UNIVERSITATEA "BABEŞ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA

Facultatea de Matematică şi Informatică

Metode fuzzy de asistare a deciziilor multicriteriale

Rezumatul tezei de doctorat

Coordonator ştiinţific:
Prof. univ. dr. Pârv Bazil

Doctorand:

Tuşe Delia

Cluj-Napoca

2016

Cuprins

Lucrări ştiinţifice publicate sau acceptate pentru publicare

Lucrări cotaţie CNCSIS A (ISI)

1. A.I. Ban, O.I. Ban, **D.A. Tuşe**, *Calculation of the fuzzy importance of attributes based on the correlation coefficient, applied to the quality of hotel services*, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 30, 1 (2015), pp. 583-596, DOI: 10.3233/IFS-151840, (`http://content.iospress.com/articles/journal-of-intelligent-and-fuzzy-systems/ifs1840`), FI 2015: 1.812.
2. O.I. Ban, A.I. Ban, **D.A. Tuşe**, *Importance-performance analysis by fuzzy c-means algorithm*, Expert Systems with Applications, 50 (2016), pp. 9-16, DOI: 10.1016/j.eswa.2015.12.023, (`http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417415008258`), FI 2014: 2.240.
3. O.I. Ban, I.Gh. Tara, V. Bogdan, **D.A. Tuşe**, G. Bologa, *Evaluation of hotel quality attribute importance through fuzzy correlation coefficient*, acceptat la Technological and Economic Development of Economy (2016), DOI: 10.3846/20294913.2016.1144657, (`http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.3846/20294913.2016.1144657`), FI 2014: 1.563.
4. A.I. Ban, O.I. Ban, **D.A. Tuşe**, *Derived fuzzy importance of attributes based on the weakest triangular norm-based fuzzy arithmetic and applications to the hotel services in Oradea, Romania*, acceptat la Iranian Journal of Fuzzy Systems (2016), FI 2014/2015 : 0.534.

Lucrări cotaţie CNCSIS B+

5. **D.A. Tuşe**, *An interval fuzzy multicriteria decision making method based on the expected value*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Informatica, LIX, 1 (2014), pp. 216-227, (`http://www.cs.ubbcluj.ro/~studia-i/2014-macs/17Tuse.pdf`), MaCS 2014: 10th Joint International Conference on Mathematics and Computer Science, 21-25 mai 2014, Cluj-Napoca, Romania.
6. **D.A. Tuşe**, *A trapezoidal intuitionistic fuzzy MCDM method based on some aggregation operators and several ranking methods*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Informatica, LXI, 1 (2016), pp. 23-40, (`http://www.cs.ubbcluj.ro/~studia-i/2016-1/02-Tuse.pdf`)

Lucrări cotaţie CNCSIS B (International / PC International)

7. A.I. Ban, **D.A. Tuşe**, *Trapezoidal/triangular intuitionistic fuzzy numbers versus interval-valued trapezoidal/triangular fuzzy numbers and applications to multicriteria decision making methods*, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 20, 2 (2014), pp. 43-51, (`http://www.ifigenia.org/wiki/Issue:Trapezoidal/triangular_intuitionistic_fuzzy_numbers_versus_interval-valued_trapezoidal/triangular_fuzzy_numbers_and_applications_to_multicriteria_decision_making_methods`), 18th International Conference on Intuitionistic Fuzzy Sets, 10-11 mai 2014, Sofia, Bulgaria.

Cuvinte cheie

Mulţime fuzzy, normă triunghiulară, număr fuzzy, număr fuzzy trapezoidal, număr fuzzy triunghiular, interval de numere fuzzy trapezoidale, număr fuzzy intuiţionist trapezoidal, număr fuzzy cu valori interval, ambiguitate, valoare, cardinal, nucleu, suport, interval de exepectanţă, valoare de expectanţă, index, scor, acurateţe, defuzzificare, operator de agregare, metodă de ierarhizare, variabile lingvistice, decizie, MCDM fuzzy, analiză multicriterială, criteriu, alternativă, matrice de decizie, pondere, pondere fuzzy, performanţă, coeficient de corelaţie, analiză importanţă-performanţă, IPA, grupare fuzzy, clasificare fuzzy, clustering fuzzy, partiţie fuzzy, prototip, categorie, algoritmul c-medii fuzzy.

Capitolul 1

Introducere

1.1 Problema de cercetare

Modelarea matematică şi utilizarea calculatorului au devenit în ultima perioadă instrumente tot mai des utilizate în procesul decizional, atunci când este vorba de rezolvarea problemelor complexe care implică factori de incertitudine şi risc. Cele mai multe probleme MCDM (*Multiple Criteria Decision Making*) din viaţa reală ar trebui să fie considerate, în mod normal, ca probleme fuzzy MCDM (vezi [58]).

1.2 Motivaţia cercetării

Metodele directe de obţinere a ponderilor criteriilor au numeroase dezavantaje. În ultimele decenii, numeroşi autori au considerat că ponderarea criteriilor se poate obţine prin metode matematice (vezi de exemplu [27]). Găsirea celei mai adecvate metode pentru obţinerea ponderilor derivate ale criteriilor este un subiect aflat încă în dezbatere (vezi [26]).

Generealizarea unor metode MCDM existente este necesară atunci când fie există situaţii reale încă neabordate în literatura de specialitate, aşadar care nu pot fi tratate prin metodele MCDM existente, fie unele metode MCDM existente pot fi îmbunătăţite.

Partiţionarea clasică a mulţimii criteriilor din cadrul analizei IPA (*Importance-Performance Analysis*) clasice are dezavantaje. O abordare mai obiectivă o reprezintă clasificarea (gruparea, partiţionarea, clustering-ul) fuzzy care determină gradul de apartenenţă al fiecărui criteriu la fiecare categorie.

1.3 Obiectivele cercetării

Obiectivul general al acestei teze este acela de a studia, proiecta şi implementa metode şi algoritmi pentru rezolvarea problemelor de decizie multicriterială, utilizând numere fuzzy.

Teza de faţă conţine rezultatele studiului cu privire la metode de determinare indirectă a ponderilor fuzzy ale criteriilor, metode fuzzy MCDM de ierarhizare a alternativelor, precum şi metode fuzzy de grupare (clustering) a criteriilor.

Primul obiectiv este acela de a obţine metode indirecte de calcul a ponderilor fuzzy ale criteriilor bazate pe ideea din cazul clasic şi anume aceea că ponderea unui criteriu este dată de coeficientului de corelaţie dintre performanţele alternativelor raportate la criteriul respectiv şi nivelul general de satisfacţie, toate din perspectiva factorilor decizionali şi reprezentate prin numere fuzzy şi obţinând ponderi fuzzy ale criteriilor considerate.

Al doilea obiectiv constă în generalizarea unor metode MCDM de evaluare a alternativelor, a căror performanţe să fie exprimate prin numere fuzzy.

Al treilea obiectiv constă în obţinerea unei clasificări fuzzy pe mulţimea criteriilor, bazată pe algoritmul c-medii fuzzy într-o formă adaptată.

1.4 Structura tezei

Teza este structurată după cum urmează.

Capitolul 2 prezintă noţiuni de matematică fuzzy, iar capitolul 3 elemente de bază ale teoriei deciziei. Capitolele 4-6 conţin contribuţii originale. Capitolul 4 prezintă două metode indirecte pentru determinarea ponderilor fuzzy ale criteriilor, ambele prin metoda corelaţiei dintre performanţele în raport cu criteriile considerate şi nivelul general de satisfacţie, toate percepute de către clienţi şi reprezentate prin numere fuzzy. Datorită dificultăţilor de calcul din cadrul primei metode, derivate din utilizarea aritmeticii fuzzy bazate pe norma T_M, în a doua metodă propusă se utilizează aritmetica fuzzy bazată pe norma T_W, rezultând o soluţie analitică cu resurse computaţionale reduse. Pentru o interpretare imediată a rezultatelor, valorile obţinute sunt defuzzificate folosind valoarea de expectanţă. Sunt prezentate, de asemenea algoritmii corespunzători, exemple ilustrative şi un studiu de caz bazat pe rezultatele unui sondaj de opinie realizat recent cu privire la calitatea serviciilor hoteliere din Oradea, România.

Metodele indirecte propuse sunt comparate atât între ele cât şi cu metoda directă de obţinere a ponderilor fuzzy ale criteriilor. Fiecare secţiune se încheie cu concluziile imediate. Capitolul 5 prezintă două metode fuzzy MCDM, generalizări ale unor metode descrise în literatura recentă. Prima metodă originală utilizează intervale de numere fuzzy trapezoidale, modelând astfel situaţiile în care, pentru completarea unui chestionar, se pot alege, la o anumită întrebare, două răspunsuri sau chiar un răspuns intermediar. Pentru ierarhizarea intervalelor de numere fuzzy trapezoidale este folosită valoarea de expectanţă ataşată acestora. Sunt date, de asemenea, algoritmul corespunzător, exemple teoretice, compararea rezultatelor obţinute prin metoda propusă cu rezultatele obţinute prin alte metode şi concluziile imediate. A doua metodă originală se bazează pe numere fuzzy intuiţioniste trapezoidale, pe doi operatori de agregare a numerelor fuzzy intuiţioniste trapezoidale şi pe patru metode de ierarhizare a numerelor fuzzy intuiţioniste trapezoidale. Sunt date, de asemenea, algoritmul corespunzător, exemple numerice, compararea rezultatelor obţinute cu rezultatele obţinute prin alte metode şi concluziile imediate. În Capitolul 6 este abordată o rafinare a analizei IPA clasice prin utilizarea numerelor fuzzy. Prima metodă originală pentru clasificarea fuzzy a criteriilor în cele patru categorii corespunzătoare analizei IPA clasice se bazează pe algoritmul c-medii fuzzy într-o formă adaptată. Sunt date, de asemenea, algoritmul corespunzător, studii de caz şi comparaţii ale rezultatelor obţinute şi concluziile imediate. A doua metodă de partiţionare fuzzy propusă utilizează s categorii de criterii. Sunt date descrierea metodei propuse, algoritmul corespunzător, studii de caz şi concluziile imediate. Capitolul 7 prezintă concluziile generale care se desprind în finalul acestei teze, precum şi îndeplinirea obiectivelor propuse, dar şi posibile continuări interesante ale ideilor lansate în această teză, iar în Anexele 1 - 6 sunt descrise aplicaţiile care implementează metodele propuse în această teză.

În finalul acestei introduceri, menţionăm că această teză conţine contribuţii originale publicate în articolele [7, 8, 9, 11, 12, 51, 52]. Contribuţiile originale sunt indicate la sfârşitul fiecărei secţiuni, în cadrul concluziilor.

Capitolul 2

Elemente de matematică fuzzy

2.1 Mulţimi fuzzy

Definiţia 1. *([13]) Fie X o mulţime nevidă. Mulţimea fuzzy A ($A \subseteq X$) este caracterizată prin funcţia de apartenenţă $A : X \to [0,1]$, unde $A(x)$ reprezintă gradul de apartenenţă a lui x la A, $\forall x \in X$.*

2.2 Numere fuzzy

Definiţia 2. *(vezi [13] sau [22]) O submulţime fuzzy a mulţimii numerelor reale $A \in F(\mathbb{R})$ este un număr fuzzy dacă satisface următoarele proprietăţi:*
(i) A este normală, adică $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ cu $A(x_0) = 1$;
(ii) A este fuzzy convexă, adică $A(tx+(1-t)y) \geq min\{A(x), A(y)\}, \forall t \in [0,1]$, $x, y \in \mathbb{R}$;
(iii) A este superior semicontinuă pe $\mathbb{R}$, adică $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ astfel încât $A(x) - A(x_0) < \epsilon$, $|x - x_0| < \delta$;
(iv) A este relativ compactă, adică $cl\{x \in \mathbb{R};\ A(x) > 0\}$ este compactă, unde $cl(M)$ notează închiderea mulţimii M.

2.3 Clase de numere fuzzy

2.3.1 Numere fuzzy trapezoidale

Definiţia 3. *([13]) Un număr fuzzy trapezoidal A^T poate fi reprezentat ca un cvadruplu $A^T = (a, b, c, d)$, cu $a \leq b \leq c \leq d \in \mathbb{R}$ şi având următoarea funcţie de apartenenţă:*

$$A^T(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & dacă\ a \leq x < b \\ 1 & dacă\ b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & dacă\ c < x \leq d \\ 0 & altfel \end{cases}.$$

Mulţimea de nivel r a unui număr fuzzy trapezoidal $A^T = (a, b, c, d)$ este:

$$A_r^T = [a + (b - a)r, d - (d - c)r],\ r \in [0, 1].$$

Fiind date două numere fuzzy trapezoidale $A_1^T = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $A_2^T = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, suma $A_1^T + A_2^T$ şi înmulţirea cu scalar λA_1^T au următoarea formă:

$$A_1^T + A_2^T = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2),$$
$$\lambda A_1^T = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1, \lambda d_1), & \text{dacă } \lambda \geq 0 \\ (\lambda d_1, \lambda c_1, \lambda b_1, \lambda a_1), & \text{dacă } \lambda < 0. \end{cases}$$

Observaţia 4. *Produsul cât şi câtul a două numere fuzzy trapezoidale nu sunt numere fuzzy trapezoidale; în schimb, produsul încrucişat a două numere fuzzy trapezoidale este un număr fuzzy trapezoidal.*

Un număr fuzzy trapezoidal $A^T = (a, b, c, d)$ este pozitiv dacă $a \geq 0$ şi respectiv negativ dacă $d \leq 0$.

Dacă numerele fuzzy trapezoidale $A_1^T = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ şi $A_2^T = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ sunt ambele pozitive sau ambele negative, atunci produsul încrucişat $A_1^T \odot A_2^T$ este:

$$A_1^T \odot A_2^T = (a_1 b_2 + b_1 a_2 - b_1 b_2,\ b_1 b_2,\ c_1 c_2,\ c_1 d_2 + d_1 c_2 - c_1 c_2).$$

Dacă unul dintre numerele fuzzy trapezoidale $A_1^T = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ şi $A_2^T = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ este pozitiv şi celălalt negativ, atunci produsul încrucişat $A_1^T \odot A_2^T$ este:

$$A_1^T \odot A_2^T = (-c_1 d_2 - d_1 c_2 + c_1 c_2,\ \ - c_1 c_2,\ \ - b_1 b_2,\ \ - a_1 b_2 - b_1 a_2 + b_1 b_2).$$

2.3.2 Numere fuzzy triunghiulare

Numerele fuzzy triunghiulare sunt cazuri particulare ale numerelor fuzzy trapezoidale, obţinute în cazul în care $b = c$ în Definiţia 3. Cazul particular $a = b = c = d = e$

conduce spre numărul real e. Un număr fuzzy triunghiular se notează simbolic cu $A^\Delta = (a, b, c)$, cu $a \leq b \leq c$.

Mulţimea de nivel r a unui număr fuzzy triunghiular $A^\Delta = (a, b, c)$ este:

$$A^\Delta_r = [a + (b - a)r, c - (c - b)r],\ r \in [0, 1].$$

Fiind date două numere fuzzy triunghiulare $A^\Delta_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $A^\Delta_2 = (a_2, b_2, c_2)$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, suma $A^\Delta_1 + A^\Delta_2$ şi înmulţirea cu scalar λA^Δ_1 au următoarea formă:

$$A^\Delta_1 + A^\Delta_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2),$$
$$\lambda A^\Delta_1 = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1), & \text{dacă } \lambda \geq 0 \\ (\lambda c_1, \lambda b_1, \lambda a_1), & \text{dacă } \lambda < 0. \end{cases}$$

În literatura de specialitate, pentru numărul fuzzy triunghiular $A^\Delta = (a, b, c)$ se mai foloseşte şi notaţia $A^\Delta = (a, \alpha, \beta)$ cu $\alpha = b - a$ şi $\beta = c - b$. Folosind notaţia alternativă, numărul fuzzy triunghiular (vezi [31]) $A^\Delta = (a, \alpha, \beta)$ are următoarea funcţie de apartenenţă:

$$A^\Delta(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}x, & \text{dacă } a - \alpha \leq x \leq a \\ 1 + \frac{a}{\beta} - \frac{1}{\beta}x, & \text{dacă } a \leq x \leq a + \beta \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Prezentăm în continuare principalele operaţii aritmetice generate de norma T_W, mai exact date de principiul de extindere propus de Zadeh bazat pe norma T_W (vezi (2.24)), în cazul particular al numerelor fuzzy triunghiulare.

Fie $A = (a, \alpha, \beta)$ şi $B = (b, \gamma, \delta)$ două numere fuzzy triunghiulare şi $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$. Avem (vezi [16], [29], [30], [31], [32], [37], [41]):

$$(a, \alpha, \beta) + (b, \gamma, \delta) = (a + b, \max(\alpha, \gamma), \max(\beta, \delta)), \tag{2.2}$$

$$(a, \alpha, \beta) - (b, \gamma, \delta) = (a - b, \max(\alpha, \delta), \max(\beta, \gamma)), \tag{2.3}$$

$$\lambda \cdot (a, \alpha, \beta) = (\lambda a, \alpha, \beta), \tag{2.4}$$

$$(a, \alpha, \beta) \cdot (b, \gamma, \delta) = \begin{cases} (ab, \max(\alpha b, \gamma a), \max(\beta b, \delta a)), \text{ dacă } a, b \geq 0 \\ (ab, -\max(\alpha b, \gamma a), -\max(\beta b, \delta a)), \text{ dacă } a, b \leq 0 \\ (ab, \max(\alpha b, -\delta a), \max(\beta b, -\gamma a)), \text{ dacă } a \leq 0, b \geq 0 \\ (ab, \max(\gamma a, -\beta b), \max(\delta a, -\alpha b)), \text{ dacă } a \geq 0, b \leq 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\sqrt{(a, \alpha, \beta)} = \left(\sqrt{a}, \frac{\alpha}{\sqrt{a}}, \frac{\beta}{\sqrt{a}}\right), \text{ pentru orice } a > 0, \tag{2.6}$$

$$\frac{(a,\alpha,\beta)}{(b,\gamma,\delta)} = \\ = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}, \max\left(\frac{\alpha}{b}, \frac{a\delta}{b(b+\delta)}\right), \max\left(\frac{\beta}{b}, \frac{a\gamma}{b(b-\gamma)}\right)\right), \\ \qquad\qquad\qquad \text{dacă } a>0, b>0, b-\gamma>0 \\ \left(\frac{a}{b}, \max\left(-\frac{\beta}{b}, -\frac{a\gamma}{b(b-\gamma)}\right), \max\left(-\frac{\alpha}{b}, -\frac{a\delta}{b(b+\delta)}\right)\right), \\ \qquad\qquad\qquad \text{dacă } a<0, b<0, b+\delta<0 \\ \left(0, \frac{\alpha}{b}, \frac{\beta}{b}\right), \qquad \text{dacă } a=0, b>0, b-\gamma>0 \\ \left(0, -\frac{\beta}{b}, -\frac{\alpha}{b}\right), \qquad \text{dacă } a=0, b<0, b+\delta<0 \\ \left(\frac{a}{b}, \max\left(-\frac{\beta}{b}, \frac{a\delta}{b(b+\delta)}\right), \max\left(-\frac{\alpha}{b}, \frac{a\gamma}{b(b-\gamma)}\right)\right), \\ \qquad\qquad\qquad \text{dacă } a>0, b<0, b+\delta<0 \\ \left(\frac{a}{b}, \max\left(\frac{\alpha}{b}, -\frac{a\gamma}{b(b-\gamma)}\right), \max\left(\frac{\beta}{b}, -\frac{a\delta}{b(b+\delta)}\right)\right), \\ \qquad\qquad\qquad \text{dacă } a<0, b>0, b-\gamma>0. \end{cases} \tag{2.7}$$

2.3.3 Alte clase de numere fuzzy

Alte două clase interesante de numere fuzzy sunt numerele fuzzy gaussiene şi numerele fuzzy exponenţiale.

2.4 Generalizări ale numerelor fuzzy

2.4.1 Intervale de numere fuzzy

Definiţia 5. *([51]) Un interval de numere fuzzy este o pereche $\widetilde{A} = [A^L, A^U]$, unde A^L şi A^U sunt numere fuzzy astfel încât $(A^L)_r^- \leq (A^U)_r^-$ şi $(A^L)_r^+ \leq (A^U)_r^+$, pentru orice $r \in [0,1]$.*

Definiţia 6. *Dacă ${A^T}^L = (a^L, b^L, c^L, d^L)$ şi ${A^T}^U = (a^U, b^U, c^U, d^U)$ sunt două numere fuzzy trapezoidale, atunci $\widetilde{A}^T = [{A^T}^L, {A^T}^U]$ este un interval de numere fuzzy trapezoidale dacă şi numai dacă $a^L \leq a^U, b^L \leq b^U, c^L \leq c^U$ şi $d^L \leq d^U$.*

În cazul particular al intervalelor de numere fuzzy trapezoidale, suma şi înmulţirea cu scalar sunt la rândul lor particularizări ale operaţiilor similare pe mulţimea intervalelor de numere fuzzy:

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_1^T + \widetilde{A}_2^T &= [(a_1^L, b_1^L, c_1^L, d_1^L), (a_1^U, b_1^U, c_1^U, d_1^U)] + [(a_2^L, b_2^L, c_2^L, d_2^L), (a_2^U, b_2^U, c_2^U, d_2^U)] = \\ &= [(a_1^L + a_2^L, b_1^L + b_2^L, c_1^L + c_2^L, d_1^L + d_2^L), (a_1^U + a_2^U, b_1^U + b_2^U, c_1^U + c_2^U, d_1^U + d_2^U)], \\ \lambda \cdot \widetilde{A}^T &= \lambda \cdot \left[(a^L, b^L, c^L, d^L), (a^U, b^U, c^U, d^U)\right] \\ &= \begin{cases} \left[(\lambda a^L, \lambda b^L, \lambda c^L, \lambda d^L), (\lambda a^U, \lambda b^U, \lambda c^U, \lambda d^U)\right], & \text{dacă } \lambda \geq 0 \\ \left[(\lambda d^L, \lambda c^L, \lambda b^L, \lambda a^L), (\lambda d^U, \lambda c^U, \lambda b^U, \lambda a^U)\right], & \text{dacă } \lambda < 0, \end{cases}\end{aligned}$$

2.4.2 Numere fuzzy intuiţioniste

Definiţia 7. *(vezi [36]) Un număr fuzzy intuiţionist trapezoidal* $\widetilde{\widetilde{A}}^T = \langle(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}), (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d})\rangle$ *este mulţimea fuzzy intuiţionistă pe* $\mathbb{R}$ *cu gradul de apartenenţă dat de funcţia* $\mu_{\widetilde{\widetilde{A}}^T}$ *şi gradul de non-apartenenţă dat de funcţia* $\nu_{\widetilde{\widetilde{A}}^T}$ *definite astfel:*

$$\mu_{\widetilde{\widetilde{A}}^T}(x) = \begin{cases} \frac{x-\underline{a}}{\underline{b}-\underline{a}}, & \textit{dacă } x \in [\underline{a}, \underline{b}) \\ 1, & \textit{dacă } x \in [\underline{b}, \underline{c}] \\ \frac{\underline{d}-x}{\underline{d}-\underline{c}}, & \textit{dacă } x \in (\underline{c}, \underline{d}] \\ 0, & \textit{altfel} \end{cases}$$

$$\nu_{\widetilde{\widetilde{A}}^T}(x) = \begin{cases} \frac{\overline{b}-x}{\overline{b}-\overline{a}}, & \textit{dacă } x \in [\overline{a}, \overline{b}) \\ 0, & \textit{dacă } x \in [\overline{b}, \overline{c}] \\ \frac{x-\overline{c}}{\overline{d}-\overline{c}}, & \textit{dacă } x \in (\overline{c}, \overline{d}] \\ 1, & \textit{altfel,} \end{cases}$$

unde $\underline{a} \leq \underline{b} \leq \underline{c} \leq \underline{d}$, $\overline{a} \leq \overline{b} \leq \overline{c} \leq \overline{d}$, $\overline{a} \leq \underline{a}$, $\overline{b} \leq \underline{b}$, $\underline{c} \leq \overline{c}$ *şi* $\underline{d} \leq \overline{d}$.

Condiţiile impuse asupra lui $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ asigură faptul că $\widetilde{\widetilde{A}}^T$ este o mulţime fuzzy intuiţionistă.

Definiţia 8. *(vezi [33]) Un număr fuzzy intuiţionist trapezoidal* $\widetilde{\widetilde{A}}^T = \langle(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}), (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d})\rangle$ *este ne-negativ dacă şi numai dacă* $\overline{a} \geq 0$.

Suma şi înmulţirea cu scalar pe mulţimea numerelor fuzzy intuiţioniste (vezi [2] sau [4]) devin în cazul particular al numerelor fuzzy intuiţioniste trapezoidale după cum urmează:

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{A}}_1^T + \widetilde{\widetilde{A}}_2^T &= \langle(\underline{a_1}, \underline{b_1}, \underline{c_1}, \underline{d_1}), (\overline{a_1}, \overline{b_1}, \overline{c_1}, \overline{d_1})\rangle + \langle(\underline{a_2}, \underline{b_2}, \underline{c_2}, \underline{d_2}), (\overline{a_2}, \overline{b_2}, \overline{c_2}, \overline{d_2})\rangle \\ &= \langle(\underline{a_1} + \underline{a_2}, \underline{b_1} + \underline{b_2}, \underline{c_1} + \underline{c_2}, \underline{d_1} + \underline{d_2}), (\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b_1} + \overline{b_2}, \overline{c_1} + \overline{c_2}, \overline{d_1} + \overline{d_2})\rangle,\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \widetilde{\widetilde{A}}^T &= \lambda \cdot \langle(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}), (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d})\rangle \\ &= \begin{cases}\langle(\lambda\underline{a}, \lambda\underline{b}, \lambda\underline{c}, \lambda\underline{d}), (\lambda\overline{a}, \lambda\overline{b}, \lambda\overline{c}, \lambda\overline{d})\rangle, & \text{dacă } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0, \\ \langle(\lambda\underline{d}, \lambda\underline{c}, \lambda\underline{b}, \lambda\underline{a}), (\lambda\overline{d}, \lambda\overline{c}, \lambda\overline{b}, \lambda\overline{a})\rangle, & \text{dacă } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0.\end{cases}\end{aligned} \tag{2.9}$$

În plus, în cazul numerelor fuzzy intuiţioniste trapezoidale ne-negative, pot fi definite şi înmulţirea şi ridicarea la putere pozitivă, după cum urmează (vezi [60]):

$$\widetilde{\widetilde{A}}_1^T \otimes \widetilde{\widetilde{A}}_2^T = \langle(\underline{a_1}, \underline{b_1}, \underline{c_1}, \underline{d_1}), (\overline{a_1}, \overline{b_1}, \overline{c_1}, \overline{d_1})\rangle \otimes \langle(\underline{a_2}, \underline{b_2}, \underline{c_2}, \underline{d_2}), (\overline{a_2}, \overline{b_2}, \overline{c_2}, \overline{d_2})\rangle$$

$$= \langle(\underline{a_1 a_2}, \underline{b_1 b_2}, \underline{c_1 c_2}, \underline{d_1 d_2}), (\overline{a_1 a_2}, \overline{b_1 b_2}, \overline{c_1 c_2}, \overline{d_1 d_2})\rangle, \tag{2.10}$$

$$\widetilde{\widetilde{A}^T}^{\lambda} = \langle(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}), (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d})\rangle^{\lambda}$$

$$= \langle(\underline{a}^{\lambda}, \underline{b}^{\lambda}, \underline{c}^{\lambda}, \underline{d}^{\lambda}), (\overline{a}^{\lambda}, \overline{b}^{\lambda}, \overline{c}^{\lambda}, \overline{d}^{\lambda})\rangle,\ \lambda \geq 0. \tag{2.11}$$

Este evident că elementul neutru pentru sumă este $\langle(0,0,0,0),(0,0,0,0)\rangle$, iar pentru produs $\langle(1,1,1,1),(1,1,1,1)\rangle$.

Prezentăm în continuare doi operatori de agregare pentru numerele fuzzy intuiţioniste trapezoidale. Presupunând că $\widetilde{\widetilde{A}}_i$, $i = \{1, \ldots, n\}$ este o mulţime de numere fuzzy intuiţioniste trapezoidale ne-negative şi $\widetilde{\widetilde{\omega}}_i$ un număr fuzzy intuiţionist trapezoidal ne-negativ, cu semnificaţia de pondere a criteriului $\widetilde{\widetilde{A}}_i$, pentru orice $i = \{1, \ldots, n\}$, atunci se poate defini operatorul de agregare aritmetic $WAA_{\widetilde{\widetilde{\omega}}} : TIFN^n(\mathbb{R}) \to TIFN(\mathbb{R})$ (vezi [61]) astfel:

$$WAA_{\widetilde{\widetilde{\omega}}}(\widetilde{\widetilde{A}}_1, \ldots, \widetilde{\widetilde{A}}_n) = (1/n) \cdot (\widetilde{\widetilde{\omega_1}} \otimes \widetilde{\widetilde{A}}_1 + \ldots + \widetilde{\widetilde{\omega_n}} \otimes \widetilde{\widetilde{A}}_n), \tag{2.12}$$

folosind operaţiile (2.8), (2.9) şi (2.10). Dacă ω_i, $i = \{1, \ldots, n\}$ sunt numere reale pozitive, atunci se poate defini operatorul de agregare geometric $WGA_{\omega} : TIFN^n(\mathbb{R}) \to TIFN(\mathbb{R})$ (vezi [54]) astfel:

$$WGA_{\omega}(\widetilde{\widetilde{A}}_1, \ldots, \widetilde{\widetilde{A}}_n) = \widetilde{\widetilde{A}_1}^{\omega_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{\widetilde{A}_n}^{\omega_n}, \tag{2.13}$$

folosind operaţiile (2.10) şi (2.11) definite anterior.

2.4.3 Numere fuzzy trapezoidale şi triunghiulare cu valori interval

Definiţia 9. *(vezi, de exemplu, [55]) Un număr fuzzy trapezoidal cu valori interval* $\approx{A}^T$ *este o mulţime fuzzy cu valori interval pe* $\mathbb{R}$*, definită prin* $\approx{A}^T = \lfloor A^{T^L}, A^{T^U} \rceil$*, unde* $A^{T^L} = \left(a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L\right)$ *şi* $A^{T^U} = \left(a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U\right)$ *sunt numere fuzzy trapezoidale astfel încât* $A^{T^L} \subseteq A^{T^U}$*.*

Dacă $a_2^L = a_3^L$ şi $a_2^U = a_3^U$ din definiţia anterioară, atunci se obţine un număr fuzzy triunghiular cu valori interval notat cu $\approx{A}^{\Delta} = \lfloor \left(a_1^L, a_2^L, a_3^L\right), \left(a_1^U, a_2^U, a_3^U\right) \rceil$.

2.4.4 Relaţii între numerele fuzzy intuiţioniste şi cele cu valori interval

În finalul acestei secţiuni prezentăm câteva relaţii între numerele fuzzy intuiţioniste trapezoidale (triunghiulare) şi numerele fuzzy trapezoidale (triunghiulare) cu valori interval, precum şi proprietăţi imediate ale acestor relaţii.

2.5 Caracteristici numerice asociate numerelor fuzzy

În [5] şi [6] a fost dovedit faptul că valoarea de expectanţă reprezintă cea mai simplă, dar eficientă metodă de ierarhizare a numerelor fuzzy. Mai exact, pentru $A, B \in FN(\mathbb{R})$ introducem următoarele relaţii:

$$A \prec_{EV} B \text{ dacă şi numai dacă } EV\left(A\right) < EV\left(B\right), \tag{2.14}$$

$$A \sim_{EV} B \text{ dacă şi numai dacă } EV\left(A\right) = EV\left(B\right), \tag{2.15}$$

$$A \preceq_{EV} B \text{ dacă şi numai dacă } EV\left(A\right) \leq EV\left(B\right). \tag{2.16}$$

În cazul unui număr fuzzy trapezoidal $A^T = (a, b, c, d)$, cu $a \leq b \leq c \leq d$, având mulţimile de nivel $(A^T)_r = \left[(A^T)_r^-, (A^T)_r^+ \right]$, pentru $r \in [0, 1]$, cu

$$(A^T)_r^- = a + (b-a)r, \ (A^T)_r^+ = d + (c-d)r,$$

măsurile de defuzzificare se reduc la următoarele expresii:

$$\begin{aligned} Amb(A^T) &= \frac{-a-2b+2c+d}{6}, \\ Val(A^T) &= \frac{a+2b+2c+d}{6}, \\ card\ A^T &= \frac{-a-b+c+d}{2}, \\ core\left(A^T\right) &= [b,c], \\ supp\left(A^T\right) &= [a,d], \\ EI(A^T) &= \left[\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right], \\ EV(A^T) &= \frac{a+b+c+d}{4}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Valoarea de expectanţă a unui număr fuzzy triunghiular de forma $A^\Delta = (a, \alpha, \beta)$ este:

$$EV\left(A^\Delta\right) = a + \frac{\beta-\alpha}{4}. \tag{2.18}$$

Valoarea de expectanţă a unui interval de numere fuzzy este:

$$EV(\widetilde{A}) = EV([A^L, A^U]) = \frac{1}{2}(EV(A^L) + EV(A^U)).$$

Dintre numeroasele metode de ierarhizare a numerelor fuzzy intuiţioniste trapezoidale existente în literatura de specialitate (vezi, de exemplu, [33], [36], [38], [60], [57]), considerăm în continuare patru dintre ele. Notăm cu $\widetilde{\widetilde{A^T}} = \langle(a_1,\, b_1,\, c_1,\, d_1),\, (a_2,\, b_2,\, c_2,\, d_2)\rangle$ numărul fuzzy intuiţionist trapezoidal.

Pentru început, considerăm o metodă de ierarhizare a numerelor fuzzy intuiţioniste trapezoidale bazată pe indexul $M_\mu^{\beta,k}$ pentru funcţia de apartenenţă şi indexul $M_\nu^{\beta,k}$ pentru funcţia de non-apartenenţă (vezi [33]). În cazul particular când $\beta = 1/3$ şi $k = 0$, aceste indexuri au următoarele expresii:

$$\begin{aligned} M_\mu^{1/3,0}(\widetilde{\widetilde{A^T}}) &= \frac{1}{6}(a_1 + 2b_1 + 2c_1 + d_1), \\ M_\nu^{1/3,0}(\widetilde{\widetilde{A^T}}) &= \frac{1}{6}(a_2 + 2b_2 + 2c_2 + d_2). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Pentru simplificare, în continuare, notăm cu $M_\mu(\widetilde{\widetilde{A^T}}) = M_\mu^{1/3,0}(\widetilde{\widetilde{A^T}})$ şi respectiv $M_\nu(\widetilde{\widetilde{A^T}}) = M_\nu^{1/3,0}(\widetilde{\widetilde{A^T}})$.

Definiţia 10. *(vezi [33]) Fie $\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}$ şi $\widetilde{\widetilde{\widetilde{B^T}}}$ două numere fuzzy intuiţioniste trapezoidale. Atunci*

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}} \prec_M \widetilde{\widetilde{\widetilde{B^T}}} \Leftrightarrow & M_\mu(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) < M_\mu(\widetilde{\widetilde{\widetilde{B^T}}}) \text{ sau} \\ & (M_\mu(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) = M_\mu(\widetilde{\widetilde{\widetilde{B^T}}}) \text{ şi } -M_\nu(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) < -M_\nu(\widetilde{\widetilde{\widetilde{B^T}}})).\end{aligned}$$

A doua metodă de ierarhizare a numerelor fuzzy intuiţioniste trapezoidale amintită aici se bazează pe index-valoarea V_λ şi index-ambiguitatea A_λ (vezi [35]). Valoarea funcţiei de apartenenţă este dată de $V_\mu(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) = \frac{1}{6}(a_1 + 2b_1 + 2c_1 + d_1)$, iar valoarea funcţiei de non-apartenenţă este dată de $V_\nu(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) = \frac{1}{6}(a_2 + 2b_2 + 2c_2 + d_2)$. Analog, ambiguitatea funcţiei de apartenenţă este dată de $A_\mu(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) = \frac{1}{6}(-a_1 - 2b_1 + 2c_1 + d_1)$ şi ambiguitatea funcţiei de non-apartenenţă este dată de $A_\nu(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) = \frac{1}{6}(-a_2 - 2b_2 + 2c_2 + d_2)$. Atunci index-valoarea şi index-ambiguitatea lui $\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}$ sunt date de

$$\begin{aligned} V_\lambda(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) &= \lambda V_\mu(\widetilde{\widetilde{A}}) + (1-\lambda)V_\nu(\widetilde{\widetilde{A}}), \\ A_\lambda(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) &= \lambda A_\mu(\widetilde{\widetilde{A}}) + (1-\lambda)A_\nu(\widetilde{\widetilde{A}}), \end{aligned} \tag{2.20}$$

unde $\lambda \in [0,1]$ este un parametru care indică informaţia preferată a factorului de decizie, şi anume $\lambda \in [0, 0.5)$ indică faptul că factorul de decizie preferă certitudinea, $\lambda \in (0.5, 1]$ indică faptul că factorul de decizie preferă incertitudinea, iar $\lambda = 0.5$ indică faptul că factorul de decizie este indiferent în ceea ce priveşte certitudinea şi incertitudinea.

Definiţia 11. *(vezi [35]) Fie $\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}$ şi $\widetilde{\widetilde{\widetilde{B^T}}}$ două numere fuzzy intuiţioniste trapezoidale. Atunci*

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}} \prec_{VA} \widetilde{\widetilde{\widetilde{B^T}}} \Leftrightarrow & V_\lambda(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) < V_\lambda(\widetilde{\widetilde{\widetilde{B^T}}}) \text{ sau} \\ & (V_\lambda(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) = V_\lambda(\widetilde{\widetilde{\widetilde{B^T}}}) \text{ şi } A_\lambda(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) > A_\lambda(\widetilde{\widetilde{\widetilde{B^T}}})).\end{aligned}$$

Pentru o a treia metodă de ierarhizare, introdusă în [61], reamintim următoarele definiţii ale scorului S şi acurateţii E ale lui $\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}$:

$$\begin{aligned} S(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) &= (a_1 - a_2 + b_1 - b_2 + c_1 - c_2 + d_1 - d_2)/4, \\ E(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) &= (a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2)/4. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dacă $a_i, b_i, c_i, d_i \in [0,1]$, pentru $i \in \{1,2\}$, atunci $S(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) \in [-1,1]$ şi $E(\widetilde{\widetilde{\widetilde{A^T}}}) \in [0,2]$.

Definiţia 12. *(vezi [61]) Fie* $\widetilde{\widetilde{A^T}}$ *şi* $\widetilde{\widetilde{B^T}}$ *două numere fuzzy intuiţioniste trapezoidale. Atunci*

$$\widetilde{\widetilde{A^T}} \prec_{SE} \widetilde{\widetilde{B^T}} \Leftrightarrow S(\widetilde{\widetilde{A^T}}) < S(\widetilde{\widetilde{B^T}}) \text{ sau } (S(\widetilde{\widetilde{A^T}}) = S(\widetilde{\widetilde{B^T}}) \text{ şi } E(\widetilde{\widetilde{A^T}}) < E(\widetilde{\widetilde{B^T}})).$$

Ultima metodă de ierarhizare, dar nu cea mai puţin importantă, întrucât este simplă şi are proprietăţi adecvate, se bazează pe valoarea de expectanţă a unui număr fuzzy intuiţionist trapezoidal dată prin (vezi, de exemplu, [7]):

$$EV(\widetilde{\widetilde{A^T}}) = (a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + a_2 + b_2 + c_2 + d_2)/8. \tag{2.22}$$

Definiţia 13. *(vezi [7]) Fie* $\widetilde{\widetilde{A^T}}$ *şi* $\widetilde{\widetilde{B^T}}$ *două numere fuzzy intuiţioniste trapezoidale. Atunci*

$$\widetilde{\widetilde{A^T}} \prec_{EV} \widetilde{\widetilde{B^T}} \Leftrightarrow EV(\widetilde{\widetilde{A^T}}) < EV(\widetilde{\widetilde{B^T}}).$$

2.6 Principiul de extindere propus de Zadeh

Principiul de extindere propus de Zadeh (vezi [58], [59] şi recenta carte [13]) permite extinderea funcţiilor reale şi, în particular, a operaţiilor de bază cu numere reale, la numere fuzzy.

Definiţia 14. *(vezi, de exemplu, [28], pg. 41) Fie* $X_1, \ldots, X_n$, Z *mulţimi nevide şi funcţia* $F : X \to Z$*, unde* X *este produsul cartezian* $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$*. În plus, se consideră mulţimile fuzzy* $A_1, \ldots, A_n$ *astfel încât* $A_i : X_i \to [0,1], i \in \{1, \ldots, n\}$*. Utilizând funcţia* F *se poate defini mulţimea fuzzy* $F(A_1, A_2, \ldots, A_n) : Z \to [0,1]$ *astfel:*

$$F(A_1, \ldots, A_n)(z) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\in F^{-1}(z)} \min\{A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n)\}, \\ \qquad\qquad \text{dacă } z \in F(X), \\ 0, \ \text{altfel.} \end{cases} \tag{2.23}$$

Teorema 15. *([46], Propoziţia 5.1) Se consideră funcţia continuă* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *şi numerele fuzzy* $A_1, \ldots, A_n$*. Atunci* $F(A_1, \ldots, A_n)$ *obţinut prin principiul de extindere (2.23) este un număr fuzzy dat de*

$$(F(A_1, \ldots, A_n))_r = f((A_1)_r, \ldots, (A_n)_r), r \in [0,1].$$

Principiul de extindere al lui Zadeh bazat pe o normă triunghiulară T extinde o operaţie aritmetică $*$ cu numere reale la o operaţie aritmetică $\circledast$ cu numere fuzzy astfel (vezi [31], [59]):

$$(A \circledast B)(z) = \sup_{x*y=z} T(A(x), B(y)). \tag{2.24}$$

Operaţiile bazate pe norma T_M sunt cele mai folosite, dar cele bazate pe norma T_W au câteva avantaje evidente, şi anume, calculul este mult simplificat, neclaritatea rezultatelor este mică, iar adunarea şi înmulţirea bazate pe norma T_W păstrează forma numerelor fuzzy şi deci, în particular, şi a numerelor fuzzy triunghiulare (vezi [29], [30], [32], [41]).

2.7 Variabile lingvistice

Dacă se consideră scala Likert cu cinci valori, variabilele lingvistice utilizate pentru evaluarea performanţelor alternativelor pot fi cele din mulţimea {*foarte slab, slab, mediu, bun, foarte bun*} a căror reprezentare prin numere fuzzy triunghiulare poate fi cea din Figura 2.1. În acest fel, datele pot fi folosite în metode matematice (vezi [21]).

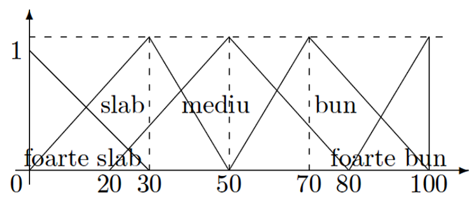

Figura 2.1: Reprezentarea variabilelor lingvistice prin numere fuzzy triunghiulare

Capitolul 3

Fundamente matematice ale teoriei deciziei

3.1 Analiza multicriterială

Analiza multicriterială reprezintă, conform [48], orice abordare structurată utilizată în scopul determinării unei preferinţe comune, alegând dintre mai multe opţiuni, fiecare trebuind să îndeplinească un anumit număr de obiective.

Etapele clasice ale analizei multicriteriale (vezi [40] sau [48]) sunt:

1. definirea contextului problemei decizionale: scopul urmărit, decidenţii etc;
2. definirea alternativelor decizionale $A = \{A_1, \ldots, A_m\}$;
3. identificarea criteriilor $C = \{C_1, \ldots, C_n\}$ în raport cu care se determină performanţele alternativelor;
4. crearea matricei de decizie (cu valori numerice pentru consecinţele $R = \{r_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$);
5. stabilirea ponderilor criteriilor $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ care dau importanţa criteriilor în luarea deciziei;
6. aplicarea unei metode MCDM adecvate care să determine scorul global al fiecărei alternative (de exemplu media ponderată a performanţelor cu ponderile);
7. examinarea şi interpretarea rezultatelor (obţinerea unei ierarhizări a alternativelor);
8. analiza de sensibilitate a metodei, prin modificarea consecinţelor şi/sau a ponderilor şi evaluarea abaterilor scorurilor.

3.2 Determinarea ponderilor criteriilor

3.2.1 Metoda directă

Considerăm n criterii $C_1, \ldots, C_n$ ale unui serviciu şi k factori de decizie $D_1, \ldots, D_k$. Notăm cu W_{tj} ponderea criteriului C_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$ în opinia factorului de decizie D_t, $t \in \{1, \ldots, k\}$, obţinută prin răspunsuri la întrebări de forma *"Cât de important este ...?"*. Ponderea unui criteriu C_j poate fi calculată printr-o metodă directă, agregând valorile W_{tj}. De exemplu, folosind numerele fuzzy triunghiulare de forma 2.1 şi operaţiile aritmetice generate de norma triunghiulară T_W, se obţine algoritmul 1 de ierarhizare a criteriilor în funcţie de ponderile fuzzy determinate prin metoda directă.

Algoritmul 1 Ierarhizarea criteriilor în funcţie de ponderile determinate prin metoda directă

for $j = 1 \to n$ **do**

calculează (vezi (2.2), (2.4))

$$\widetilde{W_j}^* = \frac{1}{k} \cdot (\widetilde{W_{1j}}^* + \ldots + \widetilde{W_{kj}}^*) = \left(\frac{1}{k} \sum_{t=1}^{k} w_{tj}^*, \max_{t \in \{1,\ldots,k\}} \alpha_{tj}^*, \max_{t \in \{1,\ldots,k\}} \beta_{tj}^* \right)$$

calculează (vezi (2.18))

$$W_j = EV\left(\widetilde{W_j}^*\right) = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{k} w_{tj}^* + \frac{1}{4} \max_{t \in \{1,\ldots,k\}} \beta_{tj}^* - \frac{1}{4} \max_{t \in \{1,\ldots,k\}} \alpha_{tj}^*$$

end for

ordonează vectorul $\widetilde{W}^*$ în funcţie de W astfel: dacă $W_{j_1} \geq W_{j_2}$ atunci $\widetilde{W_{j_1}}^* \geq \widetilde{W_{j_2}}^*$, altfel $\widetilde{W_{j_1}}^* < \widetilde{W_{j_2}}^*$ (vezi (2.14)-(2.16))

3.2.2 Metoda indirectă a corelaţiei

O metodă indirectă pentru calcularea ponderilor criteriilor în cazul clasic este aceea a corelaţiei între performanţele percepute în raport cu fiecare criteriu în parte şi nivelul general de satisfacţie a clienţilor (vezi, de exemplu, [19], [44], [43]). Folosind notaţiile din secţiunea anterioară, ponderea criteriului $C_j, j \in \{1, \ldots, n\}$, notată cu W_j, este dată ca fiind coeficientul de corelaţie dintre variabliele independente $(X_{1j}, \ldots, X_{kj})$ şi

$(X_1, \ldots, X_k)$, prin urmare

$$W_j = \frac{\sum\limits_{t=1}^{k} \left(X_{tj} - X_j^M\right)\left(X_t - X^M\right)}{\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{k} \left(X_{tj} - X_j^M\right)^2 \sum\limits_{t=1}^{k} \left(X_t - X^M\right)^2}}, \tag{3.1}$$

unde $X_j^M = \frac{1}{k}\sum\limits_{t=1}^{k} X_{tj}$ şi $X^M = \frac{1}{k}\sum\limits_{t=1}^{k} X_t$.

Este bine cunoscut faptul că coeficientul de corelaţie ia valori între -1 şi 1, prin urmare $W_j \in [-1, 1]$. Chiar dacă uneori sunt preferate alte metode pentru că evită valorile negative, analiza regresiei şi coeficientul de corelaţie sunt considerate cele mai potrivite metode pentru măsurarea ponderiilor derivate din datele sondajului de opinie. Faptul că valorile ponderilor sunt negative nu este o problemă atunci când rezultatele au utilizări ulterioare, dintre care cel mai bun exemplu fiind analiza IPA.

3.3 Analiza importanţă-performanţă

Analiza IPA este o tehnică de marketing simplă şi eficientă care ajută la identificarea priorităţilor în ceea ce priveşte îmbunătăţirea calităţii serviciilor. Analiza IPA constă în aşezarea punctelor care au ca primă coordonată performanţa şi ponderea ca cea de a doua coordonată pe un grafic bidimensional denumit grila IPA. Cele două axe, cea orizontală, care indică performanţa unui criteriu văzută prin prisma clienţilor şi cea verticală, care indică ponderea criteriului, determină patru cadrane şi, implicit, o clasificare a criteriilor conform Tabelului 3.1.

Tabelul 3.1: Cadranele din analiza IPA clasică

Cadran	Scor performanţă	Scor pondere
1: *Continuarea muncii bine făcute* (MB)	ridicat	ridicat
2: *Concentrare în această zonă* (CZ)	scăzut	ridicat
3: *Prioritate scăzută* (PS)	scăzut	scăzut
4: *Şansă la eşec* (SE)	ridicat	scăzut

Trasarea axelor reprezintă încă un subiect aflat în continuă dezbatere. Pe de altă parte, majoritatea claselor din lumea reală sunt mai degrabă fuzzy decât clasice. Instrumentele care identifică structura naturală a datelor - precum gruparea fuzzy - par a fi mai potrivite decât alte abordări artificiale ale analizei IPA.

3.3.1 Partiţie fuzzy utilizând algoritmul c-medii fuzzy

Propoziţia 16. *Fie $A_1, \ldots, A_s$, $s > 2$, mulţimi fuzzy pe X. Familia $P = \{A_1, \ldots, A_s\}$ este o partiţie fuzzy pe X dacă şi numai dacă $\sum_{i=1}^{s} A_i(x) = 1$, pentru orice $x \in X$.*

Fie $X = \{\boldsymbol{x^1}, ..., \boldsymbol{x^n}\} \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime de vectori, unde n este numărul de obiecte şi p este numărul caracteristicilor, $\boldsymbol{x^j} = \left(x_1^j, \ldots, x_p^j\right)$, şi $L = \{L^1, \ldots, L^s\}$ un s-tuplu de prototipuri, $L^i = \left(L_1^i, \ldots, L_p^i\right)$, fiecare caracterizând unul dintre cele s categorii ale mulţimii de date. O partiţie pe X în s categorii fuzzy este obţinută prin minimizarea funcţiei obiectiv (vezi [18], [24], [25], [47])

$$J(P, L) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} \left(A_i\left(\boldsymbol{x^j}\right)\right)^2 d^2\left(\boldsymbol{x^j}, L^i\right), \tag{3.2}$$

unde $P = \{A_1, \ldots, A_s\}$ este partiţia fuzzy pe X, $A_i\left(\boldsymbol{x^j}\right) \in [0, 1]$ reprezintă gradul de apartenenţă al punctului $\boldsymbol{x^j}$ la categoria A_i şi d este o distanţă pe $\mathbb{R}^p$, de regulă distanţa euclidiană, adică

$$d^2\left(\boldsymbol{x^j}, L^i\right) = \sum_{k=1}^{p} \left(x_k^j - L_k^i\right)^2. \tag{3.3}$$

Pentru o mulţime dată de prototipuri L, minimul funcţiei $J(\cdot, L)$ se obţine pentru (vezi [25])

$$A_i\left(\boldsymbol{x^j}\right) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{s} \frac{d^2\left(\boldsymbol{x^j}, L^i\right)}{d^2\left(\boldsymbol{x^j}, L^k\right)}}, i \in \{1, ..., s\}, j \in \{1, ..., n\}. \tag{3.4}$$

Pentru o partiţie dată P, minimul funcţiei $J(P, \cdot)$ se obţine pentru (vezi [25])

$$L^i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left(A_i\left(\boldsymbol{x_j}\right)\right)^2 \boldsymbol{x^j}}{\sum_{j=1}^{n} \left(A_i\left(\boldsymbol{x_j}\right)\right)^2}, i \in \{1, ..., s\}. \tag{3.5}$$

Partiţia fuzzy optimă pe X este determinată aşadar utilizând metoda iterativă descrisă anterior, în care J este minimizată succesiv în raport cu P şi respectiv L. Procedura se numeşte algoritmul c-medii fuzzy (vezi [14] şi [25], pp. 293-295).

Capitolul 4

Metode de determinare indirectă a ponderilor fuzzy ale criteriilor

4.1 Metodă pentru determinarea ponderilor fuzzy ale criteriilor pe baza coeficientului de corelaţie şi a aritmeticii induse de norma T_M

Coeficientul de corelaţie dintre numere fuzzy ca fiind un număr fuzzy a fost introdus în [39]. Folosindu-ne de acest rezultat, ne propunem să elaborăm o metodă de calcul a ponderilor fuzzy ale criteriilor. Mai exact, calculul se bazează pe aritmetica indusă de norma triunghiulară T_M folosind principiul de extindere propus de Zadeh. Soluţiile numerice sunt obţinute prin considerarea diferitelor mulţimi de nivel, având în vedere că este dificil de dat o soluţie analitică. Chiar şi aşa, volumul de calcul este foarte mare, astfel încât metoda practică propusă este preferabilă în cazul în care numărul factorilor de decizie şi/sau al criteriilor este foarte mare. Metoda practică obţinută mai are un avantaj important şi anume acela că furnizează numere fuzzy trapezoidale, care pot fi uşor comparate, interpretate şi utilizate în calcule ulterioare.

4.1.1 Descrierea metodei generale

Introducem

$$\widetilde{w_j} = \frac{\sum_{t=1}^{k}\left(\widetilde{X_{tj}} - \widetilde{X_j^M}\right)\cdot\left(\widetilde{X_t} - \widetilde{X^M}\right)}{\sqrt{\sum_{t=1}^{k}\left(\widetilde{X_{tj}} - \widetilde{X_j^M}\right)^2 \cdot \sum_{t=1}^{k}\left(\widetilde{X_t} - \widetilde{X^M}\right)^2}} \tag{4.1}$$

ca fiind ponderea fuzzy a criteriului $C_j, j \in \{1, \ldots, n\}$, unde $\widetilde{X_{tj}}$ notează performanţa în raport cu criteriul $C_j, j \in \{1, \ldots, n\}$ în opinia factorului de decizie $D_t, t \in \{1, \ldots, k\}$, exprimată printr-un număr fuzzy, $\widetilde{X_t}$ notează nivelul general de satisfacţie (sau performanţa generală) în opinia factorului de decizie $D_t, t \in \{1, \ldots, k\}$, exprimată printr-un număr fuzzy, şi, în plus, notăm

$$\widetilde{X_j^M} = \frac{1}{k}\cdot\sum_{t=1}^{k}\widetilde{X_{tj}} \text{ şi } \widetilde{X^M} = \frac{1}{k}\cdot\sum_{t=1}^{k}\widetilde{X_t}.$$

Formula (4.1) este mai de grabă una formală, calculul efectiv al numărului fuzzy $\widetilde{w_j}$ bazându-se pe principiul de extindere al lui Zadeh, mai exact obţinem mulţimile de nivel $(\widetilde{w_j})_r^-$ şi $(\widetilde{w_j})_r^+$, pentru fiecare $r \in [0, 1]$, prin rezolvarea următoarei perechi de calcul matematic clasic:

$$(\widetilde{w_j})_r^- = \min f_j\left(x_{1j}, \ldots, x_{kj}, x_1, \ldots, x_k\right) \tag{4.2}$$

astfel încât

$$\left(\widetilde{X_{tj}}\right)_r^- \leq x_{tj} \leq \left(\widetilde{X_{tj}}\right)_r^+, \forall t \in \{1, \ldots, k\}, \tag{4.3}$$

$$\left(\widetilde{X_t}\right)_r^- \leq x_t \leq \left(\widetilde{X_t}\right)_r^+, \forall t \in \{1, \ldots, k\} \tag{4.4}$$

şi

$$(\widetilde{w_j})_r^+ = \max f_j\left(x_{1j}, \ldots, x_{kj}, x_1, \ldots, x_k\right) \tag{4.5}$$

astfel încât

$$\left(\widetilde{X_{tj}}\right)_r^- \leq x_{tj} \leq \left(\widetilde{X_{tj}}\right)_r^+, \forall t \in \{1, \ldots, k\}, \tag{4.6}$$

$$\left(\widetilde{X_t}\right)_r^- \leq x_t \leq \left(\widetilde{X_t}\right)_r^+, \forall t \in \{1, \ldots, k\}, \tag{4.7}$$

unde

$$f_j\left(x_{1j}, \ldots, x_{kj}, x_1, \ldots, x_k\right) = \frac{\sum_{t=1}^{k}\left(x_{tj} - \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}x_{tj}\right)\left(x_t - \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}x_t\right)}{\sqrt{\sum_{t=1}^{k}\left(x_{tj} - \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}x_{tj}\right)^2 \sum_{t=1}^{k}\left(x_t - \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}x_t\right)^2}},$$

pentru fiecare $j \in \{1, \dots, n\}$. Acest număr fuzzy $\widetilde{w_j}$ poate fi reconstituit utilizând teorema de caracterizare a lui Negoiţă-Ralescu ([45]).

Este dificil de dat soluţii analitice pentru sistemele date de formulele (4.2) - (4.4) şi formulele (4.5)-(4.7), chiar dacă pot fi utile metodele variabilei constrânse şi metoda gradientului redus. Cu toate acestea, pot fi obţinute uşor soluţii numerice prin găsirea unei mulţimi finite de nivel r, $r \in \{r_0 = 0 < r_1 < \ldots < r_{s-1} < r_s = 1\}$, pentru fiecare $\widetilde{w_j}, j \in \{1, \dots, n\}$. Ideea a fost lansată în [39] cu privire la calcularea coeficientului de corelaţie fuzzy. Evident, alegând diferenţe mici $r_{h+1} - r_h$ pentru orice $h \in \{0, \dots, s-1\}$ şi o valoare mare pentru s, se obţine o soluţie mai bună, dar această calitate mai bună va fi însoţită de un volum mai mare de calcul.

Rezultatele obţinute prin metode fuzzy pot fi uşor interpretate după defuzzificare. Metoda de ierarhizare bazată pe valoarea de expectanţă şi adaptată la datele curente constă în următoarele. Fie A un număr fuzzy pentru care se cunosc mulţimile de nivel $r_h = \frac{h}{s}, h \in \{0, \dots, s\}$, $s \geq 2$. Atunci:

$$EV\tilde{}\,(A) = \frac{A_0^- + A_0^+ + A_1^- + A_1^+}{4s} + \frac{1}{2s}\sum_{h=1}^{s-1} A^-_{\frac{h}{s}} + \frac{1}{2s}\sum_{h=1}^{s-1} A^+_{\frac{h}{s}}. \tag{4.8}$$

4.1.2 Descrierea metodei practice

O bună alegere pentru aproximarea unui număr fuzzy A, având mulţimile de nivel $A_r = [A_r^-, A_r^+]$, $r \in [0,1]$ sunt numerele fuzzy trapezoidale $\left(A_0^-, A_1^-, A_1^+, A_0^+\right)$. În acest caz este suficientă rezolvarea următoarelor probleme pentru a găsi ponderile fuzzy $\widetilde{w_j} = (p_j, q_j, r_j, s_j)\,, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$p_j = \min f_j\left(x_{1j}, \dots, x_{kj}, x_1, \dots, x_k\right)$$

astfel încât

$$\left(\widetilde{X_{tj}}\right)_0^- \leq x_{tj} \leq \left(\widetilde{X_{tj}}\right)_0^+, \forall t \in \{1, \dots, k\},$$
$$\left(\widetilde{X_t}\right)_0^- \leq x_t \leq \left(\widetilde{X_t}\right)_0^+, \forall t \in \{1, \dots, k\},$$

$$q_j = \min f_j\left(x_{1j}, \dots, x_{kj}, x_1, \dots, x_k\right)$$

astfel încât

$$\left(\widetilde{X_{tj}}\right)_1^- \leq x_{tj} \leq \left(\widetilde{X_{tj}}\right)_1^+, \forall t \in \{1, \dots, k\},$$

$$\left(\widetilde{X_t}\right)_1^- \leq x_t \leq \left(\widetilde{X_t}\right)_1^+, \forall t \in \{1, \dots, k\},$$

$$r_j = \max f_j\left(x_{1j}, \dots, x_{kj}, x_1, \dots, x_k\right)$$

astfel încât

$$\left(\widetilde{X_{tj}}\right)_1^- \leq x_{tj} \leq \left(\widetilde{X_{tj}}\right)_1^+, \forall t \in \{1, \dots, k\},$$
$$\left(\widetilde{X_t}\right)_1^- \leq x_t \leq \left(\widetilde{X_t}\right)_1^+, \forall t \in \{1, \dots, k\}$$

şi

$$s_j = \max f_j\left(x_{1j}, \dots, x_{kj}, x_1, \dots, x_k\right)$$

astfel încât

$$\left(\widetilde{X_{tj}}\right)_0^- \leq x_{tj} \leq \left(\widetilde{X_{tj}}\right)_0^+, \forall t \in \{1, \dots, k\},$$
$$\left(\widetilde{X_t}\right)_0^- \leq x_t \leq \left(\widetilde{X_t}\right)_0^+, \forall t \in \{1, \dots, k\},$$

unde

$$f_j\left(x_{1j}, \dots, x_{kj}, x_1, \dots, x_k\right) = \frac{\sum\limits_{t=1}^{k}\left(x_{tj} - \frac{1}{k}\sum\limits_{t=1}^{k} x_{tj}\right)\left(x_t - \frac{1}{k}\sum\limits_{t=1}^{k} x_t\right)}{\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{k}\left(x_{tj} - \frac{1}{k}\sum\limits_{t=1}^{k} x_{tj}\right)^2 \sum\limits_{t=1}^{k}\left(x_t - \frac{1}{k}\sum\limits_{t=1}^{k} x_t\right)^2}},$$

pentru fiecare $j \in \{1, \dots, n\}$.

Legat de metoda de ierarhizare, valoarea de expectanţă a aproximării naive trapezoidale (A_0^-, A_1^-, A_1^+, A_0^+) a lui A este (vezi (2.17)):

$$EV^{\tilde{}}\left(A\right) = \frac{A_0^- + A_0^+ + A_1^- + A_1^+}{4}. \tag{4.9}$$

4.1.3 Algoritmii

4.1.4 Exemple numerice şi un studiu de caz privind calitatea serviciilor hoteliere

4.1.5 Concluzii

Rezultatele obţinute cu privire la ponderile criteriilor pot fi utilizate în alte studii ulterioare, dintre care cele mai importante ar fi metodele MCDM clasice sau fuzzy şi analiza IPA. Pe de altă parte, subliniem aici că alegerea unei mulţimi adecvate a criteriilor constituie un pas foarte important în orice analiză legată de diferite părţi ale industriei de servicii (vezi, de exemplu, [34]).

Rezultatele obţinute şi prezentate în Secţiunea 4.1 au fost publicate în lucrarea [8].

4.2 Metodă pentru determinarea ponderilor fuzzy ale criteriilor pe baza coeficientului de corelaţie şi a aritmeticii induse de norma T_W

În această secţiune este propusă tot o metodă indirectă pentru calcularea ponderilor fuzzy ale criteriilor folosind coeficientul de corelaţie, folosind numerele fuzzy triunghiulare şi aritmetica fuzzy indusă de norma triunghiulară T_W.

4.2.1 Descrierea metodei

Este bine cunoscut faptul că forma numerelor fuzzy se păstrează folosind adunarea şi înmulţirea generate de T_W, calculul este simplu şi, mai mult, ambiguitatea datelor rezultate este păstrată în limite rezonabile. Se consideră că toate operaţiile din (4.1) sunt obţinute prin principiul de extindere folosind norma T_W (vezi (2.24)). Dacă datele de intrare sunt numere fuzzy triunghiulare, adică $\widetilde{X_{ij}} \in \Delta FN(\mathbb{R})$ şi $\widetilde{X_i} \in \Delta FN(\mathbb{R})$ pentru orice $i \in \{1, ..., m\}$ şi $j \in \{1, ..., n\}$, atunci pentru calcularea ponderilor fuzzy ale criteriilor din (4.1) se pot folosi operaţiile introduse în (2.2)-(2.7). Prin defuzzificarea ponderilor fuzzy obţinute se determină, în acelaşi timp, şi o ierarhie a ponderilor criteriilor.

4.2.2 Algoritmul

4.2.3 Exemple numerice şi un studiu de caz privind serviciile hoteliere din Oradea

4.2.3.1 Cazul global şi dependenţa de alegerea subiectivă a numerelor fuzzy. Cazul simetric şi cazul drastic.

4.2.3.2 Cazul segmentat şi dependenţa de diverse caracteristici

4.2.4 Compararea cu alte metode

4.2.4.1 Metoda propusă în comparaţie cu metoda directă

4.2.4.2 Metoda propusă în comparaţie cu metoda indirectă din [8]

4.2.5 Concluzii

Bazat pe studiul de caz prezentat privind calitatea serviciilor hoteliere din Oradea, se poate concluziona faptul că pentru calculul ponderilor criteriilor pe baza coeficientului de corelaţie, operaţiile aritmetice deja clasice obţinute prin principiul standard de extindere al lui Zadeh pot fi înlocuite cu operaţiile aritmetice bazate pe norma T_W şi generate de (2.24) (vezi (2.2)-(2.7)). Principalele avantaje sunt legate de posibilitatea obţinerii unui calcul analitic, precum şi a unui calcul mai puţin complicat din punct de vedere al resurselor computaţionale, ambele importante pentru dezvoltări ulterioare. De asemenea, studiul de caz relevă atât similitudinile dintre rezultatele obţinute prin cele două metode indirecte propuse, cât şi diferenţele dintre acestea şi calculul efectuat folosind metoda directă de determinare a ponderilor fuzzy ale criteriilor.

Rezultatele obţinute şi prezentate în Secţiunea 4.2 au fost publicate în lucrările [9, 12].

Capitolul 5

Metode fuzzy de asistare a deciziilor multicriteriale

5.1 Metodă fuzzy MCDM bazată pe intervale de numere fuzzy trapezoidale

În această secţiune ne propunem să generalizăm metoda din [3], prin utilizarea intervalelor de numere fuzzy trapezoidale, pentru a putea fi aplicată în cazul problemelor de decizie în care persoanele chestionate doresc să aleagă două răspunsuri dintre variantele de răspuns oferite sau poate chiar un răspuns intermediar.

5.1.1 Descrierea metodei

O problemaă standard de asistare a deciziei multicriteriale presupune o comisie formată din k factori de decizie $D_1, \ldots, D_k$, responsabilă pentru evaluarea a m alternative $A_1, \ldots, A_m$ raportate la n criterii $C_1, \ldots, C_n$. Se consideră că $C_1, \ldots, C_h$ sunt criterii subiective, $C_{h+1}, \ldots, C_p$ sunt criterii obiective de tip beneficiu şi $C_{p+1}, \ldots, C_n$ sunt criterii obiective de tip cost. În plus, generalizând metoda fuzzy de asistare a deciziilor multicriteriale propusă în [3] considerăm că evaluările sunt date prin intervale de numere fuzzy trapezoidale.

Dacă $\widetilde{r_{ijt}} = [(e^L_{ijt}, f^L_{ijt}, g^L_{ijt}, h^L_{ijt}), (e^U_{ijt}, f^U_{ijt}, g^U_{ijt}, h^U_{ijt})]$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, h\}$, $t \in \{1, \ldots, k\}$ reprezintă performanţa alternativei A_i în raport cu criteriul subiectiv C_j

în opinia factorului de decizie D_t, atunci pentru $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, h\}$,

$$\begin{aligned}\widetilde{r_{ij}} &= [(e_{ij}^L, f_{ij}^L, g_{ij}^L, h_{ij}^L), (e_{ij}^U, f_{ij}^U, g_{ij}^U, h_{ij}^U)] = \\ &= \left[\left(\sum_{t=1}^{k}\frac{e_{ijt}^L}{k}, \sum_{t=1}^{k}\frac{f_{ijt}^L}{k}, \sum_{t=1}^{k}\frac{g_{ijt}^L}{k}, \sum_{t=1}^{k}\frac{h_{ijt}^L}{k}\right), \left(\sum_{t=1}^{k}\frac{e_{ijt}^U}{k}, \sum_{t=1}^{k}\frac{f_{ijt}^U}{k}, \sum_{t=1}^{k}\frac{g_{ijt}^U}{k}, \sum_{t=1}^{k}\frac{h_{ijt}^U}{k}\right)\right]\end{aligned} \tag{5.1}$$

reprezintă evaluarea medie a performanţei alternativei A_i raportată la criteriul C_j. Pe de altă parte, dacă $\widetilde{x_{ij}} = [(a_{ij}^L, b_{ij}^L, c_{ij}^L, d_{ij}^L), (a_{ij}^U, b_{ij}^U, c_{ij}^U, d_{ij}^U)]$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{h+1, \ldots, n\}$ este performanţa alternativei A_i în raport cu criteriul obiectiv C_j, atunci valorile normalizate ale performanţelor alternativelor raportate la criteriile de tip beneficiu sunt $\widetilde{r_{ij}} = [(e_{ij}^L, f_{ij}^L, g_{ij}^L, h_{ij}^L), (e_{ij}^U, f_{ij}^U, g_{ij}^U, h_{ij}^U)]$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{h+1, \ldots, p\}$, unde

$$e_{ij}^L = \frac{a_{ij}^L - a_j^{L^*}}{m_j^{L^*}},\ f_{ij}^L = \frac{b_{ij}^L - a_j^{L^*}}{m_j^{L^*}},\ g_{ij}^L = \frac{c_{ij}^L - a_j^{L^*}}{m_j^{L^*}},\ h_{ij}^L = \frac{d_{ij}^L - a_j^{L^*}}{m_j^{L^*}}, \tag{5.2}$$

$$e_{ij}^U = \frac{a_{ij}^U - a_j^{U^*}}{m_j^{U^*}},\ f_{ij}^U = \frac{b_{ij}^U - a_j^{U^*}}{m_j^{U^*}},\ g_{ij}^U = \frac{c_{ij}^U - a_j^{U^*}}{m_j^{U^*}},\ h_{ij}^U = \frac{d_{ij}^U - a_j^{U^*}}{m_j^{U^*}}, \tag{5.3}$$

iar valorile normalizate ale performanţelor alternativelor raportate la criteriile de tip cost sunt $\widetilde{r_{ij}} = [(e_{ij}^L, f_{ij}^L, g_{ij}^L, h_{ij}^L), (e_{ij}^U, f_{ij}^U, g_{ij}^U, h_{ij}^U)]$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{p+1, \ldots, n\}$, unde

$$e_{ij}^L = \frac{d_j^{L^*} - d_{ij}^L}{m_j^{L^*}},\ f_{ij}^L = \frac{d_j^{L^*} - c_{ij}^L}{m_j^{L^*}},\ g_{ij}^L = \frac{d_j^{L^*} - b_{ij}^L}{m_j^{L^*}},\ h_{ij}^L = \frac{d_j^{L^*} - a_{ij}^L}{m_j^{L^*}}, \tag{5.4}$$

$$e_{ij}^U = \frac{d_j^{U^*} - d_{ij}^U}{m_j^{U^*}},\ f_{ij}^U = \frac{d_j^{U^*} - c_{ij}^U}{m_j^{U^*}},\ g_{ij}^U = \frac{d_j^{U^*} - b_{ij}^U}{m_j^{U^*}},\ h_{ij}^U = \frac{d_j^{U^*} - a_{ij}^U}{m_j^{U^*}}, \tag{5.5}$$

şi pentru $j \in \{h+1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned}a_j^{L^*} &= min_{i\in\{1,\ldots,m\}} a_{ij}^L, \quad d_j^{L^*} = max_{i\in\{1,\ldots,m\}} d_{ij}^L, \quad m_j^{L^*} = d_j^{L^*} - a_j^{L^*}, \\ a_j^{U^*} &= min_{i\in\{1,\ldots,m\}} a_{ij}^U, \quad d_j^{U^*} = max_{i\in\{1,\ldots,m\}} d_{ij}^U, \quad m_j^{U^*} = d_j^{U^*} - a_j^{U^*}.\end{aligned}$$

Dacă $\widetilde{w_{jt}} = [(o_{jt}^L, p_{jt}^L, q_{jt}^L, s_{jt}^L), (o_{jt}^U, p_{jt}^U, q_{jt}^U, s_{jt}^U)]$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in \{1, \ldots, k\}$ este ponderea criteriului C_j în opinia factorului de decizie D_t, atunci ponderea medie a criteriului C_j va fi $\widetilde{w_j}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, dată de

$$\begin{aligned}\widetilde{w_j} &= [(o_j^L, p_j^L, q_j^L, s_j^L), (o_j^U, p_j^U, q_j^U, s_j^U)] = \\ &= \left[\left(\sum_{t=1}^{k}\frac{o_{jt}^L}{k}, \sum_{t=1}^{k}\frac{p_{jt}^L}{k}, \sum_{t=1}^{k}\frac{q_{jt}^L}{k}, \sum_{t=1}^{k}\frac{s_{jt}^L}{k}\right), \left(\sum_{t=1}^{k}\frac{o_{jt}^U}{k}, \sum_{t=1}^{k}\frac{p_{jt}^U}{k}, \sum_{t=1}^{k}\frac{q_{jt}^U}{k}, \sum_{t=1}^{k}\frac{s_{jt}^U}{k}\right)\right].\end{aligned} \tag{5.6}$$

Scorul final $\widetilde{G_i}$ al evaluărilor performanţei alternativei A_i se obţine prin agregarea performanţelor alternativelor cu ponderile criteriilor, după formula:

$$\widetilde{G_i} = \frac{1}{n}((\widetilde{r_{i1}} \otimes \widetilde{w_1}) + \ldots + (\widetilde{r_{in}} \otimes \widetilde{w_n})),\ i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Se obţine:

$$EV(\widetilde{G_i}) = \frac{1}{n}(EV(\widetilde{r_{i1}} \otimes \widetilde{w_1}) + \ldots + EV(\widetilde{r_{in}} \otimes \widetilde{w_n})), \tag{5.7}$$

unde fiecare termen din însumare poate fi obţinut pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, n\}$, astfel:

$$\begin{aligned} &EV(\widetilde{r_{ij}} \otimes \widetilde{w_j}) = \\ &= \frac{1}{24}(2e_{ij}^L o_j^L + f_{ij}^L o_j^L + e_{ij}^L p_j^L + 2f_{ij}^L p_j^L) + \frac{1}{24}(2g_{ij}^L q_j^L + h_{ij}^L q_j^L + g_{ij}^L s_j^L + 2h_{ij}^L s_j^L) + \\ &+ \frac{1}{24}(2e_{ij}^U o_j^U + f_{ij}^U o_j^U + e_{ij}^U p_j^U + 2f_{ij}^U p_j^U) + \frac{1}{24}(2g_{ij}^U q_j^U + h_{ij}^U q_j^U + g_{ij}^U s_j^U + 2h_{ij}^U s_j^U). \end{aligned}$$

În final, cunoscând valorile reale ale scorurilor finale ale alternativelor, în urma defuzzificării folosind valoarea de expectanţă, se poate face o ierarhie a alternativelor, folosind relaţia de ordine pe mulţimea numerelor reale.

5.1.2 Algoritmul

5.1.3 Exemplu numeric

5.1.4 Compararea cu alte metode

5.1.5 Concluzii

Compararea făcută în Secţiunea 5.1.4, prin faptul că s-au obţinut aceleaşi ierarhii, nu face decât să confirme validitatea metodei propuse. Putem presupune cu convingere faptul că ierarhia într-un caz generalizat care să conţină date de intrare mai diferite decât cele din cazul individualizat, va fi diferită de cea din cazul individualizat.

Rezultatele obţinute şi prezentate în Secţiunea 5.1 au fost publicate în lucrarea [51].

5.2 Metodă fuzzy MCDM bazată pe numere fuzzy intuiţioniste

Datorită formei simple şi a operaţiilor simplificate, numerele fuzzy intuiţioniste trapezoidale pot fi folosite cu succes în metodele fuzzy intuiţioniste MCDM. Metoda propusă se bazează pe doi operatori de agregare pentru numerele fuzzy intuiţioniste trapezoidale şi pe patru metode de ierarhizare a numerelor fuzzy intuiţioniste trapezoidale.

5.2.1 Descrierea metodei

Se consideră că performanţa alternativei A_i în raport cu criteriul C_j în opinia factorului de decizie D_t este dată de un număr fuzzy intuiţionist trapezoidal ne-negativ $\widetilde{\widetilde{r_{ijt}}} = \langle(a_{1ijt}, b_{1ijt}, c_{1ijt}, d_{1ijt}), (a_{2ijt}, b_{2ijt}, c_{2ijt}, d_{2ijt})\rangle$ şi ponderea criteriului C_j în opinia factorului de decizie D_t este dată de asemenea de un număr fuzzy intuiţionist trapezoidal ne-negativ $\widetilde{\widetilde{w_{jt}}} = \langle(e_{1jt}, f_{1jt}, g_{1jt}, h_{1jt}), (e_{2jt}, f_{2jt}, g_{2jt}, h_{2jt})\rangle$.

Primul pas al metodei propuse constă în calcularea mediei $\widetilde{\widetilde{r_{ij}}}$ a evaluărilor performanţelor alternativei A_i în raport cu criteriul C_j, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, pentru a obţine matricea de decizie, după cum urmează:

$$\widetilde{\widetilde{r_{ij}}} = (1/k) \cdot (\widetilde{\widetilde{r_{ij1}}} + \ldots + \widetilde{\widetilde{r_{ijk}}}), \tag{5.8}$$

mai exact, folosind operaţiile (2.8) şi (2.9) din Secţiunea 2.4,

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{r_{ij}}} = \langle(&\frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} a_{1ijt}, \frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} b_{1ijt}, \frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} c_{1ijt}, \frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} d_{1ijt}),\\ &(\frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} a_{2ijt}, \frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} b_{2ijt}, \frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} c_{2ijt}, \frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} d_{2ijt})\rangle.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Următorul pas constă în calcularea mediei ponderilor $\widetilde{\widetilde{w_j}}$ ale criteriilor C_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, după cum urmează:

$$\widetilde{\widetilde{w_j}} = (1/k) \cdot (\widetilde{\widetilde{w_{j1}}} + \ldots + \widetilde{\widetilde{w_{jk}}}), \tag{5.10}$$

şi folosind de asemenea operaţiile (2.8) şi (2.9) din Secţiunea 2.4,

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{w_j}} = \langle(&\frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} e_{1jt}, \frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} f_{1jt}, \frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} g_{1jt}, \frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} h_{1jt}),\\ &(\frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} e_{2jt}, \frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} f_{2jt}, \frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} g_{2jt}, \frac{1}{k} \cdot \sum_{t=1}^{k} h_{2jt})\rangle.\end{aligned} \tag{5.11}$$

În următorul pas se normalizează valorile mediilor performanţelor alternativelor raportate la criterii şi valorile mediilor ponderilor criteriilor, calculate anterior. Acest lucru este necesar doar dacă maximul valorilor performanţelor alternativelor şi/sau respectiv maximul valorilor ponderilor criteriilor sunt mai mari decât 1. Normalizarea se face după cum urmează: dacă $\widetilde{\widetilde{r_{ij}}} = \langle(a_{1ij},\ b_{1ij},\ c_{1ij},\ d_{1ij}),\ (a_{2ij},\ b_{2ij},\ c_{2ij},\ d_{2ij})\rangle$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$ şi obţinem că $\alpha = \max\limits_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} d_{2ij} > 1$, atunci

$$\widetilde{\widetilde{r_{ij}}} = (1/\alpha)\cdot\widetilde{\widetilde{r_{ij}}}, \tag{5.12}$$

folosind operaţia (2.9) din Secţiunea 2.4. Pentru simplificare, se foloseşte aceeaşi notaţie $\widetilde{\widetilde{r_{ij}}}$ şi pentru valorile normalizate din matricea de decizie. În acelaşi fel, dacă $\widetilde{\widetilde{w_j}} = \langle(e_{1j}, f_{1j}, g_{1j}, h_{1j}),\ (e_{2j}, f_{2j}, g_{2j}, h_{2j})\rangle$, $j \in \{1,\ldots,n\}$ şi obţinem că $\beta = \max\limits_{1\le j\le n} h_{2j} > 1$, atunci

$$\widetilde{\widetilde{w_j}} = (1/\beta)\cdot\widetilde{\widetilde{w_j}}, \tag{5.13}$$

folosind de asemenea operaţia (2.9) din Secţiunea 2.4. Şi de această dată se foloseşte aceeaşi notaţie $\widetilde{\widetilde{w_j}}$ pentru valorile normalizate ale ponderilor criteriilor. Următorul pas constă în determinarea scorurilor finale ale alternativelor A_i, $i \in \{1,\ldots,m\}$ prin agregarea performanţelor şi a ponderilor folosind, prima dată, operatorul $WAA_{\widetilde{\widetilde{\omega}}}$, astfel:

$$\widetilde{\widetilde{G_i}} = (1/n)\cdot(\widetilde{\widetilde{r_{i1}}}\otimes\widetilde{\widetilde{w_1}} + \ldots + \widetilde{\widetilde{r_{in}}}\otimes\widetilde{\widetilde{w_n}}), \tag{5.14}$$

şi folosind operaţiile (2.8), (2.9) şi (2.10) din Secţiunea 2.4,

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{G_i}} = \langle(&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{1ij}\cdot e_{1j}), \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(b_{1ij}\cdot f_{1j}), \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{1ij}\cdot g_{1j}), \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(d_{1ij}\cdot h_{1j})),\\ (&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{2ij}\cdot e_{2j}), \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(b_{2ij}\cdot f_{2j}), \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{2ij}\cdot g_{2j}), \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(d_{2ij}\cdot h_{2j}))\rangle.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Apoi, dacă folosim operatorul WGA_ω, atunci, pentru început, ponderile trebuie defuzzificate utilizând valoarea de expectanţă (vezi (2.22)), şi anume

$$w_j = EV(\widetilde{\widetilde{w_j}}) = (e_{1j} + f_{1j} + g_{1j} + h_{1j} + e_{2j} + f_{2j} + g_{2j} + h_{2j})/8, \tag{5.16}$$

pentru $j = \{1,\ldots,n\}$, apoi

$$\widetilde{\widetilde{H_i}} = \widetilde{\widetilde{r_{i1}}}^{w_1}\otimes\ldots\otimes\widetilde{\widetilde{r_{in}}}^{w_n},\ \text{pentru } i \in \{1,\ldots,m\}, \tag{5.17}$$

şi folosind operaţiile (2.10) şi (2.11) din Secţiunea 2.4,

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{H_i}} = \langle(&\prod_{j=1}^{n} {a_{1ij}}^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} {b_{1ij}}^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} {c_{1ij}}^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} {d_{1ij}}^{w_j}),\\ (&\prod_{j=1}^{n} {a_{2ij}}^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} {b_{2ij}}^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} {c_{2ij}}^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} {d_{2ij}}^{w_j})\rangle.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Pentru a obţine ierarhia alternativelor, se folosesc, pe rând, toate cele patru criterii din Definiţiile 10, 11, 12 şi 13, separat pentru $\widetilde{\widetilde{G_i}}$ şi $\widetilde{\widetilde{H_i}}$, obţinând astfel opt ierarhii.

5.2.2 Algoritmul

5.2.3 Exemple numerice

5.2.4 Compararea cu alte metode

5.2.5 Concluzii

Folosirea unei astfel de metode MCDM la baza căreia stau mai mulţi operatori de agregare şi/sau mai multe metode de ierarhizare este deosebit de eficientă, întrucât, în cazul obţinerii aceloraşi ierarhii, soluţia este una sigură, iar în cazul obţinerii unor ierarhii diferite, şi în urma unei revizuiri a evaluărilor factorilor de decizie, soluţia metodei va conduce cu certitudine la găsirea celei mai bune alternative. În plus, metoda propusă care utilizează numere fuzzy intuiţioniste trapezoidale poate fi rapid transpusă într-o metodă care să folosească numere fuzzy trapezoidale cu valori interval, pe baza bijecţiilor demonstrate în Secţiunea 2.4.

Rezultatele obţinute şi prezentate în Secţiunea 5.2 au fost cuprinse în lucrarea [52], iar cele din finalul Secţiunii 2.4 în lucrarea [7].

Capitolul 6

Metode de determinare a partiţiilor fuzzy pe mulţimea criteriilor în cadrul analizei importanţă-performanţă

6.1 Metodă de grupare fuzzy în patru categorii

În această primă secţiune este propusă o metodă de determinare a unei partiţii fuzzy a mulţimii criteriilor formată din aceleaşi patru categorii cu cele din analiza IPA clasică, şi anume:

$$
\begin{aligned}
&P = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} = \\
&\quad = \{\text{"Continuarea muncii bine făcute"}, \text{"Concentrare în această zonă"}, \\
&\quad \text{"Prioritate scăzută"}, \text{"Şansă la eşec"}\} = \{\text{MB, CZ, PS, SE}\}.
\end{aligned}
$$

6.1.1 Descrierea metodei

Fie $\left\{a^1, ..., a^n\right\}$ o mulţime de criterii şi notăm cu x^j, $j \in \{1, ..., n\}$, perechea *(performanţă, pondere)* corespunzătoare criteriului a^j, adică $x^j = \left(p^j, w^j\right)$. O partiţie fuzzy pe mulţimea $X = \left\{x^1, ..., x^n\right\} \subset \mathbb{R}^2$ determină un grad de apartenenţă al fiecărui criteriu la fiecare mulţime $A_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Metoda se obţine pe baza algoritmului

c-medii fuzzy pentru atomii din P şi pentru alegerea celor mai potrivite prototipuri iniţiale L^1, L^2, L^3, L^4 ale mulţimilor fuzzy $A_1 = MB$, $A_2 = CZ$, $A_3 = PS$ şi respectiv $A_4 = SE$, şi anume:

$$\left(L^1\right)_0 = \left(\left(L_1^1\right)_0, \left(L_2^1\right)_0\right) = \left(\max_{1\le j\le n} p^j, \max_{1\le j\le n} w^j\right), \tag{6.1}$$

$$\left(L^2\right)_0 = \left(\left(L_1^2\right)_0, \left(L_2^2\right)_0\right) = \left(\min_{1\le j\le n} p^j, \max_{1\le j\le n} w^j\right), \tag{6.2}$$

$$\left(L^3\right)_0 = \left(\left(L_1^3\right)_0, \left(L_2^3\right)_0\right) = \left(\min_{1\le j\le n} p^j, \min_{1\le j\le n} w^j\right), \tag{6.3}$$

$$\left(L^4\right)_0 = \left(\left(L_1^4\right)_0, \left(L_2^4\right)_0\right) = \left(\max_{1\le j\le n} p^j, \min_{1\le j\le n} w^j\right). \tag{6.4}$$

Am ales metrica euclidiană pe $\mathbb{R}^2$ şi am fixat eroarea admisibilă ca fiind $\varepsilon = 10^{-5}$. Prezentăm în continuare formulele de calcul folosite. Pentru calculul distanţelor

$$\left(d_{ij}\right)_l = d^2\left(x^j, \left(L^i\right)_l\right) = \left(p^j - \left(L_1^i\right)_l\right)^2 + \left(w^j - \left(L_2^i\right)_l\right)^2, \tag{6.5}$$

pentru calculul matricei partiţiei

$$q_{ij}^l = \frac{1}{\frac{\left(d_{ij}\right)_l}{\left(d_{1j}\right)_l} + \frac{\left(d_{ij}\right)_l}{\left(d_{2j}\right)_l} + \frac{\left(d_{ij}\right)_l}{\left(d_{3j}\right)_l} + \frac{\left(d_{ij}\right)_l}{\left(d_{4j}\right)_l}}, \tag{6.6}$$

iar pentru calculul prototipurilor

$$\left(L^i\right)_l = \left(\left(L_1^i\right)_l, \left(L_2^i\right)_l\right) = \left(\frac{\sum_{j=1}^n \left(q_{ij}^{l-1}\right)^2 p^j}{\sum_{j=1}^n \left(q_{ij}^{l-1}\right)^2}, \frac{\sum_{j=1}^n \left(q_{ij}^{l-1}\right)^2 w^j}{\sum_{j=1}^n \left(q_{ij}^{l-1}\right)^2}\right), \tag{6.7}$$

toate pentru $i \in \{1, \ldots, 4\}$ şi $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Uneori, pentru o mai uşoară interpretare şi dezvoltare ulterioară, în special în practică, este utilă obţinerea unei partiţii clasice $\overline{P} = \left\{\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_s\right\}$ a lui X, din partiţia fuzzy P, chiar dacă acest lucru presupune o pierdere de informaţie. Cea mai naturală definiţie a lui $\overline{P}$ este (vezi [23], pp. 333)

$$x^j \in \overline{A}_i \text{ dacă şi numai dacă } A_i\left(x^j\right) = q_{ij} = \max_{1\le p\le s} q_{pj} = \max_{1\le p\le s} A_p\left(x^j\right). \tag{6.8}$$

Deciziile ulterioare pot fi luate pe baza acestei partiţii clasice, dar trebuie avută mare atenţie cu privire la criteriile care au grade mari de apartenenţă la doi sau mai mulţi atomi din partiţia fuzzy.

6.1.2 Algoritmul

6.1.3 Studii de caz şi comparaţii

6.1.4 Concluzii

Metoda propusă a fost exemplificată considerând date de intrare din câteva studii de caz preluate din literatura de specialitate recentă şi rezultatele obţinute au fost comparate apoi cu rezultatele obţinute prin analiza IPA clasică efectuată în cadrul acestor studii de caz. Au fost date atât exemple în care rezultatele nu difereau foarte mult, cât şi exemple în care rezultatele indicau diferenţe foarte mari. Comparaţia a fost posibilă doar după defuzzificarea partiţiei fuzzy obţinute prin grupare fuzzy, chiar dacă acest lucru presupune o pierdere de informaţie. La nivelul nostru de cunoştinţe, nu există alte metode înrudite cu IPA care să returneze date de ieşire fuzzy, aşadar, în acest moment, o asemenea comparaţie a rezultatelor fuzzy nu este posibilă. Pe de altă parte, o dovadă matematică asupra calităţii metodei, în comparaţie cu alte metode, clasice sau fuzzy, ar fi foarte greu, dacă nu chiar imposibil de obţinut.

Metoda propusă, pe lângă faptul că determină o partiţie mai naturală pe mulţimea criteriilor, datorită faptului că algoritmul c-medii fuzzy foloseşte structura datelor de intrare, are încă un avantaj, şi anume acela că îmbunătăţeşte analiza IPA clasică în cel puţin două aspecte: sunt tratate mai bine punctele aflate foarte aproape sau chiar pe frontiera dintre partiţii şi evită trasarea subiectivă a axelor.

Rezultatele obţinute şi prezentate în Secţiunea 6.1 au fost publicate în lucrarea [11].

6.2 Metodă generalizată de grupare fuzzy în s categorii

6.2.1 Descrierea metodei

Pentru elaborarea metodei propuse, considerăm un model IPA clasic cu categoriile fixate $\{A_1, \ldots, A_s\}$, $s \geq 2$ şi, pentru a determina o partiţie fuzzy a unei mulţimi de criterii, sau, cu alte cuvinte, gradul de apartenenţă al fiecărui criteriu la fiecare categorie A_i, $i \in \{1, \ldots, s\}$, aplicăm algoritmul c-medii fuzzy într-o formă adaptată. Partiţia clasică se obţine printr-o procedură simplă de defuzzificare. Metoda este exemplificată în cazul a nouă categorii de criterii. Problema partiţionării unei mulţimi de criterii depinde cu certitudine de datele de intrare, astfel încât gruparea fuzzy reprezintă o tehnică care poate furniza metode cu adevărat utile în comparaţie cu IPA.

Descriem în continuare metoda propusă.

Fie $X = \{a^1, \ldots, a^n\}$ mulţimea criteriilor şi se notează cu x^j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, perechea (*performanţă, pondere*) corespunzătoare criteriului a^j, adică $x^j = (p^j, w^j)$.

Prezentăm în continuare formulele de calcul folosite. Pentru calculul distanţelor

$$(d_{ij})_l = d^2\left(x^j, (L^i)_l\right) = \left(p^j - (L_1^i)_l\right)^2 + \left(w^j - (L_2^i)_l\right)^2, \tag{6.9}$$

pentru calculul matricei partiţiei

$$q_{ij}^l = \frac{1}{\dfrac{(d_{ij})_l}{(d_{1j})_l} + \ldots + \dfrac{(d_{ij})_l}{(d_{sj})_l}}, \tag{6.10}$$

iar pentru calculul prototipurilor

$$(L^i)_l = \left((L_1^i)_l, (L_2^i)_l\right) = \left(\frac{\sum_{j=1}^n \left(q_{ij}^{l-1}\right)^2 p^j}{\sum_{j=1}^n \left(q_{ij}^{l-1}\right)^2}, \frac{\sum_{j=1}^n \left(q_{ij}^{l-1}\right)^2 w^j}{\sum_{j=1}^n \left(q_{ij}^{l-1}\right)^2}\right), \tag{6.11}$$

toate pentru $i \in \{1, \ldots, s\}$ şi $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Partiţia clasică $\overline{P} = \{\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_s\}$ a lui X se poate obţine din partiţia fuzzy $P = \{A_1, \ldots, A_s\}$ a lui X folosind regula (6.8). Partiţia clasică permite o interpretare simplă şi o dezvoltare ulterioară legată de problema în studiu.

În [1] se atribuie un clasament atât scorurilor ponderilor, cât şi scorurilor performanţelor fiecărui criteriu, şi anume "Ridicat", "Mediu" sau "Scăzut" pentru scorurile ponderilor şi respectiv "A", "B" sau "C" pentru scorurile performanţelor. Acest lucru duce la formarea a nouă categorii posibile de criterii, după cum urmează:

Ridicată	A_7: *Vulnerabilitate competitivă*	A_8: *Ridicat B*	A_1: *Putere competitivă*
Importanţă	A_6: *Mediu C*	A_9: *Zona gri*	A_2: *Mediu A*
Scăzută	A_5: *Indiferenţă relativă*	A_4: *Scăzut B*	A_3: *Superioritate irelevantă*
	Scăzută (C)	Performanţă	*Ridicată (A)*

Ne propunem în continuare să determinăm pentru o mulţime dată X de criterii, partiţia fuzzy $P = \{A_1, \ldots, A_9\}$, în conformitate cu schema anterioară, şi anume $A_1 =$*"Putere competitivă"*, $A_2 =$*"Mediu A"*, $A_3 =$*"Superioritate irelevantă"*, $A_4 =$*"Scăzut B"*, $A_5 =$*"Indiferenţă relativă"*, $A_6 =$*"Mediu C"*, $A_7 =$*"Vulnerabilitate competitivă"*, $A_8 =$*"Ridicat B"* şi $A_9 =$*"Zona gri"*. Fie $X = \{a^1, \ldots, a^n\} \subset \mathbb{R}^2$ şi $x^j = (p^j, w^j)$

mulţimea punctelor de coordonate *(performanţă, pondere)* corespunzătoare criteriilor. Alegerea naturală a prototipurilor iniţiale ale atomilor A_i, $i \in \{1, \dots, 9\}$ este:

$$\left(L^1\right)_0 = \left(\max_{1\le j\le n} p^j, \max_{1\le j\le n} w^j\right),\ \left(L^2\right)_0 = \left(\max_{1\le j\le n} p^j, \sum_{1\le j\le n} w^j/n\right),$$

$$\left(L^3\right)_0 = \left(\max_{1\le j\le n} p^j, \min_{1\le j\le n} w^j\right),\ \left(L^4\right)_0 = \left(\sum_{1\le j\le n} p^j/n, \min_{1\le j\le n} w^j\right),$$

$$\left(L^5\right)_0 = \left(\min_{1\le j\le n} p^j, \min_{1\le j\le n} w^j\right),\ \left(L^6\right)_0 = \left(\min_{1\le j\le n} p^j, \sum_{1\le j\le n} w^j/n\right),$$

$$\left(L^7\right)_0 = \left(\min_{1\le j\le n} p^j, \max_{1\le j\le n} w^j\right),\ \left(L^8\right)_0 = \left(\sum_{1\le j\le n} p^j/n, \max_{1\le j\le n} w^j\right),$$

$$\left(L^9\right)_0 = \left(\sum_{1\le j\le n} p^j/n, \sum_{1\le j\le n} w^j/n\right).$$

6.2.2 Algoritmul

6.2.3 Studii de caz

6.2.4 Concluzii

În a doua secţiune a acestui capitol a fost propusă o generalizare a metodei propuse în prima secţiune a capitolului curent, şi anume a fost propusă o metodă de clasificare a unei mulţimi de criterii în s partiţii fuzzy. Metoda generalizată obţinută a fost exemplificată pentru cazul a nouă categorii posibile, a căror prototipuri au fost obţinute într-un mod natural, folosind patru studii de caz preluate din literatura de specialitate recentă.

Metoda propusă are aceleaşi avantaje ca cele ale metodei pe care o generalizează, şi anume faptul că determină o partiţie naturală pe mulţimea criteriilor, evită clasificarea riguroasă a criteriilor situate în apropierea axelor şi respectiv evită trasarea subiectivă a axelor.

Rezultatele obţinute şi prezentate în Secţiunea 6.2 au fost cuprinse în lucrarea [10] trimisă spre publicare.

Capitolul 7

Concluzii generale

Această teză conţine contribuţii originale în domeniul metodelor fuzzy MCDM, mai exact şase metode fuzzy publicate în lucrările [7, 8, 9, 11, 12, 51, 52], două metode fuzzy de determinare indirectă a ponderilor fuzzy ale criteriilor, două metode fuzzy MCDM de ierarhizare a alternativelor şi două metode de grupare fuzzy a criteriilor.

7.1 Îndeplinirea obiectivelor de cercetare

Primul obiectiv specific O_1 a fost realizat prin propunerea a două metode indirecte de calcul a ponderilor fuzzy ale criteriilor pe baza coeficientului de corelaţie dintre performanţele alternativelor şi nivelul general de satisfacţie, ambele din perspectiva factorilor de decizie. Metodele propuse utilizează coeficientul de corelaţie dintre două numere fuzzy, rezultatul fiind tot un număr fuzzy. Calculul efectiv se bazează pe principiul de extindere al lui Zadeh, amintit în Secţiunea 2.6. În cadrul primei metode, descrisă în Secţiunea 4.1.1 rezultatele numerice sunt obţinute prin considerarea mulţimilor de nivel, având în vedere că este dificil de dat o soluţie analitică în cazul folosirii aritmeticii induse de norma T_M. Chiar şi aşa, volumul de calcul este foarte mare, astfel încât metoda practică propusă în Secţiunea 4.1.2 este preferabilă în cazul în care numărul factorilor de decizie şi/sau al criteriilor este mare. Metoda practică obţinută mai are un avantaj important şi anume acela că furnizează numere fuzzy trapezoidale, care pot fi uşor comparate, interpretate şi utilizate în calcule ulterioare. Pentru a optimiza metoda propusă în Secţiunea 4.1, în Secţiunea 4.2 este propusă tot o metodă indirectă de calculare a ponderilor fuzzy ale criteriilor, dar utilizând aritmetica fuzzy indusă de norma triunghiulară T_W. Metoda returnează o ierarhie a criteriilor considerate, în funcţie de ponderile obţinute, începând cu criteriul cel mai important şi sfârşind cu criteriul cel mai puţin important. Metodele propuse constituie o etapă importantă în cadrul dezvoltării unei analize IPA într-un mediu fuzzy, dar şi în cadrul metodelor fuzzy MCDM şi aduc ceva nou întrucât contribuţiile existente în literatura de specialitate (vezi [17], [20]) conţin o defuzzificare prematură a datelor, ceea ce conduce la denaturarea rezultatelor.

Al doilea obiectiv specific O_2 a fost realizat, în primul rând, prin metoda fuzzy MCDM propusă în Secţiunea 5.1 şi care modelează situaţia în care în cadrul unui chestionar se răspunde la anumite întrebări cu o variantă intermediară sau chiar cu două variante de răspuns. Aplicabilitatea ei a fost ilustrată printr-un exemplu concret în Secţiunea 5.1.3. Tot raportat la acest obiectiv a fost propusă şi metoda descrisă în Secţiunea 5.2, metodă care se pretează pentru MCDM deoarece este cunoscut faptul că numerele fuzzy intuiţioniste modelează bine incertitudinea. Metoda propusă îmbunătăţeşte alte metode existente în literatura de specialitate (vezi, de exemplu, [38], [53]) întrucât conservă mai multă informaţie, utilizând operaţii cu numere fuzzy intuiţioniste trapezoidale pe tot parcursul metodei, doar în final rezultatele sunt defuzzificate, pentru o mai uşoară interpretare a rezultatelor obţinute.

Al treilea obiectiv specific O_3 a fost realizat prin propunerea unei metode de grupare fuzzy. Gruparea fuzzy este cunoscută ca fiind un instrument excelent pentru identificarea structurii datelor, prin urmare, a fost adaptat algoritmul c-medii fuzzy. După cum se arată în literatura de specialitate, problema clasificării criteriilor în IPA este foarte importantă. Nu avem posibilitatea de a dovedi matematic faptul că metoda propusă este mai bună decât alte metode, aşadar, nu putem afirma nici că metoda propusă rezolvă complet această problemă. Cu toate acestea, metoda dezvoltată are unele avantaje semnificative. Pe lângă faptul că rezultatele sunt mai potrivite pentru asistarea deciziilor manageriale decât cele obţinute prin analiza IPA clasică, a fost depăşită şi o problemă importantă şi anume cea a clasificării criteriilor care sunt în apropierea axelor din cadrul analizei IPA clasice.

7.2 Direcţii viitoare de cercetare

Rezultatele obţinute prin metodele propuse în Capitolul 4 al acestei teze pot fi fructificate şi în alte direcţii. Una dintre aceste direcţii poate consta de exemplu în alegerea unui hotel reprezentativ, în cazul căruia să fie studiat comportamentul clienţilor care se apropie cel mai mult de nivelul general de satisfacţie. De asemenea, alte cercetări ulterioare pot fi dedicate aplicării metodelor propuse diferitelor categorii de clienţi, considerând doar anumite criterii sau identificării hotelului reprezentativ din zona considerată. Aşa după cum a fost deja menţionat şi în cazul clasic (vezi, de exemplu, [26]), este foarte dificil de a da un răspuns final la problema celei mai bune metode de calcul a ponderilor criteriilor. Alegerea unei metode este dependentă de context şi este o chestiune de preferinţă. Cu toate acestea, în cazul ponderării fuzzy derivate, pe baza coeficientului de corelaţie, metodele propuse în Secţiunile 4.1 şi respectiv 4.2 au unele avantaje, subliniate deja în această teză.

În Secţiunea 2.4 sunt prezentate relaţii bijective care se pot defini între mulţimea numerelor fuzzy intuiţioniste trapezoidale (triunghiulare) şi mulţimea numerelor fuzzy trapezoidale (triunghiulare) cu valori interval. Aceste bijecţii conduc imediat la extinderea sau generalizarea metodelor existente, după cum se arată în Secţiunea 5.2.5 a acestei teze. Metoda propusă în Secţiunea 5.2 poate fi folosită printr-o simplă adaptare şi în cazul datelor de intrare reprezentate prin numere fuzzy trapezoidale cu valori interval. Tot ca direcţii viitoare de cercetare, se poate constata faptul că metoda propusă în Secţiunea 5.2 poate fi uşor extinsă la alte tipuri de numere fuzzy intuiţioniste. De asemenea, întrucât numerele fuzzy intuiţioniste trapezoidale sunt o generalizare a numerelor fuzzy trapezoidale, alte metode fuzzy MCDM existente care folosesc numere fuzzy pot fi extinse la numere fuzzy intuiţioniste. Nu în ultimul rând, ne propunem să căutăm şi alţi operatori de agregare şi/sau metode de ierarhizare eficiente pentru numere fuzzy intuiţioniste trapezoidale care să fie integrate în metoda noastră.

Problema partiţionării unei mulţimi de criterii depinde cu certitudine de datele de intrare, astfel încât gruparea fuzzy reprezintă o tehnică care poate furniza metode cu adevărat utile în ceea ce priveşte analiza IPA. Nu considerăm că metoda propusă în Secţiunea 6.1 rezolvă complet problema foarte importantă a clasificării criteriilor, dar propune o nouă abordare în acest subiect, cu avantaje clare, subliniate deja în teză.

Abordarea poate fi continuată cel puţin în direcţiile de cercetare precizate în continuare. Chiar dacă analiza IPA clasică presupune clasificarea criteriilor prin împărţirea planului *(performanţă, pondere)* în patru categorii, au existat încercări de a diviza planul în două (vezi [49], [50]), în trei (vezi [42]) sau chiar nouă (vezi [1]) zone. Bazat pe ideea dezvoltată în Secţiunea 6.1, ar fi foarte interesant de aplicat acelaşi algoritm c-medii fuzzy adaptat şi pentru aceste cazuri. De altfel, cazul împărţirii în nouă zone a fost tratat în Secţiunea 6.2. Pe de altă parte, se poate deduce uşor faptul că nu este foarte clar dacă o analiză IPA bună înseamnă o partiţionare a planului *(performanţă, pondere)* în două, trei, patru, nouă sau un alt număr de zone. Avem convingerea că numărul categoriilor depinde mai degrabă de structura datelor de intrare. Deoarece gruparea fuzzy identifică structura datelor într-un mod natural (vezi, de exemplu, [14] şi [25]), prin aplicarea unui algoritm adecvat, mai puternic decât algoritmul c-medii fuzzy, putem obţine simultan şi numărul optim de categorii şi clasificarea criteriilor dată de apartenenţa la o anumită categorie. Aşadar, un astfel de rezultat ar fi valoros deci şi pentru determinarea numărul optim de criterii din punct de vedere al semnificaţiei acestora într-un anumit studiu, o problemă dezbătută în literatura recentă (vezi [34]). Un proiect mai laborios poate fi şi acela de a dezvolta o analiză IPA fuzzy pornind de la date fuzzy şi obţinând ca date de ieşire tot mulţimi fuzzy. Pe de altă parte, analiza IPA a fost extinsă de la două dimensiuni *(performanţă, pondere)* la trei dimensiuni *(performanţă, pondere, performanţa concurenţilor)* (vezi [15]) sau chiar la patru dimensiuni *(performanţă, pondere, performanţa concurenţilor, determinarea criteriului)* (vezi [56]), astfel că metodele şi algoritmii de grupare fuzzy, discutate sau nu în această teză, ar putea fi utile în dezvoltarea acestor direcţii de cercetare.

Anexe

Anexa 1

Aplicaţie la Capitolul 4, Secţiunea 4.1. Calculul indirect al ponderilor fuzzy pe baza coeficientului de corelaţie şi a aritmeticii induse de norma triunghiulară T_M.

Anexa 2

Aplicaţie la Capitolul 4, Secţiunea 4.2. Calculul indirect al ponderilor fuzzy pe baza coeficientului de corelaţie şi a aritmeticii induse de norma triunghiulară T_W.

Anexa 3

Aplicaţie la Capitolul 5, Secţiunea 5.1. Metodă fuzzy de asistare a deciziilor multicriteriale bazată pe intervale de numere fuzzy trapezoidale.

Anexa 4

Aplicaţie la Capitolul 5, Secţiunea 5.2. Metodă fuzzy de asistare a deciziilor multicriteriale bazată pe numere fuzzy intuiţioniste trapezoidale.

Anexa 5

Aplicaţie la Capitolul 6, Secţiunea 6.1. Clasificarea criteriilor în patru categorii pe baza algoritmului c-medii fuzzy adaptat.

Anexa 6

Aplicaţie la Capitolul 6, Secţiunea 6.2. Clasificarea criteriilor în nouă categorii pe baza algoritmului c-medii fuzzy adaptat.

Bibliografie

[1] K. Albrecht and L. Bradford. *The service advantage: How to identify and fulfill customer needs*. Dow Jones Irwin, Homewood, IL, 1990. 36, 41

[2] A. Ban. Approximation of intuitionistic fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the expected interval. In K. T. Atanassov, O. Hryniewicz, J. Kacprzyk, M. Krawczak, and E. Szmidt, editors, *Advances in Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets and Related Topics. Volume I: Foundations*, pages 53–83. Academic House Exit, Warszawa, 2008. 10

[3] A. Ban and O. Ban. Optimization and extensions of a fuzzy multicriteria decision making method and applications to selection of touristic destinations. *Expert Systems with Applications*, (39):7216–7225, 2012. 27

[4] A. Ban and L. Coroianu. Approximate solutions preserving parameters of intuitionistic fuzy linear systems. *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, (17):58–70, 2011. 10

[5] A. Ban and L. Coroianu. Characterization of the ranking indices of triangular fuzzy numbers. In A. Laurent, O. Strauss, B. Bouchon-Meunier, and R. Yager, editors, *Communications in Computer and Information Science*, number 443, pages 254–263. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2014. 12

[6] A. Ban and L. Coroianu. Simplifying the search for effective ranking of fuzzy numbers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, (23):327–339, 2014. 12

[7] A. Ban and D. Tuşe. Trapezoidal/triangular intuitionistic fuzzy numbers versus interval-valued trapezoidal/triangular fuzzy numbers and applications to multicri-

teria decision making methods. *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, 20(2):43–51, 2014. 5, 15, 32, 38

[8] A. Ban, O. Ban, and D. Tuşe. Calculation of the fuzzy importance of attributes based on the correlation coefficient, applied to the quality of hotel services. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 30(1):583–596, 2015. iii, 5, 24, 25, 38

[9] A. Ban, O. Ban, and D. Tuşe. Derived fuzzy importance of attributes based on the weakest triangular norm-based fuzzy arithmetic and applications to the hotel services in Oradea, Romania. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2016. 5, 26, 38

[10] A. Ban, O. Ban, and D. A. Tuşe. Validity of fuzzy importance-performance analysis by fuzzy c-means algorithm. *În curs de publicare*, 2016. 37

[11] O. Ban, A. Ban, and D. Tuşe. Importance-performance analysis by fuzzy c-means algorithm. *Expert Systems with Applications*, (50):9–16, 2016. 5, 35, 38

[12] O. Ban, I. Tara, V. Bogdan, D. Tuşe, and G. Bologa. Evaluation of hotel quality attribute importance through fuzzy correlation coefficient. *Technological and Economic Development of Economy*, 2016. doi: 10.3846/20294913.2016.1144657. 5, 26, 38

[13] B. Bede. *Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic.* Springer, Studies in fuzziness and soft computing, Heidelberg, New York, 2013. 6, 15

[14] J. Bezdek. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Functions Algorithms.* Plenum Press, New York, 1981. 20, 41

[15] A. Burns. Generating marketing strategy priorities based on relative competitive position. *Journal of Consumer Marketing*, (3):49–56, 1986. 41

[16] P.-T. Chang, P.-F. Pai, K.-P. Lin, and M.-S. Wu. Applying fuzzy arithmetic to the system dynamics for the customer-producer-employment model. *International Journal of Systems Science*, (37):673–698, 2006. 8

[17] Q. Cheng, J. Guo, and S. Ling. Fuzzy importance-performance analysis of visitor satisfaction for theme park: the case of fantawild adventure in taiwan, china. *Va apărea în Current Issues in Tourism*, 2013. doi: 10.1080/13683500.2013.777399. 39

[18] T. Cundari, C. Sârbu, and H. Pop. Robust fuzzy principal component analysis (fpca). a comparative study concerning interaction of carbon-hydrogen bonds with molybdenum-oxo bonds. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 42(6):1363–1369, 2002. 20

[19] W. Deng. Using a revised importance-performance analysis approach: The case of taiwanese hot springs tourism. *Tourism Management*, (28):1274–1284, 2007. 18

[20] W.-J. Deng. Fuzzy importance-performance analysis for determining critical service attributes. *International Journal of Service Industry Management*, (19):252–270, 2008. 39

[21] Y. Deng, F. Chan, Y. Wu, and D. Wang. A new linguistic mcdm method based on multiple-criterion data fusion. *Expert Systems with Applications*, (38):6985–6993, 2011. 16

[22] P. Diamond and P. Kloeden. *Metric Spaces of Fuzzy Sets. Theory and Applications.* World Scientific, Singapore, 1994. 6

[23] D. Dumitrescu. *Principiile matematice ale teoriei clasificării.* Editura Academiei Române, Bucureşti, 1999. 34

[24] D. Dumitrescu, C. Sârbu, and H. Pop. A fuzzy divisive hierarchical clustering algorithm for the optimal choice of sets of solvent systems. *Analytical Letters*, (24):1031–1054, 1994. 20

[25] D. Dumitrescu, B. Lazzerini, and L. Jain. *Fuzzy Sets and Their Application to Clustering and Training.* CRC Press, Boca Raton, 2000. 20, 41

[26] M. Feng, J. Mangan, C. Wong, M. Xu, and C. Lalwani. Investigating the different approaches to importance-performance analysis. *The Service Industries Journal*, (34):1021–1041, 2014. 3, 40

[27] G. Hancock and A. Klockars. The effect of scale manipulations on validity: Targeting frequency rating scales for anticipated performance levels. *Applied Ergonomics*, (22):147–154, 1991. 3

[28] M. Hanss. *Applied Fuzzy Arithmetic.* Springer, 2005. 15

[29] D. Hong. Shape preserving multiplications of fuzzy intervals. *Fuzzy Sets and Systems*, (123):81–84, 2001. 8, 16

[30] D. Hong. On shape-preserving additions of fuzzy intervals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (267):369–376, 2002. 8, 16

[31] D. Hong. Fuzzy measures for a correlation coefficient of fuzzy numbers under t_W (the weakest t-norm)-based fuzzy arithmetic operations. *Information Sciences*, (176):150–160, 2006. 8, 16

[32] A. Kolesárová. Additive preserving the linearity of fuzzy interval. *Tatra Montains Mathematical Publications*, (6):75–81, 1994. 8, 16

[33] A. Kumar and M. Kaur. A ranking approach for intuitionistic fuzzy numbers and its application. *Journal of Applied Research and Technology*, (11):381–396, 2013. 10, 13, 14

[34] I. Lai and M. Hitchcock. Importance-performance analysis in tourism: A framework for researchers. *Tourism Management*, (48):242–267, 2015. 24, 41

[35] D. F. Li. A note on using intuitionistic fuzzy sets for fault-tree analysis on printed circuit board assembly. *Microelectronics Reliability*, (48):1741, 2008. 14

[36] D. F. Li. A ratio ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and its application to madm problems. *Computers and Mathematics with Applications*, (60):1557–1570, 2010. 10, 13

[37] K.-P. Lin, W. Wen, C.-C. Chou, C.-H. Jen, and K.-C. Hung. Applying fuzzy gert with approximate fuzzy arithmetic based on the weakest t-norm operations to evaluate repairable reliability. *Applied Mathematical Modelling*, (35):5314–5325, 2011. 8

[38] P. Liu and X. Yu. Density aggregation operators based on the intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers for multiple attribute decision making. *Technological and Economic Development of Economy*, (19):454–470, 2013. 13, 39

[39] S.-T. Liu and C. Kao. Fuzzy measures for correlation coefficient of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, (128):267–275, 2002. 21, 23

[40] E. Merce, F. Arion, and C. Merce. *Management general şi agricol*. AcademicPres, Cluj-Napoca, 2000. 17

[41] R. Mesiar. Shape preserving additions of fuzzy interval. *Fuzzy Sets and Systems*, (86):73–78, 1997. 8, 16

[42] D. Mount. Determination of significant issues: applying a quantitative method to importance-performance analysis. *Journal of Quality Assurance in Hospitality & Tourism*, 1(3):49–63, 2000. 41

[43] D. Mount and M. Sciarini. Ipa and dsi: Enhancing the usefulness of student evaluation of teaching data. *Journal of Hospitality & Tourism Education*, (10): 8–14, 1999. 18

[44] D. J. Mount. An empirical application of quantitative derived importance-performance analysis (qdipa) for employee satisfaction. *Journal of Quality Assurance in Hospitality & Tourism*, (6):65–76, 2005. 18

[45] C. Negoiţă and D. Ralescu. *Application of Fuzzy Sets to System Analysis*. Wiley, New York, 1975. 23

[46] H. Nguyen. A note on the extension principle for fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (64):369–380, 1978. 15

[47] H. Pop, C. Sârbu, O. Horowitz, and D. Dumitrescu. A fuzzy classification of the chemical elements. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, (36): 465–482, 1996. 20

[48] M. Roman. *Manual de analiză multi-criterială*. Bucureşti, 2012. 17

[49] S. Sampson and M. Showalter. The performance-importance response function: observations and implications. *The Service Industries Journal*, (19):1–26, 1999. 41

[50] N. Slack. The importance-performance matrix as a determinant of improvement priority. *International Journal of Operations & Production Management*, (14): 59–75, 1994. 41

[51] D. Tuşe. An interval fuzzy multicriteria decision making method based on the expected value. *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Informatica*, LIX(1):216–227, 2014. 5, 9, 29, 38

[52] D. Tuşe. A trapezoidal intuitionistic fuzzy mcdm method based on some aggregation operators and several ranking methods. *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Informatica*, LXI(1):23–40, 2016. 5, 32, 38

[53] J. Wang and Z. Zhang. Multi-criteria decision-making method with incomplete certain information based on intuitionistic fuzzy number. *Control and Decision*, 24(2):226–230, 2009. 39

[54] G. Wei, X. Zhao, and R. Lin. Some induced aggregating operators with fuzzy number intuitionistic fuzzy information and their applications to group decision making. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3(1):84–95, 2010. 11

[55] J. S. Yao and F. T. Lin. Constructing a fuzzy flow-shop sequencing model based on statistical data. *International Journal of Approximate Reasoning*, (29):215–234, 2002. 12

[56] U. Yavas and D. Shemwell. Analyzing a bank's competitive position and appropiate strategy. *Journal of Retail Banking Services*, (XIX):43–51, 1997. 41

[57] J. Ye. Expected value method for intuitionistic trapezoidal fuzzy multicriteria decision-making problems. *Expert Systems with Applications*, (38):11730–11734, 2011. 13

[58] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, (8):338–353, 1965. 3, 15

[59] L. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, (1):3–28, 1978. 15, 16

[60] X. Zeng, D. Li, and G. Yu. A value and ambiguity-based ranking method of trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers and application to decision making. *The Scientific World Journal*, 2014. doi: 10.1155/2014/560582. 11, 13

[61] X. Zhang and P. Liu. Method for aggregating triangular fuzzy intuitionistic fuzzy information and its application to decision making. *Technological and Economic Development of Economy*, 16(2):280–290, 2010. 11, 14, 15