

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI



Despre geometria și aplicațiile șirurilor recurente
în planul complex

Teză de Doctorat - Rezumat

Conducător științific:

Prof. Univ. Dr. Andrica Dorin

Doctorand:

Dr. Ovidiu Bagdasar

CLUJ-NAPOCA
2015

Cuprins

| | |
|--|-------------|
| Introducere | iii |
| Mulțumiri | viii |
| 1 Noțiuni introductive | 1 |
| 1.1 Șiruri recurente liniare (SRL) | 1 |
| 1.2 Recurențe omografice: orbite și periodicitate | 3 |
| 1.3 Elemente de geometrie complexă și teoria numerelor | 5 |
| 2 Șiruri Horadam periodice | 8 |
| 2.1 Șiruri Horadam | 8 |
| 2.2 Periodicitatea șirurilor Horadam complexe | 10 |
| 2.3 Geometria orbitelor Horadam periodice | 13 |
| 2.4 Enumerarea șirurilor Horadam periodice | 16 |
| 2.4.1 Numărul orbitelor Horadam de lungime fixă $H_P(k)$ | 16 |
| 2.4.2 Limite asimptotice pentru $H_P(k)$ | 19 |
| 3 Șiruri Horadam neperiodice și aplicații | 20 |
| 3.1 Rezultate preliminare și orbite degenerate | 20 |
| 3.2 Un atlas de orbite Horadam | 22 |
| 3.2.1 Orbite stabile: $r_1 = r_2 = 1$ | 22 |
| 3.2.2 Orbite cvasi-convergente: $0 \leq r_1 < r_2 = 1$ | 25 |
| 3.2.3 Orbite convergente: $0 \leq r_1 \leq r_2 < 1$ | 27 |
| 3.2.4 Orbite divergente: $1 < r_2$ | 30 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.3 | Un generator de numere pseudo-aleatoare bazat pe șiruri Horadam . . . | 33 |
| 3.3.1 | Simulări Monte Carlo | 34 |
| 4 | Geometria orbitelor de șiruri recurente liniare complexe | 36 |
| 4.1 | Rezultate preliminare | 36 |
| 4.2 | Condiții de periodicitate | 38 |
| 4.2.1 | Rădăcini distincte | 38 |
| 4.2.2 | Rădăcini egale | 40 |
| 4.2.3 | Rădăcini distincte cu multiplicități arbitrare | 41 |
| 4.3 | Geometria și numărul orbitelor periodice | 42 |
| 4.3.1 | Limite geometrice ale orbitelor periodice | 42 |
| 4.3.2 | Structura geometrică a orbitelor periodice | 42 |
| 4.3.3 | Enumerarea orbitelor periodice de lungime fixă | 42 |
| 4.4 | Orbite generate de rădăcini ale unității | 43 |
| 4.5 | Un mini-atlas de orbite ale SRL complexe neperiodice | 44 |
| 4.5.1 | Orbite stabile: $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 1$ | 44 |
| 4.5.2 | Orbite cvasi-convergente: $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_m = 1$ | 48 |
| 4.5.3 | Orbite convergente: $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_m < 1$ | 50 |
| 4.5.4 | Orbite divergente: $r_m > 1$ | 50 |
| 5 | Șiruri întregi folosite în enumerarea recurențelor liniare periodice | 52 |
| 5.1 | Tuple ordonate cu același lcm și gcd | 52 |
| 5.1.1 | Tuple de numere naturale cu același lcm | 52 |
| 5.1.2 | Tuple de numere naturale cu același lcm și gcd | 53 |
| 5.2 | Tuple monotone de numere naturale având același lcm | 55 |
| 5.2.1 | $LCM(k; n)$, $LCM^{<}(k; n)$ și $LCM^{\leq}(k; n)$ pentru $k = 3$ | 55 |
| 5.2.2 | Coeficienții recurențelor | 56 |
| 5.3 | Noi contribuții la enciclopedia de șiruri întregi OEIS | 56 |
| | Apendice | 58 |
| | Bibliografie | 59 |

Introducere

Numerele lui Fibonacci pot fi definite prin relația de recurență $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, pornind de la valorile inițiale $F_0 = 1$ și $F_1 = 1$. Pentru termenul general al șirului există diferite expresii și formule directe (de tip Binet), care implică două rădăcini ale ecuației caracteristice $x^2 - x - 1$. Rădăcina mai mare este cunoscută drept *tăietura de aur* $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803\,39887 \dots$, asociată în arte cu proporțiile ideale [115].

Dacă cercul se împarte în două arce a căror proporție este numărul de aur, arcul mai scurt subîntinde un unghi de aproximativ $\phi = 137.5^\circ$, numit *unghiul de aur*. Acesta a fost utilizat pentru simularea filotaxiei [95, 119], în algoritmi de căutare a minimelor de funcții unimodale [51], sau în designuri optime pentru centrale cu energie solară [96].

În urma lucrărilor inițiate de către AF Horadam în anii 1960, recurențele complexe generale de ordin doi sunt numite șiruri Horadam. Acestea pot fi exprimate sub forma

$$w_{n+2} = pw_{n+1} + qw_n, \quad w_0 = a, w_1 = b, \quad n \geq 0,$$

unde în cel mai general context coeficienții a, b, p și q sunt numere complexe arbitrare.

Horadam a investigat întâi proprietățile de bază ale acestei recurențe (atât reale, cât și complexe) [52, 53, 55], apoi legături cu diverse tipuri de funcții [54, 56]. Se poate observa că ambele tipuri de polinoame Tschebyscheff— $T_n(x)$ (din primul tip) și $U_n(x)$ (din al doilea tip)—reprezintă soluții ale recurenței de mai sus, atunci când $p = 2x$ și $q = -1$, cu (pentru $n \geq 0$) $T_n(x) = w_n(1, x; 2x, -1)$ și $U_n(x) = w_n(1, 2x; 2x, -1)$ [77]. Numeroase rezultate despre șirurile Horadam au fost obținute ulterior.

În anii 1960-70, Zeitlin a cercetat funcții generatoare pentru produse de șiruri recurente, identități pentru puteri, determinanți și identități generale pentru șirurile Horadam [125–128]. În 1980-90 Horadam și Shannon au studiat legături cu identități Catalan [61], funcții eliptice și serii Lambert [57], șiruri de ordin general [58] și șiruri care implică polinoame [59, 60]. Mai multe identități au fost obținute de Lee [84], în timp ce Zhang a explorat șiruri Horadam întregi [129–131]. Extensii cu privire la recurențe speciale [111], ideale [108] și partiții [109], au fost de asemenea explorate, precum și rezultate de bază cu privire la recurențele de ordin trei într-un context general [110], [124].

În anii 2000, Kiliç et al. au formulat identități pentru șirurile Horadam [67], implicând sume binomiale [68], funcții generatoare [69] și metode matriceale [70]. Alte rezultate au fost prezentate în [47, 86] și recent de Larcombe, Bagdasar și Fennesey [78, 79].

Legături între șirurile Fibonacci și Horadam au fost investigate de deKerf [36], Hilton [50] și Morgado [93], împreună cu rezultate pentru sume reciproce de termeni [2, 3], [44], [63], [76], [114], [116], polinoame [48], [62], [105], sau proprietăți algoritmice [104].

La finalizarea lucrării de sinteză [77], autorii au scris profesorului Horadam pentru a îl informa cu privire la evoluțiile recente în domeniul pe care l-a inițiat. În scrisoarea de răspuns, profesorul Horadam a menționat (detalii se găsesc în Apendice):

“Sunt foarte flatat de tonul lucrării . . . [care este] cuprinzătoare și detaliată, oferind o perspectivă aprofundată asupra istoriei șirului.”

Șirurile recurente liniare pot fi uneori periodice [30, 106, 118]. Primele exemple de șiruri Horadam periodice au fost evidențiate de Horadam în [53, (2.35), (2.36), p.166], iar Clapperton, Larcombe și Fennesey au oferit noi exemple [31, 80]. Condiții necesare și suficiente pentru periodicitate au fost stabilite de Bagdasar și Larcombe pentru șirurile Horadam [18], iar apoi pentru șirurile recurente liniare complexe de ordin arbitrar [20].

Această teză reprezintă primul studiu aprofundat cu privire la geometria și structura șirurilor Horadam. Pornim de la contextul orbitelor periodice, apoi urmează un atlas de orbite Horadam ne-periodice. Rezultatele sunt apoi generalizate la șiruri recurente liniare complexe de ordin arbitrar. Pană la ora actuală, studiul a inspirat un generator de numere pseudo-aleatoare, în timp ce alte aplicații sunt anticipate în domenii cum ar fi criptografia, algoritmi de căutare și optimizarea geometrică.

Se așteaptă ca șirurile Horadam să fie utile și în rezolvarea problemelor de optimizare în planul complex. În acest scop, metoda de căutare Fibonacci unidimensională a lui Kiefer [66] ar putea fi generalizată prin noi concepte de unimodalitate, legate de cele deja existente pentru cazurile de tip scalar [51], sau vectorial (multi-obiectiv) [85].

Prezenta teză este împărțită în cinci capitole.

Capitolul 1 prezintă noțiuni și rezultate fundamentale. Secțiunea 1.1 prezintă concepte cheie din teoria șirurilor recurente liniare, și diverse exemple de recurențe de ordin doi. Secțiunea 1.2 este dedicată recurențelor omografice în planul complex [12], care motivează studiul condițiilor de periodicitate în contextul altor recurențe complexe. Secțiunea 1.3 prezintă definiții de bază din geometria planului complex [33, 34], funcții aritmetice [13, 14, 92], precum și anumite rezultate din teoria numerelor referitoare la densitate și independența liniară [10, 11, 43, 46].

Capitolul 2 este dedicat orbitelor periodice ale șirurilor complexe Horadam. Acestea sunt recurențe liniare de ordin doi, depinzând de patru parametri din planul complex: două condiții inițiale și doi coeficienți de recurență. Secțiunea 2.1 prezintă concepte de bază și formule de tip Binet pentru termenul general al șirului, pentru cazurile în care rădăcinile ecuației caracteristice pătratice (denumite *generatori*) sunt egale (cazul degenerat) sau distincte (cazul ne-degenerat). În Secțiunea 2.2 sunt formulate condiții necesare și suficiente care asigură periodicitatea șirurilor Horadam în context general. În Secțiunea 2.3 este discutată structura geometrică a orbitelor Horadam periodice. Apoi, Secțiunea 2.4 stabilește numărul de șiruri Horadam de lungime fixă $k \leq 1$, notat cu $H_p(k)$. Rezultatele din acest capitol au fost publicate de către Bagdasar și Larcombe în lucrările [18, 19], și de Bagdasar, Larcombe și Anjum [21, 22].

Capitolul 3 este dedicat șirurilor Horadam ne-periodice și aplicațiilor lor. Mai întâi, orbitele degenerate sunt discutate în Secțiunea 3.1. În Secțiunea 3.2 se prezintă un atlas de orbite Horadam, pus laolaltă de Bagdasar [16]. Acesta cuprinde orbite stabile (finite, sau dense în submulțimi uni- sau bi-dimensionale ale planului complex), cvasi-convergente, convergente sau divergente în planul complex. Secțiunea 3.3 analizează un generator de numere pseudo-aleatoare propus de Bagdasar și Chen în [17].

Capitolul 4 prezintă generalizări ale rezultatelor formulate în Capitolele 2 și 3, la șiruri recurente liniare complexe de ordin superior (numite și șiruri Horadam generalizate). În Secțiunea 4.1 se discută structura spațiului de soluții al șirurilor recurente liniare. În Secțiunea 4.2 se prezintă condiții necesare și suficiente de periodicitate pentru șirurile recurente liniare complexe de ordin arbitrar, formulate de către Bagdasar și Larcombe [20]. În Secțiunea 4.3 stabilim limite geometrice pentru regiuni care circumscriu orbite periodice. De asemenea determinăm structura geometrică și numărul orbitelor periodice de lungime dată. Secțiunea 4.4 prezintă proprietăți geometrice ale orbitelor produse de rădăcini ale unității. Un mini-atlas cuprinzând orbite de șiruri Horadam generalizate de ordin trei în planul complex este prezentat în Secțiunea 4.5.

Capitolul 5 prezintă anumite șiruri de numere întregi, relevante pentru enumerarea șirurilor recurente liniare periodice în planul complex. În Secțiunea 5.1 se enumeră tuplele ordonate de întregi, care au același cel mai mic multiplu comun (sau cel mai mare divizor comun). Rezultatele au fost publicate de către Bagdasar în [15]. Funcțiile aritmetice care enumeră tuplele (strict) crescătoare cu același cmmmc sunt analizate în Secțiunea 5.2, și sunt folosite în enumerarea șirurilor Horadam generalizate periodice caracterizate în [17]. În Secțiunea 5.3 se discută noi adiții la On-Line Encyclopedia of Integer Sequences OEIS (baza de date de șiruri întregi) (A245019, A245020, A247513, A247516, A247517) de către Bagdasar, și interpretări noi la șiruri deja existente.

Lista lucrărilor publicate:

Rezultatele originale prezentate în această teză au fost publicate în următoarele lucrări:

- **Bagdasar, O.**, Larcombe, P. J., *On the characterization of periodic complex Horadam sequences*, *Fib. Quart.*, **51.1** (2013), 28–37.
- **Bagdasar, O.**, Larcombe, P. J., *On the number of complex periodic complex Horadam sequences*, *Fib. Quart.*, **51.4** (2013), 339–347.
- **Bagdasar, O.**, Larcombe, P. J., Anjum, A., *Particular Orbits of Periodic Horadam Sequences*, *Octagon Math. Mag.*, **21.1**, (2013) 87–98.
- **Bagdasar, O.**, Chen., M., *A Horadam-based Pseudo-random Number Generator*, *Proceedings of 16th UKSim, Cambridge* (2014), 226–230.
- **Bagdasar, O.**, Larcombe, P. J., *On the characterization of periodic generalized Horadam sequences*, *J. Differ. Equ. Appl. (ISI)*, **20.7** (2014), 1069–1090.
- **Bagdasar, O.**, *On some functions involving the lcm and gcd of integer tuples*, *Appl. Maths. Inform. and Mech.*, **6.2** (2014), 91–100.
- **Bagdasar, O.**, Popovici N., *Local maximum points of explicitly quasiconvex functions*, *Optim. Lett. (ISI)*, **9** (2015), 769–777.
- **Bagdasar, O.**, Larcombe, P. J., Anjum, A., *On the structure of periodic complex Horadam sequences*, *Carpathian J. Math. (ISI)* (to appear).
- **Bagdasar, O.**, *An atlas of Horadam patterns* (submitted).
- Larcombe, P. J., **Bagdasar, O.**, Fennessey, E. J., *Horadam sequences: a survey*, *Bull. Inst. Combin. Appl.*, **67** (2013), 49–72.
- Larcombe, P. J., **Bagdasar, O.**, Fennessey, E. J., *On A Result of Bunder Involving Horadam Sequences: A Proof and Generalization*, *Fib. Quart.*, **51.2** (2013), 174–176.
- Larcombe, P. J., **Bagdasar, O.**, Fennessey, E. J., *On a result of bunder involving Horadam sequences: a new proof*, *Fib. Quart.*, **52.2** (2014), 175–177.
- Vălcan, D., **Bagdasar, O.**, *Generalizations of some divisibility relations in \mathbb{N}* , *Creative Math. & Inf.*, **18.1** (2009), 92–99.

Noi șiruri în OEIS: Rezultatele prezentate în [15] au produs noi șiruri întregi indexate în OEIS: A247517, A245019, A245020, A247513, A247516 [97].

Alte articole sunt încă în curs de pregătire.

Prezentări legate de teză:

Rezultatele din această teză au fost diseminate în următoarele conferințe:

- 6-10 Iulie 2015: BCC25 (British Combinatorial Colloquium), Warwick University, UK; Prezentare: *On the enumeration of integer tuples having the same lcm.*
- 13-21 August 2014: ICM 2014 (International Congress of Mathematicians), Seoul, S. Korea; Prezentare: *On the enumeration of periodic generalized Horadam sequences.*
- 6-11 August 2014: ANTS XI (Algorithmic Number Theory Symposium), GyeongJu, S. Korea; Poster: *On certain computational and geometric properties of Horadam orbits.*
- 26-28 Martie 2014: UKSim2014, Cambridge, UK (Talk, Session Chair); Prezentare: *A Horadam-based Pseudo-random Number Generator.*
- 1-5 Iulie 2013: BCC24 (British Combinatorial Colloquium), Royal Holloway, UK; Prezentare: *Enumeration of periodic Horadam sequences.*

Urmatoarele prezentări și seminarii pe acest subiect au fost susținute:

- 6 Iunie 2015: UBB Cluj, RO, Prezentare pentru comisia de îndrumare: *"On the geometry and applications of complex recurrent sequences"*
- 2 Aprilie 2015: UBB Cluj, RO, Seminarul de Analiză Complexă (30 min): *"On the geometric patterns produced by Horadam sequences in the complex plane"*
- 20 Februarie 2015: TCS Research Group, Loughborough University, UK: *"Complex Horadam sequences: periodicity, enumeration and applications"*
- 16 Februarie 2015: Vorbitor invitat, University of Derby: *"On the Visualisation of Number Sequences"*
- 22 August 2014: Hanbat National University, S. Korea: *"Mathematics of beauty: on recurrences and emotions"*
- 29 Mai 2014: UBB Cluj, RO, Facultatea de Matematică: *"On some properties and applications of Horadam sequences"*
- 29 Octombrie 2013: Open University Mathematics Seminar, UK: *"The geometric patterns of complex Horadam sequences"*

Cuvinte cheie: recurențe liniare în planul complex, structuri geometrice, șiruri Horadam, numere Fibonacci, periodicitate, recurențe omografice, generatoare de numere aleatoare, combinatorică, funcții aritmetice, șiruri întregi, cel mai mic multiplu comun.

Mulțumiri

Terminarea cu succes a unui doctorat, concomitent cu o slujbă permanentă în mediul academic din Marea Britanie, nu avea cum să fie o sarcină ușoară... Pentru acest motiv, permiteți-mi să îi mulțumesc în primul rând lui Dumnezeu, care mi-a dat puterea de a duce la bun sfârșit acest doctorat! Slavă Ție, Dumnezeul meu!

Doresc să îmi exprim deosebita recunoștință față de domnul profesor Dorin Andrica, pentru îndrumarea și suportul oferite în acest proiect. Erudiția matematică și marea dumnealui bunăvoință au avut un rol foarte însemnat. Fără ajutorul său m-aș fi pierdut cel mai probabil demult în labirintul mereu nou al birocrăției academice românești.

Sunt foarte recunoscător celor trei referenți. În primul rând, față de domnul Profesor Thomas Ward, pentru a fi acceptat să călătorească de la Durham la Cluj pentru viva. Apoi, domnului Profesor Radu Gologan care a găsit timp în programul dumnealui încărcat și pentru acest proiect. Datorez sincere mulțumiri doamnei Profesor Gabriela Khor, care a coordonat acest proiect de la început și care, împreună cu doamna Profesor Mirela Khor mi-au oferit un ajutor real, continuu și complex, chiar și când acest proiect de cercetare a evoluat spre un alt domeniu de expertiză.

Sincere mulțumiri domnului Profesor Nicolae Popovici, mentorul meu în matematicile superioare. De când am început să lucrăm împreună pe convexitate și optimizare, viața mea de noapte (matematică) a devenit foarte activă. A fost o onoare și un privilegiu să scriu lucrări cu dumnealui. Datorez mult părinților mei matematici, Mihály Bencze și Lucia Lepădatu, precum și profesorilor de la Facultatea de Matematică și Informatică din cadrul UBB. Fiecare curs a contribuit la devenirea mea ca matematician.

Mulțumiri speciale adresez și Profesorului Peter J. Larcombe de la Universitatea din Derby. El m-a introdus în șirurile Horadam și multe din rezultatele din capitolul al doilea au luat viață în timpul discuțiilor la cafea pe care le-am avut în 2012. Mulțumesc și colegilor mei de la Derby, "Sir Professor" Ashiq, Minsi și Stuart, precum și șefilor mei: Dave, Richard și Nick pentru dedicația cu care promovează matematica la Derby.

Cele mai adânci mulțumiri le aduc Mitropolitului Ioan de la Timișoara, care mi-a arătat că Dumnezeu poate fi lăudat prin formule și ecuații, și care m-a încurajat să continui studiul matematicii. Mulțumesc de asemenea părintelui Dan Ghindea de Nottingham & Liverpool, pentru prietenia, ajutorul și perseverența în rugăciune pentru mine.

Nu în ultimul rând, doresc să mulțumesc familiei mele: soției mele, Ioana, minunatei mele fiice Ștefania, mamei și tatălui meu, super-bunicii mele Ana, socrilor mei, fratelui meu și familiei lui. Toți mi-au simțit lipsa pentru ca eu să pot termina acest proiect!

Noțiuni introductive

În acest capitol sunt prezentate rezultate fundamentale din teoria șirurilor recurente. De asemenea, sunt introduse concepte de bază din geometria planului complex și teoria numerelor, necesare pentru formularea rezultatelor din aceasta teză.

1.1 Șiruri recurente liniare (SRL)

În această secțiune sunt prezentate rezultate cheie din teoria șirurilor recurente liniare.

Definiția 1.1.1. Un *șir recurent liniar* (SRL) reprezintă un șir infinit $\mathbf{w} = (w_0, w_1, w_2, \dots)$ de numere care satisface o relație de recurență de forma

$$w_n = c_1 w_{n-1} + c_2 w_{n-2} + \dots + c_m w_{n-m}, \quad (1.1.1)$$

pentru $m \leq n \in \mathbb{N}$, cu c_1, \dots, c_m ($c_m \neq 0$) constante. Dacă numerele a_1, \dots, a_m satisfac $w_{i-1} = a_i, i = 1, \dots, m$, atunci recurența este de ordin m , și este unic definită.

Polinomul caracteristic asociat cu șirul care satisface (1.1.1) este definit de

$$f(x) = x^m - c_1 x^{m-1} - \dots - c_{m-1} x - c_m, \quad (1.1.2)$$

și dictează proprietățile șirului. Termenul general al recurenței poate fi scris sub forma

$$w_n = p_1(n)z_1^n + \dots + p_m(n)z_m^n,$$

unde z_1, \dots, z_m sunt rădăcinile polinomului caracteristic (1.1.2). Dacă rădăcinile sunt distincte, recurența este numită *simplă* și p_1, \dots, p_m sunt constante.

Numeroase proprietăți și rezultate sunt prezentate în monografia Everest *et al.* [38]. Probleme de decizie privind SRL cu termeni raționali sunt discutate de Ouaknine și Worrell în [99] și alte lucrări.

Problema 1. Este $w_n = 0$ pentru anumite valori n ? (Skolem)

Problema 2. Este $w_n = 0$ un număr infinit de valori n ?

Problema 3. Este $w_n \geq 0$ pentru orice n ? (Positivity)

Problema 4. Este $w_n \geq 0$ tot timpul, cu excepția unui număr finit de valori ale lui n ? (Ultimate Positivity)

În ciuda multor încercări, Problema 1 este încă deschisă, în timp ce Berstel și Mignotte au arătat că Problema 2 este decidabilă [24]. Recent, Ouaknine și Worrell au rezolvat afirmativ Problema 3 pentru SRL simple de ordin $m \leq 9$ [100], respectiv pentru SRL arbitrare de ordin $m \leq 5$ [101]. Problema 4 a fost rezolvată pentru SRL simple [99].

Reducerea ordinului șirurilor recurente liniare

Ordinul unei recurențe liniare poate fi redus, obținând o recurență neliniară. Pentru recurențe de ordin doi, Andrica și Buzeteanu au demonstrat următorul rezultat [8]:

Teorema 1.1.2. Dacă $w_n = c_1 w_{n-1} + c_2 w_{n-2}$ satisfac $c_2 \neq 0$, $w_1 = a_1$ și $w_2 = a_2$, atunci

$$w_n^2 - c_1 w_n w_{n-1} - c_2 w_{n-1}^2 = (-1)^n c_2^{n-2} (a_2^2 - c_1 a_1 a_2 - c_2 a_1^2).$$

Pentru $c_1 = c_2 = 1$ și $a_1 = a_2 = 1$ se obține o identitate pentru numerele Fibonacci

$$F_n^2 - F_n F_{n-1} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}.$$

Aplicații în teoria ecuațiilor diofantice au fost discutate în aceeași lucrare. Rezultatul a fost generalizat pentru recurențe de ordin arbitrar de către aceiași autori în [9].

Șiruri recurente de ordinul doi

Numere Fibonacci și tăietura de aur

Definiția 1.1.3. Numerele lui Fibonacci sunt exemplul clasic de șir recurent. Regula este că fiecare element este obținut adunând cei doi termeni precedenți: [1, Chapter 5]

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0, \quad F_0 = 1, F_1 = 1.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice $x^2 - x - 1 = 0$ pot folosite pentru a produce formule explicite pentru termenul general al șirului. Un exemplu este $F_n = (\varphi^n - \phi^n) / \sqrt{5}$, unde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803\ 39887\dots$ este tăietura de aur (șirul A001622 în OEIS).

În Matematică au aplicații în teoria grafurilor (numere și grafuri Fibonacci) [71], structuri de date (Fibonacci heap) [41], sau algoritmi de căutare (căutare Fibonacci) [66]. Alte rezultate și aplicații sunt date în [27–29], [73], [87–91], și [96].

Șiruri Horadam

Șirurile Horadam sunt o generalizare directă a numerelor Fibonacci în planul complex. Acestea sunt definite prin recurența

$$w_{n+2} = pw_{n+1} + qw_n, \quad w_0 = a, w_1 = b, \quad n \geq 0,$$

unde în cazul cel mai general a, b, p, q sunt coeficienți complecși arbitrari.

Prima lucrare care sistematizează rezultatele produse în ultimii 50 de ani pe tema șirurilor Horadam, a fost elaborată de Larcombe, Bagdasar și Fennesey [77].

Periodicitatea Horadam a fost scoasă în evidență de Clapperton, Larcombe și Fennesey în [31], apoi de către Larcombe și Fennesey [80]. Autorii au evidențiat diverse exemple de șiruri Horadam periodice legate de polinoame Catalan, ca de pildă

$$\begin{aligned} \{w_n(1, 1; 1, -1)\}_{n=0}^{\infty} &= \{1, 1, 0, -1, -1, 0, \dots\} = \{P_n(1)\}_0^{\infty} \\ \{w_n(1, \sqrt{2}; \sqrt{2}, -1)\}_{n=0}^{\infty} &= \{1, \sqrt{2}, 1, 0, -1, -\sqrt{2}, -1, 0, \dots\} = \{\sqrt{2}^n P_n(1/2)\}_0^{\infty}, \end{aligned}$$

unde $P_n(x)$ reprezintă polinomul Catalan de ordin $(n + 1)$ definit în [31].

1.2 Recurențe omografice: orbite și periodicitate

În această secțiune sunt prezentate rezultate privind recurențele omografice: formule ale termenului general pentru șiruri degenerate/ne-degenerate, și condiții pentru convergență, divergență, ca și periodicitate formulate de Andrica și Toader [12].

Definiția 1.2.1. Un șir omografic $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ este definit prin recurența

$$z_{n+1} = \frac{a \cdot z_n + b}{c \cdot z_n + d} \quad z_0 \in \mathbf{C}, \quad (1.2.1)$$

unde a, b, c, d sunt numere complexe care satisfac $c \neq 0 \neq ad - bc$.

Rădăcinile parabolilor de mai jos sunt utile pentru termenul general al (1.2.1).

$$cq^2 + (d - a)q - b = 0, \quad p^2 - (a + d)p + ad - bc = 0. \quad (1.2.2)$$

Cele două parabole au același discriminant $D = (d - a)^2 + 4bc$, în timp ce rădăcinile (1.2.2) notate prin q_1, q_2 și p_1, p_2 satisfac identitățile

$$q_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{D}}{2c}; \quad p_k = cq_k + d, \quad k = 1, 2. \quad (1.2.3)$$

Teorema 1.2.2 (Cazul ne-degenerat, Teorema 2.1 [12]). Dacă $D \neq 0$ atunci z_n este dat de

$$z_n = \frac{q_1 \cdot (z_0 - q_2) \cdot (cq_1 + d)^n - q_2 \cdot (z_0 - q_1) \cdot (cq_2 + d)^n}{(z_0 - q_2) \cdot (cq_1 + d)^n - (z_0 - q_1) \cdot (cq_2 + d)^n}. \quad (1.2.4)$$

Echivalent, se pot obține formule care implică p_1, p_2, c, d și z_0 .

Teorema 1.2.3 (Cazul degenerat, Teorema 2.3 [12]). Dacă $D = 0$ atunci z_n este dat de

$$z_n = \frac{(a + d) \cdot z_0 + n[(a - d) \cdot z_0 + 2b]}{a + d + n(2cz_0 - a + d)}. \quad (1.2.5)$$

Putem defini notația următoare $z = \frac{a+d+\sqrt{D}}{a+d-\sqrt{D}} = \frac{p_2}{p_1} = re^{2\pi i\theta}$, $A = \frac{z_0 - q_2}{z_0 - q_1}$.

Condiția inițială $ad - bc \neq 0$ implică $a + d - \sqrt{D} \neq 0$. Pentru $z \in \{0, 1\}$ obținem $D = 0$, iar pentru $D \neq 0$, formula (1.2.4) este echivalentă cu $z_n = \frac{Aq_1 - q_2z^n}{A - z^n}$.

În ce urmează reformulăm [12, Teorema 3.1], în variabila unică z .

Teorema 1.2.4. Fie $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ o recurență omografică definită de (1.2.1). Avem:

- (a) Dacă $z = 1$, atunci $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge la $(a - d)/2c = (q_2 + q_1)/2$;
- (b) Dacă $|z| < 1$, atunci $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge la q_1 .
- (c) Dacă $|z| > 1$, atunci $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge la q_2 .
- (d) Dacă $|z| = 1$, atunci următoarele cazuri sunt posibile.
 - (d1) Pentru $\theta = p/q \in \mathbb{Q}$ fracție ireductibilă, $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ este periodică în graficul unei curbe.
 - (d2) Pentru $\theta = p/q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ este dens în graficul curbei $w = H(z) = \frac{q_2z - q_1}{z - 1}$.

În Figura 1.1 sunt prezentate o orbită a periodică având 13 puncte (a), și una densă (b).

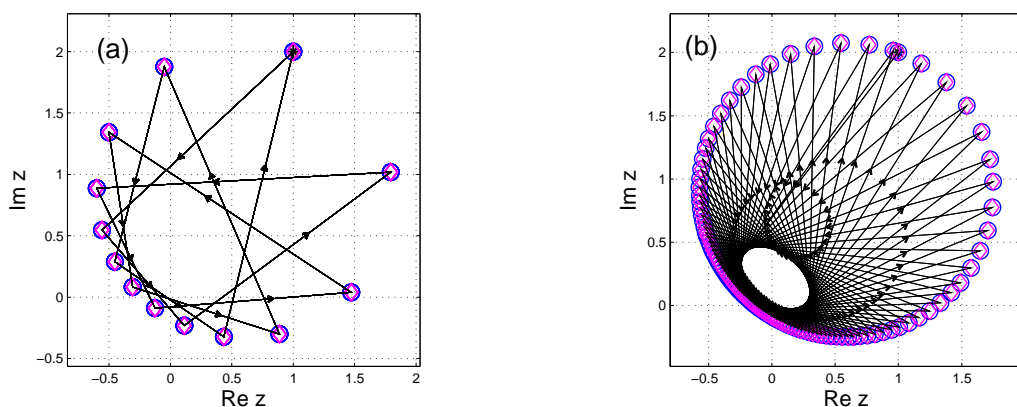


Figura 1.1: Primii 100 de termeni ai $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ din (1.2.1) (romb) și formula directă (cerc) pentru $z_0 = 1 + 2i$ (stea) și $z = re^{2\pi i x}$, unde (a) $r = 1, x = 4/13$; (b) $r = 1, x = \sqrt{2}/4$. pentru $a = 3 + i$, $d = 1 - 2i, b = 2 - 2i$. Săgeata arată creșterea indexului șirului.

1.3 Elemente de geometrie complexă și teoria numerelor

Definiția 1.3.1. (Poligoane stelate) Pentru $k, p \in \mathbb{N}$, poligonul stelat regulat notat prin simbolul Schläfli $\{k/p\}$ se construiește unind fiecare al p -lea punct din cele k vârfuri ale unui poligon regulat (vezi [33, Chapter 2], [34, Chapter 6]).

Definiția 1.3.2. (Graf multipartit) Pentru $k \in \mathbb{N}$, un graf k -partit W are mulțimea nodurilor V partiționată în k mulțimi, cu arce doar între noduri aflate în submulțimi distincte: $G = (V_1, \dots, V_k, E)$ cu $E \subset \{uv \mid u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$. Mulțimea V_i , $i = 1, \dots, k$ este numită nivelul i al lui G [83, p.4]. Un graf 2-partit este numit bipartit.

LCM și GCD pentru tuple naturale

Fie numerele $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$ unde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ sunt prime și a_i, b_i sunt numere naturale. Următoarele identități au loc:

$$\begin{aligned} \gcd(a, b) &= p_1^{\min(a_1, b_1)} p_2^{\min(a_2, b_2)} \dots p_k^{\min(a_k, b_k)}, \\ \text{lcm}(a, b) &= p_1^{\max(a_1, b_1)} p_2^{\max(a_2, b_2)} \dots p_k^{\max(a_k, b_k)}, \\ a \cdot b &= \text{lcm}(a, b) \cdot \gcd(a, b) = p_1^{a_1+b_1} p_2^{a_2+b_2} \dots p_k^{a_k+b_k}. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Dacă $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$, $|\{(a, b) : \text{lcm}(a, b) = n\}| = (2n_1 + 1)(2n_2 + 1) \dots (2n_r + 1)$ [7].

Numărul de k -tuple de numere naturale cu cel mai mic multiplu n este

$$\text{LCM}(n; k) = |\{(a_1, \dots, a_k) : \text{lcm}(a_1, \dots, a_k) = n\}|.$$

O legătură între lcm și gcd pentru k -tuple a fost evidențiată de Vălcan și Bagdasar [117].

Teorema 1.3.3. Fie $k \geq 2$ și a_1, \dots, a_k numere naturale. Următoarele identități au loc:

$$\text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \frac{\prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_u \leq k} \gcd(a_{i_1}, \dots, a_{i_u})}{\prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_v \leq k} \gcd(a_{i_1}, \dots, a_{i_v})}, \quad (1.3.2)$$

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_k) = \frac{\prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_u \leq k} \text{lcm}(a_{i_1}, \dots, a_{i_u})}{\prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_v \leq k} \text{lcm}(a_{i_1}, \dots, a_{i_v})}, \quad (1.3.3)$$

unde u este impar și v este par.

Demonstrație: Dacă p prim are puterile m_1, \dots, m_k în a_1, \dots, a_k , (1.3.2) se reduce la

$$\max(m_1, \dots, m_k) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_u \leq n} \min(m_{i_1}, \dots, m_{i_u}) - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_v \leq n} \min(m_{i_1}, \dots, m_{i_v}),$$

unde u este impar și v este par. Pentru aceasta trebuie doar numărați termenii din cele două părți. Acest argument se poate verifica și cu principiul de includere-excludere. \square

Definiția 1.3.4. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ reprezintă numărul de termeni $1 \leq k \leq n$ relativ primi cu n [14, 46, 92]. Dacă factorizarea lui n este $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, atunci

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Următoarea identitate este folosită în Secțiunea 2.3.

Propoziția 1.3.5. Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ are loc proprietatea

$$\varphi(\gcd(a, b)) \cdot \varphi(\text{lcm}(a, b)) = \varphi(a) \cdot \varphi(b). \quad (1.3.4)$$

Partiții și numere Stirling

Fie n și k numere naturale. Următoarele proprietăți au loc:

Propoziția 1.3.6. Numărul de k -tuple de numere naturale pozitive având suma n este

$$S_+^*(n, k) = \binom{n-1}{k-1}.$$

Propoziția 1.3.7. Numărul de k -tuple de numere naturale având suma n este

$$S^+(n, k) = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Pentru mai multe exemple și detalii se pot consulta referințele [1], [4], [7], [39], sau [42].

Definiția 1.3.8. Numerele Stirling de ordin doi $S(n, k)$ [26], [72], numără modul de partiționare al unei mulțimi de n obiecte etichetate în k mulțimi nevide ne-etichetate.

Numerele Stirling de ordin doi satisfac relațiile [112]:

$$S(n+1, k) = kS(n, k) + S(n, k-1);$$

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Rezultate de linear (in)dependență și densitate

Aici sunt prezentate diverse rezultate de linear independență și densitate.

Definiția 1.3.9. Numerele $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$ sunt linear dependente peste \mathbb{Q} (și \mathbb{Z}) dacă există coeficienți $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}$, astfel încât

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k = 0, \quad \text{și} \quad (a_1, \dots, a_k) \neq (0, \dots, 0). \quad (1.3.5)$$

Dacă identitatea (1.3.5) are loc doar când $(a_1, \dots, a_k) = (0, \dots, 0)$, numerele x_1, \dots, x_k sunt numite linear independente.

Propoziția 1.3.10. Dacă p este prim, tripletul $(1, \sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2})$ este linear independent peste \mathbb{Z} .

Pentru $k = 1$, linear independența lui 1 și x_1 implică $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, și obținem forma uni-dimensională a lemei lui Kronecker [46, Theorem 339], [43].

Teorema 1.3.11. Dacă x este irațional, atunci șirul $\{nx\}$ este dens în intervalul $[0, 1]$.

Un rezultat mai general, a fost obținut de Weyl [121]

Teorema 1.3.12. Dacă x este irațional, atunci punctele $\{nx\}$ sunt uniform distribuite în $[0, 1]$.

Diverse formulări echivalente și generalizări ale rezultatelor lui Kronecker și Weyl au fost propuse de Andrica și Buzeteșanu în [10]. Menționăm următoarele trei rezultate:

Teorema 1.3.13. Fie $P(X) = a_p X^p + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ un polinom astfel încât cel puțin unul dintre coeficienții a_p, \dots, a_1 este irațional. Atunci $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_0^N e^{2\pi i P(n)} = 0$.

Teorema 1.3.14. Dacă x este irațional, atunci mulțimea $A = \{n + mx : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\}$ este densă peste tot în \mathbb{R} .

Teorema 1.3.15. Fie $s > 0$, $a \geq 0$ și $b \geq 0$ numere întregi și x irațional. Atunci mulțimea $A = \{n + mx : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, n = a \pmod{s}, m = b \pmod{s}\}$ este densă peste tot în \mathbb{R} .

În Capitolul 3 este folosită următoarea formă multi-dimensională a lemei lui Kronecker.

Teorema 1.3.16. ([46, Teorema 442]) Dacă $1, x_1, x_2, \dots, x_k$ sunt linear independente peste \mathbb{N} , iar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k > 0$, și $N, \varepsilon > 0$, atunci există numerele întregi $n > N$, p_1, \dots, p_k cu proprietatea

$$|nx_m - p_m - \alpha_m| < \varepsilon \quad (m = 1, \dots, k)$$

Teorema 1.3.17. ([46, Theorem 443]) Dacă $1, x_1, x_2, \dots, x_k$ sunt linear independente peste \mathbb{N} , atunci mulțimea punctelor $\{nx_1\}, \{nx_2\}, \dots, \{nx_k\}$, este densă în cubul unitate.

Propoziția 1.3.18. Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Dacă $(1, x_1, x_2)$ sunt linear independente peste \mathbb{Q} (sau \mathbb{Z}), atunci șirul $(\{nx_1\}, \{nx_2\})$ este dens în $[0, 1] \times [0, 1]$. În caz contrar, $(1, x_1, x_2)$ sunt linear dependente peste \mathbb{Q} (sau \mathbb{Z}), deci există a_0, a_1, a_2 cu proprietatea $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$. Următoarele scenarii sunt posibile:

1. $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ ($a_0 = -a_1 x_1 - a_2 x_2$). În acest caz șirul $(\{nx_1\}, \{nx_2\})$ este periodic.
2. $x_1 = p/k \in \mathbb{Q}$ (irreductibil), $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($a_1 = 0, a_0 = -a_2 x_2$). Pentru aceste valori șirul $(\{nx_1\}, \{nx_2\})$ este dens în $\{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}\} \times [0, 1]$.
3. $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($x_2 = -\frac{a_1}{a_2} x_1 - \frac{a_0}{a_2} = b_1 x_1 + b_0$). Aici șirul $(\{nx_1\}, \{nx_2\})$ este dens în graficul funcției $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definite de $f(x) = (x, b_1 x + b_0)$. Cazuri particulare notabile sunt $b_1 = 0$ (i.e., $x_2/x_1 \in \mathbb{Q}$) sau $b_1 = 1$ (i.e., $x_2 - x_1 \in \mathbb{Q}$).

Șiruri Horadam periodice

Șirurile Horadam sunt o generalizare naturală a numerelor Fibonacci și implică patru parametri complecși: două valori inițiale și doi coeficienți ai recurenței. Prin urmare, termenii șirului pot fi vizualizați în planul complex. În acest capitol prezentăm formule pentru termenul general al șirului. Apoi discutăm condițiile necesare și suficiente de periodicitate folosite pentru clasificarea și enumerarea orbitelor Horadam finite.

2.1 Șiruri Horadam

Un șir $\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \{w_n(a, b; p, q)\}_{n=0}^{\infty}$ definit prin recurența

$$w_{n+2} = pw_{n+1} + qw_n, \quad w_0 = a, w_1 = b, \quad (2.1.1)$$

unde parametrii a, b, p și q sunt numere complexe este numit șir Horadam. Pentru simplitate, șirul Horadam $\{w_n(a, b; p, q)\}_{n=0}^{\infty}$ este notat prin $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Recurența liniară de ordin doi (2.1.1) este denumită în onoarea lui A.F. Horadam—care a inițiat investigarea acestei recurențe generale în două lucrări din anii 1960 [53, 55]. Numeroase șiruri se obțin în particular. De exemplu, pornind de la $(a, b) = (0, 1)$, obținem șirurile lui Fibonacci pentru $(p, q) = (1, 1)$, sau Lucas pentru $(p, q) = (1, -1)$.

Ecuția caracteristică asociată cu recurența (2.1.1) este

$$P(x) = x^2 - px - q = 0, \quad (2.1.2)$$

ale cărei rădăcini numite *generatori* sunt notate prin z_1 și z_2 . Relațiile lui Vieta scrise pentru polinomul P dau

$$-p = z_1 + z_2, \quad q = z_1 z_2, \quad (2.1.3)$$

aratând că recurența (2.1.1) definită de coeficienții p, q poate fi definită alternativ prin generatorii z_1, z_2 pe baza identității (2.1.3).

Termen general

Aici se prezintă formule pentru termenul general w_n al șirului complex Horadam (2.1.1), când ecuația caracteristică (2.1.2) are rădăcini distincte sau egale.

Cazul ne-degenerat: Rădăcini distincte ($z_1 \neq z_2$)

Termenul general al șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$, pentru rădăcini distincte z_1, z_2 ale (2.1.2), este dat de formula (a se vedea [1, Chapter 7], [38, Chapter 1] sau [65])

$$w_n = Az_1^n + Bz_2^n = \frac{1}{z_2 - z_1} [(az_2 - b)z_1^n + (b - az_1)z_2^n], \quad (2.1.4)$$

unde constantele A și B obținute din $w_0 = a$ și $w_1 = b$ sunt date de expresiile

$$A = \frac{az_2 - b}{z_2 - z_1}, \quad B = \frac{b - az_1}{z_2 - z_1}, \quad (2.1.5)$$

Cazul degenerat: Rădăcini egale ($z_1 = z_2$)

Când rădăcinile ecuației caracteristice sunt egale ($z_1 = z_2 = z$) termenul general al șirului Horadam este dat de formula

$$w_n = Az^n + Bnz^n = \left[a + \left(\frac{b}{z} - a \right) n \right] z^n \quad (2.1.6)$$

Orbite Horadam particulare

Rezultatele din această secțiune au fost publicate în [21] și prezintă orbite Horadam produse de generatori distincți. Unele rezultate rămân valide și pentru generatori egali.

Orbite produse de generatori conjugați (dacă $a, b \in \mathbb{R}$)

Teorema 2.1.1. *Fie $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ un șir Horadam având termenul general dat de (2.1.4), ai cărui generatori satisfac $z_1 = \bar{z}_2$. Șirul $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ este o submulțime a dreptei reale dacă $a, b \in \mathbb{R}$. În acest caz se obține cazul particular al șirurilor Horadam reale.*

Orbite concentrice produse de generatori opuși

Teorema 2.1.2. *Fie $k \in \mathbb{N}$ număr par, z_1, z_2 rădăcini primitive de ordin k ale unității care satisfac $z_2 = -z_1$ și $a, b \in \mathbb{C}$ arbitrare. Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ (2.1.1) este formată din două $k/2$ -goane regulate concentrice, ale căror noduri reprezintă un graf bipartit, ca în Fig. 2.1.*

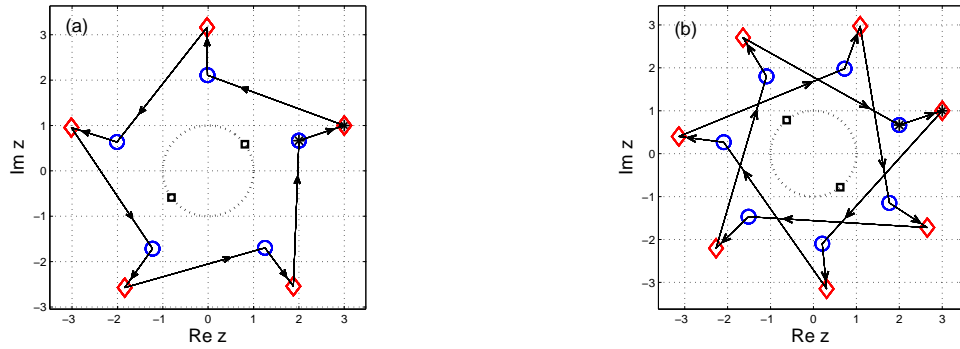


Figura 2.1: Primii $N = 100$ termeni ai orbitei șirului $\{w_n\}_{n=0}^N$ obținuți din (2.1.4), calculate pentru perechile de rădăcini opuse (a) $k = 10$, $z_1 = e^{2\pi i \frac{1}{10}}$, $z_2 = e^{2\pi i \frac{6}{10}}$; (b) $k = 14$, $z_1 = e^{2\pi i \frac{5}{14}}$, $z_2 = e^{2\pi i \frac{12}{14}}$. Săgețile indică direcția orbitei iar linia punctată este cercul unitate. Condițiile inițiale $w_0 = a = 2 + 2/3i$ și $w_1 = b = 3 + i$ sunt reprezentate prin stele.

Orbite conjugate produse de parametri conjugați

Teorema 2.1.3. Fie $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ un șir Horadam având termenul general definit prin formula (2.1.4), pentru generatorii $z_1 \neq z_2$ și condițiile inițiale a și b . Șirul $\{W_n\}_{n=0}^\infty$ produse de generatorii conjugați \bar{z}_1, \bar{z}_2 și condițiile inițiale \bar{a}, \bar{b} satisface

$$W_n = \bar{w}_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1.7)$$

2.2 Periodicitatea șirurilor Horadam complexe

În una dintre publicațiile sale inițiale [53], Horadam a evidențiat două perechi p, q care produc șiruri periodice $\{w_n(a, b; \pm 1, 1)\}_{n=0}^\infty$.

În această secțiune se stabilesc condiții necesare și suficiente pentru periodicitatea șirului $\{w_n\}_{n=0}^\infty$, când rădăcinile z_1, z_2 ale ecuației caracteristice (2.1.2) sunt distincte sau egale. Rezultatele din această secțiune au fost publicate în [18].

Lema 2.2.1. Mulțimea $M = \{\{nx\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ este densă în $[0, 1]$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Lema de mai jos descrie comportamentul șirului $\{z^n\}_{n=0}^\infty$ pentru valori arbitrare $z \in \mathbb{C}$.

Lema 2.2.2. Fie $z = re^{2\pi ix} \in \mathbb{C}$ un număr complex ($r > 0$). Orbita șirului $\{z^n\}_{n=0}^\infty$ este

- (i) un k -gon regulat dacă $r = 1$, și $x = j/k \in \mathbb{Q}$ cu $\gcd(j, k) = 1$;
- (ii) o submulțime densă a cercului unitate pentru $r = 1$ și $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- (iii) o spirală convergentă la oridinge dacă $r < 1$;
- (iv) o spirală divergentă dacă $r > 1$.

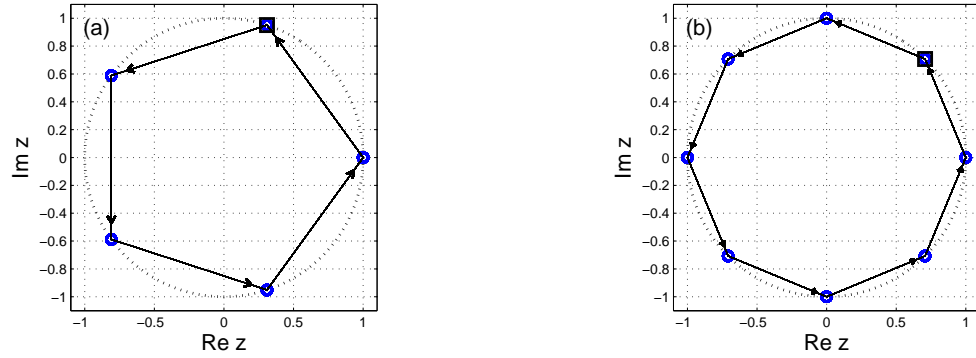


Figura 2.2: Orbita şirului $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ când $r = 1$ şi (a) $x = 1/5$; (b) $x = 1/8$. Săgeţile indică direcţia orbitei, linia punctată este cercul unitate iar $z = r \exp(2\pi ix)$ este reprezentat cu un pătrat.

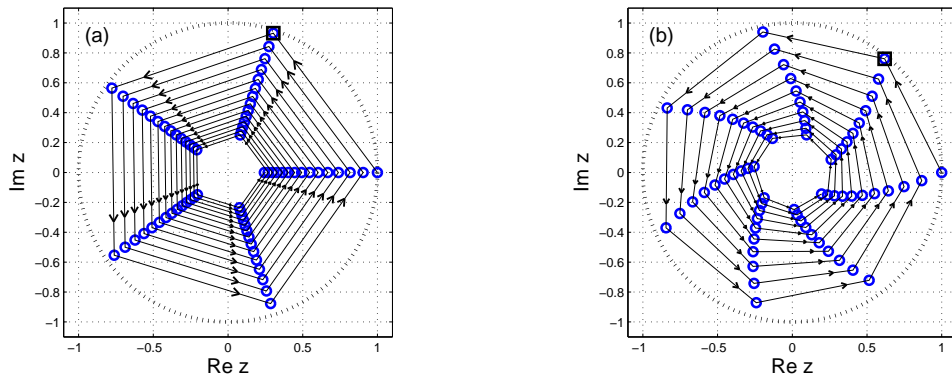


Figura 2.3: Primii 71 termeni ai şirului $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ când $r = 0.98$ şi (a) $x = 1/5$; (b) $x = \sqrt{2}/10$. Săgeţile indică direcţia orbitei, linia punctată este cercul unitate, iar $z = r \exp(2\pi ix)$ este reprezentat cu un pătrat.

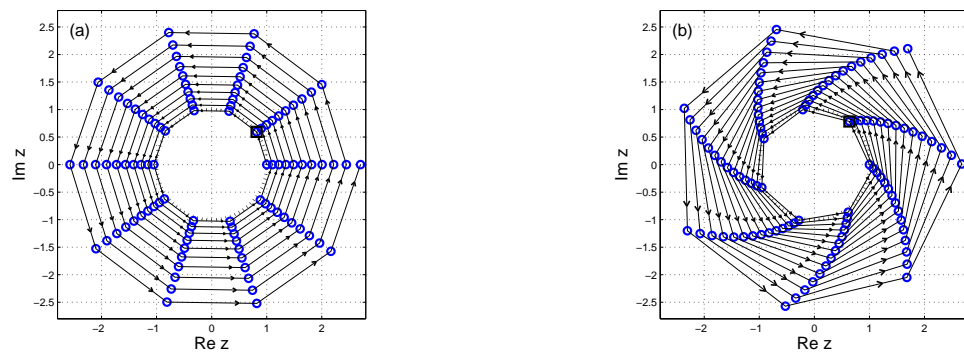


Figura 2.4: Primii 101 termeni ai şirului $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ când $r = 1.01$ şi (a) $x = 1/10$; (b) $x = \sqrt{2}/10$. Săgeţile indică direcţia orbitei, linia punctată este cercul unitate iar $z = r \exp(2\pi ix)$ este reprezentat cu un pătrat.

Condiții de periodicitate: Cazul ne-degenerat ($z_1 \neq z_2$)

Fie $z_1 \neq z_2$ două rădăcini de ordin k ale unității ($k \geq 2$), și fie polinomul $P(x)$

$$P(x) = (x - z_1)(x - z_2), \quad x \in \mathbb{C}. \quad (2.2.1)$$

Teorema 2.2.3. Șirul recurent $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ generat de polinomul caracteristic (2.2.1), și condițiile inițiale arbitrare $w_0 = a, w_1 = b$ este periodic.

Teorema 2.2.4. (Condiție necesară de periodicitate) Fie $z_1 \neq z_2$ rădăcini distincte ale polinomului caracteristic (2.2.1). Șirul recurent $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ generat de z_1, z_2 , și condițiile inițiale arbitrare $w_0 = a, w_1 = b$, este periodic dacă există $k \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$A(z_1^k - 1)z_1 = 0, \quad B(z_2^k - 1)z_2 = 0, \quad (2.2.2)$$

unde A și B sunt date de (2.1.5). Explicit, aceste condiții pot genera orbitele:

- (i) z_1 și z_2 sunt rădăcini de ordin k ale unității (pentru un anumit $k \geq 2$) (ne-degenerat);
- (ii) z_1 sau z_2 este rădăcină de ordin k a unității iar cealaltă este zero (poligon regulat);
- (iii) z_1 sau z_2 este rădăcină de ordin k a unității și $b = az_1$ sau $b = az_2$ (poligon regulat);
- (iv) z_1 și z_2 sunt arbitrare, iar $a = b = 0$ (orbită degenerată la un punct).

Condiții de periodicitate: Cazul degenerat ($z_1 = z_2$)

Fie z o rădăcină de ordin k a unității ($k \geq 2$), și fie polinomul $P(x)$

$$P(x) = (x - z)^2, \quad x \in \mathbb{C}. \quad (2.2.3)$$

Teorema 2.2.5. Șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ generat de polinomul caracteristic (2.2.3), și condițiile inițiale arbitrare $w_0 = a, w_1 = b$ este periodic atunci când $b = az$, și este divergent în alt caz.

Propoziția 2.2.6. Când sunt generați de o rădăcină primitivă dublă de ordin k a unității, termenii subșirului divergent $\{w_{Nk+j}\}_{N=0}^{\infty}$ sunt coliniari pentru fiecare $j \in \{0, \dots, k-1\}$.

Teorema 2.2.7. (Condiție necesară de periodicitate) Șirul recurent $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ generat de ecuația caracteristică (2.2.3), și valorile inițiale arbitrare $w_0 = a, w_1 = b$, este periodic dacă și numai dacă are loc una dintre următoarele condiții:

$$(z = 0) \text{ sau } (z^k - 1 = 0, B = 0) \text{ sau } (z^k - 1 \neq 0, A = B = 0). \quad (2.2.4)$$

Explicit, aceste condiții se pot exprima prin subcazurile următoare

- (i) $z = 0$ (orbită degenerată)
- (ii) z este o rădăcină de ordin k a unității (pentru $k \in \mathbb{N}$ cu $k \geq 2$) și $b = az$ (poligon regulat);
- (iii) z este arbitrar și $a = b = 0$ (orbită degenerată).

2.3 Geometria orbitelor Horadam periodice

O clasificare a orbitelor Horadam periodice de generatori $z_1 = e^{2\pi ip_1/k_1}$ și $z_2 = e^{2\pi ip_2/k_2}$ este propusă. Rezultatele din această secțiune au fost publicate în [19].

Poligoane regulate stelate

Teorema 2.3.1. Dacă $z_1 = e^{2\pi ip/k}$ este o rădăcină primitivă a unității ($k \geq 2$) și $z_2 = 1$, orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este poligonul regulat stelat $\{k/p\}$, după cum este arătat în Fig. 2.5.

Demonstrație In this case, the general formula (2.1.4) gives $w_n = Az_1^n + B$. \square

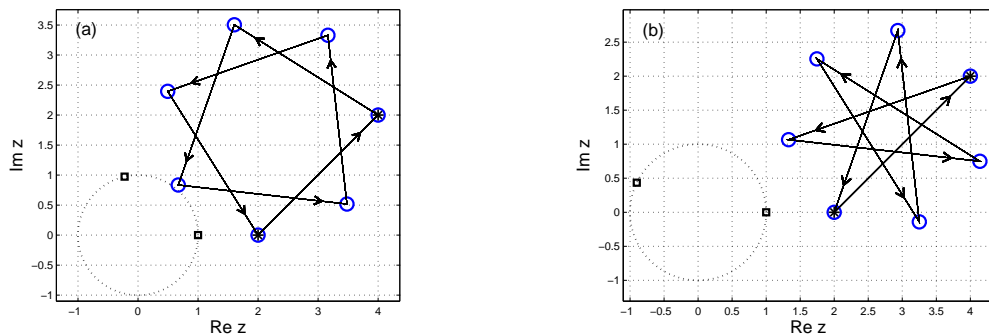


Figura 2.5: Primii $N = 100$ de termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^N$ obținuți din (2.1.4), pentru $z_2 = 1$ și (a) $k = 7$, $z_1 = e^{2\pi i \frac{2}{7}}$; (b) $k = 7$, $z_1 = e^{2\pi i \frac{3}{7}}$; unde $a = 2$ și $b = 4 + 2i$. Arătăm direcția orbitei (săgeți), punctele inițiale w_0, w_1 (stele), w_2, \dots, w_N (cercuri), cercul unitate (linie punctată).

Grafuri bipartite

Teorema 2.3.2. (k impar) Fie $k \geq 2$ un număr impar, z_1 o rădăcină primitivă de ordin k a unității și $z_2 = -1$. Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este un $2k$ -gon, ale cărui noduri reprezintă două k -goane regulate, reprezentând un graf bipartit. Proprietatea este ilustrată în Fig. 2.6 (a).

Demonstrație În acest caz, formula termenului general (2.1.4) dă $w_n = Az_1^n + (-1)^n B$, și orbita $W = \{w_0, w_1, \dots, w_{2k-1}\}$ care poate fi partiționată în mulțimile disjuncte

$$\begin{aligned} W_0 &= \{A + B, Az_1^2 + B, \dots, Az_1^{k-1} + B, Az_1^{k+1} + B, \dots, Az_1^{2k-2} + B\}, \\ W_1 &= \{Az_1 - B, Az_1^3 - B, \dots, Az_1^{k-2} - B, Az_1^k - B, \dots, Az_1^{2k-1} - B\}, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

reprezentând vârfurile a două k -goane regulate, vizitate alternativ de șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$. \square

Teorema 2.3.3. (k par) Fie $k \geq 2$ un număr par, z_1 o rădăcină primitivă de ordin k a unității și $z_2 = -1$. Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este un k -gon, ale cărui noduri reprezintă două $k/2$ -goane regulate, reprezentând un graf bipartit. Proprietatea este ilustrată în Fig. 2.6 (b).

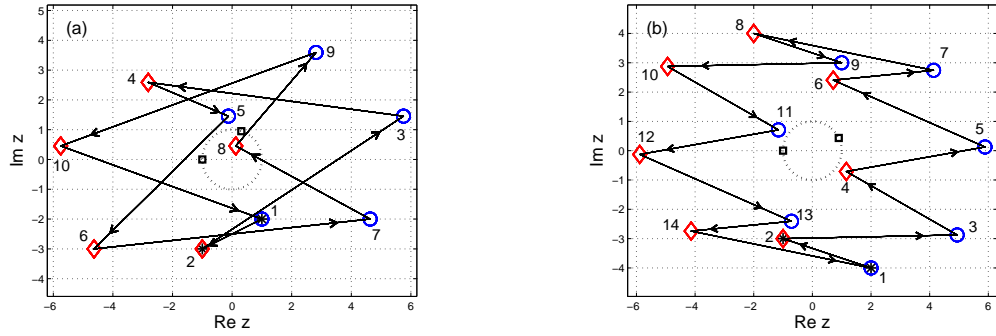


Figura 2.6: Primii $N = 100$ de termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^N$ obținuți din (2.1.4), pentru $z_2 = -1$ și (a) $k = 5$ (impar), $z_1 = e^{2\pi i \frac{1}{5}}$ and $a = 2 - 4i$, $b = -1 - 3i$; (b) $k = 14$ (par), $z_1 = e^{2\pi i \frac{1}{14}}$ and $a = 1 - 2i$, $b = -1 - 3i$. Săgețile indică direcția orbitei vizitând w_0, w_1 (stele), w_2, \dots, w_N .

Grafuri multipartite

În general, orbita șirului Horadam $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ produce grafuri multipartite, atunci când generatorii $z_1 = e^{2\pi i p_1/k_1}$ and $z_2 = e^{2\pi i p_2/k_2}$ sunt rădăcini primitive ale unității.

Teorema 2.3.4. Fie $k_1, k_2, d \in \mathbb{N}$ a.î. $\gcd(k_1, k_2) = d$ și z_1, z_2 rădăcini primitive de ordin k_1 , respectiv k_2 ale unității. Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este un $k_1 k_2 / d$ -gon, ale cărui noduri se pot împărți în $k_1 \times k_2 / d$ -goane regulate. Prin dualitate, nodurile se pot împărți în $k_2 \times k_1 / d$ -goane regulate. Proprietatea este ilustrată în Fig. 2.7 pentru $k_1 = 4$ și $k_2 = 5$, cu $(k_1, k_2) = 1$.

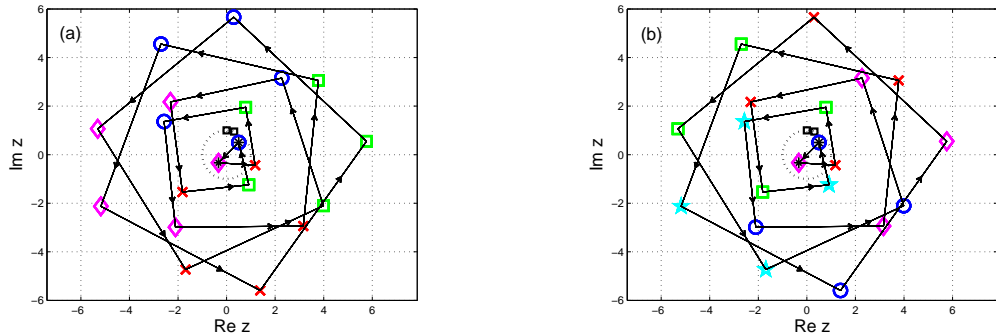


Figura 2.7: Primii $N = 100$ de termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^N$ obținuți din (2.1.4), pentru $k_1 = 4$, $k_2 = 5$. Calculăm w_0, \dots, w_N pentru $z_1 = e^{2\pi i \frac{1}{5}}$, $z_2 = e^{2\pi i \frac{1}{4}}$ și condițiile inițiale $a = (1 + i)/2$, $b = -(1 + i)/3$. Orbitele sunt partiționate în (a) patru pentagoane regulate; (b) cinci pătrate; Săgețile indică direcția orbitei, iar linia punctată este cercul unitate.

Corolarul 2.3.5. Dacă $k_2 | k_1$ orbita este un k_1 -gon ale cărui noduri se pot împărți în $k_2 \times k_1 / k_2$ -goane regulate. Asimetria din Fig. 2.8 ilustrează acest fapt, întrucât singurele poligoane regulate identificabile în orbita periodică a lui $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ sunt 1- sau 2-goane.

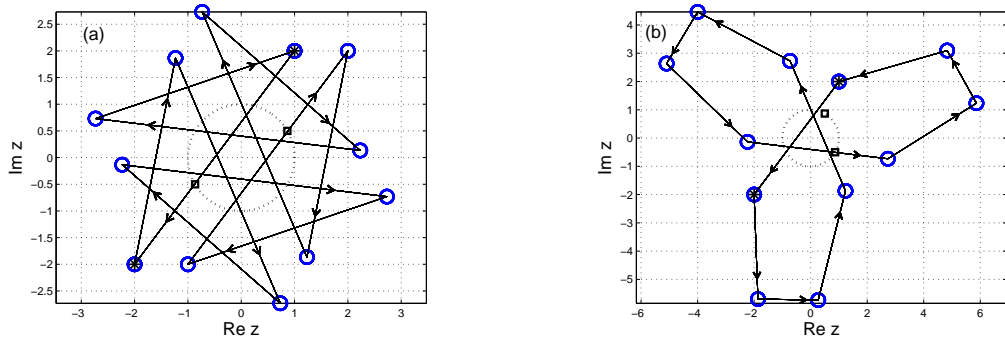


Figura 2.8: Primii $N = 100$ de termeni ai şirului $\{w_n\}_{n=0}^N$ obţinuţi din (2.1.4), pentru condiţiile iniţiale $a = 1 + 2i$ şi $b = -2 - 2i$. Calculăm w_0, \dots, w_N pentru (a) $k_1 = k_2 = 12$, $z_1 = e^{2\pi i \frac{1}{12}}$, $z_2 = e^{2\pi i \frac{7}{12}}$; (b) $k_1 = 2k_2 = 12$, $z_1 = e^{2\pi i \frac{1}{6}}$, $z_2 = e^{2\pi i \frac{11}{12}}$. Săgeţile indică direcţia orbitei, iar linia punctată este cercul unitate.

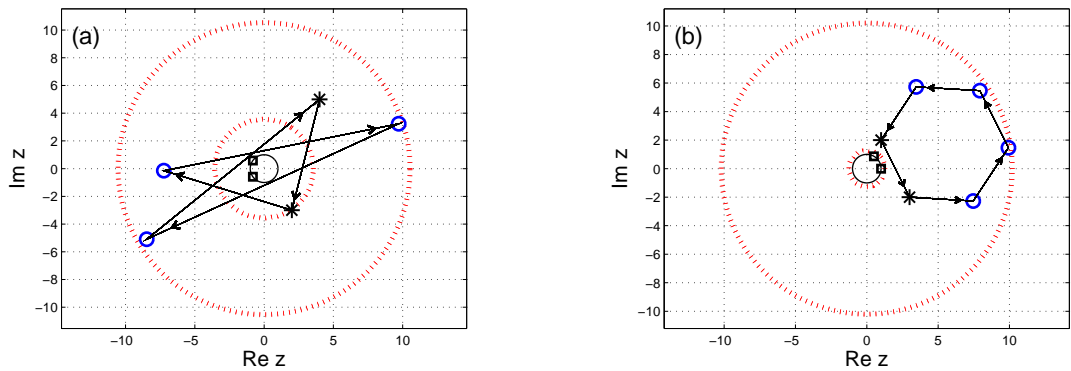


Figura 2.9: Orbita şirului periodic Horadam $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ calculat pentru (a) $z_1 = e^{2\pi i \frac{2}{5}}$, $z_2 = e^{2\pi i \frac{3}{5}}$, $a = 4 + 5i$, $b = 2 - 3i$; (b) $z_1 = e^{2\pi i \frac{1}{6}}$, $z_2 = e^{2\pi i \frac{5}{6}}$, $a = 1 + 2i$, $b = 3 - 2i$. De asemenea sunt reprezentate condiţiile iniţiale a, b (stele), generatorii z_1, z_2 (pătrate), cercul unitate $S(0, 1)$ (linie solidă) şi frontiera inelului $U(0, ||A| - |B|, |A| + |B|)$ (linie punctată).

Limite geometrice ale orbitelor periodice

Teorema 2.3.6. Când şirul Horadam $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este periodic, orbita este încadrată de următoarele frontiere geometrice (a se vedea Fig. 2.9):

(i) Pentru $z_1 \neq z_2$, avem inegalitatea (unde A şi B sunt date de formula (2.1.5))

$$\{z \in \mathbb{C} : ||A| - |B|| \leq |w_n| \leq |A| + |B|\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Pentru $z_1 = z_2 = z$ orbita şirului reprezintă un k -gon regulat înscris în cercul $S(0, |a|) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = |a|\}$, dacă $a \neq 0$, sau singletonul $\{0\}$ dacă $a = 0$.

2.4 Enumerarea șirurilor Horadam periodice

În această secțiune se investighează numărul de șiruri Horadam distincte care (pentru condiții inițiale arbitrare) au o perioadă fixă, și sunt date formule enumerative pentru cazul degenerat și pentru cel ne-degenerat. Rezultatele au fost publicate în [19].

2.4.1 Numărul orbitelor Horadam de lungime fixă $H_P(k)$

Fie $k \geq 2$ un număr natural. Funcția care enumeră șirurile Horadam $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ de perioadă k este notată cu $H_P(k)$. Aceasta depinde de generatorii $z_1 = e^{2\pi i p_1/k_1}$ și $z_2 = e^{2\pi i p_2/k_2}$, și de condițiile inițiale a, b . Sunt două tipuri de orbite (degenerate and non-degenerate) periodice care trebuie considerate.

Orbite degenerate

O orbită degenerată este un poligon regulat centrat în 0 sau un punct.

Numărul de șiruri degenerate distincte cu perioada k este dat de formula

$$H_P(k) = |\{(p_1, k_1) : (p_1, k_1) = 1, k_1 = k\}| = \varphi(k),$$

unde φ este funcția lui Euler.

Dacă niciun generator nu apare explicit în formulele (2.1.6) sau (2.1.4) (asta are loc când $z_1 \neq z_2, A = 0, B = 0$ sau $z_1 = z_2 = z, a = 0, b = 0$), șirul periodic este constant și numărul configurațiilor de generatori configurations de perioadă $k \geq 2$ este prin urmare zero.

Orbite ne-degenerate

Aici se discută șirurile periodice care produc orbite ne-degenerate. Generatorii sunt în acest caz rădăcini ale unității distincte $z_1 = e^{2\pi i p_1/k_1}$ și $z_2 = e^{2\pi i p_2/k_2}$, iar condițiile inițiale arbitrare a, b satisfac $AB \neq 0$ unde A, B sunt date prin formula (2.1.5).

Numărul de șiruri distincte cu perioada k poate fi enumerat de numărul de quadruple

$$H_P(k) = |\{(p_1, k_1, p_2, k_2) : (p_1, k_1) = (p_2, k_2) = 1, [k_1, k_2] = k, k_1 \leq k_2\}|. \quad (2.4.1)$$

Stabilim câteva formule pentru această expresie, pe baza proprietăților perechilor (k_1, k_2) care satisfac $[k_1, k_2] = k$, și ale generatorilor $z_1 = e^{2\pi i p_1/k_1}$ and $z_2 = e^{2\pi i p_2/k_2}$.

O primă formulă pentru $H_p(k)$

Întâi numărăm quadruplele (p_1, k_1, p_2, k_2) din (2.4.1) pentru care $k_1 = k_2$.

Lema 2.4.1. *Dacă $k_1 = k_2$ și $[k_1, k_2] = k$ atunci $k_1 = k_2 = k$.*

Numărul de quadruple (p_1, k, p_2, k) care satisfac (2.4.1) produs în acest caz este

$$H'_p(k) = |\{(p_1, p_2) : (p_1, k) = (p_2, k) = 1, p_1 < p_2\}| = \frac{1}{2} \varphi(k) (\varphi(k) - 1).$$

Apoi se enumera quadruplele (p_1, k_1, p_2, k_2) cu proprietățile $k_1 \neq k_2$ și $[k_1, k_2] = k$.

Lema 2.4.2. *Dacă $[k_1, k_2] = k$ și $k_1 \neq k_2$, numărul de quadruple (p_1, k_1, p_2, k_2) este*

$$H''_p(k) = |\{(p_1, k_1, p_2, k_2) : (p_1, k_1) = (p_2, k_2) = 1, [k_1, k_2] = k\}| = \varphi(k_1)\varphi(k_2).$$

Teorema 2.4.3. *Numărul de șiruri Horadam distincte de perioadă $k \geq 2$ este egal cu*

$$H_p(k) = \sum_{[k_1, k_2]=k, k_1 < k_2} \varphi(k_1)\varphi(k_2) + \frac{1}{2} \varphi(k) (\varphi(k) - 1). \quad (2.4.2)$$

Șirul numeric $H_p(k)$ reprezintă primul context pentru șirul A102309 din OEIS [97].

$$1, 1, 3, 5, 10, 11, 21, 22, 33, 34, 55, 46, 78, 69, 92, 92, 136, 105, \dots$$

Exemplul 1: Numere prime. Dacă k este un număr prim avem

$$H_p(k) = k(k-1)/2. \quad (2.4.3)$$

Exemplul 2: Puteri de numere prime. Dacă $k = p^m$ cu p prim și $m \geq 2$, avem

$$H_p(k) = \frac{\varphi(k)[2k - \varphi(k) - 1]}{2}. \quad (2.4.4)$$

Exemplul 3: Produs de două numere prime. Dacă p, q sunt prime și $k = pq$, avem

$$H_p(k) = (p-1)(q-1)(pq + p + q)/2.$$

De exemplu, când $k = 6 = 2 \cdot 3$ sunt 11 soluții produse de perechile

$$\left(\frac{p_1}{k_1}, \frac{p_2}{k_2}\right) \in \left\{ \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{1}, \frac{5}{6}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right), \right. \\ \left. \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) \right\},$$

Câteva orbite de perioadă $k = 6$ sunt desenate în Fig. 2.10.

Exemplul 4: Numere compuse generale. Pentru $k = 12$ avem perechile de divizori

$$(k_1, k_2) \in \{(1, 12), (2, 12), (3, 4), (3, 12), (4, 6), (4, 12), (6, 12), (12, 12)\}.$$

Pentru fiecare pereche (p, q) din listă cu proprietatea $p < q$ avem multiplicitățile $\varphi(p)\varphi(q)$, iar pentru perechea $(12, 12)$ avem multiplicitatea $\varphi(12)(\varphi(12) - 1)/2$. Obținem

$$H_p(12) = 4 + 4 + 4 + 8 + 4 + 8 + 8 + 4 \cdot 3/2 = 46.$$

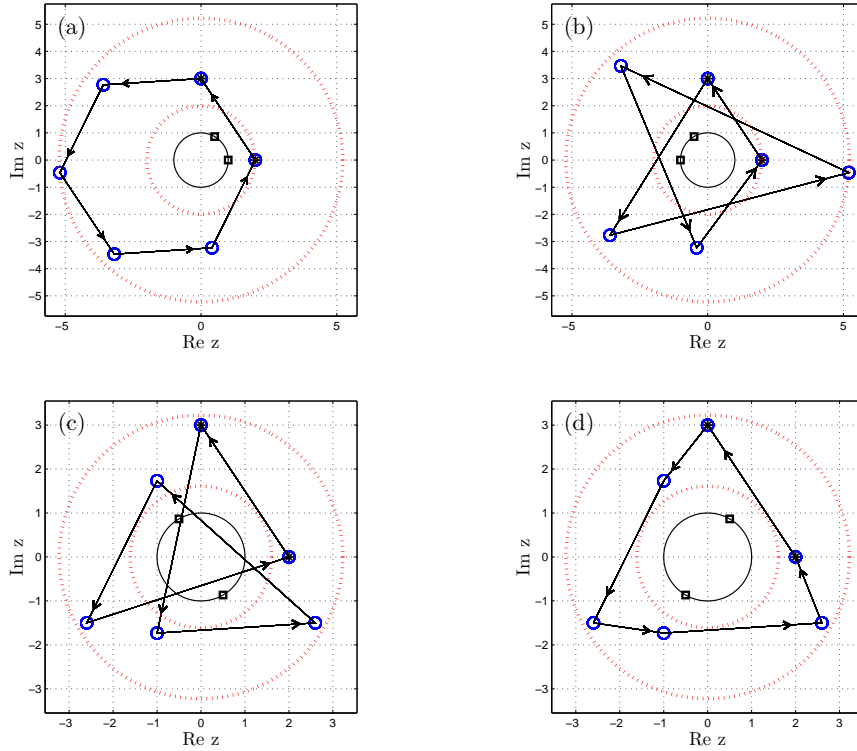


Figura 2.10: Termenii şirului $\{w_n\}_{n=0}^N$ obţinut din (2.1.4) pentru perechile $(\frac{p_1}{k_1}, \frac{p_2}{k_2})$ (a) $(\frac{1}{1}, \frac{1}{6})$; (b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$; (c) $(\frac{1}{3}, \frac{5}{6})$; (d) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ pentru $a = 2$ şi $b = 3i$ (stele). Săgeţile indică direcţia orbitei $w_0, w_1, \dots, w_6 = w_0$ (cercuri). Mai sunt reprezentaţi generatorii z_1, z_2 (pătrate), cercul unitate (linie solidă) şi frontiera inelului $U(0, |A| - |B|, |A| + |B|)$ (linie punctată) cu A, B din (2.1.5).

A doua formulă pentru $H_P(k)$

Lema 2.4.4. Fie $d < k$ două numere naturale a.î. $d|k$, a căror factorizare este

$$d = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_n^{d_n}, \quad k = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}, \quad (1 \leq d_i \leq m_i).$$

Numărul de perechi de numere naturale k_1, k_2 cu proprietăţile $d = (k_1, k_2)$ şi $k = [k_1, k_2]$ este

$$GL(d, k) = |\{(k_1, k_2) : d = (k_1, k_2) \text{ and } k = [k_1, k_2]\}| = 2^{\omega(k/d)-1}, \quad (2.4.5)$$

unde $\omega(x)$ reprezintă numărul de divizori primi distincţi ai numărului natural x .

Teorema 2.4.5. Formula $H_P(k)$ poate fi scrisă mai compact sub forma

$$H_P(k) = \left[\sum_{d|k, d < k} \varphi(d) 2^{\omega(k/d)} + \varphi(k) - 1 \right] \frac{\varphi(k)}{2}. \quad (2.4.6)$$

Teorema 2.4.6 ($H_P(k)$ pentru numere libere de pătrate). Dacă perioada k este un număr liber de pătrate $k = p_1 p_2 \cdots p_m$ pentru p_1, \dots, p_m numere prime şi $m \geq 2$, avem formula

$$H_P(k) = \left[(p_1 + 1) \cdots (p_m + 1) - 1 \right] \frac{(p_1 - 1) \cdots (p_m - 1)}{2}. \quad (2.4.7)$$

Observația 2.4.7. Funcția $H_P(k)$ poate fi generată din perechile (p_1, p_2) cu proprietatea

$$H_P(k) = |\{(p_1, p_2) : ((p_1, k), (p_2, k)) = 1, 1 \leq p_1 < p_2 \leq k\}|. \quad (2.4.8)$$

Complexitatea computațională a evaluării lui $H_P(k)$

Numărul de perechi (k_1, k_2) a.î. $[k_1, k_2] = k$ care apar în $H_P(k)$ din (2.4.2) este

$$[(2m_1 + 1)(2m_2 + 1) \cdots (2m_n + 1) + 1]/2.$$

În formula (2.4.6) trebuie identificați toți divizorii distincți d ai lui k , care sunt exact

$$(m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_n + 1).$$

2.4.2 Limite asimptotice pentru $H_P(k)$

Limite inferioare și superioare pentru $H_P(k)$ sunt ilustrat în Fig. 2.11.

Teorema 2.4.8. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ avem următoarele limite $\frac{\varphi(k)k}{2} \leq H_P(k) \leq \frac{(k-1)k}{2}$.

Teorema 2.4.9. Dacă $k = p_1 p_2 \cdots p_m$ este liber de pătrate, avem următoarea limită inferioară

$$H_P(k) = \left[(p_1 + 1) \cdots (p_m + 1) - 1 \right] \frac{(p_1 - 1) \cdots (p_m - 1)}{2} \geq \frac{\varphi(k)[2k - \varphi(k) - 1]}{2}.$$

Toate aceste limite se ating atunci când k este prim. O conjectură este dacă ultima limită inferioară pentru $H_P(k)$ este validă în general, așa cum sugerează Fig. 2.11.

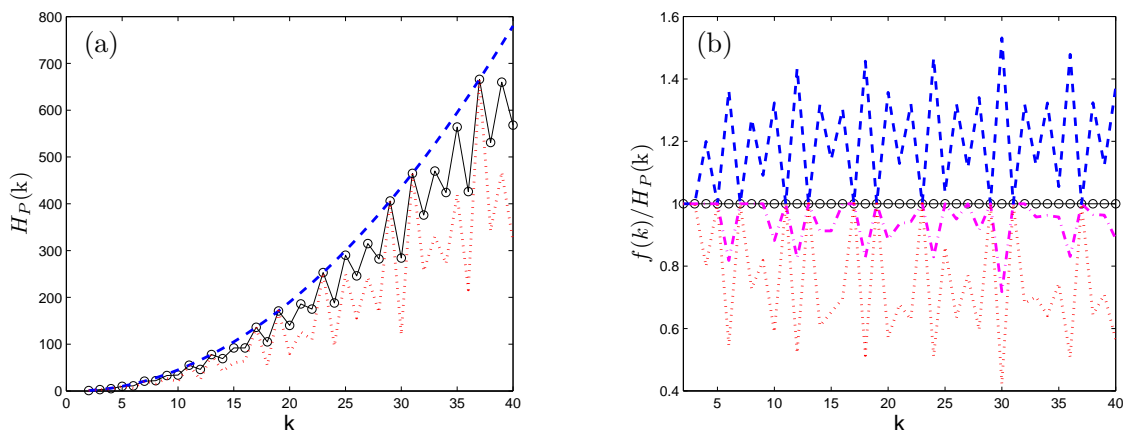


Figura 2.11: Primii 40 termeni ai șirului (a) $H_P(k)$ (circles), $(k-1)k/2$ (dashed) and $\frac{\varphi(k)k}{2}$ (dotted); (b) $f(k)/H_P(k)$, unde $f(k)$ este $H_P(k)$ (circles), $(k-1)k/2$ (dashed), $\frac{\varphi(k)k}{2}$ (dotted) și $\frac{\varphi(k)[2k - \varphi(k) - 1]}{2}$ (dash-dotted).

Șiruri Horadam neperiodice și aplicații

În acest capitol investigăm diverse configurații produse de șiruri Horadam neperiodice. Secțiunea 3.1 prezintă orbite degenerate produse de generatori egali, care sunt singletoni sau spirale simple. Un atlas de configurații Horadam ne-degenerate este prezentat în Secțiunea 3.2. Anumite orbite Horadam dense au inspirat designul unui generator de numere pseudo-aleatoare descris în Secțiunea 3.3.

3.1 Rezultate preliminare și orbite degenerate

Notățiile $S = S(0;1)$, $U = U(0;1)$, $S(z_0, r)$ și $U(0; r_1, r_2)$ sunt folosite pentru cercul unitate, discul unitate, cercul de centru z_0 și rază r , și inelul de centru 0 și raze r_1 și r_2 .

Termenul general al șirurilor Horadam

Detalii cu privire la aceste rezultate se găsesc în [18] sau în Secțiunea 2.1, iar aici le prezentăm pe scurt pentru conveniență. Un șir Horadam $\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \{w_n(a, b; p, q)\}_{n=0}^{\infty}$ este definit prin recurența

$$w_{n+2} = pw_{n+1} + qw_n, \quad w_0 = a, w_1 = b,$$

unde parametrii a, b, p, q sunt numere complexe. Ecuația caracteristică este

$$x^2 - px - q = 0, \tag{3.1.1}$$

ale cărei rădăcini z_1 și z_2 sunt numite generatori.

Pentru rădăcini egale $z_1 = z_2$ of (3.1.1), termenul general al șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este

$$w_n = \left[a + \left(\frac{b}{z} - a \right) n \right] z^n = \left[az + (b - az)n \right] z^{n-1}. \quad (3.1.2)$$

Pentru rădăcini distincte $z_1 \neq z_2$ of (3.1.1), termenul general al șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este

$$w_n = Az_1^n + Bz_2^n, \quad (3.1.3)$$

unde constantele A și B sunt obținute din condițiile inițiale $w_0 = a$ and $w_1 = b$ ca

$$A = \frac{az_2 - b}{z_2 - z_1}, \quad B = \frac{b - az_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.1.4)$$

Când $AB = 0$, cel puțin unul dintre generatorii z_1 and z_2 nu apare explicit în formula lui w_n . Pentru acest motiv, presupunem în continuare că $AB \neq 0$.

Comportamentul șirului $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$

Întrucât termenii șirului Horadam sunt combinații liniare de termeni $\{z_1^n\}_{n=0}^{\infty}$ și $\{z_2^n\}_{n=0}^{\infty}$ cu coeficienții A și B , orbitele șirurilor Horadam sunt în mare măsură dictate de comportamentul șirului $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$, unde $z \in \mathbb{C}$. Acesta este descris de următorul rezultat, care a fost deja discutat în Capitolul 2 [18, Lemma 2.1]

Lema 3.1.1. Fie $z = re^{2\pi ix}$ un număr complex ($r \geq 0, x \in \mathbb{R}$). Orbita șirului $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ este

- (i) un k -gon regulat dacă $r = 1$, și $x = j/k \in \mathbb{Q}$ cu $\gcd(j, k) = 1$;
- (ii) o submulțime densă a cercului unitate pentru $r = 1$ și $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- (iii) o spirală convergentă la oridinge dacă $r < 1$;
- (iv) o spirală divergentă dacă $r > 1$.

Dacă $x = j/k \in \mathbb{Q}$ este ireductibilă, spiralele de la (c) și (d) sunt aliniat de-a lungul a k raze.

Configurații produse de generatori identici

Întâi examinăm orbitele produse de rădăcini repetate ale ecuației parabolei (3.1.1).

Teorema 3.1.2. Fie șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ definit de (3.1.3) pentru condițiile inițiale $w_0 = a, w_1 = b$ și să presupunem că polinomul (3.1.1) are o rădăcină dublă $z = z_1 = z_2 = re^{2\pi ix}$. Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este redusă la un singur punct dacă $|a| + |b| = 0$. Altfel, ea reprezintă:

- (a) vârfulurile unui k -gon regulat dacă $b = az$ și z este o rădăcină primitivă de ordin k a unității;
- (b) o submulțime densă a lui S pentru $b = az$, dacă $|z| = 1$ și $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- (c) o spirală convergentă la origine pentru $|z| < 1$;
- (d) o spirală divergentă pentru $|z| > 1$ și $|a| + |b| > 0$, sau pentru $|z| = 1$ și $b \neq az$.

3.2 Un atlas de orbite Horadam

Scopul acestei secțiuni este de a caracteriza orbitele Horadam obținute când generatorii și condițiile initiale sunt arbitrare. Generatorii distincți sunt notați cu

$$z_1 = r_1 e^{2\pi i x_1}, \quad z_2 = r_2 e^{2\pi i x_2}, \quad (3.2.1)$$

unde r_1, r_2, x_1, x_2 sunt numere reale. Putem presupune că $0 \leq r_1 \leq r_2$.

Orbitele Horadam produse de formula (3.1.3) cad întruna dintre categoriile

1. Stabile pentru $r_1 = r_2 = 1$;
2. Cvasi-convergente pentru $0 \leq r_1 < r_2 = 1$;
3. Convergente pentru $0 \leq r_1 \leq r_2 < 1$;
4. Divergente pentru $r_2 \geq 1$.

3.2.1 Orbite stabile: $r_1 = r_2 = 1$

Configurațiile obținute în acest scenariu sunt finite (periodice), sau dense în anumite curbe unidimensionale sau inele bidimensionale, și sunt localizate în interiorul inelului

$$\{z \in \mathbb{C} : ||A| - |B|| \leq |z| \leq |A| + |B|\}. \quad (3.2.2)$$

Teorema 3.2.1. *Fie $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ șirul definit de (3.1.3). Dacă rădăcinile distincte (3.2.1) satisfac $r_1 = r_2 = 1$, următoarele orbite ale șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ se obțin pentru:*

- (a) $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$: orbită periodică (finită) (vezi Figurile 2.7, 2.8 sau 2.10 în Capitolul 2);
- (b) $x_1 = p/k \in \mathbb{Q}$ (irreductibilă), $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (sau invers): Orbita este densă în reuniunea a k cercuri distincte (vezi Fig. 3.1);
- (c) $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. În acest caz avem trei situații posibile diferite:
 - (c1) $x_2 - x_1 = q \in \mathbb{Q}$: orbita densă într-o mulțime finită de cercuri concentrice (vezi Fig. 3.2);
 - (c2) $x_2 = x_1 q, q \in \mathbb{Q}$: orbita este densă într-o curbă închisă (vezi Fig. 3.3);
 - (c3) $1, x_1, x_2$ lin. indep. over \mathbb{Q} : orbită densă în $U(0, ||A| - |B|, |A| + |B|)$ (vezi Fig. 3.4).

Demonstrație Dimensiunea închiderii orbiteri este zero pentru orbite finite, unu pentru orbite dense în curbe închise și doi pentru orbite dense într-un inel.

(a) Orbite stabile periodice (finite)

Când $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ orbita șirului este finită.

(b) Orbite stabile dense în reuniuni de cercuri

Când $x_1 = p/k$ este ireductibilă, z_1 este o rădăcină primitivă de ordin k a unității, deci $\{z_1^n\}_{n=0}^\infty$ ia valorile distincte $1, z_1, \dots, z_1^{k-1}$ reprezentând vârfurile unui k -gon regulat.

Proprietatea este ilustrată pentru $x_1 = 1/3$ în Fig. 3.1. Cele $k = 3$ cercuri sunt disjuncte pentru $|A| > |B|$ (vezi Fig. 3.1(a)), și se intersectează pentru $|A| < |B|$ (vezi Fig. 3.1(b)).

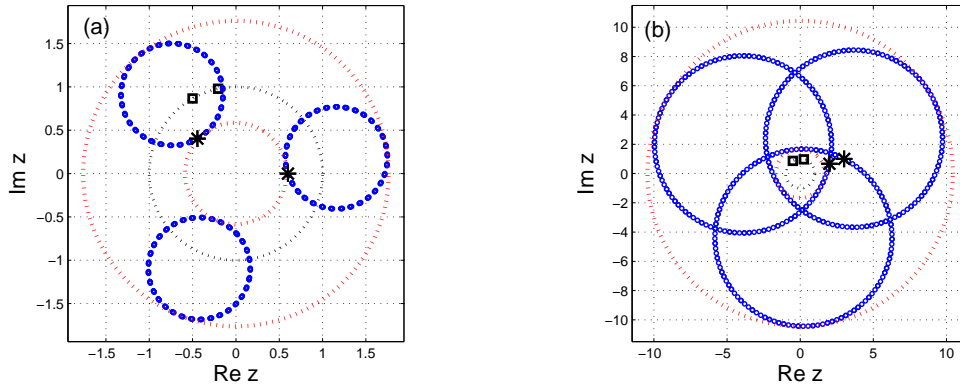


Figura 3.1: Primii 500 de termeni ai $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ din (3.1.3) pentru $r_1 = r_2 = 1$ și (a) $x_1 = 1/3$, $x_2 = \sqrt{2}/5$, unde $a = 0.6$ și $b = 0.6 \exp(2\pi i(\sqrt{2}/5 + 0.1))$; (b) $x_1 = \pi/15$, $x_2 = 1/3$, unde $a = 2 + 2/3i$ și $b = 3 + i$. Reprezentate sunt condițiile inițiale w_0, w_1 , (stars), generatorii z_1, z_2 (squares), cercul unitate (dotted line), și frontiera inelului $U(0, ||A| - |B||, |A| + |B|)$.

(c1) Orbite dense în cercuri concentrice

Această proprietate este ilustrată în Fig. 3.2 pentru cazul când x_1 și x_2 sunt iraționale, pentru valorile $x_2 - x_1 = 1/2$ în (a), respectiv $x_2 - x_1 = 1/3$ în (b).

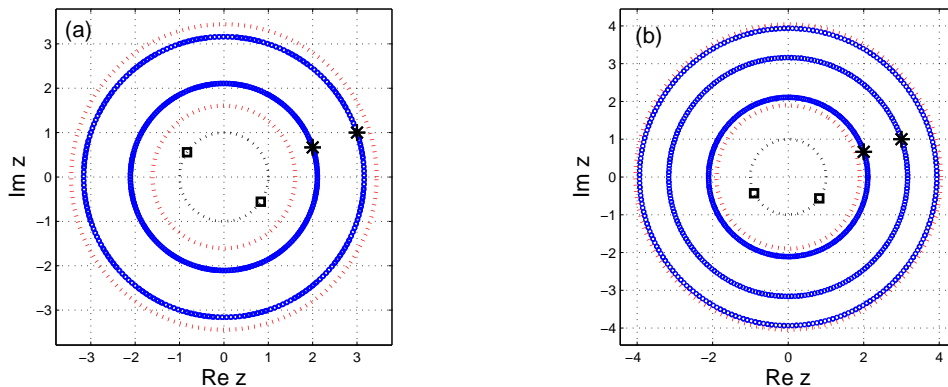


Figura 3.2: Primii 1000 de termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ obținut din (3.1.3) pentru $r_1 = r_2 = 1$ și (a) $x_1 = e/3$, $x_2 = e/3 + 1/2$; (b) $x_1 = \pi/2$, $x_2 = \pi/2 + 1/3$, când $a = 2 + 2/3i$ și $b = 3 + i$.

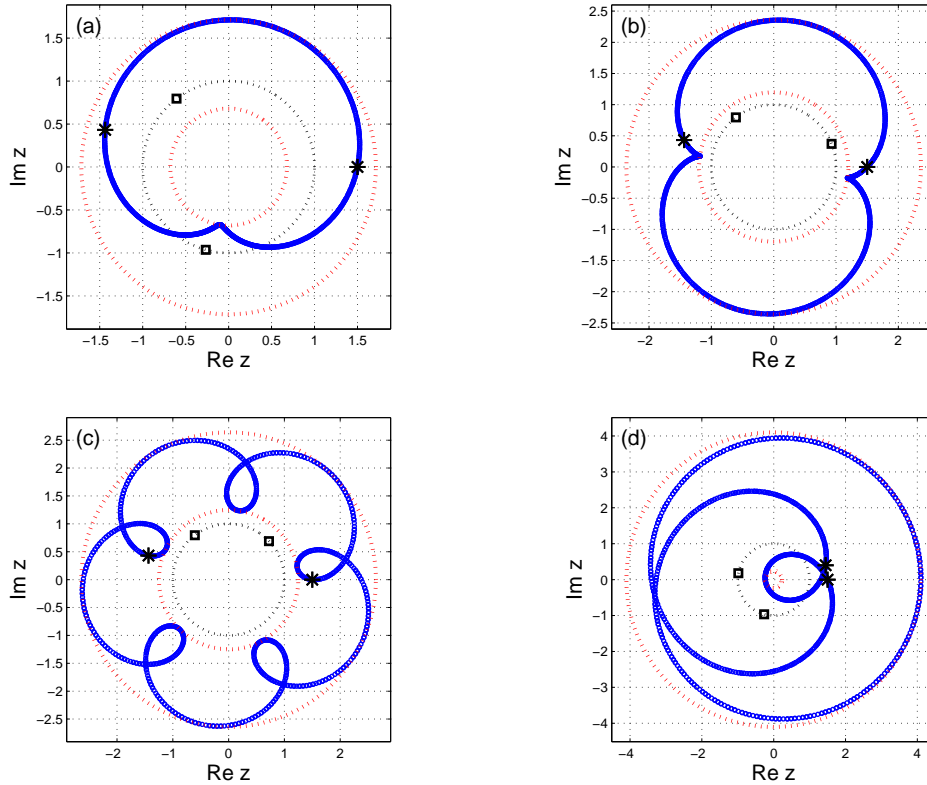


Figura 3.3: Primii 1000 de termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținut din (3.1.3) pentru $r_1 = r_2 = 1$, $x_2 = qx_1$, unde (a) $q = 2$, $x_2 = \sqrt{2}/4$; (b) $q = 3$, $x_2 = \sqrt{2}/4$; (c) $q = 6$, $x_2 = \sqrt{2}/4$; și $a = 1.5$, $b = 1.5 \exp(2\pi i(\sqrt{2}/4 + 1/10))$ și pentru (d) $q = 2/3$, $x_2 = \sqrt{2}/3$, și $a = 1.5$, $b = 1.5 \exp(2\pi i(2\sqrt{2}/3 + 1/10))$. Condițiile inițiale a, b punctate de stele, generatorii z_1, z_2 de pătrate, cercul unitate de linie punctată, ca și limitele inelului $U(0, ||A| - |B||, |A| + |B|)$.

(c2) Orbite dense în curbe închise unidimensionale

(c2) $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x_2 = x_1 q$, $q \in \mathbb{Q}$. Termenul general w_n din (3.1.3) poate fi scris ca

$$w_n = Az_1^n + Bz_2^n = Az_1^n + B(z_1^q)^n.$$

Din Lema 3.1.1, orbita șirului $\{z_1^n\}_{n=0}^{\infty}$ este densă în cercul unitate, deci orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este densă în graficul funcției complexe $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ definite de ecuația

$$f(z) = Az + Bz^q.$$

Această proprietate este ilustrată în Fig. 3.3. În (a), $q = 6$ produce 5 auto-intersecții și numărul de revoluție este unu, în timp ce pentru cazul $q = 3/2$ desenat în (d), numărul de revoluție este trei, cu două auto-intersecții. Pentru o fracție ireductibilă $q = m/k$ curba $g(x) = Ae^{2\pi xi} + Bz^{2\pi qxi}$, are m auto-intersecții și numărul de revoluție este k .

(c3) Orbite stabile dense în inele bidimensionale

Atunci când $1, x_1, x_2$ sunt linear independente peste \mathbb{Q} (sau \mathbb{Z}), orbita șirului Horadam rezultat este densă într-un inel.

Această proprietate este ilustrată în Fig. 3.4(a) pentru $|A| \neq |B|$, când $r_1 = r_2 = 1$, $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{5}}{15}$ și $a = 2 + \frac{2}{3}i, b = 3 + i$. Dacă $|A| = |B|$, orbita este densă în cercul $U(0, 2|A|)$, după cum arată Fig. 3.4(b) realizată pentru parametrii $r_1 = r_2 = 1$, $x_1 = \exp(1)/2, x_2 = \exp(2)/4$ și $a = 1 + 1/3i, b = 1.5a \exp(\pi(x_1 + x_2))$. Aceste orbite dense inspiră designul unui generator de numere pseudo-aleatoare în Secțiunea 3.3.

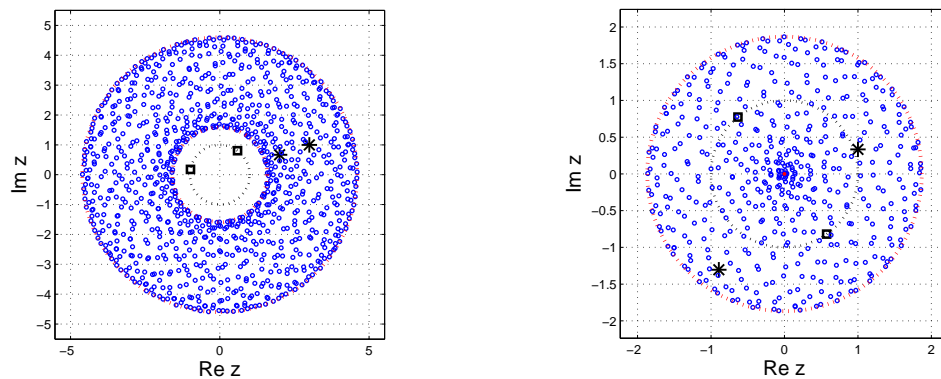


Figura 3.4: Primii N termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținut din (2.1.4). (a) $N = 1000, |A| \neq |B|$; (b) $N = 500, |A| = |B|$. Desenat mai sunt, condițiile inițiale a, b (stars), generatorii z_1, z_2 (squares), cercul unitate S (solid line) și cercul $U(0, |A| + |B|)$ (dotted line).

3.2.2 Orbite cvasi-convergente: $0 \leq r_1 < r_2 = 1$

Teorema 3.2.2. Fie șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ definit de (3.1.3) pentru condițiile inițiale $w_0 = a, w_1 = b$ și polinomul (3.1.1) care are rădăcinile distincte $z_1 \neq z_2$ cu proprietatea că $0 \leq r_1 < r_2 = 1$. Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ poate avea următoarele profile:

- (a) Pentru $x_2 \in \mathbb{Q}$: Orbita este atrasa de un număr finit de puncte (vârfurile unui poligon regulat) de-a lungul unor raze ($x_1 \in \mathbb{Q}$) sau spirale ($x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) (vezi Fig. 3.5).
- (b) Pentru $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Orbita colapsează pe un cerc de rază $|B|$ (vezi Fig. 3.6).

(a) Când $x_2 = p_2/k_2$ este o fracție ireductibilă, z_2 este o rădăcină primitivă de ordin k_2 a unității. Prin urmare, șirul $\{z_2^n\}_{n=0}^{\infty}$ este periodic având k_2 termeni distincți $1, z_2, \dots, z_2^{k_2-1}$ reprezentând vârfurile unui k_2 -gon regulat. Când fracția $x_1 = p_1/k_1 \in \mathbb{Q}$ este ireductibilă, subsșirurile $\{w_{nk_2+j}\}_{n=0}^{\infty}$ se apropie de limită de-a lungul unor raze, reprezentate în Fig. 3.5 (a). Numărul razelor este același pentru fiecare atractor.

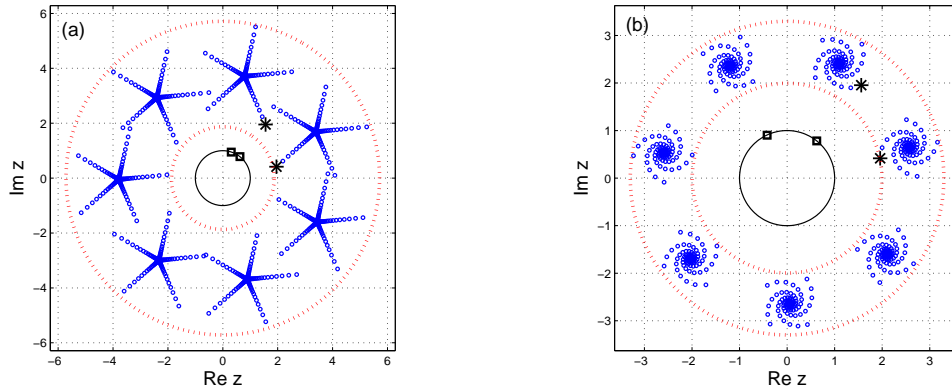


Figura 3.5: Primii 1000 de termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținut din (3.1.3) când $r_1 = 0.995$, $r_2 = 1$ și (a) $x_1 = 1/5$, $x_2 = 1/7$; (b) $x_1 = \sqrt{5}/7$, $x_2 = 1/7$, și $a = 2 \exp(2\pi i/30)$, $2.5 \exp(2\pi i/7)$. Stelele arată condițiile inițiale a, b , pătratele generatorii z_1, z_2 iar linia solidă cercul unitate. Cercurile interioare și exterioare reprezintă frontierele inelului $U(0, |A| - |B|, |A| + |B|)$.

(b) Când x_2 este irațional, $\{Bz_2^n\}_{n=0}^{\infty}$ este o submulțime densă a cercului de rază $|B|$ centrat în origine. Deoarece șirul $\{Az_1^n\}_{n=0}^{\infty}$ converge la zero, orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ colapsează pe cercul de rază $|B|$ centrat în origine, după cum se vede în Fig. 3.6.

Se poate observa că termenii șirului desenat în Fig. 3.6 (a) sunt înăuntrul cercului $U(0, |A| + |B|)$, dar nu și al inelului $U(0, |A| - |B|, |A| + |B|)$. Dacă $|A| > |B|$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| = |B| < |A| - |B| = ||A| - |B||$, prin urmare condiția se transcrie ca $|A| > 2|B|$, care cere $|az_2 - b| > 2|b - az_1|$. În exemplul arătat în Fig. 3.6 (a) avem $|A| = 3.4669$ și $|B| = 1.5254$.

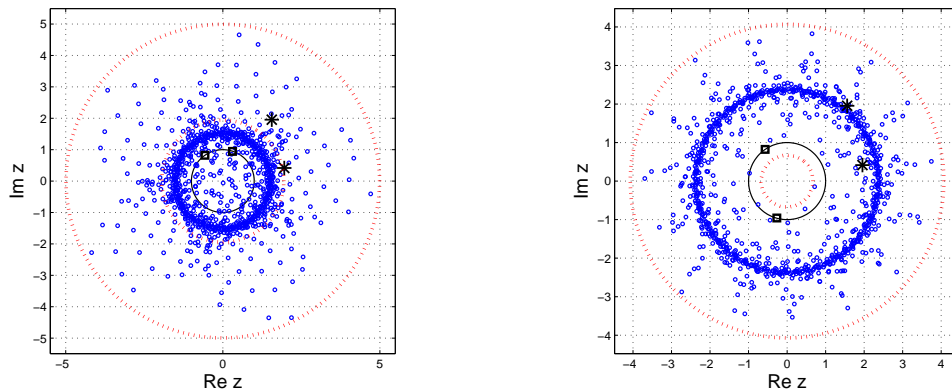


Figura 3.6: Primii 1000 de termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținut din (3.1.3) când $r_1 = 0.995$, $r_2 = 1$ și (a) $x_1 = 1/5$, $x_2 = \sqrt{3}/5$; (b) $x_1 = \sqrt{2}/2$, $x_2 = \sqrt{3}/5$, și $a = 2 \exp(2\pi i/30)$, $2.5 \exp(2\pi i/7)$. Stelele arată condițiile inițiale a, b , pătratele generatorii z_1, z_2 iar linia solidă cercul unitate. Cercurile interioare și exterioare reprezintă frontierele inelului $U(0, |A| - |B|, |A| + |B|)$.

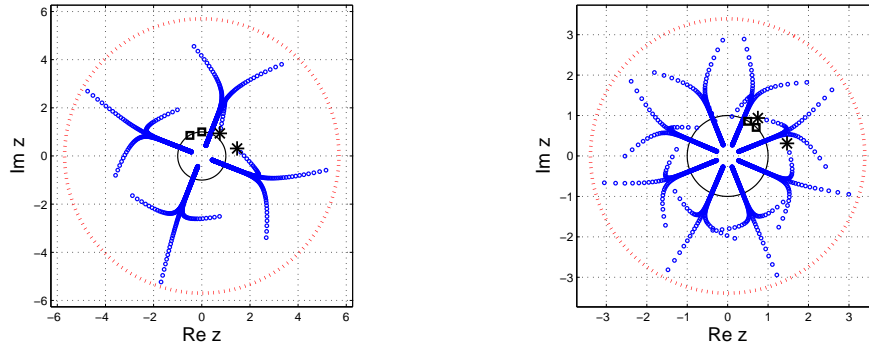


Figura 3.7: Primii 2000 de termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținut din (3.1.3) pentru $r_1 = 0.99$, $r_2 = 0.999$ și (a) $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1/4$; (b) $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/8$; și $a = 1.5 \exp(2\pi i/30)$, $b = 1.2 \exp(2\pi i/7)$. Mai sunt reprezentate condițiile inițiale w_0, w_1 (stars), generatorii z_1, z_2 (squares), cercul unitate S (solid line) și cercul $U(0, |A| + |B|)$ (dotted line).

3.2.3 Orbite convergente: $0 \leq r_1 \leq r_2 < 1$

Șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ definit de (3.1.3) converge acum la origine. Cazurile când r_1 și r_2 sunt egale sau distincte sunt analizate separat.

Teorema 3.2.3. [Orbite pentru $r_1 < r_2$] Fie șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ definit de (3.1.3) pentru condițiile inițiale $w_0 = a, w_1 = b$ și polinomul (3.1.1) care are rădăcinile distincte $z_1 \neq z_2$ cu proprietatea $0 \leq r_1 < r_2 < 1$. Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ poate avea următoarele profile:

- (a) $x_1 = \frac{p_1}{k_1}, x_2 = \frac{p_2}{k_2} \in \mathbb{Q} : \text{lcm}(k_2, k_1)$ ramuri convergente colapsând în k_2 raze (Fig. 3.7).
- (b) $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x_2 = p/k \in \mathbb{Q}$ (ireductibilă): k ramuri spirale perturbate (Fig. 3.8).
- (c) $x_1 = p/k \in \mathbb{Q}$ (ireductibilă), $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Orbita converge concentric spre origine, ca o mulțime de k petals sau ramuri (Fig. 3.9).
- (d) $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Aici orbita este o spirala (Fig. 3.10).

Teorema 3.2.4. (Orbite pentru $r_1 = r_2 = r$) Fie șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ definit de (3.1.3) pentru condițiile inițiale $w_0 = a, w_1 = b$ și polinomul (3.1.1) care are rădăcinile distincte $z_1 \neq z_2$ cu proprietatea $0 \leq r_1 = r_2 < 1$. Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ poate avea următoarele profile:

- (a) $x_1 = p_1/k_1, x_2 = p_2/k_2 \in \mathbb{Q} : \text{lcm}(k_1, k_2)$ raze care converg la origine (vezi Fig. 3.11 (a)).
- (b) $x_1 \in \mathbb{Q}$ and $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (sau invers): k_2 spirale perturbate (vezi Fig. 3.11 (b),(c),(d)).
- (c) $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. În acest caz se pot identifica configurațiile
 - (c1) $x_2 - x_1 = q \in \mathbb{Q}$: spirale multiple (vezi Fig. 3.12 (a)).
 - (c2) $x_1 = x_2 q, q \in \mathbb{Q}$: contururi multi-camerale (vezi Fig. 3.12 (b) și (c)).
 - (c3) $1, x_1, x_2$ linear independente peste \mathbb{Q} : spirale eratic convergente (vezi Fig. 3.12 (d)).

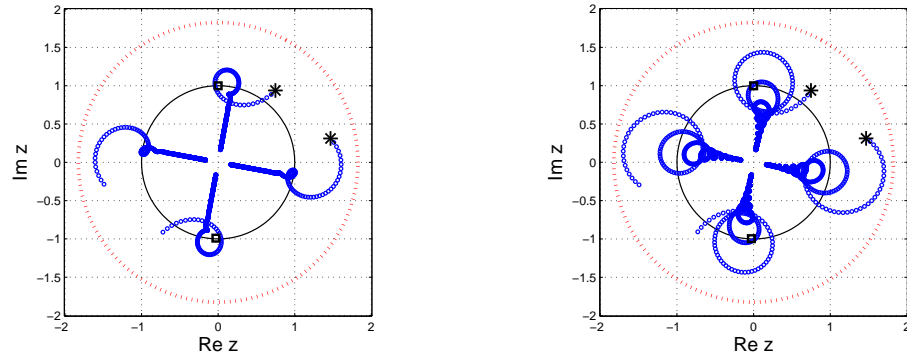


Figura 3.8: Primii 2000 de termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținut din (3.1.3) pentru $x_1 = \sqrt{5}/3$, $x_2 = 1/4$ și $r_2 = 0.999$ pentru (a) $r_1 = 0.99$, (b) $r_1 = 0.997$, când $a = 1.5 \exp(2\pi i/30)$ și $b = 1.2 \exp(2\pi i/7)$. Mai sunt reprezentate condițiile inițiale w_0, w_1 (stars), generatorii z_1, z_2 (squares), cercul unitate S (solid line) și cercul $U(0, |A| + |B|)$ (dotted line).

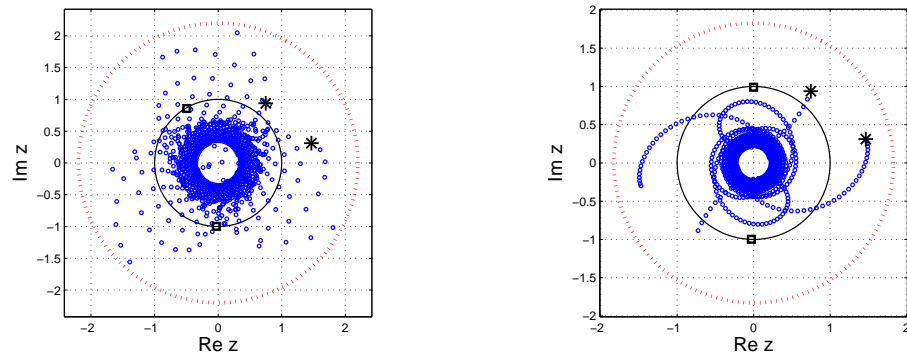


Figura 3.9: Primii 2000 de termeni $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținuți pentru $r_1 = 0.99, r_2 = 0.999$ și (a) $x_1 = 1/3, x_2 = \sqrt{5}/3$; (b) $x_1 = 1/4, x_2 = \sqrt{5}/3$; când $a = 1.5 \exp(2\pi i/30), b = 1.2 \exp(2\pi i/7)$.

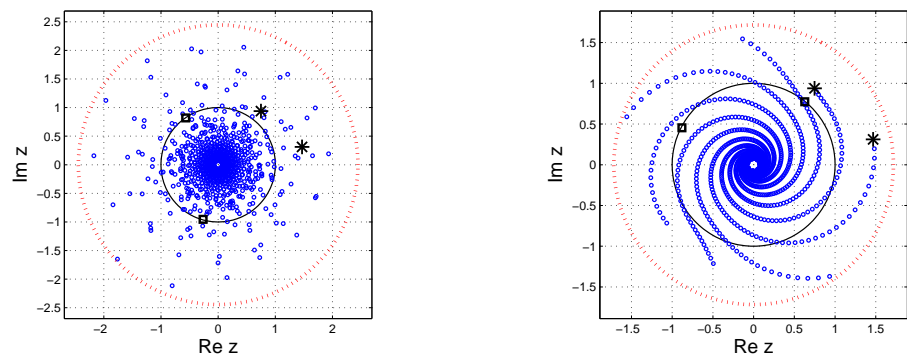


Figura 3.10: Primii 2000 de termeni $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ pentru $r_1 = 0.99, r_2 = 0.997$ și (a) $x_1 = \sqrt{2}/2, x_2 = \sqrt{5}/3$; (b) $x_1 = 3\sqrt{2}/10, x_2 = \sqrt{2}/10$, când $a = 1.5 \exp(2\pi i/30), b = 1.2 \exp(2\pi i/7)$.

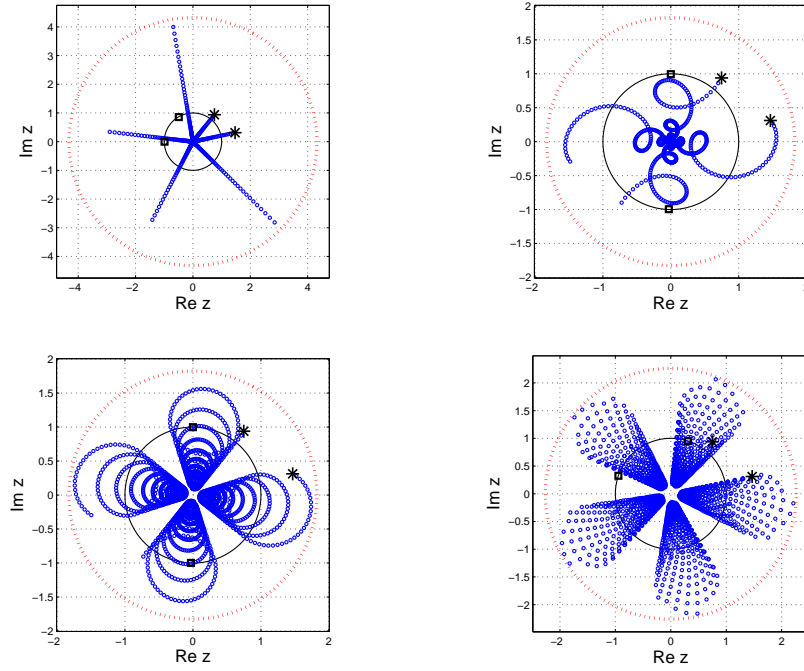


Figura 3.11: Primii 2000 de termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținut din (3.1.3) pentru (a) $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1/2$, $r = 0.99$; (b) $x_1 = \sqrt{5}/3$, $x_2 = 1/4$, $r = 0.995$; (c) $x_1 = \sqrt{5}/3$, $x_2 = 1/4$, $r = 0.999$; (d) $x_1 = \sqrt{5}/5$, $x_2 = 1/5$, $r = 0.999$ când $a = 1.5 \exp(2\pi i/30)$ și $b = 1.2 \exp(2\pi i/7)$ (stars).

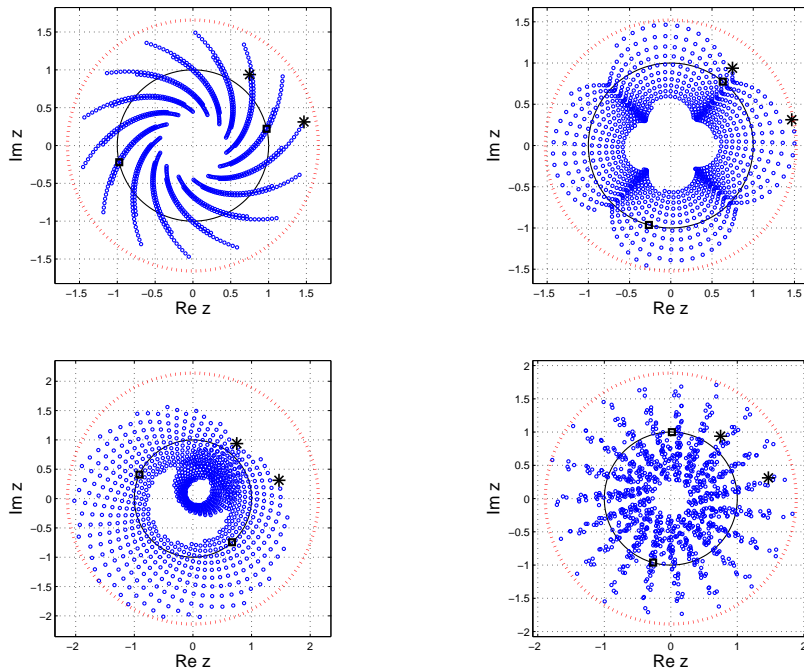


Figura 3.12: Șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținut pentru $r = 0.999$ și (a) $x_1 = 5\sqrt{2}/2 + 1/2$, $x_2 = 5\sqrt{2}/2$, (b) $x_1 = 5\sqrt{2}/10$, $x_2 = \sqrt{2}/10$; (c) $x_1 = \sqrt{3}/2$, $x_2 = \sqrt{3}/4$; (d) $x_1 = \sqrt{2}/2$, $x_2 = \sqrt{3}/7$.

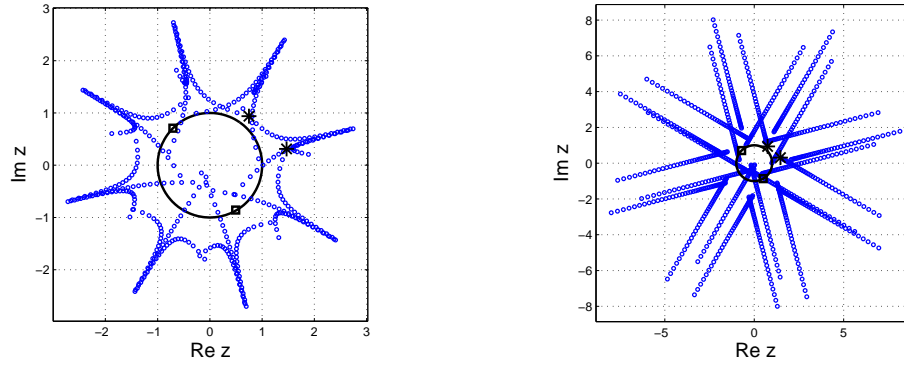


Figura 3.13: Primii N termeni $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ când $r_2 = 1.002$, $x_1 = 5/6$, $x_2 = 3/8$ și (a) $N = 500$ și $r_2 = 0.999$; (b) $N = 1000$ și $r_2 = 1$, cu $a = 1.5 \exp(2\pi i/30)$ și $b = 1.2 \exp(2\pi i/7)$.

3.2.4 Orbite divergente: $1 < r_2$

În acest caz șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ definit prin (3.1.3) diverge la infinit.

Teorema 3.2.5. [Orbite pentru $1 < r_2$, $r_1 < r_2$] Fie șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ definit de (3.1.3) pentru condițiile inițiale $w_0 = a$, $w_1 = b$ și polinomul (3.1.1) care are rădăcinile distincte $z_1 \neq z_2$ cu proprietatea $0 < r_1 < r_2$ și $1 < r_2$. Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ poate avea următoarele profile:

(a) $x_1 = p_1/k_1, x_2 = p_2/k_2 \in \mathbb{Q} : \text{lcm}(k_2, k_1)$ ramuri care se unesc în k_2 raze divergente din origine spre infinit (vezi Fig. 3.13).

(b) $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x_2 = p/k \in \mathbb{Q}$ (ireductibilă): k brațe divergente spiralate (vezi Fig. 3.14).

(c) $x_1 = p/k \in \mathbb{Q}$ (ireductibilă), $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Orbita diverge concentric la infinit, ca o mulțime de k petale sau ramuri (vezi Fig. 3.15).

(d) $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. În acest caz orbita este o spirală ordonată (vezi Fig. 3.16).

Teorema 3.2.6. (Orbite pentru $1 < r_1 = r_2 = r$) Fie șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ definit de (3.1.3) pentru condițiile inițiale $w_0 = a$, $w_1 = b$ și polinomul (3.1.1) care are rădăcinile distincte $z_1 \neq z_2$ cu proprietatea $1 < r_1 = r_2 = r$. Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ poate avea următoarele profile:

(a) $x_1 = p_1/k_1, x_2 = p_2/k_2 \in \mathbb{Q} : \text{lcm}(k_1, k_2)$ raze care diverg la infinit (vezi Fig. 3.17 (a)).

(b) $x_1 \in \mathbb{Q} = p_1/k_1$ and $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (sau invers): k_1 spirale divergente (vezi Fig. 3.17 (b)).

(c) $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. În acest caz identificăm configurațiile

(c1) $x_2 - x_1 = q \in \mathbb{Q}$: spirale divergente multiple (vezi Fig. 3.17 (c)).

(c2) $x_1 = x_2 q, q \in \mathbb{Q}$: contururi divergente multi-camerale (vezi Fig. 3.17 (d)).

(c3) $1, x_1, x_2$ linear independente peste \mathbb{Q} : spirale convergente eratic (vezi Fig. 3.18).

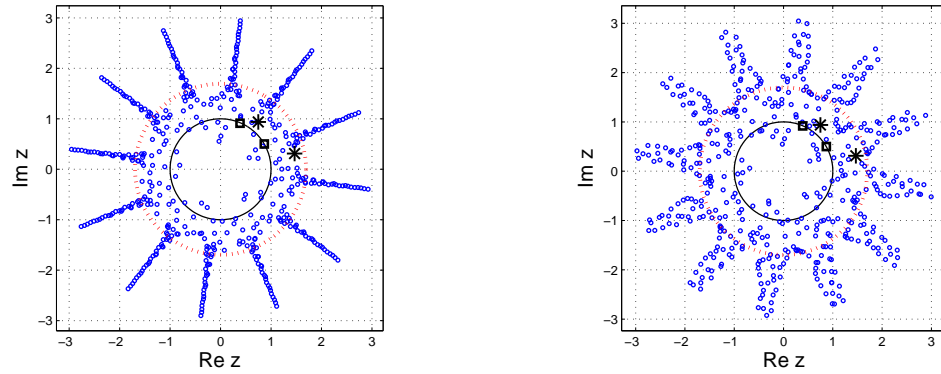


Figura 3.14: Primii 500 termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținuți pentru $r_2 = 1.002$, $x_1 = \sqrt{5}/12$, $x_2 = 1/12$ și (a) $r_1 = 0.99$; (b) $r_1 = 0.997$, când $a = 1.5 \exp(2\pi i/30)$ și $b = 1.2 \exp(2\pi i/7)$.

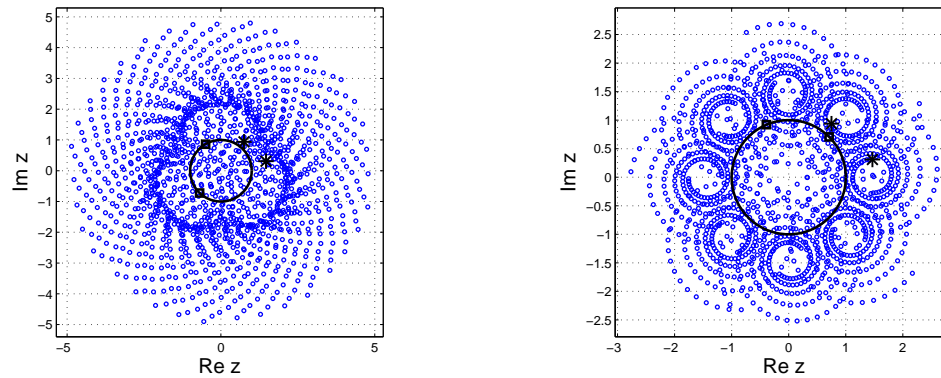


Figura 3.15: Primii 1500 termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținuți din (3.1.3) pentru $r_2 = 1.001$, și (a) $x_1 = 1/3$, $x_2 = \pi/5$, $r_1 = 0.997$; (b) $x_1 = 1/8$, $x_2 = \pi/10$, $r_1 = 1$, când $a = 1.5 \exp(2\pi i/30)$ și $b = 1.2 \exp(2\pi i/7)$.

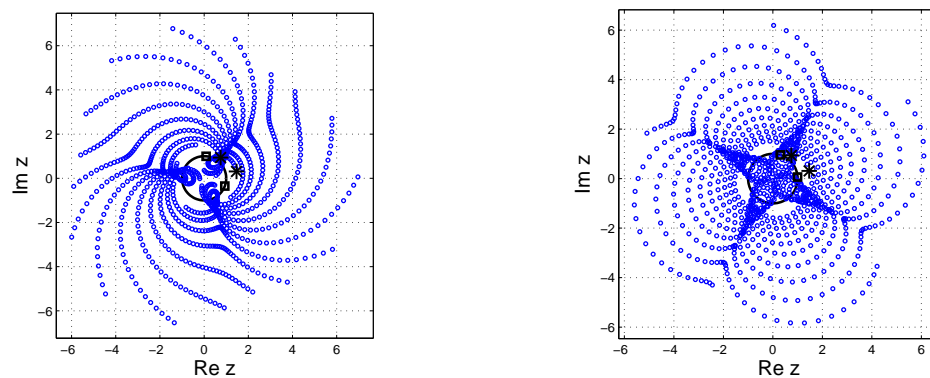


Figura 3.16: Primii 1000 termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ pentru $r_2 = 1$, $r_2 = 1.002$, și (a) $x_1 = 4\sqrt{2}/6$, $x_2 = \sqrt{2}/6$; (b) $x_1 = 5\sqrt{2}/7$, $x_2 = \sqrt{2}/7$ când $a = 1.5 \exp(2\pi i/30)$ și $b = 1.2 \exp(2\pi i/7)$.

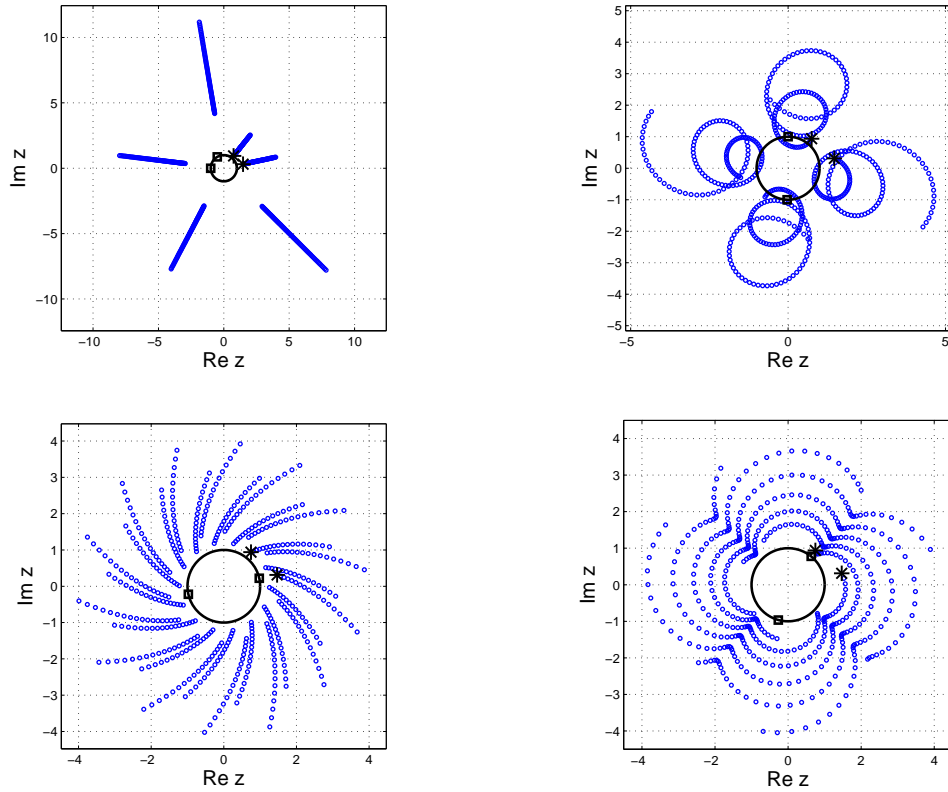


Figura 3.17: Primii 500 de termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținut din (3.1.3) pentru $r = 1.002$ și (a) $x_1 = 1/3, x_2 = 1/2$; (b) $x_1 = \sqrt{5}/3, x_2 = 1/4$; (c) $x_1 = 5\sqrt{2}/2 + 1/2, x_2 = 5\sqrt{2}/2$; (d) $x_1 = \sqrt{2}/2, x_2 = \sqrt{2}/10$, când $a = 1.5 \exp(2\pi i/30)$ și $b = 1.2 \exp(2\pi i/7)$.

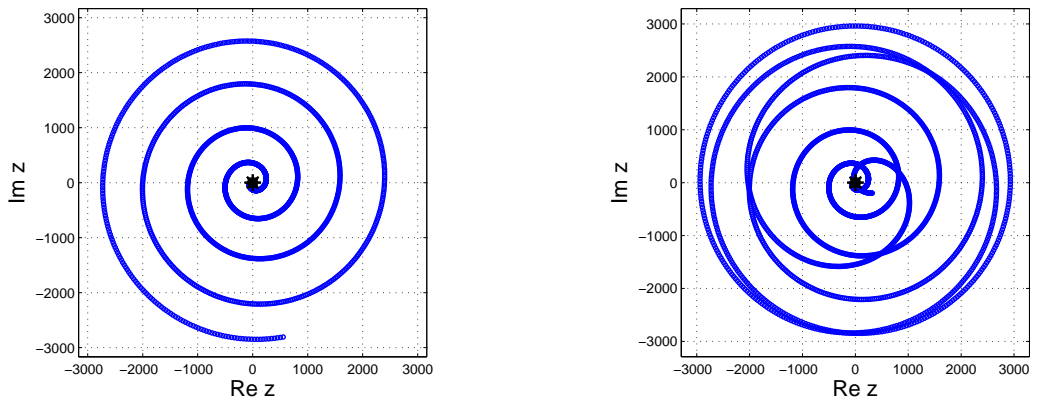


Figura 3.18: Primii N termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținut din (3.1.3) pentru (a) $x_1 = \exp(1)/1000, x_2 = \pi/1000, r = 1.001, N = 1500$; (b) $x_1 = \exp(1)/1000, x_2 = \pi/1000, r = 1.001, N = 2400$; când $a = 1.5 \exp(2\pi i/30)$ și $b = 1.2 \exp(2\pi i/7)$. Mai sunt reprezentate condițiile inițiale w_0, w_1 (stars), generatorii z_1, z_2 (squares) și cercul unitate S (solid line).

3.3 Un generator de numere pseudo-aleatoare bazat pe șiruri Horadam

În această secțiune anumite șiruri Horadam complexe inspiră un generator de numere pseudo-aleatoare. Acesta este evaluat folosind teste Monte Carlo pentru π și comparat cu generatori clasici ca Multiplicative Lagged Fibonacci și 'twister' Mersenne.

Generatoare de numere pseudo-aleatoare și șiruri Horadam

Generatoarele de numere pseudo-aleatoare reprezintă un element esențial al multor algoritmi numerici bazați pe simulare și selecție statistică. Numeroase implementări sunt bazate pe metode recursive ca *Linear Congruences* și *Lagged Fibonacci Sequences* [98]. Generatoarele necesită periodicitate, uniformitate și corelație [49].

Argumentul complex ale șirurilor Horadam dense în inele bidimensionale

Anumite orbite Horadam sunt dense în cercuri sau inele centrate în origine. Mai exact, dacă $r_1 = r_2 = 1$ și generatorii $z_1 = e^{2\pi i x_1} \neq z_2 = e^{2\pi i x_2}$ au proprietatea că $1, x_1, x_2$ linear independenți peste \mathbb{Q} , atunci orbita șirului Horadam $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținut din (3.1.3) este densă în inelul $U(0, |A| - |B|, |A| + |B|)$. Aceste orbite dense sunt aici examinate și folosite în designul unui generator de numere pseudo-aleatoare.

Argumentul termenilor șirului Horadam

Dacă $A = R_1 e^{i\phi_1}, B = R_2 e^{i\phi_2}, z_1 = e^{2\pi i x_1}, z_2 = e^{2\pi i x_2}$, termenul w_n în formă polară este

$$r e^{i\theta} = A z_1^n + B z_2^n = R_1 e^{i(\phi_1 + 2\pi n x_1)} + R_2 e^{i(\phi_2 + 2\pi n x_2)}.$$

Notând $\theta_1 = \phi_1 + 2\pi n x_1, \theta_2 = \phi_2 + 2\pi n x_2$, putem scrie

$$r e^{i\theta} = R_1 e^{i\theta_1} + R_2 e^{i\theta_2}, \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \quad R_1, R_2 > 0. \quad (3.3.1)$$

Pentru $R = R_1 = R_2$, formula lui θ este $\theta = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$.

Periodicitatea argumentelor

Din formula lui θ , șirul argumentelor lui w_n este

$$\theta_n = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + 2\pi n(x_1 + x_2).$$

Dacă $1, x_1, x_2$ sunt linear independente, atunci $x_1 + x_2$ este irațional, prin urmare șirul de argumente θ_n este aperiodic. Această proprietate este de asemenea adevărată pentru șirul de argumente normalizate $(\theta_n + \pi)/(2\pi)$.

Uniform distribuirea argumentelor

Dacă $1, x_1, x_2$ sunt linear independente, atunci argumentele complexe $\theta_1 = \phi_1 + 2\pi n x_2$, și $\theta_2 = \phi_2 + 2\pi n x_2$ sunt uniform distribuite în $[-\pi, \pi]$, deci θ este uniform distribuit în $[-\pi, \pi]$. Argumentul normalizat $(\theta + \pi)/(2\pi)$ este atunci uniform distribuit în $[0, 1]$, conform ilustrației din Fig. 3.19 (a).

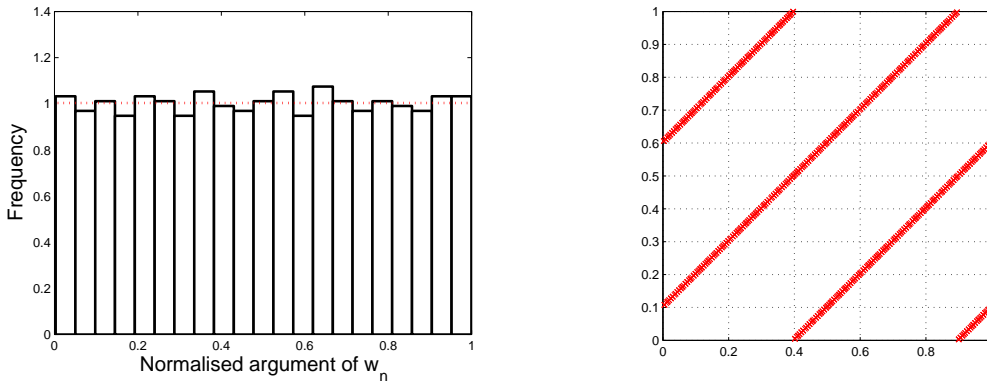


Figura 3.19: (a) Histograma argumentelor normalizate $\frac{\arg(w_n) + \pi}{2\pi}$ vs densitatea uniformă $[0, 1]$. (b) Corelații ale argumentului normalizat: $(\text{Arg}(w_n), \text{Arg}(w_{n+1}))$.

Autocorelația argumentelor

Un test pentru calitatea unui generator de numere aleatoare este autocorelația [49]. Pentru un generator de calitate, diagramele 2D ale argumentului normalizat (θ_n, θ_{n+1}) ar trebui să acopere uniform pătratul unitate. Graficul din Fig. 3.19 (b) sugerează că termenii consecutivi sunt în acel caz foarte corelați, chiar liniar.

3.3.1 Simulări Monte Carlo

O simulare Monte Carlo pentru valoarea lui π se poate face selectând aleator puncte $(x_n, y_n)_{n=1}^N$ în pătratul unitate și determinând raportul $\rho = m/N$, unde m este numărul de puncte care satisfac $x_n^2 + y_n^2 \leq 1$. În simularile de mai jos se folosesc două șiruri Horadam $\{w_n^1\}$ and $\{w_n^2\}$ calculate din formula (2.1.4).

Parametrii sunt $x_1 = \frac{e}{2}, x_2 = \frac{e^2}{4}$ for $\{w_n^1\}$, și $x_1 = \frac{e}{10}, x_2 = \frac{\pi}{10}$ for $\{w_n^2\}$, cu condițiile inițiale $a = 1 + \frac{1}{3}i, b = 1.5a \exp(\pi(x_1 + x_2))$. Coordonatele 2D desenate în Fig. 3.20 reprezintă argumentele normalizate ale șirurilor Horadam date de formula

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{\text{Arg}(w_n^1) + \pi}{2\pi}, \frac{\text{Arg}(w_n^2) + \pi}{2\pi} \right). \quad (3.3.2)$$

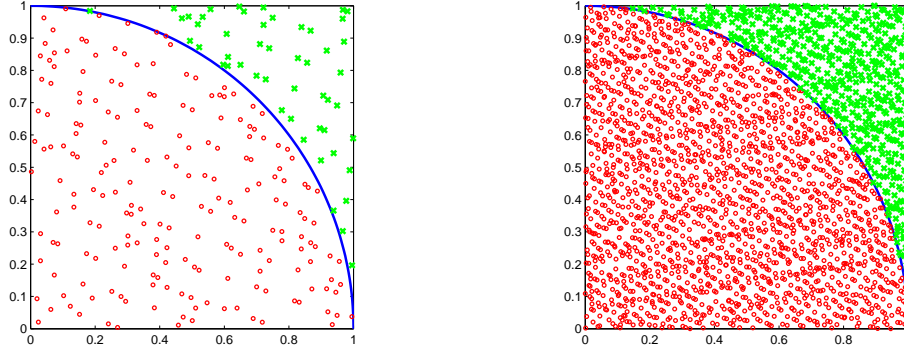


Figura 3.20: Primele (a) 1000; (b) 10000 de puncte având coordonatele (x_n, y_n) date de (3.3.2). Mai sunt desenate punctele interioare (circles) și exterioare (crosses) cercului unitate (solid line).

În simularea arătată în Fig. 3.20(a), considerăm $N = 1000$ puncte din care 792 satisfac $x_n^2 + y_n^2 \leq 1$. Din aceste date obținem $\rho = \frac{792}{1000} = 0.792$ și $\pi \sim 4\rho = 3.1680$.

Aproximația se îmbunătățește semnificativ cu creșterea numărului de termeni, la 3.1420 pentru $N = 10^4$ (desenat în Fig. 3.20 (b)) and to 3.141888 for $N = 10^6$.

Tabelul 3.1: 10^N este numărul de termeni considerat în fiecare simulare.

| 10^N | H1 | H2 | F1 | F2 | MT1 | MT2 |
|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 0.0584 | 0.0584 | -0.3297 | -0.3297 | -0.7258 | 0.8584 |
| 2 | 0.2584 | -0.0216 | 0.0985 | -0.0615 | -0.0215 | 0.0985 |
| 3 | 0.0784 | -0.0016 | -0.0136 | 0.0304 | -0.0456 | 0.0264 |
| 4 | 0.0104 | 0.0004 | 0.0092 | -0.0200 | 0.0036 | 0.0096 |
| 5 | 0.0012 | -0.0006 | -0.0016 | -0.0018 | 0.0004 | -0.0034 |
| 6 | 0.0003 | 0.0000 | -0.0001 | -0.0010 | -0.0026 | -0.0015 |
| 7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | -0.0006 | -0.0002 | 0.0004 |

O ilustrație mai detaliată a convergenței e arătată în Tabelul 3.1. Acolo H1 și H2 sunt obținute din perechile w_n^1 și w_n^2 de șiruri Horadam, în timp ce H2 vine din șirurile w_n^1 and w_n^3 date mai jos sub forma (x_1, x_2, a, b) : $w_n^1 := \left(\frac{e}{2}, \frac{e^2}{4}, 1 + \frac{1}{3}i, 1.5ae^{\pi(x_1+x_2)} \right)$, $w_n^2 := \left(\frac{e}{10}, \frac{\sqrt{5}}{15}, 1 + \frac{2}{3}i, 1.5ae^{\pi(x_1+x_2)} \right)$, $w_n^3 := \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{e}{15}, 1 + \frac{2}{3}i, 1.5ae^{\pi(x_1+x_2)} \right)$.

Coordonatele 2D care produc rezultatele din tabel sunt date de formulele

$$\begin{aligned} \text{H1 : } (x_n, y_n) &= \left(\frac{\text{Arg}(w_n^1) + \pi}{2\pi}, \frac{\text{Arg}(w_n^2) + \pi}{2\pi} \right), \\ \text{H2 : } (x_n, y_n) &= \left(\frac{\text{Arg}(w_n^1) + \pi}{2\pi}, \frac{\text{Arg}(w_n^3) + \pi}{2\pi} \right). \end{aligned}$$

Geometria orbitelor de șiruri recurente liniare complexe

Acest capitol investighează proprietățile geometrice ale șirurilor recurente complexe de ordin arbitrar, generalizând rezultatele pentru șiruri Horadam din Capitolele 2 și 3. Periodicitatea șirurilor liniare recurente a fost studiată mai ales în contextul corpurilor finite sau al inelelor generale (vezi [38, Chapter 3] și [106, 118]). Recent, Bagdasar și Larcombe au formulat condiții necesare și suficiente pentru periodicitatea șirurilor liniare recurente complexe [17]. Aici enumerăm șirurile periodice de lungime fixă și examinăm structura geometrică a orbitelor. Apoi studiem orbitele produse de rădăcini ale unității și prezentăm un mini-atlas de orbite neperiodice.

4.1 Rezultate preliminare

Fie $m \geq 2$ un număr natural, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ și $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$ vectori de numere complexe și fie șirul $\{w_n(\mathbf{a}; \mathbf{c})\}_{n=0}^{\infty}$ definit de recurența

$$w_n = c_1 w_{n-1} + c_2 w_{n-2} + \dots + c_m w_{n-m}, \quad m \leq n \in \mathbb{N}, \quad (4.1.1)$$

care satisface condițiile inițiale $w_{i-1} = a_i$, cu $i = 1, \dots, m$.

În acest capitol sunt stabilite condiții necesare și suficiente pentru periodicitatea șirurilor Horadam generalizate complexe. Rezultatele sunt obținute folosind formulele pentru termenul general al unei recurențe liniare de ordin arbitrar, pe baza condițiilor inițiale a_1, \dots, a_m și a generatorilor z_1, \dots, z_m , reprezentând rădăcinile nenule (distincte sau egale) ale ecuației caracteristice (4.1.1)

$$\lambda^n = c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{m-1} \lambda^{n-m+1} + c_m \lambda^{n-m}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.1.2)$$

Structura spațiului soluțiilor pentru o recurență liniară în condiții generale este de asemenea discutată, pe baza lucrării lui Ivanov [64]. Descrieri alternative ale formulelor termenului general se pot găsi în alte lucrări, ca de exemplu Andrica și Toader [11], sau Cobzaș [32, Chapter 6, Theorem 2.8].

Structura spațiului soluțiilor pentru recurențele liniare

O soluție a recurenței (4.1.1) este orice funcție $w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ care satisface condiția

$$w(n) = c_1 w(n-1) + c_2 w(n-2) + \cdots + c_m w(n-m), \quad n \geq m. \quad (4.1.3)$$

Pentru orice valoare nenulă a lui λ , ecuația caracteristică (4.1.2) se poate scrie

$$\lambda^m = c_1 \lambda^{m-1} + c_2 \lambda^{m-2} + \cdots + c_{m-1} \lambda + c_m.$$

Fără a fi restrânsă generalitatea, putem presupune că ordinul recurenței nu se poate reduce, deci $c_m \neq 0$. Pentru găsirea unei baze a spațiului vectorial V al soluțiilor, putem verifica întâi ca funcțiile $w(n) = \lambda^n$ ($\lambda \neq 0$) sunt o soluție a (4.1.3), dacă λ este un zero al *polinomului caracteristic*

$$f(x) = x^m - c_1 x^{m-1} - c_2 x^{m-2} - \cdots - c_{m-1} x - c_m. \quad (4.1.4)$$

Ca polinom complex, $f(x)$ are exactly m rădăcini. Exemple de baze ale spațiului V pentru cazurile când rădăcinile lui (4.1.4) sunt toate distincte, toate egale, sau distincte cu multiplicități arbitrare sunt prezentate mai jos.

Teorema 4.1.1. ([64, Teorema 1]) *Dacă polinomul caracteristic $f(x)$ definit în (4.1.4) are m rădăcini distincte z_1, \dots, z_m , atunci următoarele m șiruri*

$$f_1(n) = z_1^n, f_2(n) = z_2^n, \dots, f_m(n) = z_m^n,$$

formează o bază a spațiului vectorial V conținând soluțiile recurenței (4.1.3).

Teorema 4.1.2. ([64, Corollary 1]) *Dacă polinomul caracteristic $f(x)$ definit în (4.1.4) are m rădăcini egale cu z , atunci următoarele m șiruri*

$$f_1(n) = z^n, f_2(n) = n z^n, \dots, f_m(n) = n^{m-1} z^n,$$

formează o bază a spațiului vectorial V conținând soluțiile recurenței (4.1.3).

Teorema 4.1.3. ([64, Teorema 2]) *Dacă polinomul caracteristic al unei recurențe liniare are m rădăcini distincte z_1, \dots, z_m cu multiplicitățile d_1, \dots, d_m ($d_1 + \cdots + d_m = d$), cele d șiruri*

$$f_{ij}(n) = n^{j-1} z_i^n, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq d_i, \quad (4.1.5)$$

formează o bază a spațiului vectorial V conținând soluțiile recurenței (4.1.3).

4.2 Condiții de periodicitate

Pentru simplitate, se notează șirul $\{w_n(\mathbf{a}; \mathbf{c})\}_{n=0}^{\infty}$ definit în (4.1.1) pentru m -tuplele de numere complexe a_1, \dots, a_m (condiții inițiale) și c_1, \dots, c_m (coeficienți) cu $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$. Se poate presupune că ordinul recurenței nu poate fi redus, prin urmare $c_m \neq 0$.

4.2.1 Rădăcini distincte

Fie z_1, \dots, z_m rădăcini de ordin k ale unității distincte ($m \leq k$) și fie $P(x)$ definit de

$$P(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_m), \quad x \in \mathbb{C}. \quad (4.2.1)$$

Se consideră de asemenea condițiile inițiale arbitrare

$$w_{i-1} = a_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.2.2)$$

Teorema 4.2.1. Șirul recurent $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ generat de polinomul caracteristic (4.2.1) și condițiile inițiale arbitrare (4.2.2) este periodic.

Demonstrație Șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ având polinomul caracteristic (4.2.1) satisface recurența

$$w_n = c_1 w_{n-1} + c_2 w_{n-2} + \cdots + c_m w_{n-m}, \quad m \leq n \in \mathbb{N}, \quad (4.2.3)$$

cu coeficienții c_1, \dots, c_m dați de formula $c_i = (-1)^{i-1} S_i(z_1, \dots, z_m)$, unde $S_i(z_1, \dots, z_m)$ reprezintă sumele simetrice de produse având i factori neordonați aleși dintre z_1, \dots, z_m . Din Teorema 4.1.1, șirurile $f_1(n) = z_1^n, f_2(n) = z_2^n, \dots, f_m(n) = z_m^n$, formează o bază a spațiului vectorial V al soluțiilor recurenței (4.2.3), prin urmare termenul de rang n al șirului poate fi scris ca o combinație liniară sub forma

$$w_n = A_1 z_1^n + A_2 z_2^n + \cdots + A_m z_m^n. \quad (4.2.4)$$

Coeficienții A_1, \dots, A_m pot fi obținuți din relația (4.2.4) și din condițiile inițiale (4.2.2) prin rezolvarea sistemului liniar de ecuații

$$\begin{cases} a_1 &= A_1 + A_2 + \cdots + A_m \\ a_2 &= A_1 z_1 + A_2 z_2 + \cdots + A_m z_m \\ \dots & \\ a_m &= A_1 z_1^{m-1} + A_2 z_2^{m-1} + \cdots + A_m z_m^{m-1}. \end{cases}$$

Întrucât z_1, \dots, z_m sunt rădăcini de ordin k ale unității, $z_i^n = z_i^{n+k}$, $i = 1, \dots, m$, deci $w_n = w_{n+k}$, $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este periodic, iar perioada sa divide pe k .

Condiția inițială (4.2.2) se poate scrie în formă matricială

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{m-1} & z_2^{m-1} & \cdots & z_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = V_{m,m}(\mathbf{z}) \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad (4.2.5)$$

unde $V_{m,m}(\mathbf{z})$ denotă matricea pătrată Vandermonde. Pentru z_1, \dots, z_m distinct obținem $\det(V_{m,m}(\mathbf{z})) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (z_j - z_i) \neq 0$. Folosind notația $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$, regula lui Cramer [94] asigură că unica soluție a lui (4.2.5) este dată de expresia

$$A_i = \det(V_{m,m}^i(\mathbf{z}, \mathbf{a})) / \det(V_{m,m}(\mathbf{z})), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.2.6)$$

unde $V_{m,m}^i$ este matricea obținută înlocuind coloana i a matricii $V_{m,m}(\mathbf{z})$ cu \mathbf{a}^T .

Primii N termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ pot fi calculați cu formula

$$V_{N,m}(\mathbf{z}) * (A_1, A_2, \dots, A_m)^T = (w_0, w_1, \dots, w_{N-1})^T \quad (4.2.7)$$

Fig. 4.1 ilustrează orbite periodice ale șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținute din recurența (4.2.3) (diamonds), sau formula directă (4.2.7) (circles) când selectăm (a) $m = 3$, respectiv (b) $m = 5$ rădăcini distincte dintre rădăcinile de ordin 7 ale unității.

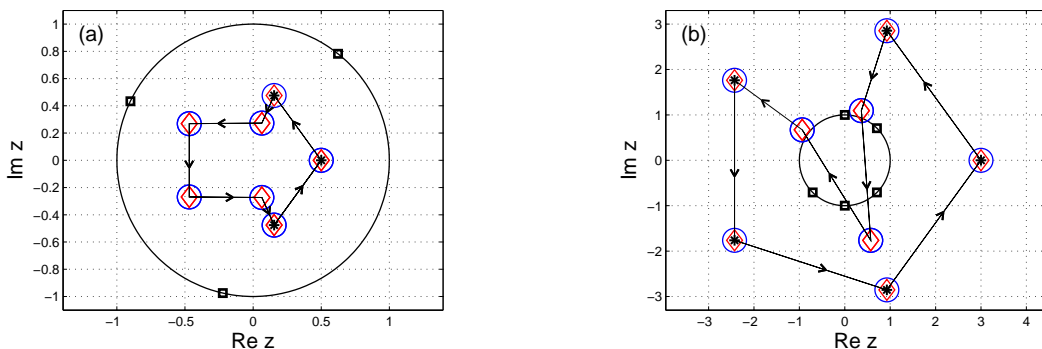


Figura 4.1: Primii 15 termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ calculați din recurența (4.2.3) (diamonds) și formula exactă (4.2.7) (circles), pentru (a) $m = 3$, $z_j = e^{\frac{2\pi i}{7}(2j-1)}$, și $a_j = .5e^{\frac{2\pi i}{5}(j+3)}$, $j = 1, 2, 3$; (b) $m = 5$, $z_j = e^{\frac{2\pi i}{7}j}$ for $j = 1, 2, 5, 6, 7$ și $a_j = 3e^{\frac{2\pi i}{5}(j+1)}$, $j = 1, \dots, 5$. Mai sunt ilustrate condițiile inițiale (stars), generatorii (squares), cercul unitate S (solid line) și direcția orbitei (arrows).

Teorema 4.2.2. (Condiție necesară de periodicitate) Să presupunem că rădăcinile z_1, \dots, z_m ale polinomului (4.2.1) sunt toate distincte. Șirul recurent $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ având polinomul caracteristic (4.2.1) și condițiile inițiale a_1, \dots, a_m este periodic dacă și numai dacă există numărul natural $k \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$A_i(z_i^k - 1) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.2.8)$$

unde constantele A_1, \dots, A_m sunt calculate prin formula (4.2.6).

4.2.2 Rădăcini egale

Fie z o rădăcină de ordin k a unității, $m \in \mathbb{N}$ și fie polinomul $P(x)$ definit de

$$P(x) = (x - z)^m, \quad x \in \mathbb{C}. \quad (4.2.9)$$

Teorema 4.2.3. Șirul recurent $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ generat de polinomul caracteristic (4.2.9) și condițiile inițiale (4.2.2) este periodic dacă $A_2 = A_3 = \dots = A_m = 0$, unde A_1, \dots, A_m sunt coeficienții termenului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ în baza din Teorema 4.1.2. Altfel, șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este divergent.

Demonstrație Ca și în Teorema 4.2.1, șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisface recurența liniară (4.2.3), pentru coeficienții c_1, \dots, c_m dați de $c_i = (-1)^{i-1} \binom{m}{i} z^i$, $i = 1, \dots, m$. Din Teorema 4.1.2, șirurile $f_1(n) = z^n$, $f_2(n) = nz_2^n, \dots, f_m(n) = n^{m-1}z^n$, formează o bază a spațiului vectorial V al soluțiilor recurenței (4.2.9), prin urmare termenul de rang n al șirului poate fi scris ca o combinație liniară sub forma

$$w_n = A_1 z^n + n A_2 z^n + \dots + n^{m-1} A_m z^n. \quad (4.2.10)$$

Pentru $A_i = 0$, $i = 2, \dots, m$ avem $w_n = A_1 z^n$, deci în acest caz șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este periodic. Dacă există $i \geq 2$ a.â. $A_i \neq 0$, comportamentul lui w_n este dictat de coeficientul divergent $n^i A_i$ al lui z^n , prin urmare șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ diverge. Această proprietate este ilustrată în Fig. 4.2. Șirul poate fi (a) periodic sau (b) divergent.

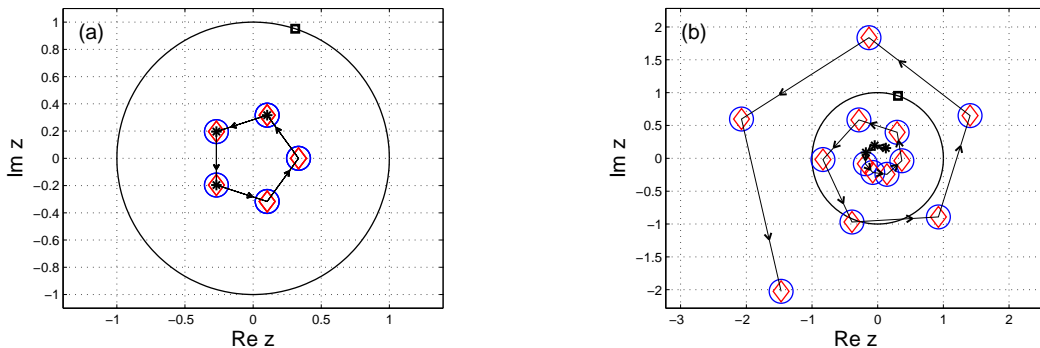


Figura 4.2: Primii 16 termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ calculți din recurența (4.2.3) (diamonds) și formula directă (circles) pentru $m = 3$, $z = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ și condițiile inițiale (a) $a_j = e^{\frac{2\pi i}{5}j}/3$, $j = 1, 2, 3$; (b) $a_j = e^{\frac{2\pi i}{7}j}/3$, $j = 1, 2, 3$. Mai sunt ilustrate condițiile inițiale (stars), generatorii (squares), cercul unitate S (solid line) și direcția orbitei (arrows).

Teorema 4.2.4. (Condiție necesară de periodicitate) Șirul recurent $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ având polinomul caracteristic (4.2.9) și condițiile inițiale (4.2.2) este periodic dacă și numai dacă

$$A_1(z^k - 1) = 0, A_2 = A_3 = \dots = A_m = 0, \quad (4.2.11)$$

unde constantele A_1, \dots, A_m sunt calculate din condițiile inițiale.

4.2.3 Rădăcini distincte cu multiplicități arbitrare

Fie $2 \leq m \leq k$ și d_1, \dots, d_m numere naturale, z_1, \dots, z_m rădăcini distincte de ordin k ale unității și fie polinomul $P(x)$ definit de

$$P(x) = (x - z_1)^{d_1} (x - z_2)^{d_2} \cdots (x - z_m)^{d_m}, \quad x \in \mathbb{C}. \quad (4.2.12)$$

Teorema 4.2.5. Șirul recurent $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ definit de polinomul caracteristic (4.2.12) de ordin $d = d_1 + \cdots + d_m$ și condițiile inițiale $w_{i-1} = a_i$, $i = 1, \dots, d$ este periodic când

$$A_{ij} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq j \leq d_i, \quad (4.2.13)$$

unde A_{ij} ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq d_i$) reprezintă coeficienții lui $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ în baza (4.1.5) definită în Teorema 4.1.3. Altfel, șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este divergent.

Conform ilustrației din Fig. 4.3 (a), șirul poate fi periodic chiar dacă $d_i \geq 2$, $i = 1, \dots, m$. Când oricare dintre coeficienții A_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $2 \leq j \leq d_i$ nu se anulează, șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ diverge, după cum se arată în Fig. 4.3 (b). O explicație mai detaliată a acestui fenomen este prezentată în Teorema 4.2.6.

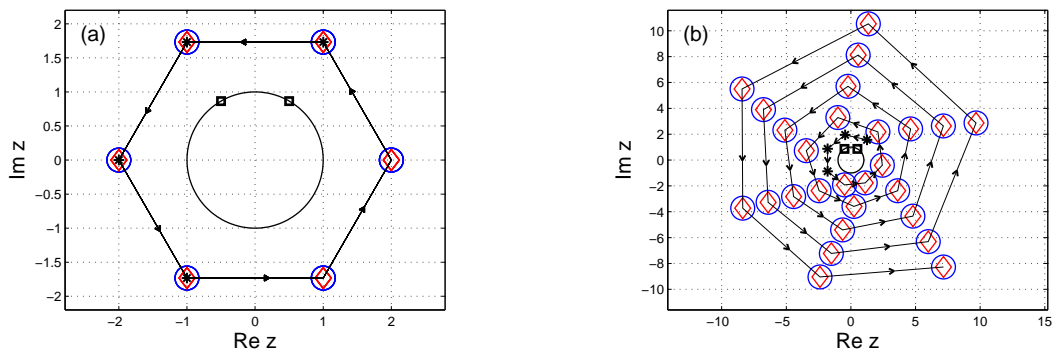


Figura 4.3: Primii 31 de termeni ai șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ calculat din recurență (diamonds) și formula directă (circles) pentru $z_1 = e^{\frac{2\pi i}{6}}$, $z_2 = e^{\frac{4\pi i}{6}}$, $d_1 = d_2 = 2$ și condițiile inițiale (a) $a_j = 2e^{\frac{2\pi i}{6}j}$, $j = 1, \dots, 4$; (b) $a_j = 2e^{\frac{2\pi i}{7}j}$, $j = 1, \dots, 4$. Mai sunt ilustrate condițiile inițiale (stars), generatorii (squares), cercul unitate S (solid line) și direcția orbitei (arrows).

Teorema 4.2.6. (Condiții necesare de periodicitate) Fie $2 \leq m \leq k$ și d_1, \dots, d_m numere naturale. Șirul recurent $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ având polinomul caracteristic (4.2.12) și condiții inițiale $w_{i-1} = a_i$, $i = 1, \dots, d$ este periodic numai dacă

$$\begin{aligned} A_{i1}(z_i^k - 1) &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ A_{ij} &= 0, \quad j = 2, \dots, d_i, \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

unde coeficienții A_{ij} sunt calculați din condițiile inițiale, pentru $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq d_i$.

4.3 Geometria și numărul orbitelor periodice

În această secțiune investigăm geometria și numărul orbitelor periodice.

4.3.1 Limite geometrice ale orbitelor periodice

Teorema 4.3.1. *Fie $2 \leq m \leq k$ și $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{N}$. Să presupunem că rădăcinile z_1, \dots, z_m ale polinomului $P(x)$ definit de (4.2.12) sunt toate distincte. Dacă șirul Horadam generalizat $\{w_n(\mathbf{a}; \mathbf{c})\}_{n=0}^{\infty}$ corespunzător este periodic, termenii săi sunt localizați în interiorul discului de rază $|A_{11}| + |A_{21}| + \dots + |A_{m1}|$, unde $A_{j1}, j = 1, \dots, m$ calculate din condițiile inițiale.*

4.3.2 Structura geometrică a orbitelor periodice

Teorema 4.3.2. *Fie $m \geq 2$ și k_1, k_2, \dots, k_m numere naturale și fie rădăcinile primitive distincte ale unității $z_j = e^{2\pi i p_j / k_j}, j = 1, \dots, m$. Notăm cu K cel mai mic multiplu comun al numerelor k_1, \dots, k_m , i.e., $K = [k_1, k_2, \dots, k_m]$. Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este atunci un K -gon, ale cărui noduri se pot împărți în $K/k_j \times k_j$ -goane regulate reprezentând un graf multipartit.*

4.3.3 Enumerarea orbitelor periodice de lungime fixă

Fie $m \geq 2$ și rădăcinile primitive distincte ale unității $z_j = e^{2\pi i p_j / k_j}$ cu $j = 1, \dots, m$. Coeficienții A_1, \dots, A_m din formula (4.2.4) sunt presupuși a fi nenuli.

Definiția 4.3.3. Numărul de șiruri de ordin m distincte de perioadă k pentru condițiile inițiale a_1, \dots, a_m este notat cu $H_p^m(k)$. Funcția $H_p^m(k)$ este dată de numărul tuplelor $(P, K) = (p_1, k_1, p_2, k_2, \dots, p_m, k_m)$ ($1 \leq p_j \leq k_j, j = 1, \dots, m$) care satisfac condițiile

$$H_p^m(k) = |\{(p_1, k_1) = \dots = (p_m, k_m) = 1, [k_1, \dots, k_m] = k, k_1 \leq \dots \leq k_m\}|. \quad (4.3.1)$$

Lema 4.3.4. *Dacă $k_1 = k_2 = \dots = k_m$ și $[k_1, k_2, \dots, k_m] = k, k_1 = k_2 = \dots = k_m = k$.*

Lema 4.3.5. *Dacă $[k_1, k_2, \dots, k_m] = k$ și numerele k_1, \dots, k_m sunt distincte, numărul de $2m$ -tuple (P, K) care satisfac (4.3.1) este $\varphi(k_1)\varphi(k_2) \dots \varphi(k_m)$.*

Lema 4.3.6. *Dacă numerele k_1, k_2, \dots, k_m satisfăcând $[k_1, k_2, \dots, k_m] = k$ pot fi partiționate în $s > 0$ mulțimi având d_j elemente egale cu o valoare K_s pentru $j = 1, \dots, s$, atunci $2m$ -tuplele (P, K) care satisfac (4.3.1) care corespund acestui m -tuplu este*

$$\binom{\varphi(K_1)}{d_1} \binom{\varphi(K_2)}{d_2} \dots \binom{\varphi(K_s)}{d_s}.$$

Teorema 4.3.7. Fie numerele naturale $k, m \geq 2$. Numărul de șiruri generalizate Horadam de ordin m distincte care au perioada fixă k este egal cu

$$H_P(m; k) = \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{\substack{k_1 < k_2 < \dots < k_s \\ d_1 + \dots + d_s = k \\ 1 \leq d_i \leq k \\ [k_1, \dots, k_s] = k}} \binom{\varphi(k_1)}{d_1} \dots \binom{\varphi(k_s)}{d_s} \right\}.$$

Un exemplu pentru $m = 3$

Pentru a găsi $H_P(3; k)$, trebuie numărate configurațiile $(p_1, k_1) = (p_2, k_2) = (p_3, k_3) = 1$ cu $[k_1, k_2, k_3] = k$. Atunci $H_P(3; k) = H_1 + H_2 + H_3 + H_4$ unde

- (1) $k_1 = k_2 = k_3$: $H_1 = \frac{\varphi(k)(\varphi(k)-1)(\varphi(k)-2)}{3!} = \binom{\varphi(k)}{3}$;
- (2) $k_1 = k_2 < k_3$: $H_2 = \frac{\varphi(k_1)(\varphi(k_1)-1)}{2!} \varphi(k_3) = \binom{\varphi(k_1)}{2} \varphi(k_3)$;
- (3) $k_1 < k_2 = k_3$: $H_3 = \varphi(k_1) \frac{\varphi(k_3)(\varphi(k_3)-1)}{2!} = \varphi(k_1) \binom{\varphi(k_3)}{2}$;
- (4) $k_1 < k_2 < k_3$: $H_4 = \varphi(k_1) \varphi(k_2) \varphi(k_3)$.

Ca șir de numere $H_P(3; k)$ pentru $k \geq 1$ obținem

| | | | | | | | | | | | | |
|-------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | ... |
| $H_P(3; k)$ | 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 19 | 35 | 52 | 83 | 110 | 165 | ... |

neindexat în prezent în enciclopedia de șiruri întregi OEIS.

4.4 Orbite generate de rădăcini ale unității

Teorema 4.4.1. Fie $2 \leq m \leq k$ și d_1, \dots, d_m numere naturale. Dacă z_1, \dots, z_m sunt rădăcini distincte de ordin k ale unității, definim șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ generat de polinomul caracteristic (4.2.12), și numărul

$$d^* = \max\{j : A_{ij} \neq 0, i \in \{1, \dots, m\}\}, \quad (4.4.1)$$

pentru coeficienții A_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d_i$) din Teorema 4.2.5, se obține următoarele proprietăți referitoare la șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ și la subșirurile $\{w_{Nk+j}\}_{N=0}^{\infty}$:

- (a) Pentru $d^* \leq 1$ șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este periodic.
- (b) Pentru $d^* \geq 2$ șirul $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ este divergent.
- (c) Pentru $d^* \leq 2$ termenii $\{w_{Nk+j}\}_{N=0}^{\infty}$ sunt colineari (cazul periodic $d^* = 1$ este inclus).
- (d) Pentru $d^* \geq 3$ termenii $\{w_{Nk+j}\}_{N=0}^{\infty}$ converg asimptotic spre o dreaptă.

4.5 Un mini-atlas de orbite ale SRL complexe neperiodice

În această secțiune studiem configurații produse de șiruri liniare recurente neperiodice. Rezultatele le extind pe cele formulate în Capitolul 3 pentru șiruri Horadam. Se vor considera orbite ne-degenerate produse de generatori distincți, unde termenul general este dat de expresia $w_n = A_1 z_1^n + A_2 z_2^n + \dots + A_m z_m^n$, iar condițiile inițiale arbitrare a_1, a_2, \dots, a_m sunt așa încât coeficienții A_1, \dots, A_m sunt nenuli.

Cei $m \geq 2$ generatori distincți sunt notați cu

$$z_1 = r_1 e^{2\pi i x_1}, z_2 = r_2 e^{2\pi i x_2}, \dots, z_m = r_m e^{2\pi i x_m}, \quad (4.5.1)$$

unde $r_1, \dots, r_m, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$. Putem presupune inegalitățile $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_m$. Configurațiile produse de formula (4.2.10) pentru generatorii (4.5.1) sunt

1. Stabile pentru $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 1$;
2. Cvasi-convergente pentru $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_m = 1$;
3. Convergente pentru $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_m < 1$;
4. Divergente pentru $r_m \geq 1$.

Configurațiile geometrice obținute în fiecare caz sunt prezentate mai jos.

4.5.1 Orbite stabile: $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 1$

Aici studiem orbite care corespund generatorilor aflați pe cercul unitate. Pentru conveniență, studiul este restrâns la cazul $m = 3$, unde pentru condițiile inițiale $w_0 = a$, $w_1 = b$ și $w_2 = c$ ($a, b, c \in \mathbb{C}$), termenul general obținut pentru rădăcini simple este dat

$$w_n = A_1 z_1^n + A_2 z_2^n + A_3 z_3^n, \quad (4.5.2)$$

unde constantele A_1, A_2, A_3 se pot regăsi pe baza condițiilor inițiale.

Orbitele obținute în acest scenariu sunt mulțimi finite (periodice), sau mulțimi dense în anumite curbe unidimensionale, sau reuniuni de inele bidimensionale sau discuri.

După cum se arată în Secțiunea 4.3, orbitele sunt localizate în interiorul cercului de rază $|A_1| + |A_2| + |A_3|$, care este de asemenea reprezentat în aceste diagrame.

Aici prezentăm un număr de ilustrații semnificative. Proprietățile sunt determinate de linear dependența (sau independența) elementelor din mulțimea $\{1, x_1, x_2, x_3\}$ peste \mathbb{Q} , i.e., adică de existența coeficienților $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Q}$ (nu toate zero) cu proprietatea $p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$.

(a) Orbite stabile periodice (finite)

Când $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}$ orbita șirului este finită (vezi Fig. 4.4). Într-adevăr, dacă $x_1 = p_1/k_1$, $x_2 = p_2/k_2$ și $x_3 = p_3/k_3$ sunt ireductibile, avem $z_1^{k_1} = z_2^{k_2} = z_3^{k_3} = 1$. Pentru anumite valori A_1, A_2, A_3 , termenii șirului $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ se repetă cu periodicitatea $\text{lcm}(k_1, k_2, k_3)$.

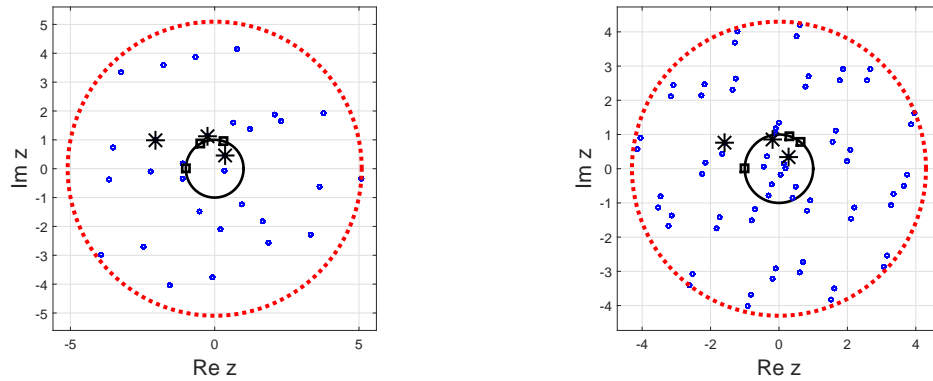


Figura 4.4: Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ obținut din (4.5.2) pentru $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. (a1) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{5}$ (30 puncte); (a2) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{7}$, $x_3 = \frac{1}{5}$ (70 puncte). Condiții inițiale w_0, w_1, w_2 (stars), generatori z_1, z_2, z_3 (squares), $U(0, 1)$ (solid line), $U(0, |A_1| + |A_2| + |A_3|)$ (dotted line).

(b) Orbite dense în reuniuni de cercuri (1D)

Orbitele Horadam generalizate orbits pot fi dense în reuniuni de cercuri, ca în Fig. 4.5.

(b1) $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ și $x_3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: orbita este densă în uniunea a $[k_1, k_2]$ cercuri;

(b2) $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $x_2 - x_1, x_3 - x_1 \in \mathbb{Q}$: orbita densă în uniune de cercuri concentrice.

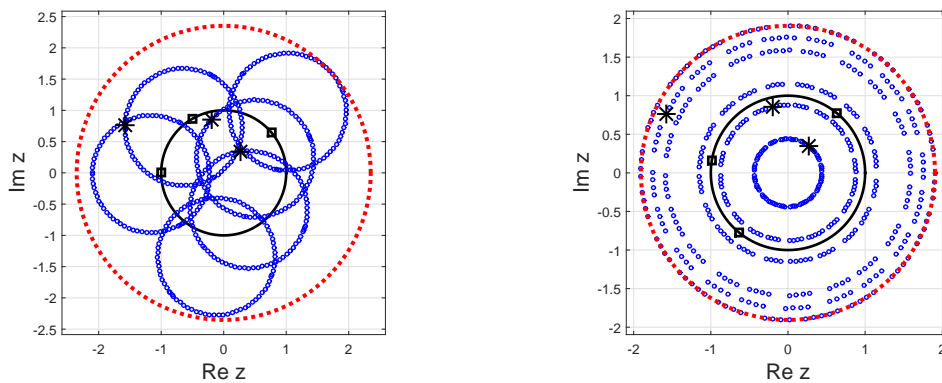


Figura 4.5: Orbita $\{w_n\}_{n=0}^\infty$, obținută din (4.5.2) pentru $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. (b1) $x_1 = 1/3$, $x_2 = \sqrt{5}/20$, $x_3 = 1/2$; (b2) $x_1 = \pi$, $x_2 = \pi + 1/3$, $x_3 = \pi + 1/3$. Condiții inițiale w_0, w_1, w_2 (stars), generatori z_1, z_2, z_3 (squares), $U(0, 1)$ (solid line), $U(0, |A_1| + |A_2| + |A_3|)$ (dotted line).

(c) Orbite stabile dense în curbe complexe unidimensionale

Orbitele pot fi dense în uniuni de curbe rotite ca în Fig. 4.6, sau în graficul unor curbe complexe. Închiderea acestor orbite poate fi:

- (c1) $x_1 \in \mathbb{Q}, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $x_3/x_2 \in \mathbb{Q}$: k_1 copii rotite ale unei curbe complexe;
- (c2) $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dar $x_2/x_1, x_3/x_1 \in \mathbb{Q}$: o curbă complexă de forma $f(z) = az + bz^p + cz^q$.

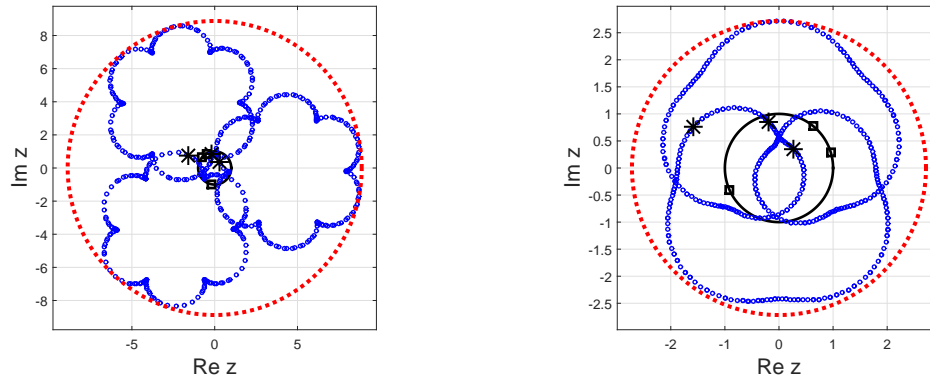


Figura 4.6: Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ densă în curbe 1D, dată de (4.5.2) pentru $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. (c1) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = e, x_3 = \frac{e}{7}$; (c2) $x_1 = \pi, x_2 = \frac{1}{3}\pi, x_3 = 4\pi$. Condiții inițiale w_0, w_1, w_2 (stars), generatori z_1, z_2, z_3 (squares), $U(0, 1)$ (solid line), $U(0, |A_1| + |A_2| + |A_3|)$ (dotted line).

(d) Orbite stabile în discuri bidimensionale

Dacă $1, x_1, x_2, x_3$ sunt linear independente peste \mathbb{Q} , orbita este densă în discul de rază $|A_1| + |A_2| + |A_3|$. Aceasta se întâmplă de obicei când se combină radicali, e sau π . Acest caz este ilustrat în Fig. 4.7.

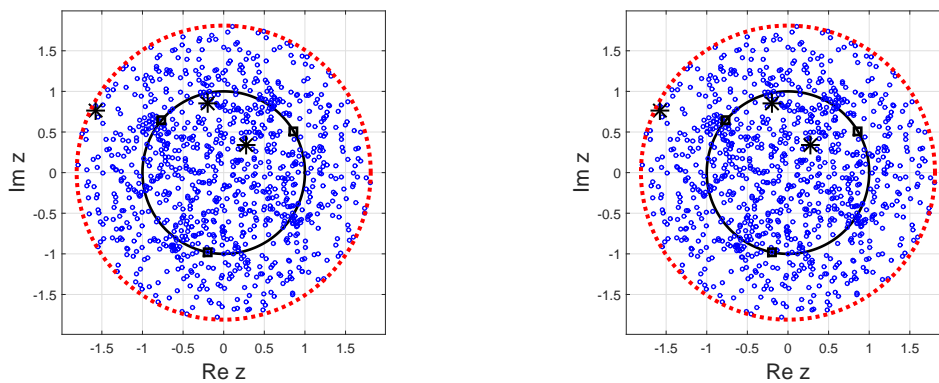


Figura 4.7: Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ densă în regiuni 2D, dată de (4.5.2) pentru $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. (d1) $x_1 = e, x_2 = e^2, x_3 = e^3$; (d2) $x_1 = \pi, x_2 = \pi^2, x_3 = \pi^3$. Condiții inițiale w_0, w_1, w_2 (stars), generatori z_1, z_2, z_3 (squares), $U(0, 1)$ (solid line), $U(0, |A_1| + |A_2| + |A_3|)$ (dotted line).

(e) Orbite stabile dense în regiuni bidimensionale: Reuniuni de inele

Dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cu $1, x_1, x_2$ linear independente peste \mathbb{Q} și $x_3 \in \mathbb{Q}$, orbita este o colecție de k_1 inele rotite în jurul originii. Această situație este ilustrată în Fig. 4.8 pentru 3, respectiv 4 inele.

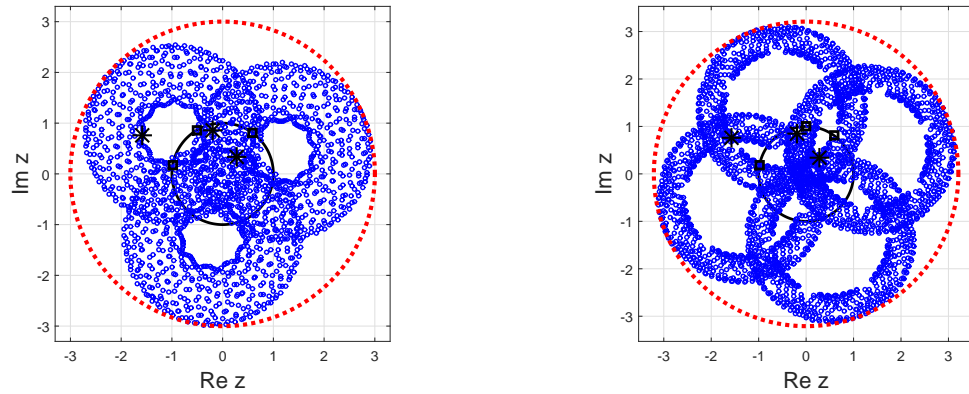


Figura 4.8: Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ densă în regiuni 2D, dată de (4.5.2) pentru $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. (e1) $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{5}}{15}, x_3 = \frac{1}{4}$; (e2) $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{5}}{15}, x_3 = \frac{1}{3}$. Condiții inițiale w_0, w_1, w_2 (stars), generatori z_1, z_2, z_3 (squares), $U(0, 1)$ (solid line), $U(0, |A_1| + |A_2| + |A_3|)$ (dotted line).

(f) Orbite stabile dense în regiuni bidimensionale: "Colaci"

Dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $1, x_1, x_3$ sunt linear dependente (de exemplu $x_3/x_1 \in \mathbb{Q}$), orbita se obține translătând un disc de-a lungul unei curbe unidimensionale. Acest caz este ilustrat în Fig. 4.9 pentru curbe cu 3, respectiv 5 lobi.

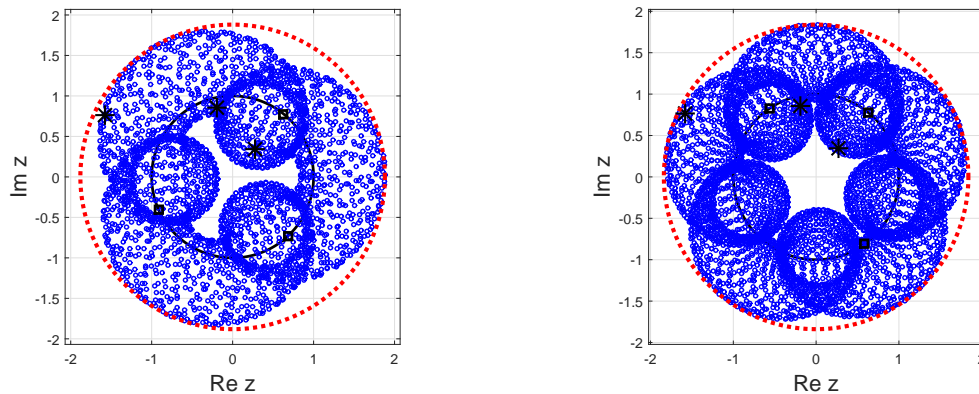


Figura 4.9: Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ densă în regiuni 2D, dată de (4.5.2) pentru $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. (f1) $x_1 = \pi, x_2 = \pi^2, x_3 = 3\pi$; (f2) $x_1 = \pi, x_2 = \pi^3/90, x_3 = 6\pi$. Condiții inițiale w_0, w_1, w_2 (stars), generatori z_1, z_2, z_3 (squares), $U(0, 1)$ (solid line), $U(0, |A_1| + |A_2| + |A_3|)$ (dotted line).

4.5.2 Orbite cvasi-convergente: $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_m = 1$

Aici una dintre componente dispare. Pentru simplitate avem $0 < r_1 < r_2 = r_3 = 1$.

(a) Mulțime finită de atractori

Când $x_2, x_3 \in \mathbb{Q}$ orbita are $\text{lcm}(k_2, k_3)$ puncte de atracție. Dacă $x_1 \in \mathbb{Q}$, sunt k_1 raze spre fiecare atractor, în timp ce pentru $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se obțin spirale (vezi Fig. 4.10).

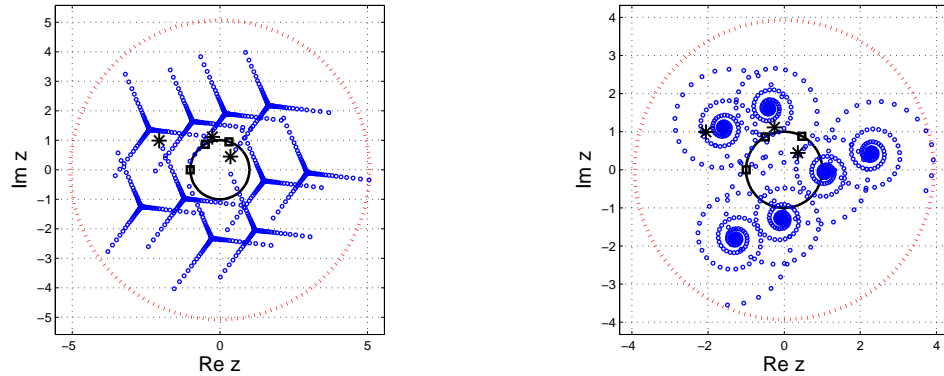


Figura 4.10: Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținută din (4.5.2) pentru $r_1 = .995, r_2 = r_3 = 1$ și (a1) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{5}$; (a2) $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{10}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{2}$. Condițiile inițiale w_0, w_1, w_2 (stars), generatorii z_1, z_2, z_3 (squares), $U(0, 1)$ (solid line), $U(0, |A_1| + |A_2| + |A_3|)$ (dotted line).

(b) Atractori unidimensionali: Cercuri

Când $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ închiderea orbitei poate fi reprezentată de cercuri. Dacă $x_2 - x_3 \in \mathbb{Q}$ se obțin cercuri concentrice, iar pentru $x_3 \in \mathbb{Q}$ se obțin k_3 cercuri rotite (vezi Fig. 4.11).

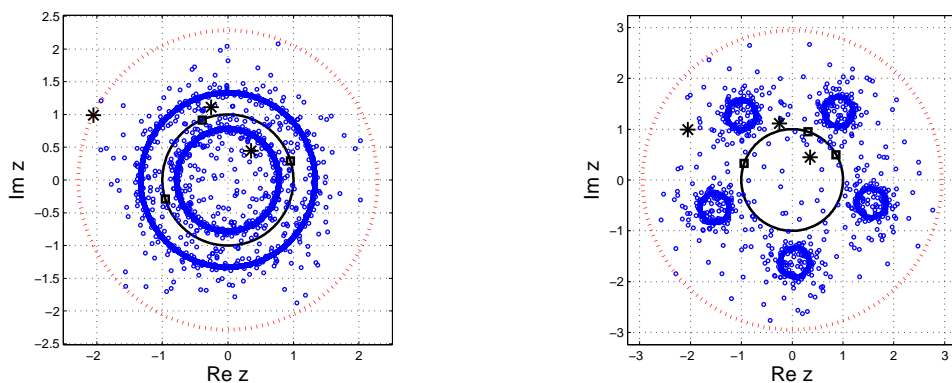


Figura 4.11: Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținută din (4.5.2) pentru $r_1 = .995, r_2 = r_3 = 1$ și (b1) $x_1 = \frac{\pi}{10}, x_2 = \frac{\pi}{3}, x_3 = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}$; (b2) $x_1 = \frac{1}{12}, x_2 = \frac{\sqrt{5}}{10}, x_3 = \frac{1}{5}$. Condiții inițiale w_0, w_1, w_2 (stars), generatori z_1, z_2, z_3 (squares), $U(0, 1)$ (solid line), $U(0, |A_1| + |A_2| + |A_3|)$ (dotted line).

(c) Atractori unidimensionali: Contururi

Când $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $x_3/x_2 = q \in \mathbb{Q}$, orbita este densă într-o curbă, care reprezintă graficul unei funcții $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ definite de $f(z) = A_2z + A_3z^q$. Detaliile acestui fapt sunt explicate în Teorema 3.2.1 (c2). Două exemple sunt arătate în Fig. 4.12.

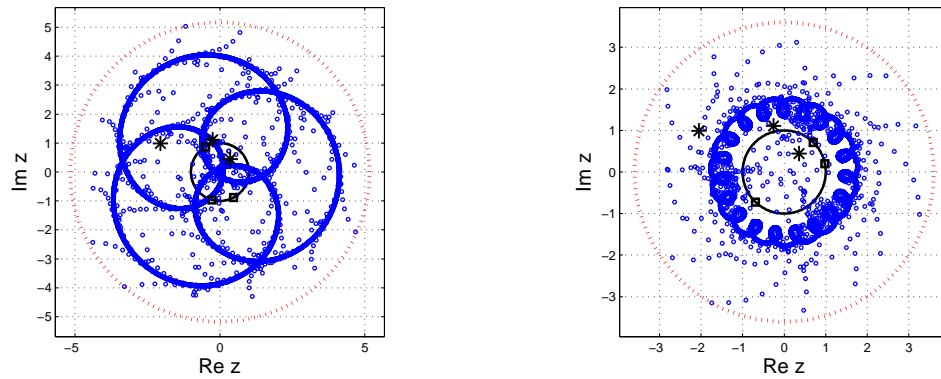


Figura 4.12: Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținută din (4.5.2) pentru $r_1 = .995, r_2 = r_3 = 1$ și (c1) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_3 = 4x_2$; (c2) $x_1 = \frac{\pi}{25}, x_2 = \frac{x_1}{4}, x_3 = 20x_2$. Condiții inițiale w_0, w_1, w_2 (stars), generatori z_1, z_2, z_3 (squares), $U(0, 1)$ (solid line), $U(0, |A_1| + |A_2| + |A_3|)$ (dotted line).

(d) Atractori bidimensionali: Inele

Când $1, x_2, x_3$ sunt linear independente peste \mathbb{Q} , închiderea orbitei este densă într-un inel. Această proprietate este ilustrată în Fig. 4.13, când 2000 (d1), sau 4000 (d2) termeni ai șirului sunt reprezentați.

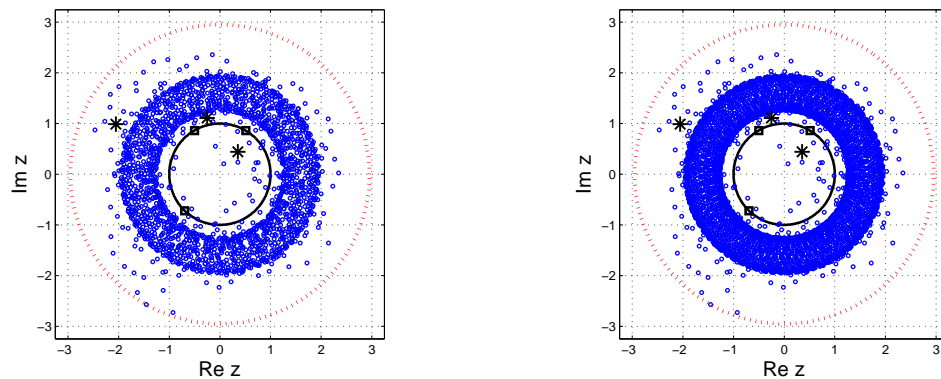


Figura 4.13: Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținută din (4.5.2) pentru $r_1 = .995, r_2 = r_3 = 1$ când avem $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{\exp(.5)}{10}, x_3 = \frac{\pi}{5}$ și considerăm (d1) 2000 termeni; (d2) 4000 termeni. Mai sunt reprezentate condițiile inițiale w_0, w_1, w_2 (stars), generatorii z_1, z_2, z_3 (squares), cercul $U(0, 1)$ (solid line), și cercul $U(0, |A_1| + |A_2| + |A_3|)$ (dotted line).

4.5.3 Orbite convergente: $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_m < 1$

În acest caz orbita are originea ca singur punct de atracție. Numeroase configurații sunt posibile, ca și în Capitolul 3. Două dintre ele sunt reprezentate în Fig. 4.14.

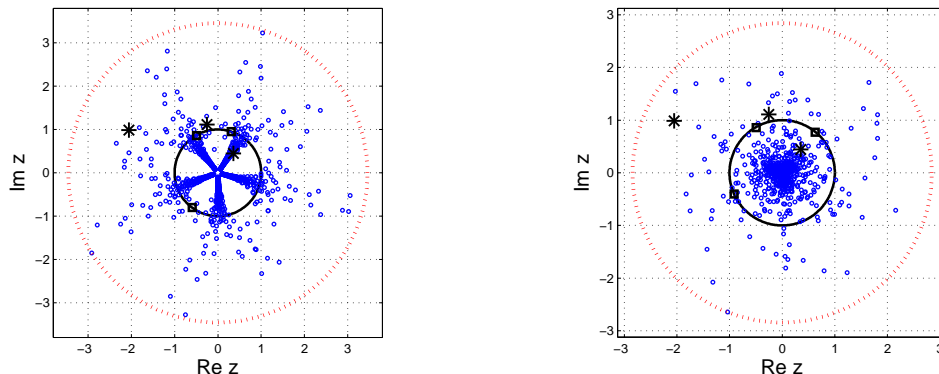


Figura 4.14: Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținută din (4.5.2) pentru $r_1 = .99, r_2 = .995$ and $r_3 = .997$. (a1) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{4}$; (a2) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \pi, x_3 = 4\pi$. Condiții inițiale w_0, w_1, w_2 (stars), generatori z_1, z_2, z_3 (squares), $U(0, 1)$ (solid line), $U(0, |A_1| + |A_2| + |A_3|)$ (dotted line).

4.5.4 Orbite divergente: $r_m > 1$

Aici orbitele diverg. După cum s-a văzut în Capitolul 3, numeroase orbite pot apărea.

(a) Raze divergente și spirale

Dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$, obținem raze ($x_3 \in \mathbb{Q}$) sau spirale divergente ($x_3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) (Fig. 4.15).

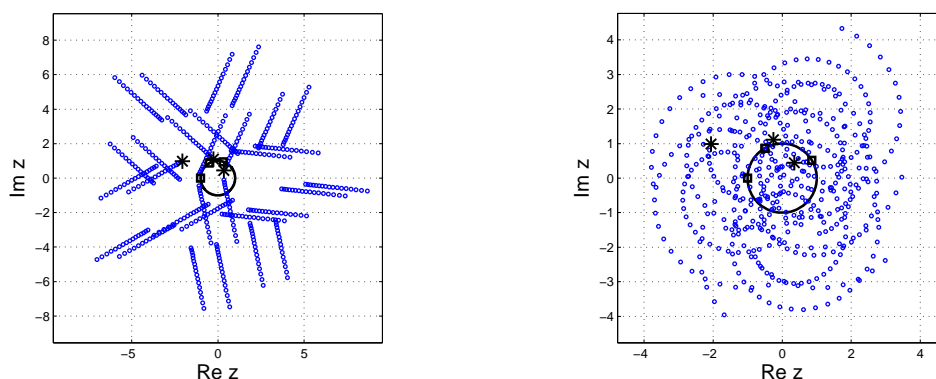


Figura 4.15: Orbita șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ obținută din (4.5.2) pentru $r_1 = r_2 = 1$ and $r_3 = 1.002$ și (a1) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{5}$; (a2) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = e^3$. Condiții inițiale w_0, w_1, w_2 (stars), generatori z_1, z_2, z_3 (squares), $U(0, 1)$ (solid line), $U(0, |A_1| + |A_2| + |A_3|)$ (dotted line).

(b) Orbite divergente generale

Alte exemple de orbite divergente sunt arătate în Fig. 4.16.

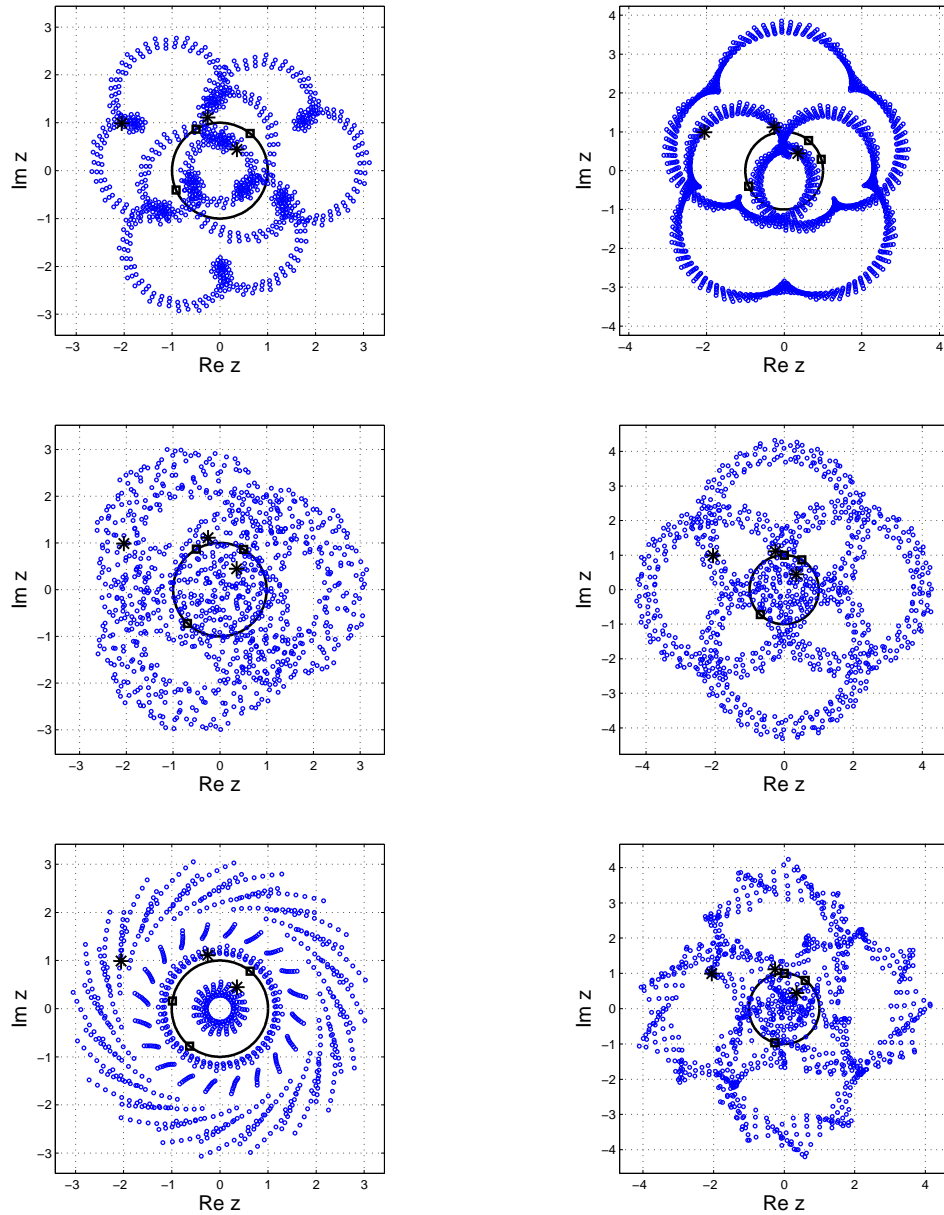


Figura 4.16: Orbite divergente ale șirului $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ (număr variat de termeni) obținute din (4.5.2) pentru $r_1 = r_2 = 1$ și $r_3 = 1.002$. Condiții inițiale w_0, w_1, w_2 (stars), generatori z_1, z_2, z_3 (squares), $U(0, 1)$ (solid line), $U(0, |A_1| + |A_2| + |A_3|)$ (dotted line).

Șiruri întregi folosite în enumerarea recurențelor liniare periodice

Enumerarea șirurilor Horadam periodice necesită numărarea tuplelor ordonate, crescătoare sau strict crescătoare, având același lcm. Funcții aritmetice care număra tuplele ordonate cu același lcm (și gcd), au fost investigate de Bagdasar în [15]. Studiul a dus la noi adății la baza de date a șirurilor întregi OEIS (A245019, A245020, A247513, A247516, A247517) în 2014, și la noi înțelesuri pentru șiruri existente.

5.1 Tuple ordonate cu același lcm și gcd

În această secțiune discutăm funcții aritmetice care număra tuplele de numere naturale având același cel mai mic multiplu comun și același cel mai mare divizor comun.

5.1.1 Tuple de numere naturale cu același lcm

Definiția 5.1.1. Numărul k -tupelor de numere naturale cu același lcm n este

$$\text{LCM}(n; k) = |\{(a_1, \dots, a_k) : \text{lcm}(a_1, \dots, a_k) = n\}|. \quad (5.1.1)$$

Teorema 5.1.2. Fie k și n numere naturale. Dacă n are factorizarea $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$, numărul de k -tuple ordonate al căror lcm este n definit în (5.1.1) este dat de formula

$$\text{LCM}(n; k) = \prod_{i=1}^r \left[(n_i + 1)^k - n_i^k \right]. \quad (5.1.2)$$

Observația 5.1.3. Pentru valori particulare ale lui k , se obține următoarele șiruri indexate în OEIS: A048691 pentru $\text{LCM}(n; 2)$ (cu numeroase interpretări), respectiv A070919, A070920, A070921 din $\text{LCM}(n; 3)$, $\text{LCM}(n; 4)$, $\text{LCM}(n; 5)$.

Următorul rezultat ilustrează independența lui $\text{LCM}(n; k)$ de factorii primi.

Corolarul 5.1.4. Fie $k \in \mathbb{N}$ și $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$, $m = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_r^{m_r}$, astfel încât unul sau toate numerele $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r$ sunt distincte. Atunci $\text{LCM}(m; k) = \text{LCM}(n; k)$.

O funcție aritmetică $f(n)$ definită pentru numere naturale n este numită

- *multiplicativă* dacă $f(1) = 1$ și pentru orice a și b coprime, avem $f(ab) = f(a)f(b)$.
- *complet multiplicativă* dacă $f(1) = 1$ și $f(ab) = f(a)f(b)$, chiar dacă a și b nu sunt coprime.

Observația 5.1.5. Fie a, b numere naturale și $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ o funcție aritmetică multiplicativă. Următoarea proprietate are loc:

$$f(\gcd(a, b)) \cdot f(\text{lcm}(a, b)) = f(a) \cdot f(b). \quad (5.1.3)$$

Corolarul 5.1.6. Fie m, n numere naturale care satisfac $(m, n) = 1$. Următoarea proprietate are loc:

$$\text{LCM}(m \cdot n; k) = \text{LCM}(m; k) \cdot \text{LCM}(n; k).$$

Corolarul 5.1.7. Fie numerele naturale a și b . Următoarea proprietate are loc:

$$\text{LCM}(\gcd(a, b); k) \cdot \text{LCM}(\text{lcm}(a, b); k) = \text{LCM}(a; k) \cdot \text{LCM}(b; k). \quad (5.1.4)$$

Teorema 5.1.8. Fie m, n și $k \geq 2$ numere naturale. Următoarea inegalitate are loc:

$$\text{LCM}(m \cdot n; k) \leq \text{LCM}(m; k) \cdot \text{LCM}(n; k). \quad (5.1.5)$$

Lema 5.1.9. Fie $k \geq 2$, p un număr prim și $\alpha, \beta \geq 1$ numere naturale. Atunci:

$$\text{LCM}(p^{\alpha+\beta}; k) \leq \text{LCM}(p^\alpha; k) \cdot \text{LCM}(p^\beta; k). \quad (5.1.6)$$

Observația 5.1.10. Funcția aritmetică $\text{LCM}(n; k)$ nu este complet multiplicativă. Într-adevar, pentru $p = 2$, $\alpha = \beta = 1$ se obține relația $3^k - 2^k < (2^k - 1^k)(2^k - 1^k)$, care este adevărată pentru toate valorile $k \geq 2$.

5.1.2 Tuple de numere naturale cu același lcm și gcd

Următoarea leamnă motivează rezultatele din această secțiune.

Lema 5.1.11. Fie $d < n$ numere naturale, astfel încât $d|n$. Numărul de perechi ordonate (a, b) care au cel mai mare divizor comun d și cel mai mic multiplu comun n este

$$|\{(a, b) : \gcd(a, b) = d, \text{lcm}(a, b) = n\}| = 2^{\omega(n/d)}.$$

unde $\omega(x)$ reprezintă numărul de divizori primi distincți ai numărului x .

Definiția 5.1.12. Numărul de k -tuple ordonate cu același gcd d și lcm n este

$$GL(d, n; k) = |\{(a_1, \dots, a_k) : \gcd(a_1, \dots, a_k) = d, \text{lcm}(a_1, \dots, a_k) = n\}|, \quad (5.1.7)$$

Lema 5.1.13. Fie k și $d|n$ numere naturale. Dacă $d = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_r^{d_r}$ și $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$, numărul de k -tuple ordonate al căror gcd este d , și lcm este n satisface proprietatea

$$GL(d, n; k) = GL(1, n/d; k). \quad (5.1.8)$$

Lema 5.1.14. Fie k și α numere naturale. Numărul tuplelor ordonate $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ care satisfac

$$T(\alpha; k) = |\{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) : \min(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0, \max(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \alpha\}|, \quad (5.1.9)$$

este dat de formula

$$T(\alpha; k) = (\alpha + 1)^k - 2\alpha^k + (\alpha - 1)^k. \quad (5.1.10)$$

Teorema 5.1.15. Fie k și n numere naturale. Dacă n are factorizarea $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$, numărul de k -tuple ordonate al căror gcd este 1 și lcm este n , este dat de formula

$$L(n; k) = \prod_{i=1}^r \left[(n_i + 1)^k - 2n_i^k + (n_i - 1)^k \right]. \quad (5.1.11)$$

Corolarul 5.1.16. Fie k un număr natural și $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$, $m = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_r^{m_r}$, astfel încât numerele $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r$ sunt distincte. Atunci $L(m; k) = L(n; k)$.

Următorul rezultat indică multiplicitatea funcției aritmetice $L(n; k)$ pentru $k \geq 2$.

Corolarul 5.1.17. Fie m, n numere naturale comprime și $k \geq 2$. Avem următoarea proprietate:

$$L(m \cdot n; k) = L(m; k) \cdot L(n; k).$$

Corolarul 5.1.18. Fie a, b numere naturale. Avem următoarea proprietate:

$$L(\gcd(a, b); k) \cdot L(\text{lcm}(a, b); k) = L(a; k) \cdot L(b; k).$$

Mai mult, funcția aritmetică $L(n; k)$ nu este complet multiplicativă.

Observația 5.1.19. Alegând $m = n = 2$ și $k \geq 2$, se obține relația

$$L(m \cdot n; k) = 3^k - 2 \cdot 2^k + 1 < (2^k - 2) \cdot (2^k - 2) = L(m; k) \cdot L(n; k).$$

Unele inegalități pentru $L(n; k)$ pot fi demonstrate pentru valori generale m și n .

Teorema 5.1.20. Fie m, n și $k \geq 2$ numere naturale. Următoare inegalitate are loc:

$$L(m \cdot n; k) \leq L(m; k) \cdot L(n; k).$$

5.2 Tuple monotone de numere naturale având același lcm

Pentru tuple crescătoare și strict crescătoare al căror lcm este n folosim notațiile

$$\text{LCM}^{\leq}(k, n) = |\{(a_1, \dots, a_k) : [a_1, \dots, a_k] = n, 1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k \leq n\}|; \quad (5.2.1)$$

$$\text{LCM}^{<}(k, n) = |\{(a_1, \dots, a_k) : [a_1, \dots, a_k] = n, 1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq n\}|. \quad (5.2.2)$$

În continuare stabilim legături între formulele de mai sus. Principalul scop este să calculăm LCM^{\leq} și $\text{LCM}^{<}$ folosind combinații liniare care implică LCM . Pentru $k, n \geq 2$ matricile $k \times n$ care corespund la LCM , $\text{LCM}^{<}$ și LCM^{\leq} , sunt notate cu \mathcal{L} , $\mathcal{L}^{<}$ și \mathcal{L}^{\leq} . De asemenea, matricile de tranziție $k \times k$ vor fi notate cu $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$.

$$\mathcal{L}^{<}(k, n) = \mathcal{M}(k, :) \cdot \mathcal{L}(:, n); \quad (5.2.3)$$

$$\mathcal{L}^{\leq}(k, n) = \mathcal{N}(k, :) \cdot \mathcal{L}(:, n); \quad (5.2.4)$$

$$\mathcal{L}^{\leq}(k, n) = \mathcal{P}(k, :) \cdot \mathcal{L}^{<}(:, n); \quad (5.2.5)$$

$$\mathcal{L}(k, n) = \mathcal{Q}(k, :) \cdot \mathcal{L}^{<}(:, n); \quad (5.2.6)$$

$$\mathcal{L}(k, n) = \mathcal{R}(k, :) \cdot \mathcal{L}^{\leq}(:, n). \quad (5.2.7)$$

Vom arăta că matricile \mathcal{P} și \mathcal{Q} sunt inversabile și că următoarele identități au loc:

$$\mathcal{N} = \mathcal{P}\mathcal{M}, \quad \mathcal{M} = \mathcal{Q}^{-1}, \quad \mathcal{R} = \mathcal{Q}\mathcal{P}^{-1}. \quad (5.2.8)$$

5.2.1 $\text{LCM}(k; n)$, $\text{LCM}^{<}(k; n)$ și $\text{LCM}^{\leq}(k; n)$ pentru $k = 3$

Un triplet constând din numerele $1 \leq a_1, a_2, a_3 \leq n$ cu $[a_1, a_2, a_3] = n$ poate fi

- (1) (toate egale): Singurul triplet în care $a_1 = a_2 = a_3$ și $[a_1, a_2, a_3] = n$ este (n, n, n) ;
- (2) (două egale): O pereche $a_1 < a_2$ cu $[a_1, a_2] = n$ produce tripletele crescătoare (a_1, a_1, a_2) , (a_1, a_2, a_2) , și tripletele ordonate (a_1, a_2, a_1) , (a_2, a_1, a_1) , (a_2, a_1, a_2) , (a_2, a_2, a_1) ;
- (3) (toate distincte): Any triplet $a_1 < a_2 < a_3$ produce șase triplete ordonate.

Se obțin următoarele relații

$$\text{LCM}^{\leq}(n; 3) = 1 + 2 \cdot \text{LCM}^{<}(2, n) + \text{LCM}^{<}(3, n); \quad (5.2.9)$$

$$\text{LCM}(3, n) = 1 + 6 \cdot \text{LCM}^{<}(2, n) + 6 \cdot \text{LCM}^{<}(3, n). \quad (5.2.10)$$

Rescriind (5.2.10) pentru $\text{LCM}^{<}(3, n)$ și folosind rezultatele pentru $m = 2$, obținem

$$\text{LCM}^{<}(3, n) = \frac{\text{LCM}(3, n) - 3 \cdot \text{LCM}(2, n) + 2}{6};$$

$$\text{LCM}^{\leq}(3, n) = \frac{\text{LCM}(3, n) + 3 \cdot \text{LCM}(2, n) + 2}{6}.$$

5.2.2 Coeficienții recurențelor

Aici discutăm coeficienții care leagă LCM , $\text{LCM}^<$ și LCM^\leq .

Legătura dintre LCM^\leq și $\text{LCM}^<$

Pentru un n fixat, matricea $\mathcal{P}(k, j)$ ($1 \leq k, j \leq n$) din (5.2.5) este dată de

$$\mathcal{P}(k, j) = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1}, & k \geq j \\ 0, & k < j. \end{cases}$$

Legătura dintre LCM și $\text{LCM}^<$

Pentru un n fixat, matricea $\mathcal{Q}(k, j)$ ($1 \leq k, j \leq n$) din (5.2.7) este dată de

$$\mathcal{Q}(k, j) = \begin{cases} j!S(k, j), & k \geq j \\ 0, & k < j. \end{cases}$$

unde $S(k, j)$ sunt numerele Stirling de al doilea gen discutate în Capitolul 1.

Matricile de transformare \mathcal{R} , \mathcal{M} and \mathcal{N}

Din (5.2.8), matricile \mathcal{P} și \mathcal{Q} erau suficiente pentru a calcula \mathcal{R} , \mathcal{M} and \mathcal{N} . Acestea vor permite calcularea matricilor care corespund la LCM^\leq și $\text{LCM}^<$.

Teorema 5.2.1. *Următoarele identități au loc pentru $K \geq 2$ și $1 \leq j, k \leq K$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(k, j) &= (-1)^{k+j} \mathcal{Q} \\ \mathcal{M}(k, j) &= (-1)^{k+j} \mathcal{N}. \end{aligned}$$

5.3 Noi contribuții la enciclopedia de șiruri întregi OEIS

Noi șiruri obținute din $T(k, n)$ și $L(n, k)$

A245019: $T(4, n) = 5^n - 2 \cdot 4^n + 3^n.$

A245020: $T(5, n) = 6^n - 2 \cdot 5^n + 4^n.$

A247513: $L(3, n) = 6^{\omega(n)} \prod_{i=1}^r n_i.$

A247516: $L(4, n) = 2^{\omega(n)} \prod_{i=1}^r [6n_i^2 + 1].$

A247517: $L(5, n) = 10^{\omega(n)} \prod_{i=1}^r [2n_i^3 + n_i].$

Înțelesuri noi pentru șiruri vechi

Rezultatele din [15] au contribuit cu noi înțelesuri pentru următoarele șiruri OEIS:

A000918: $T(n, 1) = 2^n - 2$ (nr de submulțimi proprii al unei mulțimi cu n elemente)

A028243: $T(n, 2) = 3^n - 2^{n+1} + 1$ (numere Stirling de genul doi).

A008588: $T(3, n)$.

A038721: $T(3, n + 1)$.

A005914: $T(4, n) = 12n^2 + 2$ (nr de puncte de pe suprafața unei prisme hexagonale).

A068236: $T(5, n) = 20n^3 + 10n$.

A101098: $T(5, n + 1)$.

A048091: $\text{LCM}(2, n)$

A070919: $\text{LCM}(3, n)$

A070920: $\text{LCM}(4, n)$

A070921: $\text{LCM}(5, n)$

A102309: Rezultatele noastre au evidențiat primul context enumerativ. Într-adevăr, $a(n - 1)$ este numărul de orbite periodice Horadam de lungime n , pentru $n > 2$ [19].

Contribuții la OEIS din Secțiunea 5.2:

A063647: $\mathcal{L}^<(2, n)$. O interpretare a acestui șir este numărul de moduri în care $1/n$ se scrie ca suma a exact două fracții unitare distincte.

A086165: $\mathcal{L}^<(3, n)$

Axxxxxx: $\mathcal{L}^<(4, n)$ - neindexat în prezent.

A018892: $\mathcal{L}^{\leq}(2, n)$ numărul de scrieri ale lui $1/n$ ca suma a două fracții unitare.

A086222: $\mathcal{L}^{\leq}(3, n)$

Axxxxxx: $\mathcal{L}^{\leq}(4, n)$ - neindexat în prezent.

A008778: $\mathcal{L}^{\leq}(n, 6)$ - al patrulea rând din A022818.

A000292: $\mathcal{L}^{\leq}(n, 8)$ - numere tetraedrale $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) / 6$

Axxxxxx: $\mathcal{L}^{\leq}(n, 12)$ - neindexat în prezent

Apendice

O legătură între această teză și profesorul Horadam - extras din [77]

Prezentăm aici câteva detalii ale corespondenței dintre autorii lucrării de sinteză privind șirurile Horadam și Profesorul AF Horadam însuși [77].

O Dedicatie pentru Profesorul A.F. Horadam

În prima parte a lunii aprilie 2012, autorul P.J.L. a trimis o versiune în lucru a articolului [77] profesorului AG Shannon - prieten apropiat și de lungă durată al profesorului AF Horadam, cu care cel dintâi a colaborat profesional. La scurt timp după aceasta, profesorul Shannon, aflat într-o vizită pre-stabilită la Armidale (New South Wales, Australia), a luat cu el de la Sydney o copie a lucrării, citindu-o profesorului Horadam, a cărui stare de sănătate este precară de un număr de ani. Mulțumirile noastre sincere se adresează profesorului Shannon, care ne-a transmis următoarele comentarii direct din partea profesorului Horadam:

“Sunt foarte flatat de tonul lucrării . . . [care este] cuprinzătoare și detaliată, oferind o perspectivă aprofundată asupra istoriei șirului.”

Suntem încântați de a fi primit susținerea personală a profesorului Horadam și am dori să îi dedicăm prezenta lucrare în semn de recunoaștere atât a muncii depuse pe șirurile Horadam, precum și a motivației pe care a inoculat-o în alții—incluzându-ne aici și pe noi—de a continua studiul.

P.J.L.

O.D.B.

E.J.F.

Bibliografie

- [1] Albertson, M. O., Hutchinson, J. P., *Discrete Mathematics with Algorithms*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [2] Alter, R., Kubota, K. K., *Multiplicities of second order linear recurrences*, Trans. Amer. Math. Soc., **178** (1973), 271–284.
- [3] André-Jeannin, R., *Summation of reciprocals in certain second-order recurring sequences*, Fibonacci Quart., **35(1)** (1997), 68–74.
- [4] Andreescu, T., Andrica, D., *Number Theory. Structures, Examples, and Problems*, Birkhauser Verlag, Boston-Berlin-Basel, 2009.
- [5] Andreescu, T., Andrica, D., *Complex Numbers from A to ... Z*, 2nd ed., Birkhauser, Boston, 2014.
- [6] Andreescu, T., Andrica, D., *Quadratic Diophantine Equations*, Developments in Mathematics, Springer, 2015.
- [7] Andreescu, T., Zuming, F., *A Path To Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Birkhauser, 2004.
- [8] Andrica, D., Buzeteanu, Ș., *Reducerea unei recurențe liniare de ordinul doi și consecințe ale acesteia*, G.M. perfecționare metodică și metodologică în matematică și informatică, **3-4** (1982), 148–152 (Romanian).
- [9] Andrica, D., Buzeteanu, Ș., *On the reduction of the linear recurrence of order r* , Fibonacci Quart., **21(1)** (1985), 81–84.
- [10] Andrica, D., Buzeteanu, Ș., *Relatively dense universal sequences for the class of continuous periodical functions of period T* , Mathematica-L'Analyse Numérique et la Théorie de l'Approximation **16** (1987), 1–9.

- [11] Andrica, D., Toader, Gh., *On systems of linear recurrences*, Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, "Babeş-Bolyai" University, Cluj-Napoca, Preprint Nr. 7 (1986), 5–12.
- [12] Andrica, D., Toader, Gh., *On homographic recurrences*, Seminar on Mathematical Analysis, "Babeş-Bolyai" University, Cluj-Napoca, Preprint Nr. 4 (1986), 55–60.
- [13] Apostol, T. M., *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, New York, 1976.
- [14] Bagdasar, O., *Concise Computer Mathematics: Tutorials on Theory and Problems*, SpringerBriefs in Computer Science, Springer, 2013.
- [15] Bagdasar, O., *On some functions involving the lcm and gcd of integer tuples*, Appl. Maths. Inform. and Mech., **6(2)** (2014), 91–100.
- [16] Bagdasar, O., *An atlas of Horadam patterns* (submitted).
- [17] Bagdasar, O., Chen, M., *A Horadam-based Pseudo-random Number Generator*, Proceedings of 16th UKSim, Cambridge (2014), 226–230.
- [18] Bagdasar, O., Larcombe, P. J., *On the characterization of periodic complex Horadam sequences*, Fibonacci Quart., **51(1)** (2013), 28–37.
- [19] Bagdasar, O., Larcombe, P. J., *On the number of complex periodic complex Horadam sequences*, Fibonacci Quart., **51(4)** (2013), 339–347.
- [20] Bagdasar, O., Larcombe, P. J., *On the characterization of periodic generalized Horadam sequences*, J. Differ. Equ. Appl., **20(7)** (2014), 1069–1090.
- [21] Bagdasar, O., Larcombe, P. J., Anjum, A., *Particular Orbits of Periodic Horadam Sequences*, Octagon Math. Mag., **21(1)**, (2013), 87–98.
- [22] Bagdasar, O., Larcombe, P. J., Anjum, A., *On the structure of periodic complex Horadam sequences*, Carpathian J. Math. (to appear).
- [23] Bagdasar, O., Popovici, N., *Local maximum points of explicitly quasiconvex functions*, Optim. Lett. **9** (2015), 769–777.
- [24] Berstel, J., Mignotte, M., *Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires*, Bull. Soc. Math. France, **104** (1976), 175–184.
- [25] Berstel, J., Perrin, D., *The origins of combinatorics on words*, European J. Combin., **28** (2007), 996–1022.

- [26] Branson, D., *Stirling numbers and Bell numbers: their role in combinatorics and probability*, *Math. Sci.*, **25** (2000), 1–31.
- [27] Buschman, R. G., *Fibonacci numbers, Chebyshev polynomials generalizations and difference equations*, *Fibonacci Quart.*, **1(4)** (1963), 1–7.
- [28] Carlitz, L., *Generating functions for powers of certain sequences of numbers*, *Duke Math. J.*, **29** (1962), 521–537.
- [29] Carlitz, L., *Some determinants containing powers of Fibonacci numbers*, *Fibonacci Quart.*, **4(2)** (1966), 129–134.
- [30] Carson, T. R., *Periodic recurrence relations and continued fractions*, *Fibonacci Quart.*, **45(4)** (2007), 357–361.
- [31] Clapperton, J. A., Larcombe, P. J., Fennessey, E. J., *On iterated generated functions for integer sequences*, *Utilitas Mathematica*, **77** (2008), 3–33.
- [32] Cobzaş, Ş., *Analiză Matematică (Calculul diferenţial)*, Cluj University Press, Cluj Napoca, 1997 (Romanian).
- [33] Coxeter, H. S. M., *Introduction to Geometry*, Second Edition, New York Wiley, Second Edition, 1969.
- [34] Coxeter, H. S. M., *Regular polytopes*, Courier Corporation, 321 pp, 1973.
- [35] Crandall, R., Pomerance, C., *Prime Numbers: A Computational Perspective*, Springer, New York, 2001.
- [36] de Kerf, J., *From Fibonacci to Horadam*, *Vector*, **15** (1999), 122–130.
- [37] Dragomir, S. S., *Advances in Inequalities of the Schwarz, Triangle and Heisenberg Type in Inner Product Spaces*, Nova Science Publishers, New York, 2007.
- [38] Everest, G., van der Poorten, A., Shparlinski, I., Ward, T., *Recurrence Sequences*, *Mathematical Surveys and Monographs*, Vol. 104, American Mathematical Society, Providence, U.S.A., 2003.
- [39] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, Vol. 1, 3rd ed., 1968.
- [40] Finch, S. R., *Mathematical Constants*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2003.

- [41] Fredman, M. L., Tarjan, R. E., *Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms*, Journal Assoc. Comput. Mach. **34(3)** (1987), 596–615.
- [42] Gelca, R., Andreescu, T., *Putnam and Beyond*, Springer, 2007.
- [43] Gologan, R., *Aplicații ale teoriei ergodice*, Editura Tehnică, 1989 (Romanian).
- [44] Gould, H. W., Quaintance, J., *Products of numbers which obey a Fibonacci-type recurrence*, Fibonacci Quart., **45** (2007), 337–346.
- [45] Halava, V., Harju, T., Hirvensalo, M., *Positivity of Second Order Linear Recurrent Sequences*, T.U.C.S. Tech. Rep. No. 685, Turku Centre for Computer Science, University of Turku, Finland, 2005.
- [46] Hardy, G. H., Wright, E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, Oxford, 5th ed., 1979.
- [47] Haukkanen, P., *A note on Horadam's sequence*, Fibonacci Quart., **40** (2002), 358–361.
- [48] He, T.-X., Shiue, P.J.-S., *On sequences of numbers and polynomials defined by linear recurrence relations of order 2*, Int. J. Math. Math. Sci., **2009** (2009), Article I.D. No. 709386, 21pp.
- [49] Hellekalek, P., *Good random number generators are (not so) easy to find*, Mathematics and Computers in Simulation, **46** (1998), 485–505.
- [50] Hilton, A. J. W., *On the partition of Horadam's generalized sequences into generalized Fibonacci and generalized Lucas sequences*, Fibonacci Quart., **12(4)** (1974), 339–345.
- [51] Hoffman, A. J., Wolfe, P., *Minimizing a unimodal function of two integer variables*, Mathematical Programming Studies, Vol. 25 (1985), 76–87.
- [52] Horadam, A. F., *A generalized Fibonacci sequence*, Amer. Math. Month., **68** (1961), 455–459.
- [53] Horadam, A. F., *Basic properties of a certain generalized sequence of numbers*, Fibonacci Quart., **3(3)** (1965), 161–176.
- [54] Horadam, A. F., *Generating functions for powers of a certain generalised sequence of numbers*, Duke Math. J., **32** (1965), 437–446.
- [55] Horadam, A. F., *Special properties of the sequence $w_n(a, b; p, q)$* , Fibonacci Quart., **5(5)** (1967), 424–434.

- [56] Horadam, A. F., *Tschebyscheff and other functions associated with the sequence $\{w_n(a, b; p, q)\}$* , *Fibonacci Quart.*, **7(1)** (1969), 14–22.
- [57] Horadam, A. F., *Elliptic functions and Lambert series in the summation of reciprocals in certain recurrence-generated sequences*, *Fibonacci Quart.*, **26(2)** (1988), 98–114.
- [58] Horadam, A. F., *Associated sequences of general order*, *Fibonacci Quart.*, **31(2)** (1993), 166–172.
- [59] Horadam, A. F., *A synthesis of certain polynomial sequences*, in Bergum, G. E., Philippou, A. N. and Horadam, A. F. (Eds.), *Applications of Fibonacci numbers* (Vol. 6) (1996), Kluwer, Dordrecht, Netherlands, 215–229.
- [60] Horadam, A. F., *Extension of a synthesis for a class of polynomial sequences*, *Fibonacci Quart.*, **34(1)** (1996), 68–74.
- [61] Horadam, A. F., Shannon, A. G., *Generalization of identities of Catalan and others*, *Port. Math.*, **44** (1987), 137–148.
- [62] Horzum, T., Kocer, E. G., *On some properties of Horadam polynomials*, *Int. Math. Forum*, **4** (2009), 1243–1252.
- [63] Hu, H., Sun, Z.-W., Liu, J.-X., *Reciprocal sums of second-order recurrent sequences*, *Fibonacci Quart.*, **39(3)** (2001), 214–220.
- [64] Ivanov, N. V., *Linear Recurrences*, preprint, <http://www.mth.msu.edu/~ivanov/Recurrence.pdf> (2008).
- [65] Jeske, J. A., *Linear recurrence relations - part i*, *Fibonacci Quart.* **1(2)** (1963), 69–74.
- [66] Kiefer, J., *Sequential minimax search for a maximum*, *P. Am. Math. Soc.* **4** (1953), 502–506.
- [67] Kiliç, E., Tan, E., *More general identities involving the terms of $\{W_n(a, b; p, q)\}$* , *Ars Comb.*, **93** (2009), 459–461.
- [68] Kiliç, E., Tan, E., *On binomial sums for the general second order linear recurrence*, *Integers: Elec. J. Comb. Num. Theory*, **10** (2010), 801–806.
- [69] Kiliç, E., Ulutaş, Y. T., Ömür, N., *A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence with two additional parameters*, *J. Int. Seq.*, **14** (2011), Art. 11.5.6, 8pp.
- [70] Kiliç, E., Stănică, P., *Factorizations and representations of binary polynomial recurrences by matrix methods*, *Rocky Mount. J. Math.*, **41** (2011), 1247–1264.

- [71] Knopfmacher, A., Tichy, R. F., Wagner, S., Ziegler, V., *Graphs, partitions and Fibonacci numbers*, Discrete Appl. Math. **155** (2007), 1175 – 1187.
- [72] Knuth, D. E., *Two Notes on Notation*, Amer. Math. Month. **99(5)** (1992), 403–422.
- [73] Knuth, D. E., *The Art of Computer Programming*, Vol. 3, Addison Wesley, 2nd ed., 2003.
- [74] Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, 2001.
- [75] Koshy, T., *Pell and Pell–Lucas Numbers with Applications*, Springer-Verlag, New York, 2014.
- [76] Laohakosol, V., Kuhapatanakul, K., *Reciprocal sums of generalized second order recurrence sequences*, Fibonacci Quart., **46/47(4)** (2009), 316–325.
- [77] Larcombe, P. J., Bagdasar, O., Fennessey, E. J., *Horadam sequences: a survey*, Bull. Inst. Combin. Appl, **67** (2013), 49–72.
- [78] Larcombe, P. J., Bagdasar, O., Fennessey, E. J., *On a result of Bunder involving Horadam sequences: A proof and generalization*, Fibonacci Quart., **51(2)** (2013), 174–176.
- [79] Larcombe, P. J., Bagdasar, O., Fennessey, E. J., *On a result of bunder involving Horadam sequences: a new proof*, Fibonacci Quart., **52(2)** (2014), 175–177.
- [80] Larcombe, P. J., Fennessey, E. J., *On cyclicity and density of some Catalan polynomial series*, Bull. Inst. Combin. Appl, **71** (2014), 87–93.
- [81] Larcombe, P. J., Fennessey, E. J., *On Horadam Sequence Periodicity: A New Approach*, Bull. Inst. Combin. Appl, **73** (2015), 98–120.
- [82] Larcombe, P. J., Fennessey, E. J., *On the phenomenon of Masked Periodic Horadam Sequences*, Utilitas Mathematica, **96** (2015), 111–123.
- [83] Latapy, M., Phan, T. H. D., Crespelle, C., Nguyen, T. Q., *Termination of Multipartite Graph Series Arising from Complex Network Modelling*, in Combinatorial Optimization and Applications, Lecture Notes in Computer Science, **6508** (2010), 1–10.
- [84] Lee, J. Z, Lee, J. S., *Some properties of the sequence $\{W_n(a, b; p, q)\}$* , Fibonacci Quart., **25(3)** (1987), 268–278 & p.283.
- [85] Lupsa, L., Popovici, N., *Generalized unimodal multicriteria optimization problems*, Rev. Anal. Numer. Theor. Approx., **35** (2006), 65–70.

- [86] Mansour, T., *A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence*, Aust. J. Comb., **30** (2004), 207–212.
- [87] Melham, R. S., *Summation of reciprocals which involve products of terms from generalized Fibonacci sequences*, Fibonacci Quart., **38(4)** (2000), 294–298.
- [88] Melham, R. S., *Summation of reciprocals which involve products of terms from generalized Fibonacci sequences—part ii*, Fibonacci Quart., **39(3)** (2001), 264–267.
- [89] Melham, R. S., Shannon, A. G., *Some congruence properties of generalized second-order integer sequences*, Fibonacci Quart., **32(5)** (1994), 424–428.
- [90] Melham, R. S., Shannon, A. G., *A generalization of the Catalan identity and some consequences*, Fibonacci Quart., **33(1)** (1995), 82–84.
- [91] Mező, I., *Several generating functions for second-order recurrence sequences*, J. Int. Seq., **12** (2009), Art. 09.3.7, 16pp.
- [92] Mitrinovic, D. S., Sándor, J., Crstici, B., *Handbook of Number Theory*, Kluwer, Dordrecht, Netherlands, (1995).
- [93] Morgado, J., *Note on some results of A.F. Horadam and A.G. Shannon concerning a Catalan's identity on Fibonacci numbers*, Port. Math., **44** (1987), 243–252.
- [94] Muir, T., *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, Vol. 1, Dover, New York, 1960.
- [95] Newell, A. C., Pennybacker, M., *Fibonacci patterns: common or rare?*, Procedia IU-TAM **9** (2013), 86–109.
- [96] Noonea, C. J., Torrilhonb, M., Mitsosa, A., *Heliostat field optimization: A new computationally efficient model and biomimetic layout*, Solar Energy, **86(2)** (2012), 792–803.
- [97] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <https://oeis.org>, OEIS Foundation Inc. (2011).
- [98] Oohama, Y., *Performance analysis of the internal algorithm for random number generation based on number systems*, IEEE Trans. on Information Theory, **57(3)** (2011), 1177–1185.
- [99] Ouaknine, J., Worrell, J., *Ultimate Positivity is decidable for simple linear recurrence sequences*, CoRR, abs/1309.1914, 2013.

- [100] Ouaknine, J., Worrell, J., *On the Positivity Problem for simple linear recurrence sequences*, Proc. of ICALP'14. CoRR, abs/1309.1550.
- [101] Ouaknine, J., Worrell, J., *Positivity problems for low-order linear recurrence sequences*, Proc. SODA'14. ACM-SIAM.
- [102] Panneton, F., L'Ecuyer, P., Matsumoto, M., *Improved Long-Period Generators Based on Linear Recurrences Modulo 2*, ACM T Math Software, **32** (2006), 1–16.
- [103] Prudyus, I., Sumyk, M., *Multiphase signals based on recurrent sequences of maximal length*, Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (2004), 360–362.
- [104] Rabinowitz, S., *Algorithmic manipulation of second-order linear recurrences*, Fibonacci Quart., **37(2)** (1999), 162–177.
- [105] Reiter, C. A., *Exact Horadam numbers with a Chebyshevish accent*, Vector, **16** (1999), 122–131.
- [106] Robinson, D. W., *The rank and period of a linear recurrent sequence over a ring*, Fibonacci Quart., **14(3)** (1976), 210–214.
- [107] Sasu, B., Sasu, S. L., *Sisteme dinamice discrete*, Editura Politehnică, Timișoara, 2013 (Romanian).
- [108] Shannon, A. G., *Generalized Fibonacci numbers as elements of ideals*, Fibonacci Quart., **17(4)** (1979), 347–349.
- [109] Shannon, A. G., *A generalization of Hilton's partition of Horadam's sequences*, Fibonacci Quart., **17(4)** (1979), 349–357.
- [110] Shannon, A. G., Horadam, A. F., *Some properties of third-order recurrence relations*, Fibonacci Quart., **10(2)** (1972), 135–145.
- [111] Shannon, A. G., Horadam, A. F., *Special recurrence relations associated with the sequence $\{w_n(a, b; p, q)\}$* , Fibonacci Quart., **17(4)** (1979), 294–299.
- [112] Sharp, H., *Cardinality of finite topologies*, J. Combin. Theory, **5** (1968), 82–86.
- [113] Sitaramachandra, R. R., Suryanabayana, D., *The number of pairs of integers with $L.C.M. \leq x$* , Arch. Math., **21** (1970), 490–497.
- [114] Stănică, P., *Generating functions, weighted and non-weighted sums for powers of second-order recurrence sequences*, Fibonacci Quart., **41(4)** (2003), 321–333.

- [115] Stewart, I., *Mathematics of life*, Basic Books, New York, 2011.
- [116] Udrea, G., *A note on the sequence $(W_n)_{n \geq 0}$ of A.F. Horadam*, Port. Math., **53** (1996), 143–155.
- [117] Vălcan, D., Bagdasar, O., *Generalizations of some divisibility relations in \mathbb{N}* , Creative Math. & Inf., **18(1)** (2009), 92–99.
- [118] Vince, A., *Period of a linear recurrence*, Acta Arithmetica **39** (1981), 303–311.
- [119] Vogel, H., *A better way to construct the sunflower head*, Mathem. Biosci. **44** (1979), 179–189.
- [120] Vorobiev, N. N., *Fibonacci numbers*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, 2002.
- [121] Weyl, H., *Über die gleichverteilung von zahlen mod. eins*, Mathematische Annalen **77(3)** (1916), 313–352.
- [122] Wunsch, D. A., *Complex Variables with Applications*, Pearson, Third Edition, 2004.
- [123] Yang, W. C., *Derivatives are essentially integer partitions*, Discrete Mathematics, **222** (2000), 235–245.
- [124] Yazlik, Y., Taskara, N., *A note on generalized k -Horadam sequence*, Comp. Math. Appl., **63** (2012), 36–41.
- [125] Zeitlin, D., *Generating functions for products of recursive sequences*, Trans. Amer. Math. Soc., **116** (1965), 300–315.
- [126] Zeitlin, D., *Power identities for sequences defined by $W_{n+2} = dW_{n+1} - cW_n$* , Fibonacci Quart., **3(4)** (1965), 241–256.
- [127] Zeitlin, D., *On determinants whose elements are products of recursive sequences*, Fibonacci Quart., **8(4)** (1970), 350–359.
- [128] Zeitlin, D., *General identities for recurrent sequences of order two*, Fibonacci Quart., **9(4)** (1971), 357–388.
- [129] Zhang, W., *Some identities involving the Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart., **35(3)** (1997), 225–229.
- [130] Zhang, Z., *Some identities involving generalized second-order integer sequences*, Fibonacci Quart., **35(3)** (1997), 265–268.
- [131] Zhang, Z., Liu, M., *Generalizations of some identities involving generalized second-order integer sequences*, Fibonacci Quart., **36(4)** (1998), 327–328.