Teoreme de punct fix pe spaţii înzestrate cu mai multe metrici generalizate.

Rezumatul tezei de doctorat

IULIA COROIAN

DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ
UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI, CLUJ-NAPOCA

Conducător ştiinţific:

Prof. Dr. ADRIAN-OLIMPIU PETRUŞEL

Cluj-Napoca, 2015

Cuprins

Introducere

Teoria punctului fix este astăzi una dintre cele mai dinamice arii de cercetare cu numeroase rezultate teoretice şi aplicative. Începând cu bine-cunoscutul principiu al contracţiei Banach-Caccioppoli (din anii '30), domeniul teoriei punctului fix în spaţii metrice este, probabil, cea mai importantă parte a sa.

Teoria punctului fix în spaţii metrice a avut, în ultimele decenii o dezvoltare puternică atât în cazul operatorilor univoci cât şi al celui de tip multivoc.

Începând cu versiunea multivocă a principiului de contracţie Banach-Caccioppoli, demonstrată de S. B. Nadler jr. în 1969 (şi extinsă un an mai târziu de H. Corvitz ci de S. B. Nadler jr.), teoria punctului fix pentru operatori multivoci în spaţii metrice a ajuns astăzi la peste o mie de lucrări publicate în literatură de specialitate.

Dezvoltarea acestei teorii este asociată posibilităţii de a obţine diferite aplicaţii în diferite domenii cum ar fi: teoria optimizării, ecuaţii şi incluziuni integrale şi diferenţiale, teoria fractalilor, economii matematice şi multe altele.

Scopul acestei teze este de a prezenta unele contribuţii ale teoriei punctului fix în spaţii metrice pentru contracţii multivoce generalizate. Există numeroase extensii a noţiunii clasice de operator multivoc de tip α- contracţie (introdus de S. B. Nadler jr.). Majoritatea dintre acestea folosesc bine cunoscuta metrică Hausdorff-Pompeiu H. În studiul nostru vom considera metrica H^+ de tip Pompeiu precum şi alte metrici, topologic echivalente cu H, cu scopul de a obţine generalizări ale principiului menţionat mai sus.

O altă direcţie de cercetare a acestei teze este teoria punctului fix cuplat pentru operatori multivoci în spaţii b-metrice complete. Rezultatele abstracte prezentate în această teză vor fi ilustrate de o serie de exemple şi aplicaţii.

Structura tezei este următoarea:

Capitolul 1 cuprinde cele mai importante concepte şi rezultate auxiliare necesare de-al lungul capitolelor.

În *Capitolul* 2 vom prezenta proprietăţile funcţionalei generalizate Pompeiu şi teoria operatorilor multivoci slab Picard în raport cu funcţionala Pompeiu.

Capitolul 3 este dedicat studiului teoriei operatorilor multivoci satisfăcând diferite condiţi de contracţie în raport cu funcţionalele generalizate pe spaţii metrice. În acest capitol vom dezvolta următoarele:

- Teoreme de punct fix pentru operatori multivoci în contextul a două metrici topologic echivalente.

- Teoreme de punct fix pentru operatori multivoci de tip contracţie locală.

- Rezultate de punct fix şi de mulţime fixă pentru operatori multivoci de tip contracţie în raport cu funcionala Pompeiu.

- Rezultate de continuitate pentru operatori multivoci de tip contracţie în raport cu funcionala Pompeiu .

- Teoreme de punct fix de tip Kikkawa-Suzuki pentru contracţii multivoce în raport cu funcionala Pompeiu.

  Acest capitol cuprinde rezultate de existenţă, teoreme de dependenţă de date, probelema corect pusă, proprietatea de umbrire al limită, problema stabilităţii Ulam-Hyers şi câteva aplicaţii a incluziunilor integrale şi diferenţiale.

În *Capitolul* 4 vom considera probleme de punct fix cuplat (în sensul lui Guo şi Lakshmikantham) pentru operatori multivoci satisfăcând o condiţie de contracţie în raport cu funcionala Pompeiu. Acest capitol include rezultate de existenţă, teoreme de dependenţă de date, problema corect pusă, proprietatea de umbrire la limită, stabilitate Ulam-Hyers precum şi aplicaţii asupra incluziunilor integrale şi diferenţiale.

Această teză are la bază peste 100 de articole din lista de referenţi precum şi contribuţiile autorului în această teză care se regăsesc şi în următoarele lucrări:

- **I. Coroian**, *On some generalizations of Nadler's contraction principle*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 60(2015), no. 1, 123-133.

- **I. Coroian** , *Fixed point theorems for multivalued generalized contractions with respect to two topologically equivalent metrics*, Creative Math. And Inform., 23 (2014), No. 1, 57 - 64.

- **I. Coroian**, *Fixed points for multivalued contractions with respect to a Pompeiu type metric* , J. Nonlinear Sci. Appl. (accepted for publication).

- **I. Coroian**, *Kikkawa-Suzuki fixed point theorems for contraction type multivalued operators with respect to the Pompeiu functional*, trimis spre publicare.

- **I. Coroian** şi G. Petruşel, *Fixed point and coupled fixed point theorems for multivalued operators satisfying a symmetric contraction condition*, trimis spre publicare.

Cuvinte cheie: operator multivoc, funcţionale generalizate pe spaţii metrice, punct fix, operator slab Picard, stabilitate Ulam-Hyers, proprietatea de umbrire la limită, proprietatea de problemă corect-pusă operator fractal, dependenţă de date, contracţii multivoce, spaţii b-metrice, punct fix cuplat.

Capitolul 1

Preliminarii

În acest prim capitol vom prezenta principalele noţiuni din teoria operatorilor multivoci în spaţii metrice folositoare de-al lungul următoarelor capitole ale acestei teze. Pentru teoria punctului fix în spaţii metrice, a se vedea Nadler Jr. S.B. [39], G. Moţ, G. Petruşel, A. Petruşel [36], A. Petruşel , I.A. Rus , M.A. Şerban [48], I.A. Rus [59], I.A. Rus , A. Petruşel, G. Petruşel [60], M. A. Khamsi, W.A. Kirk [26] şi altele.

1.1 Funcţionale generalizate pe spaţii metrice

În acest paragraf vom prezenta câteva funcţionale generalizate definite pe spaţii de submulţimi a unui spaţiu metric .

Fie (X, d) un spaţiu metric si $\mathcal{P}$(X) multimea tuturor submulţimilor lui X. Vom considera, în continuare, următoarele familii de submulţimi:

$P(X) := \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid Y \neq \emptyset\}$, $P_{cl}(X) := \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid Y \text{ este închisă }\}$, $P_{b,cl}(X) := \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid Y \text{ este mărginită şi închisă }\}$, $P_{cp}(X) := \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid Y \text{ este compactă }\}$. Vom nota cu $B(x, r)$ respectiv $\tilde{B}(x, r)$ bila deschisă respectiv închisă cu centrul în $x \in X$ de rază $r > 0$.

Următoarele funcţionale (generalizate) le vom folosi în decursul întregii lucrări.

1. Funcţionala disţanţă dintre A şi B generată de d:

$$D_d : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, D_d(A, B) = inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

2. Diametrul mulţimii X generată de d:

$$\delta : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, \delta(A, B) = \sup\{d(a, b)|a \in A, b \in B\}.$$

3. Funcţionala exces:

$$\rho_d : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, \rho_d(A, B) = sup\{D_d(a, B)|a \in A\}.$$

4. Funcţionala generalizatăta Hausdorff-Pompeiu :

$$H_d : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, H_d(A,B) = \max\{\rho_d(A,B), \rho_d(B,A)\}.$$

5. Funcţionala generalizatăta Pompeiu :

$$H_d^+ : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},\ H_d^+(A,B) := \frac{1}{2}\{\rho_d(A,B) + \rho_d(B,A)\}.$$

De-a lungul lucrării nu vom folosi indicele $_d$ deoarece vom lucra doar cu o singura metrică $_d$.

Fie (X,d) un spaţiu metric. Dacă $T : X \to P(X)$ este un operator multivoc, atunci $x \in X$ se numeşte punct fix pentru T dacă şi numai dacă $x \in T(x)$. Vom nota cu F_T mulţimea punctului fix a lui T si cu $(SF)_T$ mulţimea punctului fix strict a lui T, adică, $x \in X$ astfel încât $T(x) = \{x\}$.

Pentru operatorul multivoc $T : X \to P(Y)$ vom nota cu

$$Graph(T) := \{(x,y) \in X \times Y : y \in T(x)\}$$

graficul lui T.

1.2 Operatori multivoci slab Picard în raport cu metrica Hausdorff-Pompeiu

Definiţia 1.2.1. *([47]) Fie (X,d) un spaţiu metric. Atunci, $T : X \to P(X)$ se numeşte operator multivoc slab Picard (prescurtat MWP) dacă pentru orice $x \in X$ şi orice $y \in T(x)$ există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în X cândtfel încât:*

1. *$x_0 = x,\ x_1 = y$;*
2. *$x_{n+1} \in T(x_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;*
3. *şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este concergent şi limita sa este un punct fix a lui T.*

Definiţia 1.2.2. *([47]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $T : X \to P(X)$ un operator MWP . Atunci vom defini operatorul multivoc $T^\infty : Graph(T) \to P(F_T)$ dat de formula*

$T^\infty(x,y) = \{z \in F_T|$ există un şir a aproximaţilor suucesive a lui T începând de la perechea (x,y) care converge la $z\}$.

Definiţia 1.2.3. *([47]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $T : X \to P(X)$ un operator MWP . Atunci T se numeşte operator multivoc c- Picard (prescurtat operator de tip $c - MWP$) dacă şi numai dacă există o selecţie t^∞ of T^∞ cândtfel încât*

$$d(x, t^\infty(x,y)) \le c d(x,y),\ for\ all\ (x,y) \in Graph(T).$$

Reamintim noţiunea de operator Picard în raport cu metrica Hausdorff-Pompeiu.

Definiţia 1.2.4. *([47]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to P(X)$ un operator multivoc. Prin definiţie, T se numeşte operator slab Picard (prescurtat operator MP) dacă şi numai dacă :*

1. $(SF)_T = F_T = \{x^*\}$;

2. $T^n(x) \stackrel{H}{\to} \{x^*\}$ *când* $n \to \infty$, *pentru orice* $x \in X$.

Prin definiţie, pentru $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P_{cl}(X)$, vom nota $A_n \stackrel{H}{\to} A^*$ când $n \to \infty$ dacă şi numai dacă $H(A_n, A^*) \to 0$ când $n \to \infty$.

Observăm că

$$A_n \stackrel{H}{\to} A^* \in P_{cl}(X), \text{ dacă şi numai dacă } A_n \stackrel{H^+}{\to} A^* \in P_{cl}(X),\ n \to \infty.$$

Considerăm următoarele exemple de operatori slab Picard (MWP).

Exemplul 1.2.1. *([60]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc α- contracţie. Atunci T este un operator de tip MWP.*

Exemplul 1.2.2. *([60]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc de tip Reich [adică există $a, b, c \leq 0$ cu $a + b + c < 1$ astfel încât $H(T(x), T(y)) \leq ad(x, y) + bD(x, T(x)) + cD(y, T(y)), \forall x, y \in X$]. Atunci T este un operator de tip MWP.*

Exemplul 1.2.3. *([60]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc tip Rus [adică $Graph(T)$ este închis şi următoarea condiţie este satisfăcută: există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ cu $\alpha + \beta < 1$ astfel încât $H(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta D(y, T(y)), \forall x \in X, \forall y \in T(x)$]. Atunci T este un operator de tip MWP.*

Capitolul 2

Proprietăţi ale funcţionalei generalizate Pompeiu

2.1 Funcţionala generalizată Pompeiu H^+

Pornind de la funcţionala generalizată Pompeiu vom extinde proprietăţile apărute în H.K. Pathak, N. Shahzad [43]şi W.A. Kirk, N. Shahzad [44] necesare capitolelor următoare.

Lema 2.1.1. *([45]) Următoarele afirmaţii au loc:*
a) H^+ este metrică pe spaţiul $P_{b,cl}(X)$;
b) H^+ est o metrică genralizată(în sensul ca poate lua şi valori infinite) pe spaţiul $P_{cl}(X)$.

Folosind functionala de tip Pompeiu H^+, următoarea noţiune a fost introdusă în ([45]), a se vedea şi ([44]).

Propoziţia 2.1.1. *([45]) Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu normat real. Pentru orice λ (real sau complex), $A, B \in P_{b,cl}(X)$*

1. $H^+(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| H^+(A, B)$.
2. $H^+(A + a, B + a) = H^+(A, B)$.

Teorema 2.1.1. *([44]) Dacă $a, b \in X$ şi $A, B \in P_{b,cl}(X)$, atunci următoarele relaţii au loc:*

1. $d(a, b) = H^+(\{a\}, \{b\})$.
2. $A \subset \overline{S}(B, r_1), B \subset \overline{S}(A, r_2) \Rightarrow H^+(A, B) \leq r$ *unde* $r = \frac{r_1+r_2}{2}$.

Definiţia 2.1.1. *([45]) Fie (X, d) un spaţiu metric. Un operator multivoc $T : X \to P_{b,cl}(X)$ se numeşte H^+-contracţie cu constanta α dacă:*

1. *există un număr real* α, $0 < \alpha < 1$ *astfel încât pentru orice* $x, y \in X$ *avem*
$$H^+(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y),$$
2. *pentru orice* $x \in X$, $y \in T(x)$ *şi orice* $\epsilon > 0$ *există* z *în* $T(y)$ *astfel încât*
$$d(y, z) \leq H^+(T(x), T(y)) + \varepsilon.$$

Definiţia 2.1.2. *([45]) Fie* (X, d) *un spaţiu Banach şi* K *o submulţime nevidă, convexă şi compactă. Un operator multivoc* $T : X \to P_{b,cl}(X)$ *se numeşte* H^+*-neexpansiv dacă:*

1. $H^+(T(x), T(y)) \leq ||x - y||,$ *pentru oricex*$, y \in K$
2. *pentru orice* $x \in X$, $y \in T(x)$ *şi orice* $\epsilon > 0$ *există* z *în T(y) astfel încât*
$$d(y, z) \leq H^+(T(x), T(y)) + \varepsilon.$$

Observaţia 2.1.1. *([12]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric. Un operator multivoc* $T : X \to P_{cl}(X)$ *se numeşte* (H^+, α)*-Lipschitz dacă* $\alpha > 0$ *şi*
$$H^+(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X.$$
Dacă $0 < \alpha < 1$, *atunci* T *se numeşte operator multivoc de tip* (H^+, α)*-contracţie.*

Lema 2.1.2. *[45] Între funcţionalele generalizate Pompeiu-Hausdorf şi Pompeiu are loc următoarea relaţie :*
$$\frac{1}{2}H(A, B) \leq H^+(A, B) \leq H(A, B), \tag{2.1}$$
(adică H *şi* H^+ *sunt metrici echivalente în sens tare).*

Teorema 2.1.2. *[45] Dacă spaţiul* (X, d) *este complet, atunci şi spaţiile* $(P_{cp}(X), H^+)$, $(P_{b,cl}(X), H^+)$ *şi* $(P_{cl}(X), H^+)$ *sunt complete.*

Următorul conceptul de operator multivoc de tip contracţie a fost introdus de S.B. Nadler jr.

Definiţia 2.1.3. *([39]) Fie* (X, d) *un spaţiu metric. Un operator multivoc* $T : X \to P_{cl}(X)$ *se numeşte* α*-contracţie dacă* $\alpha \in (0, 1)$ *şi are loc următoarea relaţie*
$$H(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

Observăm că orice operator multivoc de tip α-contrcţie este (H^+, α)-contracţie, dar relaţia inversă nu are loc.

Vom defini următorul concept în raport cu funcţionala Pompeiu H^+.

Definiţia 2.1.4. *([12])Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci, operatorul multivoc $T : X \to P_{b,cl}(X)$ se numeşte φ-contracţie în raport cu H^+ dacă:*

1. *$\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie de comporaţie;*

2. *pentru orice $x, y \in X$, avem*

$$H^+(T(x), T(y)) \leq \varphi(d(x, y)).$$

În particular, dacă $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este definită astfel $\varphi(t) := kt$ (pentru $k \in [0, 1[$), atunci φ este o funcţie de comparaţie şi operatorul multivoc T este (H^+, k)-contracţie.

Definiţia 2.1.5. *(a se vedea [47], [46]) Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{b,cl}(X)$. Atunci , T se numeşte semi-continuu superior (prescurtat s.c.s) în $x \in X$ dacă, pentru orice submulţime deschisă U a lui X cu $F(x) \subset U$, există $\eta > 0$ astfel încât $T(B(x; \eta)) \subset U$. T este s.c.s pe X dacă este s.c.s în fiecare $x \in X$.*

Definiţia 2.1.6. *([47], [46]) Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{b,cl}(X)$. T se numeşte semi-continuu inferior (prescurtat s.c.i) în $x \in X$ dacă, pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şi pentru orice $y \in T(x)$, există un şir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ astfel încât $y_n \in T(x_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. T este s.c.i pe X dacă este s.c.i în fiecare $x \in X$.*

În ceea ce urmează, vom prezenta câteva proprietăţi ale operatorilor multivoci de tip (H^+, α)-Lipschitz.

Teorema 2.1.3. *([12]) Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{b,cl}(X)$ un operator multivoc de tip (H^+, α)-Lipschitz. Atunci următaorele afirmaţii au loc:*

1. *T are graficul închis în $X \times X$;*

2. *T este $H -$ s.c.i pe X;*

3. *T este $H -$ s.c.s pe X;*

4. *dacă, în plus T are valori compacte, atunci T este s.c.i..*

Lema 2.1.3. *([12]) Fie (X, d) un spaţiu metric şi operatorul $T : X \to P_{cp}(X)$ astfel încât*

$$H^+(T(x), T(y)) < d(x, y), \quad \text{pentru orice } x, y \in X, \ x \neq y$$

Atunci T este s.c.s pe X.

Următorul rezultat reflectă relaţia dintre un operator multivoc de tip contracţie în raport cu H_d şi în raport cu H^+.

Teorema 2.1.4. *([12]) Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cp}(X)$ pentru care există o constantă $k > 0$ astfel încât:*

$$H_d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X$$

Atunci

$$H^+(T(A), T(B)) \leq 2kH^+(A, B) \text{ pentru orice } A, B \in P_{cp}(X).$$

Teorema 2.1.5. *([39])(Nadler) Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cp}(X)$ un operator multivoc de tip contraţie. Atunci*

$$H_d(T(A), T(B)) \leq kH_d(A, B) \text{pentru orice } A, B \in P_{cp}(X). \tag{2.2}$$

Lema 2.1.4. *([36]) Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A, B \in P_{cp}(X)$.*
Atunci pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât

$$d(a, b) \leq H_d(A, B).$$

Teorema 2.1.6. *([12]) Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cp}(X)$ pentru care există $k > 0$ astfel încât:*

$$H_d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \text{pentru orice } x, y \in X$$

Atunci

$$H^+(T(A), T(B)) \leq 2kH^+(A, B) \text{ pentru orice } A, B \in P_{cp}(X).$$

Teorema 2.1.7. *([12]) Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cp}(X)$ un operator (H^+, k)-contraction. Atunci*

(a) T este H_d-s.c.i şi s.c.s pe X.

(b) pentru orice $A \in P_{cp}(X) \Rightarrow T(A) \in P_{cp}(X)$

(c) există $k > 0$ astfel încât

$$H^+(T(A), T(B)) \leq 2kH^+(A, B) \text{ pentru orice } A, B \in P_{cp}(X).$$

Ca şi o consecinţă a rezultatului obţinut anterior obţinem o teoremă pentru mulţimea fixă pentru operatori multivoci de tip contracţie în raport cu H^+.

Teorema 2.1.8. *([12]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to P_{cp}(X)$ un operator multivoc pentru care există $k \in [0, \frac{1}{2})$ astfel încât*

$$H^+(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X$$

Atunci, există o unică $A^* \in P_{cp}(X)$ astfel încât $T(A^*) = A^*$.

În ceea ce urmează, vom prezenta câteva generalizări a principiului de contracţie a lui Nadler. Mai exact, folosind o abordare axiomatică a metricii Hausdorff-Pompeiu vom studia proprietăţile operatorului fractal generat de operatori multivoci de tip contracţie.

Definiţia 2.1.7. *([48]) Fie X o mulţime nevidă şi d, ρ două metrici pe X. Atunci, prin definiţie, d, ρ se numesc metrici echivalente în sens tare (sau Lipschitz) dacă există $c_1, c_2 > 0$ astfel încât:*

$$c_1\rho(x,y) \leq d(x,y) \leq c_2\rho(x,y), \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

Definiţia 2.1.8. *([60]) Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci, prin definiţie, perechea (d, H_d) are proprietatea (p^*) dacă pentru $q > 1$, pentru orice $A, B \in P(X)$ şi pentru orice $a \in A$, există $b \in B$ astfel încât:*

$$d(a,b) \leq qH_d(A,B).$$

Lema 2.1.5. *([11]) Fie X o mulţime nevidă, d_1, d_2 două metrici Lipschitz echivalente astfel încât există constantele $c_1, c_2 > 0$ cu $c_1 \leq c_2$ cu proprietatea*

$$c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y), \ for \ all \ x, y \in X \tag{2.3}$$

Dacă perechea (d_1, H_{d_1}) are proprietatea (p^*), atunci şi (d_2, H_{d_2}) are proprietatea (p^*).

Lema 2.1.6. *([11]) Fie X o mulţime nevidă, d_1, d_2 două metrici pe X astfel încât:*

$$\text{există } c > 0\text{: } d_2(x,y) \leq cd_1(x,y) \text{ pentru orice } x, y \in X \tag{2.4}$$

şi G_1, G_2 două metrici pe $P_{b,cl}(X)$ astfel încât:

$$\text{există } e > 0\text{: } eG_{d_1}(A,B) \leq G_{d_2}(A,B), \text{ pentru orice } A, B \in P_{b,cl}(X) \tag{2.5}$$

cu $e \leq c$. Dacă perechea (d_1, G_1) are prorietatea (p^*) atunci, proprietatea (p^*) este satisfăcută şi de (d_2, G_2).

Lema 2.1.7. *([11]) Fie X o mulţime nevidă, d_1, d_2 două metrici pe X astfel încât:*

$$\text{există } c > 0\text{: } d_2(x,y) \leq cd_1(x,y) \text{ pentru orice } x, y \in X \tag{2.6}$$

şi G_1, G_2 două metrici pe $P_{b,cl}(X)$ astfel încât:

$$\text{există } e > 0\text{: } G_{d_2}(A,B) \leq eG_{d_2}(A,B), \text{ pentru orice } A, B \in P_{b,cl}(X) \tag{2.7}$$

cu $c \cdot e < 1$. Dacă perechea (d_1, G_{d_2}) are proprietatea (p^*) atunci şi (d_2, G_{d_1}) are proprietatea (p^*).

În următoarea parte a acesui paragraf vom prezenta câteva rezultate abstracte generale pentru spaţiul metric $P_{b,cl}(X)$.

Fie (X,d) un spaţiu metric, $U \subset P(X)$ şi $\Psi : U \to \mathbb{R}_+$. Definim următoarele funcţionale pe $U \times U$:

1. Fie $x^* \in X$, $U \subset P_b(X)$
$$G_{\Psi_1}(A,B) = \begin{cases} 0, & A = B \\ \Psi_1(A) + \Psi_1(B), & A \neq B \end{cases}$$
unde $\Psi_1(A) := \delta(A, x^*)$.

2. Fie $U := P_b(X)$ şi $A^* \in P_b(X)$
$$G_{\Psi_2}(A,B) = \begin{cases} 0, & A = B \\ \Psi_2(A) + \Psi_2(B), & A \neq B \end{cases}$$
unde $\Psi_2(A) = H_d(A, A^*)$.

Lema 2.1.8. *([11]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cp}(X)$ şi $A, B \in P_{cp}(X)$. Fie*
$$G_{\Psi_1}(A,B) = \begin{cases} 0, & A = B \\ \Psi_1(A) + \Psi_1(B), & A \neq B \end{cases}$$
unde $\Psi_1(A) = \delta(A, A^*)$, $A^* \in P_{cp}(X)$. Atunci G_{Ψ_1} este o metrică pe $P_{cp}(X)$.

Lema 2.1.9. *([11]) Dacă (X,d) este un spaţiu metric complet, atunci $(P_{cp}(X), G_{\Psi_1})$ este un spaţiu metric complet.*

Lema 2.1.10. *([11]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cp}(X)$ şi $A, B \in P_{cp}(X)$. Fie*
$$G_{\Psi_1}(A,B) = \begin{cases} 0, & A = B \\ \Psi_1(A) + \Psi_1(B), & A \neq B \end{cases}$$
unde $\Psi_1 : P_{cp}(X) \to \mathbb{R}_+, \Psi_1(A) = \delta(A, A^*)$ cu $A^* \in P_{cp}(X)$. Atunci, perechea (d, G_{Ψ_1}) are proprietatea (p^*).

Teorema 2.1.9. *([11]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cp}(X)$ un oerator multivoc pentru care există $k \in (0,1)$ astfel încât*
$$\delta(T(x), T(y) \leq kd(x,y).$$
Pentru orice $A, B \in P_{cp}(X)$ considerăm
$$G_{\Psi_1}(A,B) = \begin{cases} 0, & A = B \\ \Psi_1(A) + \Psi_1(B), & A \neq B, \end{cases}$$
unde $\Psi_1 : P_{cp}(X) \to \mathbb{R}_+$, $\Psi_1(A) = \delta(A, A^*)$ ($A^* \in P_{cp}(X)$ cu proprietatea că $A^* = T(A^*)$). Atunci,
$$G_{\Psi_1}(T(A), T(B)) \leq kG_{\Psi_1}(A,B) \text{ pentru orice } A, B \in P_{cp}(X).$$

Lema 2.1.11. *([11]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cp}(X)$ şi $A, B \in P_{cp}(X)$. Fie*

$$G_{\Psi_2}(A,B) = \begin{cases} 0, & A = B \\ \Psi_2(A) + \Psi_2(B), & A \neq B \end{cases}$$

unde $\Psi_2 : P_{cp}(X) \to \mathbb{R}_+$, $\Psi_2(A) = H_d(A, A^*)$ cu $A^* \in P_{cp}(X)$. Atunci G_{Ψ_2} este o metrică pe $P_{cp}(X)$.

Lema 2.1.12. *([11]) Dacă (X,d) este un spaţiu metric complet, atunci şi $(P_{cp}(X), G_{\Psi_2})$ este un spaţiu metric complet.*

Teorema 2.1.10. *([11]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cp}(x)$ o contracţie multivocă în raport cu H_d şi $A, B \in P_{cp}(X)$. Fie*

$$G_{\Psi_2}(A,B) = \begin{cases} 0, & A = B \\ \Psi_2(A) + \Psi_2(B), & A \neq B \end{cases}$$

unde $\Psi_2 : P_{cp}(X) \to \mathbb{R}_+$, $\Psi_2(A) = H_d(A, A^*)$ ($A^* \in P_{cp}(X)$ cu proprietatea că $A^* = T(A^*)$). Atunci, există $k \in (0,1)$ astfel încât

$$G_{\Psi_2}(T(A), T(B)) \leq k G_{\Psi_2}(A,B) \text{ pentru orice } A, B \in P_{cp}(X).$$

Lema 2.1.13. *([11]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{cp}(X)$ şi $A, B \in P_{cp}(X)$. Fie*

$$G_{\Psi_2}(A,B) = \begin{cases} 0, & A = B \\ \Psi_2(A) + \Psi_2(B), & A \neq B, \end{cases}$$

unde $\Psi_2 : P_{cp}(X) \to \mathbb{R}_+$, $\Psi_2(A) = H_d(A, A^*)$ cu $A^* \in P_{cp}(X)$. Atunci, perechea (d, G_{ψ_2}) are proprietatea (p^*).

2.2 Operatori multivoci de tip contracţie în raport cu funcţionala generalizată Pompeiu

În acest paragraf vom considera câteva exemple care ilustrează concepul de contracţie multivocă şi operator neexpansiv.

Observaţia 2.2.1. *([44]) Dacă T este un operator multivoc k-contracţie în sensul lui Nadler atunci T este (H^+, k)-contracţie iar relaţie inversă nu are loc.*

Exemplul 2.2.1. *(W.A. Kirk, N. Shahzad ([44])) Fie $X = \{0, \frac{1}{2}, 2\}$ şi $d : X \times X \to \mathbb{R}$ metrica standard. Fie $T : X \to P_{b,cl}(X)$ astfel încât*

$$T(x) = \begin{cases} \{0, \frac{1}{2}\}, & \text{pentru } x = 0 \\ \{0\}, & \text{pentru } x = \frac{1}{2} \\ \{0, 2\}, & \text{pentru } x = 1 \end{cases}$$

Atunci T este (H^+, k) contracţie (cu $k \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$) dar nu şi k- contracţie în sensul lui Nadler.

$$H_d(T(0), T(2)) = H_d(\{0, \frac{1}{2}\}, \{0, 2\}) = 2 \leq kd(0, 2) = 2k \Rightarrow k \geq 1,$$

ceea ce este o contradicţie cu ipoteza că $k < 1$.

Exemplul 2.2.2. *([12]) Fie l_2 spaţiu Hilbert al şirurilor de pătrat sumabile. Fie $a = (1, \frac{1}{2}, ..., -\frac{1}{n})$ şi pentru fiecare $n = 1, 2, ...$, fie e_n vectorul din l_2 format din zerouri în toate coordonatele cu excepţia a n-a coordonată care este egală cu 1.*

Fie $A = \{a, e_1, e_2, ...\}$ şi fie $T : A \to P_{b,cl}(A)$ astfel încât

$$T(x) = \begin{cases} \{e_{i+1}, e_{i+2}, ...\}, & \text{for } x = 0 \\ A, & \text{for } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

E uşor a se verifica că prima condiţie a operatorului neexpansiv H^+ este verificată pentru orice $x, y \in A$.

Pentru a doua condiţie, dacă $\epsilon > 0$ atunci pentru orice $x \in A$ şi orice $y \in T(x)$, există $z \in T(u)$ astfel încât $d(y, z) \leq H^+(T(x), T(y)) + \epsilon$. Întradevăr,

(ia) dacă $\epsilon > 0$, $x = a$ şi $y \in T(a) = a, e_1, e_2, ...$, cu $y = a$, există $z \in T(a) = a, e_1, e_2, ...$, cu $z = a$, astfel încât

$$0 = d(y, z) \leq 0 + \epsilon = H^+(T(a), T(a)) + \epsilon$$

(ib) dacă $\epsilon > 0$, $x = a$ şi $y \in T(a) = \{a, e_1, e_2, ...\}$, cu $y = e_i$, există $z \in T(e_i) = \{e_{i+1}, e_{i+2}, ...\}$, cu $z = e_{i+1}$, astfel încât

$$\sqrt{2} = d(y, z) \leq (||a||^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \epsilon = H^+(T(a), T(e_i)) + \epsilon$$

(ic) dacă $\epsilon > 0$, $x = e_i$ şi $y \in T(e_i) = \{e_{i+1}, e_{i+2}, ...\}$, cu $y = e_{i+1}$, există $z \in T(e_{i+1}) = \{e_{i+2}, e_{i+3}, ...\}$, cu $z = e_{i+2}$, astfel încât

$$\sqrt{2} = d(y, z) \leq \sqrt{2} + \epsilon = H^+(T(e_i), T(e_{i+1})) + \epsilon$$

Prin urmare şi condiţia (2) este satisfăcută din definiţia operatorului H^+-neexpansiv.

Capitolul 3

Teoreme de punct fix pentru operatori multivoci satisfăcând condiţii generalizate de tip contractiv

3.1 Teoreme de punct fix pentru operatori multivoci în contextul a două metrici topologic echivalente

Scopul acestui paragraf este de a prezenta teoreme de punct fix pentru operatori multivoci aproape contracţie în raport cu două metrici echivalente de tip Hausdorff.

Teorema 3.1.1. *([11]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi fie $H^\star$ o metriă pe spaţiul $P_{b,cl}(X)$ care este topologic echivalent cu metrica Hausdorff H_d.*

Presupunem că $T : X \to P(X)$ satisface următoarele :

1. *Pentru orice $x \in X$ mulţimea $T(x)$ este mărginită (în raport cu d) şi închisă (în raport cu metrica topologic echivalentă generată de d).*
2. *exsită $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a + b + c < 1$ astfel încât*

$$H^\star(T(x), T(y)) \leq ad(x, y) + bD_d(x, T(x)) + cD_d(y, T(x)), \forall x, y \in X$$

3. *dacă $(x, y) \in Graph(T))$ atunci :*

$$D_d(y, T(y)) \leq H^\star(T(y), T(x))$$

Atunci, T are un punct fix, ceea ce înseamnă că există $x \in X$ astfel încât $x \in T(x)$.

3.2 Teoreme de punct fix pentru operatori multivoci de tip contracţie locală

Folosind conceptul metricii de transformare vom arăta că orice operator multivoc satisfăcând o condiţie de contracţie este un operator multivoc de tip contracţie locală. Câteva dintre referinţele bibliografice folosite pentru a dezvolta acest capitol sunt: M. A. Khamsi, W.A. Kirk ([26]), W.A. Kirk, N. Shahzad([27]) şi I.A. Rus ([59]).

Definiţia 3.2.1. *([26]) Fie (X, d) un spaţiu metric. O funcţie strict crescătoare şi concavă $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ pentru care $\phi(0) = 0$ se numeşte funcţie de transformare.*

Definiţia 3.2.2. *([27] Fie (X, d) un spaţiu metric. $T : X \to P_{b,cl}(X)$ se numeşte operator multivoc local uniform de tip (ε, k)-contracţie (unde $\varepsilon > 0$ şi $k \in (0, 1)$) dacă pentru $x, y \in X$ $d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow H_d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$.*

Ca şi o extensie a conceptului definit mai sus definim următoarea noţiune.

Definiţia 3.2.3. *([13]) Fie (X, d) un spaţiu metric. $T : X \to P_{b,cl}(X)$ se numeşte operator multivoc local de tip $(\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma)$-contracţie (unde $\varepsilon > 0$ and $\alpha + \beta + \gamma \in (0, 1)$) dacă pentru $x, y \in X$ $d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow H_d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta D_d(x, T(x)) + \gamma D_d(y, T(y))$.*

Teorema 3.2.1. *([13]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $T : X \to P_{b,cl}(X)$ un operator multivoc. Fie $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie strict crescătoare cu $\phi(0) = 0$, astfel încât următoarele afirmaţii a loc:*

1. *Există a,b,c,k $\in \mathbb{R}$, a+b+k $<$ 1 astfel încât*

$$\phi(H_d(T(x), T(y))) \leq ad(x, y) + bD_d(x, T(x)) + cD_d(y, T(y)) + kD_d(x, T(y)),$$

$$\forall (x, y) \in Graph(T)$$

2. *Există $e \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $t > 0$ suficient de mic, astfel încât*

$$(a + b + k)t \leq \psi(et)$$

unde $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \psi(t) = \phi(t) - (c + k)t$ este strict crescătoare.

Atunci pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic avem

$$H_d(T(x), T(y)) \leq ed(x, y), \ \forall (x, y) \in Graph(T) \ cu \ d(x, y) < \epsilon.$$

Reamintim că un un spaţiu metric (X, d) este ε-înlănţuit (unde $\varepsilon > 0$ este fixat) dacă şi numai dacă pentru $a, b \in X$ daţi, există un ε-lanţ de la a la b (ceea ce înseamnân, o mulţime finită de puncte $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ astfel încât $x_0 = a, x_n = b$ şi $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$).

Următorul rezultat este similar celui lui Nadler ([39]).

Teorema 3.2.2. *([13]) Fie (X, ε) un spaţiu metric ε-înănţuit complet. Dacă $T : X \to P_{b,cl}(X)$ are graficul închis şi există $e < 1$ astfel încât $H(T(x), T(y)) \leq ed(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in Graph(T)$ cu $d(x, y) < \epsilon$, atunci $Fix(T) \neq \emptyset$.*

Combinând rezultatul anterior cu Teorema(3.2.1) obţinem următorul rezultat:

Teorema 3.2.3. *([13]) Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi conect şi $T : X \to P_{b,cl}(X)$ un operator multivoc. Fie $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie strict crescătoare cu $\phi(0) = 0$ astfel încât următoarele afirmaţii au loc :*

1. *există a,b,c,k$\in \mathbb{R}$, a+b+k $<$ 1 astfel încât*

$$\phi(H_d(T(x), T(y))) \leq ad(x, y) + bD_d(x, T(x)) + cD_d(y, T(y)) + kD_d(x, T(y)),$$

$$\forall (x, y) \in Graph(T)$$

2. *există $e \in (0, 1)$ astfel încât pentru $t > 0$ suficient de mic, avem*

$$(a + b + k)t \leq \psi(et)$$

unde $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \psi(t) = \phi(t) - (c + k)t$ este strict crescător

Atunci $Fix(T) \neq \emptyset$.

3.3 Rezultate de punct fix şi de mulţime fixă pentru operatori multivoci de tip contracţie în raport cu funcţonala Pompeiu

În acestă secţiune vom prezenta o serie de rezultate din teoria punctului fix pentru operatori multivoci de tip H^+- contracţie din următoarele perspective: existenţa şi unicitatea punctului fix şi a punctului fix strict, dependenţa de date a mulţimii fixe, şirul operatorilor multivoci, stabilitatea Ulam-Hyers a operatorului multivoc , proprietatea de problema corect-pusă de punct fix, proprietatea de umbrire la limită a operatorului multivoc şi teoria operatorului fractal.

Scopul acestei sectiuni este de a studia câteva proprietăţi a mulţimii de punct fix a contracţiilor multivoce în raport cu H^+-contracţie cu constanta α din punct de vedere al operatoriilor MWP .

Vom începe prin a prezenta câteva rezultate auxiliare.

Lema 3.3.1. *([46]) Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A, B \in P_{cl}(X)$. Presupunând că există $\eta > 0$ astfel încât pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât $d(a, b) \leq \eta$ şi pentru orice $b \in B$ există $a \in A$ astfel încât $d(a, b) \leq \eta$. Atunci $H(A, B) \leq \eta$.*

Lema 3.3.2. *([46]) Fie (X,d) spaţiu metric, $A, B \in P(X)$ şi $q > 1$. Atunci, pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ asfel încât $d(a, b) \leq qH(A, B)$.*

Lema 3.3.3. *([37]) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A, B \in P_{cp}(X)$. Atunci, pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât $d(a,b) \leq H(A,B)$.*

Lema 3.3.4. *([13]) Fie (X,d) un spaţiu metric. Dacă $A, B \in P(X)$ şi $\epsilon > 0$ Atunci pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât*

$$d(a,b) \leq H(A,B) + \epsilon.$$

Lema 3.3.5. *([13]) Fie (X,d) un spaţiu metric, $A, B \in P_{cl}(X)$ şi $\varepsilon > 0$. Dacă $H^+(A,B) < \varepsilon$ atunci:*

1. *pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât $d(a,b) < \varepsilon$*

   sau

2. *pentru orice $b \in B$ există $a \in A$ astfel încât $d(a,b) < \varepsilon$.*

Teorema 3.3.1. *([13]) Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc de tip H^+-contracţie cu constanta α. Atunci avem:*

(i) $F_T \neq \emptyset$;

(ii) T este un operator $\dfrac{1}{1-\alpha}$ -MWP ;

(iii) Fie $S : X \to P_{cl}(X)$ un operator de tip H^+-contracţie cu constanta α şi $\eta > 0$ astfel încât $H^+(S(x), T(x)) \leq \eta$, pentru orice $x \in X$. Atunci $H^+(F_S, F_T) \leq \dfrac{2 \cdot \eta}{1-\alpha}$;

(iv) Fie $T_n : X \to P_{cl}(X), n \in \mathbb{N}$ un şir de operatori multivoci de tip H^+-contracţie cu constanta α astfel încât $T_n(x) \overset{H^+}{\to} T(x)$, $n \to \infty$, uniform în raport cu $x \in X$. Atunci, $F_{T_n} \overset{H^+}{\to} F_T$, $n \to \infty$;

dacă, în plus, $T(x) \in P_{cp}(X)$ pentru orice $x \in X$, Atunci avem :

(v) (Stabilitatea Ulam-Hyers a incluziunii $x \in T(x)$) Fie $\epsilon > 0$ şi $x \in X$ astfel încât $D(x, T(x)) \leq \epsilon$. Atunci există $x^* \in F_T$ asfel încât $d(x, x^*) \leq \dfrac{\epsilon}{1-\alpha}$;

(vi) Operatorul fractal $\hat{T} : P_{cp}(X) \to P_{cp}(X)$, $\hat{T}(Y) := \bigcup\limits_{x \in Y} T(x)$ este 2α- contracţie;

(vii) Dacă, în plus , $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, atunci $F_{\hat{T}} = \{A_T^*\}$ şi $T^n(x) \overset{H^+}{\to} A_T^*$, $n \to \infty$, pentru orice $x \in X$. Mai mult, dacă, $F_T \subset A_T^*$, F_T este compact şi

$$A_T^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} T^n(x) \ , \ \textit{pentru orice } x \in F_T.$$

Următorul rezultat conţine noi concluzii a mulţiimi i fixe şi a mulţimii fixe stricte.

Teorema 3.3.2. *([13]) Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc de tip (H^+, α)-contracţie cu $(SF)_T \neq \emptyset$. Atunci, următoarele afirmaţii au loc:*

(i) $(SF)_T = \{x^*\}$;

Dacă în plus, $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, *atunci:*

(ii) $F_T = (SF)_T = (SF_{T^n}) = \{x^*\}$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$;

(iii) $T^n(x) \overset{H^+}{\to} \{x^*\}$, $n \to \infty$, *pentru orice* $x \in X$;

(iv) Fie $S : X \to P_{cl}(X)$ *un operator multivoc astfel încât* $F_S \neq \emptyset$ *şi presupunem că există* $\eta > 0$ *astfel încât:*

$$H^+(S(x), T(x)) \leq \eta, \text{ pentru orice } x \in X.$$

Atunci

$$H^+(F_S, F_T) \leq \frac{2\eta}{1 - 2\alpha};$$

(vi) (Proprietatea de problema corect pusă a puctului fix în raport cu H^+*) Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir* X *astfel încât*

$$H^+(x_n, T(x_n)) \to 0, \ n \to \infty,$$

atunci $x_n \overset{d}{\to} x^*$, $n \to \infty$;

(vii) (Proprietatea de umbrire la limită) Dacă $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir în* X *asfel încât* $D(y_{n+1}, T(y_n)) \to 0$ *când* $n \to \infty$, *atunci există un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *al aproximaţiilor succesive pentru* T, *astfel încât* $d(x_n, y_n) \to 0$, $n \to \infty$.

Observaţia 3.3.1. *([13]) Se pot obţine rezltate similare pentru operatori multivoci de tip* φ*-contracţie în raport cu* H^+*. Aceste rezultate precum şi generalizări ale unor teoreme pot fi văzute în [34].*

În cele ce urmează, ilustrăm o aplcaţie a rezultatelor de dependenţa continuă a soluţiei problemei Cauchy asociate incluziunei diferenţiale în raport cu o condiţie iniţială. Existenţa soluţiei a problemei cu valoare iniţialĕ:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in T(t, x(t)) \\ x(0) = b \end{cases} \tag{3.1}$$

a fost demonstrată de Filippov [18] şi Castaing [10] cu anumite condiţii asupra operatorului T.

In [37], Markin a demonstrat o teorema de stabilitatea a mulţimii soluţiei (3.1) folosind norma L^2 , în timp ce Lim [35] a demonstrat un rezultat de stabilitate folosind funcţionala Hausdorff-Pompeiu. Vom demonstra o teorema similară folosind norma *sup* şi funcţionala generalizată Pompeiu.

Reamintim conceptul de soluţie a problemei (3.1).

Definiţia 3.3.1. *([35]) Fie* $D = [0, a] \times \mathbb{R}^n$ *şi* $T : D \to P(\mathbb{R}^n)$ *un operator continuu. Atunci, un operator* $x : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ *se numeşste soluţie a incluzini diferenţiale (3.1) dacă* x *este un operator absolut continuu şi* $x'(t) \in T(t, x(t))$, *a.e pe* $[0, a]$.

Fie B o bilă închisă cu centrul în origine şi de rază R şi $P_{cl,cv}(B)$ înzestrat cu metrica H^+ genenerat de norma Euclideană $||\cdot||$ a lui R^n. Fie $C[0,a]$ mulţimea operatorilor continui pe $[0,a]$ cu valori în R^n cu norma $sup\ ||\cdot||_C$.

Presupunem că T este un operator continuu definit pe $[0,a]\times B$ cu valori în $P_{cl,cv}(B)$ care satisface pentru un $k>0$, condiţia

$$H^+(T(t,u),T(t,v)) \leq k||u-v||_C, \text{ pentru orice } t\in[0,a] \text{ şi } u,v\in B.$$

Pentru $b\in B$, vom nota cu $S(b)$ mulţimea soluţiilor pentru (3.1) definite pe $[0,a]$. $S(b)$ este nevidă şi compactă, conform [3] şi [2].

Teorema 3.3.3. *([13]) Următoarele afirmaţii au loc :*

1. $T:[0,a]\times B\to P_{cl,cv}(B)$ *este continuu;*
2. *există* $k>0$ *astfel încât*

$$H^+(T(t,u),T(t,v)) \leq k||u-v||_C, \text{ pentru orice } t\in[0,a] \text{ şi pentru orice } u,v\in B\subset\mathbb{R}^n;$$

3. $2ka<1$.

Atunci $S(b)$ *este continuă definită pe* B *cu valori în submulţimile nevide şi compacte ale lui* $C[0,a]$ *înzestrată cu metrica* H^+ .

Un rezultat mai general este următoarea teoremă.

Teorema 3.3.4. *([13]) Pentru orice* $n=0,1,2,...$, *fie* T_n *un şir de operatori continui definiţi pe* $[0,a]\times B$ *cu valori în* $C(B)$ *satisfăcând, pentru un* $k>0$, *condiţia*

$$H^+(T_n(t,u),T_n(t,v)) \leq k||u-v||_C, \text{pentru orice } t\in[0,a] \text{ pentru orice } u,v\in B$$

Presupunem că $T_n\to T_0$ *uniform pe* $[0,a]\times B$. *pentru orice* $b\in B$ *şi* $n=0,1,2,....$ *Fie* $S_n(b)$ *mulţimea soluţiilor a următoarei probleme*

$$\begin{cases} \dot{x}(t)\in T_n(t,x(t)) \\ x(0)=b \end{cases} \tag{3.2}$$

dacă $2ka<1$ *şi* $b_n\to b_0$ *în* B, *atunci* $S_n(b_n)\to S_0(b_0)$.

Mai departe, este dată o aplcaţie a stabilităţii Ulam-Hyers a incluziunii $x\in T(x)$ ($Theorem$ 3.3.1(v)). Vom începe cu noţiunea de stabilitate Ulam-Hyers a incluziunii diferenţiale.

Definiţia 3.3.2. *([35]) Fie*

$$x'\in T(t,x(t)),\ \ t\in[0,a] \tag{3.3}$$

şi $T : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to P_{cl,cv}(\mathbb{R}^n)$ *un operator continuu. Spunem că (3.3) Ulam-Hyers stabilă dacă pentru orice* $\epsilon > 0$ *şi orice* $y \in C[0, a]$ *o soluţie* ϵ *a problemei* (3.12) *(ceea ce înseamnă că*

$$D\Big(y(t), y(0) + \int_0^t T(s, y(s))ds\Big) \leq \epsilon,\ t \in [0, a])$$

există o soluţie x^* *a problemei (3.3) şi* $c > 0$ *astfel încât* $||x^* - y|| \leq c \cdot \epsilon$.

Definiţia 3.3.3. *([35]) Fie* $F : [0, a] \to P_cl(\mathbb{R}^n)$ *un operator multivoc măsurabil. Dacă cu* $L^1([0, a], \mathbb{R}^n)$ *vom nota mulţimea operatorilor măsurabili şi integrabili definiţie pe* $[0, a]$ *cu valori în* $\mathbb{R}^n$*, atunci cu* S_F *vom nota mulţimea selecţiilor integrabile a lui* F *:*

$$S_F := \{f \in L^1([0, a], \mathbb{R}^n) | f(t) \in F(t) a.e. t \in [0, a]\}.$$

Observaţia 3.3.2. *([13]) In particular, dacă* $x : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ *şi* $T : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to P_{cl}(\mathbb{R}^n)$*, atunci mulţimea selecţiilor integrabile a lui* T *o vom nota cu*

$$S_{T(\cdot, x(\cdot))} := \{f \in L^1([0, a], \mathbb{R}^n) | f(t) \in T(t, x(t)) a.e. t \in [0, a]\}.$$

Teorema 3.3.5. *([13])*
Considerăm incluziunea (3.3).
Presupunem că următoarele au loc: (a) $T : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to P_{cl,cv}(\mathbb{R}^n)$ *este un operator continuu, măsurabil, integrabil şi mărginit.*
(b)există $L > 0$ *astfel încât*

$$H^+(T(t, u_1), T(t, u_2)) \leq L||u_1 - u_2||, \text{pentru orice } (t, u_1), (t, u_2) \in [0, a] \times \mathbb{R}^n.$$

Atunci incluziunea diferenţială (3.3) cu valoarea iniţială $x(0) = x^0$ *are cel puţin o soluţie. Mai mult incluziunea diferenţială (3.3) este Ulam-Hyers stabilă.*

3.4 Rezultate de continuitate pentru operatori multivoci de tip contracţie în raport cu funcţionala Pompeiu

În acest paragraf vom prezenta un rezultat local şi de continuitate pentru un operator multivoc de tip (H^+, α)-contracţie. Urmarind articolul lui *Kirk* şi *Shahzad* ([27]), vom înlocui a doua condiţie din Definiţia 4.1.6:

(∗) pentru orice $x \in X$, $y \in T(x)$ şi pentru orice $\epsilon > 0$ există z în $T(y)$ astfel încât

$$d(y, z) \leq H^+(T(x), T(y)) + \varepsilon$$

cu următoarea condiţie:

$(**)$ pentru orice $x \in X$ şi pentru orice $y \in T(x)$ avem

$$D(y, T(y)) \leq H^+(T(x), T(y)).$$

De remarcat este faptul că $(**)$ implică $(*)$. Mai mult, considerăm următoarea condiţie:

$(***)$ pentru orice $\epsilon > 0$, pentru orice $x \in X$, $y \in T(x)$ există z în $T(y)$ astfel încât

$$d(y, z) \leq H^+(T(x), T(y)) + \varepsilon,$$

atunci e uşor a se vedea că $(**)$ este echivalentă cu $(***)$. În această condiţie observăm că pentru orice $x \in X$ şi orice $y \in T(x)$ avem $\rho(T(x), T(y) \leq H^+(T(x), T(y))$. Ca şi consecinţă avem că, $\rho(T(x), T(y) \leq \rho(T(y), T(x))$ şi deci

$$H^+(T(x), T(y)) \leq \rho(T(y), T(x)), \text{ pentru orice } x \in X \text{ şi } y \in T(x).$$

Teorema 3.4.1. *([13]) Fie (X, d) un spaţiu metric compFieşi $T : X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc (H^+, α)- contracţie . Atunci $F_T \neq \emptyset$.*

Rezultatele de omotopie pentru operatori multivoci de tip contracţie sunt foarte cunoscute în literatura de specialitate, a se vedea [30], [19], [20]. Acestea se bazează pe teoreme locale de punct fix. Principalul rezultat din această secţiune este o teoremă locală de punct fix.

Teorema 3.4.2. *([13]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $x_0 \in X$, $r > 0$ şi $T : \tilde{B}(x_0, r) \to P_{cl}(X)$ un operaator multivoc. Presupunem că :*

(i) T este un operator multivoc de tip (H^+, α),adică există $\alpha \in]0, 1[$ astfel încât

$$H^+(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X;$$

(ii) pentru orice $x \in X$ şi orice $y \in T(x)$ avem că $D(y, T(y)) \leq H^+(T(x), T(y))$;
(iii) $D(x_0, T(x_0)) < (1 - \alpha)r$.
Atunci, există $x^* \in \tilde{B}(x_0, r)$ astfel încât $x^* \in T(x^*)$.

Teorema 3.4.3. *([13]) Fie (X, d) un spaţiu metric complet. Fie U o submulţime deschisă a lui (X, d). Fie $G : U \times [0, 1] \to P(X)$ un operator multivoc astfel încât următoarea condiţie este satisfăcută :*

1. *$x \neq G(x, t)$ pentru orice $x \in \partial B$ şi orice $t \in [0, 1]$;*

2. *există $\alpha \in [0, 1[$ astfel încât pentru orice $t \in [0, 1]$ şi orice $x, y \in U$ avem :*

$$H^+(G(x, t), G(y, t)) \leq \alpha d(x, y)$$

3. *există o funcţie continuă şi crescătoare $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ astfel încât*

$$H^+(G(x, t), G(x, s)) < |\phi(t) - \phi(s)|, \text{ pentru orice } t, s \in [0, 1],\ t \neq s \text{ pentru orice } x \in U;$$

4. $G : U \times [0,1] \to P((X,d))$ *este închis.*

Atunci $G(\cdot,0)$ *are un punct fix dacă şi numai daă* $G(\cdot,1)$ *are un punct fix.*

Teorema 3.4.4. *([13]) Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet. Fie* $T : X \to P_{cl}(X)$ *un operator multivoc* (H^+,α)*- contracţie . Atunci* $F_T \neq \emptyset$.

3.5 Teoreme de punct fix de tip Kikkawa-Suzuki pentru contracţii multivoce în raport cu funcţonala Pompeiu

Câteva dintre referinţele bibliografice folosite pentru a dezvolta acestă secţiune sunt: M. Kikkawa, T. Suzuki ([28]), T. Lazăr, D. O'Regan, A. Petruşel ([32]) şi T. Suzuki ([65]). Urmărind articolul Reich [62], introducem următorul concept pentru operatori de tip Ciric.

Definiţia 3.5.1. *([14]) Fie* (X,d) *un spaţiu metric. Atunci,* $T : X \to P_{cl}(X)$ *se numeşte operator multivoc de tip* $(a,b,c)-$ *KSR dacă există* $a,b,c \in \mathbb{R}_+$ *cu* $a+b+c \in (0,1)$ *avem*

$\dfrac{1-2b-2c}{1+2a} D(x,T(x)) \leq d(x,y)$ *implică*

(i) $H^+(T(x),T(y)) \leq ad(x,y) + bD(x,T(x)) + cD(y,T(y)),\ \forall x,y \in X;$

(ii) pentru orice $x \in X$*,* $y \in T(x)$ *şi pentru orice* $q > 1$ *există* $z \in T(y)$ *astfel încât*

$$d(y,z) \leq qH^+(T(x),T(y)).$$

Teorema 3.5.1. *([14]) Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet şi* $T : X \to P_{cl}(X)$ *un operator multivoc de tip* (a,b,c)*- KSR . Atunci* $Fix(T) \neq \emptyset$.

Vom introduce o definiţie asemănătoare pentru un astfel de operatori satisfăcând o condiţie de contracţie.

Definiţia 3.5.2. *([14]) Fie* (X,d) *un spaţiu metric. Atunci,* $T : X \to P_{cl}(X)$ *se numeşte operator multivoc de tip* α*- KSR dacă există* $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$ *avem*

$(1-2\alpha)D(x,T(x)) \leq d(x,y)$ *implică*

(i) $H^+(T(x),T(y)) \leq \alpha \max\{d(x,y), D(x,T(x)), D(y,T(y)), \dfrac{1}{2}(D(x,T(y))+D(y,T(x))\},\ \forall x,y \in X$

(ii) pentru orice $x \in X$*,* $y \in T(x)$ *şi pentru orice* $q > 1$ *există* $z \in T(y)$ *câstfel încât*

$$d(y,z) \leq qH^+(T(x),T(y)).$$

Teorema 3.5.2. *([14]) Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet. Fieşi* $T : X \to P_{cl}(X)$ *be a* α*- KSR multivalued operator. Atunci* $Fix(T) \neq \emptyset$.

Capitolul 4

Teoreme de punct fix cuplat pentru operatori multivoci de tip contractiv în raport cu funcţonala Pompeiu

Acest capitol cuprinde rezultate a punctelor fixe cuplate precum şi proprietăţi ale muţimii punctului fix cuplat pentru operatori multivoci în raport cu funcţionala Pompeiu în spaţii b-metrice. Pentru acestea se va studia proprietatea de problemă corect-pusă, stabilitatea Ulam-Hyers ¸ proprietatea de umbrire la limită precum şi aplicaţii a incluziunilor integrale şi diferenţiale.

Aceste rezultate extind anumite teoreme aparute în : T. Gnana Bhaskar and V. Lakshmikantham ([21]), A. Petruşel, D. Guo, Y.J. Cho, J. Zhu ([22]), D. Guo, V. Lakshmikantham ([23]), A. Petruşel, G. Petruşel, B. Samet, J.-C. Yao ([49]), G. Petruşel, B. Samet şi J.-C. Yao ([50]), A. Petruşel, C. Urs, O. Mleşniţe ([53]), A.I. Perov ([55]), R. Precup ([56]), C. Urs ([66]).

4.1 Rezultate de existenţă a problemei de punct fix cuplat

Principiul de contracţie a lui Nadler ([39]) este o extensie a principiului clasic de contracţie a lui Banach. Există numeroase rezultate şi aplicaţii a acestui principiu î teoria incluziunilor operatorilor precum şi o serie de teoreme asupra problemei punctului fix cuplat. În cazul multivoc, această problemă este de forma:

Fie (X,d) un spaţiu metric şi $P(X)$ familia submulţimilor nevide ale lui X. Dacă $G : X\times X \to P(X)$ este un operator multivoc, atunci prin definiţie, problema punctului fix cuplat pentru G constă în găsirea perechii $(x^*, y^*) \in X \times X$ care satisface

$$\begin{cases} x^* \in G(x^*, y^*) \\ y^* \in G(y^*, x^*) \end{cases} . \tag{4.1}$$

Pentru început vom reaminti noţiunea de spaţiu b-metric.

Definiţia 4.1.1. *(Bakhtin[[5]], Czerwik[[17]]) Fie X o mulţime şi fie $s \geq 1$ un număr real. O funcţională $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte b-metric cu constanta s dacă toate axiomele metricii au loc cu următoarea axiomă a inegalităţii triunghiului:*

$$d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)], \text{ pentru orice } x, y, z \in X.$$

Cu aceste ipoteze perechea (X, d) se numeşte spaţiu b-metric cu constanta s.

Definiţia 4.1.2. *([17]) Fie X o mulţime nevidă, fie "$\leq$" o relaţie de ordine X şi d o $b-$metric pe X cu constanta $s \geq 1$. Atunci tripletul $(X, \leq, d)$ se numeşte spaţiu b-metric ordonat dacă:*

i. "$\leq$" este o relaţie de ordine parţială pe X;

ii. d este o b-metric pe X cu constanta $s \leq 1$;

iii. dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir monoton crescător pe X, $x_n \to x^*$ unde $x^* \in X$, atunci $x_n \leq x^*$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

iv. dacă $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir monoton descrescător pe X, $y_n \to y^*$ unde $y^* \in X$, atunci $y_n \geq y^*$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Definiţia 4.1.3. *([49]) Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată înzestrată şi spaţiul produs $X \times X$ cu următoarea relaţie parţială de ordine:*

$$\text{pentru } (x, y), (u, v) \in X \times X,\ (x, y) \leq_p (u, v) \Leftrightarrow x \leq, y \geq v$$

Definiţia 4.1.4. *([49]) Fie (X, d) un spaţiu b-metric şi $G : X \times X \to P(X)$ un operator multivoc operator. Atunci, prin definiţie, un punct fix cuplat pentru G este perechea $(x^*, y^*) \in X \times X$ care satisface*

$$(P1) \begin{cases} x^* \in G(x^*, y^*) \\ y^* \in G(y^*, x^*) \end{cases} \tag{4.2}$$

Vom nota cu $CFix(G) = \{(x, y) \in X \times X | x \in G(x, y) \text{ pentru orice } y \in G(y, x)\}$ mulţimea punctului fix cuplat pentru G.

Definiţia 4.1.5. *([51]) Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată şi $T : X \times X \to P(X)$. Spunem că T are proprietatea de monotonie mixtă dacă $T(\cdot, y)$ este monoton crescător pentru orice $y \in X$ şi $T(y, \cdot)$ este monoton descrescător pentru orice $x \in X$.*

Lema 4.1.1. *([50]) Fie (X,d) un spaţiu metric, $A, B \in P(X)$ şi $q > 1$. Atunci, pentru orice $a \in A$ existu a $b \in B$ astfel încât $\rho(A, B) \leq qd(a, b)$.*

Definiţia 4.1.6. *([14]) Fie(X,d) un spaţiu metric. Un opearator multivoc $T : X \to P_{b,cl}(X)$ se numeşte H^+-contracţie cu constanta α dacă:*

1. *există un număr real fixat* k, $0 < k < 1$ *astfel încât pentru orice* $x, y \in X$

$$H^+(T(x), T(y)) \leq kd(x, y),$$

2. *pentru orice* $x \in X$, $y \in T(x)$ *avem*

$$D_d(y, T(y)) \leq H^+(T(x), T(y)).$$

Definiţia 4.1.7. *([63]) Fie* (X, d) *o mulţime ordonată şi* $A, B \in P(X)$. *Vom nota* $A \leq_s B \Leftrightarrow \forall a \in A, \forall b \in B$ *avem* $a \leq b$.

Observaţia 4.1.1. *([16]) Obsevăm că dacă* $A, B, C \in P(X)$, *atunci* $A \leq_s B$ *şi* $B \leq_s C$ *implică* $A \leq_s C$.

Primul rezultat a acestui paragraf este o teoremă de punct fix în spaţiu b-metric.

Teorema 4.1.1. *([15]) Fie* $(X, \leq, d)$ *un spaţiu b-metric ordonat şi* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *b-metrică completă cu constanta* $s \geq 1$. *Fie* $T : X \to P_{cl}(X)$ *un operator multivoc crescător în sensul tare în raport cu "* $\leq$ *". Presupunem că*

i) există $k \in \left(0, \frac{1}{s}\right)$ *şi un element* $x_0 \in X$ *astfel încât* $\rho_d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$, *pentru orice* $x, y \in X$ *cu* $x \leq y$,

ii) $x_0 \leq_w T(x_0)$.

Atunci :

a. $Fix(T) \neq \emptyset$ *şi există un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *al aproximaţiilor succesive a lui* T *începând cu* $x_0 \in X$ *care converge la un punct fix a lui* T.

b. În particular, dacă d *este o b-metrică continuă pe* X *atunci avem:*

$$d(x_n, x^*) \leq sk^n \frac{1}{1 - sk} d(x_0, x_1), \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ pentru orice } x_1 \in T(x_0).$$

Următorul rezultat se referă la o teoremă locală în spaţiu b-metric.

Teorema 4.1.2. *([15]) Fie* (X, d) *un spaţiu b-metric complet cu constanta* $s \geq 1$ *şi* $T : X \to P_{cl}(X)$ *un operator multivoc care satisface următoarea condiţie:*

există $k \in \left(0, \frac{1}{s}\right)$ *astfel încât* $\rho(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$, *pentru orice* $x, y \in X$.

Atunci:

a) Fix(T) $\neq \emptyset$ *şi există un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *al aproximaţiilor succesive a lui* T *începând de la orice pereche* $(x_0, x_1) \in Graph(T)$ *care converge la un punct fix* x^* *a lui* T*;*

b) dacă în plus $SFix(T) \neq \emptyset$, *atunci* $Fix(T) = SFix(T) = \{x^*\}$*;*

c) In particular, dacă d *o b-metric continuă, atunci avem:*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{sk^n}{1 - sk} d(x_0, x_1), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

4.2 Teoreme de punct fix cuplat

Câteva dintre referinţele bibliografice folosite pentru a dezvolta acestă secţiune sunt: V. Berinde ([7]), M. Boriceanu-Bota, A. Petruşel, I.A. Rus ([8]), M. Boriceanu-Bota, A. Petruşel, G. Petruşel, B. Samet ([9]), C.J. Himmelberg, F.S. Van Vleck ([25]), V. Lakshmikantham, L. Ćirić ([31]), V.I. Opoitsev ([40]), V.I. Opoitsev, T.A. Khurodze ([41]) şi A. Petruşel, G. Petruşel, C. Urs ([54]).

Definiţia 4.2.1. *([49]) Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată şi $G : X \times X \to P(X)$. Spunem că G are proprietatea de strict monotonie mixtă în raport cu relaţia de ordine " $\leq$ ", dacă următoarea afirmaţie are loc:*

1. $x_0 \leq x_1 \Rightarrow G(x_0, y) \leq_s G(x_1, y)$, $\forall y \in X$.

2. $y_0 \geq y_1 \Rightarrow G(x, y_0) \leq_s G(x, y_1)$, $\forall x \in X$.

Observaţia 4.2.1. *([15]) Fie (X, d) un spaţiu b-metric cu constanta $s \geq 1$. Atunci funcţionala $\tilde{d} : Z \times Z \to \mathbb{R}_+$ definită astfel: $\tilde{d}((x, y), (u, v)) \leq d(x, u) + d(y, v)$, $for\ all pentru\ orice\ (x, y)$ Z este o b-metric pe Z cu aceiaşi constantă $s \geq 1$ şi dacă (X, d) este un spaţiu b-metric complet atunci şi $(Z, \tilde{d})$ este un spaţiu b-metric complet.*

Teorema 4.2.1. *([15]) Fie $(X, \leq, d)$ un spaţiu b-metric ordonat cu constanta $s \geq 1$ astfel încât b-metric d este completă. Fie $G : X \times X \to P(X)$ un operator multivoc având proprietatea de strict monotonie mixtă în raport c " $\leq$ " şi G cu grafic închis.*

Presupunem că:

(i) există $k \in \left(0, \frac{1}{s}\right)$ asfel încât

$$\rho(G(x, y), G(u, v)) + \rho(G(y, x), G(v, u)) \leq k[d(x, u) + d(y, v)]\ ,\ \forall x \leq u \text{ şi}$$

$y \geq v$;

(ii) există $(x_0, y_0) \in X \times X$ şi $(x_1, y_1) \in G(x_0, y_0) \times G(y_0, x_0)$ astfel încât $x_0 \leq x_1$ şi $y_0 \geq y_1$.

Atunci,

(a) există $x^*, y^* \in X$ şi există două şiruri $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ în X cu

$$\begin{cases} x_{n+1} \in G(x_n, y_n) \\ y_{n+1} \in G(y_n, x_n) \end{cases}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \to x^*$, $y_n \to y^*$, $n \to \infty$ şi

$$\begin{cases} x^* \in G(x^*, y^*) \\ y^* \in G(y^*, x^*) \end{cases}$$

(b) dacă, în plus d este o b-metric continuă pe X, atunci avem următoarea estimaţie:

$$d(x_n, x^*) + d(y_n, y^*) \leq \frac{sk^n}{1 - sk}[d(x_0, x_1) + d(y_0, y_1)],\ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Observaţia 4.2.2. *([15]) Condiţia de contracţie (i) din Theorem 4.2.1 poate fi rescrisă, folosind funcţionala H^+, după acum urmează:*
$H^+(T(x,y),T(u,v)) \leq 2k(d(x,u)+d(y,v))$, $\forall (x,y),(u,v) \in X \times X$, $(x,y) \leq_p (u,v)$.

Următorul rezultat reflectă unicitatea punctului fix cuplat.

Teorema 4.2.2. *([15])*
Considerând ipotezele Teoremei 4.2.1 presupunem că:
(i) există $(x^*,y^*) \in X \times X$ astfel încât

$$\begin{cases} G(x^*,y^*) = \{x^*\} \\ G(y^*,x^*) = \{y^*\} \end{cases}$$

(ii) pentru orice soluţie $(\overline{x},\overline{y})$ a problemei de punct fix cuplat (P1) avem $\overline{x} \leq x^*$ şi $\overline{y} \geq y^*$ or $(\overline{x},\overline{y}) \leq_p (x^*,y^*)$.
Atunci, obţinem că problema de punct fix cuplat (P1) are o unică soluţie.

Teorema 4.2.3. *([15]) Presupunem că ipotezele Teoremei 4.2.2 au loc şi $x^* \leq y^*$ sau $y^* \leq x^*$ unde (x^*,y^*) este punctul fix unic cuplat a lui G. Atunci $x^* = y^*$, ceea ce înseamnă $G(x^*,x^*) = x^*$.*

Teorema 4.2.4. *([15]) Fie (X,d) un spaţiu metric complet cu constanta $s \geq 1$.*
Fie $G : X \times X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc cu următoarea proprietate: există $k \in (0,1)$ astfel încât

$$\rho_d(G(x,y),G(u,v)) + \rho(G(y,x),G(v,u)) \leq k[d(x,u)+d(y,v)] \ ,\forall (x,y),(u,v) \in X \times X.$$

Atunci:
(a) $CFix(G) \neq \emptyset$ şi pentru orice punct iniţial $(x_0,y_0) \in X \times X$, şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite astfel

$$\begin{cases} x_{n+1} \in G(x_n,y_n) \\ y_{n+1} \in G(y_n,x_n) \end{cases}$$

converg la x^* şi respectiv la y^*, $n \to \infty$ unde

$$\begin{cases} x^* \in G(x^*,y^*) \\ y^* \in G(y^*,x^*) \end{cases}$$

(b) În particular, dacă b-metrica d este continuă, atunci avem următoarea estimaţie:

$$d(x_n,x^*) + d(y_n,y^*) \leq \frac{sk^n}{1-sk}[d(x_0,x_1)+d(y_0,y_1)]$$

unde $(x_1,y_1) \in G(x_0,y_0) \times G(y_0,x_0)$.
(c) dacă în plus, există perechea $(u^*,v^*) \in X \times X$ astfel încât

$$\begin{cases} G(u^*,v^*) = \{u^*\} \\ G(v^*,u^*) = \{v^*\} \end{cases},$$

Atunci $CFix(G) = \{(x^*,y^*)\}$.

În ceea ce urmează vom prezenta anumite proprietăţi ale problemei de punct fix cuplat (P1).

Prima proprietate se referă la depedentă de date a problemei de punct fix cuplat (P1).

Teorema 4.2.5. *([15]) Fie (x, d) un spaţiu b-metric complet cu constanta $s \geq 1$ şi $G : X \times X \to P_{cl}(X)$, $S : X \times X \to P(X)$ doi operatori multivoci. Presupunem că au loc următoarele:*

(i) există $k \in \left(0, \frac{1}{s}\right)$ asfel încât

$$\rho_d(G(x, y), G(u, v)) + g_d(G(y, x), G(v, u)) \leq k[d(x, u) + d(y, v)], \ \forall (x, y), (u, v) \in X \times X$$

(ii) există $(x^*, y^*) \in X \times X$ astfel încât

$$\begin{cases} G(u^*, v^*) = \{u^*\} \\ G(v^*, u^*) = \{v^*\} \end{cases};$$

(iii) există $(u^*, v^*) \in X \times X$ astfel încât

$$\begin{cases} u^* \in S(u^*, v^*) \\ v^* \in S(v^*, u^*) \end{cases};$$

(iv) există $\eta > 0$ astfel încât $\rho_d(G(x, y), S(x, y)) \leq \eta$, pentru orice $(x, y) \in X \times X$.

Atunci, $\rho_d(CFix(S), CFix(G)) \leq \dfrac{2s\eta}{1 - sk}$.

A doua proprietate se referă la proprietatea de problemčorect-pusă de punct fix cuplat.

Definiţia 4.2.2. *([50]) Fie $(P1)$ problema punctului fix cuplat. Prin definiţie, $(P1)$ este corect pusă pentru G în raport cu D_d dacă:*

(i) $CFix(G) = \{w^*\}$ unde $w^* = (u^*, v^*) \in X \times X$.

(ii) şirul $w_n = (u_n, v_n)$ cu

$$\begin{cases} D_d(u_n, G(u_n, v_n)) \to 0 \\ D_d(v_n, G(v_n, u_n)) \to 0 \end{cases}, n \to \infty.$$

Atunci $d(u_n, u^*) + d(v_n, v^*) \to 0$, $n \to \infty$.

Teorema 4.2.6. *([15]) Considerăm ipotezele Teoremei (4.2.4). Atunci problema de punct fix cuplat $(P1)$ este corect pusă G în raport cu D_d.*

Următoarea proprietate prezentată este proprietatea de stabilitate Ulam-Hyers de punct fix cuplat.

Definiţia 4.2.3. *([49]) Fie (X, d) un spaţiu b-metric cu constanta $s \geq 1$ şi $G : X \times X \to P(X)$ un operator multivoc. Fie $\tilde{d}$ orice b-metrică pe $X \times X$ generată de d. Considerăm următorul sistem de incluziuni*

$$\begin{cases} x \in G(x, y) \\ y \in G(y, x) \end{cases} \tag{4.3}$$

şi inegalitatea

$$D_d(x, G(x, y)) + D_d(y, G(x, y)) \leq \epsilon \tag{4.4}$$

unde $\epsilon > 0$ şi $(x, y) \in X \times X$.

Prin definiţie, sistemul de incluziuni (4.3) se numeşte Ulam-Hyers stabilă dacă şi numai dacă există o funcţie $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescătoare, continuă în 0 şi $\psi(0) = 0$, astfel încât pentru orice $\epsilon > 0$ şi pentru orice ϵ-solution $(u^*, v^*) \in X \times X$ a inegalităţii (4.4) există o solution $(x^*, y^*) \in X \times X$ a sistemului de incluziuni (4.3) astfel încât $d(u^*, v^*) + d(v^*, y^*) \leq \psi(\epsilon) \Leftrightarrow \tilde{d}((x^*, y^*), (u^*, v^*)) \leq \psi(\epsilon)$.

Teorema 4.2.7. *([15]) Fie $G : X \times X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc care verifică ipotezelei Teoremei (4.2.4). Atunci sistemul de incluziuni (4.3) este Ulam-Hyers stabil.*

Folosind rezultatul global (Teoerma 4.2.4) obţinem proprietatea de umbrire la limită a problemei de punct fix cuplat (P1).

Definiţia 4.2.4. *([50]) Fie (X, d) un spaţiu b-metric cu constanta $s \geq 1$ şi $G : X \times X \to P(X)$ un operator multivoc. Fie $\tilde{d}$ o b-metrică generată de d. Prin definiţie, problema de punct fix cuplat $(P1)$ satisface proprietatea de umbrire la limită dacă, pentru orice şir $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ în $X \times X$ pentru care $D\tilde{d}((x_{n+1}, y_{n+1}), G(x_n, y_n) \times G(y_n, x_n)) \to 0$, $n \to \infty$ există un şir $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ în $X \times X$ astfel încât $\tilde{d}((x_n, y_n), (u_n, v_n)) \to)$, $n \to \infty$.*

Teorema 4.2.8. *([15]) Fie $G : X \times X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc care verifică ipotezele Teoremei 4.2.4. Atunci, problema de punct fix cuplat $(P1)$ pentru G satisface proprietatea de umbrire la limită.*

4.3 Aplicaţii la sisteme de incluziuni operatoriale

În această secţiune com prezenta o aplicaţie a rezultatului prezentat anterior. Pentru aceasta vom considera următorul sistem de incluziuni integrale.

$$\begin{cases} x \in g(t) + \int\limits_0^t G(s, t) F(s, x(s), y(s)) ds \\ y \in g(t) + \int\limits_0^t G(s, t) F(s, y(s), x(s)) ds \end{cases} \quad for\ t \in [0, T], \tag{4.5}$$

unde $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ este continuu, $G : [0, T] \times [0, T] \to_+$ este integrabil în raport cu prima variabilă şi $F : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to P(\mathbb{R})$ este un operator multivoc care satidface anumite condiţii. Vom lucra cu operatori având valori reale înlocuind $\mathbb{R}$ cu $\mathbb{R}^n$.

O soluţie a sistemul de mai sus este perechea $(x, y) \in C[0, T] \times C[0, T]$ care satisface relaţia de mai sus pentru orice $t \in [0, T]$.

Vom considera $X := C[0, T]$ înzestrat cu relaţia de ordine

$$x \leq_C y \Leftrightarrow x(t) \leq y(t), \text{ pentru orice } t \in [0, T],$$

precum şi următoarea b-metric cu constanta $s = 2^{p-1}$

$$d(x, y) := \max_{t \in [0,T]} [(x(t) - y(t))^p e^{-2\tau t}],$$

unde $\tau > 0$ arbitrar ales.

Atunci, avem următorul rezutat de existenţă.

Teorema 4.3.1. *([15]) Considerăm sistemul integral(4.5) şi presupunem următoarele:*

(i) $g; [0, T] \to \mathbb{R}$ este un operatot continuu, $G : [0, T] \times [0, T] \to \mathbb{R}_+$ un operator integrabil în raport cu prima variabilă şi $F : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to P_{cl}(\mathbb{R})$ masurabil (Lebesgue) în raport cu prima variabilă şi împreună cu $H_{|\cdot|}$- continuu ñ ultimele două variabile;

(ii) F este integrabil mârginit, adică, există un operator $r \in L^1[0, T]$ astfel încât [entru fiecare $(t, u, v) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$ and for any $w \in F(t, u, v)$, avem $|w| \leq r(t)$, aproape peste tot $t \in [0, T]$;

(iii) $F(s, \cdot, \cdot)$ are proprietatea monotoniei mixte în raport cu ultimele douâ variabile, pentru orice $s \in [0, T]$;

(iv) există α,$\beta \in L([0, T], \mathbb{R}_+)$ astfel încât, pentru orice $s \in [0, T]$, avem

$\rho_{|\cdot|}(F(s, x, y), F(s, u, v)) \leq \alpha(s)|x - u| + \beta(s)|y - v|$, $\forall (x \leq u)$ *and* $y \geq v$ *or* $(u \leq$ *and* $v \geq y)$*;*

(v) există $x_0, y_0 \in C[0, T]$ astfel încât, pentru orice selecţie măsurabilă $f_{x_0,y_0} : [0, T] \to \mathbb{R}$ a lui $F(\cdot, x_0(\cdot), y_0(\cdot))$ şi $f_{y_0,x_0} : [0, T] \to \mathbb{R}$ a lui $F(\cdot, y_0(\cdot), x_0(\cdot))$, avem

$$\begin{cases} x_0(t) \leq g(t) + \int\limits_0^t G(s, t) f_{x_0,y_0}(s) ds \\ y_0(t) \geq g(t) + \int\limits_0^t G(s, t) f_{y_0,x_0}(s) ds \end{cases} \tag{4.6}$$

sau

$$\begin{cases} x_0(t) \geq g(t) + \int\limits_0^t G(s, t) f_{x_0,y_0}(s) ds \\ y_0(t) \leq g(t) + \int\limits_0^t G(s, t) f_{y_0,x_0}(s) ds \end{cases} \tag{4.7}$$

pentru orice $t \in [0, T]$.

Atunci, există cel puţin o soluţie (x^*, y^*) a sistemului (4.5).

Bibliografie

[1] R.P. Agarwal, *Contraction and approximate contraction with an application to multi-point boundary value problems*, J. Comput. Applied Math., 9 (1983), 315-325.

[2] SMA. Aleomraninejad, S. Rezapour, N. Shahzad, *On fixed point generalizations of Suzuki's method*, Appl. Math. Lett. 24, 1037-1040(2011).

[3] G. Allaire, S.M. Kaber, *Numerical Linear Algebra*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 55, Springer, New York, 2008.

[4] J.-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Basel, 1990.

[5] I.A. Bakhtin, *The contraction mapping principle in almost metric spaces*, Funct. Anal., No. 30 (1989), Unianowsk, Gos. Ped. Inst., 26-37 (in Russian).

[6] V. Berinde, *Generalized contractions in quasimetric spaces*, Seminar on Fixed Point Theory, 1993, 3-9.

[7] V. Berinde, *Generalized coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal., 74 (2011) 7347-7355.

[8] M. Boriceanu-Bota, A. Petruşel, I.A. Rus, *Fixed point theorems for some multi-valued generalized contractions in b-metric spaces*, International J. Math. Statistics, 6 (2010), 65-76.

[9] M. Boriceanu-Bota, A. Petruşel, G. Petruşel, B. Samet, *Coupled fixed point theorems for single-valued operators in b-metric spaces*, submitted.

[10] C. Castaing, *Sur les equations differentielles multivoques*, C.R. Acad. Sci. Paris 263(1966), 63-66.

[11] I. Coroian, *On some generalizations of Nadler's contraction principle*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 60(2015), no. 1, 123-133.

[12] I. Coroian , *Fixed point theorems for multivalued generalized contractions with respect to two topologically equivalent metrics*, Creative Math. And Inform., 23 (2014), No. 1, 57 - 64.

[13] I. Coroian, *Fixed points for multivalued contractions with respect to a Pompeiu type metric* , J. Nonlinear Sci. Appl. (accepted for publication).

[14] I. Coroian, *Kikkawa-Suzuki fixed point theorems for contraction type multivalued operators with respect to the Pompeiu functional*, trimis spre publicare.

[15] I. Coroian şi G. Petruşel, *Fixed point and coupled fixed point theorems for multivalued operators satisfying a symmetric contraction condition*, trimis spre publicare.

[16] H. Covitz and S. B. Nadler, *Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces*, Israel J. Math., 8 (1970), 5-11.

[17] S. Czerwik, *Nonlinear set-valued contraction mappings in B-metric spaces*, Atti Sem. Mat. Univ. Modena, 46(1998), 263-276.

[18] A. Filippov, *Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side*, SIAM J. Control 5(1967), 609-621.

[19] M. Frigon, *On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings.Recent advances on metric fixed point theory*, Ciencias, Univ. Sevilla, Seville, (48)1996.

[20] M. Frigon, A. Granas, *Rsultats de type Leray-Schauder pour des contractions sur des espaces de Frchet. (French) [Leray-Schauder-type results for contractions on Frchet spaces] Dedicated to the memory of Gilles Fournier (Sherbrooke, PQ, 1997)*, Ann. Sci. Math. Qubec 22 (1998), no. 2, 161-168.

[21] T. Gnana Bhaskar, V. Lakshmikantham, *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications*, Nonlinear Anal., 65 (2006), 1379-1393.

[22] D. Guo, Y.J. Cho, J. Zhu, *Partial Ordering Methods in Nonlinear Problems*, Nova Science Publishers Inc., Hauppauge, NY, 2004.

[23] D. Guo, V. Lakshmikantham, *Coupled fixed points of nonlinear operators with applications*, Nonlinear Anal., 11 (1987), 623-632.

[24] H. Hermes, *The generalized differential equation* $\dot{x} \in R(t, x)$, Adv. in Math. 4(1970), 149-169.

[25] C.J. Himmelberg, F.S. Van Vleck, *Lipschitzian generalized differential equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 48 (1972), 159-169.

[26] M. A. Khamsi, W.A. Kirk, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory, Pure and Applied Mathematics*, Wiley-Interscience, New York, 2001.

[27] W.A. Kirk, N. Shahzad, *Remarks on metrics transform and fixed point theorems*, Fixed Point Theory and Applications, 2013. Article ID 9612004682934060.

[28] M. Kikkawa, T. Suzuki, *Three fixed point theorems for generalized contractions with constant in complete metric space*, Nonlinear Anal. (2007), doi: 10.1016/j.na.2007.08.064

[29] W.A. Kirk, N. Shahzad, *Fixed Point Theory in Distance Spaces*, Springer Heidelberg, 2014.

[30] K. Kuratowski, Topology, vol. I, Academic Press, New York and London 1966.

[31] V. Lakshmikantham, L. Ćirić, *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal., 70 (2009), 4341-4349.

[32] T. Lazăr, D. O'Regan, A. Petruşel, *Fixed points and homotopy results for Ćirić-type multivalued operators on a set with two metrics*, Bull. Korean Math. Soc. 45(2008), No. 1, 67-73.

[33] E. Lami-Dozo, *Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition*, Proc. Amer. Math. Soc. 38, No. 2 (1973), 286-292.

[34] V. L. Lazăr, *Fixed point theory for multivalued ϕ-contractions*, Fixed Point Theory and Appl., 50(2011).

[35] T.-C. Lim, *On fixed point stability for se-valued contractive mappings with applications to generalized differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 110(1985), 436-441.

[36] G. Moţ, A. Petruşel, G. Petruşel, *Topics in Nonlinear Analysis and Applications to Mathematical Economics*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2007.

[37] J.T. Markin, *Stability of solution sets for generalized differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 46(1974), 289-291.

[38] J.T. Markin, *Continuous dependence of fixed point sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 38(1973), 545-547.

[39] S.B. Jr. Nadler, *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math., **30**(1969), no. 2, 475-487.

[40] V.I. Opoitsev, *Dynamics of collective behavior. III. Heterogenic systems*, Avtomat. i Telemekh., 36 (1975) 124-138 (in Russian).

[41] V.I. Opoitsev, T.A. Khurodze, *Nonlinear operators in spaces with a cone*, Tbilis. Gos. Univ., Tbilisi (1984) 271 (in Russian).

[42] D. O'Regan, N. Shahzad, R.P. Agarwal, *Fixed point theory for generalized contractive maps on spaces with vector-valued metrics*, Fixed Point Theory and Applications, Vol. 6, Nova Sci. Publ., New York, 2007, 143-149.

[43] H.K. Pathak, N. Shahzad, *A new fixed point result and its application to existence theorem for nonconvex Hammerstein type integral inclusions*, Electronic J. of Qual. Th. of Diff. Eq., **62**(2012), 1-13.

[44] H.K. Pathak, N. Shahzad, *A new fixed point result and its application to existence theorem for nonconvex Hammerstein type integral inclusions*, Electronic J. Qualitative Th. Diff. Eq., No.62, 2012, 1-13.

[45] H.K. Pathak, N. Shahzad, *A generalization of Nadler's fixed point theorem and its application to nonconvez integral inclusions*, Topological Meth. in Nonlinear Anal., 41(2013), No.1, 207-227.

[46] A. Petruşel, *Multivalued weakly Picard operators and applications*, Sci. Math. Jpn., 59(2004), 169-202.

[47] A. Petruşel, I. A. Rus, *The theory of a metric fixed point theorem for multivalued operators*, Fixed Point Theory and Appl., Yokohama Publ., Yokohama, 2010, 161-175.

[48] A. Petruşel, I.A. Rus, M.A. Serban, *The role of equivalent metrics in fixed point theory*, Topol. Meth. Nonlinear Anal., 41(2013), 85-112.

[49] A. Petruşel, G. Petruşel, B. Smet, J.-C. Yao, *Coupled fixed point theorems for symmetric multi-valued contraction in b-metric spaces with applications*

[50] A. Petruşel, G. Petruşel, B. Smet, J.-C. Yao, *Coupled fixed point theorems for multivalued operators in b-metric spaces with applications*

[51] A. Petruşel, I.A. Rus, *Fixed point theorems in ordered L-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 134 (2005), no.2, 411-418.

[52] A. Petruşel, *Operatorial Inclusions*, House of the Book of Science, Cluj-Napoca, 2002.

[53] A. Petruşel, C. Urs, O. Mleşniţe, *Vector-valued metrics in fixed point theory*, Contemporary Math., Amer. Math. Soc., vol. 636(2015), 149-164, http://dx.doi.org/10.1090/conm/636/12734.

[54] A. Petruşel, G. Petruşel, C. Urs, *Vector-valued metrics, fixed points and coupled fixed points for nonlinear operators*, Fixed Point Theory and Applications, 2013, 2013:218 doi:10.1186/1687-1812-2013-218.

[55] A.I. Perov, *On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations*, Pviblizhen. Met. Reshen. Differ. Uravn., 2 (1964), 115-134.

[56] R. Precup, *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, Math. Comput. Model., 49 (2009), 703-708.

[57] R. Precup, A. Viorel, *Existence results for systems of nonlinear evolution inclusions*, Fixed Point Theory, 11 (2010), no.2, 337-346.

[58] T.P. Petru, A. Petruşel, J.-C. Yao, *Ulam-Hyers stability for operatorial equations and inclusions via nonself operators*, Taiwanese J. Math. 15 (2011), no. 5, 2195-2212.

[59] I.A. Rus, *Generalized Contractions and Applications*, Cluj Univ. Press, Cluj-Napoca, 2001.

[60] I.A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, 2008.

[61] I.A. Rus, M.A. Şerban, *Some generalizations of a Cauchy lemma and applications*, Topics in Mathematics, Computer Science and Philosophy-A Festschrift for Wolfgang W. Breckner, Cluj Univ. Press, 2008, 173-181.

[62] S. Reich, *Fixed point of contractive functions*, Boll. Un. Mat. Ital. 5(1972), 26-42.

[63] B. Samet, C. Vetro, *Coupled fixed point theorems for multi-valued nonlinear contraction mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal., 74 (2011) 4260-4268

[64] B. Samet, The class of (α, ψ)-type contractions in b-metric spaces and fixed point theorems, Fixed Point Theory and Applications, 2015, 2015:92.

[65] T. Suzuki, *A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness*, Proc. am. Math. Soc. 136(2008), 1861-1876

[66] C. Urs, *Coupled fixed point theorems and applications*, Miskolc Math. Notes, 14 (2013), No. 1, 323-333.

[67] R.S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 27, Springer, Berlin, 2000.

[68] P.P. Zabrejko, *K-metric and K-normed linear spaces: survey*, Collect. Math., Vol. **48**, No. 4-6, 1997, 825-859.