De aici avem condiţia

$$\frac{f\left(\dfrac{a+d}{a+1}\lambda\right)}{\dfrac{a+d}{a+1}\lambda} > \frac{a+1}{(a+d)^2(1-d)\sqrt{1+\left(\dfrac{\lambda}{a+d}\right)^2}}.$$

Dacă $\lambda \to 0$ atunci

$$m+n > \frac{a+1}{(a+d)^2(1-d)}.$$

De asemenea

$$\Psi(\lambda) = a\phi^{-1}\left(f(\lambda)\right) + \int_0^1 \phi^{-1}\left((1-\tau)f\left(\lambda\right)\right) d\tau,$$

şi deoarece

$$\int_0^1 \phi^{-1}\left((1-\tau)f\left(\lambda\right)\right) d\tau \leq \phi^{-1}\left(f\left(\lambda\right)\right),$$

o condiţie suficientă pentru ca $\Psi(\lambda) < \lambda$ să fie îndeplinită este

$$\phi^{-1}\left(f\left(\lambda\right)\right) < \frac{\lambda}{a+1},$$

sau echivalent

$$f\left(\lambda\right) < \phi\left(\frac{\lambda}{a+1}\right).$$

De aici avem condiţia

$$\frac{f\left(\lambda\right)}{\lambda} < \frac{1}{(a+1)\sqrt{1+\left(\dfrac{\lambda}{a+1}\right)^2}},$$

care dacă $\lambda \to 0$ conduce la

$$m-n < \frac{1}{a+1}.$$

Astfel condiţia (iv) din Teorema 2.5.3 este satisfăcută dacă

$$m+n > A \ \text{ şi } \ m-n < B, \tag{2.5.50}$$

unde

$$A = \frac{a+1}{(a+d)^2(1-d)} \ \text{ şi } \ B = \frac{1}{a+1},$$

De exemplu condiţiile (2.5.49) şi (2.5.50) sunt îndeplinite pentru

$$a = 2.5, \quad d = 0.1, \quad m = 0.43, \quad n = 0.17, \quad p = 1.5.$$

Exemplu 2.5.7 *(condiţia (iv), cazul $b = \infty$)* Considerăm $\phi(u) = u$ şi funcţia

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(t,x) = f(x) = mx + nx \sin\left(p \ln \frac{1}{x}\right),$$

pentru $x > 0$ şi $f(0) = 0$. În acest caz $b = \infty$ şi condiţia (C2) este îndeplinită dacă

$$m \geq n(p+1). \tag{2.5.51}$$

Acum este uşor de observat că

$$\limsup_{\lambda \to 0} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} = (m+n)\frac{(a+c)(1-c)(2a+c+1)}{2(a+1)}$$

şi

$$\liminf_{\lambda \to 0} \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda} = (m-n)\frac{2a+1}{2}.$$

Astfel condiţia (iv) din Teorema 2.5.3 este satisfăcută dacă

$$m+n > A \quad \text{şi} \quad m-n < B, \tag{2.5.52}$$

unde

$$A = \frac{2(a+1)}{(a+c)(1-c)(2a+c+1)} \quad \text{şi} \quad B = \frac{2}{2a+1}.$$

De exemplu, condiţiile (2.5.51) şi (2.5.52) sunt îndeplinite pentru

$$a = 2, \quad d = 0.2, \quad m = 0.54, \quad n = 0.16, \quad p = 2.$$

Capitolul 3

Soluţii pozitive pentru anumite clase de sisteme de ecuaţii neliniare

3.1 Prezentare generală

Având în minte problemele şi tehnicile considerate în Capitolul 2, în acest capitol vom extinde rezultatele stabilite pentru ecuaţii la cazul general al sistemelor. Abordarea este bazată pe versiunea vectorială a teoremei lui Krasnosel'skiĭ dată de R. Precup [78].

3.2 Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu condiţii nelocale

În această secţiune considerăm următorul sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu condiţii nelocale dat de funcţionale liniare:

$$\begin{cases} u_1' = f_1(t, u_1, u_2) \\ u_2' = f_2(t, u_1, u_2) \\ u_1(0) - a_1 u_1(1) = g_1[u_1] \\ u_2(0) - a_2 u_2(1) = g_2[u_2] \end{cases} \tag{3.2.1}$$

unde $f_1, f_2 \in C([0,1] \times \mathbb{R}_+^2; \mathbb{R}_+)$; $g_1, g_2 : C[0,1] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţionale liniare date de

$$g_i[u] = \int_0^1 u(s)\, d\gamma_i(s), \tag{3.2.2}$$

cu $g_i[1] < 1$; $\gamma_i \in C^1[0,1]$ sunt crescătoare şi $0 < a_i < 1 - g_i[1]$ $(i = 1, 2)$.

Căutăm soluţii nenegative (u_1, u_2), $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$ pe $[0,1]$. Bazându-ne pe (2.2.5), problema (3.2.1) este echivalentă cu sistemul integral:

$$\begin{cases} u_1(t) = \displaystyle\int_0^1 G_1(t,s) f_1(s, u_1(s), u_2(s))\, ds \\ u_2(t) = \displaystyle\int_0^1 G_2(t,s) f_2(s, u_1(s), u_2(s))\, ds, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

unde $G_1(t,s)$ şi $G_2(t,s)$ sunt funcţiile lui Green corespunzătoare condiţiilor nelocale,

$$G_i(t,s) = \begin{cases} c_i[\gamma_i(1) - \gamma_i(s) + a_i] + 1 & \text{pentru } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ c_i[\gamma_i(1) - \gamma_i(s) + a_i] & \text{pentru } 0 \leq t < s \leq 1, \end{cases}$$

unde

$$c_i = \frac{1}{1 - g_i[1] - a_i} \quad (i = 1, 2).$$

Următoarele proprietăţi sunt esenţiale pentru aplicabilitatea tehnicii lui Krasnosel'skiĭ:
1) $G_i(t,s) \leq H_i(s)$, oricare ar fi $t, s \in [0,1]$, unde

$$H_i(s) = c_i[\gamma_i(1) - \gamma_i(s) + a_i] + 1 \ (i = 1, 2)$$

2) $\delta_i H_i(s) \leq G_i(t,s)$ oricare ar fi $t, s \in [0,1]$, unde

$$\delta_i = \min_{s \in [0,1]} \frac{c_i[\gamma_i(1) - \gamma_i(s) + a_i]}{c_i[\gamma_i(1) - \gamma_i(s) + a_i] + 1} \ (i = 1, 2).$$

Este de observat faptul că $\delta_i > 0$ şi $\delta_i < 1$. Fie $N : C([0,1]; \mathbb{R}_+^2) \to C([0,1]; \mathbb{R}_+^2)$, $N = (N_1, N_2)$ definit astfel

$$N_i(u_1, u_2)(t) = \int_0^1 G_i(t,s) f_i(s, u_1(s), u_2(s))\, ds \ (i = 1, 2).$$

Proprietăţile de mai sus ale funcţiilor lui Green implică faptul că pentru oricare $t, t^* \in [0,1]$, avem:

$$N_i(u_1, u_2)(t) \geq \delta_i N_i(u_1, u_2)(t^*).$$

Aceasta conduce la următoarea estimare

$$N_i(u_1, u_2)(t) \geq \delta_i \|N_i(u_1, u_2)\|_\infty \quad \text{oricare ar fi } \ t \in [0,1] \ \ (i = 1, 2) \tag{3.2.4}$$

şi orice funcţii nenegative $u_1, u_2 \in C[0,1]$.

Bazându-ne pe aceste estimări putem defini conurile

$$K_i = \{u_i \in C[0,1] : u_i(t) \geq \delta_i \|u_i\|_\infty, \text{oricare ar fi } t \in [0,1]\} \ (i = 1, 2), \tag{3.2.5}$$

şi conul produs $K := K_1 \times K_2$ în $C([0,1]; \mathbb{R}^2)$. Datorită relaţiei (3.2.4) avem proprietatea de invarianţă $N(K) \subset K$. Aşadar, problema (3.2.1) este echivalentă cu problema de punct fix $u = Nu$, $u \in K$, pentru operatorul N din K. Continuitatea lui f_1 şi f_2 implică complet continuitatea lui N datorită argumentelor oferite de teorema Ascoli-Arzela.

Este de observat faptul că (3.2.4) reprezintă o inegalitate slabă de tip Harnack pentru super soluţiile nenegative ale problemei (3.2.1).

3.2.1 Rezultate de existenţă şi localizare

Teorema 3.2.1 *Presupunând că există* α_i, $\beta_i > 0$ *cu* $\alpha_i \neq \beta_i$, $i = 1, 2$, *astfel încât*

$$\begin{aligned} A_1\lambda_1 &> \alpha_1, \quad B_1\Lambda_1 < \beta_1, \\ A_2\lambda_2 &> \alpha_2, \quad B_2\Lambda_2 < \beta_2, \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

unde

$$\begin{aligned} A_i &= \int_0^1 G_i(t^*, s)\, ds, \text{ pentru un punct ales } \; t^* \in [0,1], \\ B_i &= \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 G_i(t, s)\, ds, \\ \lambda_1 &= \min\{f_1(t, u_1, u_2) : 0 \le t \le 1,\ \delta_1\alpha_1 \le u_1 \le \alpha_1,\ \delta_2 r_2 \le u_2 \le R_2\}, \\ \lambda_2 &= \min\{f_2(t, u_1, u_2) : 0 \le t \le 1,\ \delta_1 r_1 \le u_1 \le R_1,\ \delta_2\alpha_2 \le u_2 \le \alpha_2\}, \\ \Lambda_1 &= \max\{f_1(t, u_1, u_2) : 0 \le t \le 1,\ \delta_1\beta_1 \le u_1 \le \beta_1,\ \delta_2 r_2 \le u_2 \le R_2\}, \\ \Lambda_2 &= \max\{f_2(t, u_1, u_2) : 0 \le t \le 1,\ \delta_1 r_1 \le u_1 \le R_1,\ \delta_2\beta_2 \le u_2 \le \beta_2\}, \end{aligned}$$

şi $r_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, $R_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$ $(i = 1, 2)$. *Atunci* (3.2.1) *are cel puţin o soluţie pozitivă* $u = (u_1, u_2)$ *cu* $r_i \le \|u_i\|_\infty \le R_i \quad (i = 1, 2)$.

În particular, dacă f_1 şi f_2 nu depind on t, adică, $f_1 = f_1(u_1, u_2)$ şi $f_2 = f_2(u_1, u_2)$, şi f_1, f_2 au anumite proprietăţi de monotonie în u_1 şi u_2, atunci putem specifica numerele λ_1, λ_2, Λ_1, Λ_2 şi condiţiile (3.2.6) sunt exprimate de valorile funcţiilor f_1, f_2 în doar patru puncte. Există şaisprezece cazuri posibile.

3.2.2 Un rezultat de multiplicitate

Teorema 3.2.1 garantează existenţa soluţiilor într-o coroană conică. Evident, dacă ipotezele Teoremei 3.2.1 sunt satisfăcute pentru mai multe coroane conice disjuncte, atunci este obţinut un număr finit sau infinit de soluţii (a se vedea R. Precup [79]).

Teorema 3.2.2 (A) *Fie* $(r^j)_{1\le j\le k}$, $(R^j)_{1\le j\le k}$ $(k \le \infty)$ *şiruri crescătoare finite sau infinite în* $\mathbb{R}^2_+$, *cu* $0 \le r^j < R^j$ *şi* $R^j < r^{j+1}$ *oricare ar fi* j. *Dacă ipotezele Teoremei 3.2.1 sunt satisfăcute pentru orice cuplu* (r^j, R^j), *atunci* (3.2.1) *are* k *(respectiv, când* $k = \infty$*, un şir infinit de) soluţii pozitive distincte.*

(B) *Fie* $(r^j)_{j\ge1}$, $(R^j)_{j\ge1}$ *şiruri descrescătoare infinite cu* $0 < r^j < R^j$ *şi* $R^j < r^{j+1}$ *oricare ar fi* j. *Dacă ipotezele Teoremei 3.2.1 sunt satisfăcute pentru orice cuplu* (r^j, R^j), *atunci* (3.2.1) *are un şir infinit de soluţii pozitive distincte.*

3.2.3 Exemple

Concluzionăm prin două exemple ilustrând Teorema 3.2.1.

Exemplu 3.2.3 Fie

$$f_i(u_1,u_2)=\frac{1}{15}\sqrt{u_1+u_2+1},\quad (i=1,2),$$

şi

$$\gamma_1(t)=\frac{1}{2}t,\quad \gamma_2(t)=\frac{3}{4}t,\quad a_1=\frac{1}{4},\quad a_2=\frac{1}{8}.$$

Atunci (3.2.1) devine

$$\begin{cases} u_1'=\dfrac{1}{15}\sqrt{u_1+u_2+1}\\ u_2'=\dfrac{1}{15}\sqrt{u_1+u_2+1}\\ u_1(0)-\dfrac{1}{4}u_1(1)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 u_1(t)\,dt\\ u_2(0)-\dfrac{1}{8}u_2(1)=\dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^1 u_2(t)\,dt, \end{cases} \tag{3.2.7}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} u_1(t)=\dfrac{1}{15}\displaystyle\int_0^1 G_1(t,s)\sqrt{u_1(s)+u_2(s)+1}\,ds\\ u_2(t)=\dfrac{1}{15}\displaystyle\int_0^1 G_2(t,s)\sqrt{u_1(s)+u_2(s)+1}\,ds, \end{cases} \tag{3.2.8}$$

unde $G_1(t,s)$ şi $G_2(t,s)$ sunt funcţiile lui Green

$$G_1(t,s)=\begin{cases} 6-4s & \text{pentru } 0\le s\le t\le 1\\ 5-4s & \text{pentru } 0\le t< s\le 1, \end{cases}$$

$$G_2(t,s)=\begin{cases} 10-8s & \text{pentru } 0\le s\le t\le 1\\ 9-8s & \text{pentru } 0\le t< s\le 1. \end{cases}$$

În acest caz, constantele $\delta_1,\delta_2>0$ sunt următoarele:

$$\delta_1=\delta_2=\frac{1}{2}=:\delta.$$

Acum trebuie să determinăm A_i şi B_i pentru $i\in\{1,2\}$. Avem

$$A_1=\int_0^1 G_1(t^*,s)\,ds=\int_0^{t^*}(6-4s)\,ds+\int_{t^*}^1(5-4s)\,ds=t^*+3.$$

Dacă alegem $t^*=0$, atunci $A_1=3$. De asemenea

$$A_2=\int_0^1 G_2(t^*,s)\,ds=\int_0^{t^*}(10-8s)\,ds+\int_{t^*}^1(9-8s)\,ds=t^*+5,$$

şi dacă alegem $t^*=0$, atunci $A_2=5$. În plus

$$B_1=\max_{0\le t\le 1}\int_0^1 G_1(t,s)\,ds=4 \quad\text{şi}\quad B_2=\max_{0\le t\le 1}\int_0^1 G_2(t,s)\,ds=6.$$

În acest caz $f_1(u_1, u_2)$ şi $f_2(u_1, u_2)$ sunt ambele crescătoare în u_1 şi u_2 pentru $u_1, u_2 \in \mathbb{R}_+$. Alegem $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 =: \beta$, cu $\alpha < \beta$, atunci $r_1 = r_2 = \alpha$, $R_1 = R_2 = \beta$ şi $\lambda_1 = f_1(\delta\alpha, \delta\alpha)$, $\Lambda_1 = f_1(\beta, \beta)$, $\lambda_2 = f_2(\delta\alpha, \delta\alpha)$, $\Lambda_2 = f_2(\beta, \beta)$. Valorile lui α şi β vor fi precizate în cele ce urmează. Din moment ce

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_i(x,x)}{x} = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f_i(x,x)}{x} = \infty,$$

putem afla α suficient de mic şi β suficient de mare astfel încât condiţiile

$$\frac{f_i(\delta\alpha, \delta\alpha)}{\delta\alpha} > \frac{1}{\delta A_i}, \quad \frac{f_i(\beta,\beta)}{\beta} < \frac{1}{B_i} \quad (i = 1, 2)$$

sunt satisfăcute. De exemplu, putem alege $\alpha = 0,2$ şi $\beta = 0,7$.

Prin urmare avem următorul rezultat.

Teorema 3.2.4 *În conformitate cu ipotezele de mai sus, sistemul (3.2.7) are cel puţin o soluţie pozitivă* $u = (u_1, u_2)$ *cu* $0,2 < \|u_i\|_\infty < 0,7 \quad (i = 1, 2)$.

Exemplu 3.2.5 Fie

$$f_1(u_1, u_2) = \frac{1}{15}\sqrt{u_1 + u_2 + 1}, \quad f_2(u_1, u_2) = \frac{1}{(2 + u_1^2)(4 + u_2^2)},$$

şi

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{2}t, \quad \gamma_2(t) = \frac{3}{4}t, \quad a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{8}.$$

Atunci (3.2.1) devine

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{1}{15}\sqrt{u_1 + u_2 + 1} \\ u_2' = \dfrac{1}{(2 + u_1^2)(4 + u_2^2)} \\ u_1(0) - \dfrac{1}{4}u_1(1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 u_1(t)\,dt \\ u_2(0) - \dfrac{1}{8}u_2(1) = \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^1 u_2(t)\,dt, \end{cases} \tag{3.2.9}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} u_1(t) = \dfrac{1}{15}\displaystyle\int_0^1 G_1(t,s)\sqrt{u_1(s) + u_2(s) + 1}\,ds \\ u_2(t) = \displaystyle\int_0^1 G_2(t,s)\frac{1}{(2 + u_1(s)^2)(4 + u_2(s)^2)}\,ds. \end{cases} \tag{3.2.10}$$

Funcţiile lui Green $G_i(t,s)$ şi valorile lui δ_i, A_i, B_i $(i = 1, 2)$ sunt aceleaşi precum în Exemplul 3.2.3. În acest caz $f_1(u_1, u_2)$ este crescătoare în u_1 şi u_2, în timp ce $f_2(u_1, u_2)$ este descrescătoare în u_1 şi u_2, pentru $u_1, u_2 \in \mathbb{R}_+$. Alegem $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 =: \beta$, cu $\alpha < \beta$. Atunci $r_1 = r_2 = \alpha$, $R_1 = R_2 = \beta$ şi $\lambda_1 = f_1(\delta\alpha, \delta\alpha)$, $\Lambda_1 = f_1(\beta, \beta)$, $\lambda_2 = f_2(\beta, \alpha)$, $\Lambda_2 = f_2(\delta\alpha, \delta\beta)$, unde α şi β vor fi precizate în cele ce urmează. Din moment ce

$$\lim_{y\to\infty} \frac{f_1(y,y)}{y} = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{y\to\infty} \frac{f_2(x,y)}{y} = 0,$$

uniform în $x \geq 0$, putem găsi $\beta > 0$ suficient de mare astfel încât

$$\frac{f_1(\beta,\beta)}{\beta} < \frac{1}{B_1}, \quad \frac{f_2(\delta\alpha,\delta\beta)}{\delta\beta} < \frac{1}{\delta B_2}.$$

Şi deoarece

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x,x)}{x} = \infty \text{ şi } \lim_{x\to 0}\frac{f_2(y,x)}{x} = 0,$$

cu β fixat ca mai sus, alegem α suficient de mic astfel încât

$$\frac{f_1(\delta\alpha,\delta\alpha)}{\delta\alpha} > \frac{1}{\delta A_1}, \quad \frac{f_2(\beta,\alpha)}{\alpha} > \frac{1}{A_2}.$$

De exemplu, putem alege $\beta = 0,9$ şi $\alpha = 0,2$.

Prin urmare avem următorul rezultat.

Teorema 3.2.6 *În conformitate cu ipotezele de mai sus, sistemul (3.2.9) are cel puţin o soluţie pozitivă* $u = (u_1, u_2)$ *cu* $0,2 < \|u_i\|_\infty < 0,9 \quad (i = 1, 2)$.

3.3 Problema Dirichlet-Neumann pentru sisteme cu ϕ-Laplacian

Problema (2.3.10) poate fi considerată un caz particular, pentru $n = 1$, a problemei pentru sistemul n-dimensional,

$$\begin{cases} (\phi_i(u_i'))' + f_i(t, u_1, u_2, ..., u_n) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u_i'(0) = u_i(1) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n). \end{cases} \tag{3.3.11}$$

În această secţiune extindem rezultatele de la ecuaţii la cazul general (3.3.11). Pentru orice index $i \in \{1, 2, ..., n\}$, spunem că omeomorfismul $\phi_i : (-a_i, a_i) \to (-b_i, b_i)$ satisface (A1) dacă ϕ_i este crescător şi $\phi_i(0) = 0$, şi că funcţia continuă $f_i : [0,1] \times \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ satisface (A2) dacă oricare ar fi $t \in [0,1]$, $f_i(t, x_1, ..., x_n)$ este crescătoare pe $\mathbb{R}_+$ în raport cu orice variabilă x_j, $j = 1, 2, ..., n$, şi $f_i(t, x) < b_i$ oricare ar fi $t \in [0,1]$ şi $x \in \mathbb{R}_+^n$. Sub aceste ipoteze, problema (3.3.11) este echivalentă cu sistemul integral

$$u_i(t) = -\int_t^1 \phi_i^{-1}\left[-\int_0^\tau f_i(s, u(s))\, ds\right] d\tau \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

unde $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$.

Potrivit Lemei 2.3.1, oricare ar fi i şi orice constantă $c_i \in (0,1)$, are loc o inegalitate slabă de tip Harnack pentru operatorul diferenţial $L_i v := -(\phi_i(v'))'$ şi condiţiile la limită $v'(0) = v(1) = 0$. Bazându-ne pe acestea putem defini conurile

$$K_i = \{u_i \in C([0,1]; \mathbb{R}_+) : u_i(t) \geq (1 - c_i)\|u_i\|_\infty, \text{ oricare ar fi } t \in [0, c_i]\}, \tag{3.3.12}$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$, şi conul produs

$$K := K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$$

în $C([0,1];\mathbb{R}^n)$.

Fie $N : C([0,1];\mathbb{R}^n_+) \to C([0,1];\mathbb{R}^n_+)$, $N = (N_1, N_2, ..., N_n)$ definit astfel

$$N_i(u)(t) = -\int_t^1 \phi_i^{-1}\left[-\int_0^\tau f_i(s,u(s))\,ds\right] d\tau \qquad (i = 1,2,...,n).$$

Dacă $u_j \in K_j$ oricare ar fi j, atunci $f_i(s,u(s)) \geq 0$ şi din Lema 2.3.1, avem $N_i(u) \in K_i$. Prin urmare, conul K este invariat de N. Mai mult, operatorul N este complet continuu din moment ce componentele N_i sunt complet continue.

3.3.1 Rezultate de existenţă şi localizare

Următorul rezultat este o generalizare a Teoremei 2.3.1.

Teorema 3.3.1 *Presupunem că ϕ_i, f_i satisfac* (A1) *şi* (A2) *pentru $i = 1,2,...,n$. În plus presupunem că există c_i, α_i, $\beta_i > 0$ cu $c_i < 1$ şi $\alpha_i \neq \beta_i$ astfel încât*

$$\Phi_i(\alpha) := -\int_0^{c_i} \phi_i^{-1}\left(-\int_0^\tau f_i(s,(1-c_1)\alpha_1,...,(1-c_n)\,\alpha_n)\,ds\right) d\tau > \alpha_i, \tag{3.3.13}$$

$$\Psi_i(\beta) := -\int_0^1 \phi_i^{-1}\left(-\int_0^\tau f_i(s,\beta)\,ds\right) d\tau < \beta_i, \tag{3.3.14}$$

pentru $i = 1,2,...,n$, unde $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ şi $\beta = (\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$. Atunci (3.3.11) *are cel puţin o soluţie pozitivă $u = (u_1,u_2,...,u_n)$ cu $r_i \leq \|u_i\|_\infty \leq R_i$, unde $r_i = \min\{\alpha_i,\beta_i\}$, $R_i = \max\{\alpha_i,\beta_i\}$, $i = 1,2,...,n$.*

Putem spune că pentru un index i dat, condiţia (i) din Teorema 2.3.2 este îndeplinită dacă pentru fiecare $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{i-1} > 0$,

$$\lim\sup_{\lambda_i\to\infty} \frac{\Phi_i(\lambda)}{\lambda_i} > 1 \quad \text{şi} \quad \lim\inf_{\lambda_i\to 0} \frac{\Psi_i(\lambda)}{\lambda_i} < 1,$$

uniform în raport cu $\lambda_{i+1},\lambda_{i+2},...,\lambda_n \in (0,\infty)$. Aici, prin λ înţelegem $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$. Vom înţelege condiţia (ii) într-o manieră similară. Analog, spunem că condiţia (iii) din Teorema 2.3.3 este îndeplinită pentru anumiţi i, dacă pentru fiecare $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{i-1} > 0$,

$$\lim\sup_{\lambda_i\to\infty} \frac{\Phi_i(\lambda)}{\lambda_i} > 1 \quad \text{şi} \quad \lim\inf_{\lambda_i\to\infty} \frac{\Psi_i(\lambda)}{\lambda_i} < 1,$$

uniform în raport cu $\lambda_{i+1},\lambda_{i+2},...,\lambda_n \in (0,\infty)$. Vom înţelege condiţia (iv) într-o manieră similară.

3.3.2 Un rezultat de multiplicitate

În această subsecţiune vom prezenta un rezultat de existenţă a unui şir de soluţii pozitive pentru problema (3.3.11).

Teorema 3.3.2 *Presupunem că* ϕ_i, f_i *satisfac* (A1) *şi* (A2) *pentru* $i = 1, 2, ..., n$. *În plus presupunem că mulţimea de indici* $I = \{1, 2, ..., n\}$ *admite partiţia* $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$, $I_j \cap I_k = \emptyset$ *pentru* $j \neq k$, *astfel încât condiţia (i) este îndeplinită pentru fiecare* $i \in I_1$, *condiţia (ii) este îndeplinită pentru fiecare* $i \in I_2$, *condiţia (iii) este îndeplinită pentru fiecare* $i \in I_3$ *şi condiţia (iv) este îndeplinită pentru fiecare* $i \in I_4$. *Dacă* $I_3 \neq \emptyset$ *sau* $I_4 \neq \emptyset$, *atunci problema* (3.3.11) *are un şir de soluţii pozitive.*

3.4 Problema Dirichlet pentru sisteme cu ϕ-Laplacian

În această secţiune studiem următoarea problemă pentru un sistem n-dimensional,

$$\begin{cases} (\phi_i(u_i'))' + f_i(t, u_1, u_2, ..., u_n) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u_i(0) = u_i(1) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n). \end{cases} \tag{3.4.15}$$

Vom permite omeomorfismelor ϕ_i să aibă domenii diferite, şi anume $\phi_i : (-a_i, a_i) \to \mathbb{R}$, $0 < a_i \leq \infty$ şi vom spune că (B1) este îndeplinită dacă ϕ_i este crescătoare şi $\phi_i(0) = 0$. Funcţia continuă $f_i : [0,1] \times \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ satisface (B2) dacă oricare ar fi $t \in [0,1]$, $f_i(t, x_1, ..., x_n)$ este crescătoare pe $\mathbb{R}_+$ în raport cu orice variabilă x_j, $j = 1, 2, ..., n$.

Sub aceste ipoteze, problema (3.4.15) este echivalentă cu sistemul integral

$$u_i(t) = \int_0^t \phi_i^{-1}\left(b_i - \int_0^\tau f_i(s, u(s))\, ds\right) d\tau \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

unde $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ şi $b_i = b_i(f_i(\cdot, u(\cdot)))$.

Potrivit Lemei 2.4.1, oricare ar fi i are loc o inegalitate slabă de tip Harnack pentru operatorul diferenţial $L_i v := -(\phi_i(v'))'$ şi condiţiile la limită $v(0) = v(1) = 0$. Bazându-ne pe acestea putem defini conurile

$$\begin{aligned} K_i = &\{u_i \in C([0,1]; \mathbb{R}_+) : u_i(0) = u_i(1) = 0 \text{ şi } u_i(t) \geq \gamma_i(t)\|u_i\|_\infty, \\ &\text{oricare ar fi } t \in [0,1]\}, \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$. Este de subliniat faptul că funcţiile γ_i sunt date de Lema 2.4.1 pentru subintervale posibil diferite $[t_0, t_1]$. Acum considerăm conul produs

$$K := K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$$

în $C([0,1]; \mathbb{R}^n)$.

Fie $N : C([0,1]; \mathbb{R}_+^n) \to C([0,1]; \mathbb{R}_+^n)$, $N = (N_1, N_2, ..., N_n)$ definit astfel

$$N_i(u)(t) = \int_0^t \phi_i^{-1}\left(b_i - \int_0^\tau f_i(s, u(s))\, ds\right) d\tau \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Dacă $u_j \in K_j$ oricare ar fi j, atunci $f_i(s, u(s)) \geq 0$ şi din Lema 2.4.1, avem $N_i(u) \in K_i$. Prin urmare conul K este invariat de N.

Rezultate de existenţă şi localizare

Următorul rezultat garantează existenţa soluţiilor pozitive ale problemei (3.4.15) precum şi localizarea acestora pe componente.

Teorema 3.4.1 *Presupunem că ϕ_i, f_i satisfac* (B1) *şi* (B2) *pentru $i = 1, 2, ..., n$. În plus presupunem că există α_i, $\beta_i > 0$ cu $\alpha_i \neq \beta_i$ astfel încât*

$$\|Sf_i(\cdot, \gamma_1(\cdot)\alpha_1, ..., \gamma_n(\cdot)\alpha_n)\|_\infty > \alpha_i, \tag{3.4.17}$$

$$\|Sf_i(\cdot, \beta)\|_\infty < \beta_i, \tag{3.4.18}$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$, unde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ şi S este dat de (2.4.28). Atunci (3.4.15) *are cel puţin o soluţie pozitivă $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ cu $r_i \leq \|u_i\|_\infty \leq R_i$, unde $r_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, $R_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$, $i = 1, 2, ..., n$.*

3.5 Problema Neumann-Robin pentru sisteme cu ϕ-Laplacian

Această secţiune este dedicată următoarei probleme pentru un sistem n-dimensional

$$\begin{cases} (\phi_i(u_i'))' + f_i(t, u_1, u_2, ..., u_n) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u_i(0) - a_i u_i'(0) = 0 \\ u_i'(1) = 0 \qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, ..., n), \end{cases} \tag{3.5.19}$$

unde $a_i > 0$. Pentru orice index $i \in \{1, 2, ..., n\}$, spunem că omeomorfismul $\phi_i : \mathbb{R} \to (-b_i, b_i)$ satisface (C1) dacă ϕ_i este crescător şi $\phi_i(0) = 0$, şi că funcţia continuă $f_i : [0,1] \times \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ satisface (C2) dacă oricare ar fi $t \in [0,1]$, $f_i(t, x_1, ..., x_n)$ este crescătoare pe $\mathbb{R}_+$ în raport cu orice variabilă x_j, $j = 1, 2, ..., n$, şi $f_i(t, x) < b_i$ oricare ar fi $t \in [0,1]$ şi $x \in \mathbb{R}_+^n$. Sub aceste ipoteze, problema (3.5.19) este echivalentă cu sistemul integral

$$u_i(t) = a_i \phi_i^{-1}\left(\int_0^1 f_i(s, u(s))\, ds\right) + \int_0^t \phi_i^{-1}\left(\int_\tau^1 f_i(s, u(s))\, ds\right) d\tau,$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$ şi $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$.

Potrivit Lemei 2.5.1, oricare ar fi i şi orice constană $d_i \in (0,1)$, are loc o inegalitate slabă de tip Harnack pentru operatorul diferenţial $L_i v := -(\phi_i(v'))'$ şi condiţiile la limită $v(0) - av'(0) = v'(1) = 0$. Bazându-ne pe acestea putem defini conurile

$$\begin{aligned} K_i = &\{u_i \in C([0,1]; \mathbb{R}_+) : u_i(0) - a_i u_i'(0) = u_i'(1) = 0 \text{ şi } u_i(t) \geq \gamma_i(t)\|u_i\|_\infty, \\ &\text{oricare ar fi } t \in [0,1]\}, \end{aligned}$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$. Este de observat faptul că funcţiile γ_i sunt date de Lema 2.5.1 pentru d_i şi a_i posibil diferite. Acum considerăm conul produs

$$K := K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$$

în $C([0,1];\mathbb{R}^n)$.

Fie $N : C([0,1];\mathbb{R}^n_+) \to C([0,1];\mathbb{R}^n_+)$, $N = (N_1, N_2, ..., N_n)$ definit astfel

$$N_i(u)(t) = a_i\phi_i^{-1}\left(\int_0^1 f_i(s,u(s))\,ds\right) + \int_0^t \phi_i^{-1}\left(\int_\tau^1 f_i(s,u(s))\,ds\right)d\tau,$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$.

Dacă $u_j \in K_j$ oricare ar fi j, atunci $f_i(s,u(s)) \geq 0$ şi din Lema 2.5.1, avem $N_i(u) \in K_i$. Prin urmare conul K este invariat de N. Mai mult, operatorul N este complet continuu din moment ce componentele N_i sunt complet continue.

Rezultate de existenţă şi localizare

Teorema 3.5.1 *Presupunem că ϕ_i, f_i satisfac* (C1) *şi* (C2) *pentru $i = 1, 2, ..., n$. În plus presupunem că există a_i, α_i, $\beta_i > 0$ cu $\alpha_i \neq \beta_i$ astfel încât*

$$\begin{aligned}\Phi_i(\alpha) := \; & a_i\phi_i^{-1}\left(\int_0^1 f_i(s,\gamma_1(s)\alpha_1, ..., \gamma_n(s)\alpha_n)\,ds\right) \\ & + \int_0^1 \phi_i^{-1}\left(\int_\tau^1 f_i(s,\gamma_1(s)\alpha_1, ..., \gamma_n(s)\alpha_n)\,ds\right)d\tau > \alpha_i,\end{aligned}$$

$$\Psi_i(\beta) := \; a_i\phi_i^{-1}\left(\int_0^1 f_i(s,\beta)\,ds\right) + \int_0^1 \phi_i^{-1}\left(\int_\tau^1 f_i(s,\beta)\,ds\right)d\tau < \beta_i,$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$, unde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ şi $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$. Atunci (3.5.19) *are cel puţin o soluţie pozitivă $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ cu $r_i \leq \|u_i\|_\infty \leq R_i$, unde $r_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, $R_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$, $i = 1, 2, ..., n$.*

Capitolul 4

Teorie abstractă

4.1 Prezentare generală

În acest capitol prezentăm o teorie abstractă cu privire la ecuaţii şi sisteme. Studiem existenţa, localizarea şi multiplicitatea soluţiilor pozitive folosind teorema de punct fix a lui Krasnosel'skiĭ în con.

4.2 Cazul ecuaţiilor

Considerăm problema abstractă

$$\begin{cases} Lu = F(u) \\ u \in B, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

unde $(X, \|\cdot\|)$ este un spaţiu Banach, $L : D(L) \subset X \to X$; $F : X \to X$ şi $B \subset X$. Printr-o soluţie a problemei (4.2.1) înţelegem un element $u \in D(L) \cap B$ pentru care $Lu = F(u)$. Apoi presupunem că L este inversabil, adică, pentru oricare $v \in X$ este un unic $u \in D(L) \cap B$ cu $Lu = v$. Apoi scriem ecuaţia echivalentă cu problema (4.2.1),

$$u = L^{-1}F(u),\ u \in X. \tag{4.2.2}$$

Căutăm soluţii u într-un con $K_0 \subset X$. În cele ce urmează vom numi astfel de soluţii *soluţii pozitive*. În acest scop avem nevoie de următoarele ipoteze suplimentare:

(D1) F este pozitiv şi crescător în raport cu relaţia de ordine indusă de K_0, adică

$$0 \le u \le v \ \text{ implică } \ 0 \le F(u) \le F(v); \tag{4.2.3}$$

(D2) L este inversabil şi

$$0 \le u \le v \ \text{ implică } \ 0 \le L^{-1}u \le L^{-1}v; \tag{4.2.4}$$

(D3) Există $\psi \in K_0 - \{0\}$, astfel încât oricare ar fi $u \in K_0$ avem

$$u \leq \|u\|\psi; \tag{4.2.5}$$

(D4) Există $\varphi \in K_0 - \{0\}$ cu $\|\varphi\| \leq 1$, astfel încât oricare ar fi $u \geq 0$ satisfăcând $Lu \geq 0$, avem

$$u \geq \|u\|\varphi. \tag{4.2.6}$$

este de observat faptul că simbolul $\leq$ din (4.2.3), (4.2.4), (4.2.5) şi (4.2.6) este folosit pentru a nota relaţia de ordine indusă de conul K_0, adică, $u \leq v$ dacă $v - u \in K_0$.

Bazându-ne pe estimările de la (D3), (D4) putem defini un con mai mic:

$$K = \{u \in K_0 : u \geq \|u\|\varphi\}. \tag{4.2.7}$$

Fie $N : X \to X$ definit astfel

$$N(u) = L^{-1}F(u), \tag{4.2.8}$$

şi atunci aflarea soluţiilor pozitive din K_0 ale problemei (4.2.1) este echivalentă cu problema de punct fix în K_0 pentru operatorul N. În cele ce urmează, operatorul N se presupune că este complet continuu.

Următoarea lemă ne oferă proprietatea de invarianţă a lui N de care avem nevoie.

Lema 4.2.1 *Presupunem că ipotezele (D1)-(D4) sunt satisfăcute. Atunci $N(K) \subset K$.*

4.2.1 Rezultate de existenţă şi localizare

Teorema 4.2.1 *Presupunem că ipotezele (D1)-(D4) sunt îndeplinite şi că norma $\|\cdot\|$ este monotonă în raport cu K_0, adică, din $0 \leq u \leq v$ avem $\|u\| \leq \|v\|$. În plus presupunem că există α, $\beta > 0$ cu $\alpha \neq \beta$, astfel încât*

$$\|N(\alpha\varphi)\| > \alpha, \tag{4.2.9}$$

$$\|N(\beta\psi)\| < \beta. \tag{4.2.10}$$

Atunci (4.2.1) are cel puţin o soluţie pozitivă cu $r \leq \|u\| \leq R$, unde $r = \min\{\alpha, \beta\}$, $R = \max\{\alpha, \beta\}$.

Teorema 4.2.2 *Presupunem că ipotezele (D1)-(D4) sunt îndeplinite. În plus presupunem că una din următoarele condiţii este satisfăcută:*

(i) $\limsup_{\lambda\to\infty} \dfrac{\|N(\lambda\varphi)\|}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to 0} \dfrac{\|N(\lambda\psi)\|}{\lambda} < 1$;

(ii) $\limsup_{\lambda\to 0} \dfrac{\|N(\lambda\varphi)\|}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to\infty} \dfrac{\|N(\lambda\psi)\|}{\lambda} < 1$.

Atunci (4.2.1) *are cel puţin o soluţie pozitivă.*

4.2.2 Un rezultat de multiplicitate

Teorema 4.2.3 *Presupunem că ipotezele (D1)-(D4) sunt îndeplinite. Dacă condiţia*

(iii) $\limsup_{\lambda\to\infty} \dfrac{\|N(\lambda\varphi)\|}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to\infty} \dfrac{\|N(\lambda\psi)\|}{\lambda} < 1$;

este satisfăcută, atunci (4.2.1) *are un şir de soluţii pozitive* $(u_n)_{n\geq 1}$ *astfel încât* $\|u_n\| \to \infty$ *când* $n \to \infty$.

Dacă condiţia

(iv) $\limsup_{\lambda\to 0} \dfrac{\|N(\lambda\varphi)\|}{\lambda} > 1$ *şi* $\liminf_{\lambda\to 0} \dfrac{\|N(\lambda\psi)\|}{\lambda} < 1$;

este satisfăcută, atunci (4.2.1) *are un şir de soluţii pozitive* $(u_n)_{n\geq 1}$ *astfel încât* $\|u_n\| \to 0$ *când* $n \to \infty$.

4.3 Cazul sistemelor

În această secţiune studiem problema pentru un sistem n-dimensional

$$\begin{cases} L_i u_i = F_i(u_1, u_2, ..., u_n) \\ u_i \in B_i \quad (i = 1, 2, ..., n). \end{cases} \tag{4.3.11}$$

presupunem că pentru orice index $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $(X_i, \|\cdot\|_i)$ sunt spaţii Banach, $L_i : D(L_i) \subset X_i \to X_i$, $F_i : X \to X_i$, $B_i \subset X_i$, unde $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Apoi presupunem că L_i sunt inversabile $(i = 1, 2, ..., n)$. Atunci putem scrie sistemul echivalent cu problema (4.3.11)

$$u_i = L_i^{-1} F_i(u), \quad u_i \in X_i, \tag{4.3.12}$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$, unde $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$.

Căutăm soluţii $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ cu u_i într-un con $K_0^i \subset X_i$. În acest scop avem nevoie de următoarele ipoteze suplimentare:

(D1') F_i sunt pozitive şi crescătoare, adică

$$0 \leq u_i \leq v_i,\ i = 1, 2, ..., n \ \text{ implică } \ 0 \leq F_j(u) \leq F_j(v),$$

pentru $j = 1, 2, ..., n$.

(D2') L_i sunt inversabile şi

$$0 \leq u_i \leq v_i,\ i = 1, 2, ..., n \ \text{ implică } \ 0 \leq L_i^{-1} u_i \leq L_i^{-1} v_i,$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$.

(D3') Există $\psi_i \in K_0^i - \{0\}$, astfel încât oricare ar fi $u_i \in K_0^i$ avem

$$u_i \leq \|u_i\|_i \psi_i,$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$.

(D4') Există $\varphi_i \in K_0^i - \{0\}$, cu $\|\varphi_i\| \leq 1$, astfel încât oricare ar fi $u_i \geq 0$ satisfăcând $L_i u_i \geq 0$, avem

$$u_i \geq \|u_i\|_i \varphi_i,$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$.

Bazându-ne pe aceste condiţii definim conurile

$$K_i = \{v \in K_0^i : v \geq \|v\|_i \varphi_i\}. \tag{4.3.13}$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$, şi considerăm conul produs $K := K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$.

Fie $N_i : X \to X_i$ definit astfel

$$N_i(u) = L_i^{-1} F_i(u), \tag{4.3.14}$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$ şi $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$. Similar cu Lema 4.2.1, putem arăta invarianţa conului K de către operatorul N. În cele ce urmează, presupunem că operatorii N_i sunt complet continui, ceea ce garantează că $N = (N_1, N_2, ..., N_n)$ este complet continuu.

Rezultate de existenţă şi localizare

Teorema 4.3.1 *Presupunem că ipotezele (D1')-(D4') sunt îndeplinite şi că normele $\| \cdot \|_i$ sunt monotone în raport cu K_0^i $(i = 1, 2, ..., n)$. În plus presupunem că există α_i, $\beta_i > 0$ cu $\alpha_i \neq \beta_i$, astfel încât*

$$\|N_i(\alpha_1\varphi_1, \alpha_2\varphi_2, ..., \alpha_n\varphi_n)\|_i > \alpha_i \tag{4.3.15}$$

$$\|N_i(\beta_1\psi_1, \beta_2\psi_2, ..., \beta_n\psi_n)\|_i < \beta_i, \tag{4.3.16}$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$. Atunci (4.3.11) are cel puţin o soluţie $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ cu $u_i \in K_0^i$ şi $r_i \leq \|u_i\|_i \leq R_i$, unde $r_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, $R_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Vom spune că pentru un index i dat, condiţia (i) din Teorema 4.2.2 este îndeplinită dacă pentru fiecare $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{i-1} > 0$,

$$\limsup_{\lambda_i \to \infty} \frac{\|N_i(\alpha_1\varphi_1, \alpha_2\varphi_2, ..., \alpha_n\varphi_n)\|_i}{\lambda_i} > 1$$

uniform în raport cu $\lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, ..., \lambda_n \in (0, 1)$, şi

$$\liminf_{\lambda_i \to 0} \frac{\|N_i(\beta_1\psi_1, \beta_2\psi_2, ..., \beta_n\psi_n)\|_i}{\lambda_i} < 1,$$

uniform în raport cu $\lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, ..., \lambda_n \in (0, \infty)$.

Vom înţelege condiţia (ii) într-o manieră similară. Analog, spunem că (iii) din Teorema 4.2.3 este îndeplinită pentru anumiţi i, dacă pentru fiecare $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{i-1} > 0$,

$$\limsup_{\lambda_i \to \infty} \frac{\|N_i(\alpha_1\varphi_1, \alpha_2\varphi_2, ..., \alpha_n\varphi_n)\|_i}{\lambda_i} > 1 \text{ şi } \liminf_{\lambda_i \to \infty} \frac{\|N_i(\beta_1\psi_1, \beta_2\psi_2, ..., \beta_n\psi_n)\|_i}{\lambda_i} < 1,$$

uniform în raport cu $\lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, ..., \lambda_n \in (0, \infty)$. Condiţia (iv) este înţeleasă într-o manieră similară. În cadrul unor astfel de condiţii putem obţine rezultate analoage cu Teorema 4.2.2 şi 4.2.3, şi ca şi consecinţe, rezultate de existenţă, localizare şi multiplicitate pentru sistemul (4.3.11).

Bibliografie

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan and R. Precup, *Location of nonnegative solutions for differential equations on finite and semi-infinite intervals*, Dynam. Systems Appl., **12**(2003), 323-332.

[3] R. P. Agarwal, D. O'Regan and S. Stanek, *General existence principles for nonlocal boundary value problems with ϕ-Laplacian and their applications*, Abstr. Appl. Anal., **2006**(2006), Article ID 96826, 30 pages.

[4] R. P. Agarwal, D. O'Regan and P. J. Y. Wong, *Positive solutions of differential, difference and integral equations*, Kluwer, Dordrecht, 1999.

[5] A. Benmezaï, S. Djebali and T. Moussaoui, *Positive solutions for ϕ-Laplacian Dirichlet BVPs*, Fixed Point Theory, **8**(2007), 167-186.

[6] A. Benmezaï, S. Djebali and T. Moussaoui, *Multiple positive solutions for ϕ-Laplacian Dirichlet BVPs*, Panamer. Math. J., **17**(2007), 53-73.

[7] C. Bereanu and J. Mawhin, *Boundary value problems for some nonlinear systems with singular ϕ-laplacian*, J. Fixed Point Theory Appl., **4**(2008), 57-75.

[8] C. Bereanu and J. Mawhin, *Existence and multiplicity results for some nonlinear problems with singular ϕ-Laplacian*, J. Differential Equations, **243**(2007), 536-557.

[9] C. Bereanu and J. Mawhin, *Nonhomogeneous boundary value problems for some nonlinear equations with singular ϕ-Laplacian*, J. Math. Anal. Appl., **352**(2009), 218-233.

[10] C. Bereanu, P. Jebelean and J. Mawhin, *Non-homogeneous boundary value problems for ordinary and partial differential equations involving singular ϕ-Laplacians*, Matemática Contemporânea, **36**(2009), 51-65.

[11] C. Bereanu, P. Jebelean and J. Mawhin, *Radial solutions for some nonlinear problems involving mean curvature operators in Euclidian and Minkowski spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **137**(2009), 171-178.

[12] O.-M. Bolojan, *Fixed point methods for nonlinear differential systems with nonlocal conditions*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2013.

[13] A. Boucherif, *Differential equations with nonlocal boundary conditions*, Nonlinear Anal., **47**(2001), 2419-2430.

[14] A. Boucherif and R. Precup, *On nonlocal initial value problem for first order differential equations*, Fixed Point Theory, **4**(2003), no. 2, 205-212.

[15] S. Budisan, *Compression-Expansion Theorems of Krasnoselskii Type and Applications*, Ph. D. Thesis, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, 2012.

[16] L. Byszewski, *Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem*, J. Math. Anal. Appl., **162**(1991), 494-505.

[17] A. Cabada and J. A. Cid, *Existence of a non-zero fixed point for nondecreasing operators via Krasnoselskii's fixed point theorem*, Nonlinear Anal., **71**(2009), 2114-2118.

[18] A. Cabada and R. L. Pouso, *Existence results for the problem* $(\phi(u'))' = f(t, u, u')$ *with nonlinear boundary conditions*, Nonlinear Anal., **35**(1999), 221-231.

[19] A. Cabada, R. Precup, L. Saavedra and S. Tersian, *Multiple positive solutions to a fourth order boundary value problem*, to appear.

[20] S.-S. Chen and Z.-H. Ma, *The solvability of nonhomogeneous boundary value problems with* ϕ*-Laplacian operator*, Bound. Value Probl., 2014, doi:10.1186/1687-2770-2014-82.

[21] H. Dang and S. F. Oppenheimer, *Existence and uniqueness results for some nonlinear boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl., **198**(1996), 35-48.

[22] P. Drábek and J. Hernández, *Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problems*, Nonlinear Anal., **44**(2001), 189-204.

[23] D. G. Duffy, *Greens Functions with Applications*, Studies in Advanced Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Fla, USA, 2001.

[24] L. H. Erbe, S. Hu and H. Wang, *Multiple positive solutions of some boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl., **184**(1994), 640-648.

[25] L. H. Erbe and H. Wang, *On the existence of positive solutions of ordinary differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **120**(1994), no. 3, 743-748.

[26] M. García-Huidobro and P. Ubilla, *Multiplicity of solutions for a class of nonlinear second-order equations*, Nonlinear Anal., **28**(1997), 1509-1520.

[27] M. García-Huidobro, R. Manásevich and J. R. Ward, *Positive solutions for equations and systems with p-Laplace like operators*, Adv. Differential Equations, **14**(2009), 401-432.

[28] W. G. Ge and J. Ren, *New existence theorems of positive solutions for Sturm-Liouville boundary value problems*, Appl. Math. Comput., **148**(2004), no. 3, 631-644.

[29] W. G. Ge and J. Ren, *Positive solutions of second-order singular boundary value problem with a Laplace-like operator*, J. Inequal. Appl., **2005**(2005), 289-302.

[30] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed point theory*, Springer, New York, 2003.

[31] F. Haddouchi and S. Benaicha, *Positive solutions of a nonlinear three-point eigenvalue problem with integral boundary conditions*, Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, **5**(2015), 202-213.

[32] D. D. Hai and K. Schmitt, *On radial solutions of quasilinear boundary value problems*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **35**(1999), 349-361.

[33] D. D. Hai and R. Shivaji, *Existence and uniqueness for a class of quasilinear elliptic boundary value problems*, J. Differential Equations, **193**(2003), 500-510.

[34] D. D. Hai and H. Wang, *Nontrivial solutions for p-Laplacian systems*, J. Math. Anal. Appl., **330**(2007), 186-194.

[35] X. Hao, L. Liu and Y. Wu, *Positive solutions for second order differential systems with nonlocal conditions*, Fixed Point Theory, **13**(2012), 507-516.

[36] X. He, *Multiple radial solutions for a class of quasilinear elliptic problems*, Appl. Math. Lett., **23**(2010), 110-114.

[37] W. Hebisch and L. Saloff-Coste, *On the relation between elliptic and parabolic Harnack inequalities*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **51**(2001), 1437-1481.

[38] S. Heikkila and S. Seikkala, *Maximum principles and uniqueness results for phi-Laplacian boundary value problems*, J. of Inequal. Appl., **6**(2001), 339-357.

[39] J. Henderson and H. Wang, *An Eigenvalue Problem for Quasilinear Systems*, Rocky Mountain J. Math., **37**(2007), 215-228.

[40] D.-R. Herlea, *Existence and localization of positive solutions to first order differential systems with nonlocal conditions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., **59**(2014), 221-231.

[41] D.-R. Herlea, *Existence, localization and multiplicity of positive solutions for the Dirichlet BVP with ϕ-Laplacian*, Fixed Point Theory, to appear.

[42] D.-R. Herlea, *Positive solutions for second-order boundary-value problems with ϕ-Laplacian*, Electron. J. Differential Equations, **2016**(2016), 1-8.

[43] D.-R. Herlea and R. Precup, *Existence, localization and multiplicity of positive solutions to ϕ-Laplace equations and systems*, Taiwanese J. Math., **20**(2016), 77-89.

[44] D.-R. Herlea and R. Precup, *Abstract weak Harnack type inequalities and multiple positive solutions of nonlinear problems*, submitted.

[45] G. Infante, *Positive solutions of nonlocal boundary value problems with singularities*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Supplement (2009), 377-384.

[46] G. Infante, *Nonlocal boundary value problems with two nonlinear boundary conditions*, Commun. Appl. Anal., **12**(2008), 279-288.

[47] P. Jebelean and C. Popa, *Numerical solutions to singular ϕ-Laplacian with Dirichlet boundary conditions*, Numer. Algorithms, **67**(2013), 305-318.

[48] P. Jebelean, C. Popa and C. Şerban, *Numerical extremal solutions for a mixed problem with singular ϕ-Laplacian*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. (NoDEA), **21**(2014), 289-304.

[49] D. Jiang and H. Liu, *On the existence of nonnegative radial solutions for p-Laplacian elliptic systems*, Ann. Polon. Math., **71**(1999), 19-29.

[50] M. Kassmann, *Harnack inequalities: an introduction*, Bound. Value Probl., **2007**, Article ID 81415, 21 pages, doi:10.1155/2007/81415.

[51] M. A. Krasnosel'skiĭ, *Fixed points of cone-compressing and cone-expanding operators*, Soviet Math. Dokl., **1**(1960), 1285-1288.

[52] M. A. Krasnosel'skiĭ, *Positive solutions of operator equations*, Noordhoff, Groningen, 1964.

[53] T. Kuusi, *Harnack estimates for weak supersolutions to nonlinear degenerate parabolic equations*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), **7**(2008), 673-716.

[54] R. W. Leggett and L. R. Williams, *Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces*, Indiana Univ. Math. J., **28**(1979), no. 4, 673-688.

[55] S. Li, *Positive solutions of nonlinear singular third-order two-point boundary value problem*, J. Math. Anal. Appl., **323**(2006), 413-425.

[56] Y. Li, *Existence of positive solutions for the cantilever beam equations with fully nonlinear terms*, Nonlinear Anal. Real World Appl., **27**(2016), 221-237, http://dx.doi.org/10.1016/j.nonrwa.2015.07.016.

[57] Y. Li and L. Sun, *Infinite many positive solutions for nonlinear first-order BVPS with integral boundary conditions on time scales*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **41**(2013), 305-321.

[58] W.-C. Lian, F.-H. Wong and C.-C. Yeh, *On the existence of positive solutions of nonlinear second order differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**(1996), 1117-1126.

[59] H. Lian, J. Zhao and R. P. Agarwal, *Upper and lower solution method for nth-order BVPs on an infinite interval*, Bound. Value Probl., **2014**, 2014:100, 17 pages, doi: 10.1186/1687-2770-2014-100.

[60] B. Liu and J. Zhang, *The existence of positive solutions for some nonlinear equation systems*, J. Math. Anal. Appl., **324**(2006), 970-981.

[61] J. Marcos do Ó and P. Ubilla, *Multiple solutions for a class of quasilinear elliptic problems*, Proc. Edinb. Math. Soc., **46**(2003), 159-168.

[62] J. Mawhin, *Boundary value problems for nonlinear perturbations of some ϕ-Laplacians*, Banach Center Publ., **77**(2007), 201-214.

[63] J. Mawhin, *Resonance problems for some non-autonomous ordinary differential equations*, in: Stability and Bifurcation Theory for Non-Autonomous Differential Equations, Lectures Notes in Mathematics 2065, Springer, 2013, 103-184.

[64] M. Meehan and D. O'Regan, *Multiple nonnegative solutions of nonlinear integral equations on compact and semi-infinite intervals*, Appl. Anal., **74**(2000), 413-427.

[65] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **15**(1961), 577-591.

[66] M. Naceri, R. P. Agarwal, E. Çetin and A. El-Haffaf, *Existence of solutions to fourth-order differential equations with deviating arguments*, Bound. Value Probl., **2015**, 2015:108, doi: 10.1186/s13661-015-0373-x.

[67] O. Nica, *Initial-value problems for first-order differential systems with general nonlocal conditions*, Electron. J. Differential Equations, **2012**(2012), No. 74, 1-15.

[68] O. Nica, *Nonlocal initial value problems for first order differential systems*, Fixed Point Theory, **13**(2012), 603-612.

[69] O. Nica and R. Precup, *On the nonlocal initial value problem for first order differential systems*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **56**(2011), no. 3, 113-125.

[70] D. O'Regan, *Existence theory for $(\phi(y'))' = qf(t,y,y')$, $0 < t < 1$*, Commun. Appl. Anal., **1**(1997), 33-52.

[71] D. O'Regan, *Existence theory for the equations $(G'(y))' = qf(t,y,y')$ and $(G'(y)-pH(y))' = -p'H(y)+qf(t,y)$*, J. Math. Anal. Appl., **183**(1994), 435-468.

[72] D. O'Regan, *Some general existence principles and results for $(\phi(y'))' = qf(t,y,y')$, $0 < t < t^*$*, SIAM J. Math. Anal., **24**(1993), 648-668.

[73] D. O'Regan and R. Precup, *Positive solutions of nonlinear systems with p-Laplacian on finite and semi-infinite intervals*, Positivity, **11**(2007), 537-548.

[74] D. O'Regan and R. Precup, *Theorems of Leray-Schauder type and applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, 2001.

[75] I. Peral, *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, Preprint, Int. Center for Theoretical Physics, Trieste, 1997.

[76] V. Polášek and I. Rachůnková, *Singular periodic problem for nonlinear ordinary differential equations with ϕ-Laplacian*, Electron. J. Differential Equations, **27**(2006), 1-12.

[77] V. Polášek and I. Rachůnková, *Singular Dirichlet problem for ordinary differential equations with ϕ-Laplacian*, Math. Bohem., **130**(2005), 409-425.

[78] R. Precup, *A vector version of Krasnosel'skiĭ's fixed point theorem in cones and positive periodic solutions on nonlinear systems*, J. Fixed Point Theory Appl., **2**(2007), 141-151.

[79] R. Precup, *Abstract week Harnack inequality, multiple fixed points and p-Laplace equations*, J. Fixed Point Theory Appl., **12**(2012), 193-206.

[80] R. Precup, *Componentwise compression-expansion conditions for systems of nonlinear operator equations and applications*, in: Mathematical Models in Engineering, Biology and Medicine, AIP Conf. Proc., 1124, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2009, pp 284-293.

[81] R. Precup, *Critical point theorems in cones and multiple positive solutions of elliptic problems*, Nonlinear Anal., **75**(2012), 834851.

[82] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2002.

[83] R. Precup, *Moser-Harnack inequality, Krasnosel'skiĭ type fixed point theorems in cones and elliptic problems*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **40**(2012), 301-313.

[84] R. Precup, *Positive solutions of nonlinear systems via the vector version of Krasnoselskii's fixed point theorem in cones*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar, **5**(2007), 129-138.

[85] R. Precup, *Positive solutions of semi-linear elliptic problems via Krasnoselskii type theorems in cones and Harnack's inequality*, Mathematical analysis and applications, AIP Conf. Proc., 835, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2006, pp 125-132.

[86] R. Precup and D. Trif, *Multiple positive solutions of non-local initial value problems for first order differential systems*, Nonlinear Anal., **75**(2012), 5961-5970.

[87] Y. N. Raffoul, *Positive solutions of three-point nonlinear second order boundary value problem*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., **2002**(2002), No. 15, 1-11.

[88] J. Serrin, *On the Harnack inequality for linear elliptic equations*, Journal dAnalyse Mathématique, (1955/1956), 292-308.

[89] W. Sun, S. Chen, Q. Zhang and C. Wang, *Existence of positive solutions to n-point nonhomogeneous boundary value problem*, J. Math. Anal. Appl., **330**(2007), 612-621.

[90] W. Sun and W. Ge, *The existence of positive solutions for a class of nonlinear boundary value problem*, Acta Math. Sinica, **4**(2001), 577-580.

[91] C. Şerban, *Existence and multiplicity results for discrete $p(\cdot)$-Laplacian and for singular ϕ-Laplacian*, Ph. D. Thesis, West University of Timişoara, Timişoara, 2013.

[92] P. J. Torres, *Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem*, J. Differential Equations, **190**(2003), 643-662.

[93] F. Wang and F. Zhang, *An extension of fixed point theorems concerning cone expansion and compression and its application*, Commun. Korean Math. Soc., **24**(2009), 281-290.

[94] J. Y. Wang, *The existence of positive solution for the one-dimensional p-Laplacian*, Proc. Amer. Math. Soc., **125**(1997), 2275-2283.

[95] Z. Wang and J. Zhang, *Positive solutions for one-dimensional p-Laplacian boundary value problems with dependence on the first order derivative*, J. Math. Anal. Appl., **314**(2006), 618-630.

[96] J. R. L. Webb, *Boundary value problems with vanishing Green's function*, Commun. Appl. Anal., **13**(2009), no. 4, 587-596.

[97] J. R. L. Webb, *Solutions of nonlinear equations in cones and positive linear operators*, J. Lond. Math. Soc. (2), **81**(2010), 420-436.

[98] J. R. L. Webb and G. Infante, *Positive solutions of nonlocal initial boundary value problems involving integral conditions*, Nonlinear Diff. Eqn. Appl., **15**(2008), 45-67.

[99] J. R. L. Webb and G. Infante, *Non-local boundary value problems of arbitrary order*, J. Lond. Math. Soc. (2), **79**(2009), 238-258.

[100] Z. Yang, *Positive solutions for a system of p-Laplacian boundary value problems*, Comput. Math. Appl., **62**(2011), 4429-4438.

[101] Z. Yang and D. O'Regan, *Positive solutions of a focal problem for one-dimensional p-Laplacian equations*, Math. Comput. Modelling, **55**(2012), 1942-1950.

[102] R. Zacher, *A Weak Harnack Inequality for Fractional Differential Equations*, J. Integral Equations Appl, **19**(2007), 209-232.