Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

Contribuţii în teoria lanţurilor Loewner

Teză de Doctorat - Rezumat

Conducător Ştiinţific
Prof. Dr. Gabriela Kohr

Doctorand
Mihai Iancu

Cluj-Napoca
2015

Cuprins

Introducere

Teoria funcţiilor univalente este un subiect important în teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă. Pe baza Teoremei lui Riemann este natural să considerăm studiul clasei S a funcţiilor univalente normate pe $\mathbb{U}$. Diverse rezultate în teoria funcţiilor univalente, cu accent pe studiul clasei S, pot fi găsite în monografiile următorilor autori, care au contribuţii semnificative în acest subiect: Duren [33], Goluzin [38], Graham, Kohr [50], Hayman [61], Pommerenke [79], Rosenblum, Rovnyak [88], ş.a.

Deoarece clasa S este compactă, se pot considera diverse probleme extremale pe S. Probabil, cea mai cunoscută este conjectura lui Bieberbach [14], care afirmă că valoarea absolută a celui de-al k-lea coeficient Taylor al oricărei funcţii din S este dominat de k, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. O proprietate fundamentală a clasei S, utilă în studiul problemelor extremale asociate, este densitatea în S a funcţiilor cu o tăietură (i.e. funcţiile univalente care transformă discul unitate $\mathbb{U}$ în complementul unui arc) - a se vedea e.g. [33], [79]. Motivat de acest rezultat, Loewner [70] a obţinut în 1923 reprezentarea parametrică a funcţiilor cu o tăietură, cu ajutorul unor ecuaţii diferenţiale. Mai târziu, Kufarev [69] şi Pommerenke [78] au dezvoltat metoda parametrică a lui Loewner, considerând o familie continuu crescătoare de domenii simplu conexe în $\mathbb{C}$, căreia i-au asociat un lanţ Loewner $f : \mathbb{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$, determinat de ecuaţia diferenţială Loewner:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) z p(z,t), \text{ a.p.t. } t \geq 0, \text{ oricare ar fi } z \in \mathbb{U},$$

unde $p : \mathbb{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ este astfel încât $p(\cdot, t)$ este olomorfă cu $p(0,t) = 1$ şi $\Re p(z,t) > 0$, $z \in \mathbb{U}$, oricare ar fi $t \geq 0$, şi $p(z, \cdot)$ este măsurabilă pe $[0, \infty)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$. Pommerenke [79] a demonstrat că orice funcţie $f \in S$ se poate scufunda ca primul element într-un lanţ Loewner şi are reprezentare parametrică pe $\mathbb{U}$: $f = \lim_{t\to\infty} e^t v(\cdot, t)$, unde $v(z, \cdot)$ este unica soluţie local absolut continuă pe $[0, \infty)$ a ecuaţiei diferenţiale Loewner:

$$\frac{dv}{dt} = -vp(v,t), \text{ a.p.t. } t \geq 0,$$

cu condiţia iniţială $v(z, 0) = z$, oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, unde p satisface aceleaşi condiţii ca mai sus. Mai târziu, vom observa că acest rezultat nu este adevărat în cazul mai multor dimensiuni pentru întreaga familie a aplicaţiilor univalente normate pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$.

O contribuţie semnificativă în această teorie este dată de Bracci, Contreras, Díaz-Madrigal [16] şi Contreras, Díaz-Madrigal, Gumenyuk [23], referitoare la noţiunea generală de L^d-lanţ Loewner.

Teoria lanţurilor Loewner de o variabilă complexă are aplicaţii importante referitoare la probleme extremale (a se vedea e.g. [33]), caracterizări analitice ale proprietăţilor geometrice (a se vedea e.g. [50]), criterii de univalenţă (a se vedea Becker, Pommerenke [13], Pascu [72, 73]), extensii cvasiconforme (a se vedea Becker [12]), etc. Una din cele mai importante aplicaţii a fost obţinută de Branges [19], care a folosit metoda parametrică a lui Loewner pentru a demonstra conjectura lui Bieberbach. Studiul problemelor extremale în legătură cu noţiunea de reprezentare parametrică pe $\mathbb{U}$ a motivat dezvoltarea unei abordări bazate pe teoria controlului optimal, a ecuaţiei diferenţiale Loewner de o variabilă complexă, considerată de Goodman [40], Prokhorov [84], Roth [89, 91], ş.a. O contribuţie importantă la acest studiu este teza de doctorat a lui Roth [90].

Teoria funcţiilor univalente are aplicaţii importante în diferete ramuri ale matematicii (a se vedea e.g. Pascu [71], pentru o aplicaţie interesantă referitoare la EDP şi procese stocastice). Multe aplicaţii ale teoriei Loewner în diverse domenii (e.g. mecanica statistică, mecanica fluidelor) pot fi găsite în [1].

Familia $S(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor univalente normate pe bila Euclidiană unitate $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$ a fost introdusă şi studiată de Cartan [20]. Spre deosebire de cazul unidimensional, el a demonstrat că $S(\mathbb{B}^n)$ nu este local uniform mărginită, deci $S(\mathbb{B}^n)$ nu este compactă şi nu avem teoreme de creştere/deformare sau estimări ale coeficienţilor pentru întreaga familie $S(\mathbb{B}^n)$, pentru $n \geq 2$ (a se vedea [20]; a se vedea şi [50]). Cartan [20] a presupus că există estimări ale determinantului Jacobianului aplicaţiilor univalente din $S(\mathbb{B}^n)$, dar Duren şi Rudin [35] au demonstrat contrariul. O altă diferenţă fundamentală este dată de faptul că Teorema lui Riemann nu este adevărată în dimensiune mai mare ca unu. De exemplu, Poincaré [77] a demonstrat că bila unitate Euclidiană şi polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$ nu sunt biolomorfe, pentru $n \geq 2$. Astfel, nu este clar care este analogul noţiunii de funcţie cu o tăietură în cazul mai multor variabile complexe. Totuşi, în Capitolul 3 al tezei, avem o versiune n-dimensională a rezultatului de densitate a funcţiilor cu o tăietură în clasa S. Pe de altă parte, teoria Andersén-Lempert [2], ce nu are loc în cazul unidimensional, are aplicaţii în studiul lanţurilor Loewner în mai multe dimensiuni, aşa cum se poate vedea în Capitolul 2 al tezei.

Primele generalizări ale teoriei lanţurilor Loewner la mai multe dimensiuni au fost obţinute de Pfaltzgraff [75], care a considerat legătura dintre un lanţ Loewner $f : \mathbb{B}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ şi ecuaţia diferenţială Loewner

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t), \text{ a.p.t. } t \geq 0, \text{ oricare ar fi } z \in \mathbb{U},$$

unde $h : \mathbb{B}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ este astfel încât $h(\cdot, t)$ este o aplicaţie olomorfă normată ce satisface $\Re \langle h(z,t), z \rangle \geq 0$, $z \in \mathbb{B}^n$, oricare ar fi $t \geq 0$, şi $h(z, \cdot)$ este măsurabilă pe $[0, \infty)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$. Poreda [80] a fost primul care a folosit ecuaţia diferenţială Loewner pentru a studia familia aplicaţiilor univalente cu reprezentare parametrică pe polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$. Graham, Hamada şi Kohr [41] au dezvoltat teoria lanţurilor Loewner pe $\mathbb{B}^n$ şi au studiat familia $S^0(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor univalente cu reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$, introdusă de Kohr [68], ce poate fi privită ca o generalizare naturală a clasei S (cf. [50]). Autorii menţionaţi anterior au demonstrat că $S^0(\mathbb{B}^n)$ este o familie local uniform mărginită în $H(\mathbb{B}^n)$, şi au pus în evidenţă diferenţe importante între cazul unei variabile complexe şi cazul mai multor variabile complexe, având în vedere lucrarea lui Poreda [80] (a se vedea [41]). Graham, Kohr şi Kohr [51] au demonstrat că orice lanţ Loewner satisface o ecuaţie diferenţială Loewner (a se vedea şi Curt, Kohr [28, 29]) şi că $S^0(\mathbb{B}^n)$ este o subfamilie compactă (proprie) a familiei $S(\mathbb{B}^n)$, pentru $n \geq 2$. Menţionăm aici şi exemplul de punct suport mărginit pentru familia compactă $S^0(\mathbb{B}^2)$ obţinut de Bracci [15], care este în contrast cu cazul unidimensional, deoarece orice punct suport al clasei S este nemărginit (a se vedea e.g. [33]). Teoria a fost dezvoltată mai departe de Poreda [82], Graham, Kohr, Pfaltzgraff [52], Curt [27], Graham, Hamada, Kohr, Kohr [44], Duren, Graham, Hamada, Kohr [34], Hamada [57], Arosio [4], Voda [97], ş.a.

Ca şi în cazul unei variabile complexe, metoda parametrică are aplicaţii în studiul problemelor extremale, cum ar fi teoremele de creştere sau estimările de coeficienţi (a se vedea [41], [50]). Graham, Hamada, Kohr, Kohr [46] au generalizat abordarea bazată pe teoria controlului optimal şi au studiat punctele extremale/suport asociate unor familii compacte de aplicaţii univalente cu reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea şi [53], [93]). Diverse aplicaţii ale teoriei lanţurilor Loewner de mai multe variabile complexe se referă şi la caracterizări analitice ale proprietăţilor geometrice (a se vedea [50]), extensii cvasiconforme (a se vedea Pfaltzgraff [76]; a se vedea şi [27]), criterii de univalenţă (a se vedea Curt şi Pascu [30]; a se vedea şi [27]), criterii de univalenţă pentru aplicaţii care nu sunt neaparat olomorfe şi extensii cvasiconforme corespunzătoare (a se vedea Cristea [25], [26]). În final, menţionăm abordarea modernă a teoriei lanţurilor Loewner, considerată de Bracci, Contreras, Díaz-Madrigal [17] şi Arosio, Bracci, Hamada, Kohr [8], referitoare la L^d-

lanţuri Loewner în mai multe dimensiuni.

În teză, mai întâi, ne axăm pe evoluţia teoriei lanţurilor Loewner în una şi mai multe dimensiuni şi prezentăm mai multe aplicaţii, cu accent pe probleme extremale. Apoi, prezentăm unele rezultate originale. Teza este împărţită în patru capitole, după cum urmează.

În **Capitolul 1**, studiem, mai întâi, teoria lanţurilor Loewner pe discul unitate $\mathbb{U}$. Prezentăm unele definiţii şi rezultate generale care au dezvoltat metoda parametrică a lui Loewner. În particular, ne referim la lucrările lui Kufarev [69] şi Pommerenke [78]. Teoria este în strânsă legătură cu clasa Carathéodory $\mathcal{P}$, a funcţiilor olomorfe cu partea reală pozitivă pe $\mathbb{U}$, şi cu clasa S, a funcţiilor univalente normate pe $\mathbb{U}$. Prezentăm aceste familii şi teoremele de creştere şi estimările coeficienţilor corespunzătoare. Apoi, punem în evidenţă relaţia dintre lanţurile Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner. În acest context, considerăm noţiunea de reprezentare parametrică pe $\mathbb{U}$. Precizăm că orice funcţie univalentă normată pe $\mathbb{U}$ are reprezentare parametrică. Ne referim şi la reprezentările parametrice particulare ale funcţiilor cu o tăietură, studiate de Loewner [70], şi ale funcţiilor univalente normate şi mărginite (a se vedea e.g. [84]). În fiecare subsecţiune, vom discuta anumite probleme extremale asociate. De exemplu, menţionăm rezultatele lui Kirwan [66] şi Pell [74], referitoare la proprietăţile extremale ale lanţurilor Loewner.

Mai departe, considerăm evoluţia teoriei lanţurilor Loewner pe bila Euclidiană unitate $\mathbb{B}^n$. Ne referim la rezultatele iniţiale obţinute de Pfaltzgraff [75], care pun în legătură lanţurile Loewner cu ecuaţia diferenţială Loewner, şi la rezultatele obţinute de Poreda [80], referitoare la reprezentarea parametrică pe polidisc. Apoi, considerăm familia $S^0(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor cu reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$, introdusă de Kohr [68]. Prezentăm rezultatele obţinute de Graham, Hamada şi Kohr [41], referitoare la compactitatea familiei Carathéodory $\mathcal{M}$, care este o generalizare a clasei $\mathcal{P}$ la mai multe dimensiuni. De asemenea, prezentăm anumite consecinţe ale studiului familiei $S^0(\mathbb{B}^n)$, de exemplu teoreme de creştere, estimări ale coeficienţilor şi proprietăţi extremale, obţinute de autorii menţionaţi anterior. Pe de altă parte, vom evidenţia caracterizarea lanţurilor Loewner folosind ecuaţia diferenţială Loewner, obţinută de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [52]. Mai departe, discutăm noţiunea asociată de A-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ şi legătura cu lanţurile de subordonare univalente A-normate, date de Graham, Hamada, Kohr, Kohr [44] şi Duren, Graham, Hamada, Kohr [34], unde A este un operator liniar în $L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $k_+(A) < 2m(A)$ ($k_+(A)$ este indexul Lyapunov al lui A şi $m(A) = \min_{\|z\|=1} \Re\langle A(z), z\rangle$). În acest caz, prezentăm familia compactă $S^0_A(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor cu A-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$, care generalizează familia $S^0(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea [44]). În final, considerăm studiul general al L^d-lanţurilor Loewner şi noţiunile associate de familie de evoluţie şi de câmp vectorial Herglotz, considerate de Bracci, Contreras, Díaz-Madrigal [17] şi Arosio, Bracci, Hamada, Kohr [8]. În legătură cu acest studiu, prezentăm anumite rezultate obţinute recent de Arosio, Bracci şi Wold [10].

Capitolele următoare se bazează pe acest capitol de bază, care oferă şi motivaţia necesară pentru anumite rezultate.

În **Capitolul 2**, considerăm metoda variaţională obţinută de Bracci, Graham, Hamada şi Kohr [18], ce oferă o modalitate de a construi lanţuri Loewner, prin intermediul unor variaţii ale unor anumite lanţuri Loewner. Prezentăm câteva aplicaţii ale acestei metode, având în vedere anumite familii de aplicaţii univalente normate pe bila unitate, care sunt definite cu ajutorul lanţurilor Loewner ce au imaginea $\mathbb{C}^n$ (i.e. familia crescătoare de imagini ale lui $\mathbb{B}^n$, dată de lanţul Loewner, acoperă în cele din urmă întreg spaţiul $\mathbb{C}^n$). Prima aplicaţie, dată în Teorema 2.2.1, constă în evidenţierea unei proprietăţi topologice a familiei $S^0(\mathbb{B}^n)$, a aplicaţiilor cu reprezentare parametrică pe bila unitate $\mathbb{B}^n$, care, pentru $n \geq 2$, implică imediat un rezultat principal dat în Teorema 2.2.2. Acest rezultat a fost considerat iniţial de Schleißinger [94] ca o conjectură referitoare la densitatea automorfismelor lui $\mathbb{C}^n$ care au reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$. În continuare, aplicăm metoda variaţională pentru a obţine un răspuns partial (Teorema 2.3.1) la o întrebare pusă de Arosio, Bracci şi Wold [9]. Mai precis, demonstrăm că orice aplicaţie univalentă normată pe $\mathbb{B}^n$, a cărei imagine este Runge şi care este de clasă C^1 până la frontieră, se scufundă într-un lanţ Loewner cu imaginea $\mathbb{C}^n$.

Acest capitol se bazează pe rezultate originale obţinute de autorul tezei în [62].

Un prim studiu al unor probleme extremale asociate cu reprezentări parametrice de mai multe variabile complexe a fost dat de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [53]. O generalizare a abordării bazate pe teoria controlului optimal a ecuaţiei diferenţiale Loewner, în cazul bilei unitate $\mathbb{B}^n$, a fost dată de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [46, 48] (a se vedea şi [18], [49]). De asemenea, Roth a obţinut recent un principiu de maxim de tip Pontryagin pentru ecuaţia diferenţială Loewner în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [92]).

În **Capitolul 3**, considerăm noţiunea de familie accesibilă asociată ecuaţiei diferenţiale Loewner şi anumite rezultate obţinute de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [48]. Apoi, demonstrăm anumite conjecturi formulate de autorii menţionaţi anterior. Menţionăm că o sursă importantă de rezultate şi idei, referitoare la compactitatea şi densitatea anumitor familii accesibile în timp finit, sunt lucrările lui Roth [89, 90], în cazul unei variabile complexe. Rezultatul nostru principal (Teorema 3.2.7) din prima secţiune a acestui capitol este o demonstraţie pentru [48, Conjecture 4.16], care afirmă că familia aplicaţiilor cu A-reprezentarea parametrică pe $\mathbb{B}^n$ obţinută prin rezolvarea ecuaţiei diferenţiale Loewner asociată câmpurilor vectoriale Herglotz cu valori în $\mathrm{ex}\,\mathcal{N}_A$ (i.e. mulţimea punctelor extremale ale familiei Carathéodory $\mathcal{N}_A$) este densă în $S^0_A(\mathbb{B}^n)$ (i.e. familia aplicaţiilor cu A-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$), unde A este un operator liniar în $L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $k_+(A) < 2m(A)$. Observăm că acest rezultat generalizează într-un anumit sens rezultatul de densitate a funcţiilor cu o tăietură în clasa S, având în vedere rezultatul lui Loewner [70] şi observaţia lui Roth [89]. Rezultatul nostru principal (Teorema 3.3.5) în cea de a doua secţiune a acestui capitol este o demonstraţie pentru [48, Conjecture 4.19], care afirmă că familiile accesibile $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \Omega)$ ale ecuaţiei diferenţiale Loewner, care sunt generate de aplicaţiile Carathéodory cu valori într-o subfamilie compactă şi convexă Ω a familiei Carathéodory $\mathcal{N}_A$, este compactă, iar familia accesibilă corespunzătoare $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \mathrm{ex}\,\Omega)$ este densă în ea, unde $T \in [0, \infty]$, $A \in L(\mathbb{C}^n)$ cu $k_+(A) < 2m(A)$, şi $\mathrm{ex}\,\Omega$ reprezintă submulţimea punctelor extremale ale lui Ω. Deoarece $S^0_A(\mathbb{B}^n)$ este egală cu familia accesibilă în timp infinit $\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{N}_A)$ şi $\mathcal{N}_A$ este o familie compactă şi convexă în $H(\mathbb{B}^n)$, acest rezultat generalizează primul rezultat (Teorema 3.2.7). Totuşi, abordarea celui de al doilea rezultat, dat în Teorema 3.3.5, este diferită faţă de abordarea primului rezultat.

Acest capitol conţine rezultate originale, inclusiv cele menţionate mai sus, obţinute de autorul tezei în [63] şi [64].

Lanţurile de subordonare univalente cu normarea dată de un operator liniar dependent de timp şi legătura cu ecuaţia diferenţială Loewner pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$ au fost întâi considerate de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [45]. Ei au introdus noţiunea de reprezentare parametrică generalizată şi spiralitate generalizată pe $\mathbb{B}^n$ în raport cu un operator dependent de timp şi au obţinut caracterizări cu lanţuri de subordonare univalente pe $\mathbb{B}^n$. Alte rezultate în legătură cu aceste noţiuni, referitoare la studiul ecuaţiei diferenţiale Loewner, au fost obţinute de Graham, Hamada, Kohr [42], Voda [96] şi Arosio [6].

În **Capitolul 4**, în prima secţiune, studiem familia $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor univalente normate pe $\mathbb{B}^n$ cu reprezentare parametrică generalizată în raport cu operatori dependenţi de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$, unde $\widetilde{\mathcal{A}}$ este o familie de aplicaţii măsurabile de la $[0, \infty)$ la $L(\mathbb{C}^n)$ ce satisfac anumite condiţii naturale. În particular, avem Teoremele 4.1.12 şi 4.1.17, care ne spun că aplicaţiile din $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$ se scufundă în lanţuri Loewner normale în raport cu A la timpul t şi că familia $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$ este compactă. Pe de altă parte, Exemplele 4.1.13 şi 4.1.18 arată că familia $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$ pentru operatori dependenţi de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ este diferită în general de familia corespunzătoare pentru operatori dependenţi de timp constanţi.

În secţiunea a doua a acestui capitol, considerăm punctele extremale şi punctele suport asociate familiei compacte $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$, unde $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $t \geq 0$. Considerăm generalizările rezultatelor lui Kirwan

[66] şi Pell [74], în cazul operatorilor dependenţi de timp, ce sunt date în Teoeremele 4.2.2 şi 4.2.4, având în vedere rezultatele recente obţinute de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr în [48], [49] (a se vedea şi [21], [43], [46], [53], [93]). De asemenea, prezentăm un exemplu (Teorema 4.2.9) de punct suport mărginit pentru familia $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^2)$, unde $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ este un anumit operator dependent de timp, având în vedere exemplul obţinut de Bracci [15] (a se vedea şi [18], [49]). Considerăm apoi noţiunea de familie accesibilă în raport cu un operator dependent de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi prezentăm caracterizările corespunzătoare ale punctelor extremale/suport asociate acestor familii de funcţii univalente mărginite pe $\mathbb{B}^n$, generalizând anumite rezultate obţinute de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [48, 49]. Exemple şi aplicaţii utile (e.g. Exemplul 4.2.6) pun în evidenţă diferenţe dintre cazul operatorilor dependenţi de timp neconstanţi şi cazul operatorilor dependenţi de timp constanţi.

Primele două secţiuni ale acestui capitol conţin rezultate originale obţinute de M. Iancu în colaborare cu H. Hamada şi G. Kohr [58].

În ultima secţiune a acestui capitol, considerăm anumite rezultate de convergenţă pentru familia $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n)$ în raport cu metrica Hausdorff ρ pe $H(\mathbb{B}^n)$, unde $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $t \geq 0$. Cazul familiilor accesibile este de a asemenea considerat. Aceste rezultate (Teoremele 4.3.1 şi 4.3.2) pot fi privite ca teoreme de convergenţă dominată pentru operatori dependenţi de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Ca aplicaţii, avem rezultate similare (Teoremele 4.3.3 şi 4.3.4) pentru familiile compacte $S^0_{\mathbf{A}}(\mathbb{B}^n)$, a aplicaţiilor univalente cu $\mathbf{A}$-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$, şi $\widehat{S}_{\mathbf{A}}(\mathbb{B}^n)$, a aplicaţiilor spiralate în raport cu $\mathbf{A}$ pe $\mathbb{B}^n$, unde $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^n)$ este astfel încât $k_+(\mathbf{A}) < 2m(\mathbf{A})$. O altă aplicaţie (Teorema 4.3.7) pune în evidenţă anumite condiţii suficiente pentru $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încât să aibe loc egalitatea $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n) = S^0(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq 0$.

Ultima secţiune a acestui capitol se bazează pe rezultatele originale obţinute de M. Iancu în colaborare cu H. Hamada şi G. Kohr [59].

Rezultatele originale din această teză au fost obţinute în următoarele articole:

1. **Iancu, M.**: *Some applications of variation of Loewner chains in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl., **421** (2015), 1469–1478.

2. **Iancu, M.**: *A density result for parametric representations in several complex variables*, Comput. Methods Funct. Theory, **15** (2015), 247–262.

3. **Iancu, M.**: *On reachable families of the ecuaţia diferenţială Loewner in several complex variables*, Complex Anal. Oper. Theory, to appear, DOI: 10.1007/s11785-015-0461-z.

4. Hamada, H., **Iancu, M.**, Kohr, G.: *Extremal problems for mappings with generalized parametric representation in* $\mathbb{C}^n$, submitted.

5. Hamada, H., **Iancu, M.**, Kohr, G.: *Convergence results for families of univalent mappings on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$, submitted.

Menţionăm principalele rezultate originale ale tezei:
Capitolul 2: Teoremele 2.2.1, 2.2.2, 2.3.1.
Capitolul 3: Teoremele 3.2.7, 3.3.4, 3.3.5.
Capitolul 4: Teoremele 4.1.12, 4.1.17, 4.2.2, 4.2.4, 4.2.9, 4.2.16, 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4, 4.3.7.

Cuvinte cheie

aplicaţie Carathéodory, aplicaţie de tranziţie, aplicaţie univalentă, câmp vectorial Herglotz, control, ecuaţie diferenţială Loewner, familie accesibilă, familie Carathéodory, lanţ Loewner, metodă variaţională, metrică Hausdorff, problemă de scufundare, punct extremal, punct suport, reprezentare parametrică.

Mulţumiri

Aş dori să îmi exprim recunoştinţa faţă de conducătorul meu de doctorat, Prof. Gabriela Kohr, pentru îndrumare, susţinere, încurajare şi pentru ideile valoroase împărtăşite.

O parte din munca pentru teză am desfăşurat-o la Departamentul de Matematică al Universităţii din Würzburg. Aş dori să mulţumesc Prof. Oliver Roth pentru ospitalitate.

Doresc să mulţumesc Prof. Filippo Bracci şi Prof. Hidetaka Hamada pentru comentariile şi sugestiile oferite, care au îmbunătăţit conţinutul tezei.

Munca la această teză a fost posibilă şi datorită suportului financiar oferit de Programul Sectorial Operaţional pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, cofinanţat din Fondul Social European, în cadrul proiectului POSDRU/159/1.5/S/132400, cu titlul "Tineri cercetători de succes - dezvoltare profesională în context interdisciplinar şi internaţional".

Capitolul 1

Teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{C}^n$

În acest capitol, prezentăm dezvoltatea teoriei lanţurilor Loewner în contextul teoriei geometrice a funcţiilor în una şi mai multe dimensiuni. Prezentăm aplicaţii importante, cu accent pe probleme extremale. Capitolele următoare se bazează pe acest capitol de bază, care oferă şi motivaţia necesară pentru anumite rezultate.

În prima secţiune, considerăm teoria lanţurilor Loewner de o variabilă complexă. Prezentăm definiţii şi rezultate de bază ce au dezvoltat metoda lui Loewner. De exemplu, ne referim la lucrările lui Kufarev [69] şi Pommerenke [78]. Teoria este în strânsă legătură cu clasa Carathéodory şi cu clasa S. Prezentăm aceste familii împreună cu teoremele de creştere şi estimările coeficienţilor corespunzătoare. Apoi, evidenţiem relaţia dintre lanţurile Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner. În acest context, considerăm noţiunea de reprezentare parametrică pe discul unitate. Vom vedea că orice funcţie univalentă normată pe discul unitate are reprezentare parametrică. Ne vom referi şi la reprezentările parametrice particulare ale funcţiilor cu o tăietură, studiate de Loewner [70], şi ale funcţiilor univalente normate şi mărginite. În fiecare subsecţiune, vom discuta anumite probleme extremale asociate. De exemplu, menţionăm rezultatele lui Kirwan [66] şi Pell [74], referitoare la proprietăţile extremale ale lanţurilor Loewner.

În secţiunea a doua, prezentăm evoluţia teoriei lanţurilor Loewner de mai multe variabile complexe. Ne referim la rezultatele iniţiale obţinute de Pfaltzgraff [75], care stabilesc o legătură între lanţurile Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner, şi la cele obţinute de Poreda [80], referitoare la reprezentarea parametrică pe polidisc. În continuare, prezentăm rezultatele lui Graham, Hamada şi Kohr [41], referitoare la compactitatea familiei Carathéodory şi consecinţele acestui rezultat în studiul familiei de aplicaţii cu reprezentare parametrică pe bila unitate, introdusă de Kohr [68]. În legătură cu această familie, prezentăm şi teoreme de creştere, estimări ale coeficienţilor şi proprietăţi extremale. Pe de altă parte, punem în evidenţă caracterizarea lanţurilor Loewner cu ajutorul ecuaţiei diferenţiale Loewner, dată de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [52]. Mai departe, discutăm noţiunea asociată de A-reprezentare parametrică pe bila unitate şi legătura cu lanţurile de subordonare univalente A-normate, date de Graham, Hamada, Kohr, Kohr [44] şi Duren, Graham, Hamada, Kohr [34], unde A este un operator liniar ce satisface anumite proprietăţi ce vor fi menţionate în una din secţiunile următoare. În final, considerăm studiul L^d-lanţurilor Loewner şi al noţiunilor asociate, de familie de evoluţie şi câmp vectorial Herglotz, dat de Bracci, Contreras, Díaz-Madrigal [17] şi Arosio, Bracci, Hamada, Kohr [8].

1.1 Teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}$

În această secţiune, prezentăm noţiuni şi rezultate de bază din teoria lanţurilor Leowner în planul complex. De asemenea, în legătură cu acestea, considerăm anumite familii de funcţii olomorfe pe discul unitate şi punem în evidenţă probleme extremale asociate, cum ar fi teoremele de creştere şi estimările coeficienţilor.

Mai întâi, ne referim la clasa Carathéodory a funcţiilor olomorfe cu partea reală pozitivă, ce are un rol important în diverse caracterizări analitice a proprietăţilor geometrice ale funcţiilor univalente pe discul unitate. Reamintim formula de reprezentare Herglotz şi consecinţele sale: teorema de creşterere, compactitatea clasei, estimările exacte ale coeficienţilor şi caracterizarea punctelor extremale şi punctelor suport. Apoi, considerăm clasa S a funcţiilor univalente normate pe discul unitate şi prezentăm teorema de creşterere, compactitatea clasei şi estimările exacte ale coeficienţilor. Evidenţiem şi o proprietate importantă a punctelor extremale şi punctelor suport corespunzătoare.

În continuare, ne axăm pe rezultatele fundamentale din teoria lanţurilor Loewner în planul complex. Prezentăm definiţia lanţurilor Loewner şi cele ale noţiunilor asociate. Punem în evidenţă caracterizarea cu ajutorul ecuaţiei diferenţiale Loewner. În mare parte, în această secţiune, ne bazăm pe expunerea dată de Pommerenke [79]. Vom sublinia şi anumite proprietăţi extremale ale lanţurilor Loewner, date de Kirwan [66] şi Pell [74]. Mai departe, considerăm noţiunea de reprezentare parametrică pe discul unitate. Vom observa că orice funcţie univalentă normată pe discul unitate are reprezentare parametrică şi poate fi scufundată într-un lanţ Loewner. Apoi, vom discuta cazul particular al funcţiilor cu o tăietură, studiat de Loewner [70], şi vom puncta anumite proprietăţi extremale asociate puse în evidenţă de Roth [89]. Vom considera şi cazul particular al funcţiilor univalente normate şi mărginite pe discul unitate.

Menţionăm aici monografiile importante în teoria funcţiilor univalente, care fac referire la teoria lanţurilor Loewner: Duren [33], Hayman [61], Goluzin [38], Graham, Kohr [50], Pommerenke [79], Rosenblum, Rovnyak[88]. Pe lângă acestea, principalele surse bibliografice ale acestei secţiuni sunt [3], [24], [56], [84], [90].

Stabilim acum câteva notaţii ce vor fi utilizate în următoarele secţiuni. Fie $\mathbb{C}$ planul complex. Discul unitate $\{z \in \mathbb{C} \big| \, \|z\| < 1\}$ este notat cu $\mathbb{U}$, iar cercul unitate este notat cu $\partial\mathbb{U}$. Notăm cu $H(\mathbb{U})$ familia funcţiilor olomorfe definite pe $\mathbb{U}$ cu valori în $\mathbb{C}$. Înzestrăm pe $H(\mathbb{U})$ cu topologia local uniform convergenţei. Astfel, $H(\mathbb{U})$ este un spaţiu Fréchet. Dacă $f \in H(\mathbb{U})$, atunci spunem că f este normată dacă $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$.

1.1.1 Clasa Carathéodory

Definiţia *clasei Carathéodory* este (a se vedea e.g. [33]):

$$\mathcal{P} := \{p \in H(\mathbb{U}) \big| \, p(0) = 1 \text{ şi } \Re p(z) > 0, \text{ oricare ar fi } z \in \mathbb{U}\}.$$

Anumite caracterizări analitice ale unor proprietăţi geometrice sunt în strânsă legătură cu această clasă (a se vedea e.g. [33], [50], [56], [79]). Mai târziu, vom vedea şi legătura puternică între această clasă şi teoria lanţurilor Loewner.

O modalitate simplă de a produce exemple de funcţii din $\mathcal{P}$ este de a considera următoarea caracterizare cu *funcţii Schwarz* (a se vedea [33] şi [79]; e.g. [50]).

Observaţia 1.1.1. O funcţie $p : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ este în $\mathcal{P}$ dacă şi numai dacă există o funcţie Schwarz v (i.e. $v \in H(\mathbb{U})$ şi $|v(z)| \le |z|$, $z \in \mathbb{U}$) astfel încât $p(z) = \dfrac{1 + v(z)}{1 - v(z)}$, $z \in \mathbb{U}$.

Prezentăm un exemplu important de funcţie în $\mathcal{P}$ (a se vedea e.g. [33] şi [79]; e.g. [50]).

Exemplul 1.1.2. Fie $\lambda \in \partial\mathbb{U}$. Atunci funcţia $p : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ dată de $p(z) = \dfrac{1 + \lambda z}{1 - \lambda z}$, $z \in \mathbb{U}$, este în $\mathcal{P}$.

O caracterizare foarte utilă a funcţiilor din $\mathcal{P}$ este dată de *formula de reprezentare* (*integrală*) *Herglotz* (a se vedea e.g. [33], [56], [79]).

Teorema 1.1.3. *O funcţie $p : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ este în $\mathcal{P}$ dacă şi numai dacă există o funcţie crescătoare $\mu : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ astfel încât $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ şi*

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-it}z}{1 - e^{-it}z} d\mu(t), \quad z \in \mathbb{U}. \tag{1.1.1}$$

O consecinţă imediată a formulei (1.1.1) este următoarea teoremă de creştere (a se vedea [33] şi [79]; e.g. [50]).

Teorema 1.1.4. *Fie $p \in \mathcal{P}$. Atunci au loc următoarele inegalităţi exacte:*

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |p(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \quad z \in \mathbb{U}.$$

Pe baza teoremei anterioare, avem următoarea consecinţă (a se vedea [79]; e.g. [50]).

Teorema 1.1.5. *$\mathcal{P}$ este o submulţime compactă a lui $H(\mathbb{U})$.*

În continuare, discutăm câteva probleme extremale asociate clasei $\mathcal{P}$. Reamintim, mai întâi noţiunile de punct extremal şi punct suport pentru o mulţime compactă unui spaţiu vectorial topologic (a se vedea e.g. [32]).

Definiţia 1.1.6. Fie X un spaţiiu vectorial topologic şi $\Omega \subseteq X$ o mulţime compactă nevidă.

(*i*) Un punct $f \in \Omega$ se numeşte *punct extremal* al lui Ω dacă: $f = \lambda g + (1 - \lambda)h$, pentru anumiţi $\lambda \in (0, 1)$, $g, h \in \Omega$, implică $f = g = h$.

(*ii*) Un punct $f \in \Omega$ se numeşte *punct suport* al lui Ω dacă există o funcţională liniară continuă $L : X \to \mathbb{C}$ astfel încât $\Re L$ nu este constantă pe E şi $\Re L(f) = \max_{g \in \Omega} \Re L(g)$.

Notăm $\operatorname{ex} \Omega$ mulţimea punctelor extremale ale lui Ω, $\operatorname{supp} \Omega$ mulţimea punctelor suport ale lui Ω şi $\operatorname{co} \Omega$ învelitoarea convexă a lui Ω. Menţionăm că $\operatorname{ex} \Omega \neq \emptyset$ şi că, dacă Ω are cel puţin două puncte, atunci $\operatorname{supp} \Omega \neq \emptyset$ (a se vedea [56]). Pe parcursul acestei secţiuni, considerăm $X = H(\mathbb{U})$.

Reprezentarea integrală (1.1.1) oferă o caracterizare completă a punctelor extremale şi punctelor suport ale clasei Carathéodory $\mathcal{P}$ (a se vedea [56]).

Teorema 1.1.7.

(i) $\operatorname{ex} \mathcal{P} = \{z \mapsto \dfrac{1 + \lambda z}{1 - \lambda z} \,|\, \lambda \in \partial \mathbb{U}\}$.

(ii) $\operatorname{supp} \mathcal{P} = \operatorname{co} \operatorname{ex} \mathcal{P}$.

Un exemplu important de problemă extremală este acela de a găsi estimări exacte ale coeficienţilor pentru anumite familii de funcţii olomorfe. Folosind formula (1.1.1), se pot obţine estimări exacte ale coeficienţilor funcţiilor din $\mathcal{P}$ (a se vedea e.g. [33], [50], [79]).

Teorema 1.1.8. *Fie $p \in \mathcal{P}$ astfel încât $p(z) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k$, $z \in \mathbb{U}$. Atunci $|p_k| \leq 2$, oricare ar fi $k \geq 1$. Aceste estimări sunt exacte.*

Pentru alte probleme extremale interesante asociate unor familii compacte de funcţii olomorfe pe $\mathbb{U}$, în legătură cu $\mathcal{P}$, ne referim la monografia lui Hallenbeck şi MacGregor [56].

1.1.2 Funcţii univalente normate pe discul unitate

Notăm cu S bine-cunoscuta clasă de funcţii univalente (olomorfe şi injective) normate pe $\mathbb{U}$ (a se vedea e.g. [33], [50], [79]):

$$S = \{f \in H(\mathbb{U}) \big| \, f \text{ este univalentă şi } f(0) = 0, f'(0) = 1\}.$$

O subfamilie importantă a lui S este familia funcţiilor normate şi stelate pe discul unitate. Prezentăm definiţia acesteia (a se vedea e.g. [33], [50], [79]).

Definiţia 1.1.9. O funcţie $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ este stelată dacă f este univalentă, $f(0) = 0$ şi $f(\mathbb{U})$ este un domeniu stelat în raport cu originea.

Notăm cu S^* familia funcţiilor univalente normate pe $\mathbb{U}$ care sunt stelate.

Prezentăm un exemplu bine-cunoscut de funcţii din S (a se vedea [33], [50], [56], [79]), care sunt soluţii pentru anumite probleme extremale importante, aşa cum vom vedea în continuare.

Exemplul 1.1.10. Funcţia Koebe $k : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$, dată de $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$, $z \in \mathbb{U}$, şi rotaţia sa $k_\theta : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$, dată de $k_\theta(z) = e^{-i\theta}k(e^{i\theta}z) = \dfrac{z}{(1-e^{-i\theta}z)^2}$, $z \in \mathbb{U}$, unde $\theta \in \mathbb{R}$, sunt funcţii normate şi stelate, deci aparţin clasei S. Mai mult, sunt puncte extremale şi puncte suport nemărginite ale clasei S.

Prezentăm acum teorema de creştere pentru funcţiile din S (a se vedea [33], [79]; a se vedea şi e.g. [50]).

Teorema 1.1.11. *Fie $f \in S$. Atunci au loc următoarele inegalităţi exacte:*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \ \textit{oricare ar fi } z \in \mathbb{U}.$$

În particular, $\mathbb{U}_{1/4} \subseteq f(\mathbb{U})$.

Pe baza teoremei precedente, se poate deduce compactitatea clasei S (a se vedea [33], [79]; a se vedea şi e.g. [50]).

Teorema 1.1.12. *S este o submulţime compactă a lui $H(\mathbb{U})$.*

Deoarece S este compactă, se pot asocia clasei S diverse probleme extremale. Bieberbach [14] a considerat în 1916 următoarea problemă extremală de mare importanţă, cunoscută sub denumirea de *conjectura Bieberbach*, iar de Branges [19] a demonstrat-o în 1985.

Teorema 1.1.13. *Fie $f \in S$ astfel încât $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, $z \in \mathbb{U}$, şi fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Atunci $|a_n| \le n$ şi egalitatea are loc dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei Koebe.*

Conjectura lui Bieberbach are o lungă istorie de încercări de a o demonstra, ce au condus la dezvoltarea mai multor idei şi tehnici de abordare a problemelor extremale. De Branges [19] a demonstrat conjectura folosind metoda parametrică a lui Loewner [70] (cf. [24], [61], [88]).

În cele ce urmează, evidenţiem o proprietate importantă a funcţiilor din $\operatorname{ex} S$ şi $\operatorname{supp} S$ (a se vedea [33], [79]).

Observaţia 1.1.14. Dacă $f \in \operatorname{ex} S \cup \operatorname{supp} S$, atunci $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{U})$ este un arc Jordan crescător în modul. În particular, dacă $f \in \operatorname{ex} S \cup \operatorname{supp} S$, atunci $f(\mathbb{U})$ este un domeniu nemărginit.

1.1.3 Lanţurile Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner în $\mathbb{C}$

În această subsecţiune, prezentăm definiţia lanţurilor Loewner pe discul unitate şi caracterizarea dată de ecuaţia diferenţială Loewner. Următoarele rezultate fundamentale reprezintă baza generalizărilor teoriei lanţurilor Loewner de mai multe variabile complexe. Principala sursă bibliografică pentru pentru această subsecţiune este expunerea lui Pommerenke [79, Chapter 6]. Ne vom baza şi pe monografia lui Graham şi Kohr [50]. De asemenea, următoarele surse bibliografice [3],[12], [24], [40], [69], [78], [88] au fost utile în această subsecţiune.

Definiţia 1.1.15. O funcţie $f : \mathbb{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ se numeşte lanţ de subordonare univalent dacă $f(\cdot, t)$ este univalentă pe $\mathbb{U}$ astfel încât $f(0, t) = 0$, oricare ar fi $t \geq 0$, şi $f(\mathbb{U}, s) \subseteq f(\mathbb{U}, t)$, oricare ar fi $0 \leq s \leq t$. Dacă, în plus, $f'(0, t) = e^t$, oricare ar fi $t \geq 0$, unde $f'(0, t) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, t)$, atunci f se numeşte lanţ Loewner.

Pe baza definiţiei anterioare, dacă f este un lanţ de subordonare univalent, atunci pentru orice $0 \leq s \leq t$, există o unică funcţie Schwarz univalentă $v(\cdot, s, t)$ astfel încât $f(z, s) = f(v(z, s, t), t)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$. În acest caz, v se numeşte *funcţia de tranziţie* asociată lui f. Funcţia de tranziţie v satisface *proprietatea de semigroup*: $v(z, s, u) = v(v(z, s, t), t, u)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, $0 \leq s \leq t \leq u$. Mai mult, dacă f este un lanţ Loewner, atunci $v'(0, s, t) = e^{s-t}$, oricare ar fi $0 \leq s \leq t$, unde $v'(0, s, t) = \frac{\partial v}{\partial z}(0, s, t)$.

Menţionăm că există şi o interpretare geometrică a noţiunii de lanţ de subordonare univalent, bazată pe convergenţa Carathéodory în nucleu (a se vedea [24] şi [79]; a se vedea şi e.g. [50]).

În continuare, observăm că studiul lanţurilor de subordonare univalente poate fi redus la studiul lanţurilor Loewner, printr-o renormare (a se vedea [24], [50], [79]). O astfel de renormare nu este posibilă pentru întreaga familie a lanţurilor de subordonare univalente în mai multe dimensiuni, aşa cum vom vedea într-una din secţiunile următoare.

Observaţia 1.1.16. Dacă f este un lanţ de subordonare univalent, atunci $f_* : \mathbb{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ dată de $f_*(z, t^*) = f(e^{-i\theta(t)}z, t)$, $z \in \mathbb{U}$, $t \geq 0$, unde $t^* = \ln |f'(0, t)|$ şi $\theta(t) = \arg f'(0, t)$, este un lanţ Loewner.

Un exemplu simplu de lanţ Loewner poate fi dat cu ajutorul unei funcţii stelate pe discul unitate (a se vedea [79]).

Exemplul 1.1.17. Fie $f \in S$. Atunci $f \in S^*$ dacă şi numai dacă $F : \mathbb{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ dată de $F(z, t) = e^t f(z)$, $z \in \mathbb{U}$, $t \geq 0$, este un lanţ Loewner.

Prezentăm acum ecuaţia diferenţială Loewner şi legătura cu lanţurile Loewner (a se vedea [78] şi [79]; a se vedea şi e.g. [50]).

Teorema 1.1.18. *Fie $p : \mathbb{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ astfel încât :*

(i) $p(\cdot, t) \in \mathcal{P}$, oricare ar fi $t \geq 0$,

(ii) $p(z, \cdot)$ este măsurabilă pe $[0, \infty)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$.

Atunci, pentru orice $z \in \mathbb{U}$ şi $s \geq 0$, ecuaţia diferenţială

$$\frac{dv}{dt} = -vp(v, t), \ \text{a.p.t. } t \geq s, \tag{1.1.2}$$

are o unică soluţie local absolut continuă $v(z, s, \cdot)$ cu condiţia iniţială $v(z, s, s) = z$. Mai mult, pentru orice $s \geq 0$, $v(z, s, \cdot)$ este Lipschitz continuă pe $[s, \infty)$, local uniform în raport cu $z \in \mathbb{U}$, şi $v(\cdot, s, t)$ este o funcţie Schwarz univalentă astfel încât $v'(0, s, t) = e^{s-t}$, oricare ar fi $t \geq s$. Mai mult, pentru orice $s \geq 0$, următoarea limită există local uniform în raport cu $z \in \mathbb{U}$:

$$f(z, s) := \lim_{t \to \infty} e^t v(z, s, t) \tag{1.1.3}$$

şi $f : \mathbb{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ *dată de* (1.1.3) *este un lanţ Loewner astfel încât* v *este funcţia de tranziţie asociată lui* f *şi satisface, pentru aproape orice* $t \geq 0$*:*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zf'(z,t)p(z,t), \quad z \in \mathbb{U}. \tag{1.1.4}$$

Ecuaţia diferenţială (1.1.2) se numeşte *ecuaţia diferenţială* (*ordinară*) *Loewner*, iar ecuaţia diferenţială (1.1.4) se numeşte *ecuaţia diferenţială Loewner* (sau *ecuaţia diferenţială Loewner-Kufarev*). Menţionăm că ecuaţia analoagă *Polubarinova-Galin* are aplicaţii importante în mecanica fluidelor, referitoare la studiul mişcărilor fluide Hele-Shaw (a se vedea [37], [55]). Pe de altă parte, menţionăm aplicaţiile referitoare la extensiile cvasiconforme, considerate iniţial de Becker [12] (a se vedea şi [13]).

Prezentăm caracterizarea lanţurilor Loewner ca fiind anumite soluţii ale ecuaţiei diferenţiale Loewner (a se vedea [78] şi [79]; a se vedea şi e.g. [50]).

Teorema 1.1.19. *Fie* $f : \mathbb{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$*. Atunci* f *este un lanţ Loewner dacă şi numai dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

(*i*) *există* $r \in (0,1)$ *şi* $M > 0$ *astfel încât* $f(\cdot, t)$ *este olomorfă pe* $\mathbb{U}_r = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| < r\}$ *cu* $f(0,t) = 0$, $f'(0,t) = e^t$*, oricare ar fi* $t \geq 0$*,* $f(z, \cdot)$ *este local absolut continuă pe* $[0, \infty)$ *local uniform în raport cu* $z \in \mathbb{U}_r$*, şi* $|f(z,t)| \leq Me^t$*, oricare ar fi* $z \in \mathbb{U}_r$*,* $t \geq 0$*;*

(*ii*) *există* $p : \mathbb{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ *ce satisface condiţiile* (*i*) *şi* (*ii*) *din Teorema* 1.1.18 *astfel încât, pentru aproape orice* $t \geq 0$*:*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zf'(z,t)p(z,t,), \quad z \in \mathbb{U}_r.$$

În cele ce urmează, reamintim generarea unui lanţ Loewner cu ajutorul funcţiei de tranziţie. De asemenea, vom pune în evidenţă legătura cu ecuaţia diferenţială Loewner (a se vedea [78] şi [79]; a se vedea şi e.g. [50]).

Teorema 1.1.20. *Fie* f *un lanţ Loewner şi* v *funcţia de tranziţie asociată lui* f*. Atunci* $f(z, \cdot)$ *este local Lipschitz continuă pe* $[0, \infty)$*, local uniform în raport cu* $z \in \mathbb{U}$*, şi există* $p : \mathbb{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ *ce satisface condiţiile* (*i*) *şi* (*ii*) *din Teorema* 1.1.18 *astfel încât* f *satisface ecuaţia diferenţială Loewner* (1.1.4) *asociată lui* p*. Mai mult, pentru orice* $s \geq 0$ *şi* $z \in \mathbb{U}$*,* $v(z, s, \cdot)$ *este unica soluţie local absolut continuă pe* $[s, \infty)$ *a ecuaţiei diferenţiale Loewner* (1.1.2) *asociată lui* p *cu condiţia iniţială* $v(z,s,s) = z$*. Mai mult,* $\lim_{t \to \infty} e^t v(z,s,t) = f(z,s)$*, local uniform în raport cu* $z \in \mathbb{U}$*, oricare ar fi* $s \geq 0$.

Observaţia 1.1.21. Funcţia p din Teorema 1.1.20 este esenţial unică în următorul sens: dacă q este o altă funcţie ce satisface condiţiile (*i*) şi (*ii*) din Teorema 1.1.18 astfel încât f satisface ecuaţia diferenţială Loewner (1.1.4) asociată lui q, atunci $p(\cdot, t) = q(\cdot, t)$, a.p.t. $t \geq 0$ (a se vedea [16], [50]).

Orice ecuaţie diferenţială Loewner are o unică soluţie normată care este un lanţ Loewner, aşa cum vom vedea în următoarea teoremă (a se vedea [12], [78]).

Teorema 1.1.22. *Fie* $p : \mathbb{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ *o funcţie ce satisface condiţiile* (*i*) *şi* (*ii*) *din Teorema* 1.1.18*. Atunci există un unic lanţ Loewner* f *ce satisface ecuaţia diferenţială Loewner* (1.1.4) *asociată lui* p*.*

În continuare, considerăm anumite proprietăţi extremale ale lanţurilor Loewner, care sunt utile în studiul problemelor extremale pentru clasa S (a se vedea [67]). Mai precis, considerăm rezultatele obţinute de Kirwan [66] şi Pell [74].

Teorema 1.1.23. *Fie* f *un lanţ Loewner. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(i) dacă $f(\cdot, 0) \in \operatorname{ex} S$, atunci $e^{-t} f(\cdot, t) \in \operatorname{ex} S$, oricare ar fi $t \geq 0$.

(ii) dacă $f(\cdot, 0) \in \operatorname{supp} S$, atunci $e^{-t} f(\cdot, t) \in \operatorname{supp} S$, oricare ar fi $t \geq 0$.

Încheiem această subsecţiune cu menţiunea că un studiu general, care unifică teoria lanţurilor Loewner şi teoria semigrupurilor de funcţii olomorfe pe discul unitate, a fost dat în [16] şi [23]. De asemenea, un studiu interesant al proprietăţilor de bază ale lanţurilor Loewner şi al ecuaţiei diferenţiale Loewner pe discul unitate poate fi găsit în [88].

1.1.4 Reprezentări parametrice pe discul unitate

Mai întâi, reamintim definiţia unei funcţii univalente care are reprezentare parametrică pe discul unitate (a se vedea [79]; a se vedea şi e.g. [50]).

Definiţia 1.1.24. O funcţie $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ are reprezentare parametrică dacă există $p : \mathbb{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ astfel încât

(i) $p(\cdot, t) \in \mathcal{P}$, oricare ar fi $t \geq 0$,

(ii) $p(z, \cdot)$ este măsurabilă pe $[0, \infty)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, şi

$$f = \lim_{t \to \infty} e^t v(\cdot, t), \text{ local uniform pe } \mathbb{U},$$

unde, pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $v(z, \cdot)$ este unica soluţie local absolut continuă pe $[0, \infty)$ a ecuaţiei diferenţiale Loewner asociată lui p:

$$\frac{dv}{dt} = -vp(v, t), \text{ a.p.t. } t \geq 0,$$

cu condiţia iniţială $v(z, 0) = z$.

Menţionăm că orice funcţie univalentă normată pe discul unitate are reprezentare parametrică (a se vedea [79]). În cazul mai multor variabile complexe, această proprietate nu este adevărată pentru întreaga familie de aplicaţii univalente normate pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$, aşa cum vom vedea mai târziu.

Teorema 1.1.25. *Fie $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$. Atunci $f \in S$ dacă şi numai dacă f are reprezentare parametrică.*

Având în vedere subsecţiunea anterioară, prezentăm caracterizarea clasei S cu lanţuri Loewner, adică, orice funcţie univalentă normată pe discul unitate poate fi scufundată ca primul element într-un lanţ Loewner (a se vedea [79]).

Teorema 1.1.26. *Fie $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$. Atunci $f \in S$ dacă şi numai dacă există un lanţ Loewner F astfel încât $f = F(\cdot, 0)$.*

1.1.5 Reprezentări parametrice ale funcţiilor cu o tăietură

În această subsecţiune, prezentăm rezultatul parametric al lui Loewner [70] din 1923, ce reprezintă punctul de plecare al teoriei lanţurilor Loewner.

Mai întâi, reamintim definiţia funcţiilor cu o tăietură (a se vedea [33], [79]).

Definiţia 1.1.27. O funcţie $f \in S$ se numeşte funcţie cu o tăietură dacă $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{U})$ este un arc Jordan.

O proprietate foarte utilă a funcţiilor cu o tăietură este aceea de a fi dense în clasa S (a se vedea [33], [79]). Acestă proprietate a avut un rol important în motivaţia lucrării lui Loewner [70].

Teorema 1.1.28. *Fie $f \in S$. Atunci există un şir de funcţii cu o tăietură $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în S astfel încât $f_n \to f$, când $n \to \infty$, local uniform pe $\mathbb{U}$.*

Prezentăm acum rezultatul lui Loewner [70]. O demonstraţie detaliată a acestui rezultat poate fi găsită în [24], [33], [61].

Teorema 1.1.29. *Fie $f \in S$ o funcţie cu o tăietură. Atunci există o funcţie continuă $\kappa : [0,\infty) \to \partial\mathbb{U}$ astfel încât $f = \lim_{t\to\infty} e^t v(\cdot,t)$, local uniform pe $\mathbb{U}$, unde, pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $v(z,\cdot)$ este unica soluţie a ecuaţiei diferenţiale:*

$$\frac{dv}{dt} = -v\frac{1+\kappa(t)v}{1-\kappa(t)v}, \quad t \geq 0, \tag{1.1.5}$$

cu condiţia iniţială $v(z,0) = z$.

Referitor la reciproca Teoremei 1.1.29, avem următoarea observaţie (a se vedea e.g. [33], [90]).

Observaţia 1.1.30. Dacă o funcţie $f \in S$ are reprezentarea parametrică dată de (1.1.5), atunci f nu este în mod necesar o funcţie cu o tăietură.

În Capitolul 3, prezentăm o generalizare a Teoremei 1.1.28, în cazul mai multor variabile complexe, având în vedere Teorema 1.1.29 şi folosind teoria controlului optimal. Pentru acest scop, menţionăm următoarea observaţie interesantă a lui Roth [89], care, pe baza teoremei anterioare şi a Teoremei 1.1.7 (i), pune în legătură ecuaţia diferenţială Loewner (1.1.5) cu mulţimea punctelor extremale ale clasei $\mathcal{P}$.

Observaţia 1.1.31. Pentru orice funcţie cu o tăietură $f \in S$, există $p : \mathbb{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ astfel încât

(i) $p(\cdot,t) \in \operatorname{ex}\mathcal{P}$, oricare ar fi $t \geq 0$,

(ii) $p(z,\cdot)$ este continuă pe $[0,\infty)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$,

şi

$$f = \lim_{t\to\infty} e^t v(\cdot,t), \text{ local uniform pe } \mathbb{U},$$

unde, pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $v(z,\cdot)$ este unica soluţie pe $[0,\infty)$ a ecuaţiei diferenţiale:

$$\frac{dv}{dt} = -vp(v,t), \quad t \geq 0,$$

cu condiţia iniţială $v(z,0) = z$.

Aşadar, având în vedere Teorema 1.1.25, orice funcţie care are reprezentare parametrică poate fi aproximată local uniform pe $\mathbb{U}$ cu funcţii care au reprezentarea parametrică de mai sus, care este generată de funcţii din $\operatorname{ex}\mathcal{P}$ (a se vedea [89] şi [90]).

1.1.6 Reprezentări parametrice ale funcţiilor univalente mărginite pe discul unitate

Clasa funcţiilor univalente normate şi mărginite de un $M \in [1,\infty)$ dat este o subclasă importantă a clasei S (a se vedea [84]). Începem această subsecţiune cu definiţia sa.

Definiţia 1.1.32. Notăm cu

$$S(M) := \{f \in S \big| \, |f(z)| < M, \text{ oricare ar fi } z \in \mathbb{U}\}$$

clasa funcţiilor univalente normate şi mărginite de $M \in [1,\infty)$ pe $\mathbb{U}$.

Pe baza Lemei lui Schwarz, observăm că, pentru $M = 1$, avem $f \in S(1)$ dacă şi numai dacă $f(z) \equiv z$ (a se vedea e.g. [84]).

Anumite exemple de funcţii univalente normate şi mărginite pot fi date pornind de la o funcţie stelată (a se vedea [84]).

Exemplul 1.1.33. Fie $f \in S^*$ şi $M \in [1, \infty)$. Atunci funcţia $f^M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ dată de

$$Mf\left(\frac{1}{M}f^M(z)\right) = f(z),\ z \in \mathbb{U},$$

este în $S(M)$.

În particular, avem următorul exemplu important de funcţie univalentă normată şi mărginită (a se vedea [84]).

Exemplul 1.1.34. Funcţia Pick $p_\theta^M : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$, dată de

$$Mk_\theta\left(\frac{1}{M}p_\theta^M(z)\right) = k_\theta(z),\ z \in \mathbb{U},$$

este în $S(M)$, unde $M \in [1, \infty)$, $\theta \in \mathbb{R}$, şi k_θ este rotaţia corespunzătoare a funcţiei Koebe.

Deoarece $S(M)$ este o familie normală, se poate deduce uşor compactitatea clasei $S(M)$, pentru $M \in [1, \infty)$ (a se vedea [84]).

Teorema 1.1.35. *Fie $M \in [1, \infty)$. Atunci $S(M)$ este o mulţime compactă în $H(\mathbb{U})$.*

În cazul funcţiilor univalente normate şi mărginite, avem următoarea reprezentare parametrică particulară (a se vedea [24], [40], [79]).

Teorema 1.1.36. *Fie $M \in [1, \infty)$ şi $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$. Atunci $f \in S(M)$ dacă şi numai dacă există $p : \mathbb{U} \times [0, \log M] \to \mathbb{C}$ astfel încât $p(\cdot, t) \in \mathcal{P}$, oricare ar fi $t \in [0, \log M]$, $p(z, \cdot)$ este măsurabilă pe $[0, \log M]$, oricare ar fi $z \in \mathbb{U}$, şi $f = Mv(\cdot, \log M)$, unde, pentru orice $z \in \mathbb{U}$, $v(z, \cdot)$ este unica soluţie absolut continuă pe $[0, \log M]$ a ecuaţiei diferenţiale:*

$$\frac{dv}{dt} = -vp(v, t),\ \ a.p.t.\ t \in [0, M],$$

cu condiţia iniţială $v(z, 0) = z$.

Următorul rezultat oferă o caracterizare cu lanţuri Loewner a clasei $S(M)$ (a se vedea [24], [40], [79]).

Teorema 1.1.37. *Fie $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ şi $M \in [1, \infty)$. Atunci $f \in S(M)$ dacă şi numai dacă există un lanţ Loewner F astfel încât $f = F(\cdot, 0)$ şi $F(z, t) = e^t z$, $z \in \mathbb{U}$, $t \geq \log M$.*

Folosind reprezentarea parametrică a funcţiilor univalente normate şi mărginite, anumite probleme extremale pot fi rezolvate. De exemplu, avem următoarea teoremă de creştere (a se vedea [84]).

Teorema 1.1.38. *Fie $M \in [1, \infty)$ şi $f \in S(M)$. Atunci următoarele inegalităţi exacte au loc:*

$$p_\pi^M(|z|) \leq |f(z)| \leq p_0^M(|z|),\ \ \textit{oricare ar fi } z \in \mathbb{U}.$$

Studiul problemelor extremale pe această clasă (a se vedea e.g. [84]) a motivat dezvoltarea unei metode bazate pe teoria controlului optimal (a se vedea e.g. [84], [90], [91]). Mai târziu, ne vom axa pe abordarea ecuaţiei diferenţiale Loewner pe baza teoriei controlului optimal.

1.2 Teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$

În această secţiune, prezentăm evoluţia teoriei lanţurilor Loewner de mai multe variabile complexe. Primele rezultate în această direcţie, referitoare la ecuaţia diferenţială Loewner şi la lanţurile de subordonare univalente pe bila Euclidiană unitate, au fost obţinute de Pfaltzgraff [75]. Constribuţii importante, referitoare la reprezentările parametrice pe polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$, sunt datorită lui Poreda [80, 81], care a obţinut şi unele generalizări pentru bila unitate a unui spaţiu complex Banach [82]. Menţionăm că Poreda [80] a obţinut teorema de creştere şi estimările coeficienţilor de ordin doi pentru familia aplicaţiilor cu reprezentare parametrică pe polidiscul unitate şi a evidenţiat atât asemănări, cât şi diferenţe, între cazul unidimensional şi cel al mai multor dimensiuni, referitoare la această familie.

Rezultatele obţinute de Graham, Hamada, Kohr [41] au avut un impact semnificativ asupra dezvoltării teoriei pe bila unitate în mai multe dimensiuni. De exemplu, ne referim aici la generalizarea clasei S dată de familia $S^0(\mathbb{B}^n)$, a aplicaţiilor cu reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$, compactitatea familiei Carathéodory pe $\mathbb{B}^n$, teoremele de creştere asociate, estimările coeficienţilor, etc. Autorii menţionaţi anterior au evidenţiat şi diferenţe importante dintre cazul unei variabile complexe şi cazul mai multor variabile complexe. Au urmat rezultatele referitoare la studiul soluţiilor ecuaţiei diferenţiale Loewner, în legătură cu lanţurile Loewner, obţinute de Curt, Kohr [28] şi Graham, Kohr, Pfaltzgraff [52]. Remarcăm că diverse aplicaţii ale teoriei lanţurilor Loewner, având în vedere criterii de univalenţă şi extensii cvasiconforme în $\mathbb{C}^n$, pot fi găsite în monografia Curt [27].

Pe parcursul acestei secţiuni, prezentăm şi generalizările referitoare la A-reprezentările parametrice pe $\mathbb{B}^n$ obţinute de Graham, Hamada, Kohr, Kohr [44] şi Duren, Graham, Hamada, Kohr [34], ce sunt în legătură cu lucrările lui Gurganus [54] şi Poreda [83], unde A este un operator liniar în $L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $k_+(A) < 2m(A)$ ($k_+(A)$ este indicele Lyapunov al lui A şi $m(A) = \min_{\|z\|=1} \Re\langle A(z), z\rangle$). În acest caz, considerăm familia compactă $S_A^0(\mathbb{B}^n)$, a aplicaţiilor cu A-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$, ce generalizează familia $S^0(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea [44]). De asemenea, prezentăm un exemplu, dat de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [49], de aplicaţie în $S_A^0(\mathbb{B}^2)$, care nu este în $S^0(\mathbb{B}^n)$, unde $A \in L(\mathbb{C}^n)$ este astfel încât $k_+(A) < 2m(A)$. În final, considerăm abordarea generală a teoriei lanţurilor Loewner dată de Bracci, Contreras, Díaz-Madrigral [17] şi Arosio, Bracci, Hamada, Kohr [8], referitoare la studiul L^d-lanţurilor Loewner şi al noţiunilor asociate de familie de evoluţie şi câmp vectorial Herglotz. În acest context, prezentăm anumite rezultate importante obţinute de Arosio, Bracci şi Wold [10], referitoare la proprietăţile imaginii unui lanţ Loewner.

În fiecare subsecţiune, acordăm atenţie anumitor probleme extremale asociate lanţurilor Loewner. De exemplu, ne referim la rezultatele obţinute de Graham, Hamada, Kohr, Kohr [46, 48, 49] şi Schleißinger [93]. O diferenţă de bază dintre cazul unidimensional şi cel al mai multor dimensiuni este dată de un exemplu de punct suport mărginit al familiei $S^0(\mathbb{B}^2)$, dat de Bracci [15] (cf. Observaţia 1.1.14).

O sursă bibliografică importantă pentru acest subiect este monografia lui Graham şi Kohr [50]. Pe lângă lucrările menţionate anterior, principalele surse bibliografice pentru această secţiune sunt [3], [5], [27], [48], [49], [54], [60], [83], [94], [95], [96].

Stabiliam acum câteva notaţii pentru acest capitol şi cele ce vor urma. Fie $\mathbb{C}^n$ spaţiul n variabilelor complexe $z = (z_1, \ldots, z_n)$ cu produsul scalar Euclidian $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^n z_j\overline{w}_j$ şi norma Euclidiană $\|z\| = \langle z, z\rangle^{1/2}$. Bila deschisă $\{z \in \mathbb{C}^n \big| \|z\| < r\}$ este notată cu $\mathbb{B}_r^n$, iar bila unitate $\mathbb{B}_1^n$ este notată cu $\mathbb{B}^n$. În cazul $n = 1$, discul unitate $\mathbb{B}^1$ este notat cu $\mathbb{U}$.

Fie $L(\mathbb{C}^n)$ spaţiul operatorilor liniari de la $\mathbb{C}^n$ la $\mathbb{C}^n$ cu norma standard. Fie I_n operatorul identitate din $L(\mathbb{C}^n)$. Dacă $A \in L(\mathbb{C}^n)$, atunci notăm cu A^* operatorul adjunct al lui A.

Fie $D \subset \mathbb{C}^n$ un domeniu. Notăm cu $H(D)$ familia aplicaţiilor olomorfe de la D la $\mathbb{C}^n$ înzestrată cu topologia local uniform convergenţei. În acest caz, $H(D)$ este un spaţiu Fréchet. Pentru orice $\Omega \subseteq H(D)$, $\overline{\Omega}$ reprezintă închiderea lui Ω în raport cu această topologie. Pentru orice $f \in H(D)$ şi $K \subset D$, notăm $\|f\|_K = \sup_{z\in K} \|f(z)\|$.

Dacă $f \in H(\mathbb{B}^n)$, spunem că f este normată dacă $f(0) = 0$ şi $Df(0) = I_n$. Fie $S(\mathbb{B}^n)$ familia aplicaţiilor univalente normate pe $\mathbb{B}^n$. Dacă $n = 1$, atunci familia $S(\mathbb{U})$ este notată cu S. O aplicaţie $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ este local univalentă, dacă, pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$, există o vecinătate deshisă V a lui z astfel încât f este univalentă pe V (sau, echivalent, pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$, $Df(z)$ este inversabilă, unde $Df(z)$ este diferenţiala Fréchet a lui f în z). De asemenea, vom folosi notaţiile introduse în Definiţia 1.1.6 pentru $X = H(\mathbb{B}^n)$.

1.2.1 Familia Carathéodory în $\mathbb{C}^n$

Următoarea familie de aplicaţii olomorfe pe $\mathbb{B}^n$ este în strânsă legătură cu clasa Caratheéodory $\mathcal{P}$ (a se vedea [50], [54], [75], [95]). Această familie are un rol esenţial în generalizarea teoriei Loewner de mai multe variabile complexe, aşa cum vom vedea în următoarea subsecţiune.

Definiţia 1.2.1.

$$\mathcal{M} = \{h \in H(\mathbb{B}^n) \big| \, h(0) = 0, Dh(0) = I_n \text{ şi } \Re\langle h(z), z\rangle \geq 0, \, z \in \mathbb{B}^n\}.$$

În cazul $n = 1$, orice funcţie $h \in \mathcal{M}$ poate fi exprimată $h(z) = zp(z)$, $z \in \mathbb{U}$, unde $p \in \mathcal{P}$. Pe baza acestui fapt, evidenţiem un exemplu de aplicaţie din $\mathcal{M}$, pentru $n \geq 1$ (a se vedea [50], [95]).

Exemplul 1.2.2. Fie $p_1, \cdots, p_n \in \mathcal{P}$. Atunci aplicaţia $h : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ dată de

$$h(z) = \big(z_1 p_1(z_1), \ldots, z_n p_n(z_n)\big), \; z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{B}^n,$$

este în $\mathcal{M}$.

Pentru $n = 2$, prezentăm următorul exemplu simplu, dar important, de aplicaţie din $\mathcal{M}$ (a se vedea [50], [95]).

Exemplul 1.2.3. Fie $n = 2$ şi $h : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ dată de

$$h(z) = \big(z_1 - az_2^2, z_2\big), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2,$$

unde $a \in \mathbb{C}$. Atunci $h \in \mathcal{M}$ dacă şi numai dacă $|a| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Pentru familia $\mathcal{M}$, avem următoarea teoremă de creştere. Marginea inferioară a fost obţinută de Pfaltzgraff [75] (cf. [54]), iar cea superioară de Graham, Hamada şi Kohr [41] (cf. [50]). În cazul polidiscului unitate, o margine superioară exactă a fost obţinută de Poreda [80].

Teorema 1.2.4. *Fie $h \in \mathcal{M}$. Atunci*

$$\|z\|\frac{1 - \|z\|}{1 + \|z\|} \leq \|h(z)\| \leq \frac{4\|z\|}{(1 - \|z\|)^2}, \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

Ca o consecinţă a Teoremei 1.2.4, Graham, Hamada şi Kohr [41] au obţinut compactitatea familiei $\mathcal{M}$.

Teorema 1.2.5. *$\mathcal{M}$ este o submulţime compactă a lui $H(\mathbb{B}^n)$.*

Având în vedere Teorema 1.2.5, putem considera diverse probleme extremale asociate familiei $\mathcal{M}$. Graham, Hamada şi Kohr [41] au obţinut următoarele estimări ale coeficienţilor, ce sunt utile în studiul altor probleme extremale (e.g. estimări ale coeficienţilor aplicaţiilor stelate; a se vedea [39], [50]). Poreda [80] a obţinut estimări exacte corespunzătoare ale coeficienţilor în cazul polidiscului.

Teorema 1.2.6. *Fie $h \in \mathcal{M}$. Atunci următoarele estimări exacte au loc*

$$\frac{1}{m!}\left| \langle D^m h(0)(w^m), w\rangle \right| \le 2, \quad w \in \mathbb{C}^n, \|w\| = 1,\, m \ge 2.$$

De asemenea, următoarele estimări au loc

$$\left\| \frac{1}{m!} D^m h(0)(w^m) \right\| \le 2k_m, \quad w \in \mathbb{C}^n, \|w\| = 1,\, m \ge 2,$$

unde $k_m = m^{m/(m-1)}$.

O caracterizare completă a punctelor extremale şi a punctelor suport ale familiei Carathéodory $\mathcal{M}$ pare a fi mult mai complicată în cazul mai multor variabile complexe (cf. Teorema 1.1.7), aşa cum sugerează anumite exemple obţinute de Voda [96]. Următorul exemplu dat de Voda [96] pune în evidenţă un punct suport al lui $\mathcal{M}$, care nu este un punct extremal al lui $\mathcal{M}$ pentru $n = 2$ (cf. Teorema 1.1.7 (i)).

Exemplul 1.2.7. Fie $h : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ dată de $h(z_1, z_2) = \big(z_1 \frac{1+z_1}{1-z_1}, z_2 \frac{1+z_2}{1-z_2}\big)$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$. Atunci $h \in \operatorname{supp} \mathcal{M} \setminus \operatorname{ex} \mathcal{M}$.

Familia $\mathcal{M}$ este foarte utilă în studiul proprietăţilor geometrice ale aplicaţiilor univalente pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [50], [95]). În cele ce urmează, considerăm definiţia aplicaţiilor stelate pe $\mathbb{B}^n$. Menţionăm că aceste aplicaţii pot fi caracterizate analitic cu aplicaţii din $\mathcal{M}$ (a se vedea e.g. [50], [95]).

Definiţia 1.2.8. O aplicaţie $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ se numeşte stelată dacă f este univalentă pe $\mathbb{B}^n$ cu $f(0) = 0$ şi $f(\mathbb{B}^n)$ este un domeniu stelat în raport cu originea.

Notăm cu $S^*(\mathbb{B}^n)$ familia aplicaţiilor univalente normate pe $\mathbb{B}^n$ care sunt stelate.

Pentru $n = 2$, în legătură cu Exemplul 1.2.3, avem următorul exemplu de aplicaţie stelată pe $\mathbb{B}^2$ (a se vedea [95]; a se vedea şi [87]).

Exemplul 1.2.9. Fie $n = 2$ şi $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ dată de

$$f(z) = \big(z_1 + a z_2^2, z_2\big),\; z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2,$$

unde $a \in \mathbb{C}$. Atunci $f \in S^*(\mathbb{B}^2)$ dacă şi numai dacă $|a| \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

1.2.2 Lanţuti Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner în $\mathbb{C}^n$

În această subsecţiune, prezentăm definiţia unui lanţ Loewner pe $\mathbb{B}^n$ şi anumite rezultate cu referire la ecuaţia diferenţială Loewner în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [3], [27], [41], [50], [75], [82]).

Definiţia 1.2.10. O aplicaţie $f : \mathbb{B}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ se numeşte lanţ de subordonare univalent dacă $f(\cdot, t)$ este univalentă pe $\mathbb{B}^n$ cu $f(0, t) = 0$, oricare ar fi $t \ge 0$, şi $f(\mathbb{B}^n, s) \subseteq f(\mathbb{B}^n, t)$, oricare ar fi $0 \le s \le t$. Dacă, în plus, $Df(0, t) = e^t I_n$, oricare ar fi $t \ge 0$ (unde D reprezintă diferenţiala în raport cu variabilele complexe), atunci f se numeşte lanţ Loewner. Dacă f este un lanţ Loewner astfel încât $\{e^{-t} f(\cdot, t)\}_{t \ge 0}$ este o familie normală, atunci f se numeşte lanţ Loewner normal.

Din definiţia anterioară se poate deduce: dacă f este un lanţ de subordonare univalent, atunci, pentru orice $0 \le s \le t$, există o unică aplicaţie Schwarz univalentă $v(\cdot, s, t)$ (i.e. $\|v(z, s, t)\| \le \|z\|$, $z \in \mathbb{B}^n$) astfel încât $f(z, s) = f(v(z, s, t), t)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$. În acest caz, v se numeşte *aplicaţia de tranziţie* asociată lui f. Aplicaţia de tranziţie v satisface *proprietatea de semigrup*: $v(z, s, u) = v(v(z, s, t), t, u)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$, $0 \le s \le t \le u$. Mai mult, dacă f este un lanţ Loewner, atunci $Dv(0, s, t) = e^{s-t} I_n$, oricare ar fi $0 \le s \le t$.

Pentru o caracterizare geometrică a lanţurilor de subordonare univalente în $\mathbb{C}^n$, se poate utiliza noţiunea de convergenţă Carathéodory în nucleu (a se vedea [34], [52], [96]; a se vedea [38], în cazul $n = 1$).

Pentru aplicaţii referitoare la extensii cvasiconforme, în mai multe dimensiuni, ne referim la rezultatele iniţiale obţinute de Pfaltzgraff [76] (a se vedea şi [22], [27] şi [50, Chapter 8]).

Ca în cazul unei variabile complexe, un exemplu simplu de lanţ Loewner normal se poate da pornind de la o aplicaţie stelată pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea e.g. [50]).

Exemplul 1.2.11. Fie $f \in S(\mathbb{B}^n)$. Atunci $f \in S^*(\mathbb{B}^n)$ dacă şi numai dacă aplicaţia $F : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ dată de $F(z,t) = e^t f(z)$, $z \in \mathbb{B}^n$, $t \geq 0$, este un lanţ Loewner normal.

Considerăm acum ecuaţia diferenţială Loewner în $\mathbb{C}^n$. Primele rezultate referitoare la existenţă, unicitate şi anumite proprietăţi ale soluţiei pe bila unitate, au fost obţinute de Pfaltzgraff [75]. Rezumăm aceste rezultate în următoarea teoremă, ţinând cont de şi îmbunătăţirea obţinută de Graham, Hamada şi Kohr [41] (a se vedea şi [50], [51]). Menţionăm că Poreda [80] a fost primul care a a considerat cazul polidiscului unitate în $\mathbb{C}^n$.

Teorema 1.2.12. *Fie $h : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ astfel încât :*

(i) $h(\cdot,t) \in \mathcal{M}$, oricare ar fi $t \geq 0$,

(ii) $h(z,\cdot)$ este măsurabilă pe $[0,\infty)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$.

Atunci, pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$ şi $s \geq 0$, ecuaţia diferenţială

$$\frac{dv}{dt} = -h(v,t), \ \ a.p.t. \ t \geq s, \tag{1.2.1}$$

are o unică soluţie local absolut continuă $v(z,s,\cdot)$ cu condiţia iniţială $v(z,s,s) = z$. Mai mult, pentru orice $s \geq 0$, $v(z,s,\cdot)$ este Lipschitz continuă pe $[s,\infty)$, local uniform în raport cu $z \in \mathbb{B}^n$, $v(\cdot,s,t)$ este o aplicaţie Schwarz univalentă cu $Dv(0,s,t) = e^{s-t}$, oricare ar fi $t \geq s$, şi următoarele inegalităţi au loc

$$\frac{e^{t-s}\|v(z,s,t)\|}{(1-\|v(z,s,t)\|)^2} \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2},$$

$$\frac{e^{t-s}\|v(z,s,t)\|}{(1+\|v(z,s,t)\|)^2} \geq \frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2},$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$ şi $t \geq s \geq 0$.

Aplicaţia $h : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ care satisface condiţiile (i) şi (ii) din Teorema 1.2.12 se numeşte *câmp vectorial Herglotz* sau *câmp vectorial generator* (a se vedea [17], [34]). Ecuaţia diferenţială (1.2.1) se numeşte *ecuaţia diferenţială (ordinară) Loewner* asociată lui h.

Următoarea teoremă pune în evidenţă o modalitate de a genera un lanţ Loewner normal, al cărui aplicaţie de tranziţie este dată de soluţia ecuaţiei diferenţiale Loewner. Poreda [82] a obţinut acest rezultat impunând anumite condiţii suplimentare, care nu sunt necesare având vedere rezultatele lui Graham, Hamada şi Kohr [41] (a se vedea şi [50], [51]).

Teorema 1.2.13. *Fie $h : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ un câmp vectorial Herglotz şi $v(z,s,\cdot)$ unica soluţie local absolut continuă a ecuaţiei diferenţiale Loewner* (1.2.1) *asociată lui h pe $[s,\infty)$ cu condiţia iniţială $v(z,s,s) = z$, oricare ar fi $s \geq 0$, $z \in \mathbb{B}^n$. Atunci, pentru orice $s \geq 0$, următoarea limită există local uniform pe $\mathbb{B}^n$:*

$$f(z,s) := \lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) \tag{1.2.2}$$

şi $f : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ dată de (1.2.2) *este un lanţ Loewner normal al cărui aplicaţie de tranziţie este v. Mai mult, $f(z,\cdot)$ este local Lipschitz continuă pe $[0,\infty)$, local uniform în raport cu $z \in \mathbb{B}^n$ şi f satisface pentru aproape orice $t \geq 0$:*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t), \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{1.2.3}$$

Ecuaţia diferenţială (1.2.3) se numeşte *ecuaţia diferenţială* (*generalizată*) *Loewner* asociată lui h.

Graham şi Kohr [50] au demonstrat că pentru orice lanţ Loewner f avem că $f(z,\cdot)$ este local Lipschitz pe $[0,\infty)$, local uniform în raport cu $z \in \mathbb{B}^n$. Ţinând cont şi de lucrările Curt, Kohr [28, 29], Graham, Hamada, Kohr [41] (a se vedea şi [51]), avem următoarea teoremă care arată că orice lanţ Loewner satisface o ecuaţie diferenţială Loewner şi oferă o caracterizare a lanţurilor Loewner normale. Aplicaţii ale lanţurilor Loewner în mai multe dimensiuni pot fi găsite şi în [27].

Teorema 1.2.14. *Fie $f : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ un lanţ Loewner. Atunci $f(z,\cdot)$ is local Lipschitz continuă pe $[0,\infty)$ local uniform în raport cu $z \in \mathbb{B}^n$ şi există $h : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ ce satisface condiţiile (i) şi (ii) din Teorema* 1.2.12 *astfel încât , pentru aproape orice $t \geq 0$, avem:*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t), \text{ oricare ar fi } z \in \mathbb{B}^n.$$

Mai mult, dacă f este un lanţ Loewner normal, atunci $f(z,s) = \lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t)$, local uniform în raport cu $z \in \mathbb{B}^n$, oricare ar fi $s \geq 0$, unde $v(z,s,\cdot)$ este unica soluţie local absolut continuă a ecuaţiei diferenţiale Loewner (1.2.1) *asociată lui h pe $[s,\infty)$ cu condiţia iniţială $v(z,s,s) = z$.*

Observaţia 1.2.15. Câmpul vectorial Herglotz h din Teorema 1.2.14 este esenţial unic în următorul sens: dacă k este un alt câmp vectorial Herglotz astfel încât f satisface ecuaţia diferenţială Loewner (1.2.3) asociată lui k, atunci $h(\cdot,t) = k(\cdot,t)$, a.p.t. $t \geq 0$ (a se vedea [8], [50]).

Teoremele 1.2.12 şi 1.2.14 implică următoarea teoremă de creştere pentru lanţuri Loewner normale (a se vedea [29], [50], [51]).

Teorema 1.2.16. *Fie $f : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ un lanţ Loewner normal. Atunci*

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leq e^{-t}\|f(z,t)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}, \quad z \in \mathbb{B}^n,\ t \geq 0.$$

Ca o consecinţă a Teoremei 1.2.16, avem următoarea observaţie (a se vedea [52]).

Observaţia 1.2.17. Dacă $f : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ este un lanţ Loewner normal, atunci $\bigcup_{t\geq 0} f(\mathbb{B}^n,t) = \mathbb{C}^n$.

În continuare, arătăm cum se poate genera un lanţ Loewner, rezolvând o ecuaţie diferenţială Loewner. Mai mult, vom evidenţia caracterizarea lanţurilor Loewner cu lanţuri Loewner normale şi aplicaţii univalente întregi. Pentru aceasta, considerăm întâi următoarea definiţie (a se vedea [52], [34], [8], [18]).

Definiţia 1.2.18. O aplicaţie $f : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ se numeşte soluţie standard a ecuaţiei diferenţiale Loewner (1.2.3) asociată câmpului vectorial Herglotz h dacă $f(0,t) = 0$, oricare ar fi $t \geq 0$, $f(z,\cdot)$ este local absolut continuă pe $[0,\infty)$ local uniform în raport cu $z \in \mathbb{B}^n$ şi f satisface ecuaţia diferenţială (1.2.3) asociată lui h.

O aplicaţie $f : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ se numeşte soluţie univalentă normată a ecuaţiei diferenţiale Loewner (1.2.3) asociată unui câmp vectorial Herglotz h dacă f este o soluţie standard a ecuaţiei diferenţiale Loewner (1.2.3) asociată lui h şi $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie în $S(\mathbb{B}^n)$. Dacă, în plus, $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală, atunci f se numeşte soluţie canonică a ecuaţiei diferenţiale Loewner (1.2.3) asociată lui h.

Avem următoarea teoremă importantă datorită lui Pfaltzgraff [75] şi Graham, Hamada, Kohr [41] (a se vedea şi [51], [52]), care, pe baza Teoremelor 1.2.13 şi 1.2.14, implică faptul că noţiunile de lanţ Loewner normal şi soluţie canonică sunt echivalente.

Teorema 1.2.19. *Fie* $h : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ *un câmp vectorial Herglotz. O aplicaţie* $f : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ *este o soluţie canonică a ecuaţiei diferenţiale Loewner* (1.2.3) *asociată lui* h *dacă şi numai dacă* f *este lanţul Loewner normal dat de* (1.2.2)*. În particular, există o unică soluţie canonică a ecuaţiei diferenţiale Loewner* (1.2.3) *asociată lui* h.

Pentru soluţiile standard şi soluţiile univalente normate, avem următoarea caracterizare dată de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [52] (cf. [34]). În ultima subsecţiune, vom considera abordarea abstractă a acestei caracterizări, într-un context foarte general, dată de Arosio, Bracci, Hamada şi Kohr [8].

Teorema 1.2.20. *Fie* h *un câmp vectorial Herglotz şi* f *soluţia canonică a ecuaţiei diferenţiale Loewner* (1.2.3) *asociată lui* h*. Atunci* $g : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ *este o soluţie standard a ecuaţiei diferenţiale Loewner* (1.2.3) *asociată lui* h *dacă şi numai dacă există o aplicaţie olomorfă* $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *cu* $\Phi(0) = 0$ *astfel încât*

$$g(z,t) = \Phi(f(z,t)), \quad z \in \mathbb{B}^n,\ t \geq 0.$$

În particular, $g : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ *este o soluţie univalentă normată a ecuaţiei diferenţiale Loewner* (1.2.3) *asociată lui* h *dacă şi numai dacă există o aplicaţie univalentă* $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *cu* $\Phi(0) = 0$ *şi* $D\Phi(0) = I_n$ *astfel încât*

$$g(z,t) = \Phi(f(z,t)), \quad z \in \mathbb{B}^n,\ t \geq 0.$$

Pe baza Teoremei 1.2.20, avem următoarea teoremă de caracterizare a lanţurilor Loewner obţinută de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [52] (a se vedea şi [8], [34]; cf. Teorema 1.1.22).

Teorema 1.2.21. *O aplicaţie* $g : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ *este un lanţ Loewner dacă şi numai dacă* g *este o soluţie univalentă normată a ecuaţiei diferenţiale Loewner* (1.2.3) *asociată unui câmp vectorial Herglotz. Mai mult,* g *este un lanţ Loewner dacă şi numai dacă există un unic lanţ Loewner normal şi o unică aplicaţie univalentă* $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *cu* $\Phi(0) = 0$ *şi* $D\Phi(0) = I_n$ *astfel încât*

$$g(z,t) = \Phi(f(z,t)), \quad z \in \mathbb{B}^n,\ t \geq 0.$$

În particular, dacă f *este un lanţ Loewner normal şi* $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *este o aplicaţie univalentă cu* $\Phi(0) = 0$ *şi* $D\Phi(0) = I_n$*, atunci:* $\Phi \circ f$ *este un lanţ Loewner normal dacă şi numai dacă* $\Phi = I_n$.

Folosind Teorema 1.2.21, se poate da uşor un exemplu de lanţ Loewner care nu este normal, aşa cum se poate observa în următorul exemplu (cf. [9], [41], [50]).

Exemplul 1.2.22. Fie $n \geq 2$ şi fie $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un automorphism al lui $\mathbb{C}^n$ astfel încât $\Phi(0) = 0$, $D\Phi(0) = I_n$ şi $\Phi \not\equiv I_n$. De asemenea, fie $F : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ dată de $F(z,t) = \Phi(e^t z)$, $z \in \mathbb{B}^n$, $t \geq 0$. Atunci, pe baza Teoremei 1.2.21, F este un lanţ Loewner care nu este nu lanţ Loewner normal în dimensiune $n \geq 2$.

1.2.3 Reprezentări parametrice pe bila unitate

Familia aplicaţiilor care au reprezentare parametrică a fost considerată întâi de Poreda [80, 81], pe polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$, şi apoi de Kohr [68], pe bila Euclidiană unitate. De fapt, Kohr [68] (a se vedea şi [41]) a considerat familia mai generală a aplicaţiilor care au g-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$. Graham, Hamada şi Kohr [41] au considerat cazul unei norme arbitrare.

Definiţia 1.2.23. O aplicaţie $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ are reprezentare parametrică dacă există un câmp vectorial Herglotz $h : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ astfel încât :

(*i*) $h(\cdot,t) \in \mathcal{M}$, oricare ar fi $t \geq 0$,

(ii) $h(z,\cdot)$ este măsurabilă pe $[0,\infty)$, oricare ar fi $z\in\mathbb{B}^n$,
şi

$$f=\lim_{t\to\infty} e^t v(\cdot,t),\ \text{ local uniform pe } \mathbb{B}^n,$$

unde, pentru orice $z\in\mathbb{B}^n$, $v(z,\cdot)$ is unica soluţie local absolut continuă pe $[0,\infty)$ a ecuaţiei diferenţiale Loewner asociată lui h:

$$\frac{dv}{dt}=-h(v,t),\ \text{ a.p.t. } t\geq 0,$$

cu condiţia iniţială $v(z,0)=z$.

Notăm cu $S^0(\mathbb{B}^n)$ familia aplicaţiilor care au reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$.

Deşi familia $S^0(\mathbb{B}^n)$ este o submulţime proprie a lui $S(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea [41], [50]; cf. [80]; a se vedea şi Exemplul 1.2.33), familia $S^0(\mathbb{B}^n)$ reprezintă o generalizare naturală în mai multe dimensiuni a clasei S, a funcţiilor univalente normate pe discul unitate. În continuare, vom vedea câteva asemănări între clasa S şi familia $S^0(\mathbb{B}^n)$. Menţionăm că, pe baza Teoremei 1.1.25, avem $S^0(\mathbb{U})=S$.

Având în vedere subsecţiunea anterioară, avem următoarea caracterizare a familiei $S^0(\mathbb{B}^n)$, cu lanţuri Loewner normale, dată de Graham, Kohr şi Kohr [51] (a se vedea şi [41], [50]). Poreda [81] a obţinut acest rezultat pentru polidisc, impunând anumite condiţii suplimentare.

Teorema 1.2.24. *Fie $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{C}^n$. Atunci $f\in S^0(\mathbb{B}^n)$ dacă şi numai dacă există un lanţ Loewner normal F astfel încât $F(\cdot,0)=f$.*

Pe baza Exemplului 1.2.11, se poate deduce imediat că orice aplicaţie normată stelată este în $S^0(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea [50]; cf. [80]).

Observaţia 1.2.25. $S^*(\mathbb{B}^n)\subset S^0(\mathbb{B}^n)$.

O consecintă a Teoremelor 1.2.16 şi 1.2.24 este următoarea teoremă de creştere pentru aplicaţiile din $S^0(\mathbb{B}^n)$ obţinută de Graham, Hamada şi Kohr [41] (a se vedea şi [68]; a se vedea Poreda [80], pentru cazul polidiscului). Barnard, FitzGerald şi Gong [11] au obţinut aceeaşi teoremă de creştere pentru familia $S^*(\mathbb{B}^n)$, folosind caracterizarea analitică a stelarităţii pe $\mathbb{B}^n$ (cf. [22]).

Teorema 1.2.26. *Fie $f\in S^0(\mathbb{B}^n)$. Atunci următoarele inegalităţi exacte au loc:*

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2}\leq\|f(z)\|\leq\frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2},\quad z\in\mathbb{B}^n.$$

În particular, $\mathbb{B}^n_{1/4}\subseteq f(\mathbb{B}^n)$.

Graham, Kohr şi Kohr [51] au demonstrat compactitatea familiei $S^0(\mathbb{B}^n)$.

Teorema 1.2.27. *$S^0(\mathbb{B}^n)$ este o submulţime compactă a lui $H(\mathbb{B}^n)$.*

Având în vedere teorema precedentă, se pot considera diverse probleme extremale pentru familia $S^0(\mathbb{B}^n)$. Problema aflării celor mai bune estimări pentru coeficienţii aplicaţiilor care au reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ pare a fi mult mai complicată pentru $n\geq 2$ (a se vedea [41], [50]). Următoarele estimări de coeficienţi au fost obţinute de Graham, Hamada şi Kohr [41] (a se vedea şi [50], [68]). Rezultatul corespunzător lui (1.2.4) în cazul polidiscului a fost obţinut de Poreda [80]. Menţionăm că Graham, Hamada şi Kohr [41] au formulat versiunea n-dimensională a conjecturii lui Bieberbach (a se vedea also [50]; cf. [39]).

Teorema 1.2.28. *Fie $f\in S^0(\mathbb{B}^n)$. Atunci următoarele inegalităţi exacte au loc:*

$$\left|\frac{1}{2}\left\langle D^2f(0)(w^2),w\right\rangle\right|\leq 2,\quad w\in\mathbb{C}^n,\ \|w\|=1. \tag{1.2.4}$$

De asemenea, următoarele inegalităţi au loc:

$$\left\| \frac{1}{2} D^2 f(0)(w^2) \right\| \leq 8, \quad w \in \mathbb{C}^n,\ \|w\| = 1.$$

Având în vedere rezultatele lui Kirwan [66] şi Pell [74] (a se vedea Teorema 1.1.23), Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [53] au considerat anumite proprietăţi extremale asociate unor familii compacte de aplicaţii univalente pe $\mathbb{B}^n$, $n \geq 2$, generate de lanţuri Loewner normale. Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [46] au generalizat Teorema 1.1.23 (i) (cf. [21]). Schleißinger [93] a demonstrat generalizarea Teoremei 1.1.23 (ii), folosind anumite idei bazate pe proprietăţile perechilor Runge în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea şi [46] pentru rezultate parţiale; cf. [21]).

Teorema 1.2.29. *Fie f un lanţ Loewner normal.*

(i) Dacă $f(\cdot, 0) \in \operatorname{ex} S^0(\mathbb{B}^n)$, atunci $e^{-t} f(\cdot, t) \in \operatorname{ex} S^0(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq 0$.

(ii) Dacă $f(\cdot, 0) \in \operatorname{supp} S^0(\mathbb{B}^n)$, atunci $e^{-t} f(\cdot, t) \in \operatorname{supp} S^0(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq 0$.

Observaţia 1.2.30. Condiţia ca f sa fie un lanţ Loewner normal în teorema precedentă este esenţială, având în vedere următorul fapt: dacă f este un lanţ Loewner normal, atunci $e^{-t} f(\cdot, t) \in S^0(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq 0$ (a se vedea [46]).

În legătură cu Exemplul 1.2.7, prezentăm un exemplu de aplicaţie stelată care este un punct suport al lui $S^0(\mathbb{B}^n)$, dar care nu este un punct extremal al lui $S^0(\mathbb{B}^n)$ pentru $n = 2$, obţinut de Graham, Hamada, Kohr, Kohr [48] şi Voda [96].

Exemplul 1.2.31. Fie $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ dată de $f(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{(1 - z_1)^2}, \frac{z_2}{(1 - z_2)^2} \right)$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$. Atunci $f \in S^*(\mathbb{B}^2)$ şi $f \in \operatorname{supp} S^0(\mathbb{B}^2) \setminus \operatorname{ex} S^0(\mathbb{B}^2)$.

Ţinând cont de Exemplul 1.1.10, observăm că, în ciuda faptului că aplicaţia de mai sus nu este un punct extremal al lui $S^0(\mathbb{B}^2)$, fiecare componentă a aplicaţiei este un punct extremal al clasei S (a se vedea [48]).

La fel ca în cazul unidimensional, se poate folosi teoria controlului optimal pentru a studia probleme extremale asociate unor familii de aplicaţii cu reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [46]). Un rezultat relevant în această direcţie este principiul de maxim de tip Pontryagin pentru ecuaţia diferenţială Loewner în mai multe dimensiuni obţinut de Roth [92]. Prezentăm o consecintă a acestui rezultat, dată de Roth [92], care oferă o condiţie necesară pentru ca primul element al unui lanţ Loewner normal să fie un punct suport al lui $S^0(\mathbb{B}^n)$. Acest rezultat îmbunănăţeşte un rezultat asociat obţinut de Bracci, Graham, Hamada, Kohr [18].

Teorema 1.2.32. *Fie f un lanţ Loewner normal astfel încât $f(\cdot, 0) \in \operatorname{supp} S^0(\mathbb{B}^n)$. Atunci*

$$\inf_{z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}} \Re \left\langle \left[Df(z, t) \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial t}(z, t), \frac{z}{\|z\|^2} \right\rangle = 0, \ \text{a.p.t. } t \geq 0.$$

Încheiem această subsecţiune cu un exemplu de aplicaţie care pune în evidenţă diferenţe importante dintre cazul unei variabile complexe şi cel al mai multor dimensiuni (a se vedea [15], [41], [50]). În particular, prezentăm exemplul de punct suport mărginit al lui $S^0(\mathbb{B}^2)$ obţinut de Bracci [15].

Exemplul 1.2.33. Considerăm din nou Exemplul 1.2.9. Fie $n = 2$ şi $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ dată de

$$f(z) = \left(z_1 + a z_2^2, z_2 \right), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2,$$

unde $a \in \mathbb{C}$. Atunci:

(*i*) Pentru orice $a \in \mathbb{C}$, avem $f \in S(\mathbb{B}^2)$. Deoarece valoarea absolută a lui a poate fi aleasă oricât de mare, avem că $S(\mathbb{B}^2)$ nu este o familie normală (a se vedea [41], [50]). Deci, pe baza Teoremei 1.2.27, $S^0(\mathbb{B}^2)$ este o submulţime proprie a lui $S(\mathbb{B}^2)$.

(*ii*) Graham, Hamada şi Kohr [41] au punctat încă o diferenţă între cazul unidimensional (cf. Teorema 1.1.13) şi cel al mai multor dimensiuni: dacă $|a| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, atunci $f \in S^0(\mathbb{B}^2)$ şi

$$\left\|\frac{1}{2}D^2 f(0)(w^2)\right\| = |a| = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 2, \quad w \in \mathbb{C}^2,\ \|w\| = 1.$$

Mai mult, aceasta este în contrast şi cu estimarea corespunzătoare cazului polidiscului, obţinută de Poreda [80].

(*iii*) Bracci [15] a demonstrat că: $f \in S^0(\mathbb{B}^2)$ dacă şi numai dacă $|a| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Deci, ţinând cont de Exemplul 1.2.9, $f \in S^0(\mathbb{B}^2)$ dacă şi numai dacă $f \in S^*(\mathbb{B}^2)$. Mai mult, Bracci [15] a demonstrat că: dacă $a = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, atunci f este un punct suport mărginit al lui $S^0(\mathbb{B}^2)$, în raport cu funcţionala liniară continuă $L : H(\mathbb{B}^2) \to \mathbb{C}$ dată de $L(g) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial z_2^2}(0,0)$, $g = (g_1, g_2) \in H(\mathbb{B}^2)$.

1.2.4 A-reprezentări parametrice pe bila unitate

În această subsecţiune, prezentăm câteva rezultate obţinute de Graham, Hamada, Kohr, Kohr [44] şi Duren, Graham, Hamada, Kohr [34], care generalizează anumite rezultate din secţiunea precedentă. De asemenea, ne referim la rezultate care evidenţiază anumite proprietăţi extremale (a se vedea [48], [49]). Pe de altă parte, menţionăm şi contribuţiile lui Arosio [4, 5] şi Voda [96, 97].

Considerăm următoarele notaţii referitoare la un operator $A \in L(\mathbb{C}^n)$ (a se vedea e.g. [36]):

$$\begin{aligned} m(A) &= \min\{\Re\langle A(z), z\rangle \big|\, \|z\| = 1\},\\ k(A) &= \max\{\Re\langle A(z), z\rangle \big|\, \|z\| = 1\},\\ |V(A)| &= \max\{|\langle A(z), z\rangle| \big|\, \|z\| = 1\},\\ k_+(A) &= \max\{\Re\lambda \big|\, \lambda \in \sigma(A)\}, \end{aligned}$$

unde $\sigma(A)$ este spectrul lui A. Notăm că $|V(A)|$ este raza numerică a operatorului A, iar $k_+(A)$ este indexul exponenţial superior (indexul Lyapunov) al lui A. Avem $m(A) \leq k_+(A) \leq |V(A)| \leq \|A\|$ (a se vedea e.g. [48]), $\|A\| \leq 2|V(A)|$ şi $k_+(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log\|e^{tA}\|}{t}$ (a se vedea e.g. [31], [36]).

Mai întâi, vom considera anumite generalizări ale clasei Carathéodory $\mathcal{P}$, în cazul mai multor variabile complexe, asociate cu familia Carathéodory $\mathcal{M}$ (a se vedea [54], [95]).

Definiţia 1.2.34. Notăm:

$$\mathcal{N} = \left\{h \in H(\mathbb{B}^n) \big|\, h(0) = 0,\ \Re\langle h(z), z\rangle \geq 0,\ z \in \mathbb{B}^n\right\}$$

Dacă $A \in L(\mathbb{C}^n)$ este astfel încât $m(A) \geq 0$, atunci notăm:

$$\mathcal{N}_A = \left\{h \in \mathcal{N} \big|\, Dh(0) = A\right\}.$$

Observăm că familia Carathéodory $\mathcal{M}$ coincide cu $\mathcal{N}_{I_n}$.

Avem următorul rezultat de compactitate obţinut de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [44].

Teorema 1.2.35. *Fie $A \in L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A) \geq 0$. Atunci $\mathcal{N}_A$ este o submulţime compactă a lui $H(\mathbb{B}^n)$.*

Familia $\mathcal{N}_A$ este utilă în caracterizarea aplicaţiilor spiralate normate pe $\mathbb{B}^n$ în raport cu A, unde $A \in L(\mathbb{C}^n)$ cu $m(A) > 0$ (a se vedea [50], [54], [95]). În continuare, prezentăm definiţia aplicaţiilor spiralate pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [95]).

Definiţia 1.2.36. Fie $A \in L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A) > 0$. O aplicaţie $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ se numeşte spiralată în raport cu A dacă f este o aplicaţie univalentă pe $\mathbb{B}^n$ cu $f(0) = 0$ şi $f(\mathbb{B}^n)$ este un domeniu spiralat în raport cu A, i.e. $e^{-tA}f(\mathbb{B}^n) \subseteq f(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq 0$.

Notăm cu $\widehat{S}_A(\mathbb{B}^n)$ familia de aplicaţii univalente normate pe $\mathbb{B}^n$ care sunt spiralate în raport cu A.

Graham, Hamada şi Kohr [41] au dat următorul exemplu de aplicaţie spiralată pe bila unitate în $\mathbb{C}^2$ care nu are reprezentare parametrică (a se vedea şi [44], [50]).

Exemplul 1.2.37. Considerăm Exemplul 1.2.33. Fie $n = 2$ şi $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ dată de

$$f(z) = \big(z_1 + az_2^2, z_2\big), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2,$$

unde $a \in \mathbb{C}$. f este spiralată în raport cu operatorul $A \in L(\mathbb{C}^2)$ dat de $A(z_1, z_2) = (2z_1, z_2)$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, dar dacă valoarea absolută a lui a este suficient de mare, atunci f nu are reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^2$.

Acest exemplu oferă una din motivaţiile de a studia A-reprezentările parametrice introduse de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [44]. În cele ce urmează, considerăm definiţia unei aplicaţii care are A-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$.

Definiţia 1.2.38. Fie $A \in L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A) > 0$. O aplicaţie $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ are A-reprezentare parametrică dacă există $h : \mathbb{B}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ astfel încât :

(*i*) $h(\cdot, t) \in \mathcal{N}_A$, oricare ar fi $t \geq 0$,

(*ii*) $h(z, \cdot)$ este măsurabilă pe $[0, \infty)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$,
şi

$$f = \lim_{t\to\infty} e^{tA}v(\cdot, t), \text{ local uniform pe } \mathbb{B}^n, \tag{1.2.5}$$

unde, pentru orice $z \in \mathbb{B}^n$, $v(z, \cdot)$ este unica soluţie local absolut continuă pe $[0, \infty)$ a ecuaţiei diferenţiale Loewner asociată lui h:

$$\frac{dv}{dt} = -h(v, t), \text{ a.p.t. } t \geq 0, \tag{1.2.6}$$

cu condiţia iniţială $v(z, 0) = z$.

Notăm cu $S_A^0(\mathbb{B}^n)$ familia aplicaţiilor care au A-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$.

Menţionăm că, în general, limita (1.2.5) s-ar putea să nu existe, aşa cum arată următorul exemplu (a se vedea [97, Example 3.7]; cf. [4]).

Exemplul 1.2.39. Fie $n = 2$ şi fie $h : \mathbb{B}^2 \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^2$ dată de

$$h(z, t) = (\lambda z_1 + a(t)z_2^2, z_2), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2,\ t \geq 0, \tag{1.2.7}$$

unde $\lambda \in \mathbb{C}$ este astfel încât $\Re\lambda \geq 2$, $a : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ este măsurabilă şi $|a(t)| \leq 1$, $t \geq 0$. Atunci h satisface condiţiile (*i*) şi (*ii*) din Definiţia 1.2.38, în raport cu $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, şi, pentru orice $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$, $v(z, \cdot)$ dată de

$$v(z, t) = \bigg(e^{-\lambda t}\Big(z_1 - \Big(\int_0^t a(s)\, ds\Big) z_2^2\Big), e^{-t}z_2\bigg), \quad t \geq 0, \tag{1.2.8}$$

este unica soluţie local absolut continuă pe $[0, \infty)$ a ecuaţiei diferenţiale Loewner (1.2.6) asociată lui h.

Acum, fixăm $\lambda = 2$ şi $a(t) = \cos(t)$, $t \geq 0$. Atunci observăm că $e^{tA}v(z, t) = \big(z_1 - \sin(t)z_2^2, z_2\big)$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$, $t \geq 0$, şi deci limita (1.2.5) nu există, în acest caz.

Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [44] au găsit o condiţie suficientă pentru $A \in L(\mathbb{C}^n)$, anume $k_+(A) < 2m(A)$, astfel încât limita (1.2.5) să existe întotdeauna, iar apoi au caracterizat familia $S_A^0(\mathbb{B}^n)$. În cele ce urmează, vom prezenta aceste rezultate. Pentru aceasta, considerăm definiţia lanţurilor de subordonare univalente A-normate, unde $A \in L(\mathbb{C}^n)$ (a se vedea [34], [44], [48]).

Definiţia 1.2.40. Fie $A \in L(\mathbb{C}^n)$. Un lanţ de subordonare univalent f se numeşte A-normat dacă $Df(0,t) = e^{tA}$, oricare ar fi $t \geq 0$.

Un exemplu simplu de lanţ univalent A-normat, unde $A \in L(\mathbb{C}^n)$ cu $m(A) > 0$, poate fi dat pornind de la o aplicaţie spiralată în raport cu A (a se vedea [44]).

Exemplul 1.2.41. Fie $A \in L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A) > 0$ şi $f \in S(\mathbb{B}^n)$. Atunci $f \in \widehat{S}_A(\mathbb{B}^n)$ dacă şi numai dacă aplicaţia $F : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ dată de $F(z,t) = e^{tA}f(z)$, $z \in \mathbb{B}^n$, $t \geq 0$, este un lanţ de subordonare univalent A-normat.

Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [44] au caracterizat familia $S_A^0(\mathbb{B}^n)$, pentru $A \in L(\mathbb{C}^n)$ cu $k_+(A) < 2m(A)$, cu lanţuri de subordonare univalente A-normate.

Teorema 1.2.42. *Fie $A \in L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $k_+(A) < 2m(A)$. Dacă $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$, atunci $f \in S_A^0(\mathbb{B}^n)$ dacă şi numai dacă există un lanţ de subordonare univalent A-normat F astfel încât $\{e^{-tA}F(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală şi $F(\cdot,0) = f$.*

De asemenea, autorii lucrării [44] au demonstrat compactitatea familiei $S_A^0(\mathbb{B}^n)$, pentru $A \in L(\mathbb{C}^n)$ cu $k_+(A) < 2m(A)$.

Teorema 1.2.43. *Fie $A \in L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $k_+(A) < 2m(A)$. Atunci $S_A^0(\mathbb{B}^n)$ este o submulţime compactă a lui $H(\mathbb{B}^n)$.*

Având în vedere Teorema 1.2.43, menţionăm că Voda a dat un exemplu [97, Example 3.7] (a se vedea şi [4]) care arată că în absenţa condiţiei $k_+(A) < 2m(A)$ pentru $A \in L(\mathbb{C}^n)$, familia $S_A^0(\mathbb{B}^n)$ nu este în mod necesar compactă.

Menţionăm că majoritatea rezultatelor din Subsecţiunea 1.2.2 rămân valabile pentru lanţuri de subordonare univalente A-normate, unde $A \in L(\mathbb{C}^n)$ cu $k_+(A) < 2m(A)$ (a se vedea [34], [44]). Totuşi, evidenţiem un exemplu, dat de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [49], de aplicaţie care are A-reprezentare parametrică pentru un $A \in L(\mathbb{C}^2)$ cu $k_+(A) < 2m(A)$, dar care nu are reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^2$. Mai mult, acest exemplu arată existenţa unui punct suport mărginit al famliei $S_A^0(\mathbb{B}^2)$ (cf. [15]; a se vedea Exemplul 1.2.33).

Exemplul 1.2.44. Fie $\lambda \in (1,2)$ şi $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Fie $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ dată de

$$f(z) = \Big(z_1 + \frac{a_0}{\lambda - 2} z_2^2, z_2\Big), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2,$$

unde $a_0 = \max\Big\{a > 0 \Big| \, \lambda x^2 + y^2 - axy^2 \geq 0, x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\Big\}$. Atunci $k_+(A) < 2m(A)$ şi $f \in S_A^0(\mathbb{B}^2) \setminus S^0(\mathbb{B}^2)$. Mai mult, $f \in \operatorname{supp} S_A^0(\mathbb{B}^2)$.

Deoarece familia $S_A^0(\mathbb{B}^n)$ este compactă pentru $A \in L(\mathbb{C}^n)$ cu $k_+(A) < 2m(A)$, se pot studia diverse probleme extremale asociate. Pentru un studiu bazat pe teoria controlului optimal, ne referim la [48, 49]. În Capitolul 3, ne vom concentra asupra acestui studiu. Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [48] au obţinut următoarea generalizare a Teoremei 1.2.29.

Teorema 1.2.45. *Fie $A \in L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $k_+(A) < 2m(A)$ şi fie f un lanţ de subordonare univalent A-normat astfel încât $\{e^{-tA}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală.*

(i) Dacă $f(\cdot,0) \in \operatorname{ex} S_A^0(\mathbb{B}^n)$, atunci $e^{-tA}f(\cdot,t) \in \operatorname{ex} S_A^0(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq 0$.

(ii) Dacă $f(\cdot,0) \in \operatorname{supp} S_A^0(\mathbb{B}^n)$, atunci $e^{-tA}f(\cdot,t) \in \operatorname{supp} S_A^0(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq 0$.

Observaţia 1.2.46. Fie $A \in L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $k_+(A) < 2m(A)$. În legătură cu Remarca 1.2.30, observăm că: dacă f este lanţ de subordonare univalent A-normat astfel încât $\{e^{-tA}f(\cdot, t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală, atunci $e^{-tA}f(\cdot, t) \in S_A^0(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq 0$ (a se vedea [48]).

Unele dintre rezultatele prezentate în acest capitol au fost extinse la spaţii complexe Banach reflexive, de către Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [47]. Pentru un studiu general al lanţurilor de subordonare univalente A-normate pentru $A \in L(\mathbb{C}^n)$ cu $m(A) > 0$, ne referim la lucrarea lui Poreda [82] şi la lucrările mai recente ale lui Arosio [4, 5] şi Voda [96, 97] (a se vedea şi [57]). Cazul general al normării dependente de timp a lanţurilor de subordonare univalente în $\mathbb{C}^n$ a fost considerat mai întâi de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [45] (a se vedea şi [42]), iar apoi de Arosio [6] şi Voda [96]. Vom considera acest caz în ultimul capitol. Pe de altă parte, menţionăm metoda topologică a lui Cristea [25, 26], referitoare la teoria lanţurilor Loewner pentru aplicaţii care nu sunt în mod necesar olomorfe.

1.2.5 L^d-lanţuri Loewner

În această subsecţiune, considerăm abordarea recentă a teoriei lanţurilor Loewner în mai multe dimensiuni, dată de Bracci, Contreras, Diaz-Madrigal [17], Arosio, Bracci, Hamada, Kohr [8], Arosio, Bracci, Wold [10] (a se vedea şi [4], [5], [7], [60]), care nu se bazează pe nicio normare. Mai mult, acest studiu a fost dezvoltat pe varietăţi complexe hiperbolice complete, dar, pentru simplitate şi pentru scopul acestei expuneri, considerăm în această subsecţiune numai cazul bilei Euclidiene unitate $\mathbb{B}^n$ în $\mathbb{C}^n$. Mai exact, ne concentrăm asupra lucrării Arosio, Bracci şi Wold [10], în care autorii adună mai multe rezultate în acestă direcţie şi obţin noi proprietăţi interesante care s-au dovedit a fi foarte utile chiar şi în cazul unor normări particulare ale lanţurilor de subordonare univalente.

Principalele noţiuni pe care le considerăm în această subsecţiune au fost introduse şi studiate întâi în cazul unei variabile complexe de către Bracci, Contreras, Díaz-Madrigal [16] (*L^d-familie de evoluţie* şi *L^d-câmp vectorial Herglotz*) şi de către Contreras, Díaz-Madrigal, Gumenyuk [23] (*L^d-lanţ Loewner*) şi apoi generalizate la mai multe dimensiuni de către Bracci, Contreras, Díaz-Madrigal [17] şi Arosio, Bracci, Hamada, Kohr [8].

În cele ce urmează, pentru orice $d \in [1, \infty]$ şi $T > 0$, notăm cu $L^d([0, T])$ spaţiul Lebesgue corespunzător de funcţii reale.

Începem cu definiţia L^d-familiilor de evoluţie (sau familiilor de evoluţie de ordin d) pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [17]; cf. [7], [8], [10]).

Definiţia 1.2.47. Fie $d \in [1, \infty]$. O familie $(\varphi_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ de aplicaţii olomorfe definite pe $\mathbb{B}^n$ cu valori în $\mathbb{B}^n$ este o L^d-familie de evoluţie pe $\mathbb{B}^n$ dacă:

(i) $\varphi_{s,s} = \mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}$, oricare ar fi $s \geq 0$,

(ii) $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$, oricare ar fi $0 \leq s \leq u \leq t$,

(iii) pentru orice submulţime compactă $K \subset \mathbb{B}^n$ şi $T > 0$, există $c_{K,T} \in L^d([0, T])$ astfel încât

$$\left\|\varphi_{s,t}(z) - \varphi_{s,u}(z)\right\| \leq \int_u^t c_{K,T}(\tau)\, d\tau, \quad \text{oricare ar fi } z \in K,\ 0 \leq s \leq u \leq t \leq T.$$

Prezentăm un exemplu simplu de L^d-familie de evoluţie pe $\mathbb{B}^n$, folosind o *aplicaţie cu imaginea stelată* pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [8]; cf. [16]). O aplicaţie $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ se numeşte aplicaţie cu imaginea stelată dacă F este univalentă şi $e^{-t}F(z) \in F(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$ şi $t \geq 0$ (a se vedea [8]; cf. [36]). În acest caz, $0 \in \overline{F(\mathbb{B}^n)}$.

Exemplul 1.2.48. Fie $d \in [1, \infty]$ şi fie $\lambda : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie măsurabilă astfel încât $\lambda\big|_{[0,T]} \in L^d([0, T])$, oricare ar fi $T > 0$. De asemenea, fie $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie cu imaginea stelată şi fie $\varphi_{s,t}(z) = F^{-1}\Big(e^{-\int_s^t \lambda(\tau)d\tau}F(z)\Big)$, pentru $0 \leq s \leq t$ şi $z \in \mathbb{B}^n$. Atunci $(\varphi_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ este o L^d-familie de evoluţie pe $\mathbb{B}^n$.

Menţionăm faptul că orice aplicaţie dintr-o L^d-familie de evoluţie pe $\mathbb{B}^n$ este univalentă (a se vedea [17]; a se vedea şi [8], [10]).

Observaţia 1.2.49. Fie $d \in [1, \infty]$ şi fie $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ o L^d-familie de evoluţie pe $\mathbb{B}^n$. Atunci $\varphi_{s,t}$ este o aplicaţie univalentă, oricare ar fi $0 \le s \le t$.

Considerăm acum definiţia L^d-lanţurilor Loewner (sau lanţurilor Loewner de ordin d) pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [8]; cf. [10], [60]).

Definiţia 1.2.50. Fie $d \in [1, \infty]$. O familie $(f_t)_{t\ge 0}$ de aplicaţii univalente de la $\mathbb{B}^n$ la $\mathbb{C}^n$ se numeşte L^d-lanţ Loewner pe $\mathbb{B}^n$ dacă:

(i) $f_s(\mathbb{B}^n) \subseteq f_t(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $0 \le s \le t$,

(ii) pentru orice submulţime compactă $K \subset \mathbb{B}^n$ şi $T > 0$, există $c_{K,T} \in L^d([0, T])$ astfel încât

$$\left\|f_s(z) - f_t(z)\right\| \le \int_s^t c_{K,T}(\tau)\, d\tau,, \qquad \text{oricare ar fi } z \in K,\ 0 \le s \le t \le T.$$

Vom folosi următoarea notaţie: $R(f_t) := \bigcup_{t\ge 0} f_t(\mathbb{B}^n)$. Această mulţime se numeşte imaginea Loewner a L^d-lanţului Loewner $(f_t)_{t\ge 0}$.

În legătură cu Exemplul 1.2.48, prezentăm un exemplu de L^d-lanţ Loewner pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [8]).

Exemplul 1.2.51. Fie $d \in [1, \infty]$ şi fie $\lambda : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie măsurabilă astfel încât $\lambda\big|_{[0,T]} \in L^d([0, T])$, oricare ar fi $T > 0$. Fie $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie cu imaginea stelată şi fie $f_t(z) = e^{\int_0^t \lambda(\tau)d\tau} F(z)$, pentru $t \ge 0$ şi $z \in \mathbb{B}^n$. Atunci $(f_t)_{t\ge 0}$ este un L^d-lanţ Loewner pe $\mathbb{B}^n$.

O conexiune între L^d-familiile de evoluţie şi L^d-lanţurile Loewner este dată de următoarea teoremă (a se vedea [10]; cf. [17], [60]).

Teorema 1.2.52. *Fie $d \in [1, \infty]$. Dacă $(f_t)_{t\ge 0}$ este un L^d-lanţ Loewner pe $\mathbb{B}^n$ şi $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ este familia dată de $\varphi_{s,t} = f_t^{-1} \circ f_s$, $0 \le s \le t$, atunci $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ este o L^d-familie evoluţie pe $\mathbb{B}^n$. Reciproc, dacă $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ este o L^d-familie evoluţie pe $\mathbb{B}^n$ şi $(f_t)_{t\ge 0}$ este o familie aplicaţii univalente de la $\mathbb{B}^n$ la $\mathbb{C}^n$ astfel încât $\varphi_{s,t} = f_t^{-1} \circ f_s$, $0 \le s \le t$, atunci $(f_t)_{t\ge 0}$ este un L^d-lanţ Loewner.*

Spunem că un L^d-lanţ Loewner $(f_t)_{t\ge 0}$ şi o L^d-familie de evoluţie $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ sunt asociate dacă $f_s = f_t \circ \varphi_{s,t}$, $0 \le s \le t$ (a se vedea [8], [60]).

Prezentăm acum definiţia L^d-câmpurilor vectoriale Herglotz (sau câmpurilor vectoriale Herglotz de ordin d) pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [17]; cf. [7], [8], [10]).

Definiţia 1.2.53. Fie $d \in [1, \infty]$. O aplicaţie $G : \mathbb{B}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ se numeşte L^d-câmp vectorial Herglotz pe $\mathbb{B}^n$ dacă:

(i) $G(z, \cdot)$ este măsurabilă, oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$,

(ii) $G(\cdot, t)$ este olomorfă pe $\mathbb{B}^n$, a.p.t. $t \ge 0$,

(iii) pentru orice submulţime $K \subset \mathbb{B}^n$ şi $T > 0$, există $C_{K,T} \in L^d([0, T])$ astfel încât

$$\left\|G(z, t)\right\| \le C_{K,T}(t), \qquad \text{oricare ar fi } z \in K, \text{ a.p.t. } t \in [0, T],$$

(iv) pentru aproape orice $t \ge 0$ fixat, $G(\cdot, t)$ este un generator infinitezimal.

O aplicaţie $F \in H(\mathbb{B}^n)$ este un generator infinitezimal dacă problema Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau}(\tau) = F(x(\tau)), & \text{a.p.t. } \tau \in [0, \infty) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admite o soluţie local absolut continuă $x : [0, \infty) \to \mathbb{B}^n$, oricare ar fi $x_0 \in \mathbb{B}^n$ (a se vedea e.g. [86]).

Legătura dintre L^d-familiile de evoluţie şi L^d-câmpurile vectoriale Herglotz este dată de următoarea teoremă (a se vedea [17]; cf. [7], [10], [60]).

Teorema 1.2.54. *Fie $d \in [1,\infty]$. Atunci, pentru orice L^d-câmp vectorial Herglotz G pe $\mathbb{B}^n$, există o unică L^d-familie de evoluţie $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ pe $\mathbb{B}^n$ astfel încât , oricare ar fi $s \ge 0$, există o mulţime de măsură nulă $E_s \subset [s,\infty)$ astfel încât*

$$\frac{\partial \varphi_{s,t}}{\partial t}(z) = G(\varphi_{s,t}(z),t), \quad z \in \mathbb{B}^n,\ t \in [s,\infty)\setminus E_s. \tag{1.2.9}$$

Reciproc, pentru orice L^d-familie de evoluţie $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ pe $\mathbb{B}^n$, există un L^d-câmp vectorial Herglotz G pe $\mathbb{B}^n$ astfel încât (1.2.9) *este satisfăcută. Mai mult, dacă H este un alt L^d-câmp vectorial Herglotz G pe $\mathbb{B}^n$ astfel încât* (1.2.9) *asociată lui H este satisfăcută, atunci $G(\cdot,t) = H(\cdot,t)$, a.p.t. $t \ge 0$.*

Ecuaţia(1.2.9) se numeşte *ecuaţia diferenţială ordinară Loewner (generalizată)*, pe scurt EDO Loewner (a se vedea [8], [10]). Teorema 1.2.52 arată că există o corespondenţă bijectivă între L^d-familiile de evoluţie şi L^d-câmpurile vectoriale Herglotz, via EDO Loewner. Spunem că o L^d-familie de evoluţie $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ şi un L^d-câmp vectorial Herglotz G sunt asociate dacă $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ este obţinută prin rezolvarea EDO Loewner (1.2.9) asociată lui G (a se vedea [8], [60]).

Legătura dintre L^d-lanţurile Loewner şi L^d-câmpurile vectoriale Herglotz este dată de următoarea teoremă (a se vedea [8]; cf. [10], [60]).

Teorema 1.2.55. *Fie $d \in [1,\infty]$. Dacă G este un L^d-câmp vectorial Herglotz pe $\mathbb{B}^n$ şi $(f_t)_{t\ge0}$ este o familie de aplicaţii univalente din $H(\mathbb{B}^n)$ astfel încât $t \mapsto f_t(z)$ este local absolut continuă, local uniform în raport cu $z \in \mathbb{B}^n$, şi există o mulţime de măsură nulă $E \subseteq [0,\infty)$ astfel încât*

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(z) = -Df_t(z)G(f_t(z),t), \quad z \in \mathbb{B}^n,\ t \in [0,\infty)\setminus E, \tag{1.2.10}$$

atunci $(f_t)_{t\ge0}$ este un L^d-lanţ Loewner pe $\mathbb{B}^n$. Mai mult, dacă $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ este L^d-familia de evoluţie pe $\mathbb{B}^n$ asociată lui G, atunci $(f_t)_{t\ge0}$ şi $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ sunt asociate.

Reciproc, dacă $(f_t)_{t\ge0}$ este un L^d-lanţ Loewner pe $\mathbb{B}^n$, atunci există un L^d-câmp vectorial Herglotz G astfel încât (1.2.10) *are loc. Mai mult, dacă $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ este L^d-familia de evoluţie pe $\mathbb{B}^n$ asociată lui $(f_t)_{t\ge0}$, atunci $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ şi G sunt asociate.*

Ecuaţia diferenţială (1.2.10) se numeşte *ecuaţia cu derivate parţiale Loewner* (*generalizată*), pe scurt EDP Loewner (a se vedea [8], [10]).

Înainte de a prezenta următorul rezultat, reamintim definiţia perechilor Runge şi a domeniilor Runge în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea e.g. [85]).

Definiţia 1.2.56. Fie $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ două domenii. Atunci (D_1, D_2) este o pereche Runge dacă $\mathcal{O}(D_2)$ este densă în $\mathcal{O}(D_1)$, în raport cu topologia local uniform convergenţei, unde $\mathcal{O}(D_j)$ este familia de funcţii olomorfe pe D_j cu valori în $\mathbb{C}$, pentru $j = 1,2$. Un domeniu $D \subseteq \mathbb{C}^n$ se numeşte Runge dacă $(D,\mathbb{C}^n)$ este o pereche Runge.

În cele ce urmează, prezentăm rezultatul principal al lui Arosio, Bracci şi Wold [10] (cf. [8]), care arată că orice EDP Loewner are o soluţie care este un L^d-lanţ Loewner (cf. Teorema 1.2.20 şi [4], [57], [97]). Mai mult, autorii au punctat proprietăţi importante ale imaginii Loewner.

Teorema 1.2.57. (*a se vedea* [*10*]) *Fie $d \in [1,\infty]$ şi G un L^d-câmp vectorial Herglotz pe $\mathbb{B}^n$. Atunci există un L^d-lanţ Loewner $(f_t)_{t\ge0}$ pe $\mathbb{B}^n$ care satisface EDP Loewner* (1.2.10) *asociată lui G. Mai mult, $R(f_t)$ este un domeniu Runge în $\mathbb{C}^n$ şi pentru orice familie $(g_t)_{t\ge0}$ în $H(\mathbb{B}^n)$ astfel încât $t \mapsto g_t(z)$ este local absolut continuă, local uniform în raport cu $z \in \mathbb{B}^n$, şi care satisface EDP Loewner* (1.2.10) *asociată lui G, există o aplicaţie olomorfă $\Phi : R(f_t) \to \mathbb{C}^n$ astfel încât $g_t = \Phi \circ f_t$, $t \ge 0$. Mai mult, $(g_t)_{t\ge0}$ este un L^d-lanţ Loewner pe $\mathbb{B}^n$ care satisface EDP Loewner* (1.2.10) *asociată lui G dacă şi numai dacă există o aplicaţie univalentă $\Phi : R(f_t) \to \mathbb{C}^n$ astfel încât $g_t = \Phi \circ f_t$, $t \ge 0$.*

Menţionăm că $R(f_t)$ este şi un domeniu Stein, în Teorema 1.2.57 (a se vedea [10]). Pentru definiţie şi diverse caracterizări ale domeniilor Stein, se poate consulta [85].

Pe baza Teoremelor 1.2.52, 1.2.55 şi 1.2.57, avem următoarea observaţie (a se vedea [8], [10]).

Observaţia 1.2.58. Fie $d \in [1, \infty]$. Atunci, pentru orice L^d-familie de evoluţie $(\varphi_{s,t})_{0 \le s \le t}$ pe $\mathbb{B}^n$, există un L^d-lanţ Loewner $(f_t)_{t \ge 0}$ pe $\mathbb{B}^n$ asociat lui $(\varphi_{s,t})_{0 \le s \le t}$. Mai mult, dacă $(g_t)_{t \ge 0}$ este un alt L^d-lanţ Loewner pe $\mathbb{B}^n$ asociat lui $(\varphi_{s,t})_{0 \le s \le t}$, atunci există o aplicaţie univalentă $\Phi : R(f_t) \to \mathbb{C}^n$ astfel încât $g_t = \Phi \circ f_t$, $t \ge 0$.

În legătură cu Teorema 1.2.57, avem următorul rezultat obţinut de Arosio, Bracci şi Wold [10] (cf. [94]).

Teorema 1.2.59. *Fie $d \in [1, \infty]$.*

(i) Dacă $(\varphi_{s,t})_{0 \le s \le t}$ este o L^d-familie de evoluţie pe $\mathbb{B}^n$, atunci $\varphi_{s,t}(\mathbb{B}^n)$ este un domeniu Runge, oricare ar fi $0 \le s \le t$.

(ii) Dacă $(f_t)_{t \ge 0}$ este un L^d-lanţ Loewner pe $\mathbb{B}^n$, atunci $\big(f_s(\mathbb{B}^n), f_t(\mathbb{B}^n)\big)$ este o pereche Runge, oricare ar fi $0 \le s \le t$, şi $\big(f_s(\mathbb{B}^n), R(f_t)\big)$ este o pereche Runge, oricare ar fi $s \ge 0$.

Încheiem această subsecţiune cu următoarea observaţie (a se vedea [8], [10], [60]). Menţionăm că, pe baza acestei observaţii, Teorema 1.2.59 este foarte utilă în studiul unor proprietăţi extremale ale unor lanţuri de subordonare univalente (a se vedea Teoremele 1.2.29 şi 1.2.45; a se vedea şi [93], [48], [49]). Alte aplicaţii vor fi considerate în capitolele următoare.

Observaţia 1.2.60. Ţinând cont de definiţiile prezentate în Subsecţiunea 1.2.2, orice lanţ Loewner în sens uzual este un L^d-lanţ Loewner pe $\mathbb{B}^n$, orice aplicaţie de tranziţie este o L^d-familie de evoluţie pe $\mathbb{B}^n$ şi orice câmp vectorial Herglotz în sens uzual este un L^d-câmp vectorial Herglotz pe $\mathbb{B}^n$, oricare ar fi $d \in [1, \infty]$. Deci, toate rezultatele din această subsecţiune sunt adevărate pentru noţiunile introduse în Subsecţiunea 1.2.2. Mai mult, aceleaşi rezultate sunt adevărate şi pentru noţiunile introduse în Subsecţiunea 1.2.4.

Capitolul 2

Câteva aplicaţii ale variaţiei lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$

În acest capitol, considerăm metoda variaţională obţinută de Bracci, Graham, Hamada şi Kohr [18], ce dă o modalitate de a construi lanţuri Loewner, considerând variaţii ale unor anumite lanţuri Loewner. Vom obţine aplicaţii ale acestei metode, având în vedere anumite familii de aplicaţii univalente normate pe bila unitate. Vom prezenta a priori aceste familii folosind lanţuri Loewner cu imaginea $\mathbb{C}^n$. Pentru prima aplicaţie, avem o proprietate topologică a familiei $S^0(\mathbb{B}^n)$, a aplicaţiilor cu reprezentare parametrică pe bila unitate $\mathbb{B}^n$. Acest rezultat implică imediat, pentru $n \geq 2$, un rezultat principal sugerat de Schleißinger [94], adică, densitatea automorfismelor lui $\mathbb{C}^n$ care au reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$. Apoi, vom da un răspuns parţial la o întrebare pusă de Arosio, Bracci şi Wold [9], demonstrând că orice aplicaţie univalentă normată pe $\mathbb{B}^n$ a cărei imagine este Runge şi care este de clasă C^1 până la frontieră se scufundă într-un lanţ Loewner cu imaginea $\mathbb{C}^n$.

Menţionăm că acest capitol conţine rezultate originale obţinute de către autor în [62], ce sunt prezentate în Secţiunile 2.2 şi 2.3.

2.1 Familii de aplicaţii univalente şi variaţii ale lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$

În această secţiune pregătim terenul pentru rezultatele ce vor urma. Prezentăm anumite familii de aplicaţii univalente normate pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [9], [94]) şi metoda variaţională pentru lanţuri Loewner în $\mathbb{C}^n$ obţinută de Bracci, Graham, Hamada, Kohr [18].

2.1.1 Familii de aplicaţii univalente normate pe bila unitate

În această subsecţiune, considerăm anumite familii de aplicaţii univalente pe $\mathbb{B}^n$ care se scufundă în lanţuri Loewner cu imaginea $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [9], [94]), ce vor fi implicate în rezultatele ce vor urma.

Având în vedere Subsecţiunea 1.2.5, stabilim câteva notaţii pentru acest capitol. Spunem că o familie $(f_t)_{t\geq 0}$ de aplicaţii în $H(\mathbb{B}^n)$ este un lanţ Loewner dacă există un lanţ Loewner $f : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ (a se vedea Definiţia 1.2.10) astfel încât $f(\cdot, t) = f_t$, oricare ar fi $t \geq 0$. Mai mult, dacă, în plus, f este un lanţ Loewner normal, atunci spunem că $(f_t)_{t\geq 0}$ este un lanţ Loewner normal. De asemenea, reamintim că imaginea unui lanţ Loewner $(f_t)_{t\geq 0}$ se notează cu $R(f_t)$ şi este dată de $R(f_t) = \bigcup_{t\geq 0} f_t(\mathbb{B}^n)$.

Spunem că o aplicaţie $f \in S(\mathbb{B}^n)$ se scufundă într-un lanţ Loewner $(f_t)_{t\geq 0}$ dacă $f_0 = f$.

Pe baza Teoremei 1.2.24, avem (a se vedea [41, 50]):

$$S^0(\mathbb{B}^n) = \big\{f \in S(\mathbb{B}^n) \big| \, f \text{ se scufundă într-un lanţ Loewner normal } (f_t)_{t\geq 0}\big\}.$$

În acest capitol, avem în vedere următoarele familii de aplicaţii univalente normate pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [9]; cf. [94]):

$$S^1(\mathbb{B}^n) := \big\{f \in S(\mathbb{B}^n) \big| \, f \text{ se scufundă într-un lanţ Loewner } (f_t)_{t\geq 0} \text{ cu } R(f_t) = \mathbb{C}^n\big\}$$

şi

$$S_R(\mathbb{B}^n) := \big\{f \in S(\mathbb{B}^n) \big| \, f(\mathbb{B}^n) \text{ este Runge}\big\}.$$

Pentru definiţie şi proprietăţi de bază ale domeniilor Runge, se poate consulta [85, Chapter VI, Section 1.4] (cf. Definiţia 1.2.56).

În continuare, avem în vedere şi următoarele familii (a se vedea [9]; cf. [94]):

$$Aut_0(\mathbb{C}^n) := \big\{\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \big| \, \Phi \text{ este un automorfism al lui } \mathbb{C}^n \text{ cu } \Phi(0) = 0, D\Phi(0) = I_n\big\},$$

$$\mathcal{A}(\mathbb{B}^n) := \big\{\varphi : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n \big| \, \varphi = \Phi\big|_{\mathbb{B}^n}, \text{ unde } \Phi \in Aut_0(\mathbb{C}^n)\big\}$$

şi

$$\mathcal{A}^0(\mathbb{B}^n) := \mathcal{A}(\mathbb{B}^n) \cap S^0(\mathbb{B}^n).$$

Exemple de aplicaţii din $\mathcal{A}^0(\mathbb{B}^n)$ pot fi găsite în [50, Problems 6.2.1–2] (a se vedea şi Exemplul 1.2.33).

Dacă $n = 1$, atunci avem $\mathcal{A}^0(\mathbb{U}) = \mathcal{A}(\mathbb{U}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{U}}\}$ şi $S^0(\mathbb{U}) = S^1(\mathbb{U}) = S(\mathbb{U}) = S_R(\mathbb{U})$ (a se vedea Subsecţiunea 1.1.4 şi [79, Section 6.1]). Ultima egalitate este o consecinţă a rezultatului clasic: un domeniu în $\mathbb{C}$ este Runge dacă şi numai dacă este simplu conex (a se vedea e.g. [85, Chapter VI, Section 1.4]).

Dacă $n \geq 2$, atunci, pe baza Observaţiei 1.2.17, avem că $S^0(\mathbb{B}^n) \subsetneq S^1(\mathbb{B}^n)$ (această incluziune este strictă, pe baza lui [50, Example 8.3.12]).

Pe baza Teoremei 1.2.21, putem deduce că (a se vedea [52]):

$$S^1(\mathbb{B}^n) = \big\{f \in S(\mathbb{B}^n) \big| \, f = \Phi \circ g, \text{ unde } g \in S^0(\mathbb{B}^n) \text{ şi } \Phi \in Aut_0(\mathbb{C}^n)\big\}. \tag{2.1.1}$$

Aşa cum este menţionat în introducerea din [9], din [10, Section 4], pentru $n \geq 2$, avem (cf. [94] şi Teorema 1.2.59):

$$S^1(\mathbb{B}^n) \subset S_R(\mathbb{B}^n) \subsetneq S(\mathbb{B}^n).$$

Ultima incluziune este strictă pe baza lui [9, Example 2.2].

Având în vedere Teorema Andersén-Lempert (a se vedea [2, Theorem 2.1]), pentru $n \geq 2$ avem (a se vedea [9, Proposition 3.2, Corollary 3.3] şi [94, Theorem 2.5.6]):

$$S_R(\mathbb{B}^n) = \overline{\mathcal{A}(\mathbb{B}^n)}.$$

Acum, putem observa că pentru $n \geq 2$ avem (a se vedea [9], [94]):

$$\mathcal{A}(\mathbb{B}^n) \subsetneq S^1(\mathbb{B}^n) \subset S_R(\mathbb{B}^n) = \overline{\mathcal{A}(\mathbb{B}^n)} \subsetneq S(\mathbb{B}^n). \tag{2.1.2}$$

Menţionăm că, pentru $n \geq 2$, Schleißinger a demonstrat în [93, Corollary 2.4] şi [94, Corollarry 2.6.10] că

$$S^0(\mathbb{B}^n) \subsetneq \overline{\mathcal{A}(\mathbb{B}^n)}. \tag{2.1.3}$$

2.1.2 Variaţii ale lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$

În această subsecţiune, prezentăm metoda variaţională obţinută de Bracci, Graham, Hamada şi Kohr [18]. Autorii au folosit această metodă pentru a studia punctele extremale şi punctele suport ale familiei $S^0(\mathbb{B}^n)$. Menţionăm că o metodă variaţională asociată a fost folosită de Roth [92] pentru a obţine un principiu de maxim de tip Pontryagin pentru ecuaţia diferenţială Loewner şi pentru a studia probleme extremale neliniare asociate lui $S^0(\mathbb{B}^n)$. În următoarele secţiuni, vom da noi aplicaţii (a se vedea [62]) ale metodei variaţionale din [18], dar în contextul prezentat în secţiunea precedentă.

În continuare, reamintim câteva definiţii, notaţii şi rezultate din [18].

Definiţia 2.1.1. (a se vedea [18, Proposition 2.9 şi Definition 2.15])

Un lanţ Loewner $(f_t)_{t\geq 0}$ este geräumig în $[0,T)$, pentru un $T>0$, dacă există $a,b>0$ şi $c\in(0,1]$ astfel încât

(1) pentru orice $t\in[0,T)$ şi $z\in\mathbb{B}^n$, $\mu(Df_t(z)) := \min_{\|v\|=1}\|Df_t(z)v\|\geq a$,

(2) pentru aproape orice $t\in[0,T)$ şi orice $z\in\mathbb{B}^n$, $\left\|\frac{\partial f_t}{\partial t}(z)\right\|\leq b$,

(3) pentru aproape orice $t\in[0,T)$ şi orice $z\in\mathbb{B}^n$, $\Re\left\langle\left(Df_t(z)\right)^{-1}\frac{\partial f_t}{\partial t}(z),z\right\rangle\geq c\|z\|^2$.

Observăm că, pe baza lui [18, Lemma 2.14], avem $\mu(A)=\frac{1}{\|A^{-1}\|}$, pentru orice operator liniar inversabil $A:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$.

Demonstraţiile rezultatelor noastre principale din secţiunile următoare se bazează în mare măsură pe următorul rezultat obţinut de Bracci, Graham, Hamada şi Kohr [18, Theorem 3.1].

Teorema 2.1.2. *Presupunem că $(f_t)_{t\geq 0}$ este un lanţ Loewner, respectiv un lanţ Loewner normal. Dacă $(f_t)_{t\geq 0}$ este geräumig în $[0,T)$, pentru un $T>0$, atunci există $\varepsilon_0>0$ astfel încât pentru orice $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, fixând*

$$\alpha(t) := \begin{cases} \varepsilon\Big(1-\frac{t}{T}\Big), & t\in[0,T) \\ 0, & t\in[T,\infty) \end{cases},$$

familia $\big(f_t+\alpha(t)h\big)_{t\geq 0}$ este un lanţ Loewner, respectiv un lanţ Loewner normal, pentru orice $h:\mathbb{B}^n\to\mathbb{C}^n$ olomorfă cu $h(0)=0$, $Dh(0)=0$, $\sup_{z\in\mathbb{B}^n}\|h(z)\|\leq 1$ şi $\sup_{z\in\mathbb{B}^n}\|Dh(z)\|\leq 1$.

Pe parcursul acestui capitol, considerăm următoarea familie de funcţii normate pe $\mathbb{B}^n$:

$$H_0(\mathbb{B}^n) := \left\{f\in H(\mathbb{B}^n)\,\middle|\, f(0)=0 \text{ şi } Df(0)=I_n\right\}.$$

Pentru orice $g\in H_0(\mathbb{B}^n)$ şi $r\in(0,1)$ notăm cu g_r aplicaţia ce satisface: $g_r(z)=\frac{1}{r}g(rz)$, oricare ar fi $z\in\mathbb{B}^n$. Dacă aplicaţia are un indice, e.g. g_α, atunci notăm cu $g_{r,\alpha}$ aplicaţia renormată corespunzătoare.

Având în vedere [18, Corollary 4.4], putem deduce următoarea lemă care are un rol important în demonstraţiile rezulatelor principale din acest capitol (a se vedea [62]).

Lema 2.1.3. *Fie $n\in\mathbb{N}^*$, $g\in S^0(\mathbb{B}^n)$ şi $(g_t)_{t\geq 0}$ un lanţ Loewner normal în care g se scufundă. Atunci*

i) pentru orice $r\in(0,1)$, $(g_{r,t})_{t\geq 0}$ este un lanţ Loewner normal care este geräumig în $[0,T)$, oricare ar fi $T>0$; în particular, $g_r\in S^0(\mathbb{B}^n)$;

ii) pentru orice $r\in(0,1)$ şi orice aplicaţie univalentă $\phi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ cu $\phi(0)=0$ şi $D\phi(0)=I_n$, $\big(\phi\circ g_{r,t}\big)_{t\geq 0}$ este un lanţ Loewner care este geräumig în $[0,T)$, oricare ar fi $T>0$; în particular, $\phi\circ g_r\in S^1(\mathbb{B}^n)$, pentru $\phi\in Aut_0(\mathbb{C}^n)$.

2.2 Un rezultat de densitate

Având în vedere (2.1.3), considerăm următoarea întrebare pusă de Schleißinger [94, Question 2.6.11]: este adevărat că $\overline{\mathcal{A}^0(\mathbb{B}^n)} = S^0(\mathbb{B}^n)$ pentru $n \geq 2$?

Primul nostru rezultat este că $S^0(\mathbb{B}^n)$ este "absorbantă" în $H_0(\mathbb{B}^n)$, în următorul sens: dacă un şir în $H_0(\mathbb{B}^n)$ converge, la o aplicaţie în $S^0(\mathbb{B}^n)$, local uniform pe $\mathbb{B}^n$, atunci există un subşir care, renormat într-un mod natural prestabilit, este în $S^0(\mathbb{B}^n)$ şi converge la aceeaşi aplicaţie. Ca o consecinţă a acestui rezultat, avem o demonstraţie simplă a faptului că $\overline{\mathcal{A}^0(\mathbb{B}^n)} = S^0(\mathbb{B}^n)$ pentru $n \geq 2$. Aceeaşi proprietate "absorbantă" are loc pentru $S^1(\mathbb{B}^n)$. Acest rezultat a fost obţinut în [62].

Teorema 2.2.1. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $g \in S^0(\mathbb{B}^n)$ şi $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un şir în $H_0(\mathbb{B}^n)$ ce converge, local uniform pe $\mathbb{B}^n$, la g. Atunci pentru orice şir $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ în $(0,1)$ convergent la 1 există un subşir de indici $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ astfel încât $g_{r_k,j_k} \in S^0(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, şi $\left(g_{r_k,j_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, la g, local uniform pe $\mathbb{B}^n$. Aceeaşi proprietate are loc pentru $S^1(\mathbb{B}^n)$.*

Schleißinger a demonstrat că $S^0(\mathbb{B}^n) \subset \overline{\mathcal{A}(\mathbb{B}^n)}$, pentru $n \geq 2$ (a se vedea [93, Corollary 2.4]; cf. [94, Corollary 2.6.10]), apoi a sugerat că am putea avea $S^0(\mathbb{B}^n) = \overline{\mathcal{A}^0(\mathbb{B}^n)}$, pentru $n \geq 2$. În continuare, avem că, într-adevăr, această egalitate are loc (a se vedea [62]).

Teorema 2.2.2. *Dacă $n \in \mathbb{N}$ este astfel încât $n \geq 2$, atunci $S^0(\mathbb{B}^n) = \overline{\mathcal{A}^0(\mathbb{B}^n)}$.*

2.3 Asupra unei probleme de scufundare

Arosio, Bracci şi Wold [9] au avut în vedere următoarea întrebare: are loc $S^1(\mathbb{B}^n) = S_R(\mathbb{B}^n)$? Rezultatul nostru principal în această secţiune este un răspuns parţial la această întrebare, adică, demonstrăm că orice aplicaţie în $S_R(\mathbb{B}^n)$ care este de clasă C^1 până la frontieră este în $S^1(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea [62]).

Notăm:

$$C^1(\overline{\mathbb{B}^n}) := \left\{ f \in C^1(\mathbb{B}^n) \middle| f \text{ şi } df \text{ se extind continuu la } \overline{\mathbb{B}^n} \right\}.$$

Următorul rezultat principal este o îmbunătăţire a unui rezultat obţinut de Arosio, Bracci şi Wold [9]. Acest rezultat a fost obţinut în [62].

Teorema 2.3.1. $S_R(\mathbb{B}^n) \cap C^1(\overline{\mathbb{B}^n}) \subset S^1(\mathbb{B}^n)$, *oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.*

Observaţia 2.3.2. (a se vedea [62]) Dacă $f \in S_R(\mathbb{B}^n)$ şi $f(\mathbb{B}^n)$ este un domeniu mărginit strict pseudoconvex cu frontiera de clasă C^∞, atunci, pe baza Teoremei lui Fefferman, $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}^n})$, deci, pe baza Teoremei 2.3.1, avem că $f \in S^1(\mathbb{B}^n)$. Aşadar Teorema 2.3.1 generalizează, într-un anumit sens, rezultatul conţinut în [9, Theorem 1.2].

Capitolul 3

Asupra familiilor accesibile ale ecuaţiei diferenţiale Loewner în $\mathbb{C}^n$

Studiul problemelor extremale pe familii compacte de funcţii univalente cu reprezentare parametrică pe discul unitate a motivat dezvoltarea unuei abordări bazate pe teoria controlului optimal, considerată Goodman [40], Prokhorov [84], Roth [89, 90], ş.a. Un prim studiu al unor probleme extremale asociate cu reprezentări parametrice de mai multe variabile complexe a fost dat de Graham, Kohr and Pfaltzgraff [53], iar o generalizare a abordării bazate pe teoria controlului optimal a ecuaţiei diferenţiale Loewner a fost obţinută de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [46, 48] (a se vedea şi [18]). Menţionăm că Roth a obţinut un principiu de maxim de tip Pontryagin pentru ecuaţia diferenţială Loewner în [92] (cf. [91] pentru cazul unidimensional).

În acest capitol, considerăm noţiunea de familie accesibilă a ecuaţiei diferenţiale Loewner şi unele rezultate asociate obţinute de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [48]. Apoi, demonstrăm unele conjecturi formulate de autorii menţionaţi anterior. Menţionăm că o importantă sursă de rezultate şi idei în această direcţie, bazate pe teoria controlului optimal, sunt lucrările lui Roth [89, 90]. Primul nostru rezultat principal este o demonstraţie pentru [48, Conjecture 4.16], ce arată că familia aplicaţiilor cu A–reprezentarea parametrică pe $\mathbb{B}^n$ obţinută prin rezolvarea ecuaţiei diferenţiale Loewner asociată câmpurilor vectoriale Herglotz cu valori în $\operatorname{ex}\mathcal{N}_A$ (i.e. mulţimea punctelor extremale ale familiei Carathéodory $\mathcal{N}_A$) este densă în $S_A^0(\mathbb{B}^n)$ (i.e. familia aplicaţiilor cu A-reprezantare parametrică pe $\mathbb{B}^n$), unde $A \in L(\mathbb{C}^n)$ este astfel încât $k_+(A) < 2m(A)$. Vom observa că acest rezultat generalizează rezultatul lui Loewner [70] (cf. Observaţia 1.1.31). Al doilea rezultat principal este o demonstraţie pentru [48, Conjecture 4.19], ce arată că familiile accesibile $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \Omega)$ ale ecuaţiei diferenţiale Loewner, generate de aplicaţiile Carathéodory cu valori într-o subfamilie compactă şi convexă Ω a familiei Carathéodory $\mathcal{N}_A$, este compactă, iar familia accesibilă corespunzătoare $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \operatorname{ex}\Omega)$ este densă în ea, unde $T \in [0, \infty]$ şi $A \in L(\mathbb{C}^n)$ este astfel încât $k_+(A) < 2m(A)$. Ştiind că $S_A^0(\mathbb{B}^n)$ este egală cu familia accesibilă $\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{N}_A)$ şi că $\mathcal{N}_A$ este o familie compactă şi convexă în $H(\mathbb{B}^n)$, observăm că acest rezultat este o generalizare a primului rezultat. Totuşi, abordarea celui de-al doilea rezultat este diferită faţă de cea dintâi.

Menţionăm că acest capitol conţine rezultate originale obţinute în [63] şi [64], care sunt prezentate în Secţiunile 3.2 şi 3.3.

3.1 Familii accesibile ale ecuaţiei diferenţiale Loewner în $\mathbb{C}^n$

În această secţiune, avem în vedere câteva definiţii şi rezultate bazate pe teoria controlului optimal în legătură cu ecuaţia diferenţială Loewner şi A-representările parametrice pe $\mathbb{B}^n$, obţinute de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [48], care vor fi utile în secţiunile următoare. Vom prezenta caracterizarea cu lanţuri de subordonare univalente A-normate şi anumite proprietăţi extremale (a se vedea [18], [46], [48], [49], [93]).

Începem cu definiţia aplicaţiilor Carathéodory (a se vedea [48, Section 4]; cf. [46], [90]).

Definiţia 3.1.1. Fie $I \subseteq [0,\infty)$ un interval şi $\Omega \subseteq H(\mathbb{B}^n)$. O aplicaţie $h : \mathbb{B}^n \times I \to \mathbb{C}^n$ se numeşte aplicaţie Carathéodory pe I cu valori în Ω dacă:

(i) $h(\cdot,t) \in \Omega$, oricare ar fi $t \in I$,

(ii) $h(z,\cdot)$ este măsurabilă pe I, oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$.

Notăm cu $\mathcal{C}(I,\Omega)$ familia aplicaţiilor Carathéodory pe I cu valori în Ω. Spunem că aplicaţiile Carathéodory pe I cu valori în Ω reprezintă *controalele sistemului de control* $\mathcal{C}(I,\Omega)$ şi că Ω reprezintă *familia de intrare*.

Considerăm definiţia soluţiei ecuaţiei diferenţiale Loewner asociate unei aplicaţii Carathéodory (a se vedea [48, Section 4]; cf. [46], [90]).

Definiţia 3.1.2. Fie $T \in [0,\infty]$ şi $A \in L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A) \geq 0$. Fie I sau intervalul $[0,T]$, dacă $T \in [0,\infty)$, sau intervalul $[0,\infty)$, dacă $T = \infty$. Pentru orice $h \in \mathcal{C}(I,\mathcal{N}_A)$, notăm cu $v(\cdot,\cdot;h) : \mathbb{B}^n \times I \to \mathbb{B}^n$ unica soluţie local absolut continuă pe I a problemei cu valoare iniţială

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(z,t;h) = -h(v(z,t;h),t), \quad \text{a.p.t. } t \in I, \\ v(z,0;h) = z, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$.

Obersvăm că $v(\cdot,t;h)$ este o aplicaţie Schwarz univalentă cu $Dv(0,t;h) = e^{-tA}$, oricare ar fi $t \in I$, şi $v(z,\cdot;h)$ este Lipschitz continuă pe I, local uniform în raport cu $z \in \mathbb{B}^n$ (a se vedea [44]).

Având în vedere [48], vom utiliza următoarea notaţie

$$\mathscr{A} = \big\{A \in L(\mathbb{C}^n) \big|\, k_+(A) < 2m(A)\big\}.$$

Menţionăm că, dacă $A \in \mathscr{A}$ şi $h \in \mathcal{C}([0,\infty),\mathcal{N}_A)$, atunci limita $f := \lim_{t\to\infty} e^{tA}v(\cdot,t;h)$ există local uniform pe $\mathbb{B}^n$ şi $f \in S_A^0(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea [44]; a se vedea şi Subsecţiunea 1.2.4).

Prezentăm acum noţiunea de familie accesibilă a ecuaţiei diferenţiale Loewner în $\mathbb{C}^n$, în raport cu un operator $A \in \mathscr{A}$ (a se vedea [48, Section 4]; cf. [46], [90]).

Definiţia 3.1.3. Pentru orice $A \in \mathscr{A}$, $\Omega \subseteq \mathcal{N}_A$ şi $T \in [0,\infty)$ notăm cu

$$\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\Omega) := \Big\{e^{TA}v(\cdot,T;h)\big|\, h \in \mathcal{C}([0,T],\Omega)\Big\}$$

familia accesibilă în timp T a sistemului de control $\mathcal{C}([0,T],\Omega)$ şi cu

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n},\Omega) := \Big\{\lim_{t\to\infty} e^{tA}v(\cdot,t;h)\Big|\, h \in \mathcal{C}([0,\infty),\Omega)\Big\}$$

familia accesibilă în timp infinit a sistemului de control $\mathcal{C}([0,\infty),\Omega)$.

Se observă uşor că, pentru orice $A \in \mathscr{A}$, $\Omega \subseteq \mathcal{N}_A$ şi $T \in [0,\infty]$, avem $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\Omega) \subseteq \widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\mathcal{N}_A)$ şi $\widetilde{\mathcal{R}}_0(id_{\mathbb{B}^n},\Omega) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}\}$.

Un exemplu simplu de aplicaţie dintr-o familie accesibilă în timp finit poate fi obţinut considerând o aplicaţie spiralată pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [48, Section 4]).

Exemplul 3.1.4. Fie $A \in \mathscr{A}$ şi $T \in [0,\infty)$. Fie $F \in \widehat{S}_A(\mathbb{B}^n)$. Atunci aplicaţia $F_A^T : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ dată de $F_A^T(z) = e^{TA}F^{-1}\big(e^{-TA}F(z)\big)$, $z \in \mathbb{B}^n$, este în $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\mathcal{N}_A)$.

În continuare, vom prezenta caracterizarea familiilor accesibile $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\mathcal{N}_A)$ cu lanţuri de subordonare univalente A-normate, unde $A \in \mathscr{A}$ şi $T \in [0,\infty)$, obţinută de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [48, Section 4] (cf. [46], [90]).

Teorema 3.1.5. *Fie $A \in \mathscr{A}$ şi $T \in [0,\infty)$. Fie $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$. Atunci $f \in \widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{N}_A)$ dacă şi numai dacă există un lanţ de subordonare univalent A-normat $F : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ astfel încât $F(\cdot,0) = f$, $F(\cdot,T) = e^{TA}\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}$ şi $\{e^{tA}F(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală în $H(\mathbb{B}^n)$.*

În legătură cu Definiţia 1.1.32, pentru orice $A \in \mathscr{A}$ şi $M \in [1,\infty)$, notăm (a se vedea [48]; cf. Definiţia 1.1.32 şi [46], [84], [90]):

$$S_A^0(M,\mathbb{B}^n) := \{f \in S_A^0(\mathbb{B}^n) \big| \, \|f(z)\| < M, \, z \in \mathbb{B}^n\}.$$

Dacă $A = I_n$, atunci notăm $S^0(M,\mathbb{B}^n) := S_{I_n}^0(M,\mathbb{B}^n)$, $M \in [1,\infty)$. Dacă $n = 1$, atunci avem $S^0(M,\mathbb{U}) = S(M)$, $M \in [1,\infty)$ (a se vedea Definiţia 1.1.32).

În continuare, observăm că orice aplicaţie dintr-o familie accesibilă admite o A-reprezentare parametrică, unde $A \in \mathscr{A}$ (a se vedea [48]). Mai mult, punem în evidenţă anumite proprietăţi extremale şi diferenţe importante dinte cazul unei dimensiuni şi cazul mai multor dimensiuni (a se vedea [18], [46], [48], [49], [93]; cf. [84], [90]).

Observaţia 3.1.6.

(i) Fie $A \in \mathscr{A}$. Atunci $\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{N}_A) = S_A^0(\mathbb{B}^n)$ şi $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{N}_A) \subset S_A^0(\|e^{TA}\|, \mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $T \in [0,\infty)$ (a se vedea [48]). Mai mult, $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{N}_A) \cap \Big(\mathrm{ex}\, S_A^0(\mathbb{B}^n) \cup \mathrm{supp}\, S_A^0(\mathbb{B}^n)\Big) = \emptyset$, oricare ar fi $T \in [0,\infty)$ (a se vedea [46], [48], [49], [93]).

(ii) Pentru $n = 1$, avem $\widetilde{\mathcal{R}}_{\log M}(id_{\mathbb{U}}, \mathcal{M}) = S(M)$, oricare ar fi $M \in [1,\infty)$ (a se vedea Teoremele 1.1.36 şi 1.1.37). Pentru $n \geq 2$, avem $\widetilde{\mathcal{R}}_{\log M}(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{M}) \subsetneq S^0(M,\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $M \in [1,\infty)$ (a se vedea [18]; cf. Exemplul 1.2.33).

Următoarea teoremă de creştere pentru familii accesibile, în raport cu funcţiile Pick prezentate în Exemplul 1.1.34, a fost obţinută de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [48] (cf. Teorema 1.1.38).

Teorema 3.1.7. *Fie $A \in \mathscr{A}$, $T \in [0,\infty)$ şi $a = e^{k(A)T}$, $b = e^{m(A)T}$. Fie $f \in \widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{N}_A)$. Atunci*

$$\frac{b}{a}p_\pi^a(\|z\|) \leq \|f(z)\| \leq \frac{a}{b}p_0^b(\|z\|), \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

De asemenea, autorii lucrării [48] au arătat compactitatea următoarelor familii accesibile în timp finit (cf. Teorema 1.1.35).

Teorema 3.1.8. *Fie $A \in \mathscr{A}$ şi $T \in [0,\infty)$. Atunci $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{N}_A)$ este o familie compactă în $H(\mathbb{B}^n)$.*

Deoarece aceste familii accesibile în timp finit sunt compacte, se pot asocia diverse probleme extremale. Pentru astfel de rezultate, ne referim la lucrările [48, 49] (a se vedea şi [18], pentru cazul $A = I_n$). În ultimul capitol, vom obţine anumite generalizări ale acestor rezultate în cazul operatorilor liniari dependenţi de timp în $\mathbb{C}^n$.

3.2 Un rezultat de densitate pentru A-reprezentări parametrice în $\mathbb{C}^n$

Scopul nostru în această secţiune este de a prezenta o demonstraţie a generalizării rezultatului lui Loewner [70], în contextul mai multor variabile complexe, ce a fost formulată ca o conjectură de către Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [48], având în vedere anumite rezultate obţinute de Roth [89, 90].

Mai precis, vom prezenta o demonstraţie, bazată pe teoria controlului optimal, a generalizării n-dimensionale a bine-cunoscutei proprietăţi de aproximare a funcţiilor din clasa S, adică orice funcţie din S poate fi aproximată local uniform pe $\mathbb{U}$ cu un şir de funcţii cu o tăietură (a se vedea şi Observaţia 1.1.31; cf. [89]). Din cauza lipsei unei noţiuni analoage celei de funcţie cu o tăietură în mai multe dimensiuni, abordarea bazată pe teoria controlului optimal, considerată în [48] şi [90], va avea un rol central în demonstraţia noastră.

Mai întâi, ne referim la următorul rezultat de densitate pentru familii accesibile în timp finit, obţinut de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [48, Theorem 4.14].

Teorema 3.2.1. *Fie $A \in \mathscr{A}$ şi $T \in [0,\infty)$. Atunci*

$$\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{N}_A) = \overline{\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \mathrm{ex}\,\mathcal{N}_A)}.$$

Fie $A \in \mathscr{A}$. Pe baza Observaţiei 3.1.6 (i), vom demonstra teorema precedentă în cazul în care timpul este infinit, adică [48, Conjecture 4.16]:

$$S_A^0(\mathbb{B}^n) = \overline{\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}, \mathrm{ex}\,\mathcal{N}_A)}. \tag{3.2.1}$$

Menţionăm că această secţiune se bazează pe rezultate originale obţinute în [63].

3.2.1 Rezulate preliminarii

În această subsecţiune, prezentăm câteva rezultate parţiale în legătură cu (3.2.1).

Mai întâi, considerăm următoarea notaţie (a se vedea [63]). Fie $T \in [0,\infty]$ şi $A \in \mathscr{A}$. Fie I sau intervalul $[0,T]$, dacă $T \in [0,\infty)$, sau intervalul $[0,\infty)$, dacă $T = \infty$. Pentru orice $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(I, \mathcal{N}_A)$, notăm:

$$\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{F}) := \{e^{TA}v(\cdot, T; h) \big| \, h \in \mathcal{F}\},$$

unde, dacă $T = \infty$, $f \in \widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{F})$ dacă şi numai dacă $f = \lim_{t\to\infty} e^{tA}v(\cdot, t; h)$, pentru $h \in \mathcal{F}$.

Observăm că: $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{F}) \subseteq \widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{N}_A)$.

Următoarea teoremă este în legătură cu (3.2.1) şi are un rol important în subsecţiunea următoare (a se vedea [63]).

Teorema 3.2.2. *Fie $A \in \mathscr{A}$ şi fie*

$$\mathcal{F} = \Big\{ h \in \mathcal{C}([0,\infty), \mathcal{N}_A) \Big| \text{ există } T \geq 0 \text{ şi } h_0 \in \mathrm{co}\,(\mathrm{ex}\,\mathcal{N}_A) \text{ astfel încât}$$
$$h(\cdot, t) \in \mathrm{ex}\,\mathcal{N}_A, \text{ pentru } 0 \leq t \leq T, \text{ şi } h(\cdot,t) = h_0, \text{ pentru } t > T \Big\}.$$

Atunci

$$S_A^0(\mathbb{B}^n) = \overline{\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{F})}.$$

În particular,

$$S_A^0(\mathbb{B}^n) = \overline{\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}, \mathrm{co}\,(\mathrm{ex}\,\mathcal{N}_A))}.$$

Pe baza rezultatului precedent, avem o observaţie din [63].

Observaţia 3.2.3. Fie $A \in \mathscr{A}$. Având în vedere argumentele folosite în demonstraţia rezultatului precedent, putem considera

$$\mathcal{F} = \Big\{ h \in \mathcal{C}\big([0,\infty), \big(\mathrm{ex}\,\mathcal{N}_A\big) \cup \{A\}\big) \Big| \text{ există } T \geq 0 \text{ astfel încât}$$
$$h(\cdot, t) \in \mathrm{ex}\,\mathcal{N}_A, \text{ pentru } 0 \leq t \leq T, \text{ şi } h(\cdot,t) = A, \text{ pentru } t > T \Big\}.$$

Astfel, obţinem $S_A^0(\mathbb{B}^n) = \overline{\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}, \mathcal{F})}$. În particular, avem $S_A^0(\mathbb{B}^n) = \overline{\widetilde{\mathcal{R}}_\infty\big(id_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathrm{ex}\,\mathcal{N}_A\big) \cup \{A\}\big)}$.

3.2.2 Un rezultat de densitate

În această secţiune, prezentăm principalele idei ale demonstraţiei pentru (3.2.1), bazate pe [65, Chapter 3, Section 2.1]. Următoarele rezultate au fost obţinute în [63].

Fie $A \in \mathscr{A}$. Pentru orice $t \geq 0$ şi $\Omega \subseteq \mathcal{N}_A$, notăm:

$$\Phi_t(\Omega) := \big\{h \in \mathcal{C}([0,\infty),\mathcal{N}_A)\big|\, h(\cdot,s) \in \operatorname{ex}\mathcal{N}_A,\ \text{pentru } 0 \leq s \leq t, h(\cdot,s) \in \Omega,$$

$$\text{pentru } s > t,\ \text{şi } h\big|_{(t,\infty)} \text{ este periodică şi constantă pe intervale}\big\}$$

şi

$$\Phi_t^0(\Omega) := \big\{h \in \mathcal{C}([0,\infty),\mathcal{N}_A)\big|\, h(\cdot,s) \in \operatorname{ex}\mathcal{N}_A,\ \text{pentru } 0 \leq s \leq t, h(\cdot,s) \in \Omega,$$

$$\text{pentru } s > t,\ \text{şi } h\big|_{(t,\infty)} \text{ este constantă } \big\}.$$

Pe baza subsecţiunii precedente şi a notaţiei de mai sus, avem o observaţie, pe care se bazează demonstraţia egalităţii (3.2.1) din această subsecţiune.

Observaţia 3.2.4. (a se vedea [63]) Fie $A \in \mathscr{A}$. Teorema 3.2.2 implică

$$S_A^0(\mathbb{B}^n) = \overline{\bigcup_{t\geq 0} \widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}, \Phi_t^0(\operatorname{co}(\operatorname{ex}\mathcal{N}_A)))}.$$

Dacă X este un spaţiu liniar complex (sau real), $\mathcal{F} \subseteq X$ şi $k \in \mathbb{N}$, atunci notăm

$$\operatorname{co}_k(\mathcal{F}) := \big\{\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k\big|\, \lambda_1,\ldots,\lambda_k \geq 0 \text{ cu } \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1 \text{ şi } f_1,\ldots,f_k \in \mathcal{F}\big\}.$$

Următoarea lemă este reprezentată în [65, Fig. 3.9, p. 82] (a se vedea [63]).

Lema 3.2.5. *Fie X un spaţiu liniar complex (sau real). Pentru orice $\mathcal{F} \subseteq X$ şi $k \in \mathbb{N}$, avem:*

$$\operatorname{co}_{k+1}(\mathcal{F}) \subseteq \operatorname{co}_2(\operatorname{co}_k(\mathcal{F})).$$

Următorul rezultat a fost obţinut de autor în [63]. Îmbinând acest rezultat cu lema anterioară, se poate obţine o demonstraţie a egalităţii (3.2.1), având în vedere Observaţia 3.2.4.

Propoziţia 3.2.6. *Fie $A \in \mathscr{A}$. Atunci*

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}, \Phi_T(\operatorname{co}_2(\Omega))) \subseteq \overline{\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}, \Phi_T(\Omega))},$$

oricare ar fi $T > 0$ şi $\Omega \subseteq \mathcal{N}_A$.

Acum, prezentăm rezultatul principal al acestei secţiuni. Acest rezultat arată că [48, Conjecture 4.16] este adevărată (a se vedea [63]).

Teorema 3.2.7. *Fie $A \in \mathscr{A}$. Atunci*

$$S_A^0(\mathbb{B}^n) = \overline{\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}, \operatorname{ex}\mathcal{N}_A)}.$$

3.3 Compactitatea şi densitatea anumitor familii accesibile

Autorii lucrării [48] au studiat familiile accesibile $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \Omega)$, ce sunt generate prin rezolvarea ecuaţiei diferenţiale Loewner asociată aplicaţiilor Carathéodory cu valori în subfamilia Ω a familiei Carathéodory $\mathcal{N}_A$, unde $T \in [0,\infty)$ şi $A \in L(\mathbb{C}^n)$ este astfel încât $k_+(A) < 2m(A)$. Ei au obţinut rezultate de compactitate şi densitate, generalizând anumite rezulte obţinute de Roth [90], iar apoi au formulat conjectura următoare: dacă Ω este compactă şi convexă, atunci $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \Omega)$ este compactă şi $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, ex\,\Omega)$ este densă în $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \Omega)$, oricare ar fi $T \in [0,\infty]$. În această secţiune, demonstrăm această conjectură prin scufundarea aplicaţiilor Carathéodory într-un spaţiu Bochner. Observăm că rezultatul principal din secţiunea precedentă este un caz particular al acestui rezultat, deoarece $S_A^0(\mathbb{B}^n)$ este egală cu familia accesibilă $\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n},\mathcal{N}_A)$ (a se vedea Observaţia 3.1.6 (i)) şi $\mathcal{N}_A$ este compactă şi convexă (a se vedea Teorema 1.2.35). Totuşi, demonstraţia noastră pentru acest rezultat mai general este diferită faţă de demonstraţia primului rezultat. Argumentele noastre se bazează pe rezultate generale din teoria măsurii şi analiză funcţională (a se vedea e.g. [32]).

Menţionăm că această secţiune se bazează pe rezultate originale obţinute în [64].

Reamintim câteva rezultate. Graham, Hamada, Kohr şi Kohr au demonstrat următoarele (a se vedea [48, Corrolary 4.7, Lemma 4.12, Lemma 4.13, Theorem 4.14]):

$$\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\mathcal{N}_A) \text{ este compactă, oricare ar fi } T\in[0,\infty] \text{ şi } A\in\mathscr{A},$$

şi

$$\overline{\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\Omega)}=\overline{\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}\operatorname{ex}\Omega)},$$

oricare ar fi $T\in[0,\infty)$, $A\in\mathscr{A}$ şi $\Omega\subseteq\mathcal{N}_A$ familie compactă şi convexă. În particular, ei au dedus că

$$\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\mathcal{N}_A)=\overline{\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}\operatorname{ex}\mathcal{N}_A)}, \text{ oricare ar fi } T\in[0,\infty) \text{ şi } A\in\mathscr{A}.$$

În Secţiunea 3.2, am demonstrat [48, Conjecture 4.16] (a se vedea [64]):

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n},\mathcal{N}_A)=\overline{\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}\operatorname{ex}\mathcal{N}_A)}, \text{ oricare ar fi } A\in\mathscr{A}.$$

În această secţiune, avem în vedere [48, Conjecture 4.19] (a se vedea şi [64]):

Conjectura 3.3.1. $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\Omega)$ este compactă şi $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\Omega)=\overline{\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}\operatorname{ex}\Omega)}$, oricare ar fi $T\in[0,\infty]$, $A\in\mathscr{A}$ şi $\Omega\subseteq\mathcal{N}_A$ familie compactă şi convexă.

Pentru a demonstra conjectura, considerăm anumite *controale* (a se vedea [64]; cf. [90, (I.28), p. 47]). Folosind noile notaţii, vom prezenta planul demonstraţiei.

Fie $T\in[0,\infty]$ şi $A\in\mathscr{A}$ arbitrar. Fie I sau intervalul $[0,T]$, dacă $T\in[0,\infty)$, sau intervalul $[0,\infty)$, dacă $T=\infty$. Pentru orice $h\in\mathcal{C}(I,\mathcal{N}_A)$, notăm $\widetilde{h}:\mathbb{B}^n\times I\to\mathbb{C}^n$ astfel încât $\widetilde{h}(z,t):=e^{tA}\big(h(e^{-tA}z,t)-Ae^{-tA}z\big)$, oricare ar fi $z\in\mathbb{B}^n$ şi $t\in I$, şi $\widetilde{v}(\cdot,\cdot;\widetilde{h}):\mathbb{B}^n\times I\to\mathbb{C}^n$ astfel încât $\widetilde{v}(z,t;\widetilde{h}):=e^{tA}v(z,t;h)$, oricare ar fi $z\in\mathbb{B}^n$ şi $t\in I$, şi observăm că $\widetilde{v}(z,\cdot;\widetilde{h})$ este unica soluţie local absolut continuă pe I a problemei cu valoare iniţială

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\widetilde{v}}{\partial t}(z,t;\widetilde{h})=-\widetilde{h}(\widetilde{v}(z,t;\widetilde{h}),t), & \text{a.p.t. } t\in I,\\ \widetilde{v}(z,0;\widetilde{h})=z,\end{cases} \tag{3.3.1}$$

oricare ar fi $z\in\mathbb{B}^n$.

Pentru orice $\Omega\subseteq\mathcal{N}_A$, notăm $\widetilde{\mathcal{C}}(I,\Omega):=\{\widetilde{h}\,|\,h\in\mathcal{C}(I,\Omega)\}$. Pentru orice $\widetilde{\mathcal{F}}\subseteq\widetilde{\mathcal{C}}(I,\mathcal{N}_A)$, notăm $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\widetilde{\mathcal{F}}):=\{\widetilde{v}(\cdot,T;\widetilde{h})\,|\,\widetilde{h}\in\widetilde{\mathcal{F}}\}$, unde, dacă $T=\infty$, $\widetilde{v}(\cdot,\infty;\widetilde{h}):=\lim_{t\to\infty}\widetilde{v}(\cdot,t;\widetilde{h})$, $\widetilde{h}\in\widetilde{\mathcal{F}}$.

Fie $\Omega\subseteq\mathcal{N}_A$ arbitrar. Observăm că $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\Omega)=\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\widetilde{\mathcal{C}}(I,\Omega))$ (a se vedea Definiţia 3.1.3). Prezentăm planul demonstraţiei în continuare. În Subsecţiunea 3.3.1, alegem un spaţiu Bochner X astfel încât $\widetilde{\mathcal{C}}(I,\Omega)$ este o mulţime relativ slab compactă în X şi

$$cl_X^w\widetilde{\mathcal{C}}(I,\Omega)=\widetilde{\mathcal{C}}(I,\overline{\operatorname{co}\Omega}),$$

unde cl_X^w reprezintă închiderea în raport cu topologia slabă pe X. În Subsecţiunea 3.3.2, demonstrăm că

$$\overline{\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},\widetilde{\mathcal{C}}(I,\Omega))}=\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n},cl_X^w\widetilde{\mathcal{C}}(I,\Omega)).$$

Astfel, obţinem o demonstraţie a conjecturii de mai sus.

Menţionăm că toate ideile-cheie din această secţiune, provin din [90, Theorem I.50], [48, Section 4] şi [63] (a se vedea [64]).

3.3.1 Asupra aplicaţiilor Carathéodory

În această subsecţiune, obţinem rezultate utile referitoare la aplicaţiile Carathéodory (a se vedea [64]).

Mai întâi, introducem câteva notaţii şi definiţii. Pentru orice spacţiu măsurabil (X, Σ, μ) cu măsură σ-finită μ, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spaţiu Banach space şi $p \in (1, \infty)$ folosim notaţia

$$L^p(X,Y) := \Big\{ f : X \to Y \Big| f \text{ este tare măsurabilă şi } \int_X \|f(s)\|_Y^p \, d\mu(s) < \infty \Big\}.$$

Se ştie că, identificând funcţiile care sunt egale aproape peste tot, spaţiul de mai sus este un spaţiu Banach, cunoscut sub denumirea de spaţiu Bochner, în raport cu norma:

$$\|f\|_{L^p(X,Y)} := \left(\int_X \|f(s)\|_Y^p \, d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}},$$

oricare ar fi $f \in L^p(X,Y)$ şi $p \in (1, \infty)$.

Fie $q \in (1, \infty)$ şi $r \in (0,1)$. Notăm

$$\mathcal{A}^q(\mathbb{B}_r^n) := H(\mathbb{B}_r^n) \cap L^q(\mathbb{B}_r^n, \mathbb{C}^n)$$

şi menţionăm că $\mathcal{A}^q(\mathbb{B}_r^n)$ este un subspaţiu Banach reflexiv al spaţiului $L^q(\mathbb{B}_r^n, \mathbb{C}^n)$, în raport cu norma indusă $\big\| \cdot \big\|_{L^q(\mathbb{B}_r^n, \mathbb{C}^n)}$. $\mathcal{A}^q(\mathbb{B}_r^n)$ este un produs cartezian de spaţii Bergman (cf. [85]).

În cele ce urmează, demonstrăm că, impunând condiţia $A \in \mathscr{A}$, putem scufunda $\widetilde{\mathcal{C}}(I, \Omega)$ în $L^p\big(I, \mathcal{A}^q(\mathbb{B}_r^n)\big)$, apoi prezentăm câteva proprietăţi (a se vedea [64]).

Propoziţia 3.3.2. *Fie $I \subseteq [0, \infty)$ un interval, $r \in (0,1)$, $p, q \in (1, \infty)$, $A \in \mathscr{A}$ şi $\Omega \subseteq \mathcal{N}_A$.*
Atunci

i) există $M > 0$ astfel încât

$$\big\|\widetilde{h}(\cdot, s)\big\|_{\mathbb{B}_r^n} \le M \big\| e^{(A - 2m(A) I_n)s} \big\|,$$

a.p.t. $s \in I$ şi oricare ar fi $\widetilde{h} \in \widetilde{\mathcal{C}}(I, \mathcal{N}_A)$;

ii) $\widetilde{\mathcal{C}}(I, \Omega)$ este o submulţime mărginită a lui $L^p(I, \mathcal{A}^q(\mathbb{B}_r^n))$;

iii) dacă Ω închisă, atunci $\widetilde{\mathcal{C}}(I, \Omega)$ închisă în $L^p(I, \mathcal{A}^q(\mathbb{B}_r^n))$;

iv) dacă Ω este convexă, atunci $\widetilde{\mathcal{C}}(I, \Omega)$ este convexă;

v) închiderea slabă a mulţimii $\widetilde{\mathcal{C}}(I, \Omega)$ în $L^p(I, \mathcal{A}^q(\mathbb{B}_r^n))$ este o submulţime a lui $\widetilde{\mathcal{C}}(I, \overline{\mathrm{co}\, \Omega})$;

vi) $\widetilde{\mathcal{C}}(I, \Omega)$ este relativ slab compactă (i.e. închiderea slabă este slab compactă) în $L^p(I, \mathcal{A}^q(\mathbb{B}_r^n))$;

vii) închiderea slabă a lui $\widetilde{\mathcal{C}}(I, \Omega)$ în $L^p(I, \mathcal{A}^q(\mathbb{B}_r^n))$ este un spaţiu metrizabil în raport cu topologia slabă.

Având în vedere [90, Lemma I.33], caracterizăm $cl^w_{L_r^{p,q}} \widetilde{\mathcal{C}}(I, \Omega)$, pentru orice interval $I \subseteq [0, \infty)$, $p, q \in (1, \infty)$, $r \in (0,1)$, $A \in \mathscr{A}$ şi $\Omega \subseteq \mathcal{N}_A$, unde $cl^w_{L_r^{p,q}}$ reprezintă închiderea în raport cu topologia slabă pe $L^p(I, \mathcal{A}^q(\mathbb{B}_r^n))$. Următorul rezultat a fost obţinut în [64].

Propoziţia 3.3.3. *Fie $I \subseteq [0, \infty)$ un interval, $r \in (0,1)$, $p, q \in (1, \infty)$, $A \in \mathscr{A}$ şi $\Omega \subseteq \mathcal{N}_A$. Atunci $cl^w_{L_r^{p,q}} \widetilde{\mathcal{C}}(I, \Omega) = \widetilde{\mathcal{C}}(I, \overline{\mathrm{co}\, \Omega})$.*

3.3.2 Un rezultat de compactitate şi densitate

În această secţiune, prezentăm întâi rezultate care implică validitatea Conjecturii 3.3.1. Aceste rezultate au fost obţinute în [64].

Următoarea teoremă, obţinută în [64], este asociată cu [90, Theorem I.38, Corollary I.39].

Teorema 3.3.4. *Pentru orice $r \in (0,1)$, $p,q \in (1,\infty)$, $T \in [0,\infty]$, $A \in \mathscr{A}$ şi $\Omega \subseteq \mathcal{N}_A$ avem*

$$\overline{\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \widetilde{\mathcal{C}}(I,\Omega))} = \widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, cl^w_{L^{p,q}_r}\widetilde{\mathcal{C}}(I,\Omega)) = \widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \widetilde{\mathcal{C}}(I, \overline{co\Omega})),$$

unde I este sau $[0,T]$, dacă $T \in [0,\infty)$, sau $[0,\infty)$, dacă $T = \infty$.

Având în vedere teorema precedentă şi Teorema Krein-Milman, putem să confirmăm [48, Conjecture 4.19] (a se vedea [64]). Pentru rezultate parţiale, a se vedea [48, Lemma 4.13, Theorem 4.14] şi [63] (pentru $n = 1$, cf. [90, Theorem I.42, Corollary I.43]).

Teorema 3.3.5. *Fie $A \in \mathscr{A}$ şi $\Omega \subseteq \mathcal{N}_A$ o familie compactă şi convexă.*
Atunci $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \Omega)$ este compactă şi $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \Omega) = \overline{\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \mathrm{ex}\,\Omega)}$, oricare ar fi $T \in [0,\infty]$.

În continuare, reamintim noţiunea de metrică Hausdorff pe $H(\mathbb{B}^n)$ (cf. [90]), pentru a putea prezenta următorul rezultat.

Definiţia 3.3.6. Notăm cu δ bine-cunoscuta metrică pe $H(\mathbb{B}^n)$ astfel încât $(H(\mathbb{B}^n), \delta)$ este un spaţiu Fréchet în raport cu topologia convergenţei local uniforme. Pentru orice submulţimi compacte nevide V şi W ale lui $H(\mathbb{B}^n)$, fie

$$\delta(V,W) = \sup_{f\in V} \inf_{g\in W} \delta(f,g).$$

Fie ρ metrica Hausdorff pe $H(\mathbb{B}^n)$ dată de

$$\rho(V,W) = \max\{\delta(V,W), \delta(W,V)\},$$

oricare ar fi submulţimile compacte nevide V şi W ale lui $H(\mathbb{B}^n)$.

Având în vedere [90, Theorem I.45] şi [48, Proposition 4.20], prezentăm următorul rezultat din [64]. Observăm că acest rezultat are sens pe baza Teoremei 3.3.5.

Propoziţia 3.3.7. *Fie $A \in \mathscr{A}$ şi $\Omega \subseteq \mathcal{N}_A$ o familie compactă şi convexă. Atunci $T \mapsto \widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, \Omega)$ este o aplicaţie continuă de la $[0,\infty]$ la spaţiul submulţimilor compacte ale lui $H(\mathbb{B}^n)$ înzestrat cu metrica Hausdorff ρ.*

Capitolul 4

Reprezentări parametrice generalizate şi probleme asociate în $\mathbb{C}^n$

Lanţurile de subordonare univalente cu normarea dată de un operator liniar dependent de timp şi legătura cu ecuaţia diferenţială Loewner pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$ au fost întâi considerate de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [45]. Ei au introdus noţiunea de reprezentare parametrică generalizată şi spiralitate generalizată pe $\mathbb{B}^n$ în raport cu un operator dependent de timp şi au obţinut caracterizări cu lanţuri de subordonare univalente pe $\mathbb{B}^n$. Alte rezultate în legătură cu aceste noţiuni, referitoare la studiul ecuaţiei diferenţiale Loewner, au fost obţinute de Graham, Hamada, Kohr [42], Voda [96] şi Arosio [6].

În acest capitol, studiem familia $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$ $(t \geq 0)$ a aplicaţiilor univalente normate pe $\mathbb{B}^n$ cu reprezentare parametrică generalizată în raport cu operatori dependenţi de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$, unde $\widetilde{\mathcal{A}}$ este o familie de aplicaţii măsurabile de la $[0, \infty)$ la $L(\mathbb{C}^n)$ ce satisfac anumite condiţii naturale. În particular, avem că aplicaţiile din $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$ se scufundă în lanţuri Loewner normale în raport cu A la timpul t şi că familia $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$ este compactă. Pe de altă parte, anumite exemple arată că familia $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$ pentru operatori depedenţi de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ este esenţial diferită de familia corespunzătoare pentru operatori dependenţi de timp constanţi (cf. Subsecţiunea 1.2.4).

Apoi, considerăm punctele extremale şi punctele suport asociate familiei compacte $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$, unde $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $t \geq 0$. Considerăm generalizări ale rezultatelor lui Kirwan [66] şi Pell [74] (a se vedea Teorema 1.1.23; cf. Teoremele 1.2.29 şi 1.2.45) în cazul operatorilor dependenţi de timp, având în vedere rezultatele recente obţinute în [48], [49] (a se vedea şi [21], [43], [46], [53], [93]). De asemenea, prezentăm un exemplu de punct suport mărginit pentru familia $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^2)$, unde $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ este un anumit operator dependent de timp, având în vedere exemplul obţinut de Bracci [15] (a se vedea şi [18], [49]). Considerăm apoi noţiunea de familie accesibilă în raport cu un operator dependent de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi prezentăm caracterizările corespunzătoare ale punctelor extremale/suport asociate acestor familii de funcţii univalente mărginite pe $\mathbb{B}^n$ (cf. [48], [49]). Exemple şi aplicaţii utile pun în evidentă diferenţe dintre cazul operatorilor dependenţi de timp neconstanţi şi cazul operatorilor dependenţi de timp constanţi.

În continuare, considerăm anumite rezultate de convergenţă pentru familia $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$ în raport cu metrica Hausdorff ρ pe $H(\mathbb{B}^n)$, unde $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $t \geq 0$. Cazul familiilor accesibile este de asemenea studiat. Aceste rezultate pot fi privite ca fiind teoreme de convergenţă dominată pentru operatori dependenţi de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Ca aplicaţii, avem rezultate similare pentru familiile $S^0_{\mathbf{A}}(\mathbb{B}^n)$ şi $\widehat{S}_{\mathbf{A}}(\mathbb{B}^n)$, unde $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^n)$ este astfel încât $k_+(\mathbf{A}) < 2m(\mathbf{A})$ (cf. Subsecţiunea 1.2.4). O altă aplicaţie pune în evidenţă anumite condiţii suficiente pentru $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încât să aibe loc egalitatea

$\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n) = S^0(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq 0$.

Menţionăm că acest capitol se bazează pe rezultatele originale obţinute de autor în colaborare cu H. Hamada şi G. Kohr [58, 59].

4.1 Reprezentări parametrice generalizate pe bila unitate

În acastă secţiune, considerăm noţiunile de reprezentare parametrică generalizată pe $\mathbb{B}^n$ şi de lanţ Loewner normal în raport cu operatori dependenţi de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$, unde familia $\widetilde{\mathcal{A}}$, formată din anumite funcţii măsurabile de la $[0,\infty)$ la $L(\mathbb{C}^n)$, este definită şi studiată a priori. Avem în vedere lucrarea Graham, Hamada, Kohr, Kohr [45] (a se vedea şi [42] şi Voda [96]). Studiem proprietăţi generale ale familiei $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor univalente normate pe $\mathbb{B}^n$ ce au reprezentare parametrică generalizată în raport cu $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$, unde $t \geq 0$. De exemplu, suntem preocupaţi de caracterizarea cu lanţuri Loewner normale în raport cu $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$, de teoreme de creştere şi de compactitatea familiei. Dacă $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ este constant, atunci $A(t) = \mathbf{A}$, $t \geq 0$, pentru un $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^n)$ cu $k_+(\mathbf{A}) < 2m(\mathbf{A})$, şi $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n) = S_{\mathbf{A}}^0(\mathbb{B}^n)$, $t \geq 0$ (cf. Subsecţiunea 1.2.4). Mai mult, dacă $n = 1$ şi $a \in \widetilde{\mathcal{A}}$, atunci $\widetilde{S}_a^t(\mathbb{U}) = S$, $t \geq 0$. Totuşi, anumite exemple evidenţează diferenţe importante dintre cazul operatorilor dependenţi de timp constanţi şi cazul operatorilor dependenţi de timp neconstanţi din $\widetilde{\mathcal{A}}$, pentru dimensiune $n \geq 2$. De exemplu, există $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$, pentru $n = 2$, astfel încât $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n) \neq \widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n)$, pentru anumiţi $t > s \geq 0$.

Menţionăm că această secţiune conţine rezultate originale obţinute de Hamada, Iancu, Kohr [58].

4.1.1 Definiţii, exemple şi rezultate generale

În această subsecţiune, pregătim terenul pentru rezultatele ce urmează a fi prezentate.

Fie $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ o aplicaţie măsurabilă local integrabilă pe $[0,\infty)$. Pentru orice $s \geq 0$, fie $V(s,\cdot) : [s,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ unica soluţie local absolut continuă a problemei cu valoare iniţială (a se vedea [31], [32]; cf. [96])

$$\frac{\partial V}{\partial t}(s,t) = -A(t)V(s,t), \text{ a.p.t. } t \in [s,\infty), \; V(s,s) = I_n. \tag{4.1.1}$$

Fie $V(t) = V(0,t)$, oricare ar fi $t \geq 0$. Se observă uşor că $V(s,t) = V(t)V(s)^{-1}$, pentru $0 \leq s \leq t < \infty$ (a se vedea [31], [32]; cf. [96]).

Observaţia 4.1.1. Fie $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ o aplicaţie măsurabilă local integrabilă pe $[0,\infty)$ şi fie $s \geq 0$. Dacă $A(t)$ şi $\int_s^t A(\tau)d\tau$ comută oricare ar fi $t \geq s$, atunci

$$V(s,t) = e^{-\int_s^t A(\tau)d\tau}, \quad \forall\, t \in [s,\infty),$$

pe baza lui [32, Exercise VII.2.22] (cf. [45, Remark 1.6]).

Următoarele estimări, în legătură cu aplicaţiile măsurabile local integrabile $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$, sunt utile în secţiunile următoare (a se vedea [96, Proposition 1.2.1, Remark 1.2.2]; cf. [45, Remark 1.6 (v)]).

Lema 4.1.2. *Fie $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ o aplicaţie măsurabilă local integrabilă, şi fie $V(s,t)$ unica soluţie pe $[s,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială* (4.1.1) *asociată lui A. Atunci*

$$e^{\int_s^t m(A(\tau))d\tau} \leq \left\|V(s,t)^{-1}\right\| \leq e^{\int_s^t k(A(\tau))d\tau} \tag{4.1.2}$$

şi

$$e^{-\int_s^t k(A(\tau))d\tau} \leq \left\|V(s,t)\right\| \leq e^{-\int_s^t m(A(\tau))d\tau}, \tag{4.1.3}$$

oricare ar fi $t \geq s \geq 0$.

În continuare, prezentăm definiţia unei aplicaţii cu reprezentare parametrică generalizată în raport cu un operator liniar dependent de timp. Această noţiune a fost considerată mai întâi de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [45], şi apoi generalizată de Hamada, Iancu şi Kohr [58] (cf. [96, Proposition 1.5.1]).

Definiţia 4.1.3. Fie $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ o aplicaţie măsurabilă local integrabilă astfel încât $m(A(t)) \geq 0$ a.p.t $t \geq 0$, şi fie $T \geq 0$. Fie $V(s,t)$ unica soluţie pe $[s,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1) asociată lui A. Spunem că aplicaţia $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ are reprezentare parametrică generalizată în raport cu A pe $[T,\infty)$ dacă există o aplicaţie $h = h(z,t) : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ care satisface următoarele condiţii:

(*i*) $h(z,\cdot)$ este măsurabilă pe $[0,\infty)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$,

(*ii*) $h(\cdot,t) \in \mathcal{N}$, oricare ar fi $t \geq 0$,

(*iii*) $Dh(0,t) = A(t)$, oricare ar fi $t \geq 0$,
astfel încât

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} V(T,t)^{-1} v(z,T,t)$$

local uniform pe $\mathbb{B}^n$, unde $v(z,T,\cdot) : [T,\infty) \to \mathbb{C}^n$ este unica soluţie local absolut continuă a problemei cu valoare iniţială

$$\frac{\partial v}{\partial t}(z,T,t) = -h(v(z,T,t),t), \text{ a.p.t. } t \in [T,\infty),\ v(z,T,T) = z, \tag{4.1.4}$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$.

Fie $\widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n)$ familia aplicaţiilor cu reprezentare parametrică generalizată în raport cu A pe $[T,\infty)$.

Evident, $\widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n) \neq \emptyset$, deoarece $\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n} \in \widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n)$, pentru orice $T \geq 0$ şi orice aplicaţie măsurabilă local integrabilă $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A(t)) \geq 0$, a.p.t. $t \geq 0$.

Observăm că definiţia precedentă generalizează noţiunile corespunzătoare prezentate în Capitolul 1 (a se vedea [58]).

Observaţia 4.1.4. Fie $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(\mathbf{A}) > 0$ şi fie $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $A(t) = \mathbf{A}$, oricare ar fi $t \geq 0$. În acest caz, familia $\widetilde{S}_A^0(\mathbb{B}^n)$ se reduce la familia $S_{\mathbf{A}}^0(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor cu **A**-reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ (a se vedea [44]). În particular, dacă $A \equiv I_n$, atunci $\widetilde{S}_{I_n}^0(\mathbb{B}^n) = S^0(\mathbb{B}^n)$, unde $S^0(\mathbb{B}^n)$ este familia aplicaţiilor cu reprezentare parametrică pe $\mathbb{B}^n$ în sens uzual (a se vedea [50] şi Subsecţiunea 1.2.3).

Diverse proprietăţi şi o contrucţie geometrică în legătură cu noţiunea de reprezentare parametrică generalizată pe $\mathbb{B}^n$ pot fi găsite în [42] şi [45] (cf. [44]).

Pe baza Definiţiei 4.1.3, considerăm următoarea definiţie din [58] (cf. [17], [34]).

Definiţia 4.1.5. Fie $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ o aplicaţie măsurabilă local integrabilă pe $[0,\infty)$ astfel încât $m(A(t)) \geq 0$, a.p.t. $t \geq 0$. O aplicaţie $h : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ ce satisface condiţiile (*i*)–(*iii*) din Definiţia 4.1.3 se numeşte câmp vectorial Herglotz (sau câmp vectorial generator) în raport cu A (cf. [17] şi [34]).

Considerăm acum noţiunea de lanţ de subordonare univalent în legătură cu noţiunea de reprezentare parametrică generalizată (a se vedea [45], [58], [96]; cf. [50, Chpater 8]).

Definiţia 4.1.6. Un lanţ de subordonare univalent $f : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ se numeşte lanţ Loewner normal în raport cu A, dacă $Df(0,t) = V(t)^{-1}$, pentru $t \geq 0$, şi $\{V(t)f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală pe $\mathbb{B}^n$, unde $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ este o aplicaţie măsurabilă local integrabilă şi $V(t) = V(0,t)$ este unica soluţie pe $[0,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1) asociată lui A.

Următoarea familie de operatori dependenţi de timp, introdusă de Hamada, Iancu, Kohr [58], are un rol important în acest capitol.

Definiţia 4.1.7. Fie $\widetilde{\mathcal{A}}$ familia aplicaţiilor măsurabile $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ ce satisfac următoarele condiţii:

(*i*) $m(A(\tau)) \geq 0$, a.p.t. $\tau \geq 0$;

(*ii*) $\operatorname{ess\,sup}_{s\geq 0}\|A(s)\| < \infty$;

(*iii*) $\sup_{s\geq 0}\int_s^\infty \|V(s,t)^{-1}\| e^{-2\int_s^t m(A(\tau))d\tau} dt < \infty$, unde $V(s,t)$ este unica soluţie pe $[s,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1) asociată lui A.

Următoarea observaţie oferă o modalitate de a construi operatori dependenţi de timp în $\widetilde{\mathcal{A}}$ (a se vedea [58]).

Observaţia 4.1.8. Fie $T > 0$, $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^n)$ şi fie $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A(t)) \geq 0$, a.p.t. $t \in [0,T]$, $\operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\|A(t)\| < \infty$ şi $A(t) = \mathbf{A}$, a.p.t. $t > T$. Atunci $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ dacă şi numai dacă $k_+(\mathbf{A}) < 2m(\mathbf{A})$, pe baza Lemmei 4.1.2, [34, Remark 2.8] şi [45, Remark 2.2]. În particular, $I_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

Pe baza Observaţiei 4.1.1, putem construi un operator $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ pentru care există $t > 0$ astfel încât $V(t) \neq e^{-\int_0^t A(\tau)d\tau}$, unde $V(t) = V(0,t)$ şi $V(s,t)$ este unica soluţie pe $[s,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1) – a se vedea [58].

Exemplul 4.1.9. Fie $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Fie $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^2)$ dat de

$$A(t) = \begin{cases} A_1, & \text{pentru } t \in [0,1) \\ A_2, & \text{pentru } t \in [1,\infty). \end{cases}$$

Atunci $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $V(2) \neq e^{-\int_0^2 A(\tau)d\tau}$.

Încheiem această subsecţiune cu noţiunea de spiralitate în raport cu un operator liniar dependent de timp (a se vedea [58]; cf. [45, Definition 3.1]). Această noţiune o generalizează pe cea uzuală de spiralitate (a se vedea [95]; a se vedea şi [36], [86] şi Subsection 1.2.4).

Definiţia 4.1.10. Fie $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ o aplicaţie măsurabilă local integrabilă astfel încât $m(A(t)) \geq 0$, a.p.t. $t \geq 0$. O aplicaţie $f \in S(\mathbb{B}^n)$ este generalizat spiralată în raport cu A dacă $V(s,t)f(z) \in f(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$ şi $0 \leq s \leq t < \infty$, unde $V(s,t)$ este unica soluţie pe $[s,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1) asociată lui A.

Avem următoarea caracterizare o spiralităţii generalizate pe $\mathbb{B}^n$ în raport cu un operator dependent de timp (a se vedea [58]; cf. [45, Theorems 3.3 şi 3.5] şi [96, Propositions 1.5.3 şi 1.5.6]).

Propoziţia 4.1.11. *Fie $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi fie $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie normată local univalentă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *f este generalizat spiralată în raport cu A.*

(*ii*) *$\Re\langle Df(z)^{-1}A(t)f(z), z\rangle \geq 0$, a.p.t. $t \geq 0$ şi oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$.*

(*iii*) *$F : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ dată de $F(z,t) = V(t)^{-1}f(z)$, $z \in \mathbb{B}^n$, $t \geq 0$, este un lanţ Loewner normal în raport cu A, unde $V(t) = V(0,t)$ este unica soluţie pe $[0,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială* (4.1.1) *asociată lui A.*

4.1.2 Asupra reprezentărilor parametrice generalizate pe bila unitate

În această subsecţiune, prezentăm diverse rezultate referitoare la noţiunea de reprezentare parametrică generalizată pe $\mathbb{B}^n$.

Prezentăm caracterizarea aplicaţiilor din $\widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n)$, obţinută în [58], cu lanţuri Loewner normale în raport cu operatori de timp dependenţi de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ (cf. [45, Corollary 2.7], [96]). În cazul $A(t) \equiv \mathbf{A}$, acest rezultat a fost obţinut în [44] (a se vedea şi [41] şi [80], [81], pentru $A = I_n$; cf. Teorema 1.2.42 şi Observaţia 1.2.46).

Observăm că $\widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n) \subseteq S(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $T \geq 0$, pe baza Teoremei 4.1.12.

Teorema 4.1.12. *Fie $T \geq 0$, $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$, şi fie $g \in H(\mathbb{B}^n)$ o aplicaţie normată. Atunci $g \in \widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n)$ dacă şi numai dacă există un lanţ Loewner normal $f = f(z,t)$ în raport cu A astfel încât $g = V(T)f(\cdot,T)$, unde $V(t) = V(0,t)$ şi $V(s,t)$ este unica soluţie pe $[s,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială* (4.1.1) *asociată lui A.*

Considerăm un exemplu de operator dependent de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încât $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^2) \neq \widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^2)$, pentru anumiţi $s,t \in [0,\infty)$, $s \neq t$ (cf. Observaţia 1.2.46). Acest exemplu, obţinut de Hamada, Iancu, Kohr [58], motivează studiul familiei $\widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n)$ independent de cel al familiei $\widetilde{S}_A^0(\mathbb{B}^n)$, pentru $n \geq 2$.

Exemplul 4.1.13. Fie $T > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$, şi fie $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^2)$ dat de

$$\mathbf{A}(z) = (2z_1, (1+\varepsilon)z_2), \text{ oricare ar fi } z = (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2. \tag{4.1.5}$$

Fie $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ dat de

$$A(t) = \begin{cases} \mathbf{A}, & \text{pentru } t \in [0,T) \\ I_2, & \text{for } t \in [T,\infty). \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Atunci $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^2) = S^0(\mathbb{B}^2)$, oricare ar fi $t \in [T,\infty)$. Totuşi, $\widetilde{S}_A^0(\mathbb{B}^2) \neq S^0(\mathbb{B}^2)$, pentru $\varepsilon \in (0,1)$ suficient de mic şi $T > 0$ suficient de mare.

Ţinând cont de Exemplul 4.1.13, este natural să ne punem următoarea întrebare (a se vedea [58]):

Întrebarea 4.1.14. *Fie $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $T \geq 0$. Există $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $k_+(\mathbf{A}) < 2m(\mathbf{A})$ şi $\widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n) = S_{\mathbf{A}}^0(\mathbb{B}^n)$, pentru $n \geq 2$?*

Următorul rezultat, ce are legătură cu Întrebarea 4.1.14 (a se vedea [79, Chapter 6], în cazul $n = 1$; cf. Teorema 1.2.42 şi Observaţia 1.2.46), a fost obţinut în [58].

Propoziţia 4.1.15. *Fie $a : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie măsurabilă astfel încât*

$$\operatorname{ess\,inf}_{t\geq 0} a(t) > 0 \ \ \text{şi} \ \ \operatorname{ess\,sup}_{t\geq 0} a(t) < \infty. \tag{4.1.7}$$

Fie $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^n)$ astfel încât $k_+(\mathbf{A}) < 2m(\mathbf{A})$ şi fie $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ dat de $A(t) = a(t)\mathbf{A}$, a.p.t. $t \geq 0$. Atunci $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $\widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n) = S_{\mathbf{A}}^0(\mathbb{B}^n)$, pentru $T \geq 0$.

Având în vedere Propoziţia 4.1.15, considerăm cazul particular al familiilor S şi $\widetilde{S}_a^t(\mathbb{U})$, pentru $t \geq 0$ (a se vedea [58]; cf. [79, Theorem 6.1], Observaţia 1.1.16).

Corolarul 4.1.16. *Fie $n = 1$ şi $a \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Atunci $\widetilde{S}_a^t(\mathbb{U}) = S$, oricare ar fi $t \geq 0$.*

Având în vedere [51, Lemma 2.8 şi Theorem 2.9], avem următorul rezultat de compactitate a familiei $\widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n)$ (a se vedea [58]; cf. [44, Theorem 2.15] şi [51, Theorem 2.9]).

Teorema 4.1.17. *Fie $T \geq 0$ şi $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Atunci $\widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n)$ este o mulţime compactă.*

În Exemplul 4.1.13 am prezentat un operator dependent de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ pentru care $\widetilde{S}_A^0(\mathbb{B}^2) \not\subseteq \widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^2)$, pentru anumiţi $T > 0$. Acum, considerăm un exemplu, dat de Hamada, Iancu, Kohr [58], de operator dependent de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încât $\widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^2) \not\subseteq \widetilde{S}_A^0(\mathbb{B}^2)$, pentru anumiţi $T > 0$.

Exemplul 4.1.18. Fie $T > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$ şi $a > 0$. Fie $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^2)$ dat de (4.1.5), şi fie $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ definit astfel:

$$f(z) = (z_1 + az_2^2, z_2), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2.$$

De asemenea, fie $\mathbf{E} \in L(\mathbb{C}^2)$ astfel încât $\mathbf{E} + \mathbf{E}^* = 2\lambda I_2$, pentru un $\lambda > 0$. Fie $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^2)$ dat de

$$A(t) = \begin{cases} \mathbf{E}, & \text{pentru } t \in [0,T) \\ \mathbf{A}, & \text{pentru } t \in [T,\infty). \end{cases}$$

Atunci există $T > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$ şi $a > 0$ astfel încât $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $f \in \widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^2) \setminus \widetilde{S}_A^0(\mathbb{B}^2)$, oricare ar fi $t \geq T$.

În continaure, considerăm dependenţa familiei $\widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n)$ în funcţie de $T \geq 0$, unde $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ (a se vedea [58]; cf. [48] şi [90]). Pe baza Teoremei 4.1.17, următorul rezultat este asociat cu [48, Proposition 4.20] şi a fost obţinut în [58] (cf. Propoziţia 3.3.7; cf. [90, Theorem I.45], pentru $n = 1$). Pentru definiţia metricii Hausdorff ρ pe $H(\mathbb{B}^n)$, a se vedea Definiţia 3.3.6.

Propoziţia 4.1.19. *Fie $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Atunci $T \mapsto \widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n)$ este o aplicaţie continuă pe $[0,\infty)$ cu valori în spaţiul metric al submulţimilor compacte ale lui $H(\mathbb{B}^n)$ în raport cu metrica ρ.*

4.2 Probleme extremale pentru aplicaţii cu reprezentare parametrică generalizată în $\mathbb{C}^n$

În această secţiune, considerăm probleme extremale asociate familiei compacte $\widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n)$, unde $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $s \geq 0$. Suntem interesaţi de generalizarea rezultatelor obţinute de Kirwan [66] şi Pell [74], referitoare la proprietăţile extremale ale lanţurilor Loewner de o variabilă complexă (a se vedea Teorema 1.1.23). Prima generalizare a acestor rezultate a fost obţinută de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [53]. Au urmat generalizările pentru familia $S^0(\mathbb{B}^n)$ obţinute de Graham, Hamada, Kohr, Kohr [46] şi Schleissinger [93]. Menţionăm, de asemenea, şi rezultatele recent obţinute de Graham, Hamada, Kohr, Kohr [48, 49] pentru familia $S_{\mathbf{A}}^0(\mathbb{B}^n)$, unde $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^n)$ este astfel încât $k_+(\mathbf{A}) < 2m(\mathbf{A})$ (a se vedea şi Chirilă, Hamada, Kohr [21] şi Graham, Hamada, Kohr [43]). În această secţiune, considerăm generalizările în cazul operatorilor dependenţi de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Arătăm că dacă $f(z,t) = V(t)^{-1}z + \cdots$ este un lanţ Loewner normal astfel încât $V(s)f(\cdot,s) \in \operatorname{ex}\widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n)$ (resp. $V(s)f(\cdot,s) \in \operatorname{supp}\widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n)$), atunci $V(t)f(\cdot,t) \in \operatorname{ex}\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq s$ (resp. $V(t)f(\cdot,t) \in \operatorname{supp}\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq s$), unde $V(t)$ este unica soluţie pe $[0,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1). Mai mult, prezentăm un exemplu ce pune în evidenţă rolul normării dependente de timp în acest rezultat. Prezentăm şi un exemplu de punct suport mărginit al familiei $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^2)$, unde $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ este un anumit operator dependent de timp, având în vedere exemplele date de Bracci [15] şi Graham, Hamada, Kohr, Kohr [49]. Considerăm şi rezultatele similare pentru familiile accesibile în raport cu operatori dependenţi de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

Menţionăm că această secţiune se bazează pe rezultate originale obţinute de Hamada, Iancu, Kohr [58].

4.2.1 Puncte extremale, puncte suport şi aplicaţii în $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n)$

În această subsecţiune, considerăm punctele extremale şi punctele suport ale familiei compacte $\widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n)$, unde $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $s \geq 0$ (a se vedea [58]).

Pe baza demonstraţiei pentru [48, Theorem 3.1] (cf. demonstraţia pentru [46, Theorem 2.1]), avem următoarea lemă utilă (a se vedea [58]).

Lema 4.2.1. *Fie $T \geq 0$ şi fie $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Fie f un lanţ Loewner normal în raport cu A. Fie v aplicaţia de tranziţie asociată lui f. Atunci următoarele afirmaţii au loc:*

(i) Dacă g este un lanţ Loewner normal în raport cu A, atunci aplicaţia $G : \mathbb{B}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ dată de

$$G(z,t) = \begin{cases} g(v(z,t,T),T), & 0 \leq t \leq T \\ g(z,t), & t > T \end{cases} \tag{4.2.1}$$

este un lanţ Loewner normal în raport cu A.

(ii) Dacă $h \in \widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n)$, atunci $V(t,T)^{-1}h(v(\cdot,t,T)) \in \widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \in [0,T]$. În particular, $V(t,T)^{-1}v(\cdot,t,T) \in \widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \in [0,T]$, unde $V(t) = V(0,t)$ şi $V(s,t)$ este unica soluţie pe $[s,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1) *asociată lui A.*

Următorul rezultat, obţinut de Hamada, Iancu, Kohr [58], generalizează [46, Theorem 2.1] şi [48, Theorem 3.1] (a se vedea Teoremele 1.2.29 şi 1.2.45; cf. [21]) în cazul operatorilor dependenţi de timp (a se vedea [66] şi [74], în cazul $n = 1$).

Teorema 4.2.2. *Fie $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $s \geq 0$. Fie f lanţ Loewner normal în raport cu A. Dacă $V(s)f(\cdot,s) \in \mathrm{ex}\,\widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n)$, atunci $V(t)f(\cdot,t) \in \mathrm{ex}\,\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq s$, unde $V(t) = V(0,t)$ şi $V(s,t)$ este unica soluţie pe $[s,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială* (4.1.1) *asociată lui A.*

Având în vedere [48, Propositions 3.2 şi 3.4], avem următorul rezultat obţinut în [58] (a se vedea şi Observaţia 3.1.6 (i); cf. [21], [43], [46], [93], în cazul $A(t) = I_n$, oricare ar fi $t \geq 0$).

Propoziţia 4.2.3. *Fie $s \geq 0$ şi fie $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încât $\operatorname{ess\,inf}_{t\geq 0} m(A(t)) > 0$. Fie f un lanţ Loewner normal în raport cu A şi fie v aplicaţia de tranziţie asociată lui f. Atunci $V(s,t)^{-1}v(\cdot,s,t) \in \widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n) \setminus (\mathrm{ex}\,\widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n) \cup \mathrm{supp}\,\widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n))$, oricare ar fi $t \geq s$, unde $V(t) = V(0,t)$ şi $V(s,t)$ este unica soluţie pe $[s,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială* (4.1.1) *asociată lui A. În particular, $\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n} \in \widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n) \setminus (\mathrm{ex}\,\widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n) \cup \mathrm{supp}\,\widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n))$.*

Acum, prezentăm rezultatul obţinut de Hamada, Iancu, Kohr [58], care generalizează [93, Theorem 1.1] şi [48, Theorem 3.5] (cf. [21]) în cazul operatorilor dependenţi de timp (cf. Teoremele 1.2.29 şi 1.2.45; cf. [66] şi [74], în cazul $n = 1$).

Teorema 4.2.4. *Fie $s \geq 0$ şi $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încât $\operatorname{ess\,inf}_{t\geq 0} m(A(t)) > 0$. Fie f un lanţ Loewner normal în raport cu A. Dacă $V(s)f(\cdot,s) \in \mathrm{supp}\,\widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^n)$, atunci $V(t)f(\cdot,t) \in \mathrm{supp}\,\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq s$, unde $V(t) = V(0,t)$ şi $V(s,t)$ este unica soluţie pe $[s,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială* (4.1.1) *asociată lui A.*

Având în vedere Teoremele 4.2.2 şi 4.2.4, avem următorul exemplu (a se vedea [58]):

Exemplul 4.2.5. Fie $g \in \mathrm{supp}S^0(\mathbb{B}^n)$ (resp. $g \in \mathrm{ex}S^0(\mathbb{B}^n)$) şi fie $f(z,t) = e^t z + \cdots$ un lanţ Loewner astfel încât $\left\{e^{-t}f(\cdot,t)\right\}_{t\geq 0}$ este o familie normală şi $g = f(\cdot,0)$. De asemenea, fie $T > 0$ şi fie $F : \mathbb{B}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ dată de

$$F(z,t) = \begin{cases} e^T g(e^{t-T}z), & z \in \mathbb{B}^n,\ t \in [0,T) \\ e^T f(z,t-T), & z \in \mathbb{B}^n,\ t \in [T,\infty). \end{cases}$$

Dacă $A:[0,\infty)\to\mathbb{C}^n$ este dat de $A(t)=I_n$, oricare ar fi $t\geq 0$, atunci F este un lanţ Loewner normal în raport cu A astfel încât $V(s)F(\cdot,s)\notin \mathrm{supp}\widetilde{S}^s_A(\mathbb{B}^n)$ (resp. $V(s)F(\cdot,s)\notin \mathrm{ex}\widetilde{S}^s_A(\mathbb{B}^n)$), oricare ar fi $s\in[0,T)$, şi $V(t)F(\cdot,t)\in \mathrm{supp}\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$ (resp. $V(t)F(\cdot,t)\in \mathrm{ex}\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$), oricare ar fi $t\in[T,\infty)$, unde $V(t)=V(0,t)$ şi $V(s,t)$ este unica soluţie pe $[s,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1) asociată lui A.

În continuare, punem în evidenţă rolul normaliză rii lanţului Loewner normal în Teorema 4.2.4, având în vedere [93, Theorem 1.1]. Prezentăm un exemplu, obţinut de Hamada, Iancu, Kohr [58], de lanţ Loewner normal F în raport cu an $A\in\widetilde{\mathcal{A}}$ (cu $\mathrm{ess\,inf}_{t\geq 0}m(A(t))>0$) astfel încât următoarele condiţii sunt îndeplinite pentru $n\geq 2$:

- $V(t)F(\cdot,t)\in S^0(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t\geq 0$
- $F(\cdot,0)\in \mathrm{supp}\, S^0(\mathbb{B}^n)$, dar $V(t)F(\cdot,t)\notin \mathrm{supp}\, S^0(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t>0$,

unde $V(t)=V(0,t)$ este unica soluţie pe $[0,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1) asociată lui A (cf. Observaţia 1.2.30).

Acest exemplu (a se vedea [58]) este obţinut ţinând cont de Exemplul 4.1.13, [15], [18, Section 5] (a se vedea şi [49, Remark 7.4]). Fǎra a restrânge generalitatea, vom considera doar cazul $n=2$.

Exemplul 4.2.6. Fie $T>0$, $\varepsilon>0$ şi fie $\mathbf{A}\in L(\mathbb{C}^2)$ dat de (4.1.5). Fie $A\in\widetilde{\mathcal{A}}$ dat de (4.1.6) şi $V(t)=V(0,t)$ unica soluţie pe $[0,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1) asociată lui A. Fie $f:\mathbb{B}^2\to\mathbb{C}^2$ dată de $f(z)=(z_1+3\sqrt{3}z_2^2,z_2)$, oricare ar fi $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{B}^2$, şi fie $\varepsilon>0$ suficient de mic astfel încât f este spiralată în raport cu $\mathbf{A}$.

Fie $T=\frac{\ln 2}{2\varepsilon}$ şi fie $F:\mathbb{B}^2\times[0,\infty)\to\mathbb{C}^2$ dată de

$$F(z,t)=\begin{cases} e^{T\mathbf{A}}f^{-1}\big(e^{(t-T)\mathbf{A}}f(z)\big), & z\in\mathbb{B}^2,\ 0\leq t<T\\ e^{t-T}e^{T\mathbf{A}}z, & z\in\mathbb{B}^2,\ t\geq T.\end{cases}$$

F este un lanţ Loewner normal în raport cu A astfel încât $V(t)F(\cdot,t)\in S^0(\mathbb{B}^2)$, oricare ar fi $t\geq 0$, $F(\cdot,0)\in\mathrm{supp}\, S^0(\mathbb{B}^2)$ şi $V(t)F(\cdot,t)\notin \mathrm{supp}\, S^0(\mathbb{B}^2)$, oricare ar fi $t>0$.

Observăm că Teoremele 4.1.12, 4.2.4 şi Propoziţia 4.2.3 implică (cf. [18] şi [49])

$$V(t)F(\cdot,t)\in\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^2)\setminus\big(\mathrm{supp}\,\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^2)\cup \mathrm{ex}\,\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^2)\big),\ \text{oricare ar fi } t\geq 0.$$

Având în vedere [48, Theorem 3.8 şi Example 3.10], prezentăm un exemplu de operator dependent de timp $A\in\widetilde{\mathcal{A}}$ şi un punct suport pentru $\widetilde{S}^s_A(\mathbb{B}^2)$, oricare ar fi $s\geq 0$ (a se vedea [58]).

Exemplul 4.2.7. Fie $\alpha,\beta:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ două funcţii măsurabile esenţial mărginite astfel încât $\mathrm{ess\,inf}_{t\geq 0}\big(\Re\beta(t)-\Re\alpha(t)\big)\geq 0$ şi $\mathrm{ess\,inf}_{t\geq 0}\big(2\Re\alpha(t)-\Re\beta(t)\big)>0$. Fie $A:[0,\infty)\to L(\mathbb{C}^2)$ dat de

$$A(t)=\begin{pmatrix}\alpha(t) & 0\\ 0 & \beta(t)\end{pmatrix},\quad t\geq 0. \tag{4.2.2}$$

Fie $f_1:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ funcţia Koebe dată de $f_1(\zeta)=\frac{\zeta}{(1-\zeta)^2}$, $\zeta\in\mathbb{U}$, şi fie $f_2\in S$ arbitrară. Fie $f\in S(\mathbb{B}^2)$ dată de $f(z)=(f_1(z_1),f_2(z_2))$, oricare ar fi $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{B}^2$. Atunci $A\in\widetilde{\mathcal{A}}$ şi $f\in\mathrm{supp}\,\widetilde{S}^s_A(\mathbb{B}^2)$, oricare ar fi $s\geq 0$.

Observaţia 4.2.8. (a se vedea [58]) Fie

$$\alpha(t)=\begin{cases}1+\varepsilon, & t\in[0,T)\\ 1, & t\in[T,\infty)\end{cases}\quad \text{şi}\quad \beta(t)=\begin{cases}2, & t\in[0,T)\\ 1, & t\in[T,\infty)\end{cases},$$

unde $\varepsilon\in(0,1)$ este suficient de mic şi $T>0$ este suficient de mare astfel încât $\widetilde{S}^0_A(\mathbb{B}^2)\neq\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^2)$, oricare ar fi $t\geq T$ (a se vedea Exemplul 4.1.13), unde $A\in\widetilde{\mathcal{A}}$ este dat de (4.2.2). Fie $f:\mathbb{B}^2\to\mathbb{C}^2$

dată de $f(z) = \left(\dfrac{z_1}{(1-z_1)^2}, z_2\right)$, oricare ar fi $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$. Deci, din Exemplul 4.2.7, rezultă că f este un punct suport pentru familii diferite de funcţii cu reprezentare parametrică generalizată în raport cu A.

Mai mult, f este generalizat spiralată în raport cu A. Fie $F : \mathbb{B}^2 \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^2$ dată de $F(z,t) = V(t)^{-1}f(z)$, oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^2$, unde $V(t) = V(0,t)$ este unica soluţie pe $[0,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1) asociată lui A. Atunci F este un exemplu simplu de lanţ Loewner normal în raport cu A astfel încât $V(t)F(\cdot,t) \in \operatorname{supp} \widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^2)$, oricare ar fi $t \geq 0$ (cf. Teorema 4.2.4).

4.2.2 Puncte suport mărginite pentru familia $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^2)$

În această subsecţiune, considerăm un exemplu, obţinut de Hamada, Iancu, Kohr [58], de punct suport mărginit al unei anumite familii de aplicaţii cu reprezentare parametrică generalizată în raport cu un anumit operator dependent de timp, folosind [15] şi [49, Section 7] (cf. Exemplul 1.2.33 şi 1.2.44).

Pe baza lui [49, Proposition 7.2], definim $a_0 : [1,2) \to [\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{4\sqrt{3}}{2})$,

$$a_0(\lambda) = \max\left\{a > 0 : \lambda x^2 + y^2 - axy^2 \geq 0, x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\right\}, \quad \lambda \in [1,2). \tag{4.2.3}$$

Avem următorul exemplu din [58] de punct suport mărginit al familiei $\widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^2)$, unde $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^2)$ este dat în Teorema 4.2.9 de mai jos. Acest rezultat generalizează [15, Theorem 1.2] şi [49, Theorem 7.6] la cazul operatorilor liniari depedenţi de timp.

Teorema 4.2.9. *Fie $T > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in [1,2)$, $\lambda : [0,\infty) \to [1,2)$ dată de*

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1, & t \in [0,T) \\ \lambda_2, & t \in [T,\infty) \end{cases} \tag{4.2.4}$$

şi $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^2)$ dat de $A(t) = \begin{pmatrix} \lambda(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, oricare ar fi $t \geq 0$. Atunci $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$, şi pentru orice $s \in [0,T)$ aplicaţia $\varphi_s : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ dată de

$$\varphi_s(z) = \left(z_1 + \left(\frac{a_0(\lambda_1)}{2-\lambda_1}(1 - e^{(s-T)(2-\lambda_1)}) + \frac{a_0(\lambda_2)}{2-\lambda_2}e^{(s-T)(2-\lambda_1)}\right) z_2^2, z_2\right), \tag{4.2.5}$$

oricare ar fi $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$, este un punct suport mărginit pentru $\widetilde{S}_A^s(\mathbb{B}^2)$.

4.2.3 Probleme extremale asociate unor familii accesibile

În această subsecţiune, considerăm punctele extremale şi punctele suport asociate unor familii accesibile generate de operatori liniari dependenţi de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Următoarele rezultate au fost obţinute în [58], ca generalizări ale unor rezultate obţinute în [46] şi [48].

Pe baza Secţiunii 3.1, adaptăm câteva noţiuni din teoria controlului optimal (a se vedea [58]).

Definiţia 4.2.10. Fie I un interval şi $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. O aplicaţie $h : \mathbb{B}^n \times I \to \mathbb{C}^n$ se numeşte aplicaţie Carathéodory pe I în raport cu A dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:

(i) $h(\cdot,t) \in \mathcal{N}_{A(t)}$, oricare ar fi $t \in I$,

(ii) $h(z,\cdot)$ este măsurabilă pe I, oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$.

Notăm cu $\mathcal{C}(I, (\mathcal{N}_{A(t)})_{t\in I})$ familia aplicaţiilor Carathéodory pe I în raport cu A.

Spunem că aplicaţiile Carathéodory pe I în raport cu A reprezintă *controalele sistemului de control* $\mathcal{C}(I, (\mathcal{N}_{A(t)})_{t\in I})$, iar $(\mathcal{N}_{A(t)})_{t\in I}$ reprezintă *familia de intrare*.

Definiţia 4.2.11. Fie I sau intervalul $[T_0, T_1]$, unde $T_1 > T_0 \geq 0$, sau intervalul $[T_0, \infty)$, unde $T_0 \geq 0$, şi $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Pentru orice $h \in \mathcal{C}(I, (\mathcal{N}_{A(t)})_{t\in I})$ notăm cu $v(z, T_0, \cdot; h)$ unica soluţie local absolut continuă pe I a problemei cu valoare iniţială

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(z, T_0, t; h) = -h(v(z, T_0, t; h), t), \quad \text{a.p.t. } t \in I, \\ v(z, T_0, T_0; h) = z, \end{cases}$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{B}^n$.

Observăm că $v(\cdot, T_0, t; h)$ este o aplicaţie Schwarz univalentă cu $Dv(0, T_0, t; h) = V(T_0, t)$, oricare ar fi $t \in I$ (a se vedea [58]; cf. [45] şi [96]), unde $V(T_0, \cdot)$ este unica soluţie pe $[T_0, \infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1) asociată lui A.

Considerăm acum noţiunea de familie accesibilă în raport cu un operator liniar dependent de timp, introdusă în [58] (cf. [48]).

Definiţia 4.2.12. Fie $T_0 \geq 0$ şi $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Pentru orice $T > T_0$ notăm *familia accesibilă în timp T* a *sistemului de control* $\mathcal{C}\big([T_0, T], (\mathcal{N}_{A(t)})_{t\in[T_0,T]}\big)$ cu

$$\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, (\mathcal{N}_{A(t)})_{t\in[T_0,T]})$$
$$= \Big\{ V(T_0, T)^{-1} v(\cdot, T_0, T; h) \big| \, h \in \mathcal{C}\big([T_0, T], (\mathcal{N}_{A(t)})_{t\in[T_0,T]}\big) \Big\}.$$

Notăm *familia accesibilă în timp infinit* a *sistemului de control* $\mathcal{C}\big([T_0, \infty), (\mathcal{N}_{A(t)})_{t\geq T_0}\big)$ cu

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\infty(id_{\mathbb{B}^n}, (\mathcal{N}_{A(t)})_{t\geq T_0})$$
$$= \Big\{ \lim_{t\to\infty} V(T_0, t)^{-1} v(\cdot, T_0, t; h) \big| \, h \in \mathcal{C}\big([T_0, \infty), (\mathcal{N}_{A(t)})_{t\geq T_0}\big) \Big\}.$$

Pe baza rezultatului [48, Theorem 4.5] (cf. [46, Theorem 3.7]), avem următoarea caracterizare, obţinută în [58], pentru familiile accesibile, folosind lanţuri Loewner normale în raport cu un operator dependent de timp (cf. Teorema 3.1.5).

Lema 4.2.13. *Fie $T > T_0 \geq 0$ şi $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Fie $f \in H(\mathbb{B}^n)$.*

Atunci $f \in \widetilde{\mathcal{R}}_T\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\in[T_0,T]}\big)$ dacă şi numai dacă există un lanţ Loewner normal F în raport cu A astfel încât $V(T_0)F(\cdot, T_0) = f$ şi $V(T)F(\cdot, T) = \mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}$, unde $V(t) = V(0, t)$, oricare ar fi $t \geq 0$, şi $V(s, \cdot)$ este unica soluţie pe $[s, \infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1) *asociată lui A, oricare ar fi $s \geq 0$.*

În particular, $\widetilde{\mathcal{R}}_\infty\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\geq T_0}\big) = \widetilde{S}_A^{T_0}(\mathbb{B}^n)$ şi $\widetilde{\mathcal{R}}_T\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\in[T_0,T]}\big) \subset \widetilde{S}_A^{T_0}(\mathbb{B}^n)$.

Având în vedere [48, Corollary 4.7], avem compactitatea familiilor accesibile (a se vedea [58]; cf. Teorema 3.1.8 şi [90, Theorem I.42]).

Propoziţia 4.2.14. *Fie $T_0 \geq 0$ şi $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Atunci $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, (\mathcal{N}_{A(t)})_{t\in[T_0,T]})$ este compactă, oricare ar fi $T > T_0$.*

Considerăm acum generalizarea rezultatului [49, Proposition 6.7] (cf. [43, Corollary 7]) la cazul operatorilor dependenţi de timp în $\mathbb{C}^n$, ce a fost obţinută în [58].

Propoziţia 4.2.15. *Fie $T_1 > T > T_0 \geq 0$ şi fie $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încât $\mathrm{ess\,inf}_{t\geq 0} m(A(t)) > 0$. Fie $f \in \widetilde{\mathcal{R}}_T\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\in[T_0,T]}\big)$. Atunci $f \in \widetilde{\mathcal{R}}_{T_1}\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\in[T_0,T_1]}\big)$, dar*

$$f \notin \mathrm{ex}\, \widetilde{\mathcal{R}}_{T_1}\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\in[T_0,T_1]}\big) \cup \mathrm{supp}\, \widetilde{\mathcal{R}}_{T_1}\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\in[T_0,T_1]}\big).$$

Următorul rezultat, obţinut de Hamada, Iancu, Kohr [58], este asociat cu [48, Theorem 4.8] şi [49, Theorem 6.8] (a se vedea [90], în cazul $n = 1$; cf. Teoremele 4.2.2 şi 4.2.4).

Teorema 4.2.16. *Fie $T_1 > T_0 \geq 0$, $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$, şi $f \in \widetilde{\mathcal{R}}_{T_1}\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\in[T_0,T_1]}\big)$. Fie F un lanţ Loewner normal în raport cu A astfel încât $V(T_0)F(\cdot,T_0) = f$ şi $V(T_1)F(\cdot,T_1) = \mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}$, unde $V(t) = V(0,t)$, oricare ar fi $t \geq 0$, şi $V(s,\cdot)$ este unica soluţie pe $[s,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială* (4.1.1) *asociată lui A, oricare ar fi $s \geq 0$.*

Dacă $f \in \operatorname{ex}\widetilde{\mathcal{R}}_{T_1}\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\in[T_0,T_1]}\big)$, atunci

$$V(T)F(\cdot,T) \in \operatorname{ex}\widetilde{\mathcal{R}}_{T_1}\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\in[T,T_1]}\big), \text{ oricare ar fi } T \in [T_0,T_1). \tag{4.2.6}$$

Mai mult, dacă $\operatorname{ess\,inf}_{t\geq 0} m(A(t)) > 0$ *şi $f \in \operatorname{supp}\widetilde{\mathcal{R}}_{T_1}\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\in[T_0,T_1]}\big)$, atunci*

$$V(T)F(\cdot,T) \in \operatorname{supp}\widetilde{\mathcal{R}}_{T_1}\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\in[T,T_1]}\big), \text{ oricare ar fi } T \in [T_0,T_1). \tag{4.2.7}$$

Observaţia 4.2.17. (a se vedea [58]) Fie $T_0 = 0$ şi $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ un operator dependent de timp constant. Atunci Teorema 4.2.16 implică [49, Theorem 6.8], având în vedere următoarea proprietate:

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{T_1}\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\in[T,T_1]}\big) = \widetilde{\mathcal{R}}_{T_1-T}\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, \big(\mathcal{N}_{A(t)}\big)_{t\in[0,T_1-T]}\big),$$

oricare ar fi $T_1 > T > 0$.

Pe baza rezultatului [18, Theorem 5.9] (a se vedea also [49, Theorem 7.11]), avem următorul exemplu, obţinut de Hamada, Iancu, Kohr [58], de punct suport mărginit pentru o familie accesibilă în raport cu un operator dependent de timp în $\mathbb{C}^2$.

Propoziţia 4.2.18. *Fie $T > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in [1,2)$ şi $A : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^2)$ dat de $A(t) = \begin{pmatrix} \lambda(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, oricare ar fi $t \geq 0$, unde $\lambda : [0,\infty) \to [1,2)$ este dată de* (4.2.4)*. Atunci oricare ar fi $T_1 > T > T_0 \geq 0$, aplicaţia $\phi_{T_0,T_1} : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}^2$ dată de*

$$\begin{aligned}\phi_{T_0,T_1}(z) = \bigg(z_1 + \Big(&\frac{a_0(\lambda_1)}{2-\lambda_1}\big(1 - e^{(T_0-T)(2-\lambda_1)}\big) \\ &+ \frac{a_0(\lambda_2)}{2-\lambda_2} e^{(T_0-T)(2-\lambda_1)}\big(1 - e^{(T-T_1)(2-\lambda_2)}\big)\Big) z_2^2, z_2\bigg),\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

pentru $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{B}^2$, este un punct suport mărginit pentru $\widetilde{\mathcal{R}}_{T_1}(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^2}, (\mathcal{N}_{A(t)})_{t\in[T_0,T_1]})$, unde $a_0 : [1,2) \to [\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{4\sqrt{3}}{2})$ este dată de (4.2.3)*.*

Următorul exemplu din [58] arată că rezultatul din [49, Theorem 6.8] nu are loc în mod necesar în cazul operatorilor dependenţi de timp neconstanţi (cf. Observaţia 4.2.17).

Exemplul 4.2.19. Considerăm notaţiile din Proposition 4.2.18 şi presupunem că $\lambda_1 < \lambda_2$. Atunci există o aplicaţie de tranziţie v asociată unui lanţ Loewner normal în raport cu A astfel încât $G : \mathbb{B}^2 \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^2$ dată de

$$G(\cdot,t) = \begin{cases} V(T_1)^{-1} v(\cdot,t,T_1), & t \in [0,T_1) \\ V(t)^{-1}\mathrm{id}_{\mathbb{B}^n}, & t \in [T_1,\infty), \end{cases}$$

este un lanţ Loewner normal în raport cu A astfel încât $V(T_1)G(\cdot,T_1) = \mathrm{id}_{\mathbb{B}^2}$,

$$G(\cdot,0) \in \operatorname{supp}\widetilde{\mathcal{R}}_{T_1}\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^2}, \big(\mathcal{N}_{A(\tau)}\big)_{\tau\in[0,T_1]}\big),$$

şi există $t \in (0,T_1)$ astfel încât

$$V(t)G(\cdot,t) \notin \operatorname{supp}\widetilde{\mathcal{R}}_{T_1-t}\big(\mathrm{id}_{\mathbb{B}^2}, \big(\mathcal{N}_{A(\tau)}\big)_{\tau\in[0,T_1-t]}\big),$$

unde $V(t) = V(0,t)$, for $t \geq 0$, şi $V(0,\cdot)$ este unica soluţie pe $[0,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială (4.1.1) asociată lui A.

4.3 Rezultate de convergenţă pentru familii compacte de aplicaţii univalente

În această secţiune, considerăm anumite rezultate de convergenţă pentru familia compactă $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n)$ în raport cu metrica Hausdorff ρ pe $H(\mathbb{B}^n)$, unde $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ şi $t \geq 0$. Mai exact, dacă un şir de operatori dependenţi de timp $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din $\widetilde{\mathcal{A}}$ este dominat într-un anumit sens şi converge punctual la un operator dependent de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ cu $\operatorname{ess\,inf}_{t\geq T} m(A(t)) > 0$, atunci $\rho(\widetilde{S}_{A_k}^T(\mathbb{B}^n), \widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n)) \to 0$, $k \to \infty$, unde $T \geq 0$ (cf. Propoziţia 4.1.19). Un rezultat similar are loc pentru familiile accesibile $\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, (\mathcal{N}_{A(t)})_{t\in[T_0,T]})$ $(T > T_0 \geq 0)$ în raport cu operatori dependenţi de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$, introduse în Subsecţiunea 4.2.3 (cf. [48], [90]). Aceste rezultate pot fi privite ca fiind teoreme de convergenţă dominată pentru operatori dependenţi de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. În particular, avem rezultate similare de convergenţă pentru familiile compacte $S_{\mathbf{A}}^0(\mathbb{B}^n)$ şi $\widehat{S}_{\mathbf{A}}(\mathbb{B}^n)$ (cf. Subsecţiunea 1.2.4), atunci când $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^n)$ este un operator liniar cu $k_+(\mathbf{A}) < 2m(\mathbf{A})$. Avem un rezultate de convergenţă şi pentru familia Carathéodory $\mathcal{N}_{\mathbf{A}}$, unde $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^n)$ este astfel încât $m(\mathbf{A}) > 0$. În final, considerăm o aplicaţie a teoremei de convergenţă dominată de mai sus ce pune în evidentă o condiţie suficientă pentru $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încât să avem $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n) = S^0(\mathbb{B}^n)$, oricare ar fi $t \geq 0$.

Menţionăm că această secţiune se bazează pe rezultate originale obţinute de Hamada, Iancu, Kohr [59].

4.3.1 Rezultate de convergenţă pentru $\widetilde{S}_A^t(\mathbb{B}^n)$ şi familii accesibile

În această subsecţiune, considerăm dependenţa familiei $\widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n)$ în funcţie de $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$, unde $T \geq 0$ (a se vedea [59]; cf. [58, Proposition 3.15]). Următoarele rezultate pot fi privite ca fiind teoreme de *convergenţă dominată*. În următoarea subsecţiune vom aplica Teorema 4.3.2 pentru a obţine anumite rezultate ce se bazează pe folosirea unor operatori dependenţi de timp ce sunt funcţii în treaptă (cf. Propoziţia 4.3.5 şi Teorema 4.3.7).

Prezentăm primul rezultat principal al acestei secţiuni, obţinut de Hamada, Iancu, Kohr [59]. Acesta este un rezultat de convergenţă pentru familiile accesibile în timp finit introduse în Subsecţiunea 4.2.3.

Teorema 4.3.1. *Fie I intervalul $[T_0, T]$, unde $T > T_0 \geq 0$, şi $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încât* $\operatorname{ess\,inf}_{t\in I} m(A(t)) > 0$. *Fie $M > 0$ şi $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir în $\widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încât $\|A_k(t)\| \leq M$, a.p.t. $t \in I$ şi oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Dacă*

$$A_k(t) \to A(t), \text{ când } k \to \infty, \text{ a.p.t. } t \in I,$$

atunci

$$\rho(\widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, (\mathcal{N}_{A_k(t)})_{t\in I}), \widetilde{\mathcal{R}}_T(id_{\mathbb{B}^n}, (\mathcal{N}_{A(t)})_{t\in I})) \to 0, \text{ când } k \to \infty.$$

Prezentăm următorul rezultat principal al acestei secţiuni, obţinut de Hamada, Iancu, Kohr [59]. Acesta reprezintă o teoremă de convergenţă dominată pentru familii de aplicaţii cu reprezentare parametrică generalizată pe $\mathbb{B}^n$ în raport cu un operator dependent de timp $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

Teorema 4.3.2. *Fie $T \geq 0$ şi $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încât* $\operatorname{ess\,inf}_{t\geq T} m(A(t)) > 0$. *Fie $M > 0$, $\alpha \in L^1([T,\infty), \mathbb{R})$ şi $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir în $\widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încât , a.p.t. $t \geq T$ şi pentru orice $k \in \mathbb{N}$, să avem: $\|A_k(t)\| \leq M$ şi $\|V_k(T,t)^{-1}\| e^{-2\int_T^t m(A_k(\tau))d\tau} \leq \alpha(t)$, unde $V_k(T,\cdot)$ este unica soluţie pe $[T,\infty)$ a problemei cu valoare iniţială* (4.1.1) *asociată lui A_k. Dacă*

$$A_k(t) \to A(t), \text{ când } k \to \infty, \text{ a.p.t. } t \geq T,$$

atunci

$$\rho(\widetilde{S}_{A_k}^T(\mathbb{B}^n), \widetilde{S}_A^T(\mathbb{B}^n)) \to 0, \text{ când } k \to \infty.$$

Pentru operatori dependenţi de timp constanţi (cf. Observaţia 4.1.8), avem următorul rezultat, obţinut de Hamada, Iancu, Kohr [59].

Teorema 4.3.3. *Fie* $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^n)$ *astfel încât* $k_+(\mathbf{A}) < 2m(\mathbf{A})$*, şi fie* $(\mathbf{A}_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *un şir în* $L(\mathbb{C}^n)$ *astfel încât* $\mathbf{A}_l \to \mathbf{A}$*, când* $l \to \infty$*. Atunci există* $l_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $S^0_{\mathbf{A}_l}(\mathbb{B}^n)$ *este compactă pentru* $l \geq l_0$*, şi* $\rho(S^0_{\mathbf{A}_l}(\mathbb{B}^n), S^0_{\mathbf{A}}(\mathbb{B}^n)) \to 0$*, când* $l \to \infty$*.*

Încheiem această subsecţiune cu următorul rezultat de convergenţă pentru familia $\widehat{S}_{\mathbf{A}}(\mathbb{B}^n)$ a aplicaţiilor spiralate în raport cu $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^n)$, unde $k_+(\mathbf{A}) < 2m(\mathbf{A})$, obţinut de Hamada, Iancu, Kohr [59].

Teorema 4.3.4. *Fie* $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^n)$ *astfel încât* $k_+(\mathbf{A}) < 2m(\mathbf{A})$*, şi fie* $(\mathbf{A}_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *un şir în* $L(\mathbb{C}^n)$ *astfel încât* $\mathbf{A}_l \to \mathbf{A}$*, când* $l \to \infty$*. Atunci există* $l_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\widehat{S}_{\mathbf{A}_l}(\mathbb{B}^n)$ *este compactă pentru* $l \geq l_0$*, şi* $\rho(\widehat{S}_{\mathbf{A}_l}(\mathbb{B}^n), \widehat{S}_{\mathbf{A}}(\mathbb{B}^n)) \to 0$*, când* $l \to \infty$*.*

4.3.2 Caracterizări analitice ale unor aplicaţii din $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n)$

În această subsecţiune, deducem anumite condiţii suficiente pentru $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ astfel încât să aibe loc egalitatea $\widetilde{S}^t_A(\mathbb{B}^n) = S^0(\mathbb{B}^n)$, pentru $t \geq 0$. Primul rezultat este o generalizare a lui [44, Theorem 3.12] şi a fost obţinut în [59].

Propoziţia 4.3.5. *Fie* $k \in \mathbb{N}$*,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k > 0$*, şi fie* $E_1, \ldots, E_k \in L(\mathbb{C}^n)$ *astfel încât* $E_i + E_i^* = 2\alpha_i I_n$*, oricare ar fi* $i \in \{1, \ldots, k\}$*. Fie* $0 = T_0 < T_1 < \ldots < T_{k-1} < T_k = \infty$ *şi fie* $A : [0, \infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ *dat de*

$$A(t) = \begin{cases} E_1, & \text{pentru } t \in [T_0, T_1) \\ \vdots & \\ E_k, & \text{pentru } t \in [T_{k-1}, T_k). \end{cases}$$

Atunci $\widetilde{S}^T_A(\mathbb{B}^n) = S^0(\mathbb{B}^n)$*, oricare ar fi* $T \geq 0$*.*

Având în vedere Propoziţiile 4.1.15 şi 4.3.5, avem următorul exemplu din [59].

Exemplul 4.3.6. Fie $E = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ şi $T > 0$. Fie $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ dat de

$$A(t) = \begin{cases} E, & \text{pentru } t \in [0, T) \\ I_2, & \text{pentru } t \in [T, \infty). \end{cases}$$

Atunci $\widetilde{S}^s_A(\mathbb{B}^2) = S^0(\mathbb{B}^2)$, oricare ar fi $s \geq 0$, dar nu există niciun $\mathbf{A} \in L(\mathbb{C}^2)$ cu $k_+(\mathbf{A}) < 2m(\mathbf{A})$ şi nicio funcţie măsurabilă $a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât să avem (4.1.7) şi $A(t) = a(t)\mathbf{A}$, a.p.t. $t \geq 0$.

Pe baza Teoremei 4.3.2 şi Propoziţiei 4.3.5, avem următorul rezultat obţinut de Hamada, Iancu, Kohr [59]. Acest rezultat îmbunătăţeşte Propoziţia 4.3.5 (cf. Propoziţia 4.1.15 pentru $\mathbf{A} = I_n$ şi [44, Theorem 3.12]).

Teorema 4.3.7. *Fie* $A : [0, \infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ *o aplicaţie măsurabilă astfel încât* $\operatorname{ess\,inf}_{t\geq 0} m(A(t)) > 0$, $\operatorname{ess\,sup}_{t\geq 0}\|A(t)\| < \infty$*, şi a.p.t.* $t \geq 0$ *există* $\alpha(t) > 0$ *astfel încât* $A(t) + A(t)^* = 2\alpha(t) I_n$*. Atunci* $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ *şi* $\widetilde{S}^T_A(\mathbb{B}^n) = S^0(\mathbb{B}^n)$*, oricare ar fi* $T \geq 0$*.*

Bibliografie

Listă selectivă

[1] Abate, M., Bracci, F., Contreras, M., Diaz-Madrigal, S.: *The evolution of Loewner's differential equations*, Eur. Math. Soc. Newsl., **78** (2010), 31–38.

[2] Andersén, E., Lempert, L.: *On the group of holomorphic automorphisms of* $\mathbb{C}^n$, Invent. Math., **110** (1992), 371–388.

[3] Andrica (Chirilă), T.: *Contributions in the geometric function theory in* $\mathbb{C}^n$, Ph.D. Thesis, Babeş-Bolyai University, 2013.

[4] Arosio, L.: *Resonances in Loewner equations*, Adv. Math., **227** (2011), 1413–1435.

[5] Arosio, L: *Resonances and direct limits in Loewner equations*, Ph.D. thesis, Sapienza Università di Roma, 2011.

[6] Arosio, L.: *Basins of attraction in Loewner equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **37** (2012), 563–570.

[7] Arosio, L., Bracci, F.: *Infinitesimal generators and the Loewner equation on complete hyperbolic manifolds*, Anal. Math. Phys., **1 (4)** (2011), 337–350.

[8] Arosio, L., Bracci, B., Hamada, H. Kohr, G.: *An abstract approach to Loewner chains*, J. Anal. Math., **119** (2013), 89–114.

[9] Arosio, L., Bracci, F., Wold, E.F.: *Embedding Univalent Functions in Filtering Loewner Chains in Higher Dimensions*, Proc. Amer. Math. Soc., **143** (2015), 1627–1634.

[10] Arosio, L., Bracci, F., Wold, E.F.: *Solving the Loewner PDE in complete hyperbolic starlike domains of* $\mathbb{C}^n$, Adv. Math. **242** (2013), 209–216.

[11] Barnard, R.W., FitzGerald, C.H., Gong, S.: *The growth and 1/4- theorems for starlike mappings in* $\mathbb{C}^n$, Pacif. J. Math., **150** (1991), 13–22.

[12] Becker, J.: *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. Reine Angew. Math., **255** (1972), 23–43.

[13] Becker, J., Pommerenke, C.: *Schlichtheitskriterien und Jordangebiete*, J. Reine Angew. Math., **354** (1984), 74–94.

[14] Bieberbach, L.: *Über die Koeffizienten der jenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsb., **138** (1916), 940–955.

[15] Bracci, F.: *Shearing process and an example of a bounded support function in* $S^0(\mathbb{B}^2)$, Comput. Methods Funct. Theory, **15** (2015), 151–157.

[16] Bracci, F., Contreras, M.D., Díaz-Madrigal, S.: *Evolution Families and the Loewner Equation I: the unit disc*, J. Reine Angew. Math., **672** (2012), 1–37.

[17] Bracci, F., Contreras, M.D., Díaz-Madrigal, S.: *Evolution families and the Loewner equation II: complex hyperbolic manifolds*, Math. Ann., **344** (2009), 947–962.

[18] Bracci, F., Graham, I., Hamada, H., Kohr, G.: *Variation of Loewner chains, extreme and support points in the class S^0 in higher dimensions*, Constructive Approx., to appear, DOI 10.1007/s00365-015-9302-6.

[19] De Branges, L.: *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Mathematica, **154** (1985), 137–152.

[20] Cartan, H.: *Sur la possibilité d'étendre aux fonctions de plusieurs variables complexes la théorie des fonctions univalentes*, 129-155. Note added to P. Montel, Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[21] Chirilă, T., Hamada, H., Kohr, G.: *Extreme points and support points for mappings with g-parametric representation in $\mathbb{C}^n$*, Mathematica (Cluj), **56(79)** (2014), pp. 21–40.

[22] Chuaqui, M.: *Applications of subordination chains to starlike mappings in $\mathbb{C}^n$*, Pacif. J. Math., **168** (1995), 33–48.

[23] Contreras, M., Diaz-Madrigal, S., Gumenyuk, P.: *Loewner chains in the unit disk*, Revista Matemtica Iberoamericana, **26** (2010), 975–1012.

[24] Conway, J.: *Functions of One Complex Variable II*, Springer-Verlag, New York Inc., 1995.

[25] Cristea, M.: *Univalence criteria starting from the method of Loewner chains*, Complex Anal. Oper. Theory, **5** (2011), 863–880.

[26] Cristea, M.: *The method of Loewner chains in the study of the univalence of C^2 mappings*, Mathematica, **55(78)**, no. 1 (2013), 22–38.

[27] Curt, P.: *Special Chapters of Geometric Function Theory of Several Complex Variables*, Editura Albastra, Cluj-Napoca, 2001.

[28] Curt, P., Kohr, G.: *Subordination chains and Loewner differential equation in several complex variables*, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect. A, **57** (2003), 35–43.

[29] Curt, P., Kohr, G.: *Properties of subordination chains and transition mappings in several complex variables*, Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat., **27** (2004), 11–18.

[30] Curt, P, Pascu, N.: *Loewner chains and univalence criteria for holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$*, Bull. Malaysian Math. Soc., **18** (1995), 45–48.

[31] Dalec'kiĭ, Ju. L., Kreĭn, M. G.: *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1974.

[32] Dunford, N., Schwartz, J.: *Linear Operators. Part I: General Theory*, Interscience Publishers Inc., New York, 1958.

[33] Duren, P.: *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[34] Duren, P., Graham, I., Hamada, H., Kohr, G.: *Solutions for the generalized Loewner differential equation in several complex variables*, Math. Ann., **347** (2010), 411–435.

[35] Duren, P.L., Rudin, W.: *Distortion in several variables*, Complex Variables, **5** (1986), 323–326.

[36] Elin, M., Reich, S., Shoikhet, D.: *Complex Dynamical Systems and the Geometry of Domains in Banach Spaces*, Dissertationes Math., **427** (2004), 1–62.

[37] Fericean, D.: *Techniques of potential theory and geometric function theory in the study of some problems in fluid mechanics*, Ph.D. thesis, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, 2012.

[38] Goluzin, G.M.: *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, Translations of Mathematical Monographs, vol. **26**, American Mathematical Society, Rhode Island, 1969.

[39] Gong, S.: *Convex and Starlike Mappings in Several Complex Variables*, Kluwer, Dordrecht, 1998.

[40] Goodman, G.S.: *Univalent Functions and Optimal Control*, Ph.D. Thesis, Stanford Univ., 1968.

[41] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G.: *Parametric representation of univalent mappings in several complex variables*, Canadian J. Math., **54** (2002), 324–351.

[42] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G.: *On Subordination Chains with Normalization Given by a Time-dependent Linear Operator*, Complex Anal. Oper. Theory, **5** (2011), 787–797.

[43] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G.: *Extremal problems and g-Loewner chains in* $\mathbb{C}^n$ *and reflexive complex Banach spaces*, In: Topics in Mathematical Analysis and Applications (eds. T.M. Rassias and L. Toth), Springer, **94** (2014), 393–424.

[44] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: *Asymptotically spirallike mappings in several complex variables*, J. Anal. Math., **105** (2008), 267–302.

[45] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: *Spirallike mappings and univalent subordination chains in* $\mathbb{C}^n$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., vol. **VII** (2008), 1-24.

[46] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: *Extreme points, support points and the Loewner variation in several complex variables*, Sci. China Math., **55** (2012), 1353–1366.

[47] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: *Univalent subordination chains in reflexive complex Banach spaces*, Contemp. Math. (AMS), **591** (2013), 83–111.

[48] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: *Extremal properties associated with univalent subordonation chains in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann., **359** (2014), 61–99.

[49] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: *Support points and extreme points for mappings with A-parametric representation in* $\mathbb{C}^n$, J. Geom. Anal., to appear, DOI 10.1007/s12220-015-9600-z.

[50] Graham, I., Kohr, G.: *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.

[51] Graham, I., Kohr, G., Kohr, M.: *Loewner chains and parametric representation in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl., **281** (2003), 425–438.

[52] Graham, I., Kohr, G., Pfaltzgraff, J.A.: *The general solution of the Loewner differential equation on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$, Contemp. Math. (AMS), **382** (2005), 191–203.

[53] Graham, I., Kohr, G., Pfaltzgraff, J.A.: *Parametric representation and linear functionals associated with extension operators for biholomorphic mappings*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **52** (2007), 47–68.

[54] Gurganus, K.: Φ*-like holomorphic functions in* $\mathbb{C}^n$ *and Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **205** (1975), 389–406.

[55] Gustafsson, B., Vasil'ev, A.: *Conformal and Potential Analysis in Hele-Shaw Cells*, Birkhäuser, 2006.

[56] Hallenbeck, D., MacGregor, T.: *Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory*, Pitman, London, 1984.

[57] Hamada, H.: *Polynomially bounded solutions to the Loewner differential equation in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl., **381** (2011), 179–186.

[58] Hamada, H., **Iancu, M.**, Kohr, G.: *Extremal problems for mappings with generalized parametric representation in* $\mathbb{C}^n$, submitted.

[59] Hamada, H., **Iancu, M.**, Kohr, G.: *Convergence results for families of univalent mappings on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$, submitted.

[60] Hamada, H., Kohr, G., Muir, J.R.: *Extensions of* L^d*-Loewner chains to higher dimensions*, J. Anal. Math., **120** (2013), 357–392.

[61] Hayman, W.: *Multivalent Functions*, 2nd edn., Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[62] **Iancu, M.**: *Some applications of variation of Loewner chains in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl., **421** (2015), 1469–1478.

[63] **Iancu, M.**: *A density result for parametric representations in several complex variables*, Comput. Methods Funct. Theory, **15** (2015), 247–262.

[64] **Iancu, M.**: *On reachable families of the Loewner differential equation in several complex variables*, Complex Anal. Oper. Theory, to appear, DOI: 10.1007/s11785-015-0461-z.

[65] Jurdjevic, V.: *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[66] Kirwan, W.E.: *Extremal properties of slit conformal mappings*, In: Brannan, D., Clunie, J. (eds.) Aspects of Contemporary Complex Analysis, pp. 439–449, Academic Press, London-New York, 1980.

[67] Kirwan, W.E., Schober, G.: *New inequalities from old ones*, Math. Z., **180** (1982), 19–40.

[68] Kohr, G.: *Using the method of Löwner chains to introduce some subclasses of biholomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **46** (2001), 743–760.

[69] Kufarev, P.P.: *On one parameter families of analytic functions*, Mat. Sb., **13** (1943), 87–118.

[70] Loewner, K.: *Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I*, Math. Ann., **89** (1923), 103–121.

[71] Pascu, M.N.: *Scaling coupling of reflecting Brownian motions and the hot spots problem*, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), no. 11, 4681–4702.

[72] Pascu, N.N.: *Loewner chains and univalence criteria*, Mathematica (Cluj), **37(60)** (1995), 215–217.

[73] Pascu, N.N.: *Method of Loewner's chains for constructing univalency criteria*, J. Anal., **4** (1996), 35–40.

[74] Pell, R.: *Support point functions and the Loewner variation*, Pacific J. Math., **86** (1980), 561–564.

[75] Pfaltzgraff, J.A.: *Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann., **210** (1974), 55–68.

[76] Pfaltzgraff, J.A.: *Subordination chains and quasiconformal extension of holomorphic maps in* $\mathbb{C}^n$, Ann. Acad. Scie. Fenn. Ser. A I Math., **1** (1975), 13–25.

[77] Poincaré, H.: *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **23** (1907), 185–220.

[78] Pommerenke, Ch.: *Über die Subordination analytischer Funktionen*, J. Reine Angew. Math., **218** (1965), 159–173.

[79] Pommerenke, Ch.: *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1975.

[80] Poreda, T.: *On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc in* $\mathbb{C}^n$ *which have the parametric representation, I-the geometrical properties*, Ann. Univ. Mariae Curie Skl. Sect. A, **41** (1987), 105–113.

[81] Poreda, T.: *On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc in* $\mathbb{C}^n$ *which have the parametric representation, II-the necessary conditions and the sufficient conditions*, Ann. Univ. Mariae Curie Skl. Sect. A., **41** (1987), 115–121.

[82] Poreda, T.: *On the univalent subordination chains of holomorphic mappings in Banach spaces*, Comment. Math., **28** (1989), 295–304.

[83] Poreda, T.: *On Generalized Differential Equations in Banach Spaces. Dissertationes Math*, (Rozprawy Mat.), **310** (1991), 1–50.

[84] Prokhorov, D.V.: *Bounded univalent functions. In: Kühnau, R. (ed.) Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory*, vol. **I**, pp. 207–228, Elsevier, Amsterdam, 2002.

[85] Range, M.: *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer, New York, 1986.

[86] Reich, S., Shoikhet, D.: *Nonlinear Semigroups, Fixed Points, and Geometry of Domains in Banach Spaces*, Imperial College Press, London, 2005.

[87] Roper, K., Suffridge, T.J.: *Convexity properties of holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Trans. Amer. Math. Soc., **351** (1999), 1803–1833.

[88] Rosenblum, M., Rovnyak, J.: *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*, Birkhäuser Verlag, Boston, 1994.

[89] Roth, O.: *A remark on the Loewner differential equation*, Comput. Methods Funct. Theory 1997 (Nicosia), Ser. Approx. Decompos, vol. **11**, pp. 461–469, World Sci. Publ. River Edge, NJ, 1999.

[90] Roth, O.: *Control theory in* $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, Diss. Bayerischen Univ. Wuerzburg, 1998.

[91] Roth, O.: *Pontryagin's maximum principle in geometric function theory*, Complex Variables, **41** (2000), 391–426.

[92] Roth, O.: *Pontryagin's maximum principle for the Loewner equation in higher dimensions*, Canad. J. Math., **67** (2015), 942–960.

[93] Schleißinger, S.: *On support points on the class* $S^0(\mathbb{B}^n)$, Proc. Amer. Math. Soc., **142** (2014), 3881–3887.

[94] Schleißinger, S.: *Embedding Problems in Loewner Theory*, Ph.D. thesis, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, 2014.

[95] Suffridge, T.J.: *Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions*, In: Lecture Notes Math, vol. **599**, pp. 146–159, Springer, Berlin, 1977.

[96] Voda, M.: *Loewner theory in several complex variables and related problems*, Ph.D. thesis, Univ. Toronto, 2011.

[97] Voda, M.: *Solution of a Loewner chain equation in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl., **375** (2011), 58–74.